Université de Gabès, Faculté des Sciences de Gabès.

Départements de Mathématiques.

Algèbre II Lfma2

2015-2016

présenté par

Hedi Regeiba

Faculté des Sciences de Gabès, cité Erriadh 6072 Zrig Gabès Tunisie.

Contents

Chapter 1

Formes bilinéaires symetriques. Formes quadratiques.

1.1 Formes bilinéaires.

1.1.1 Généralites.

Définition 1.1.1. *Soit E un R-e-v et* $f: \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ *une application, on dit que f est une forme bilinéaire si les applications* $f_x: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ *et* $f_y: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ *sont linéaires.*

Proposition 1.1.2. $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *est bilinéaire si et seulement si*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (x,y,z) \in E^3\ f(\alpha x + z, y) = \alpha f(x,y) + f(z,y)$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (x,y,z) \in E^3\ f(x, \alpha y + z) = \alpha f(x,y) + f(x,z)$.

Définition 1.1.3. *Soit f une forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$-e-v E. On dit que*

1. *f est symétrique si $f(x,y) = f(y,x)$.*
2. *f est antisymétrique si $f(x,y) = -f(y,x)$.*

Notations 1.1.4. *Soit E un $\mathbb{R}$-e-v.*

1. *L'ensemble de forme bilinéaires sur E est noté $\mathcal{L}^2(E)$.*
2. *L'ensemble de forme bilinéaires symétriques sur E est noté $\mathcal{S}^2(E)$.*
3. *L'ensemble de forme bilinéaires antisymétrique sur E est noté $\mathcal{A}^2(E)$.*

Proposition 1.1.5. *Soit E un $\mathbb{R}$-e-v, alors*

1. *$\mathcal{L}^2(E)$ est un $\mathbb{R}$-e-v.*

2. $\mathcal{L}^2(E) = \mathcal{S}^2(E) \bigoplus \mathcal{A}^2(E)$.

Proof.

1. Facile.

2. Soit $f \in \mathcal{S}^2(E) \cap \mathcal{A}^2(E)$,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} f(x,y) = f(y,x) \\ f(x,y) = -f(y,x) \end{cases} \\
&\Rightarrow f(x,y) = -f(x,y) \\
&\Rightarrow 2f(x,y) = 0 \\
&\Rightarrow f(x,y) = 0,\ \forall x, y \in E \\
&\Rightarrow \mathcal{S}^2(E) \cap \mathcal{A}^2(E) = \{0\}
\end{aligned}$$

Soit $f \in \mathcal{L}^2(E)$, $f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$ $\forall (x,y) \in E^2$, avec

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} g(x,y) = f(x,y) + f(y,x) \\ h(x,y) = f(x,y) - f(y,x) \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} g(x,y) = g(y,x) \\ h(x,y) = -h(y,x) \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} g \in \mathcal{S}^2(E) \\ h \in \mathcal{A}^2(E) \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}^2(E) = \mathcal{S}^2(E) \bigoplus \mathcal{A}^2(E)$.

□

Exemples 1.1.6.

1. $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (A,B) & \mapsto & f(A,B) = tr(AB) \end{array}$$ *est une forme bilinéaire symétrique.*

3. Soit $E = C([a,b], \mathbb{R})$ *on note* $$\begin{array}{rccc} f: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & f(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt \end{array}$$

1.1.2 Matrice d'une forme bilinéaire.

Soit E un $\mathbb{R}$-e-v $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}^2(E)$. Soit $x, y \in E$

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j f(e_i, e_j)$$

Définition 1.1.7. *La matrice $A = (a_{i,j})$ où $a_{i,j} = f(e_i, e_j)$ est appelée la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$*

$$M(f,\ \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) & \dots & f(e_1,e_n) \\ f(e_2,e_1) & f(e_2,e_2) & \dots & f(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n,e_1) & f(e_n,e_2) & \dots & f(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

Exemple 1.1.8. *Soient* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$ *et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors $f(e_i, e_j) = \delta_{i,j} \Rightarrow a_{i,j} = \delta_{i,j}$. Par suite*

$$Mat(f,\ \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Proposition 1.1.9. *Soient E un $\mathbb{R}$-e-v de dim finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $f \in \mathcal{L}^2(E)$, $A = Mat(f, \mathcal{B})$ et $x, y \in E$. Alors*

1. *$f(x,y) = {}^t x A y$.*
2. *f est symétrique si et seulement A est symétrique (c.à.d ${}^tA = A$).*
3. *f est antisymétrique si et seulement A est antisymétrique (c.à.d ${}^tA = -A$).*

Proof.

1.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{1 \le i,j \le n} x_i y_j a_{i,j} \\ &= (x_1, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= {}^t x A y, \text{ où } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. On suppose que f est symétrique alors $f(x,y) = f(y,x),\ \forall x, y \in E$. On a

$$\begin{aligned} & {}^t x A y = \underbrace{{}^t y A x}_{\in \mathbb{R}},\ \forall x, y \in E \\ \iff & {}^t x A y = {}^t({}^t y A x),\ \forall x, y \in E \\ \iff & {}^t x A y = {}^t x {}^t A y,\ \forall x, y \in E \\ \iff & {}^t x (A - {}^t A) y = 0,\ \forall x, y \in E \\ \iff & A - {}^t A = 0,\ (\text{ voir TD }) \\ \iff & A = {}^t A \end{aligned}$$

3. De même si f est antisymétrique si et seulement si A est antisymétrique.

□

Proposition 1.1.10 (Changement de bases)**.**
Soient E un $\mathbb{R}$-e-v, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, $f \in \mathcal{L}^2(E)$, $A = M(f, \mathcal{B})$ et $A' = M(f, \mathcal{B}')$. Alors

$$A' = {}^tPAP.$$

Proof. Soit $x \in E$ alors

$$\begin{cases} x &= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \longrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) \\ x &= \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i \quad \longrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \begin{cases} x' &= P^{-1}x \quad \Rightarrow \quad x = Px' \\ y' &= P^{-1}y \quad \Rightarrow \quad y = Py' \end{cases} \\ &\Longrightarrow {}^t(Px')APy' = {}^tx'A'y' \text{ (car } f(x,y) = {}^txAy = {}^tx'A'y') \\ &\Longrightarrow {}^tx'^tPAPy' = {}^tx'A'y' \\ &\Longrightarrow A' = {}^tPAP. \end{aligned}$$

□

Définition 1.1.11. *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont congurentes s'il existe $P \in GL(n, \mathbb{R})$ telque $A = {}^tPBP$.*

Remarque 1.1.12. *Soit A et B deux matrices congurentes. Si A est symétrique (resp. antisymétrique) alors B est symétrique (resp. antisymétrique).*
<u>En effet:</u> Supposons que A est symétrique alors

$$B = {}^tPAP \Rightarrow {}^tB = {}^t({}^tPAP) = {}^tP^tAP = {}^tPAP = B.$$

1.2 Formes quadratiques.

1.2.1 Généralites.

Définition 1.2.1. *Soit f une forme bilinéaire sur $E \times E$. On appelle forme quadratique associée à f l'application, souvent notée q de E dans $\mathbb{R}$ définie par:*

$$\forall\ x \in E,\ q(x) = f(x, x).$$

Proposition 1.2.2. *Soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique*

1. *$q(0) = 0$.*

2. *$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.*

3. $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall(x,y)\in E^2\ q(\alpha x+\beta y)=\alpha^2 q(x)+2\alpha\beta f(x,y)+\beta^2 q(y)$. *En particulier*

$$\forall(x,y)\in E^2,\ q(x+y)=q(x)+2f(x,y)+q(y).$$

4. $\forall(x,y)\in E^2,\ f(x,y)=\frac{1}{4}(q(x+y)-q(x-y))$.
5. $\forall(x,y)\in E^2,\ q(x+y)+q(x-y)=2(q(x)+q(y))$. *L'identité du parallelogramme.*

Proof.

1. On a $q(0)=f(0,0)=2f(0,0)\Rightarrow q(0)=0$.
2. Soient λ et $x\in E$ on a

$$\begin{aligned} q(\lambda x) &= f(\lambda x,\lambda x) \\ &= \lambda^2 f(x,x)=\lambda^2 q(x). \end{aligned}$$

3. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $(x,y)\in E^2$ on a

$$\begin{aligned} q(\alpha x+\beta y) &= f(\alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y) \\ &= \alpha^2 f(x,x)+\alpha\beta f(y,x)+\alpha\beta f(x,y)+\beta^2 f(y,y) \\ &= \alpha^2 q(x)+2\alpha\beta f(x,y)+\beta^2 q(y). \end{aligned}$$

4. Soient $x,y\in E$ on a

$$\begin{aligned} & q(x+y)-q(x-y)=q(x)+2f(x,y)+q(y)-q(x)+2f(x,y)-q(y) \\ \Longrightarrow\ & f(x,y)=\frac{1}{4}(q(x+y)-q(x-y)). \end{aligned}$$

5. Soient $x,y\in E$ on a

$$\begin{aligned} & q(x+y)+q(x-y)=q(x)+2f(x,y)+q(y)+q(x)-2f(x,y)+q(y) \\ \Longrightarrow\ & q(x+y)+q(x-y)=2(q(x)+q(y)). \end{aligned}$$

□

Définition 1.2.3. *Soit $q:E\longrightarrow\mathbb{R}$ une application. On dit que q est une forme quadratique si et seulement s'il existe une forme bilinéaire symétrique $f:E\times E\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que q soit la forme quadratique associée à f.*
f est appelée la forme polaire de q.

1.2.2 Matrice d'une forme quadratique.

Soient E un $\mathbb{R}$-e-v de dim finie, $\mathcal{B}$ une base de E, q une forme quadratique, f sa forme polaire associée, $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ et $A=M(f,\mathcal{B})$. On sait que

$$\begin{aligned} & f(x,y)=\ {}^t xAy \\ \Longrightarrow\ & q(x)=f(x,x)=\ {}^t xAy. \end{aligned}$$

La matrice A est appelée aussi la matrice de la forme quadratique q. Donc

$$\mathrm{M}(q,\ \mathcal{B}) = \mathrm{M}(f,\ \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} q(e_1) & f(e_1,e_2) & \dots & f(e_1,e_n) \\ f(e_2,e_1) & q(e_2) & \dots & f(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n,e_1) & f(e_n,e_2) & \dots & q(e_n) \end{pmatrix}.$$

1.2.3 Epression de $q(x)$.

Soient E un $\mathbb{R}$-e-v de dim n, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E, q une forme quadratique et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
Alors,

$$\begin{aligned} q(x) &= q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\ &= \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \underbrace{f(e_i,e_j)}_{=a_{i,j}}, \quad \text{avec } \forall 1 \le i,j \le n\ a_{i,j} = a_{j,i} \\ &= \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j a_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1\le i\neq j\le n} a_{i,j} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j} x_i x_j. \end{aligned}$$

Donc q est un polynôme homogéne de dégre 2 en les composantes $x_1, \cdots, x_n$.
Inversement, soit

$$\phi(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} b_{i,j} x_i x_j$$

un polynôme homogéne de dégre 2 en les composantes $x_1, \cdots, x_n$. Montrer que ϕ est une forme quadratique.
<u>En effet:</u> Soit $A = a_{i,j}$ définie par

$$\begin{cases} a_{i,i} &= b_{i,i}, \quad \forall 1 \le i \le n, \\ a_{i,j} &= \frac{1}{2} b_{i,j}, \quad \text{si } i < j, \\ a_{i,j} &= a_{j,i}, \quad \text{si } i > j. \end{cases}$$

On remarque que A est une matrice symétrique et $\phi(x_1, \cdots, x_n) = {}^t x A x$. Posons $\varphi(x,y) = {}^t x A y$ peut on vérifier que φ est une forme bilinéaire et on $\phi(x) = \varphi(x,x)$.

1.3 Formes positives, Formes définies positives.

Définition 1.3.1. *Soit f une forme bilinéaire symétrique. On dit que*

1. *f est positive si et seulement si $\forall\ x \in E,\ f(x,x) \geq 0$.*
2. *f est définie si et seulement si $f(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.*
3. *f est définie positive si et seulement si $\forall\ x \in E|\{0\},\ f(x,x) > 0$.*

Définition 1.3.2. *Soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique, on dit que*

1. *q est positive si et seulement si $\forall\ x \in E,\ q(x) \geq 0$.*
2. *q est définie si et seulement si $q(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.*
3. *q est définie positive si et seulement si $\forall\ x \in E|\{0\},\ q(x) > 0$.*

Exemples 1.3.3.

1. *La forme* $\begin{array}{cccc} q_1 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & q_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \end{array}$ *est une forme définie positive.*

2. *La forme* $\begin{array}{cccc} q_2 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & q_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2xy \end{array}$ *est une forme positive mais q_2 n'est pas définie. En effet On a $q_2(x,y,z) = (x-y)^2+z^2 \geq 0$ alors q_2 est positive et $q_2(1,1,0) = 0$ alors q_2 n'est pas définie.*

Théorème 1.3.4 (Inégalité de Cauchy Schwartz)**.**
Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique positive alors

$$|f(x,y)| \leq \sqrt{f(x,x)}\sqrt{f(y,y)}.$$

Si de plus f est définie on a l'égalité si et seulement si x et y sont liés.

Proof. Soient $x, y \in E$

$$\begin{aligned} & f(tx+y, tx+y) \geq 0\ \forall\ t \in \mathbb{R} \\ \Longrightarrow\ & t^2 f(x,x) + 2tf(x,y) + f(y,y) \geq 0\ \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Posons $P(t) = t^2 f(x,x) + 2tf(x,y) + f(y,y)$
$\underline{1^{er} \text{ cas si } f(x,x) \neq 0 :}$ On a P est un polynôme de seconds dégrée et garde une signe constante donc

$$\begin{aligned} & \Delta = 4f^2(x,y) - 4f(x,x)f(y,y) \leq 0 \\ \Longrightarrow\ & |f(x,y)| \leq \sqrt{f(x,x)}\sqrt{f(y,y)} \end{aligned}$$

$\underline{2^{eme} \text{ Cas si } f(x,x) = 0 :}$ alors $P(t) = 2tf(x,y) + f(y,y)$. Montrer que $f(x,y) = 0$. Supposons que $f(x,y) \neq 0$, on a P est un polynôme de premier dégrée qui garde une signe constante (absurde) alors $f(x,y) = 0$ □

1.3.1 Formes non dégénérées.

Définition 1.3.5. *Soient E un $\mathbb{R}$-e-v et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. On dit que f est non dégénérée si*

$$f(x,y) = 0,\ \forall y \in E \Rightarrow x = 0.$$

On dit que f est dégénérée dans le cas contraire.

