Université de Gabes **Faculté des Sciences de Gabes** **Département des Mathématiques**		جَامعة قَابس كلية العلوم بقَابس قسم الريَاضيَات

Analyse Complexe

Note de cours au étudiants de premiere année de Master mathématiques

Préparée par Noureddine Ghiloufi

Année universitaire 2015/2016.

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions holomorphes

1.1 Définitions et propriétés

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ par $x+iy \sim (x,y)$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $z_0 \in \Omega$. On dit que f est dérivable en z_0 si la limite

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

existe. Cette limite sera notée $f'(z_0)$ et est appelée la dérivée de f en z_0.

Exemple 1.1

1. *La fonction f_n définie sur $\mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $f_n(z) = z^n$ est dérivable sur $\mathbb{C}$ et $f_n'(z) = nz^{n-1}$ (Formule de Binôme).*
2. *La fonction g définie sur $\mathbb{C}$ par $g(z) = \overline{z}$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$. De plus, en tant que fonction de deux variables réelles, la fonction g est linéaire donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Théorème 1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,y) \longmapsto P(x,y) + iQ(x,y)$. Alors f est dérivable en $z_0 = (x_0,y_0)$ si et seulement si f est différentiable en (x_0,y_0) et vérifie les conditions de Cauchy[1]-Riemann[2] suivantes*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) & = & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) & = & -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0). \end{array}\right.$$

1. **Augustin Louis, baron Cauchy**, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'école polytechnique. Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps, quoique devancé par Leonhard Euler et Paul Erdos, avec près de 800 parutions et sept ouvrages ; sa recherche couvre l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques.

2. **Georg Friedrich Bernhard Riemann**, né le 17 septembre 1826 à Breselenz, état de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle.

Démonstration. Si f est dérivable en z_0 alors la formule de Taylor donne pour $h=(h_1,h_2)=h_1+ih_2$

$$(P+iQ)(x_0+h_1,y_0+h_2)-(P+iQ)(x_0,y_0)=(h_1+ih_2)f'(x_0+iy_0)+(h_1+ih_2)[\epsilon_1(h)+i\epsilon_2(h)].$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(x_0+h_1,y_0+h_2)-P(x_0,y_0) &=& ah_1-bh_2+h_1\epsilon_1(h)-h_2\epsilon_2(h)\\ Q(x_0+h_1,y_0+h_2)-Q(x_0,y_0) &=& ah_2+bh_1+h_2\epsilon_1(h)+h_1\epsilon_2(h)\end{array}\right.$$

avec $f'(x_0,y_0)=a+ib$. Donc P et Q sont différentiables et $df(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$. □

Définition 1.3 *Une fonction $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ est dite holomorphe sur Ω et on note $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ si f est dérivable en tout point de Ω.*

Exemple 1.4 *Soit $f(z)=\sum_{n\geq 0}a_n(z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $0<R\leq+\infty$ alors $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}(z_0,R))$ et on a $f'(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}$.*

Propriétés 1.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0\in\Omega$ et $f,\ g:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ dérivables en z_0. Alors*

1. *La fonction $f+\lambda g$ est dérivable en z_0 et on a $(f+\lambda g)'(z_0)=f'(z_0)+\lambda g'(z_0)$ pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$.*
2. *La fonction fg est dérivable en z_0 et on a $(fg)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$.*
3. *Si de plus $f(z_0)\neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en z_0 et on a $\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0)=-\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2}$.*
4. *Soit Ω un domaine (ouvert connexe) de $\mathbb{C}$ et $f\in\mathcal{H}(\Omega)$. Alors f' est identiquement nulle sur Ω si et seulement si f est identiquement constante sur Ω.*

Démonstration. Pour 3., on a en fait $\frac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de z_0 ; en effet f est dérivable en z_0 donc $f(z_0+h)-f(z_0)=f'(z_0)h+h\epsilon(h)$ avec $\epsilon(h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0$. Ce qui donne que f est continue en z_0. En particulier, comme $f(z_0)\neq 0$, il existe $\eta>0$ tel que $|z-z_0|<\eta$ donne $|f(z)-f(z_0)|<\frac{|f(z_0)|}{2}$; par suite $|f(z)|\geq\frac{|f(z_0)|}{2}>0$ pour tout $z\in\mathbb{D}(z_0,\eta)$. □

Théorème 1.6 *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine Ω de $\mathbb{C}$. Alors on a équivalence entre les assertions suivantes :*

1. *f est constante sur Ω.*
2. *$\Re e f$ est constante sur Ω.*
3. *$\Im m f$ est constante sur Ω.*
4. *$|f|$ est constante sur Ω.*
5. *$\overline{f}$ est holomorphe sur Ω.*
6. *$f(\Omega)$ est inclue dans une droite.*

Démonstration. En exercice. □

Proposition 1.7 *Soit Ω et W deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $f:\Omega\longrightarrow W$ une fonction bijective continue sur Ω et dérivable en $z_0\in\Omega$ tel que $f'(z_0)\neq 0$. Alors $g:=f^{-1}$, la fonction réciproque de f, est dérivable en $w_0:=f(z_0)$ dès qu'elle est continue en w_0 et on a dans ce cas $g'(w_0)=\frac{1}{f'(z_0)}$.*

Démonstration. Pour $w \in W,\ w = f(z)$ où $z \in \Omega$ de plus comme f et g sont continues en z_0 et w_0 respectivement alors

$$\lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} \underset{g\ cont.}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

□

Propriétés 1.8 *Soit $f : \Omega \longrightarrow W$ une fonction dérivable en $z_0 \in \Omega$ et $g : W \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable en $f(z_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en z_0 et on a $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)).f'(z_0)$.*

1.2 Étude d'un exemple

Soit $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$ donc exp est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ (fonction entière).

• $\exp'(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \exp(z)$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) = e^x$.

• Pour tout $z,\ \xi \in \mathbb{C}$, on a

$$\exp(z + \xi) = \exp(z). \exp(\xi).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\exp(z+\xi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+\xi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k \xi^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{\xi^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^n}{n!}\right) = exp(z). \exp(\xi)
\end{aligned}$$

comme produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes. □

• Pour tout $z \in \mathbb{C},\ \exp(z) \neq 0$ et $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$.

D'après ce qui précède, $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1$. □

• (*Formule de Moivre*) Pour tout $x + iy \in \mathbb{C}$ on a $\exp(x + iy) = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$.

En effet, on a $\exp(x + iy) = e^x \exp(iy)$; de plus

$$\begin{aligned}
\exp(iy) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(iy)^n \overset{\text{conv. abs.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{2n!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos(y) + i \sin(y).
\end{aligned}$$

□

• **Injectivité :** On a $\exp(z) = \exp(\xi) \iff z = \xi + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Donc exp n'est pas injective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $B_\alpha := \{x + iy \in \mathbb{C};\ x \in \mathbb{R},\ \alpha - \pi < y < \alpha + \pi\}$. B_α est un ouvert de $\mathbb{C}$ sur lequel exp est injective donc $\exp_{|B_\alpha} : B_\alpha \longrightarrow \Omega_\alpha := \exp(B_\alpha)$ est bijective et est holomorphe,

$\exp'(z) \neq 0,\ \forall z \in B_\alpha$. Pour appliquer la proposition 1.7, il suffit de montrer que $\log_\alpha := \exp^{-1}_{|B_\alpha}$ est continue sur Ω_α. Pour ceci, on remarque que

$$d\exp(x,y) = \begin{pmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y) \end{pmatrix}$$

donc $|d\exp(x,y)| = e^{2x} \neq 0$. D'après le théorème d'inversion local, $\exp_{|B_\alpha}$ est un difféomorphisme local, or elle est injective, donc elle est un difféomorphisme globale de B_α dans son image. D'après la proposition 1.7, $\log_\alpha$ est holomorphe sur Ω_α (qui est en fait un ouvert de $\mathbb{C}$ donc exp est une application ouverte).
On démontre que $\Omega_\alpha = \mathbb{C} \setminus \mathscr{D}_\alpha$ où $\mathscr{D}_\alpha := \{te^{i\alpha} \in \mathbb{C};\ t \leq 0\}$ et

$$\log_\alpha(w) = \ln(|w|) + i\arg_{]\alpha-\pi,\alpha+\pi[}(w),\ \forall\, w \in \Omega_\alpha.$$

Définition 1.9 *On dira qu'une application φ est une determination du logarithme sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ si $\exp(\varphi(z)) = z,\ \forall\, z \in \Omega$.*
On définie alors une determination du puissance par $z^a := \exp(a\varphi(z))$ pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.10 *Soit Ω un domaine (ouvert connexe) de $\mathbb{C}$. Alors Ω admet une determination continue du logarithme si et seulement si l'application $z \longmapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive sur Ω (i.e. il existe une fonction $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $g'(z) = \frac{1}{z},\ \forall\, z \in \Omega$).*

Démonstration.
" $\Longrightarrow$ " Soit f une determination continue du logarithme sur Ω alors $\exp(f(z)) = z\ \forall\ z \in \Omega$ donc $f'(z)\exp(f(z)) = 1$ ainsi $f'(z) = \frac{1}{z}$. f est une primitive de $\frac{1}{z}$.
" $\Longleftarrow$ " Soit g une primitive de $\frac{1}{z}$ sur Ω. On a $(z\exp(-g(z)))' = \exp(-g(z))(1 - z\dfrac{1}{z}) = 0$. Comme Ω est connexe, alors $z\exp(-g(z)) = c \neq 0$. Si on note $c = r_0e^{i\theta_0}$ alors $\exp(g(z) + \ln(r_0) + i\theta_0) = z$. Ainsi $g(z) + \ln(r_0) + i\theta_0$ est une determination continue du logarithme. $\square$

Chapitre 2

Intégrale curviligne

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1 *Un chemin $\mathcal{C}^1-$par morceaux d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est une application $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ $\mathcal{C}^1-$par morceaux ($[a,b] \subset \mathbb{R}$) :*

1. *γ est continue sur $[a,b]$.*
2. *Il existe $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ telle que γ' coincide sur $]x_j, x_{j+1}[$ avec la restriction d'une fonction g_j continue sur $[x_j, x_{j+1}]$.*

Exemple 2.2 $[0,1] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto \sqrt{t}$ *n'est pas $\mathcal{C}^1-$par morceaux.*

Définition 2.3

1. • *$\gamma(a)$ s'appelle l'origine de γ et $\gamma(b)$ est l'extremité de γ.*
   • $\begin{array}{cccc} \gamma^- : & [a,b] & \longrightarrow & \Omega \\ & t & \longmapsto & \gamma(a+b-t) \end{array}$ *est le chemin opposé de γ.*
   • *$\gamma^* := \{\gamma(t);\ t \in [a,b]\}$ est l'image de γ.*
2. *Un lacet est un chemin $\mathcal{C}^1-$par morceaux tel que l'extremité coincide avec l'origine.*
3. *Soit $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ et $\gamma_2 : [c,d] \to \Omega$ deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. La juxtaposition de γ_1 et γ_2 est le chemin $\gamma_1 \vee \gamma_2 : [a, b+d-c] \longrightarrow \Omega$ donnée par*
$$t \longmapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & si \quad t \in [a,b] \\ \gamma_2(t+c-b) & si \quad t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$
4. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin $\mathcal{C}^1-$par morceaux et $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ une fonction continue. L'intégrale de f le long de γ est $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.*

Propriétés 2.4

1. $\displaystyle\int_\gamma (f+\lambda g)(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \lambda \int_\gamma g(z)dz$ *pour tout f et g continues sur γ^* et $\lambda \in \mathbb{C}$.*
2. $\displaystyle\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$ *si f est continue sur γ^* (par le changement de variable $t \mapsto a+b-t$).*

3. $\displaystyle\int_{\gamma_1\vee\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$ *pour tout* f *continue sur* $(\gamma_1 \vee \gamma_2)^*$.