Proposition 1.3.6. *Si f est définie, alors f est non dégénérée*

Proof. Soit $x \in E$ tel que $f(x,y) = 0\ \forall y \in E$ en particulier pour $y = x$ on a $f(x,x) = 0$. Alors $x = 0$ car f est définie. Donc f est non dégénérée. □

Proposition 1.3.7. *Soit E un $\mathbb{R}$-e-v et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique alors f non dégénérée si et seulement si $M(f,\mathcal{B})$ est inversible où $\mathcal{B}$ est une base de E.*

Proof. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Posons $A = M(f,\mathcal{B})$ avec f est non dégénérée

$$\begin{aligned}
&\iff f(x,y) = 0,\ \forall\ y \in E \Longrightarrow x = 0 \\
&\iff {}^t xAy = 0,\ \forall\ y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \Longrightarrow x = 0 \\
&\iff {}^t xA = 0,\ \Longrightarrow x = 0 \\
&\iff {}^t Ax = 0,\ \Longrightarrow x = 0 \\
&\iff {}^t A \text{ est injective} \\
&\iff {}^t A \text{ est inversible} \\
&\iff A \text{ est inversible}
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.3.8. *Soit $x \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^t xy = 0\ \forall y \in M_{n,1} \iff x = 0$.*

1.4 Décomposition en somme de carrés par la méthode de Gauss.

Théorème 1.4.1. *Soient E un $\mathbb{R}$-e-v de dim n et q une forme quadratique. Alors il existe r formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_r$ indépendantes et r scalaires non nuls $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ tels que*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \ell_i^2(x).$$

En outre, on a rang$(q) = r$ et

$$ker(q) = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \ell_1(x) = \cdots = \ell_n(x) = 0\}$$

Proof. On raisonne par récurrence sur la dimension de E.
Pour $n = 1$. Soit $\{e_1\}$ une base de E, tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x_1 e_1$, donc $q(x) = q(e_1)x_1^2$ et alors $q(e_1) = \lambda_1 \neq 0$ car $q \neq 0$. On choisit dans ce cas

$$\begin{array}{rccc} \ell_1 : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x_1 e_1 & \mapsto & x_1 \end{array}$$

Soit $n \geq 2$, supposons le résultat vrai pour toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimesion $r \leq n-1$ et soit q une forme quadratique de E. Soit $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E, on sait que

$$\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

<u>Premier cas:</u> S'il existe i_0 tel que $a_{i_0,i_0} \neq 0$: pour fixer les idées, supposons que $a_{1,1} \neq 0$. Le principe est de regrouper tous les termes contenant x_1 et faire apparaître un début de carré.

$$q(x) = a_{1,1} x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_1 x_j + \sum_{i=2}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Notons par $q_1(x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=2}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$. Remarquons que c'est une forme quadratique en $x_2, \cdots, x_n$. On a

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{1,1} \left(x_1^2 + \frac{2}{a_{1,1}} \sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_1 x_j \right) + q_1(x_2, \cdots, x_n) \\ &= a_{1,1} \left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j} x_j}{a_{1,1}} \right)^2 - \frac{1}{a_{1,1}} \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_j \right)^2 + q_1(x_2, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

Soit alors $a_1 = a_{1,1}$ et $\ell_1 : (x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow \left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j} x_j}{a_{1,1}} \right)$

$$q_2 : (x_2, \cdots, x_n) \longrightarrow q_1(x_2, \cdots, x_n) - \frac{1}{a_{1,1}} \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_j \right)^2$$

est une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension $n-1$, on lui applique alors l'hypothèse de récurrence. Les formes linéaires récupérées en utilisant l'hypothèse de récurrence sont nécessairement libres avec ℓ_1 vu qu'elles n'ont pas de composantes suivant x_1.

<u>Deuxième cas:</u> Cas où tous les $a_{i,i}$ sont nuls, la forme quadratique s'écrit alors sous la forme

$$q(x) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j,\ \forall x \in E.$$

Sans perte de généralité, supposons que $a_{1,2} \neq 0$. L'idée est de regrouper tous les termes contenant x_1 et x_2.

$$q(x) = 2a_{1,2} x_1 x_2 + 2\sum_{j=3}^{n} a_{1,j} x_1 x_j + 2\sum_{j=3}^{n} a_{2,j} x_2 x_j + 2 \sum_{3 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Posons,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{j=3}^{n} a_{1,j} x_j, \\ \psi(x) &= \sum_{j=3}^{n} a_{2,j} x_j, \\ \theta(x) &= 2 \sum_{3 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j, \end{aligned}$$

Remarquons que θ est un polynôme homogène de degré 2 en $x_3, \cdots, x_n$. Une fois que c'est fait, on regroupe ces formes de la façon suivante:

$$\begin{aligned} q(x) &= 2a_{1,2}x_1x_2 + 2x_1\varphi(x) + 2x_2\psi(x) + \theta(x) \\ &= \frac{2}{a_{1,2}}\left(a_{1,2}^2x_1x_2 + x_1\varphi(x) + x_2\psi(x)\right) + \theta(x) \\ &= \frac{2}{a_{1,2}}\left(a_{1,2}x_1 + \psi(x)\right)\left(a_{1,2}x_2 + \varphi(x)\right) - \frac{2}{a_{1,2}}\varphi(x)\psi(x) + \theta(x) \end{aligned}$$

$q_1 : (x_3, \cdots, x_n) \longrightarrow \theta(x) - \frac{2}{a_{1,2}}\varphi(x)\psi(x)$ est une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension $n-2$. En effet, le produit de deux formes linéaires est une forme quadratique.
En utilisant la relation $ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$, on obtient

$$q(x) = \frac{1}{2a_{1,2}}\left[\left(a_{1,2}x_1 + a_{1,2}x_2 + \varphi(x) + \psi(x)\right)^2 - \left(a_{1,2}x_1 - a_{1,2}x_2 - \varphi(x) + \psi(x)\right)^2\right] + q_1(x_3, \cdots, x_n).$$

Posons $a_1 = \frac{1}{2a_{1,2}}$, $a_2 = \frac{1}{2a_{1,2}}$

$$\begin{aligned} \ell_1 &: (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto a_{1,2}x_1 + a_{1,2}x_2 + \varphi(x) + \psi(x) \\ \ell_2 &: (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto a_{1,2}x_1 - a_{1,2}x_2 - \varphi(x) + \psi(x). \end{aligned}$$

Les formes ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires indépendantes de $\mathbb{R}^n$ et q_1 est une forme quadratique à qui on applique l'hypothèse de récurrence. $\square$

Proposition 1.4.2. *Soient E un $\mathbb{R}$-e-v de dim n et $\ell_1, \cdots, \ell_r \in E^*$. Alors $\{\ell_1, \cdots, \ell_r\}$ est libre si et seulement si $dim(\bigcap_{i=1}^{r} ker(\ell_i)) = n - r$*

Définition 1.4.3. *Soient $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une base bilinéaire symétrique et $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E.*

1. *On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale pour q ou $q-$orthogonale si $f(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.*
2. *On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale ou $q-$orthonormale si $f(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$.*

Proposition 1.4.4. *Soient E un $\mathbb{R}$-e-v, $\mathcal{B}$ une base de E et $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique alors*

1. *$\mathcal{B}$ est une base $q-$orthogonale si et seulement si $M(q, \mathcal{B})$ est diagonale.*
2. *$\mathcal{B}$ est une base $q-$orthonormale si et seulement si $M(q, \mathcal{B}) = I_n$.*

Proof. 1. Soit $\mathcal{B}$ une base $q-$orthogonale si et seulement si $f(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad a_{i,j} = 0, \ \forall\ i \neq j \\ &\Longleftrightarrow \quad M(q, \mathcal{B}) \ \text{ est diagonale et } M(q, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} q(e_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(e_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(e_n) \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad q(x) = \sum_{j=1}^{n} q(e_j)x_j^2. \end{aligned}$$

2. Soit $\mathcal{B}$ est $q-$orthonormale si et seulement si $f(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad a_{i,j} = \delta_{i,j}, \ \forall \ i, j \\ &\Longleftrightarrow \quad M(q, \mathcal{B}) = I_n, \quad \text{et } M(q, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad q(x) = \ {}^t x I_n x = \sum_{j=1}^{n} x_j^2. \end{aligned}$$

□

Exemple 1.4.5. *Soient*
$$\begin{array}{rccc} q: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & q(x) = 3\sum_{j=1}^{n} x_j^2. \end{array}$$
et $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a $M(q, \mathcal{B}) = 3I_n \neq 3I_n$, donc $\mathcal{B}$ est une base $q-$orthogonale et non $q-$orthonormale.

Théorème 1.4.6. *Soient E un $\mathbb{R}$-e-v $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique, alors*

1. *E admet une base $q-$orthogonale.*
2. *Si q définie positive alors E admet une base $q-$orthonormale.*

Proof.

1. D'après la décomposition de Gauss il existe $\ell_1, \cdots, \ell_r$ r formes linéaires indépendantes (libre) et r scalaires non nuls $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ tels que $q(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ell_k(x)^2$.

2. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base $q-$orthogonale. Par hypothèse q est définie positive alors $q(x) > 0$ et q non dégénérée alors $M(q, \mathcal{B})$ est inversible d'où $\text{rg}(q) = n$.

   Posons $e'_k = \frac{e_k}{\sqrt{q(e_k)}}$, $\forall 1 \leq k \leq n$. Montrer $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ est une base $q-$orthonormale. En effet,

$$\begin{aligned} f(e'_i, e'_j) &= f\left(\frac{e_i}{\sqrt{q(e_i)}}, \frac{e_j}{\sqrt{q(e_j)}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{q(e_i)}\sqrt{q(e_j)}} f(e_i, e_j) \end{aligned}$$

   - Si $i \neq j$ on a $f(e_i, e_j) = 0 \Longrightarrow f(e'_i, e'_j) = 0$.
   - Si $i = j$, $f(e_i, e_j) = \frac{f(e_i, e_i)}{q(e_i)} = 1$.

   Donc, $f(e'_i, e'_j) = \delta_{i,j}$. Ainsi $\mathcal{B}'$ est une base $q-$orthonormale.

□

Proposition 1.4.7. *Toute matrice réelle symétrique est congurente à une matrice diagonale c-à-d ($\forall A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R}),\ \exists P \in GL(n, \mathbb{R})$ et $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ une matrice diagonale tel que $A = {}^tPDP$.)*

Théorème 1.4.8 (d'inertie de Sylvester)**.**
Soient E un $\mathbb{R}$-e-v de dim n, $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique de rang r et $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base $q-$orthogonale alors il existe un entier $0 \leq s \leq r$ tel que

$$\begin{aligned} s &= card\{1 \leq i \leq n |\ q(e_i) > 0\} \\ r - s &= card\{1 \leq i \leq n |\ q(e_i) < 0\}. \end{aligned}$$

Le couple $(s, r-s)$ est indépendant à la base $q-$orthogonale il dépend uniquement de la forme quadratique q, le couple $(s, r-s)$ est appelé la signature des q.

Proposition 1.4.9. *Soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique de rang r et de signature $(s, r-s)$, alors il existe une base $q-$orthogonale de E dans la quelle la matrice de q est sous la forme*

$$M(q,\ \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \qquad s \qquad & \qquad r-s \qquad & \qquad \qquad \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

et $q(x) = \sum\limits_{k=1}^{s} x_k^2 - \sum\limits_{k=s+1}^{r} x_k^2$.

Proof. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base $q-$orthogonale $q(x) = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k x_k^2$ avec $\lambda_k = p(e_k),\ \lambda_k \neq 0$ et

$$M(q, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

q est de signature $(s, r-s)$. On peut supposer que $q(e_k) > 0,\ \forall\ 1 \leq k \leq s$ et $p(e_k > 0,\ \forall s+1 \leq k \leq r$. Posons $e'_k = \frac{e_k}{\sqrt{q(e_k)}}$ si $1 \leq k \leq r$ et $e'_k = e_k$ si $r+1 \leq k \leq n$. Posons $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$. Calculer $f(e'_i, e'_j)$.

- 1^{er} cas: si $i \neq j$ alors $f(e'_i, e'_j) = f(e_i, e_j) = 0$ car $\mathcal{B}$ est $q-$orthogonale
- 2^{eme} cas: si $i = j$

– Si $1 \leq i \leq s$ alors

$$\begin{aligned} f(e'_i, e'_j) &= f\left(\frac{e_i}{\sqrt{q(e_i)}}, \frac{e_i}{\sqrt{q(e_i)}}\right) \\ &= \frac{f(e_i, e_i)}{q(e_i)} = 1 \end{aligned}$$

– Si $r + 1 \leq i \leq r$ alors

$$\begin{aligned} f(e'_i, e'_i) &= f\left(\frac{e_i}{\sqrt{-q(e_i)}}, \frac{e_i}{\sqrt{-q(e_i)}}\right) \\ &= \frac{f(e_i, e_i)}{-q(e_i)} = -1 \end{aligned}$$

– Si $r + 1 \leq i \leq n$ alors $f(e'_i, e'_i) = f(e_i, e_i) = 0$.

□

Proposition 1.4.10. *Soient E un $\mathbb{R}$-e-v de dim n et $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique de rang r et de signature (s, t) alors*

1. *$s + t = r$.*
2. *q est positive si et seulement si $(s, t) = (r, 0)$ et $p(x) = \sum_{k=1}^{r} x_k^2$.*
3. *q est négative si et seulement si $(s, t) = (0, r)$ et $p(x) = -\sum_{k=1}^{r} x_k^2$.*
4. *q est définie positive si et seulement si $(s, t) = (n, 0)$ et $p(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.*
5. *q est définie négative si et seulement si $(s, t) = (0, n)$ et $p(x) = -\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.*
6. *q est non dégénérée si et seulement si $(s, t) = (s, n - s)$ et $q(x) = \sum_{k=1}^{s} x_k^2 - \sum_{k=s+1}^{n} x_k^2$.*

Remarque 1.4.11. *Si q non dégénérée et positive alors elle est définie positive et $r = n$.*

Chapter 2

Espaces préhilbertiens réels.

2.1 Produit scalaire, norme et distance.

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2.1.1 Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 2.1.1. *Soit f une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E est une « forme bilinéaire symétrique définie positive » c-à-d elle vérifie les propriétés suivantes:*

1. *l'application f est bilinéaire.*
2. *pour tous vecteurs u et v de E, on a $f(u, v) = f(v, u)$ (on dit que f est symétrique).*
3. *pour tout vecteur u de E, on a : $f(u, u) \geq 0$ (on dit que f est positive).*
4. *pour tout vecteur u de E, on a: $f(u, u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ (on dit que f est définie).*

Définition 2.1.2.

1. *Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est dit préhilbertien réel.*
2. *Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.*

Notations 2.1.3. *Plutôt que de noter $f(u, v)$, on note souvent $< u, v >$, ou $u.v$, ou $(u|v)$.*
Avec la notation $(.|.)$, que nous utiliserons, la définition d'un produit scalaire devient:

$$\forall (u, u', v, v') \in E^4,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \left\{ \begin{array}{lcl} (\alpha u + \beta u'|v) & = & \alpha(u|v) + \beta(u'|v) \\ (u|\alpha v + \beta v') & = & \alpha(u|v) + \beta(u|v') \\ (u|v) = (v|u) & & (u|u) \geq 0 \text{ et } (u|u) = 0 \Leftrightarrow u = 0. \end{array} \right.$$

Proposition 2.1.4 (produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.)**.**
Soient $u = (x_1, \cdots, x_n)$ et $v = (y_1, \cdots, y_n)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^n$. En posant $(u|v) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On l'appelle le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Proof. Voir TD. $\square$

Notation matricielle.
Si on note $[u]$ la matrice-colonne associée à tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, alors $(u|v) = {}^t[u][v]$.

Proposition 2.1.5. *Soit $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$. En posant $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$, on définit un produit scalaire sur E.*

Proof. Voir TD. □

2.1.2 Norme et distance associée.

Définition 2.1.6. *Soit E un espace préhilbertien réel.*

1. *Pour tout vecteur u de E, on appelle norme de u la quantité $||u|| = \sqrt{(u|u)}$.*
2. *Pour tous vecteurs u, v on appelle distance de u à v la quantité $d(u,v) = ||u - v||$.*

Les applications « norme » et « distance » sont dites associées au produit scalaire sur E.

Définition 2.1.7. *Soit E un espace préhilbertien réel. Un vecteur u de E est dit unitaire (ou encore normé) si $||u|| = 1$.*

Proposition 2.1.8. *Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous vecteurs u, v de E, on a l'inégalite dite « de Cauchy-Schwarz » $|(u,v)| \leq ||u||||v||$.*
Il y a égalité dans ce résultat si et seulement si u et v sont liés.

Exemples 2.1.9.

1. *On se place dans $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique. Pour tout vecteur $u = (x_1, \cdots, x_n)$, on a $||u|| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Pour tous $\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & (x_1, \cdots, x_n) \\ v & = & (y_1, \cdots, y_n) \end{array} \right.$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit:*
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$
2. *On se place dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$. Alors $||f|| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$. Dans ce cas, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit*
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2 dt\right)$$

Proposition 2.1.10. *Soit E un espace préhilbertien réel.*

1. *Pour tout vecteur u de E, on a l'inégalité $\|u\| \geq 0$, et l'équivalence $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.*
2. *Pour tout vecteur u de E, et pour tout réel λ, on a: $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$.*
3. *Pour tous vecteurs u, v de E, on a l'inégalité triangulaire $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.*
   Cette inégalité est une égalité si et seulement si u et v sont « positivement liés ».

Remarque 2.1.11.

- *L'expression « positivement liés » signifie l'existence de λ dans $\mathbb{R}_+$ tel que $v = \lambda u$ ou $u = \lambda v$.*
- *pour tous vecteurs u et v de E, on a l'encadrement :* $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u \pm v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
- *Si u est non nul, les vecteurs $\pm\frac{u}{\|u\|}$ sont les seuls vecteurs unitaires de la droite $\mathbb{R}u$.*

Proposition 2.1.12. *Soit E un espace préhilbertien réel. On note $d(u, v)$ la distance associée. Alors*

1. *Pour tous vecteurs u et v de E, on a $d(u, v) = d(v, u)$.*
2. *Pour tous vecteurs u et v de E, on a l'inégalité $d(u, v) \geq 0$ et l'équivalence $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.*
3. *Pour tous vecteurs u, v, w de E on a $d(u, v) = d(u + w, v + w)$ (la distance est invariante par translation).*
4. *Pour tous vecteurs u, v, w de E, on a l'inégalité triangulaire: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.*
   Il y a égalité dans ce résultat si et seulement si il existe λ dans $[0, 1]$ tel que $w = \lambda u + (1 - \lambda)v$.

Remarque 2.1.13. *La notion de distance est surtout utilisée dans le cadre de la géométrie affine. On parle alors de la distance $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ entre deux points A et B. Avec ces notations, $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (égalité si et seulement si C est sur le segment $[A, B]$).*

Proposition 2.1.14. *Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous u, v de E, et tous réels α, β on a:*

$$\|\alpha u + \beta v\|^2 = \alpha^2\|u\|^2 + 2\alpha\beta(u|v) + \beta^2\|v\|^2.$$

En particulier, $\left\{ \begin{array}{lcl} \|u+v\|^2 & = & \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2 \\ \|u-v\|^2 & = & \|u\|^2 - 2(u|v) + \|v\|^2. \end{array} \right.$

Par addition, on en déduit: $\forall (u, v) \in E^2,\ \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$. *Cette égalité est connue sous le nom d'identité du parallélogramme.*

Proposition 2.1.15. *Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous vecteurs u, v de E, on a*

$$(u|v) = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right).$$

2.2 Orthogonalité.

2.2.1 Vecteurs orthogonaux.

Définition 2.2.1. *Soit E un espace préhilbertien réel. Deux vecteurs u et v de E sont dits orthogonaux et noté $x \perp y$, s'ils vérifient $(u|v) = 0$.*

Remarque 2.2.2.

- *La définition de l'orthogonalité est symétrique car $(u|v) = (v|u)$.*
- *Le seul vecteur u qui est orthogonal à lui-même est le vecteur nul.*
- *Le seul vecteur u qui est orthogonal à tous les vecteurs de E est $u = 0$.*

Définition 2.2.3. *Soit E un espace préhilbertien réel.*

- *On dit qu'une famille* $(u_i)_{i\in I}$ *de vecteurs de* E *est orthogonale si les* u_i *sont orthogonaux deux à deux.*
- *Si de plus ils sont unitaires, alors la famille est dite orthonormale (ou orthonormée).*

  La famille $(u_i)_{i\in I}$ *est orthonormale* $\Leftrightarrow\ \forall (i,j)\in I^2,\ (u_i|u_j)=\delta_{i,j}$.

Exemples 2.2.4.

1. *La base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *est orthonormale pour le produit scalaire canonique.*
2. *On se place dans* $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ *muni du produit scalaire* $(f|g)=\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

   La famille des $f_n : x \longrightarrow \cos(nx)$*, avec* n *dans* $\mathbb{N}$*, est une famille orthogonale pour ce produit scalaire.*

Proposition 2.2.5. *Soit* E *un espace préhilbertien réel. Si une famille* $(u_i)_{i\in I}$ *est orthogonale et formée de vecteurs non nuls, alors c'est une famille libre.*
En particulier, si dim$(E)=n\geq 1$*, une famille orthonormale de n vecteurs est une base orthonormale.*

Proposition 2.2.6. *Soit* E *un espace préhilbertien réel. Si la famille* $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ *est orthogonale, alors*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} u_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|u_k\|^2.$$

Attention, la réciproque n'est vraie que si $n=2$*. Ainsi :* $(u|v)=0\Leftrightarrow \|u+v\|=\|u\|+\|v\|$.

2.2.2 Orthogonal d'une partie.

Définition 2.2.7. *Soit* E *un espace préhilbertien réel et* X *une partie non vide de* E*. L'orthogonal de* X*, noté* $X^\perp$*, est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de* X *c-à-d*

$$X^\perp=\{y\in E|\ \forall x\in X,\ (x|y)=0\}.$$

Définition 2.2.8. *Soient* E *un espace préhilbertien réel et* X,Y *deux parties non vides de* E*. On dit que les parties* X *et* Y *sont orthogonales si :* $\forall u\in X,\ \forall v\in Y,\ (u|v)=0$.
Cela équivaut à l'inclusion $Y\subset X^\perp$ *(ou bien sûr à l'inclusion* $X\subset Y^\perp$*).*

Remarque 2.2.9. *Si* $F\perp G$ *alors* $G\subset F^\perp$.

Proposition 2.2.10. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-e-v*

1. *L'orthogonal* $X^\perp$ *de* X *est toujours un sous-espace vectoriel de* E*, même si* X *n'en est pas un.*
2. $E^\perp=\{0\}$.
3. $\{0\}^\perp=E$.
4. *Si* X *et* Y *deux parties telles que* $X\subset Y$ *alors* $Y^\perp\subset X^\perp$.
5. *Si* X *est une partie non vide de* E*, alors* $X^\perp=$ *Vect*$(X)^\perp$.

   En particulier, si $X=$ *Vect*$\{u_j, j\in J\}$*, alors:* $v\in X^\perp\Leftrightarrow\forall\ j\in J,\ (v|u_j)=0$.

6. *Pour toute partie non vide de E, on a l'inclusion $X \subset X^{\perp\perp}$ (X est inclus dans son double orthogonal). Cette inclusion peut être stricte, notamment si X n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*

   Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique (et en notant e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique) : Si $X = \{e_1, e_2\}$, alors $X^\perp = \mathbb{R}e_3$, puis $X^{\perp\perp} = \mathbb{R}e_1 \bigoplus \mathbb{R}e_2$.

7. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \cap F^\perp = \{0\}$: la somme $F + F^\perp$ est donc directe.*

   La proposition suivante généralise ce résultat :

Proposition 2.2.11. *Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $(F_j)_{j\in J}$ une famille de sous-espaces de E, orthogonaux deux à deux.*
Alors la somme $G = \sum F_j$ est directe, et on notera $G = \overset{\perp}{\bigoplus} F_j$ (on parle de somme directe orthogonale).

2.2.3 Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.

Proposition 2.2.12. *Soit $\{v_1, \cdots, v_p\}$ une famille libre d'un espace euclidien E et $F = \{v_1, \cdots, v_p\}$ le sous-espace engendré. Alors, par un procédé standard, on peut alors construire une base orthonormée de F à partir de $\{v_1, \cdots, v_p\}$.*
En particulier, à toute base de E on peut associer une base orthonormée de E.

Proof. La méthode consiste à construire d'abord, par récurrence, une base orthogonale $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p\}$ de F et ensuite à la normaliser $\left(e_i = \frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|}\right)$.
Pour cela on pose: $\begin{cases} \varepsilon_1 = v_1 \\ \varepsilon_2 = v_2 + \lambda\varepsilon_1 \quad \text{avec } \lambda \text{ tel que } \varepsilon_2 \perp \varepsilon_1. \end{cases}$
En imposant cette condition, on trouve:

$$0 = \langle v_2 + \lambda\varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle = \langle v_2, \varepsilon_1\rangle + \lambda\|\varepsilon_1\|^2.$$

Comme $\varepsilon_1 \neq 0$, on obtient $\lambda = -\frac{\langle v_2, \varepsilon_1\rangle}{\|\varepsilon_1\|^2}$. Notons que, puisque

$$\begin{cases} v_1 = \varepsilon_1 \\ v_2 = \varepsilon_2 - \lambda\varepsilon_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \text{Vect}\{v_1, v_2\}.$$

Une fois construit ε_1 on construit ε_2 en posant:

$$\varepsilon_3 = v_3 + \mu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2, \quad \text{avec } \mu \text{ et } \nu \text{ tels que } \varepsilon_3 \perp \varepsilon_1 \text{ et } \varepsilon_3 \perp \varepsilon_2.$$

Ceci donne

$$\begin{cases} 0 = \langle v_3 + \mu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2, \varepsilon_1\rangle = \langle v_3, \varepsilon_1\rangle + \mu\|\varepsilon_1\|^2 \\ 0 = \langle v_3 + \mu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2, \varepsilon_2\rangle = \langle v_3, \varepsilon_2\rangle + \nu\|\varepsilon_2\|^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = -\frac{\langle v_3, \varepsilon_1\rangle}{\|\varepsilon_1\|^2} \\ \nu = -\frac{\langle v_3, \varepsilon_2\rangle}{\|\varepsilon_2\|^2}. \end{cases}$$

Comme,

$$\begin{cases} v_1 = \varepsilon_1 \\ v_2 = \varepsilon_2 - \lambda\varepsilon_1 \\ v_3 = \varepsilon_3 - \mu\varepsilon_1 - \nu\varepsilon_2. \end{cases}$$

On a $\mathrm{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} = \mathrm{Vert}\{v_1, v_2, v_3\}$ c'est-à-dire $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est une base othogonale de l'espace engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$.
On voit bien maintenant le procédé de récurrence. Supposons avoir construit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{k-1}$ pour $k < p$; on pose :

$$\varepsilon_k = v_k + \lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_{k-1}\varepsilon_{k-1} \text{ avec les conditions } \varepsilon_k \perp \varepsilon_i, \text{ pour } i = 1, \cdots, k-1.$$

Sont équivalentes à:

$$\lambda_i = -\frac{\langle v_k, \varepsilon_i \rangle}{\|\varepsilon_i\|^2}.$$

Puisque $v_k = \varepsilon_k - \lambda_1\varepsilon_1 - \cdots - \lambda_{k-1}\varepsilon_{k-1}$, on voit facilement par récurrence que $\mathrm{Vect}\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\} = \mathrm{Vect}\{v_1, \cdots, v_k\}$, aussi $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\}$ est une base orthogonale de $\mathrm{Vect}\{v_1, \cdots, v_k\}$. □

Proposition 2.2.13. *Soit E un espace euclidien (c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie). Alors, dans l'espace vectoriel E, il existe des bases orthonormales.*

Proposition 2.2.14. *Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, et soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormale de E. Pour tout vecteur u de E, on a : $u = \sum_{k=1}^{n} (u|e_k)e_k$.*

Tout vecteur u de E est donc entièrement déterminé par ses produits scalaires sur les vecteurs de $\mathcal{B}$. Les applications coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont les applications $u \longmapsto (u|e_k)$.