Exemple 2.5 *Si* $f(z) = \dfrac{1}{z-z_0}$ *et*

$$\begin{array}{cccc} \gamma_{(z_0,r)}: & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & z_0 + re^{it} \end{array}$$

l'application cercle de centre z_0 *et de rayon* r *(*$\gamma^*_{(z_0,r)} = \mathscr{C}(z_0,r)$*) alors*

$$\int_{\gamma_{(z_0,r)}} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = 2i\pi.$$

Lemme 2.6 *Soit* $\gamma : [a,b] \to \Omega$ *un chemin* $\mathcal{C}^1-$*par morceaux et* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction qui admet une primitive* F *sur* Ω*. Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Démonstration. Si γ est $\mathcal{C}^1$ alors $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.
Sinon, il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ de $[a,b]$ telle que γ est $\mathcal{C}^1$ sur $]x_j, x_{j+1}[$. Dans ce cas on a

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} F(\gamma(x_{j+1})) - F(\gamma(x_j)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

Corollaire 2.7 *La fonction* $z \mapsto \frac{1}{z}$ *n'admet pas de primitive sur tout ouvert* Ω *qui contient un cercle* $\mathscr{C}(0,r)$*.*

Par conséquent tout ouvert qui contient un cercle centré en 0, n'admet pas une détrmination continue du logarithme.
En effet, si elle admet une primitive F alors

$$2i\pi = \int_{\gamma_{(0,r)}} \frac{dz}{z} = F(\gamma_{(0,r)}(2\pi)) - F(\gamma_{(0,r)}(0)) = 0$$

ce qui est absurde. □

Définition 2.8 *Soit* $\gamma : [a,b] \to \Omega$ *un chemin* $\mathcal{C}^1-$*par morceaux. La longueur de* γ *est*

$$L_\gamma := \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Exemple 2.9 *Cas du segment : si* $A, B \in \mathbb{C}$ *alors* $[A, B] : [0, 1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto A + t(B - A)$ *et*

$$L_{[A,B]} = \int_0^1 |B - A|dt = |B - A|.$$

Cas du cercle : $L_{\gamma_{(z_0,r)}} = \displaystyle\int_0^{2\pi} |ire^{it}|dt = 2\pi r.$

Lemme 2.10 *Soit* γ *un chemin* $\mathcal{C}^1$*−par morceaux et* f *une fonction continue sur* γ^**. Alors*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq L_\gamma. \sup_{\xi\in\gamma^*} |f(\xi)|.$$

Démonstration. Si $\gamma : [a, b] \to \Omega$ alors

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \leq \sup_{\xi\in\gamma^*} |f(\xi)| \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

□

Définition 2.11 *Soit* γ *un lacet de* $\mathbb{C}$ *et* $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$*. L'indice de* z *par rapport à* γ*, est*

$$Ind_\gamma(z) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Exemple 2.12 $Ind_{\gamma_{(z_0,r)}}(z_0) = 1$*. Que vaut la valeur* $Ind_{\gamma_{(z_0,r)}}(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathscr{C}(z_0, r)$ *?*

La proposition suivante donne une réponce complète à cette question.

Proposition 2.13 *Soit* γ *un lacet de* $\mathbb{C}$*. Alors* $Ind_\gamma : z \mapsto Ind_\gamma(z)$ *est une fonction définie, continue sur* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ *à valeur dans* $\mathbb{Z}$ *; donc elle est constante sur chaque composante connexe de* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$*. En outre elle est nulle sur la composante connexe non bornée de* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$*.*

Comme application on aura

$$Ind_{\gamma_{(z_0,r)}}(z) = \begin{cases} 1 & si \quad |z - z_0| < r \\ 0 & si \quad |z - z_0| > r. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un lacet. Il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ telle que γ soit continue sur $[x_j, x_{j+1}]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_j, x_{j+1}[$. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ on considère la fonction Ψ définie sur $[a, b]$ par

$$\Psi(s) = \exp\left(\int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}dt\right) \quad \Longrightarrow \quad \Psi'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\Psi(s),\ \forall s \in [a, b] \setminus \{x_0, ..., x_n\}.$$

Ainsi, sur chaque $]x_j, x_{j+1}[$, on a

$$\Psi'(s)(\gamma(s) - z) - \gamma'(s)\Psi(s) = 0$$

donc $\dfrac{\Psi(s)}{\gamma(s)-z}$ est constante sur $]x_j, x_{j+1}[$, par continuité, on obtient $\dfrac{\Psi(x_j)}{\gamma(x_j)-z} = \dfrac{\Psi(x_{j+1})}{\gamma(x_{j+1})-z}$; en particulier on obtient $\dfrac{\Psi(a)}{\gamma(a)-z} = \dfrac{\Psi(b)}{\gamma(b)-z}$. Par suite $\Psi(b) = \Psi(a) = 1$ c'est-à-dire

$$\exp\left(\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt\right) = 1$$

ce qui donne $\displaystyle\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt = 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. D'où $Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.
Soit $\mathcal{O}$ une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. On a Ind_γ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ (comme intégrale simple dependant d'un paramètre) donc $Ind_\gamma(\mathcal{O})$ est un connexe de $\mathbb{Z}$; or les connexes de $\mathbb{Z}$ sont les singletons ; ainsi $Ind_\gamma(\mathcal{O}) = \{k_{\mathcal{O}}\}$.
Soit maintenant $\mathcal{O}_\infty$ la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ et $k_\infty = Ind_\gamma(z),\ \forall\, z \in \mathcal{O}_\infty$. Soit

$$M := \max\left(\sup_{t\in[a,b]} |\gamma(t)|, \sup_{t\in[a,b]} |\gamma'(t)|\right) < \infty$$

alors pour $|z| > M$, on a

$$|k_\infty| \le \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{M}{|z|-M}dt \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

2.2 Formules de Cauchy

Théorème 2.14 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur Ω. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *la fonction f admet une primitive sur Ω.*
2. *L'intégrale de f sur tout lacet de Ω est nulle.*

Démonstration. “ $\Longrightarrow$ “ Si f admet une primitive F sur Ω alors pour tout $\gamma : [a, b] \to \Omega$ on a

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

“ $\Longleftarrow$ “ On suppose que l'intégrale de f sur tout lacet est nulle. Soit $z_0 \in \Omega$ fixé ; comme Ω est connexe par arc, pour tout $z \in \Omega$ il existe un chemin γ_z d'origine z_0 et d'extremité z. On pose alors $F(z) = \displaystyle\int_{\gamma_z} f(\xi)d\xi$. La fonction F est bien définie ; en effet, si γ_1 et γ_2 sont deux chemins d'origine z_0 et d'extremité z, $\gamma_1 \vee \gamma_2^-$ est alors un lacet donc par hypothèse, $\displaystyle\int_{\gamma_1\vee\gamma_2^-} f(\xi)d\xi = 0$ ce qui donne $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(\xi)d\xi = \int_{\gamma_2^-} f(\xi)d\xi$.
Pour $z \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{D}(z, r) \subset \Omega$. Si $|h| < r$ alors

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_{z+h}} f(\xi)d\xi - \int_{\gamma_z} f(\xi)d\xi\right)$$

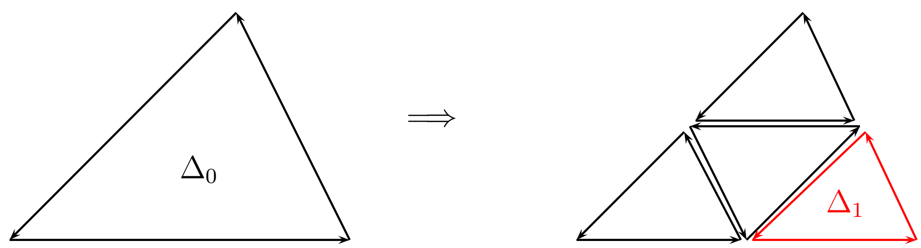


FIGURE 2.1 – Subdivision du triangle Δ_0

Comme $F(z+h)$ est indépandente du choix du chemin qui joint z_0 à $z+h$, on a $F(z+h) = \displaystyle\int_{\gamma_z \vee [z,z+h]} f(\xi)d\xi$ donc

$$\frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_{z+h}} f(\xi)d\xi - \int_{\gamma_z} f(\xi)d\xi\right) = \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)hdt \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(z)$$

D'où $F'(z) = f(z)$. $\square$

Théorème 2.15 *(de Goursat[1]) Soit Δ un triangle contenu (ainsi que son intérieur) dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Si f est une fonction holomorphe sur Ω alors $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.*

Démonstration. On pose $\Delta_0 := \Delta$ et on divise Δ_0 en quatre triangles $(\Delta_0^j)_{1\le j\le 4}$ de sommets soit les sommets de Δ_0 soit les milieux des cotés de Δ_0(voir figure 2.1).

Il est simple de voir que

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4}\int_{\partial\Delta_0^j} f(z)dz.$$

De plus il existe $1 \le j_1 \le 4$ tel que

$$\left|\int_{\partial\Delta_0^{j_1}} f(z)dz\right| \ge \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)dz\right|.$$

On pose alors $\Delta_1 := \Delta_0^{j_1}$ puis on itère l'opération, on construit ainsi une suite $(\Delta_n)_n$ de triangles vérifiant :

1. $\displaystyle\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| \ge \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\Delta_{n-1}} f(z)dz\right| \ge ... \ge \frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)dz\right|.$

1. **Jean-Baptiste édouard Goursat**, né le 21 mai 1858 à Lanzac, mort le 25 novembre 1936 à Paris, est un mathématicien français dont le Cours d'analyse a longtemps fait école.

2. $L_{\partial\Delta_n} = \frac{1}{2}L_{\partial\Delta_{n-1}} = ... = \frac{1}{2^n}L_{\partial\Delta_0}$.
3. $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$.

On donc Δ_n est un compact, $diam(\Delta_n) \le L_{\partial\Delta_n} = \frac{1}{2^n}L_{\partial\Delta_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$. Comme $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ est complet, alors d'après le théorème de Baire, il existe $z_0 \in \Delta$ tel que $\{z_0\} = \cap_{n\in\mathbb{N}}\Delta_n$.
f est holomorphe sur un voisinage de z_0. Donc au $\vartheta(z_0)$, on a

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z - z_0).$$

Pour $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in \Delta_{n_0}$ on a d'une part $|\varepsilon(z - z_0)| < \epsilon$ et d'autre part

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta_{n_0}} f(z)dz &= \int_{\partial\Delta_{n_0}} f(z_0)dz + \int_{\partial\Delta_{n_0}} f'(z_0)(z-z_0)dz + \int_{\partial\Delta_{n_0}} (z-z_0)\varepsilon(z-z_0)dz \\ &= \int_{\partial\Delta_{n_0}} (z-z_0)\varepsilon(z-z_0)dz\end{aligned}$$

car les deux premières fonctions admettent des primitives. Ainsi on a

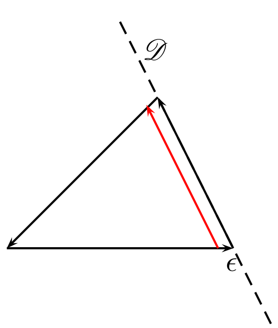
$$\begin{aligned}\frac{1}{4^{n_0}}\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)dz\right| &\le \left|\int_{\partial\Delta_{n_0}} f(z)dz\right| \le \left|\int_{\partial\Delta_{n_0}} (z-z_0)\varepsilon(z-z_0)dz\right| \\ &\le \epsilon L_{\partial\Delta_{n_0}} \sup_{z\in\partial\Delta_{n_0}} |z-z_0| \le \epsilon\left(L_{\partial\Delta_{n_0}}\right)^2 \le \left(\frac{L_{\partial\Delta_0}}{2^{n_0}}\right)^2\epsilon\end{aligned}$$

Donc $\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)dz\right| \le (L_{\partial\Delta_0})^2\epsilon$. D'où $\int_{\partial\Delta_0} f(z)dz = 0$. □

Corollaire 2.16 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, Δ un triangle de Ω et $\mathscr{D}$ une droite de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction continue sur Ω, holomorphe sur $\Omega \setminus \mathscr{D}$. Alors $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.*

Démonstration. Si $\Delta \cap \mathscr{D} = \emptyset$ alors le théorème précédent, appliqué sur $\Omega \setminus \mathscr{D}$, donne le résultat. Sinon ($\Delta \cap \mathscr{D} \neq \emptyset$) on découpe $\Delta \setminus \mathscr{D}$ en trois triangles Δ_ϵ^j ($1 \le j \le 3$) qui ne rencontre pas $\mathscr{D}$ donc $\int_{\partial\Delta_\epsilon^j} f(z)dz = 0$ en faisant tendre ϵ vers 0, et en utilisant la continuité de f, on obtient

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Delta_\epsilon^j} f(z)dz = 0.$$



□

Définition 2.17 *Un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit étoilé s'il existe un point $z_0 \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$ on a $[z_0, z] \subset \Omega$. (On dira dans ce cas que Ω est étoilé par rapport à z_0).*

Proposition 2.18 *Soit Ω un ouvert étoilé et f une fonction continue sur Ω. Alors f admet une primitive dans Ω si et seulement si pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$ on a $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.*

Démonstration. " $\Longrightarrow$ " conséquence immediate du théorème 2.14.
" $\Longleftarrow$ " Si Ω est étoilé par rapport à z_0 alors on pose $F(z) = \displaystyle\int_{[z_0,z]} f(\xi)d\xi$. Par hypothèse,

$$\int_{[z_0,z]\vee[z,z+h]\vee[z+h,z_0]} f(\xi)d\xi = 0$$

dès que $|h| < d(z, \Omega^c)$. Donc

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\xi)d\xi = \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)hdt \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(z).$$

□

Corollaire 2.19 *Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, $\mathscr{D}$ une droite de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur Ω, holomorphe sur $\Omega \setminus \mathscr{D}$. Alors pour tout lacet γ de Ω on a $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$.*
Par suite f admet une primitive sur Ω.