Proposition 2.2.15. *Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, et soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormale de E. Pour tous vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $x = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ on a*

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad et \ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Si la base $\mathcal{B}$ de E est quelconque, alors on a $(x|y) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_k y_j (e_k|e_j)$. On peut alors écrire: $(x|y) = {}^t x M y$ où M est la matrice des $(e_i|e_j)_{1 \leq i,j \leq n}$.

2.2.4 Produit mixte.

Définition 2.2.16. *On oriente un espace vectoriel réel E en choisissant arbitrairement une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ qu'on déclare directe. Les bases $\mathcal{B}$ telles que $det(Pass(\mathcal{B}_0, \mathcal{B})) > 0$ sont dites directes, les autres sont dites indirectes.*

Dans cette section on se place dans un espace vectoriel euclidien orienté E.

Définition 2.2.17. *Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthormée de E, et soit $v = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n vecteurs de E. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de la famille v dans la base $\mathcal{B}$. Alors $a_{i,j} = (e_i|v_j)$ pour tous i, j.*

Remarque 2.2.18. *Si on note $\mathcal{B}$ la base orthonormée obtenue à partir d'une base quelconque $\mathcal{E}$ de E par l'algorithme de Schmidt, alors les matrices de passage $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ (de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$) et $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ (de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$, inverse de la matrice précédente) sont triangulaires supérieures avec coefficients diagonaux strictement positifs.*

Proposition 2.2.19. *Soit $u_1, \cdots, u_n$ une famille de n vecteurs d'un espace euclidien orienté E de dimension n. Le déterminant $det_{\mathcal{B}}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ est le même dans toute base orthonormale directe $\mathcal{B}$. Ce déterminant est appelé produit mixte de $u_1, u_2, \cdots, u_n$ et il est noté $[u_1, u_2, \cdots, u_n]$.*

Remarque 2.2.20.

- *L'application « produit mixte » est une forme n-linéaire alternée sur E.*
- *Si $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ forment une base orthonormale directe, alors $[e_1, e_2, \cdots, e_n] = 1$.*
- *Si $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ forment une base orthonormale indirecte, alors $[e_1, e_2, \cdots, e_n] = -1$.*
- *Soit $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E.*
  - *On a évidemment $[u_1, u_2, \cdots, u_n] \neq 0$ si et seulement si les $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ forment une base de E.*
  - *Si la base $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ est directe (resp. indirecte) alors $[u_1, u_2, \cdots, u_n] > 0$ (resp. < 0)*

Proposition 2.2.21. *Soit $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de l'espace euclidien orienté E. Pour tout endomorphisme f de E, on a : $[f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)] = det(f)[u_1, u_2, \cdots, u_n]$. En particulier, si $det(f) = 1$, on a $[f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)] = [u_1, u_2, \cdots, u_n]$. On peut donc dire que les applications linéaires de déterminant 1 conservent le produit mixte.*

2.2.5 Interprétation du produit mixte.

Interprétation du produit mixte dans un plan orienté.
Soit u, v deux vecteurs d'un plan euclidien orienté E_2. Alors $[u, v]$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur les vecteurs u et v. L'aire orientée du triangle formé sur u et v est $\frac{1}{2}[u, v]$.
Interprétation du produit mixte en dimension 3.
On se place dans un espace euclidien orienté E_3 de dimension 3. On identifie ici les éléments de E_3 avec des points de l'espace.
On se donne un parallélépipède dont les arêtes issues de A sont AB, AC, et AD. Son volume orienté est $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$. Celui du tétraèdre $ABCD$ est $\frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$
On a représenté ci-dessous le parallélépipède. Ici la base $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ est directe, donc le produit mixte $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$ est positif. Le procédé de Schmidt transforme $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ en une base orthonormale directe $e = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$.
On peut alors écrire $\overrightarrow{AB} = be_1,\ \overrightarrow{AC} = ce_1 + ce_2,\ \overrightarrow{AD} = de_1 + de_2 + de_3$.
Alors $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \det_e\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\} = bcd$: c'est bien le volume du parallélépipède.

2.2.6 Supplémentaire orthogonal.

Définition 2.2.22. *Soit E un espace préhilbertien réel. Soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et p la projection de E sur F dans la direction G. On dit que p est un projecteur orthogonal de E si : $G = F^{\perp}$.*

Proposition 2.2.23 (Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie)**.** *Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors $E = F \bigoplus F^{\perp}$. Le sous-espace $F^{\perp}$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.*

Proposition 2.2.24 (Dimension du supplémentaire orthogonal en dimension finie)**.** *Soit E un espace euclidien, donc de dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors*

$$dim(F^{\perp}) = n - dim(F).$$

On a l'égalité $F = F^{\perp\perp}$. Ainsi F est lui-même le supplémentaire orthogonal de $F^{\perp}$.

Remarque 2.2.25. *Si on est en dimension finie, on pourra donc dire des sous-espaces F et $F^{\perp}$ qu'ils sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.*

Proposition 2.2.26 (Supplémentaire orthogonal et bases orthonormées.)**.**
Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien E. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de F et si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de $F^{\perp}$, alors $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ (obtenue par juxtaposition) est une base orthonormale de E.
Réciproquement, si on complète une base orthonormale $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_p\}$ de F en une base orthonormale $\{e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n\}$ de E, alors $\{e_{p+1}, \cdots, e_n\}$ est une base orthonormale de $F^{\perp}$.

Exemple 2.2.27. *Plaçons nous dans un espace euclidien E de dimension 3.*
Ici, le plan vectoriel P et la droite vectorielle D sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre. Si $\{e_1, e_2\}$ est une base de P et si e_3 est une base de D, alors la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base orthonormale de E si et seulement si $\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormale de P et e_3 est unitaire.

2.3 Hyperplans affines d'un espace euclidien.

2.3.1 Vecteur normal à un hyperplan d'un espace euclidien.

Définition 2.3.1. *1. Étant donné un espace vectoriel V sur un corps $\mathbb{K}$, un espace affine de direction V est un ensemble non vide E muni d'une application φ qui à chaque bipoint (A, B) de E, associe un élément de V, noté $\overrightarrow{AB}$ vérifiant les deux propriétés suivantes:*

   (a) $\forall\ (A, B, C) \in E^3,\ \varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$ *c.à.d* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

   (b) $\forall\ A \in E, \forall\ \vec{v} \in V,\ \exists!\ B \in E,\ \varphi(A, B) = \vec{v}$ *c.à.d* $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

2. Soit E un espace affine de direction V. Une partie non vide F de E est un sous-espace affine de E (ou variété linéaire affine, et parfois simplement variété affine), s'il existe un point A de F tel que l'ensemble $W = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de V. En d'autres termes, les sous-espaces affines de E passant par A sont les sous-espaces vectoriels de E_A, la structure vectorielle d'origine A sur E. On dit alors que F est le sous-espace affine de E de direction W passant par A. Le sous-espace vectoriel W est donc la direction de l'espace affine F, et la dimension d'un sous-espace affine est la dimension de sa direction.

Exemples 2.3.2. *On a vu que tout espace vectoriel pouvait être muni d'une structure d'espace affine par l'opération de soustraction vectorielle. Les exemples suivants sont des cas particuliers.*
Le plan affine réel est le plan $\mathbb{R}^2$ de direction lui-même en tant qu'espace vectoriel, avec l'opération

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \longmapsto & (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \end{array}.$$

L'espace affine réel de dimension 3 se définit de façon analogue :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) & \longmapsto & (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \end{array}.$$

Définition 2.3.3.

1. *Soient E un espace vectoriel et H un sous-espace. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

   (a) *H est un hyperplan de E.*

   (b) *Il existe dans E une droite vectorielle supplémentaire de H.*

   (c) *Toute droite vectorielle de E engendrée par un vecteur n'appartenant pas à H est un supplémentaire de H.*

   (d) *H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*

   (e) *H est défini par une équation linéaire homogène non triviale.*

2. *Soit E un espace affine de direction V. Les sous-espaces affines de E dont la direction est un hyperplan (vectoriel) de V sont appelés les hyperplans (affines) de E.*

   Étant donné un hyperplan H de V, une partie F de E est donc un hyperplan de direction H si et seulement s'il existe un point A tel que

   $$H = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in F\}.$$

   Un tel point A appartient alors nécessairement à F, et tout autre point de F vérifie la même propriété.

Définition 2.3.4. *Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace euclidien E, de direction un hyperplan vectoriel H. On appelle vecteur normal à $\mathcal{H}$ tout vecteur non nul de la droite vectorielle $D = H^{\perp}$.*

Proposition 2.3.5. *Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace euclidien E. Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{H}$. Soit A un point de $\mathcal{H}$. Alors on a l'équivalence : $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}|\vec{n}) = 0$.*

Remarque 2.3.6. *Un hyperplan affine $\mathcal{H}$ est donc déterminé par la donnée d'un point A et d'un vecteur normal $\vec{n}$.*

Définition 2.3.7. *Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul d'un espace euclidien E. Soit A un point quelconque de E. On considère l'application f définie sur E par $f(M) = (\overrightarrow{AM}|\vec{n})$.*
On appelle lignes de niveau de f les ensembles $\mathcal{H}_\lambda = \{M \in E, f(M) = \lambda\}$. En particulier $\mathcal{H}_0$ est l'hyperplan de vecteur normal $\vec{n}$ et qui passe par A.

Proposition 2.3.8. *Les lignes de niveau de f sont les hyperplans affines de vecteur normal $\vec{n}$.*

2.3.2 Équations d'un hyperplan dans une base orthonormale.

Proposition 2.3.9. *Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E, de direction H, et soit $\vec{n} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ un vecteur non nul de E. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le vecteur $\vec{n}$ est normal à l'hyperplan vectoriel H (à l'hyperplan affine $\mathcal{H}$).*
2. *Une équation de H est $(a|u) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$.*
3. *Une équation de $\mathcal{H}$ est $(a|u) = \lambda$, avec λ réel, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \lambda$.*

Exemples 2.3.10.

1. *On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, avec son produit scalaire canonique.*
   (a) *La normale à la droite vectorielle d'équation $2x + 5y = 0$ est dirigée par $\vec{n} = (2,5)$. Soit $\mathcal{D}$ la droite affine orthogonale au vecteur $\vec{n} = (2,5)$ et passant par $M(4,1)$. La droite $\mathcal{D}$ a pour équation $2(x-4) + 5(y-1) = 0$, donc $2x + 5y = 13$.*
   (b) *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites affines de $\mathbb{R}^2$, de directions respectives D et D'. On dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si $D^\perp = D$, c'est-à-dire si la direction de chaque droite affine est le supplémentaire orthogonal de la direction de l'autre.*
   Cela équivaut aussi à dire que les vecteurs normaux à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonaux.
   Supposons que les équations de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient $\begin{cases} ax + by = \lambda \\ a'x + b'y = \mu. \end{cases}$
   Alors les droites affines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.
2. *On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, avec son produit scalaire canonique.*
   (a) *La normale au plan vectoriel d'équation $2x + 5y - 3z = 0$ est dirigée par $\vec{n} = (2,5,-3)$.*
   Soit $\mathcal{P}$ le plan affine orthogonal au vecteur $\vec{n} = (1,3,-2)$ et passant par $M(4,-5,-7)$.
   Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $(x-4) + 3(y+5) - 2(z+7) = 0$, donc $x + 3y - 2z = 3$.
   (b) *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans affines de $\mathbb{R}^3$, de directions P et P'. On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si $P^\perp \subset P'$, c'est-à-dire si $(P')^\perp \subset P$.*
   Cela signifie que la direction de chacun des deux plans contient un vecteur normal à l'autre.
   Cela équivaut aussi à dire que leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
   Supposons que les équations de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ soient $\begin{cases} ax + by + cz = \lambda \\ a'x + b'y + c'z = \lambda'. \end{cases}$
   Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' + cc' = 0$.

2.3.3 Calcul de la distance à un hyperplan affine.

Définition 2.3.11. *Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace euclidien E. Soit A un point de $\mathcal{H}$, et soit $\vec{n}$ un vecteur normal unitaire à $\mathcal{H}$. Pour tout point M de E, on a : $d(M,\mathcal{H}) = \left|\left(\overrightarrow{AM}|\vec{n}\right)\right|$.*

Remarque 2.3.12. *Si le vecteur $\vec{n}$ n'est pas unitaire, alors la distance de M à $\mathcal{H}$ s'écrit :*

$$d(M,\mathcal{H}) = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\left|\left(\overrightarrow{AM}|\vec{n}\right)\right|.$$

Exemples 2.3.13.

1. *Distance à une droite affine dans $\mathbb{R}^2$.: On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, avec son produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine d'équation $ax + by = h$. Soit $M(x_0, y_0)$ un point quelconque.*

   Alors la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ est donnée par : $d(M,\mathcal{D}) = \frac{|ax_0+by_0-h|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2. *Distance à un plan affine dans $\mathbb{R}^3$.: On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, avec son produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine d'équation $ax + by + cz = h$. Soit $M(x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque.*

   Alors la distance du point M au plan $\mathcal{P}$ est donnée par : $d(M,\mathcal{P}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0-h|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

2.4 Isométries vectorielles d'un espace euclidien.

Définition 2.4.1. *Soit E un espace euclidien. Soit f une application de E dans lui-même. On dit que f est une isométrie vectorielle (ou encore : un automorphisme orthogonal) si f est linéaire et si elle « conserve la norme », c'est-à-dire si : $\forall\ u \in E\ \|f(u)\| = \|u\|$.*

Remarque 2.4.2. *Toute isométrie vectorielle f de E est effectivement un automorphisme de E. Soit f un automorphisme orthogonal et soit u un vecteur non nul de E: s'il existe un réel λ tel que $f(u) = \lambda u$, alors nécessairement λ est dans $\{-1, 1\}$.*

Proposition 2.4.3. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application f est une isométrie vectorielle (c'est-à-dire elle conserve la norme).*
2. *L'application f conserve le produit scalaire : $\forall\ (x, y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = (x|y)$.*
3. *L'application f transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale de E.*

Remarque 2.4.4.