Corollaire 2.20 *(Formule intégrale de Cauchy) Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, γ un lacet de Ω et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors on a*

$$\boxed{f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi, \quad \forall\, z \in \Omega \setminus \gamma^*.}$$

Démonstration. Pour $z \in \Omega \setminus \gamma^*$, on pose

$$g(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & si \quad \xi \neq z \\ f'(z) & si \quad \xi = z \end{cases}$$

On a g est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est une droite quelconque qui passe par z. Comme Ω est étoilé, alors d'après le corollaire précédent, g admet une primitive donc $\displaystyle\int_\gamma g(\xi)d\xi = 0$ i.e.

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}d\xi = 0 = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{\xi - z}d\xi.$$

□

Comme conséquence de ce résultat, *toute fonction holomorphe est localement développable en série entière ;* en effet si $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors pour tout $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$ on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z}ire^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{1 - \frac{z - z_0}{re^{it}}}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z - z_0}{r}\right)^n e^{-int}dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})e^{-int}dt\right)(z - z_0)^n \end{aligned}$$

car la convergence est uniforme ; en effet en posant $M_f(r) = \sup\limits_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)|$,

$$|g_n(t)| := \left| f(z_0 + re^{it}) e^{-int} \left(\frac{z - z_0}{r} \right)^n \right| \leq M_f(r) \frac{|z - z_0|^n}{r^n}.$$

En posant $a_n := \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt$ alors $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ donc f est $\mathcal{C}^\infty$ et $f^{(k)}$ est holomorphe sur Ω pour tout $k \in \mathbb{N}$ (l'holomorphie est une notion locale). De plus on a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ et vérifie *l'inégalité de Cauchy* : $\boxed{|a_n| \leq \dfrac{M_f(r)}{r^n}.}$

Théorème 2.21 *(Liouville[2]) Toute fonction entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$) bornée est constante.*

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

pour tout $r > 0$. Si $|f(\xi)| \leq M$ sur $\mathbb{C}$ alors d'après l'inégalité de Cauchy, $|a_n| \leq \dfrac{M_f(r)}{r^n} \leq \dfrac{M}{r^n}$. Ainsi si $r \to +\infty$ on obtient $a_n = 0, \ \forall\, n \geq 1$. D'où $f(z) = a_0$. □

Corollaire 2.22 *(Théorème de D'Alembert[3]-Gauss[4] ou "théorème fondamental de l'algèbre") Tout polynôme non constant sur $\mathbb{C}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit P un polynôme sur $\mathbb{C}$ de degré $\deg P \geq 1$. On a $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$. Si P ne s'annule pas dans $\mathbb{C}$ alors $\frac{1}{P}$ serai une fonction entière et $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \left| \dfrac{1}{P(z)} \right| = 0$ donc il existe $R > 0$ tel que pour tout $|z| > R$ on a $\left| \dfrac{1}{P(z)} \right| < 1$. De plus on a $\overline{\mathbb{D}}(0, R)$ est un compact de $\mathbb{C}$ donc $\frac{1}{P}$ est bornée sur $\overline{\mathbb{D}}(0, R)$. Il en résulte que $\frac{1}{P}$ est une fonction entière bornée sur $\mathbb{C}$; d'après Liouville, $\frac{1}{P} \equiv Cte$ et donc $P \equiv Cte$ ce qui est absurde. □

2. **Joseph Liouville** (24 mars 1809 à Saint-Omer - 8 septembre 1882 à Paris) est un mathématicien français.

3. **Jean le Rond D'Alembert**, né le 16 novembre 1717 à Paris où il est mort le 29 octobre 1783, est un mathématicien, philosophe et encyclopédiste français.

4. **Johann Carl Friedrich Gauss**, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Il a apporté de très importantes contributions à ces trois domaines. Surnommé "le prince des mathématiciens", il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

Chapitre 3

Espace des fonctions holomorphes

3.1 Principe des zéros isolés et singularités

Définition 3.1 *Soit f une fonction holomorphe au voisinage $\vartheta(z_0)$ d'un point z_0. On dit que z_0 est un zéro de f d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ s'il existe une fonction g holomorphe au $\vartheta(z_0)$ telle que $g(z_0) \neq 0$ et $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ au $\vartheta(z_0)$.*

Si z_0 est un zéro de f d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ alors f est non identiquement nulle au $\vartheta(z_0)$.

Remarque 3.2 *Si z_0 est un zéro de f d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ alors, au $\vartheta(z_0)$, on a*

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^{n+k}$$

donc $f(z_0) = ... = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ et $f^{(k)}(z_0) = k! b_0 = k! g(z_0) \neq 0$.

Théorème 3.3 *(Principe des zéros isolés) Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω non identiquement nulle. Alors les zéros de f sont isolés.*

z_0 un zéro isolé de f s'il existe $r > 0$ tel que $\forall\ z \in \mathbb{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\} := \mathbb{D}^*(z_0, r)$ on a $f(z) \neq 0$.

Corollaire 3.4 *(Principe du prolongement analytique) Soit f et g deux fonctions holomorphe sur un domaine Ω de $\mathbb{C}$. Si $f(z) = g(z)$ sur un ensemble qui contient un point d'accumilation dans Ω alors $f \equiv g$ sur Ω.*

Démonstration. (du corollaire) Il suffit d'appliquer le principe des zéros isolés à la fonction holomorphe $h = f - g$. $\square$

Démonstration.(du principe des zéros isolés) Si f est non identiquement nulle au voisinage de $z_0 \in \mathcal{Z}_f$ alors d'après la remarque précédente, $f(z) = (z - z_0)^k (b_0 + o(z - z_0))$ ainsi il existe $r > 0$ tel que $f(z) \neq 0$ sur $\mathbb{D}^*(z_0, r)$.
Posons $A := \{z \in \Omega;\ f$ est nulle au $\vartheta(z)\}$. On suppose que $A \neq \emptyset$ alors on a d'une part A est un ouvert de Ω ; en effet, soit $z \in A$ alors il existe $r_z > 0$ tel que $f \equiv 0$ sur $\mathbb{D}(z, r_z)$. Par suite $\mathbb{D}(z, r_z) \subset A$. D'autre part, A est un fermé de Ω ; en effet, si $(z_n)_n \subset A$, $z_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} z \in \Omega$ alors $f^{(s)}(z) = \lim_{n \to +\infty} f^{(s)}(z_n) = 0$, $\forall\ s \in \mathbb{N}$. Au voisinage de z on a $f(\xi) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{f^{(s)}(z)}{s!} (\xi - z)^s = 0$ ainsi $z \in A$. Par connexité de Ω, on aura $A = \Omega$ ce qui est absurde, donc $A = \emptyset$. $\square$

Corollaire 3.5 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur Ω. Alors tout compact de Ω contient un nombre fini de zéros de f.*

Démonstration. Soit $\mathcal{Z}_f$ l'ensemble des zéros de f ($\mathcal{Z}_f$ est un fermé de Ω). On pose $\Omega_1 = \Omega \setminus \mathcal{Z}_f$, c'est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit K un compact de Ω. Pour tout $z \in \mathcal{Z}_f$, il existe $r_z > 0$ tel que $\mathbb{D}(z, r_z) \cap \mathcal{Z}_f = \{z\}$. Par suite $\Omega_1 \cup \left(\cup_{z\in\mathcal{Z}_f}\mathbb{D}(z,r_z)\right)$ est un recouvrement de K par des ouverts, il admet donc un sous-recouvrement fini ; soit le $\Omega_1 \cup \mathbb{D}(z_1, r_1) \cup ... \cup \mathbb{D}(z_q, r_q)$. D'où $\mathcal{Z}_f \cap K \subset \{z_1, ..., z_q\}$. □

Proposition 3.6 *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et f une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{D}^*(z_0, r)$ (il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ sur $\mathbb{D}^*(z_0, r)$). Alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, r)$.*

Démonstration. Soit $g(z) = (z - z_0)f(z)$; alors g est holomorphe sur $\mathbb{D}^*(z_0, r)$. De plus $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$. En posant

$$\widetilde{g}(z) = \begin{cases} g(z) & si \quad z \in \mathbb{D}^*(z_0, r) \\ 0 & si \quad z = z_0 \end{cases}$$

$\widetilde{g}$ est continue sur $\mathbb{D}(z_0, r)$, holomorphe sur $\mathbb{D}^*(z_0, r)$. Elle admet donc une primitive sur $\mathbb{D}(z_0, r)$, ainsi elle est holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, r)$. Par suite elle est développable en série entière :

$$\widetilde{g}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = (z - z_0)\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z - z_0)^{n-1}$$

et on a

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z - z_0)^{n-1}, \ \forall\, z \in \mathbb{D}^*(z_0, r).$$

En posant $\widetilde{f}(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z - z_0)^{n-1}$, alors $\widetilde{f}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ qui prolonge f en z_0. □

Théorème 3.7 *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}^*(z_0, r)$. Alors f vérifie une et une seule des propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $0 < \eta < r$, $f(\mathbb{D}^*(z_0, \eta))$ est dense dans $\mathbb{C}$.*
2. *Il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $(z - z_0)^k f$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, r)$.*

Démonstration. Si le premier cas n'est pas satisfait, alors il existe $\eta > 0$ tel que $\overline{f(\mathbb{D}^*(z_0, \eta))} \neq \mathbb{C}$. Soit alors $b \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{D}^*(z_0, \eta))}$. Donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $|b - f(z)| > \epsilon$, $\forall\, z \in \mathbb{D}^*(z_0, \eta)$. par suite

$$\frac{1}{|f(z) - b|} < \frac{1}{\epsilon}, \quad \forall\, z \in \mathbb{D}^*(z_0, \eta)$$

D'après la proposition 3.6, il existe une fonction h holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, \eta)$ telle que

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - b}, \ \forall\, z \in \mathbb{D}^*(z_0, \eta)$$

donc on a $h(z)(f(z) - b) = 1$, $\forall\, z \in \mathbb{D}^*(z_0, \eta)$. Il s'en suit qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$(f(z) - b)(z - z_0)^k h_1(z) = 1, \ \forall\, z \in \mathbb{D}^*(z_0, \eta)$$

avec $h_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{D}(z_0,\eta)),\ h_1(z_0) \neq 0$. D'où

$$(z-z_0)^k f(z) = \frac{1+b(z-z_0)^k h_1(z)}{h_1(z)},\ \forall\, z \in \vartheta(z_0).$$

□

Définition 3.8
*Si f vérifie 1. du théorème précédent, on dit que z_0 est une singularité essentielle de f.
Dans l'autre cas, f vérifie 2. du théorème précédent, on dit que z_0 est un pôle de f et le plus petit entier k vérifiant 2., s'appelle l'ordre du pôle. Si $k = 0$, alors f se prolonge holomorphiquement en z_0 ; on dit alors que z_0 est une singularité apparente de f.*

Exemple 3.9 *Si f est holomorphe sur un domaine Ω de $\mathbb{C}$ non identiquement nulle alors les zéros de f sont des pôles de $\frac{1}{f}$ de mêmes ordres et ils sont des pôles simples de $\frac{f'}{f}$.*

3.2 Principe du maximum

Définition 3.10 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur Ω. On dit que φ vérifie l'inégalité (la sous-inégalité) de la moyenne*[1] *si pour tout $z_0 \in \Omega$ et pour tout $0 < r < d(z_0,\Omega^c)$ on a*

$$\varphi(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

Exemple 3.11 *Si f est une fonction holomorphe sur Ω alors $|f|$ (resp. $\Re e(f)$ et $\Im m(f)$) vérifie l'inégalité (resp. l'égalité) de la moyenne.*

Définition 3.12 *On dit qu'une fonction $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie le principe du maximum si pour tout maximum relatif a de φ on a φ est constante au $\vartheta(a)$.*

Proposition 3.13 *Toute fonction qui vérifie l'inégalité de la moyenne, vérifie le principe du maximum.*

Démonstration. Soit $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie l'inégalité de la moyenne sur un ouvert Ω et $a \in \Omega$ un maximum relatif de φ. Soit $r_0 > 0$ tel que $\mathbb{D}(a,r_0) \subset \Omega$ et pour tout $z \in \mathbb{D}(a,r_0)$, on a $\varphi(z) \leq \varphi(a)$. Pour montrer le résultat, on montre que φ est constante sur $\mathbb{D}(a,r_0)$. Pour ceci, on considère l'ensemble $A := \{z \in \mathbb{D}(a,r_0);\ \varphi(z) = \varphi(a)\}$. Alors $A \neq \emptyset$ et est fermé car φ est continue. De plus pour $z \in A$ et pour tout $0 < t < r_z := r_0 - |z-a|$, on a

$$\varphi(a) = \varphi(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(z + te^{i\theta})d\theta \leq \varphi(a).$$

Donc

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{(\varphi(a) - \varphi(z+te^{i\theta}))}_{\geq 0,\ continue}d\theta$$

1. On parle d'une fonction sousharmonique : qui est semi-continue supérieurement en tout point et vérifie l'inégalité de la moyenne.

Par suite pour tout $0 < t < r_z$ et tout $\theta \in [0, 2\pi]$ on a $\varphi(a) = \varphi(z + te^{i\theta})$ c'est-à-dire que $\mathbb{D}(z, r_z) \subset A$. Ainsi on a A est un ouvert de $\mathbb{D}(a, r_0)$ et le résultat découle de la connexité de $\mathbb{D}(a, r_0)$. □

Corollaire 3.14 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω.*

1. *Si f est non constante alors pour tout $z \in \Omega$ on a $|f(z)| < \sup_{\xi \in \Omega} |f(\xi)|$.*
2. *Pour tout compact K de Ω on a $\sup_{z \in K} |f(z)| = \sup_{z \in \partial K} |f(z)|$.*

Corollaire 3.15 *(Lemme de Schwarz)*
Soit $f : \mathbb{D}(0,1) \longrightarrow \mathbb{D}(0,1)$ une fonction holomorphe vérifiant $f(0) = 0$.
Alors on a $|f'(0)| \leq 1$ et

$$|f(z)| \leq |z|, \quad \forall\, z \in \mathbb{D}^*(0,1).$$

En outre, si $|f'(0)| = 1$ ou s'il existe $z_0 \in \mathbb{D}^*(0,1)$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(z) = e^{i\theta} z,\ \forall\, z \in \mathbb{D}(0,1).$$

Démonstration. Soit

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & si \quad z \neq 0 \\ f'(0) & si \quad z = 0 \end{cases}$$

Alors g est holomorphe sur $\mathbb{D}(0,1)$. D'après le principe du maximum,

$$\sup_{|z| \leq 1-\epsilon} |g(z)| = \sup_{|z|=1-\epsilon} |g(z)| \leq \frac{1}{1-\epsilon} \quad (0 < \epsilon < 1).$$

Donc $\sup_{|z|<1} |g(z)| \leq 1$; par suite on a $|f(z)| \leq |z|,\ \forall\, z \in \mathbb{D}(0,1)$ et $|f'(0)| \leq 1$.
S'il existe $z_0 \in \mathbb{D}^*(0,1)$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|f'(0)| = 1$ alors g atteint son maximum en z_0 ou en 0, par le principe du maximum, g est localement constante au voisinage de 0. Par le principe de prolongement analytique, g est constante sur $\mathbb{D}(0,1)$. Comme $|g| \equiv 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $g \equiv e^{i\theta}$. On obtient donc $f(z) = e^{i\theta} z,\ \forall\, z \in \mathbb{D}(0,1)$. □

3.3 Forme générale du Théorème de Cauchy et applications

3.3.1 Théorème de Cauchy

Définition 3.16 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Un cycle Γ de Ω est la somme formelle des lacets $\gamma_1,\ ..., \gamma_s$, on écrit $\Gamma = \gamma_1 + ... + \gamma_s$. On convient que si f est continue sur Ω alors*

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{s} \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

En particulier

$$Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{dw}{w-z} = \sum_{j=1}^{s} Ind_{\gamma_j}(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* = \mathbb{C} \setminus \left(\cup_{j=1}^{s}\gamma_j^*\right).$$

Théorème 3.17 *(théorème de Cauchy, forme générale)*
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et Γ un cycle de Ω vérifiant $Ind_\Gamma(z) = 0$ pour tout $z \notin \Omega$. Alors pour toute fonction holomorphe f sur Ω on a

$$f(z)Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw, \quad \forall\, z \in \Omega \setminus \Gamma^*.$$

Démonstration. Soit $g : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & si \quad w \neq z \\ f'(z) & si \quad w = z \end{cases}$$

Alors g est continue sur $\Omega \times \Omega$ et $g(.,w)$ et $g(z,.)$ sont holomorphe sur Ω.
Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que pour tout $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = 0.$$

Considérons

$$h : z \longmapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma g(z,w)dw$$

On a h est holomorphe sur Ω ; en effet, comme l'holomorphie est une notion locale alors pour prouver que h est holomorphe sur Ω, il suffit de montrer que h est holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, r_0)$ où $z_0 \in \Omega$ et $r_0 > 0$ tel que $\mathbb{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$. Ce qui revient à montrer que pour tout triangle Δ de l'ouvert étoilé $\mathbb{D}(z_0, r_0)$ on a $\displaystyle\int_{\partial\Delta} h(z)dz = 0$. Ceci résulte du théorème de fubini et du fait que $g(.,w)$ est holomorphe sur Ω pour $w \in \Omega$ fixé :

$$\int_{\partial\Delta} h(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta}\left(\int_\Gamma g(z,w)dw\right)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\left(\int_{\partial\Delta} g(z,w)dz\right)dw = 0.$$

D'où h est holomorphe sur Ω.
Soit dans la suite $\Omega' = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*,\ Ind_\Gamma(z) = 0\}$. On a Ω' est un ouvert car la fonction indice est localement constante ; de plus, $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset \Omega'$. On pose

$$H(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw & si \quad z \in \Omega' \\ h(z) & si \quad z \in \Omega \end{cases}$$

H est bien définie car si $z \in \Omega \cap \Omega'$ on a $Ind_\Gamma(z) = 0$ et $z \in \Omega$ donc

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2i\pi}f(z)\underbrace{\int_\Gamma \frac{dw}{w-z}}_{=0}.$$

Comme $\mathbb{C} = \Omega \cup \Omega'$ et d'une part on a $H \equiv h$ sur Ω donc H est holomorphe sur Ω. d'autre part on a $H(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$ sur Ω' (intégrale dépendant d'un paramètre) donc H est holomorphe sur Ω'.

$$\lim_{|z|\to+\infty}|H(z)| = \lim_{|z|\to+\infty}\left|\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw\right| \leq \lim_{|z|\to+\infty}\frac{1}{2\pi}L_\Gamma \sup_{\xi\in\Gamma^*}|f(\xi)|\frac{1}{|z| - \sup_{\xi\in\Gamma^*}|\xi|} = 0.$$

Ainsi H est holomorphe, bornée sur $\mathbb{C}$ donc elle est constante et par suite $H \equiv 0$. D'où $h \equiv 0$ sur Ω. Le résultat s'en suit. $\square$

Corollaire 3.18 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et Γ un cycle de Ω vérifiant $Ind_\Gamma(z) = 0$ pour tout $z \notin \Omega$. Alors pour toute fonction holomorphe f sur Ω on a $\displaystyle\int_\Gamma f(w)dw = 0$.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega \setminus \Gamma^*$ et $g(w) = (w - z_0)f(w)$ alors g est holomorphe sur Ω donc d'après le théorème de Cauchy, on a

$$0 = g(z_0)Ind_\Gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{g(w)}{w - z_0}dw = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(w)dw.$$

$\square$

Corollaire 3.19 *Soit γ_1 et γ_2 deux lacets (ou cycles) du domaine Ω vérifiant*

$$Ind_{\gamma_1}(z) = Ind_{\gamma_2}(z), \quad \forall\, z \notin \Omega.$$

Alors pour toute fonction holomorphe f sur Ω on a

$$\int_{\gamma_1} f(w)dw = \int_{\gamma_2} f(w)dw.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire précédent avec $\Gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2^-$. $\square$

3.3.2 Applications

Comme première application on démontre que toute fonction holomorphe sur une couronne est développable en série de Laurent.

Proposition 3.20 *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 < r < R \leq +\infty$. On considère la couronne*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C},\ 0 \leq r < |z - z_0| < R\}.$$

Soit f une fonction holomorphe sur Ω. Alors $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n,\ \forall\, z \in \Omega$.

Démonstration. Pour $r < s < t < R$ on pose $\gamma_1 = \gamma_{(z_0,t)}$ et $\gamma_2 = \gamma_{(z_0,s)}$. Pour $z \notin \Omega$ on a $Ind_{\gamma_1}(z) = Ind_{\gamma_2}(z)$. En posant $\Gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2^-$ on obtient $Ind_\Gamma(z) = 0$ pour tout $z \notin \Omega$ donc pour tout $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ on a

$$f(z)Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}dw$$

En particulier si $s < |z| < t$ on a $Ind_\Gamma(z) = 1$ donc

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(z_0,t)} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(z_0,s)} \frac{f(w)}{w-z}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+te^{i\theta})}{z_0+te^{i\theta}-z}ite^{i\theta}d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+se^{i\theta})}{z_0+se^{i\theta}-z}ise^{i\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+te^{i\theta})}{1+\frac{z-z_0}{te^{i\theta}}}d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+se^{i\theta})}{(z-z_0)\left(1-\frac{se^{i\theta}}{z-z_0}\right)}se^{i\theta}d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\frac{1}{t^n}\int_0^{2\pi} f(z_0+te^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta\right)(z-z_0)^n \\
&\quad + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}s^{n+1}\int_0^{2\pi} f(z_0+se^{i\theta})e^{i(n+1)\theta}d\theta\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.
\end{aligned}$$

avec

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{t^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0+te^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta & si \quad n \geq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{s^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0+se^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta & si \quad n < 0 \end{cases}$$

Montrons que a_n est indépendant de s et t. On a

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+te^{i\theta})}{t^n e^{-in\theta}}d\theta = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{(z_0,t)}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

Si on pose $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$, alors g est holomorphe sur Ω ; de plus pour tout $r < t, t' < R$ on a

$$Ind_{\gamma_{(z_0,t)}}(\xi) = Ind_{\gamma_{(z_0,t')}}(\xi), \quad \forall\, \xi \notin \Omega$$

donc d'après le corollaire 3.19, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{(z_0,t)}} g(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{(z_0,t')}} g(z)dz.$$

$\square$

Remarque 3.21

1. *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}^*(z_0,r)$. Alors f est développable en série de Laurent sous la forme $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$. Le coefficient a_{-1} s'appelle Residus de f en z_0 et se note $Res(f,z_0)$.*
2. *Soit ξ_0 un pôle d'ordre k d'une fonction meromorphe ψ alors, sur un disque $\mathbb{D}(\xi_0,r)$, on a $\varphi(\xi) = \psi(\xi)(\xi-\xi_0)^k$ est holomorphe ; donc*

$$(\xi-\xi_0)^k\psi(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(\xi-\xi_0)^n, \ \forall\, \xi \in \mathbb{D}(\xi_0,r).$$

Par suite

$$\psi(\xi) = \frac{b_0}{(\xi-\xi_0)^k} + ... + \frac{b_{k-1}}{\xi-\xi_0} + \sum_{n=k}^{+\infty} b_n(\xi-\xi_0)^{n-k} = \frac{b_{k-1}}{\xi-\xi_0} + F(\xi).$$

Comme F est holomorphe sur $\mathbb{D}^*(\xi_0, r)$ et admet une primitive alors pour tout lacet γ de $\mathbb{D}^*(\xi_0, r)$ on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \psi(\xi)d\xi = b_{k-1}\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi-\xi_0} = Res(\psi,\xi_0)Ind_\gamma(\xi_0)$$

Ainsi $Res(\psi,\xi_0)$ est capital dans le calcul des intégrales. Pour calculer ce coefficient, on remarque que

$$(\xi-\xi_0)^k\psi(\xi) = b_0 + b_1(\xi-\xi_0) + ... + b_{k-1}(\xi-\xi_0)^{k-1} + (\xi-\xi_0)^k G(\xi).$$

Donc

$$\boxed{Res(\psi,\xi_0) := b_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}\left((\xi-\xi_0)^k\psi(\xi)\right)^{(k-1)}\Big|_{\xi=\xi_0}.}$$

Théorème 3.22 *(de Résidus) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0, z_1, ..., z_p\}$ où $z_0, z_1, ..., z_p$ sont des pôles de f. Soit γ un lacet de $\Omega \setminus \{z_0, z_1, ..., z_p\}$ vérifiant $Ind_\gamma(z) = 0,\ \forall\, z \notin \Omega$. Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi\sum_{j=0}^{p} Res(f, z_j)Ind_\gamma(z_j).$$

Démonstration. Soit z_j un pôle de f d'ordre k_j, $r_j > 0$ tel que $\mathbb{D}(z_j, r_j) \subset \Omega$ et $\forall\ s \neq j$ on a $z_s \notin \mathbb{D}(z_j, r_j)$. La fonction f s'écrit

$$f(z) = \frac{a_{(j,0)}}{(z-z_j)^{k_j}} + ... + \frac{a_{(j,k_j-1)}}{z-z_j} + G_j(z) = R_j(z) + G_j(z).$$