- *Les applications Id et $-Id$ sont des automorphismes orthogonaux de E.*
- *Le composé de deux automorphismes orthogonaux de E est un automorphisme orthogonal de E.*
- *Enfin, si f est un automorphisme orthogonal alors f^{-1} est un automorphisme orthogonal. On peut résumer ces propriétés de la façon suivante:*

Proposition 2.4.5. *Soit E un espace euclidien. On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E. Alors $O(E)$ est un groupe pour la composition des applications, appelé groupe orthogonal de E.*

2.4.1 Symétries vectorielles orthogonales.

Définition 2.4.6. *Soit E un espace euclidien, et soit F un sous-espace vectoriel de E. La symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelée symétrie orthogonale par rapport à F, c.à.d*

$$\forall\ x \in E, s_F(x) = p_F(x) - p_{F^{\perp}}(x).$$

Si F est un hyperplan, on dit que f est la réflexion par rapport à F.
Si F est une droite, on dit que f est le demi-tour (ou retournement) d'axe F.

Remarque 2.4.7.

1. *Pour $F = \{0\}$, on a $s_F = -Id$ et pour $F = E$, $s_F = Id$. On supposera a priori que F distinct de $\{0\}$ et de E (F est un sous-espace vectoriel propre de E).*

2. *On a $p_F + p_{F^{\perp}} = Id$, on déduit que s_F est aussi définie par:*

$$\forall\ x \in E,\ \ s_F(x) = 2p_F(x) - x = x - 2p_{F^{\perp}}(x).$$

3. *Si $D = \mathbb{R}a$ est une droite vectorielle, on a alors:*

$$s_D(x) = 2p_D(x) - x = 2\frac{(x|a)}{\|a\|^2}a - x.$$

4. *Si $H = D^{\perp}$ est un hyperplan, on a alors :*

$$s_H(x) = 2p_H(x) - x = x - 2\frac{(x|a)}{\|a\|^2}a.$$

Exemple 2.4.8. *On se place ici dans un espace euclidien de dimension 3.*
La droite D et le plan P sont orthogonaux.
La droite D est dirigée par le vecteur unitaire k.
On a représenté la réflexion s par rapport au plan vectoriel P et la projection orthogonale p sur P.
On a $p(u) = u - (u|k)k$, et $s(u) = u - 2(u|k)k$.
L'application $-s$ est la symétrie orthogonale par rapport à D.

Théorème 2.4.9. *Soit F un sous espace vectoriel de E.*

1. *Pour $x \in E$, on a $x \in F$ si et seulement si, $s_F(x) = x$ et $x \in F^{\perp}$ si et seulement si, $s_F(x) = -x$.*

2. *$s_F \circ s_F = Id$ (s_F est involutive). Une symétrie orthogonale est donc un automorphisme de E avec $s_F^{-1} = s_F$.*

3. *Pour tous x, y dans E on a:*

$$(s_F(x)|y) = (x|s_F(y)).$$

4. *Pour tous x, y dans E, on a:*

$$(s_F(x)|s_F(y)) = (x|y).$$

5. *On a $s_F + s_{F^{\perp}} = 0$ et $s_F \circ s_{F^{\perp}} = s_{F^{\perp}} \circ s_F = -Id$.*

2.4.2 Matrices orthogonales.

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de colonnes $C_1, \cdots, C_n$. Alors le terme général de $A = {}^tMM$ est $a_{i,j} = C_iC_j$.

Définition 2.4.10. *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- *La matrice M vérifie ${}^tMM = I_n$.*
- *La matrice M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$.*
- *Les vecteurs-colonne de M forment une famille orthonormale.*

Si ces conditions sont réalisées, on dit que M est une matrice orthogonale.

Remarque 2.4.11. *Si M est une matrice orthogonale, il en est de même de ${}^tM$ (car ${}^tM = M^{-1}$). Une matrice M est donc orthogonale si et seulement si ses lignes forment une famille orthonormale.*

Exemples 2.4.12.

1. *Les matrices* $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ *et* $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ *sont orthogonales.*

   On verra plus loin que ce sont les seules les matrices orthogonales d'ordre 2.

2. *Les matrices* $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) & -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) & \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & 0 & -\cos(\theta_2) \end{pmatrix}$

   sont orthogonales.

Proposition 2.4.13. *On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n. C'est un groupe pour le produit des matrices (donc un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$). On l'appelle le groupe orthogonal d'indice n.*

Proposition 2.4.14. *Soit M la matrice d'un endomorphisme f dans une base orthonormale de l'espace euclidien E. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *L'application f est un automorphisme orthogonal de E (c'est-à-dire un élément du groupe $O(E)$).*

2. *La matrice M est une matrice orthogonale (c'est-à-dire un élément du groupe $O(n)$).*

Remarque 2.4.15. *On peut interpréter la proposition précédente en disant que les matrices orthogonales sont les matrices des automorphismes orthogonaux dans les bases orthonormales.*
Si on se place dans $\mathbb{R}^n$ (avec son produit scalaire canonique), une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme f canoniquement associé à M est une isométrie vectorielle.

Proposition 2.4.16. *Soit E un espace euclidien, muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$. Soit $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ une famille de n vecteurs, et soit M la matrice de la famille $\mathcal{E}$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors la famille $\mathcal{E}$ est une base orthonormale de E si et seulement si la matrice M est orthogonale.*

2.4.3 Matrices orthogonales positives ou négatives.

Proposition 2.4.17. *Si M est une matrice orthogonale, alors $det(M)$ est égal à 1 ou à -1.*

Remarque 2.4.18. *Attention la réciproque est fausse!! Considérer par exemple la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 2.4.19. *Soit M une matrice orthogonale d'ordre n.*

1. *Si $det(M) = 1$, on dit que M est une matrice orthogonale positive.*

2. *Si $det(M) = -1$, on dit que M est une matrice orthogonale négative.*

Remarque 2.4.20.

1. *Si on échange deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice orthogonale positive, on obtient une matrice orthogonale négative (et réciproquement).*

2. *C'est la même chose si on remplace une colonne (ou une ligne) par son opposée.*

3. *Il existe des matrices orthogonales positives (considérer par exemple I_n).*

4. *Il existe des matrices orthogonales négatives (changer un coefficient diagonal de I_n en -1).*

5. *Pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on sait que $det(-M) = (-1)^n det(M)$: il en résulte que si M est orthogonale, les matrices M et $-M$ ont la même « orientation » si n est pair, et sont d'orientation contraire sinon.*

Définition 2.4.21. *On note $SO(n)$, ou $SO_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices orthogonales positives d'ordre n.*

Proposition 2.4.22. *L'ensemble $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$, appelé groupe spécial orthogonal d'indice n.*

Remarque 2.4.23.

- *L'ensemble des matrices orthogonales négatives (le complémentaire de $SO(n)$ dans $O(n)$) n'est pas un groupe : non seulement il ne contient pas le neutre I_n, mais il n'est pas stable : en effet si M et N sont orthogonales négatives, alors MN est orthogonale positive.*

- *L'inverse d'une matrice orthogonale négative est encore orthogonale négative.*

- *La matrice I_n est orthogonale positive, alors que la matrice $-I_n$ n'est dans $SO(n)$ que si n est pair.*

2.4.4 Isométries positives, négatives.

Définition 2.4.24. *Si f est une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E, alors $det(f)$ est égal à 1 ou à -1.*
Si $det(f) = 1$, on dit que f est une isométrie positive.
Si $det(f) = -1$, on dit que f est une isométrie négative.

Définition 2.4.25. *Soit E un espace euclidien. On note $SO(E)$ l'ensemble des isométries positives de E.*

Proposition 2.4.26. *L'ensemble $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$, appelé groupe spécial orthogonal de E.*

Exemples 2.4.27.

1. *L'application Id est dans $SO(E)$. Mais $-Id$ est dans $SO(E)$ si et seulement si $dim(E)$ est paire.*

2. *La réflexion s par rapport à un hyperplan vectoriel est toujours un automorphisme orthogonal négatif.*

Proposition 2.4.28. *Soit f une isométrie vectorielle positive d'un espace euclidien orienté E. Alors pour tous vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_n$ de E, on a : $[f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)] = [u_1, u_2, \cdots, u_n]$.*

2.5 Isométries en dimension 2.

Théorème 2.5.1. *Soit $A \in O(2)$, une matrice orthogonale de taille 2×2.*

- *Si* $\det A = +1$, *alors il existe un réel θ tel que:* $A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

- *Si* $\det A = -1$, *alors il existe un réel θ tel que:* $A = S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

Proof. Notons: $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2)$. Alors dans tous les cas : $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, et : $ac + bd = 0$, puisque les vecteurs colonnes de A constituent une base orthonormale de muni de son produit scalaire canonique. Donc il existe θ et θ' réels tels que : $a = \cos(\theta)$, $b = \sin(\theta)$, $c = \sin(\theta')$, $d = \cos(\theta')$. De plus, on a aussi : $\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta') = 0 = \sin(\theta + \theta')$, soit : $\theta + \theta' = k\pi$, avec : $k \in \mathbb{Z}$.
On peut donc écrire: $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -(-1)^k \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & (-1)^k \cos(\theta) \end{pmatrix}$
Enfin:

- Si $\det A = +1$, alors $(-1)^k = +1$ et $A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

- Si $\det A = -1$, alors $(-1)^k = -1$ et $A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

□

Remarque 2.5.2. *Si on identifie E au plan complexe $\mathbb{C}$, en représentant des vecteurs par leur affixe, alors la rotation vectorielle d'angle θ est représentée par l'application : $z \to z.e^{i\theta}$.*

Théorème 2.5.3. *Soit $(E, (.|.))$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2, orienté. Soit u un automorphisme orthogonal de E et A la matrice de u dans une base: $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, orthonormale directe de E.*

- *Si $\det A = +1$, alors il existe un réel θ tel que: $A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ Si u n'est pas l'identité de E, u est la rotation de E d'angle θ, θ étant donné par : $2\cos(\theta) = tr(u)$.*

- *Si $\det A = -1$, alors il existe un réel θ tel que: $A = S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$*

  u est alors la symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation: $x\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - y\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ et l'angle de D avec la droite dirigée par e_1 est égal à $\frac{\theta}{2}$.

Proof. Si u est un automorphisme orthogonal de E alors sa matrice représentative A dans une base orthonormale de E est alors orthogonale et on se trouve dans l'un des deux cas précédents. De plus, si:

- Si $\det(u) = +1$, alors : $\det(A) = +1$, et il existe un réel θ tel que: $A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

  Distinguons alors deux cas. Si : $\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, alors u est l'identité de E sinon u est une rotation de E d'angle θ, et on obtient par: $tr(A) = 2\cos(\theta) = tr(u)$.

- Si $\det(u) = -1$, alors : $\det(A) = -1$, et il existe un réel θ tel que: $A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

  Puisque A est symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses valeurs propres (réelles) λ_1 et λ_2 vérifient, en utilisant trace et déterminant : $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et : $\lambda_1\lambda_2 = -1$. Donc λ_1 et λ_2 valent 1 et -1.

  La matrice de u dans une base de vecteurs propres est alors $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $u^2 = Id$.

  u est donc bien une symétrie vectorielle. Comme enfin, les espaces propres de u sont orthogonaux, c'est une symétrie orthogonale. La droite par rapport à laquelle s'opère cette symétrie est l'ensemble des vecteurs invariants de u donnés par

$$\begin{cases} (\cos(\theta) - 1)x + \sin(\theta)y = 0 \\ \sin(\theta)x - (\cos(\theta) + 1)y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y\right] = 0 \\ \\ 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y\right] = 0 \end{cases}$$

  Comme enfin, soit le sinus, soit le cosinus mis en facteur est non nul, on en déduit bien que la droite invariante est la droite D dont l'équation dans la base $\mathcal{B}$ est bien celle annoncée. Le vecter $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$ est alors directeur de D et l'angle de ce vecteur avec e_1 est bien $\frac{\theta}{2}$.

□

Théorème 2.5.4. *Le groupe $SO(2)$ est commutatif. Si E est un espace vectoriel euclidien de dimension 2, le groupe $SO(E)$ est commutatif.*
En particulier, deux matrices orthogonales de déterminant 1 commutent, tout comme deux rotations dans un plan euclidien.

Proof. Si A et A' sont deux matrices de rotation d'angle θ et θ', alors :

$$\begin{aligned} AA' &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \\ &= A'A. \end{aligned}$$

Si R et R' sont deux rotations de E, de matrices respectives A et A' dans une base orthonormale directe de E, alors $R \circ R'$ est la rotation d'angle $\theta + \theta'$.

□

2.6 Projection orthogonale.

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie de E.

Théorème 2.6.1. *Pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique vecteur y dans F tel que:*

$$\|x - y\| = d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|.$$

Ce vecteur est également l'unique vecteur appartenant à F tel que $x - y \in F^{\perp}$. Son expression dans une base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de F est donnée par:

$$y = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k) e_k,$$

et on a:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2.$$

Proof. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de F (le théorème de Gram–Schmidt nous assure l'existence d'une telle base). Pour x dans E, on définit le vecteur $y \in F$ par:

$$y = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k) e_k.$$

On a alors $(x - y|e_j) = 0$ pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, c'est-à-dire que $x - y \in F^{\perp}$. Le théorème de Pythagore donne alors, pour tout $z \in F$:

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|(x - y) + (y - z)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \\ &\geq \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

et on a bien $\|x-y\| = d(x,F)$.
S'il existe un autre vecteur $u \in F$ tel que $\|x-u\| = d(x,F) = \delta$, on a:

$$\delta^2 = \|x-u\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-u\|^2 = \delta^2 + \|y-u\|^2$$

on déduit alors que $\|y-u\| = 0$ et $y = u$.
On sait déjà que le vecteur $y \in F$ est tel que $x - y \in F^\perp$. Supposons qu'il existe un autre vecteur $u \in F$ tel que $x - u \in F^\perp$, pour tout $z \in F$, on a alors:

$$\begin{aligned} \|x-z\|^2 &= \|(x-u)+(u-z)\|^2 \\ &= \|x-u\|^2 + \|u-z\|^2 \\ &\geq \|x-u\|^2 \end{aligned}$$

donc $\|x-u\| = d(x,F)$ et $u = y$ d'après ce qui précède.
La dernière égalité se déduit de :

$$\|x\|^2 = \|(x-y)+y\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Définition 2.6.2. *Si x est un vecteur de E, alors le vecteur y de F qui lui est associé dans le théorème précédent est la meilleure approximation de x dans F. En considérant la caractérisation géométrique $x - y \in F^\perp$, on dit aussi que y est la projection orthogonale de x sur F.*
On note $y = p_F(x)$ et on dit que l'application p_F est la projection orthogonale de E sur F. On a donc :

$$(y = p_F(x)) \Leftrightarrow (y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp) \Leftrightarrow (y \in F \text{ et } \|x-y\| = d(x,F)).$$

Proposition 2.6.3 (Inégalité de Bessel)**.** *Pour tout vecteur $x \in E$, on a:*

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 \leq \|x\|^2.$$

Exemple 2.6.4. *Si $D = \mathbb{R}a$ est une droite vectorielle, une base orthonormée de D est $\left\{\frac{a}{\|a\|}\right\}$ et pour tout $x \in E$, on a $p_D(x) = \frac{(x|a)}{\|a\|^2}a$.*

2.7 Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

Définition 2.7.1. *On dit qu'une famille orthonormée $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans E si le sous espace vectoriel de E engendré par B est dense dans $(E, \|.\|)$.*
Dire que la famille orthonormée $\mathcal{B}$ est totale dans E équivaut à dire que pour tout x dans E et pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un $(n+1)$-uplet $(c_0, c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que:

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{n} c_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Théorème 2.7.2. *Avec les notations qui précédent, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *La famille orthonormée $\mathcal{B}$ est totale.*
2. *Pour tout x dans E, on a :*
$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} (x|e_k)e_k.$$
(série convergente dans $(E, \|.\|)$)
3. *Pour tous x, y dans E, on a :*
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x|e_k)(y|e_k) = (x|y).$$
(égalité de Parseval).
4. *Pour tout x dans E, on a :*
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x|e_k)^2 = \|x\|^2.$$
(égalité de Parseval).

2.8 Adjoint d'un endomorphisme.

Proposition 2.8.1. *Pour tout $x \in E$, on note φ_x la forme linéaire $y \in E \longrightarrow (x|y)$. L'application $x \longrightarrow \varphi_x$ est bijective de E dans son dual E^*, ensemble des formes linéaires sur E.*

Proposition 2.8.2. *Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ il existe un unique endomorphisme noté u^* tel que*
$$\forall (x, y) \in E^2, (x|u(y)) = (u^*(x)|y).$$
u^* est appelé adjoint de u.

Proof. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$. L'application $y \in E \longrightarrow (x|u(y))$ est une forme linéaire sur E, donc par la proposition précédente, il existe un unique $x^* \in E$ tel que $\forall y \in E, (x|u(y)) = \varphi_{x^*}(y) = (x^*|y)$. On définit donc de manière unique l'application $u^* : E \longrightarrow E, x \longrightarrow x^*$. Reste à vérifier que u^* est un endomorphisme. Pour tout $(x, x') \in E^2$, pour tout $\lambda \in K$, pour tout $y \in E$:
$$\begin{aligned} (u^*(\lambda x + x')|y) &= (\lambda x + x'|u(y)) = \lambda(x|u(y)) + (x'|u(y)) \\ &= \lambda(u^*(x)|y) + (u^*(x')|y) \\ &= (\lambda u^*(x) + u^*(x')|y) \end{aligned}$$
Ceci étant vrai pour tout $y \in E$, il vient $u^*(\lambda x + x') - \lambda u^*(x) + u^*(x') \in E^\perp = \{0\}$, d'où
$$u^*(\lambda x + x') = \lambda u^*(x) + u^*(x')$$
et u^* est linéaire.

$\square$

Proposition 2.8.3. *On a les propriétés suivantes:*

1. *$(u^*)^* = u$ pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$;*

2. *$Id^* = Id$.*

3. *$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$ pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E)$.*

4. *L'application $u \longrightarrow u^*$ est bijective de $\mathcal{L}(E)$ sur lui-même et linéaire.*

Proposition 2.8.4. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est inversible, alors $u^* \in \mathcal{L}(E)$ est inversible et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.*

Proof. Si u est inversible, $u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}$ et $u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}$, et par la propriété de composition des adjoints on a : $(u^{-1})^* \circ u^* = \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$ et $u^* \circ (u^{-1})^* = \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$.

□

Proposition 2.8.5. *Supposons E de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. On a:*

$$Mat(u, \mathcal{B}) = (e_i | u(e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Proof. $u(e_j)$ est la j-ème colonne de $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ et $(e_i | u(e_j))$ sont i-ème élément. □

Proposition 2.8.6. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, on a*

$$Mat(u^*, \mathcal{B}) = {}^t Mat(u, \mathcal{B}).$$

Proposition 2.8.7. *Soit F un sous-espace vectoriel de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*.*

Proof. Supposons F stable par u, i.e. $u(F) \subset F$. Soit $x \in F^\perp$. On a pour tout $y \in F$:

$$(u^*(x) | y) = (x | u(y)) = 0,$$

donc $u^*(x) \in F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par u^*. Ceci montre également la réciproque puisque $(u^*)^* = u$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

□

2.8.1 Endomorphismes autoadjoints (Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien).

Définition 2.8.8. *On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si $u^* = u$, i.e. si*

$$\forall\ (x, y) \in E^2,\ (x | u(y)) = (u(x) | y).$$

Si E est euclidien, on parle aussi d'endomorphisme symétrique.

Proposition 2.8.9. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint (i.e. u symétrique). Si E est euclidien, alors $Mat(u, \mathcal{B}) = {}^t Mat(u, \mathcal{B})$, et la matrice est dite symétrique.*

Définition 2.8.10 (Endomorphisme autoadjoint défini positif.)**.** *On dit qu'un endomorphisme autoadjoint u est dit:*

1. *positif si pour tout $x \in E$, $(x|u(x)) \geq 0$;*

2. *défini positif si ($(x|u(x)) = 0 \Leftrightarrow x = 0$).*

Définition 2.8.11 (Matrice définie positive)**.** *Une matrice carrée réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite:*

1. *positive si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXAX \geq 0$;*

2. *définie positive si ${}^tXAX = 0 \Leftrightarrow X = 0$.*

Proposition 2.8.12. *Soit une base orthonormée $\mathcal{B}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. u est positif (resp.défini positif) si et seulement si Mat$(u, \mathcal{B})$ est positive (resp. définie positive).*

Proof. Il suffit de remarquer que si $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ et si X est le vecteur représentant $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$, on a dans le cas euclidien:

$$(x|u(x)) = {}^tXAX.$$

□

2.8.2 Réduction des endomorphismes symétriques.

Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien de dimension n.

Proposition 2.8.13. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est symétrique, alors toutes ses valeurs propres sont réelles.*

Proof. u est scindé puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u, et $x \in E$ un vecteur propre non nul associé à λ. On a:

$$\begin{aligned}
(\lambda - \bar{\lambda})\|x\|^2 &= (\lambda - \bar{\lambda})(x|x) \\
&= \lambda(x|x) - \bar{\lambda}(x|x) \\
&= (x|\lambda x) - (\lambda x|x) \\
&= (x|u(x)) - (u(x)|x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque u est autoadjoint. x étant non nul il vient $\bar{\lambda} = \lambda$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Proposition 2.8.14. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E euclidien. Si u est symétrique, alors u est scindé sur $\mathbb{R}$.*

Proof. Soit $\mathcal{B}$ une base de E euclidien. Alors la matrice $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ est une matrice réelle symétrique. C'est aussi une matrice complexe hermitienne, donc l'endomorphisme $X \longrightarrow AX$ de $\mathbb{C}^n$ est hermitien toutes ses valeurs propres sont réelles. Donc u est scindé sur $\mathbb{R}$. □

Proposition 2.8.15. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est autoadjoint, i.e. symétrique, alors ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*

Proof. Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de u, et x_1 (resp. x_2) un vecteur propre associé à λ_1 (resp. λ_2). On a:

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1|x_2) &= \lambda_1(x_1|x_2) - \lambda_2(x_1|x_2) \\
&= (\bar{\lambda}_1 x_1|x_2) - (x_1|\lambda_2 x_2) \\
&= (\lambda_1 x_1|x_2) - (x_1|\lambda_2 x_2) \\
&= (u(x_1)|x_2) - (x_1|u(x_2)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que λ_1 et λ_2 sont réelles puis que u est autoadjoint. λ_1 et λ_2 étant distinctes, on a nécessairement $(x_1|x_2) = 0$. Les vecteurs x_1 et x_2 étant quelconques, les sous-espaces propres sont orthogonaux. □

Théorème 2.8.16 (Théorème spectral)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est symétrique alors u est diagonalisable à valeurs propres réelles, et E est la somme directe orthogonale de ses sous-espaces propres.*

Proof. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Soit F la somme de ses sous-espaces propres. F est stable par u, donc $F^\perp$ est stable par $u^* = u$. Supposons $F^\perp \neq \{0\}$ et considérons la restriction $u|_{F^\perp}$ de u à $F^\perp$. $u|_{F^\perp}$ est un endomorphisme autoadjoint de $F^\perp$, donc il est scindé à valeurs propres réelles. Si λ est une valeur propre de $u|_{F^\perp}$, elle est aussi valeur propres de u, et alors le sous-espace propre associé est inclus dans F, ce qui contredit $F \cap F^\perp = \{0\}$. On obtient donc $F^\perp = \{0\}$, d'où $F = E$, et u est diagonalisable à valeurs propres réelles. Donc la somme des sous-espaces propres est orthogonale. □

Corollaire 2.8.17. *Soit un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. u est autoadjoint (i.e. symétrique) si et seulement si il existe une base orthonormée de E dans laquelle sa matrice est diagonale réelle.*
Soit une matrice carrée réelle d'ordre n. A est symétrique si et seulement si il existe une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale réelle.

Proof. Soit u autoadjoint. Supposons que u admette p valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, et notons $\mathcal{B}_i,\ i = 1, \cdots, p$ une base orthonormée du i-ème espace propre. Alors la concaténation $\mathcal{B}$ des $\mathcal{B}_i,\ i = 1, \cdots, p$ est une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
Pour le second point, si A est symétrique, alors l'endomorphisme associé $X \longrightarrow AX$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$, donc par le premier point il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que sa matrice soit diagonale réelle. Alors que la matrice de passage de la base canonique à la base orthonormée $\mathcal{B}$ est orthogonale. □

Proposition 2.8.18. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme autoadjoint, alors:*

1. *u est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.*
2. *u est défini positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.*

Soit A est une matrice carrée symétrique ou hermitienne, alors:

1. *A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.*
2. *A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.*

Proof. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormée de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ réels. Si u est positif, alors $\lambda_i = (e_i|u(e_i) \geq 0$. Si u est défini positif, $e_i \neq 0$ entraîne $\lambda_i = (e_i|u(e_i)) > 0$.
Réciproquement, pour tout $x \in E$, de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a:

$$(x|u(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$$

donc si toutes les valeurs propres λ_i sont positives, alors u est positif. Si toutes les valeurs propres λ_i sont strictement positives, alors $(x|u(x)) = 0 \ \Leftrightarrow \forall\ i = 1, \cdots, n,\ x_i = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$ et u est bien défini positif. □

2.8.3 Réduction d'une isométrie vectorielle.

Lemme 2.8.19. *Soit $u \in O(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u alors $F^{\perp}$ l'est aussi.*

Proof. On suppose F stable par u et donc $u(F) \subset F$. Or u est bijective donc conserve la dimension et par conséquent $u(F) = F$. Soit $x \in F^{\perp}$. Pour tout $y \in F$, on peut écrire $y = u(a)$ avec $a \in F$ et alors

$$(u(x)|y) = (u(x)|u(a)) = (x|a) = 0.$$

Ainsi $u(x) \in F^{\perp}$. □

Lemme 2.8.20. *Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel réel de dimension finie non nulle alors il existe au moins une droite vectorielle ou un plan stable par u.*

Proof. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire annulateur de u (par exemple, son polynôme caractéristique ou minimal). On peut écrire $P = P_1 P_2 \cdots P_m$ avec P_k polynômes unitaires irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
Puisque $P(u) = 0$, on a $P_1(u) \circ P_2(u) \circ \cdots \circ P_m(u) = 0$ et par conséquent, au moins l'un des endomorphismes composés n'est pas injectif. Supposons que ce soit celui d'indice k. Le polynôme P_k est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, il est donc de l'une des deux formes suivantes:
Cas $P(X) = X - \lambda$
λ est alors valeur propre de u et tout vecteur propre associé engendre une droite vectorielle stable.
Cas $P(X) = X^2 + pX + q$ avec $\Delta = p^2 - 4q < 0$.
Soit $x \in \ker(P(u))$. On a $u^2(x) + pu(x) + qx = 0_E$ et donc $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u. Dans les deux cas, u admet une droite ou un plan stable. □

Théorème 2.8.21. *Soit $u \in O(E)$ alors il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de blocs diagonaux de la forme*

$$(1),\ (-1) \quad \textit{et} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \ \textit{avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, l'espace E est la somme directe orthogonale de $E_1(u)$, $E_{-1}(u)$ et de plans sur lesquels u opère comme une rotation.

Proof. Par récurrence sur la dimension de E.
Cas $n = 1$: u est une isométrie d'une droite et peut donc être représentée en base orthonormale par (1) ou (-1).
Cas $n = 2$: u est une isométrie du plan et peut donc être représentée en base orthonormale par

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Supposons la propriété établie jusqu'au rang n avec $n \geq 2$.
Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$ et $u \in O(E)$. Il existe une droite ou un plan F stable par u et $F^\perp$ est alors aussi stable par u. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale de $F^\perp$ telle que la matrice de u dans celle-ci soit de la forme voulue. Par l'étude initiale, il existe une base orthonormale de F telle que la matrice de u dans celle-ci soit de la forme voulue. En accolant ces deux, on forme une base orthonormale de E comme voulue. Récurrence établie. □

2.8.4 Réduction des isométries positives en dimension 3.

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

Orientation induite.

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace E et $D = \mathcal{P}^\perp$ sa droite normale.
Il n'existe pas a priori d'orientation préférentielle ni sur $\mathcal{P}$, ni sur D. Choisissons une orientation sur D et soit u vecteur unitaire direct de D: on dit alors que D est un axe.
Complétons u en une base orthonormale directe (u, v, w) de E. La famille (v, w) est une base orthonormale de $\mathcal{P}$. En choisissant celle-ci pour base orientée de référence, on dit qu'on a muni le plan $\mathcal{P}$ de l'orientation induite de celle de D. En effet, on peut montrer que cette orientation est indépendante de la manière dont on a complété u en une base orthonormée directe.

Remarque 2.8.22. *Si l'on inverse l'orientation sur D, l'orientation induite sur $\mathcal{P}$ est, elle aussi, inversée.*

Rotation de l'espace.