La fonction $R_j \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{z_j\})$ et $f - R_j \in \mathcal{H}(\mathbb{D}(z_j, r_j))$. Ainsi $f - \sum_{j=0}^{p} R_j$ est holomorphe sur Ω. D'après le corollaire 3.18, on a

$$\int_\gamma \left(f - \sum_{j=0}^{p} R_j\right)(z)dz = 0.$$

D'où

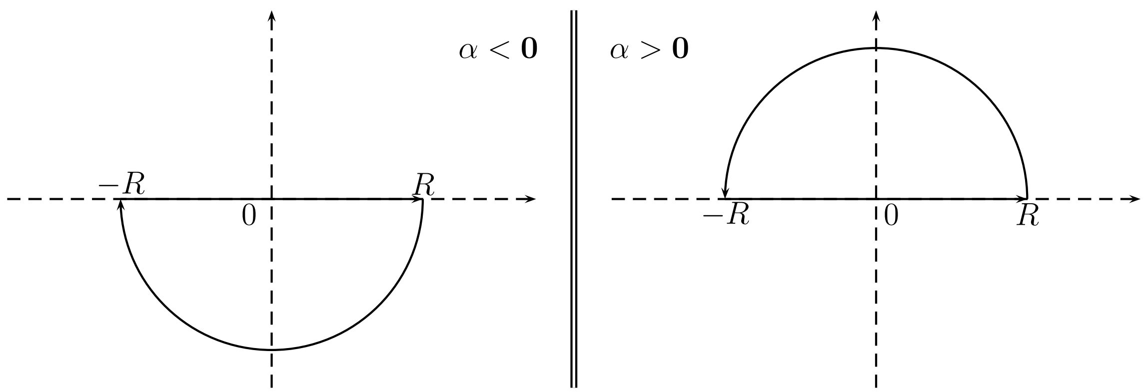
$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=0}^{p}\int_\gamma \frac{a_{(j,k_j-1)}}{z-z_j}dz = 2i\pi\sum_{j=0}^{p} Res(f, z_j)Ind_\gamma(z_j).$$

□

Applications. Comme application du théorème de Résidus, on peut calculer les valeurs de quelques familles d'intégrales :

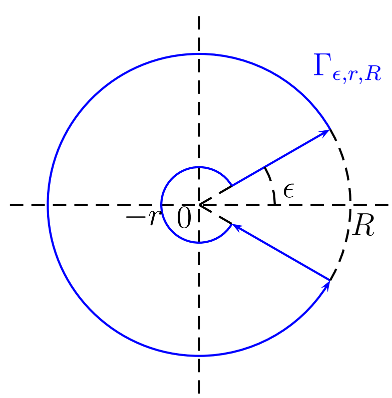
1. Soit F une fraction rationnelle (en deux variables). Pour calculer la valeur de
$$I_1 := \int_0^{2\pi} F(\cos(\theta), \sin(\theta))d\theta$$
il suffit de poser $z = e^{i\theta}$, dans ce cas on a $\cos(\theta) = \dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i}$ donc
$$I_1 = \int_{\gamma(0,1)} F\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}.$$

2. De même si $I_2 := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\frac{P(t)}{Q(t)}dt$ où $P,\ Q \in \mathbb{R}[X],\ Q(t) \neq 0,\ \forall\ t \in \mathbb{R}$ et $\deg(P) < \deg(Q)$ si $\alpha \neq 0$, $1 + \deg(P) < \deg(Q)$ si $\alpha = 0$. On considère alors $f(z) = e^{i\alpha z}\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ et le lacet γ_R formé par $[-R, R] \vee \mathscr{C}_+(0, R)$ (resp. $[-R, R] \vee \mathscr{C}_-(0, R)$) : demi-cercle supérieur (resp. demi-cercle inférieur) si $\alpha \geq 0$ (resp. si $\alpha < 0$).



3. Pour $I_3 := \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\frac{P(t)}{Q(t)}dt$ où $P,\ Q \in \mathbb{R}[X],\ Q(t) \neq 0,\ \forall\ t > 0$ et $1 + \deg(P) < \deg(Q)$, on considère $f(z) = \log_\pi^2(z)\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ et le lacet $\Gamma_{\epsilon,r,R} = \gamma_1^- \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4^-$ avec

$$\begin{array}{llll}
\gamma_1: & [\epsilon, 2\pi-\epsilon] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & \theta & \longmapsto & re^{i\theta} \\
\gamma_2: & [r, R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & t & \longmapsto & te^{i\epsilon} \\
\gamma_3: & [\epsilon, 2\pi-\epsilon] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & \theta & \longmapsto & Re^{i\theta} \\
\gamma_4: & [r, R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & t & \longmapsto & te^{-i\epsilon}
\end{array}$$



4. Pour $I_4 := \displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha\frac{P(t)}{Q(t)}dt$, on considère $f(z) = e^{\alpha\log_\pi(z)}\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ et le lacet précédent $\Gamma_{\epsilon,r,R}$.

Théorème 3.23 *(de Rouché) Soit f et g deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}(z_0, r_0)$. On suppose qu'il existe $0 < r < r_0$ tel que*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \ \forall \, |z - z_0| = r.$$

Alors f et g ont même nombre de zéros comptés avec leurs multiplicités contenus dans le disque $\mathbb{D}(z_0, r)$.

Démonstration. Pour tout $z \in \mathscr{C}(z_0, r)$ on a $g(z) \neq 0$ ainsi que $f(z) \neq 0$ et que $\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1$ donc

$$\begin{array}{rccc} \Gamma: & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \theta & \longmapsto & \dfrac{f(z_0 + re^{i\theta})}{g(z_0 + re^{i\theta})} \end{array}$$

est un lacet et $Ind_\Gamma(0) = 0$ car 0 est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. De plus

$$\begin{aligned} 0 &= Ind_\Gamma(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{dw}{w} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{f'(z_0 + re^{i\theta})}{g(z_0 + re^{i\theta})} - \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) g'(z_0 + re^{i\theta})}{g^2(z_0 + re^{i\theta})} \right) \frac{g(z_0 + re^{i\theta})}{f(z_0 + re^{i\theta})} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(z_0 + re^{i\theta})}{f(z_0 + re^{i\theta})} ire^{i\theta} d\theta - \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g'(z_0 + re^{i\theta})}{g(z_0 + re^{i\theta})} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{(z_0,r)}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{(z_0,r)}} \frac{g'(z)}{g(z)} dz. \end{aligned}$$

Comme f est non identiquement nulle alors $\frac{f'}{f}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ sauf au zéros de f et si a est un zéro de f d'ordre k, alors $f(z) = (z - a)^k f_1(z)$ avec $f_1(a) \neq 0$ et $f_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{D}(z_0, r))$. Donc

$$f'(z) = k(z - a)^{k-1} f_1(z) + (z - a)^k f_1'(z).$$

Par suite

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

au voisinage de a ; d'où $Res(\frac{f'}{f}, a) = k$. Par le théorème de Residus,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{(z_0,r)}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

est égale au nombre des zéros de f comptés avec multiplicités et contenus dans le disque $\mathbb{D}(z_0, r)$. $\square$

Remarque 3.24 *Le théorème de Rouché reste vrai si on remplace $\gamma_{(z_0,r)}$ par un lacet γ où $Ind_\gamma(z) = 1$ pour tout z à l'intérieur de γ^**

Théorème 3.25 *(de l'application ouverte) Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe non constante sur Ω. Alors f est ouverte.*

Démonstration. Soit W un ouvert de Ω. Montrons que $f(W)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit alors $\xi_0 \in f(W)$; il existe $z_0 \in W$ tel que $f(\xi_0) = z_0$. On considère $g(z) = f(z) - f(z_0)$. Comme f est non constante alors les zéros de gg' sont isolés ; par suite il existe $r_0 > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r_0) \subset W$ et $\forall z \in \overline{\mathbb{D}}(z_0, r_0) \setminus \{z_0\}$ on a $g(z) \neq 0$ et $g'(z) \neq 0$. D'après la démonstaration du résultat précédent, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(z_0 + r_0 e^{i\theta})}{f(z_0 + r_0 e^{i\theta}) - f(z_0)} i r_0 e^{i\theta} d\theta = k$$

où k est la multiplicité de z_0 comme zéro de g. Si on pose $\Gamma := f \circ \mathscr{C}(z_0, r_0)$ alors $k = Ind_\Gamma(f(z_0))$. L'indice est localement constant donc il existe un ouvert V contenant $f(z_0)$ tel que pour tout $\xi \in V$ on a

$$Ind_\Gamma(\xi) = k = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{dw}{w - \xi} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(z_0 + r_0 e^{i\theta})}{f(z_0 + r_0 e^{i\theta}) - \xi} i r_0 e^{i\theta} d\theta$$

Par suite $\forall\, \xi \in V$, on a $w \mapsto f(w) - \xi$ s'annule k fois dans $\mathbb{D}(z_0, r_0)$ ainsi $V \subset f(\mathbb{D}(z_0, r_0)) \subset f(W)$. □

Comme f' ne s'annule pas dans $\mathbb{D}(z_0, r_0) \setminus \{z_0\}$, les zéros de $w \mapsto f(w) - \xi$ sont isolés pour $\xi \neq \xi_0$ par conséquent $f - \xi$ admet k racines simples ; d'où le corollaire suivant :

Corollaire 3.26 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe non constante sur Ω. On suppose que $z_0 \in \Omega$ est un zéro d'ordre k de $f - f(z_0)$ alors il existe $r > 0$ et $R > 0$ tels que pour tout $\xi \in \mathbb{D}(f(z_0), R) \setminus \{f(z_0)\}$ on a $f - \xi$ admet exactement k racines simples dans $\mathbb{D}(z_0, r)$.*

3.3.3 Connexité simple

Définition 3.27 *Soit γ_0 et γ_1 deux lacets sur $[0,1]$ à valeurs dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Les deux lacets γ_0 et γ_1 sont dits homotopes dans Ω s'il existe une fonction continue $H : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \Omega$ vérifiant :*
$H(t,0) = \gamma_0(t)$, $H(t,1) = \gamma_1(t)$ et l'application $t \longmapsto H(t,s)$ est un lacet de Ω pour tout $s \in [0,1]$.

Exemple 3.28 *Si l'ouvert Ω est étoilé par rapport à un point $a \in \Omega$ alors tout lacet est homotope au point a.*

En effet, il suffit de prendre l'application $H(t,s) = (1-s)\gamma_0(t) + sa$.

Lemme 3.29 *L'homotopie est une relation d'équivalence.*

Démonstration.
- Réflexivité : Tout lacet est homotope à lui même. Il suffit de prendre $H(t,s) = \gamma_0(t)$ $\forall\, s \in [0,1]$.
- Symétrie : Si γ_0 est homotope à γ_1 dans Ω par l'application $H(t,s)$ alors l'application $F(t,s) = H(t, 1-s)$ permet de voir que γ_1 est homotope à γ_0 dans Ω.
- Transitivité : Si γ_0 est homotope à γ_1 dans Ω par l'application $F(t,s)$ et γ_1 est homotope à γ_2 dans Ω par l'application $G(t,s)$ alors γ_0 est homotope à γ_2 dans Ω par l'application $H(t,s)$ définie par :

$$H(t,s) = \begin{cases} F(t,2s) & si \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(t,2s-1) & si \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

□

Définition 3.30 *Un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit simplement connexe si Ω est un domaine et tout lacet de Ω est homotope à un point.*

Exemple 3.31 *Tout ouvert étoilé est simplement connexe. Par contre un disque pointé ou une couronne n'est pas simplement connexe.*

Théorème 3.32 *Soit Γ_0 et Γ_1 deux lacets homotopes dans Ω, alors $Ind_{\Gamma_0}(z) = Ind_{\Gamma_1}(z)$, $\forall\, z \notin \Omega$*

Comme cas particulier de ce résultat, si Ω est simplement connexe alors pour tout $z \notin \Omega$ et tout lacet γ de Ω on a $Ind_\gamma(z) = 0$. En outre, les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ sont non bornées. (Donc il n'y a pas des trous dans le domaine Ω).

Corollaire 3.33 *Si Ω est un ouvert simplement connexe alors pour toute fonction holomorphe f sur Ω et pour tout lacet γ de Ω on a $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$.*
En particulier, toute fonction holomorphe sur Ω admet une primitive.
En outre, si f est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur Ω alors il existe une fonction g holomorphe sur Ω telle que $f = e^g$.