Une isométrie positive f de E autre que l'identité peut être représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormale (u, v, w). Quitte à changer en son opposé le premier vecteur de base, on peut supposer la base orthonormale (u, v, w) directe.
On introduit alors la droite $D = \mathrm{Vect}(u)$ et le plan $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(v, w)$ orienté par le vecteur normal u. Pour $x \in E$, on peut écrire

$$x = p_D(x) + p_{\mathcal{P}}(x) \text{ avec } p_D(x) \in D \text{ et } p_{\mathcal{P}}(x) \in \mathcal{P}$$

et alors

$$f(x) = p_D(x) + \mathrm{Rot}_\theta(p_{\mathcal{P}}(x)).$$

Définition 2.8.23. *On dit alors que f est la rotation d'axe dirigé et orienté par u et d'angle θ. On la note $Rot_{u,\theta}$.*

Proposition 2.8.24.

1. $\forall \theta,\ \theta' \in \mathbb{R},\ Rot_{u,\theta} = Rot_{u,\theta'} \Leftrightarrow\ \theta = \theta'[2\pi]$.
2. $\forall \theta,\ \theta' \in \mathbb{R},\ Rot_{u,\theta} \circ Rot_{u,\theta'} = Rot_{u,\theta+\theta'} = Rot_{u,\theta'} \circ Rot_{u,\theta}$.
3. $\forall \theta \in \mathbb{R},\ Rot_{u,\theta}^{-1} = Rot_{u,-\theta}$.

Exemple 2.8.25. *Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Déterminons l'endomorphisme f de E de matrice dans $\mathcal{B}$.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est orthogonale et $detA = 1$ donc f est une rotation autre que l'identité.
Axe D:
L'axe D est formé des vecteurs invariants par f. Pour $u = xi + yj + zk$, on a

$$f(u) = u \Leftrightarrow x = y = z.$$

Par suite $D = Vect(i + j + k)$. Orientons D par le vecteur $u = i + j + k$. Angle θ de la rotation : On a $tr(f) = 2\cos\theta + 1$ or $tr(f) = tr(A) = 0$ donc $\cos\theta = -\frac{1}{2}$.
Pour conclure, il reste à déterminer le signe de $\sin\theta$.
Soit $x = \alpha u + \beta v + \gamma w \notin D$. On a

$$[u, x, f(x)] = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta & \beta\cos(\theta) - \gamma\sin(\theta) \\ 0 & \gamma & \beta\sin(\theta) + \gamma\cos(\theta) \end{vmatrix} = (\beta^2 + \gamma^2)\sin(\theta)$$

Ainsi, le signe de $\sin(\theta)$ est celui de

$$[u, x, f(x)]$$

En pratique, on détermine le signe de $\sin(\theta)$ en étudiant celui de

$$[u, i, f(i)].$$

Ici

$$[u, i, f(i)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Donc

$$\theta = \frac{2\pi}{3}[2\pi].$$

Finalement, f est la rotation d'axe D dirigé et orienté par $u = i + j + k$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Chapter 3

Espaces hermitiens.

3.1 Formes hermitiennes. Produit scalaire hermitien.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'établir, dans le cadre des espaces vectoriels complexes, une théorie analogue à celle du produit scalaire. Il ne s'agit pas d'une généralisation gratuite : les notions que nous introduirons interviennent en des nombreuses branches des mathématiques et de la physique mathématique, par exemple en théorie quantique des champs. D'où leur importance.

3.1.1 Formes hermitiennes.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Pour définir l'analogue du produit scalaire sur E, on serait tenté de considérer la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} s: \qquad & E \times E \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (x, y) \longrightarrow x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n. \end{aligned}$$

avec $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,\ y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. et $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Ce pendant la propriété spécifique du produit scalaire, à savoir que s est définie positive, n'est pas satisfaite. Ceci pour deux raisons:

- d'abord parce qu'il n'a pas de sens de dire que $s(x, x) \geq 0$; (car $s(x, x)$ est un nombre complexe).
- d'autre part parce que si $s(x, x) = x_1^2 + \cdots + x_n^k$ est nul cela n'implique pas que $x = 0$.

Considérons alors l'application

$$\begin{aligned} s': \qquad & E \times E \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (x, y) \longrightarrow \overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n. \end{aligned}$$

On aura:

$$s'(x, x) = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$$

et dans ce cas on a bien:

$$s'(x, x) \geq 0,\ \forall\, x \in E \text{ et } s'(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

C'est pourquoi pour les espaces vectoriels complexes on utilise, comme analogue du produit scalaire, l'application s' plutôt que s. Cependant, s' n'est pas bilinéaire ; En effet, $\forall\ x, y, z \in E,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} s'(x+y,z) &= s'(x,z)+s'(y,z) \\ s'(x,y+z) &= s'(x,y)+s'(x,z) \\ s'(x,\lambda y) &= \lambda s'(x,y) \end{aligned}$$

mais; $s'(\lambda x, y) = \overline{\lambda} s'(x, y)$. (on dit que s' est antilinéaire en x.)
De plus s' n'est pas symétrique, mais vérifie la propriété suivante:

$$s'(x,y) = \overline{s'(y,x)}.$$

Cette propriété est dite symétrie hermitienne.

Définition 3.1.1. *Soit E un espace vectoriel su $\mathbb{C}$. On appelle forme hermitienne une application*

$$h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$$

antilinéaire dans le premier argument, linéaire dans le second argument et à symétrie hermitienne, c'est-à-dire telle que, $\forall\ x, y, z \in E,\ \lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} &1) \quad h(x+y,z) = h(x,z)+h(y,z) \\ &2) \quad h(x,y+z) = h(x,y)+h(x,z) \\ &3) \quad h(x,\lambda y) = \lambda h(x,y) \\ &4) \quad h(\lambda x,y) = \overline{\lambda} h(x,y) \\ &5) \quad h(x,y) = \overline{h(y,x)} \end{aligned}$$

3.1.2 Produit scalaire hermitien.

Les formes hermitiennes jouent le même rôle que les formes bilinéaires symétriquesdu chapitre précédent. Notons, en effet, que si h est une forme hermitienne, on a de la propriété 5):

$$h(x,x) \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Définition 3.1.2. *Une forme hermitienne h est dite définie positive si:*

$$h(x,x) \geq 0,\ \forall\ x \in E \ \textit{et}\ h(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Définition 3.1.3. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On appelle produit scalaire hermitien est une forme hermitienne*

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : \qquad & E \times E \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (x,y) \longrightarrow \langle x,y\rangle \end{aligned}$$

définie positive. En d'autres termes, $\langle\ ,\ \rangle$ vérifie les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} &1) \quad \langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle \\ &2) \quad \langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle \\ &3) \quad \langle x,\lambda y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle \\ &4) \quad \langle \lambda x,y\rangle = \overline{\lambda}\langle x,y\rangle \\ &5) \quad \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} \\ &6) \quad \langle x,x\rangle \geq 0,\ \forall\ x \in E \ \textit{et}\ \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire hermitien est dit espace hermitien.

Remarque 3.1.4. *Un espace vectoriel complexe E non nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire hermitien est dit préhilbertien complexe. De même un espace vectoriel réel, non nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire est dit préhilbertien réel. Ainsi les espaces préhilbertiens de dimension finie sont les espaces hermitiens et euclidiens. Le préfixe "pré" devant l'adjectif "hilbertien" tient au fait que l'on réserve le nom d'espace hilbertien aux espaces préhilbertiens qui sont complets (c'est-à-dire : toute suite de Cauchy converge) pour la norme que nous allons définir. On démontre que tout espace préhilbertien de dimension finie (c'est-à-diretout espace euclidien ou hermitien) est complet.*

Exemples 3.1.5.

1. *Soit $E = \mathbb{C}^n$ avec $\langle , \rangle$ défini par*

$$\langle x, y\rangle = \overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n, \quad \text{où } x = (x_1, \cdots, x_n),\ y = (y_1, \cdots, y_n).$$

   Le produit scalaire hermitien ainsi défini est dit produit scalaire hermitien canonique. Comme pour les espaces euclidiens, nous verrons que si E est un espace hermitien, moyennant le choix d'une base, on peut identifier E à $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien canonique. En d'autres termes il s'agit, à un changement de base près, du seul exemple d'espace hermitien.

2. *Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n et $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. On définit alors un produit scalaire hermitien sur E, en posant :*

$$\langle x, y\rangle_{\mathcal{B}} = \overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n, \quad \text{où } x = (x_1, \cdots, x_n),\ y = (y_1, \cdots, y_n)$$

   pour $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,\ y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. $\langle x, y\rangle_{\mathcal{B}}$ est dit produit scalaire hermitien associé à la base $\mathcal{B}$.

3. *Soient f et g deux applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose:*

$$\int_0^1 (f(t) + ig(t))dt = \int_0^1 f(t)dt + i\int_0^1 g(t)dt.$$

   On considère l'espace vectoriel : $E = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C},\ \text{continues}\}$. Il est facile de voir que l'application $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$h(f, g) = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)dt$$

   est une forme hermitienne définie positive.

3.2 Réduction de Gauss.

Soit h une forme hermitienne sur un espace vectoriel (complexe) E de dimension finie et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Puisque h est anti-linéaire dans le premier argument et linéaire dans le second, on a, pour $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$

$$h(x, y) = h\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{k=j}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{x}_i y_j h(e_i, e_j).$$

Les $h(e_i, e_j)$ sont des éléments de $\mathbb{C}$. Si on note $a_{ij} := h(e_i, e_j)$, l'expression de h dans la base $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ est:

$$h(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_i y_j$$

c'est-à-dire h est du type:

$$h(x,y) = a_{11}\overline{x}_1 y_1 + a_{12}\overline{x}_1 y_2 + \cdots + a_{ij}\overline{x}_i y_j + \cdots + a_{nn}\overline{x}_n y_n.$$

Exemple 3.2.1. *Par exemple:*

$$f(x,y) = \overline{x}_1 y_1 + (1-3i)\overline{x}_2 y_2 - 5i\overline{x}_3 y_1 + \overline{x}_1 y_3$$

est anti-linéaire dans le premier argument et linéaire dans le second.

Remarque 3.2.2. *La vérification de la symétrie hermitienne est tout aussi facile : le fait que la valeur de $h(x,y)$ change en sa conjuguée lorsqu'on échange les rôles de x et y, équivaut, bien entendu, à*

$$a_{ij} = \overline{a}_{ji}$$

c'est-à-dire le coefficient de $\overline{x}_i y_j$ doit être égal au conjugué de celui de $\overline{x}_j y_i$. Ainsi, par exemple, l'expression $f(x,y)$ ci-dessus n'est pas une forme hermitienne, alors que:

$$h(x,y) = \overline{x}_1 y_1 + 5\overline{x}_2 y_2 + 4\overline{x}_3 y_3 - i\overline{x}_1 y_2 + i\overline{x}_2 y_1 + (3+2i)\overline{x}_1 y_3 + (3-2i)\overline{x}_3 y_1 + (1+i)\overline{x}_2 y_3 + (1-i)\overline{x}_3 y_2$$

est hermitienne.

Pour reconnaître si une forme hermitienne est définie positive, on peut adapter sans difficultés la méthode de Gauss. Voici comment procède. Notons tout d'abord que, comme il en est pour les formes bilinéaires, une forme hermitienne h est connue si l'application $\tilde{q} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{q}(x) = h(x,x)$$

Par exemple, soit

$$h(x,y) = \overline{x}_1 y_1 + 5\overline{x}_2 y_2 + (3+i)\overline{x}_1 y_2 + (3-i)\overline{x}_2 y_1,$$

on a

$$\tilde{q}(x) = |x_1|^2 + 5|x_2|^2 + (3+i)\overline{x}_1 x_2 + (3-i)\overline{x}_2 x_1.$$

Pour revenir à $h(x,y)$ il suffira de remplacer les x_i par le y_i

Notons que, comme dans le cas euclidien, si h est définie positive tous les coefficientsdes termes $|x_i|^2$ dans $\tilde{q}(x)$ sont strictement positifs (car ces coefficients sont les valeursde $h(e_i, e_i)$). Ainsi, si dans $\tilde{q}(x)$ il n'y a pas de carrés de modules, h n'est pas un produit scalaire hermitien. Supposons donc que $\tilde{q}(x)$ contient un terme en $|x_i|^2$ et, pour simplifier, raisonnons sur un exemple (le cas général se traite d'une manière analogue).

Soit h la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^3$ définie dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ par:

$$\tilde{q}(x) = |x_1|^2 + 5|x_2|^2 + 3|x_3|^2 + 2i\overline{x}_1 x_2 - 2ix_1\overline{x}_2 + i\overline{x}_2 x_3 - ix_2\overline{x}_3$$

On choisit un terme en $|x_i|^2$ (par exemple $|x_1|^2$) et on cherche le coefficient de $\overline{x}_i$ (ici: $x_1 + 2ix_2$). On écrit:

$$\tilde{q}(x) = |x_1 + 2ix_2|^2 + \text{ termes correctifs.}$$

Dans les termes correctifs il n'y a ni $\overline{x}_i$ ni x_i, comme on le vérifie facilement. On itère ensuite le procédé. Dans notre cas :

$$\begin{aligned}\tilde{q}(x) &= |x_1 + 2ix_2|^2 - 4|x_2|^2 + 5|x_2|^2 + 3|x_3|^2 + i\overline{x}_2 x_3 - i\overline{x}_3 x_2 \\ &= |x_1 + 2ix_2|^2 + |x_2|^2 + 3|x_3|^2 + i\overline{x}_2 x_3 - i\overline{x}_3 x_2 \\ &= |x_1 + 2ix_2|^2 + |x_2 + ix_3|^2 - |x_3|^2 + 3|x_3|^2 \\ &= |x_1 + 2ix_2|^2 + |x_2 + ix_3|^2 + 2|x_3|^2.\end{aligned}$$

On voit immédiatement que $\tilde{q}(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{C}^3$ et que $\tilde{q}(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. h est donc définie positive.

3.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme.

Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace vectoriel complexe (non nécessairement de dimension finie) muni d'un produit scalaire hermitien. On pose

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Proposition 3.3.1. *Soit E préhilbertien complexe. Alors pour tous $x, y \in E$:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si x et y sont liés.

Proof.

- Si $\langle x, y \rangle = 0$ l'inégalité est évidente.
- Supposons $\langle x, y \rangle \neq 0$ (en particulier $y \neq 0$). Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a:

  $$\begin{aligned}0 &\leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \overline{\lambda} \langle y, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \overline{\lambda} \overline{\langle x, y \rangle} + \lambda \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \|y\|^2.\end{aligned}$$

  Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, posons $\lambda = \mu \frac{\overline{\langle x,y \rangle}}{|\langle x,y \rangle|}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

  On aura:

  $$0 \leq \|x\|^2 + 2\mu |\langle x, y \rangle| + \mu^2 \|y\|^2, \ \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

  Puisque $y \neq 0$, le second membre est un trinôme en μ ; son discriminant est donc ≤ 0, c'est-à-dire:

  $$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

  Si $x + \lambda y = 0$ on a l'égalité, dans cette expression (il suffit de remplacer x par λy).

  Réciproquement l'égalité implique l'existence d'une racine λ dans le trinôme et donc d'un $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x + \lambda y = 0$.

$\square$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz permet de montrer que tout espace préhilbertien estun espace vectoriel norme:

Proposition 3.3.2. *L'application* $\|.\| : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array}$ *est une norme sur* E*, c'est-à-dire elle vérifie:*

1. $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in E$ *et* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|\ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in E.$
3. $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|,\ \forall\ x, y \in E.$ *De plus l'égalité a lieu si et seulement si il existe* $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 0$ *tel que* $y = \lambda x$ *(ou* $x = \lambda y$*).*

Proof. Il suffira de démontrer 3., car 1. et 2. dérivent immédiatement de la définition du produit scalaire hermitien.
On a, en notant $\mathrm{Re}(z)$ la partie réelle de $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rcl} \|x+y\|^2 & = & \langle x+y, x+y\rangle \\ & = & \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ & = & \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \\ & \leq & \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\ & \leq & \|x\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| + \|y\|^2 \\ & \leq & (\|x\| + \|y\|)^2. \end{array}$$

D'où $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Si $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on l'égalité. Réciproquement si on a l'égalité, en remontant les calculs on trouve : □

3.4 Matrices hermitiennes.

Comme il en est des formes bilinéaires, il est utile de représenter les formes hermitiennes par des matrices.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$ et $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme hermitienne. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de E et $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$ on a:

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{x}_i y_j h(e_i, e_j).$$

h est donc déterminée par la connaissance des valeurs $h(e_i, e_j)$ sur une base.

Définition 3.4.1. *Soient* h *une forme hermitienne sur* E*, et* $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ *une base de* E*. On appelle matrice de* h *dans la base* $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ *la matrice:*

$$Mat(h, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} h(e_1, e_1) & h(e_1, e_2) & \cdots & h(e_1, e_n) \\ h(e_2, e_1) & h(e_2, e_2) & \cdots & h(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(e_n, e_1) & h(e_n, e_2) & \cdots & h(e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'élément de la i^{eme} *ligne et* j^{eme} *colonne est le coefficient de* $\overline{x}_i y_j$*.*

Exemple 3.4.2. *Soit h la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^3$ qui dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est représentée par:*

$$h(x,y) = \overline{x}_1y_1 - 5\overline{x}_2y_2 + 4\overline{x}_3y_3 - i\overline{x}_1y_2 + i\overline{x}_2y_1 + (3+2i)\overline{x}_1y_3 + (3-2i)\overline{x}_3y_1 + (1+i)\overline{x}_2y_3 + (1-i)\overline{x}_3y_1.$$

On a:

$$Mat(h,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3+2i \\ i & 5 & 1+i \\ 3-2i & 1-i & 4 \end{pmatrix}.$$

Notons que la matrice H d'une forme hermitienne vérifie la propriété ${}^t\overline{H} = H$. On pose donc la définition suivante:

Définition 3.4.3. *Une matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si : ${}^t\overline{H} = H$. En particulier les matrices symétriques réelles sont les matrices hermitiennes réelles. Les matrices hermitiennes sont donc les matrices qui représentent les formes hermitiennes.*

Remarque 3.4.4.

1. *Les éléments de la diagonale d'une matrice hermitienne sont des réels.*
2. *Nous allons voir que, tout comme pour les matrices symétriques réelles*
   (a) *les matrices hermitiennes sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$.*
   (b) *une forme hermitienne définit un produit scalaire hermitien si et seulement si la matrice qui la représente dans une base quelconque, qui est justement une matrice hermitienne, a toutes ses valeurs propres strictement positives.*

Soient h une forme hermitienne sur E, $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base, et

$$H = \mathrm{Mat}(h,\mathcal{B}), \quad X = \mathrm{Mat}(x,\mathcal{B}), \quad Y = \mathrm{Mat}(y,\mathcal{B}).$$

On a

$$h(x,y) = {}^t\overline{X}HY.$$

Changement de base.

Soient h une forme hermitienne, $\mathcal{B}$ une base, $H = \mathrm{Mat}(h,\mathcal{B})$, $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ une nouvelle base et $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$. la matrice de passage. Si X et Y sont les matrices de x et y dans la base $\mathcal{B}$ et X' et Y' sont les matrices de x et y dans la base $\mathcal{B}'$, on a:

$$X' = P^{-1}X \ \text{ et } Y' = P^{-1}Y.$$

En notant $H' = \mathrm{Mat}(h,\mathcal{B}')$ on a:

$$h(x,y) = {}^t\overline{X'}H'Y'.$$

D'autre part:

$$h(x,y) = {}^t\overline{X}HY = {}^t(\overline{PX'})HPY' = {}^t\overline{X'}({}^t\overline{P}HP)Y'$$

pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, d'où:

$$H' = {}^t\overline{P}HP.$$

3.5 Bases orthonormées. Orthogonalité.

Les résultats sur l'orthogonalité dans les espaces euclidiens se transportent facilementau cas hermitien.

Définition 3.5.1. *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace hermitien. Une base $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ est dite orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$. Elle est dite orthonormée si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.*
Il est clair que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale si et seulement si:

$$Mat(\langle .,. \rangle, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \ a_i \in \mathbb{R}$$

ou encore:

$$\tilde{q}(x) = a_1|x_1|^2 + \cdots + a_n|x_n|^2, \ (où\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i).$$

De même, $\mathcal{B}$ est une base orthonormée si et seulement si:

$$Mat(\langle .,. \rangle, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore:

$$\tilde{q}(x) = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2, \ (où\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i).$$

Théorème 3.5.2. *Sur tout espace hermitien il existe des bases orthonormées. En particulier tout espace hermitien est isomorphe à $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien canonique.*

La démonstration est la même que dans le cas euclidien. Notons que si X et Y sont les matrices qui représentent dans une base orthonormée les vecteurs x, y on a :

$$\langle x, y \rangle = {}^t\overline{X}Y.$$

Les procédés d'orthonormalisation de Schmidt s'adapte facilement au cas hermitien, permettant d'associer à toute base une base orthonormée d'une façon canonique.

Définition 3.5.3. *Soit $A \subset E$. On note $A^\perp = \{x \in E |\ \langle x, y \rangle = 0, \ \forall y \in A\}$. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, dit orthogonal de A.*

Proposition 3.5.4. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel hermitien E. Alors:*

1. $dim(E) = dim(F) + dim(F^\perp)$.
2. $E = F \oplus F^\perp$.
3. $F^{\perp\perp} = F$.

3.6 Endomorphisme adjoint.

Proposition 3.6.1. *Soit E un espace hermitien et $f \in End(E)$. Il existe un et un seul endomorphisme f^* de E tel que*

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle,\ \forall x, y \in E.$$

f^* est dit adjoint de f. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base orthonormée et $A = Mat(f, \mathcal{B})$ alors la matrice $A^* = Mat(f^*, \mathcal{B})$ est $A^* = {}^t\overline{A}$.

Proof. La démonstration est la même que dans le cas euclidien. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormée de E et notons

$$A^* = \mathrm{Mat}(f^*, \mathcal{B}),\ A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}),\ X = \mathrm{Mat}(x, \mathcal{B}),\ Y = \mathrm{Mat}(y, \mathcal{B}).$$

Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, l'identité de l'énoncé s'écrit:

$${}^t(\overline{AX})Y = {}^t(\overline{X})A^*Y,\ \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$$

ce qui est équivalent à $A^* = {}^t\overline{A}$. Ceci montre que A^* (donc f^*) est unique.
Réciproquement, si on définit $f^* \in \mathrm{End}(E)$ par $\mathrm{Mat}(f^*, \mathcal{B}) = A^*$, on voit, en remontant les calculs, que f^* vérifie l'identité de l'énoncé. □

Proposition 3.6.2. *Pour tout endomorphisme f et pour tout scalaire λ, on a:*

1. $f^{**} = f$.
2. $(id)^* = id$.
3. $(f + g)^* = f^* + g^*$.
4. $(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*$.
5. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
6. $rg(f^*) = rg(f)$.
7. $\det f^* = \overline{\det f}$.

Notations 3.6.3. *Le résultat ci-dessus justifie la notation habituelle pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:*

$$A^* \underset{déf}{=} {}^t\overline{A}.$$

3.7 Groupe unitaire.

Le but de ce paragraphe est d'étudier les endomorphismes qui conservent le produit scalaire hermitien. Il s'agit donc de l'analogue, dans le cas complexe, des automorphismes orthogonales.

Proposition 3.7.1. *Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace hermitien et f un endomorphisme de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. $\|f(x)\| = \|x\|,\quad \forall\, x \in E$.

2. $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \quad \forall\, x, y \in E.$

3. *Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et $A = Mat(f, \mathcal{B})$ alors : ${}^t\overline{A}A = I$ (ou,d'une manière équivalente : $A\,{}^t\overline{A} = I$).*

Proof. La démonstration est analogue à celle de cas euclidien. □

Définition 3.7.2. *Un endomorphisme qui vérifie ces propriétés est dit unitaire.*
Notons que f est unitaire si et seulement si $f^* \circ f = id$, ou, d'une manière équivalente $f \circ f^* = id$.

Définition 3.7.3. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant ${}^t\overline{A}A = I$ (ou d'une manièreéquivalente $A\,{}^t\overline{A} = I$) est dite unitaire. L'ensemble des matrices unitaires est un groupe dit groupe unitaire, noté $U(n, \mathbb{C})$:*

$$U(n, \mathbb{C}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) |\ \ {}^t\overline{A}A = I_n\}.$$

Remarque 3.7.4. *Les matrices unitaires sont les matrices qui représentent dans une base orthonormée les transformations unitaires d'un espace hermitien. Il s'agit donc de l'analogue, dans le cas complexe des matrices orthogonales et, plus précisément, les matrices orthogonales sont les matrices unitaires réelles:*

$$O(n, \mathbb{R}) = U(n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Si $A \in U(n, \mathbb{C})$, puisque ${}^t\overline{A}A = I_n$ on a : $|\det(A)|^2 = 1$, donc:

$$|\det(A)| = 1.$$

Définition 3.7.5. *Les matrices unitaires de déterminant égal à 1 forment un sous-groupe de $U(n, \mathbb{C})$, dit groupe spécial unitaire, noté $SU(n, \mathbb{C})$:*

$$SU(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) |\ \ \det(A) = 1\}.$$

Remarque 3.7.6. *Les matrices spéciales unitaires sont donc l'analogue, dans le cas complexe des matrices spéciales orthogonales et, plus précisément:*

$$SO(n, \mathbb{R}) = SU(n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Comme dans le cas euclidien, on voit facilement que:

1. *Les endomorphismes unitaires sont les endomorphismes qui transforment les bases orthonormées en bases orthonormées.*

2. *La matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est unitaire.*

Exemples 3.7.7.

1. *Soit la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}$$

on a ${}^t\overline{A}A = I_n$ donc A est unitaire càd $A \in U(n, \mathbb{C})$. D'autre part:

$$\det(A) = e^{i(\varphi_1 + \cdots + \varphi_n)}.$$

Donc $A \in SU(n, \mathbb{C}) \Longleftrightarrow \varphi_1 + \cdots + \varphi_n = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

2. *Détermination de $SU(2,\mathbb{C})$.*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; *on a* ${}^t\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$

La condition ${}^t\overline{A}A = I_2$ *est équivalente au système*

$$\begin{cases} a\overline{a} + b\overline{b} = 1 & (I) \\ c\overline{c} + d\overline{d} = 1 & (II) \\ a\overline{c} + b\overline{d} = 0 & (III) \end{cases}$$

La condition $\det A = 1$ *donne l'équation supplémentaire*

$$(IV) \quad ad - bc = 1.$$

D'autre part:

$$(I) - (IV) \Longrightarrow a(\overline{a} - d) + b(\overline{b} + c) = 0.$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que*

$$\overline{a} - d = \lambda b \quad et \quad \overline{b} + c = -\lambda a$$

c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} d &= \overline{a} - \lambda b \\ c &= -\overline{b} - \lambda a. \end{aligned}$$

En reportant dans (III):

$$-\overline{\lambda}(\overline{a}a + \overline{b}b) = 0$$

d'où, d'après (I): $\lambda = 0$ *et*

$$d = \overline{a}, \quad c = -\overline{b}.$$

Donc A *s'écrit:*

$$A = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \quad avec \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

En posant $a = \rho_1 e^{i\theta_1}$ *et* $b = \rho_2 e^{i\theta_2}$, *on a*

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \Longleftrightarrow \rho_1^2 + \rho_2^2 = 1.$$

Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $\rho_1 = \cos\alpha$ *et* $\rho_2 = -\sin\alpha$ *On a ainsi*

$$A \in SU(2,\mathbb{C}) \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha e^{i\theta_1} & -\sin\alpha e^{i\theta_2} \\ \\ \sin\alpha e^{-i\theta_2} & \cos\alpha e^{-i\theta_1} \end{pmatrix}$$

A dépend donc de trois paramètres réels : α, θ_1, θ_2. *Pour* $\theta_1 = 0$ *et* $\theta_2 = 0$ *on retrouve les matrices de* $SO(2,\mathbb{R})$.

Remarque 3.7.8. *Les valeurs propres d'une matrice unitaire sont toutes de module* 1. *En particulier, les valeurs propres d'une matrice orthogonale, considérée comme matricede* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *sont des complexes de module* 1.
En effet, soit f *l'endomorphisme unitaire de* $\mathbb{C}^n$ *qui dans la base canonique est représentépar la matrice unitaire* A. *On a :* $\|f(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$. *Si* $f(x) = \lambda x$ *avec* $x \neq 0$, *alors:*

$$\|\lambda x\| = \|x\| \Rightarrow |\lambda| \ \|x\| = \|x\| \Rightarrow |\lambda| = 1.$$