Pour démonstrer le théorème 3.32, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.34 *Soit $\gamma_0,\ \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux lacets et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que*

$$|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| < |z_0 - \gamma_0(t)|,\ \forall\, t \in [0,1].$$

Alors $Ind_{\gamma_0}(z_0) = Ind_{\gamma_1}(z_0)$.

Démonstration. Soit $\gamma(t) = \dfrac{\gamma_1(t) - z_0}{\gamma_0(t) - z_0}$ pour $t \in [0,1]$. Alors d'après l'hypothèse, on a $|1 - \gamma(t)| < 1$ donc $Ind_\gamma(0) = 0$. Ainsi

$$0 = Ind_\gamma(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \left(\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - z_0} - \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t) - z_0}\right)dt = Ind_{\gamma_1}(z_0) - Ind_{\gamma_0}(z_0).$$

□

Démonstration du théorème 3.32. Soit H une homotopie entre Γ_0 et Γ_1. Soit $K = H([0,1]\times[0,1])$ et $\epsilon > 0$ tels que $d(K, \mathbb{C}\setminus\Omega) \geq 2\epsilon$. Comme H est uniformément bornée sur K, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|H(t,s) - H(t',s')| < \epsilon$ pour $|t - t'| < \frac{1}{p}$ et $|s - s'| < \frac{1}{p}$. Pour tout $0 \leq k \leq p$ on considère le lacet

$$\gamma_k(t) = H\left(\frac{j}{p}, \frac{k}{p}\right)(pt + 1 - j) + H\left(\frac{j-1}{p}, \frac{k}{p}\right)(j - pt)$$

pour $j - 1 \leq pt \leq j$ et $1 \leq j \leq p$.
On a $|\gamma_k(t) - H(t, \frac{k}{p})| < \epsilon$ pour $t \in [0,1]$ et $k = 0, ..., p$; en effet pour $j - 1 \leq pt \leq j$,

$$\left|\gamma_k(t) - H(t, \frac{k}{p})\right| \leq \left|H(\frac{j}{p}, \frac{k}{p}) - H(t, \frac{k}{p})\right|(pt + 1 - j) + (j - pt)\left|H(\frac{j-1}{p}, \frac{k}{p}) - H(t, \frac{k}{p})\right| < \epsilon.$$

De même on montre qu'on a $|\gamma_k(t) - \gamma_{k-1}(t)| < \epsilon$. on aura donc $|\gamma_0(t) - \Gamma_0(t)| < \epsilon$ pour $0 \leq t \leq 1$, $|\gamma_p(t) - \Gamma_1(t)| < \epsilon$ pour $0 \leq t \leq 1$. Pour tout $z_0 \notin \Omega$ et tout $k = 0, ..., p,\ t \in [0,1]$ on a

$$|\gamma_k(t) - z_0| \geq \left|H(t, \frac{k}{p}) - z_0\right| - \left|\gamma_k(t) - H(t, \frac{k}{p})\right| > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon$$

Par le lemme précédent on a $Ind_{\gamma_k}(z_0) = Ind_{\gamma_{k-1}}(z_0)$ et $Ind_{\gamma_0}(z_0) = Ind_{\Gamma_0}(z_0)$ et enfin $Ind_{\gamma_p}(z_0) = Ind_{\Gamma_1}(z_0)$. $\square$

Corollaire 3.35 *Si γ_0 et γ_1 sont deux lacet homotopes dans Ω, alors pour tout $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ on a*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Chapitre 4

Exercices et Problèmes

4.1 Énoncés

EXERCICE 1 *Notre but est de determiner, pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, toutes les fonctions holomorphes f sur $\mathbb{D}(0, R)$, $R > 1$, solution de l'équation :*

$$f(z^k) = (f(z))^k, \quad \forall\, z \in \mathbb{D}(0, 1). \tag{E_k}$$

1. *Determiner $\mathcal{S}_1$, l'ensemble des solutions de (E_1) (i.e. $k = 1$).*
   ***On suppose dans toute la suite que** $k \geq 2$. Il est évident que la fonction identiquement nulle est solution de (E_k). Soit alors f une solution de (E_k) non identiquement nulle.*
2. *Montrer que $|f(0)| = 0$ ou $|f(0)| = 1$.*
3. *Montrer que $f(\mathbb{D}(0, 1)) \subset \overline{\mathbb{D}}(0, 1)$.*
   Indication : Prouver que si $z \in \mathbb{D}(0, 1)$ alors la suite $\left((f(z))^{k^n}\right)_n$ est bornée.
4. *En déduire que si $|f(0)| = 1$ alors f est constante sur $\mathbb{D}(0, R)$. Préciser la valeur de cette constante en fonction de k.*
5. *On suppose dans cette question que $f(0) = 0$.*
   - *(a) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et g une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(0, R)$, $g(0) \neq 0$ tels que $f(z) = z^m g(z)$, $\forall\, z \in \mathbb{D}(0, R)$.*
   - *(b) En déduire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (à préciser) tel que $f(z) = z^m e^{i\theta}$, $\forall\, z \in \mathbb{D}(0, R)$.*
6. *Conclure $\mathcal{S}_k$ l'ensemble des solutions de (E_k).*

EXERCICE 2 *Soit ψ une fonction holomorphe sur un ouvert Ω contenant le disque $\overline{\mathbb{D}}(0, 1)$. On note par $\gamma(0, 1)$ le cercle unité.*

1. *En utilisant le théorème de Résidus, Calculer en fonction de ψ la valeur de*

$$\int_{\gamma(0,1)} \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 \frac{\psi(z)}{z} dz.$$

2. *En déduire les valeurs des intégrales*

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\psi(e^{it})dt, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\psi(e^{it})dt.$$

Exercice 3 *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ non constante.*

1. *Montrer que l'ensemble des points $a \in \mathbb{C}$ tels que $f + a$ admet un zéro double dans $\mathbb{D}(0,1)$ est fini.*
2. *Soit z_0 un zéro de f d'ordre $k > 0$.*
   (a) *Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que z_0 est l'unique zéro de ff' contenu dans le disque $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$.*
   (b) *Soit $t := \inf\limits_{|z-z_0|=r} |f(z)|$, montrer que $\forall\ a \in \mathbb{D}^*(0,t)$ la fonction $f+a$ admet exactement k zéros simples dans $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$.*
3. *Soit g une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.*
   (a) *On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{D}(0,1)$ tel que $f + ag$ admet un zéro double dans $\mathbb{D}(0,1)$ et que g ne s'annule pas dans $\mathbb{D}(0,1)$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall\ a' \in \mathbb{C}$, vérifiant $0 < |a - a'| < \epsilon$, $f + a'g$ n'admet pas de zéro double dans $\mathbb{D}(0,1)$.*
   Le résultat est-il vrai si g s'annule dans $\mathbb{D}(0,1)$?
   (b) *Montrer que l'ensemble des points $a \in \overline{\mathbb{D}}(0,1)$ tels que $f + ag$ admet un zéro double dans $\mathbb{D}(0,1)$ est fini.*

Exercice 4 *Soient Ω un domaine de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$ tel que le disque $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset \Omega$ et f une fonction holomorphe sur Ω. Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1. (a) *Montrer que $|f(z_0)| \leq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt$.*
   (b) *On suppose que $|f(z_0)| = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt$. Montrer que f est constante dans Ω.*
   Indication : étudier d'abord le cas où $f(z_0)$ est un réel positif.
   (c) *En déduire que s'il existe une fonction g holomorphe sur Ω, telle que $|f| = \Re e g$ sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ alors f et g sont constantes sur Ω.*
2. (a) *Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et une fonction h holomorphe sur Ω, ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ tels que $f = Ph$ sur Ω.*
   (b) *En déduire qu'il existe une fonction ψ holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ telle que sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ on ait $f = Pe^{\psi}$.*
   (c) *Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et une fonction φ holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ telle que*
   $$\forall\ z \in \mathbb{C}^*;\ \frac{1}{z} = P(z)e^{\varphi(z)}.$$

Problème 1 *Soit $R > 2$ et g une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}^*(0, R) := \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| < R\}$. Pour tout $0 < r < R$, on pose*

$$\mathscr{M}_g(r) = \sup_{|z|=r} |e^{g(z)}| \quad et \quad A_g(r) = \sup_{|z|=r} \Re e g(z)$$

où $\Re e g$ est la partie réelle de g.

1. *Établir une relation entre $\mathscr{M}_g(r)$ et $A_g(r)$.*

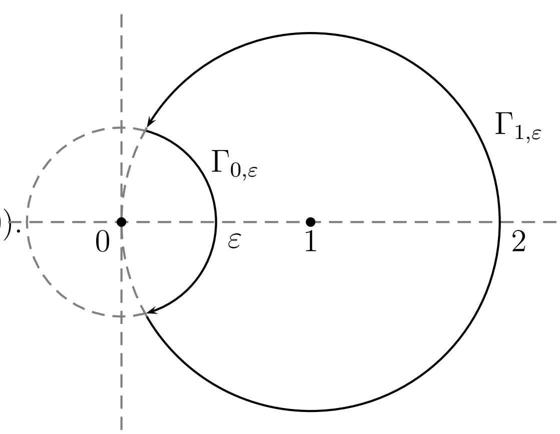
2. *On suppose que 0 est une singularité apparente de* g.

   Montrer que l'application $A_g : \ r \longmapsto A_g(r)$ *est croissante sur* $]0, R[$.
3. *On suppose dans cette question que 0 est un pôle de* g *d'ordre* $p \geq 1$.

   Donner la forme de la série de Laurent de g *et en déduire que* $\lim\limits_{r \to 0^+} A_g(r) = +\infty$.
4. *En déduire que si* A_g *est croissante sur* $]0, R[$ *alors 0 est une singularité apparente de* g.
5. *On suppose dans cette question que* $R = +\infty$ *et que* A_g *est majorée sur* $]0, +\infty[$. *montrer que* g *est constante sur* $\mathbb{C}^*$.
   Indication : *on pourra montrer que* e^g *est constante sur* $\mathbb{C}$.
6. *Montrer que s'il existe* $0 < r_0 < 1$ *tel que* $A_g(r_0) > A_g(1)$ *alors* A_g *est strictement décroissante sur* $]0, r_0[$.
   Indication : *on pourra appliquer le principe du maximum à des couronnes convenables.*
7. *On suppose qu'il existe* $0 < r_1 < 1$ *tel que* $A_g(r_1) = A_g(1)$.

   Montrer qu'on a ou bien g *est constante ou* $\lim\limits_{r \to 0^+} A_g(r) = +\infty$.
8. *On suppose que 0 est un pôle simple de* g. *Pour* $0 < \varepsilon < 1$, *on considère* $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_{0,\varepsilon} \vee \Gamma_{1,\varepsilon}$ *le bord de* $\mathbb{D}(1,1) \setminus \mathbb{D}(0,\varepsilon)$ *orienté dans le sens positif (Voir la figure ci-dessous).*

   (a) *Calculer en fonction de* $g(1)$ *la valeur de*
   $$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z-1} dz.$$

   (b) *Montrer que pour tout* $0 < a < \pi$, *on a*
   $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-a}^{a} \frac{g(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta} - 1} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = -2iaRes(g, 0).$$

   (c) *En déduire la valeur de*
   $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\Gamma_{0,\varepsilon}} \frac{g(z)}{z-1} dz.$$

   (d) *En déduire la valeur de*
   $$\lim_{\alpha \to 0^+} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} g(1 + e^{i\theta}) d\theta.$$

Problème 2 *Soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{C}$ *et soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe. Si le cercle* $\mathscr{C}(0, r) := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = r\}$ *centré en 0 et de rayon* r *est inclus dans* Ω *on posera* $M_f(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

1. *Dans cette question* $\Omega = \mathbb{D}(0, 1)$.

   (a) *Montrer que si* f *n'est pas constante, la fonction* M_f *est strictement croissante sur* $]0, 1[$. *(ind. utiliser le principe du maximum).*

(b) *Montrer que si pour* $r_0 \in]0,1[$ *la fonction* $\theta \to | f(r_0 e^{i\theta}) |$ *est constante et si* $f(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \mathbb{D}(0, r_0)$ *alors* f *est constante.*
Ind. Considerer $1/f$.

2. *Dans cette question* $\Omega = \mathbb{D}^*(0,1)$.

(a) *Calculer* $M(r)$ *pour chacune des fonctions suivantes :* $\dfrac{1}{z}$; $\dfrac{1}{z-1}$; $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z-1}$. *Tracer dans chaque cas le graphe de la fonction* $r \mapsto M(r)$, $(0 < r < 1)$.

(b) *On suppose qu'il existe deux réels* r_1 *et* r_2 *tels que* $0 < r_1 < r_2 < 1$ *avec* $M_f(r_1) > M_f(r_2)$. *Prouver que* 0 *n'est pas une singularité artificielle pour* f.
Prouver que si $0 < r < r' \leq r_1$ *alors* $M_f(r) > M_f(r')$.
ind. considérer $C_r = \{z \in \Omega,\ r \leq |z| \leq r_2\}$.

(c) *On suppose qu'il existe deux réels* r_3 *et* r_4 *tels que* $0 < r_3 < r_4 < 1$ *avec* $M_f(r_3) < M_f(r_4)$. *Comparer* $M_f(r)$ *et* $M_f(r')$ *pour* $r_4 \leq r < r' < 1$.

(d) *On suppose qu'il existe* $r_0 \in]0,1[$ *tel que* $M_f(r_0) = 0$. *Que dire de* f *?*

(e) *On suppose que* f *n'est pas constante et qu'il existe* $r_0 \in]0,1[$ *tel que* $0 < M_f(r_0) \leq M_f(r)$ *pour tout* $r \in]0,1[$. *Prouver que* M_f *est strictement monotone sur* $]0, r_0[$ *et sur* $]r_0, 1[$. *(ind. considerer* $r_{\pm\epsilon} = r_0 \pm \epsilon$*).*

3. *Dans cette question* $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ |z| > 1\}$.
On suppose qu'il existe $r_0 > 1$ *et* $A > 0$ *tels que* $M_f(r) \leq A$ *pour* $r \geq r_0$. *Prouver que si* f *n'est pas constante alors la fonction* M *est strictement décroissante sur* $]1, +\infty[$ *(on pourra utiliser la question 1. en justifiant).*

Problème 3 *(*Sur le lemme de Schwarz*) Dans toute la suite, on note par* $\mathbb{D}$ *le disque unité de* $\mathbb{C}$, $\mathscr{C}$ *son bord (le cercle unité de* $\mathbb{C}$*) et* Ω *un domaine (ouvert connexe) de* $\mathbb{C}$ *qui contient* $\overline{\mathbb{D}}$.

– ***Partie I/***
Soit F *une fonction entière (holomorphe sur* $\mathbb{C}$*). On note par* P *(resp.* Q*) la partie réelle (resp. imaginaire) de* F *; i.e* $F(z) = P(z) + iQ(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. *Pour tout* $r > 0$ *on pose*

$$M_F(r) = \sup_{|z|=r} |F(z)| \quad et \quad A_F(r) = \sup_{|z|=r} P(z).$$

1. (a) *Montrer que* $M_F(r) = \sup\limits_{|z|\leq r} |F(z)|$ *et que* $r \longmapsto M_F(r)$ *est croissante et que cette fonction est strictement croissante si* F *est non constante.*

(b) *En déduire que* $A_F(r) = \sup\limits_{|z|\leq r} P(z)$ *et que* $r \longmapsto A_F(r)$ *est croissante.*
On pourra considerer e^F.

(c) *Montrer que s'il existe* $k \in \mathbb{N}$ *et* $\rho,\ \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $M_F(r) \leq \rho r^k + \beta$, *pour* r *assez grand alors* F *est un polynôme de degré inférieur ou égale à* k.

2. *On suppose dans cette question que* $F(0) = 0$. *Soit* $r > 0$.

(a) *Pour* $\varepsilon > 0$, *on considère la fonction* ω_ε *définie par*

$$\omega_\varepsilon(z) = \frac{F(2rz)}{2A_F(2r) + \varepsilon - F(2rz)}.$$

Montrer que ω_ε *est holomorphe sur* $\mathbb{D}$

(b) *Montrer que* $|\omega_\varepsilon(z)| < 1,\ \forall\ z \in \mathbb{D}$
Indication : Remarquer que $P(2rz) \leq A(2r),\ \forall\ z \in \mathbb{D}$.

(c) *En déduire, en utilisant le lemme de Schwarz, que*

$$|F(2rz)| \leq |z||2A_F(2r) + \varepsilon - F(2rz)|,\ \forall\ z \in \mathbb{D}.$$

3. (a) *En déduire que* $|F(2rz)|(1-|z|) \leq 2A_F(2r)|z|,\ \forall\ z \in \mathbb{D}$.
   (b) *Conclure que* $M_F(r) \leq 2A_F(2r)$.
   (c) *En déduire que s'il existe* $k \in \mathbb{N}$ *et* $\rho,\ \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $A_F(r) \leq \rho r^k + \beta$, *pour* r *assez grand alors* F *est un polynôme de degré inférieur ou égale à* k.

– ***Partie II/***

1. *Pour* $\alpha \in \mathbb{D}$, *on pose* $\varphi_\alpha(z) = \dfrac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$.
   (a) *Montrer que* φ_α *est holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{\alpha}}\}$ *et que* $\varphi_\alpha(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$.
   (b) *En déduire que* φ_α *est un automorphisme*[1] *de* $\mathbb{D}$ *et donner* φ_α^{-1}.
2. *Soit* ψ *un automorphisme de* $\mathbb{D}$. *On note par* $\alpha = \psi^{-1}(0)$.
   (a) *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\psi(z) = \lambda\varphi_\alpha(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{D}$.
   Indication : Utiliser la fonction $g(z) = \psi \circ \varphi_\alpha^{-1}(z)$ *ainsi que sa fonction réciproque.*
   (b) *Verifier que* $\lambda = -\dfrac{\psi'(0)}{1 - |\alpha|^2}$.
3. *Soient* $a \in \mathbb{D}$ *et* $f :\ \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *une fonction holomorphe.*
   (a) *Montrer que pour tout* $z \in \mathbb{D}$, *on a* $\left|\dfrac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(z)}\right| \leq \left|\dfrac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right|$.
   (b) *En déduire que* $|f'(z)| \leq \dfrac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2},\ \forall\ z \in \mathbb{D}$.
4. *Soit* $h :\ \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *une fonction holomorphe.*
   (a) *On suppose* $h(0) = 0$ *et qu'il existe* $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ *tel que* $h(a) = a$.
   Montrer que $h(z) = z,\ \forall\ z \in \mathbb{D}$.
   (b) *On suppose qu'il existe* $a \neq b \in \mathbb{D}$ *tels que* $h(a) = a$ *et* $h(b) = b$.
   Montrer de même que $h(z) = z,\ \forall\ z \in \mathbb{D}$.
5. *Soit* G *une fonction holomorphe sur* Ω *telle que* $G(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$.
   (a) *Montrer que si* G *ne s'annule pas sur* $\mathbb{D}$ *alors* G *est constante sur* Ω.
   (b) *Montrer que* G *admet un nombre fini de zéros dans* $\mathbb{D}$. *Soient alors* $a_1, ..., a_p$ *ces zéros de multiplicités respectives* $\ell_1, ..., \ell_p$.
   (c) *Montrer qu'il existe* $\eta \in \mathbb{R}$ *tel que* $G(z) = e^{i\eta}\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(\varphi_{a_k}(z))^{\ell_k},\ \forall\ z \in \mathbb{D}$.
   (d) *Montrer que si* G *est entière (holomorphe sur* $\mathbb{C}$*) alors il existe* $(\eta, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ *tel que* $G(z) = e^{i\eta}z^m$
   (En pourra montrer que 0 est le seul zéro de G*).*

1. Un automorphisme de $\mathbb{D}$ est une application bijective biholomorphe de $\mathbb{D}$ dans lui même.

Problème 4 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$ où $r>0$ et soit f une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$ vérifiant $f(0)=0,\ f'(0)=1$ et $f(z)\neq 0$ pour tout $0<|z|\leq r$. On pose $\eta=\inf\limits_{|z|=r}|f(z)|$.*

1. (a) *Prouver que $\eta>0$.*
   (b) *Montrer que pour tout $w\in\mathbb{D}(0,\eta)$, la fonction $z\longmapsto f(z)-w$ admet un* ***unique*** *zéro* ***simple*** *dans le disque $\mathbb{D}(0,r)$.*
   Indication : Utiliser le théorème de Rouché.

   On notera $F(w)$ ce zéro (c'est-à-dire $f(F(w))-w=0$). Que vaut $F(0)$?
2. (a) *Montrer que 0 est une singularité artificielle de la fonction $z\longmapsto \dfrac{z}{f(z)}$ (i.e. prolongeable en une fonction holomorphe), et donner alors la valeur de $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma(0,r)}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz$.*
   (b) *établir, en utilisant le théorème des Résidus, que pour tout $w\in\mathbb{D}(0,\eta)$ on a*
   $$F(w)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,r)}\frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz$$
   On pourra montrer au depart que $\lim\limits_{z\to F(w)}\dfrac{z-F(w)}{f(z)-w}=\dfrac{1}{f'(F(w))}$ et en expliquant évidemment l'existence de cette limite.
   (c) *En déduire que $F(w)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_nw^n$ dans $\mathbb{D}(0,\eta)$ où a_n est donné par*
   $$a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,r)}\frac{zf'(z)}{(f(z))^{n+1}}dz$$
   pour tout $n\geq 1$ et donc F est holomorphe sur $\mathbb{D}(0,\eta)$.
   (d) *Calculer la dérivée de la fonction $h_n(z)=\dfrac{z}{(f(z))^n}$ et en déduire que l'on a l'égalité*
   $$a_n=\frac{1}{2in\pi}\int_{\gamma(0,r)}\frac{1}{(f(z))^n}dz.$$
3. *Application. Soit $\mathcal{U}=\mathbb{C},\ f(z)=ze^{-z}$ et $r=1$.*
   (a) *Vérifier que l'on a $\eta=\dfrac{1}{e}$ et $a_n=\dfrac{n^{n-1}}{n!}$.*
   (b) *Quel est le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}a_nw^n$?*

Problème 5 *Dans ce problème, $\mathbb{D}(r)$ (resp. $\mathscr{C}(r)$) sera le disque (resp. le cercle) de centre 0 et de rayon r et $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $s\in\mathbb{N},\ 0\leq s\leq n$ le coefficient de Binôme C_n^s est $C_n^s=\dfrac{n!}{s!(n-s)!}$. On rappelle que pour tous $z,\xi\in\mathbb{C}$ on a $(z+\xi)^n=\displaystyle\sum_{s=0}^{n}C_n^sz^s\xi^{n-s}$.*

1. *Montrer que*
$$C_{2n}^{n} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(1)} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}dz.$$
2. *Montrer que* $\displaystyle\sum_{s=0}^{n}(C_n^s)^2$ *est le terme constant de* $(1+z)^n(1+\frac{1}{z})^n$ *(pour* $z \neq 0$*).*
3. *En déduire que*
$$\sum_{s=0}^{n}(C_n^s)^2 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(1)}(1+z)^n\left(1+\frac{1}{z}\right)^n\frac{dz}{z} = C_{2n}^{n}.$$
4. *En déduire que*
$$C_{2n}^{n} = \frac{4^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$
et que $C_{2n}^{n} < 4^n$.
5. *Montrer que pour tout* $\xi \in \mathbb{D}(\frac{1}{4})$*, on a*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}C_{2n}^{n}\xi^n = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(1)}\frac{1}{z^2\xi+(2\xi-1)z+\xi}dz.$$
6. *Soit* $x \in]0, \frac{1}{4}[$.
   (a) *Montrer que*
$$\left|\frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x}\right| < 1, \quad \left|\frac{1-2x+\sqrt{1-4x}}{2x}\right| > 1.$$
   (b) *En déduire que*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}C_{2n}^{n}x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$
7. *Montrer que pour tout* $\xi \in \mathbb{D}(\frac{1}{4})$*, on a*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}C_{2n}^{n}\xi^n = \exp\left(-\frac{1}{2}\log_0(1-4\xi)\right)$$
où $\log_0$ *est la détermination principale du logarithme.*

Problème 6 *Les questions (1) et (2) sont indépendantes.*
Soit Ω *un domaine (ouvert connexe) de* $\mathbb{C}$ *qui contient le disque unité fermé* $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$.

1. *Soient* F *et* G *deux fonctions holomorphes sur* Ω*. On suppose que* F *et* G *ne s'annule pas dans* $\mathbb{D}(0,1)$ *et que*
$$|F(z)| = |G(z)|, \ \forall \ |z| = 1.$$
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ *tel que* $F = \lambda G$ *sur* Ω.
Indication : *Utiliser le principe du maximum à une fonction bien choisie.*
Le résultat reste-t-il vrai si F *ou* G *s'annule dans* $\mathbb{D}(0,1)$ *?*

2. *Soient F et G deux fonctions entières (holomorphes sur $\mathbb{C}$) telles que*

$$|F(z)| \leq |G(z)|, \ \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

   (a) *Montrer que si z_0 est un zéro de G d'ordre n alors z_0 est un zéro de F d'ordre m où $m \geq n$.*

   (b) *Montrer que $\dfrac{F}{G}$ est (prolongeable en) une fonction entière.*

   (c) *En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$ tel que $F = \lambda G$ sur $\mathbb{C}$.*

3. *(**Applications**)*
   – *Montrer que si u est une fonction holomorphe sur Ω, injective[2] sur $\mathbb{D}(0,1)$ et vérifie*

$$|u'(z)| = |z|, \ \forall\, |z| = 1$$

   alors $u(z) = a + bz$ où $a,\ b \in \mathbb{C}$ avec $|b| = 1$.
   – *Montrer que si v est une fonction entière vérifiant*

$$|v'(z)| \leq |z|, \ \forall\, z \in \mathbb{C}$$

   alors $v(z) = \alpha + \beta z^2$ où $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ avec $|\beta| \leq \dfrac{1}{2}$.
   – *A-t-on $|\sin(z)| \leq |z|,\ \forall\, z \in \mathbb{C}$?*

Problème 7 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soient $a_1, ..., a_n$ des points de U et $\Omega = U \setminus \{a_1, ..., a_n\}$. On se donne une fonction holomorphe g sur Ω et on se propose de chercher les fonctions F holomorphes sur Ω et solutions de l'équation :*

$$F'(z) = g(z)F(z), \quad \forall\, z \in \Omega. \tag{E}$$

1. *Soit F une solution de (E). Montrer que s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $F(z_0) = 0$, alors F est identiquement nulle sur Ω, (on pourra calculer $F^{(n)}(z_0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$).*

2. *On suppose que (E) admet une solution F_0 non identiquement nulle.*
   Montrer que toute solution F de (E) est de la forme $F(z) = \lambda F_0(z),\ \forall\, z \in \Omega$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. (a) *Montrer que si g admet une primitive sur Ω alors (E) admet une solution de la forme $F(z) = e^{G(z)}$ où G est une fonction holomorphe sur Ω.*

   (b) *On prend $\Omega = \mathbb{C}^*$ et $g(z) = \dfrac{1}{z^2}$. Déterminer toutes les solutions de (E).*

4. (a) *On suppose que g est de la forme $g = \dfrac{\varphi'}{\varphi}$ où φ est une fonction holomorphe sur U ayant comme zéros dans U les points $a_1, ..., a_n$.*
   Exprimer en fonction de φ les solutions de (E).

   (b) *On prend $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ et $g(z) = \dfrac{m}{z-a},\ m \in \mathbb{Z}$. Déterminer les solutions de (E).*

5. *On suppose que U est un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et que $Res(g, a_k) = m_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $1 \leq k \leq n$.*

2. On démontre que si une fonction holomorphe est injective sur un disque alors sa fonction dérivée ne s'annule pas sur ce disque (voir Problème 9).

(a) *Montrer que* $h(z) = g(z) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{z - a_k}$ *admet une primitive sur* Ω.

(b) *En déduire que toute solution de* (E) *est de la forme*

$$F(z) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{m_k} e^{H(z)}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* H *est une fonction holomorphe sur* Ω *à préciser.*

6. *On suppose que l'ouvert* U *est étoilé et que* g *est holomorphe sur* U. *On considère l'équation différentielle*

$$F'(z) = g(z)F(z) + \Phi(z), \forall\, z \in \Omega \qquad (E_\Phi)$$

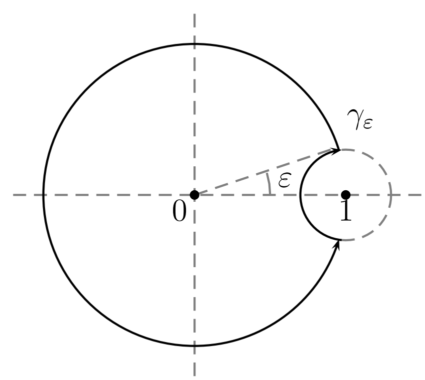
où Φ *est une fonction holomorphe sur* U.

(a) *Soit* F_Φ *une solution particulière de* (E_Φ). *Montrer que toute solution de* (E_Φ) *est de la forme* $F_\Phi + F_0$ *où* F_0 *est une solution de* (E) *(équation homogène associé ie. sans second membre).*

(b) *Prouver que* g *admet une primitive* G *sur* Ω *et que la fonction* $z \longmapsto \Phi(z)e^{-G(z)}$ *l'est aussi.*

(c) *Montrer que toute solution de* (E_Φ) *est de la forme* $F(z) = \lambda(z)e^{G(z)}$ *où* λ *est une fonction holomorphe à préciser.*

Problème 8 *Le but de ce problème est de montrer la formule de Jensen qui admet plusieurs applications, en particulier elle permet de compter le nombre des zéros d'une fonction holomorphe dans un disque.*
On rappelle que la détermination principale du logarithme $\log_0$ *est définie sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ *par*



$$\log_0(\xi) = \ln|\xi| + i\ arg_{]-\pi,\pi[}(\xi).$$

Partie I.

1. *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|1 - e^{i\theta}|d\theta$ *est convergente.*

2. *On considère la fonction* g *définie par* $g(z) = \log_0(1 - z)$.
   Donner le domaine d'holomorphie de la fonction g.

3. *Pour* $\varepsilon > 0$ *assez petit, on considère le lacet* γ_ε *comme indique la figure ci-dessus.*
   Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z} dz = 0$.

4. *En tendant* ε *vers* 0, *montrer que* $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|1 - e^{i\theta}|d\theta = 0$.

5. *Calculer* $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|1 - \alpha e^{i\theta}|d\theta$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Partie II

Soit f une fonction holomorphe sur le disque $\mathbb{D}(R)$ telle que $f(0) \neq 0$ et soit $0 < r < R$. On suppose que f admet exactement $a_1, \ldots, a_n$ comme zéros dans le disque $\mathbb{D}(r)$ et $b_j = re^{i\theta_j}$, $j = 1, \ldots, m$ comme zéros sur le cercle $\mathscr{C}(r)$ (tout les zéros sont comptés avec multiplicités).

1. *Montrer qu'il existe une fonction h holomorphe sur $\mathbb{D}(R)$ qui n'admet pas de zéros dans un disque $\mathbb{D}(r')$ où $r < r' \leq R$ telle qu'on ait*
$$f(z) = \left(\prod_{p=1}^{n} \frac{r(a_p - z)}{r^2 - \overline{a}_p z}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}(z - b_j)\right) h(z), \quad \forall\ z \in \mathbb{D}(r').$$
2. *Montrer que la fonction $\ln|h|$ est harmonique sur $\mathbb{D}(r')$ et en déduire que*
$$\ln|h(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|h(re^{i\theta})| d\theta.$$
3. *montrer que pour tout $1 \leq j \leq m$, on a $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|re^{i\theta} - b_j| d\theta = \ln r$.*
4. *Montrer que $\displaystyle\ln|h(0)| = \ln|f(0)| + \sum_{p=1}^{n} \ln\frac{r}{|a_p|} - m\ln r$.*
5. *En déduire la formule de Jensen :*
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})| d\theta = \ln|f(0)| + \sum_{p=1}^{n} \ln\frac{r}{|a_p|}.$$
6. *(Application)*
   (a) *Montrer que pour tout entier $k \geq 3$, la fonction $P_k(z) = z^k + z + 3$ admet toute ses racines dans la couronne $C(1, 2) := \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z| < 2\}$.*
   (b) *Montrer que $A(1) = \ln 3$ puis Comparer $A(1)$ et $A(2)$ où*
$$A(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|P_k(re^{i\theta})| d\theta.$$
7. *On suppose dans cette question que 0 est aussi un zéro de f d'ordre q.*
   Montrer, en utilisant la fonction $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z^q}$, qu'on a
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})| d\theta = q\ln r + \ln\frac{|f^{(q)}(0)|}{q!} + \sum_{p=1}^{n} \ln\frac{r}{|a_p|}.$$

Problème 9 Sur les fonctions injectives

I. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r_0) \subset U$. Soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge dans $\mathcal{H}(U)$ vers une fonction holomorphe g sur U.*

   1. *On suppose dans cette question que $g(z) \neq 0, \forall\ z \in \mathscr{C}(z_0, r_0)$.*

(a) *Montrer qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$ *on a* g_n *et* g *ont même nombre de zéros dans le disque* $\mathbb{D}(z_0, r_0)$.

(b) *En déduire que si les fonctions* g_n *sont injectives (pour tout* $n \geq n_1$*) sur* U *alors* g *est constante ou injective.*

2. *Montrer, par un contre exemple, que les résultats précédents sont faux si* g *s'annule sur le cercle* $\mathscr{C}(z_0, r_0)$.

II. *On considère* $a > 0$ *et* $\Omega_a := \{z \in \mathbb{C};\ -a < \Im m(z) < a\}$. *Soit* f *une fonction holomorphe* non constante *sur* Ω_a *et* $(h_n)_n$ *la suite de fonctions définies par*

$$h_n(z) := n(f(z + \frac{1}{n}) - f(z)) = \frac{f(z + \frac{1}{n}) - f(z)}{\frac{1}{n}}, \quad \forall\, z \in \Omega_a.$$

1. *Montrer que* $(h_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de fonctions holomorphes, qui converge simplement sur* Ω_a *vers une fonction* h *que l'on déterminera.*
2. *Montrer que la suite* $(h_n)_n$ *est localement bornée.*
   Indication : remarquer que $f(z + \dfrac{1}{n}) - f(z) = \displaystyle\int_{[z, z+\frac{1}{n}]} f'(w)dw.$
3. *En déduire que* $(h_n)_n$ *converge dans* $\mathcal{H}(\Omega_a)$ *vers* h.
4. (a) *En utilisant la question (I.1-a), Montrer que si* f *est injective sur* Ω_a *alors* $f'(z) \neq 0,\ \forall\, z \in \Omega_a$.
   En déduire que f *réalise un biholomorphisme de* Ω_a *dans* $f(\Omega_a)$.

   (b) *(Réciproquement) Donner une fonction holomorphe* non injective ψ *sur* $\Omega_{2\pi}$ *qui vérifie* $\psi'(z) \neq 0,\ \forall\, z \in \Omega_{2\pi}$.
5. *On suppose dans cette question que* f *est injective sur* $\Omega_a \setminus \Delta$ *où* Δ *est une droite de* $\mathbb{C}$ *et on veut montrer que* f *est injective sur* Ω_a.

   (a) *On suppose qu'il existe* $z_1 \neq z_2 \in \Omega_a$ *tels que* $f(z_1) = f(z_2)$.
   En utilisant le théorème de l'application ouverte, montrer qu'il existe $r > 0,\ \epsilon > 0$ *tels que*
   $$\mathbb{D}(f(z_1), \epsilon) \subset f(\mathbb{D}(z_1, r)) \cap f(\mathbb{D}(z_2, r)).$$

   (b) *En déduire que* f *est injective sur* Ω_a *et que*
   $$\int_{\mathscr{C}(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \neq 0, \quad z \in \mathbb{D}(z_0, r) \subset\subset \Omega_a.$$

III. *Soit* F *une fonction entière (holomorphe sur* $\mathbb{C}$*). On suppose que* F *est injective sur* $\{z \in \mathbb{C};\ |z| > 1\}$ *et on pose* $G(z) = F(\frac{1}{z})$.

1. *Montrer que* G *est holomorphe sur* $\mathbb{C}^*$ *et que pour tout* $\eta < 1$ *on a* $G(\mathbb{D}^*(0, \eta))$ *n'est pas dense dans* $\mathbb{C}$.
2. *En déduire que* F *est de la forme* $F(z) = \alpha z + \beta$ *où* $\alpha \neq 0$.

4.2 Solutions

Solution de l'exercice 4. **Soient Ω un domaine de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$ tel que le disque $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset \Omega$ et f une fonction holomorphe sur Ω.**

1. (a) **Montrer que $|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt$.**

   Comme f est holomorphe alors d'après l'égalité de la moyenne, on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$$

   donc

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt$$

   (b) **On suppose que $|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt$. Montrer que f est constante dans Ω.**

   – Cas où $f(z_0) \in \mathbb{R}^+$:

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt = f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$$

   ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(|f(z_0 + re^{it})| - \Re e f(z_0 + re^{it})\right) dt = 0 \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Im m f(z_0 + re^{it})dt = 0 \end{cases}$$

   Comme

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\underbrace{|f(z_0 + re^{it})| - \Re e f(z_0 + re^{it})}_{\geq 0,\ continue}\right) dt = 0$$

   alors

$$|f(z_0 + re^{it})| - \Re e f(z_0 + re^{it}) = 0 \ \forall\, t \in [0, 2\pi]$$

   donc $\Im m f(\xi) = 0,\ \forall\, |\xi - z_0| = r$.
   Par le principe du maximum, on a pour tout $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$,

$$\Im m f(z) \leq \sup_{|\xi - z_0| < r} \Im m f(\xi) = \sup_{|\xi - z_0| = r} \Im m f(\xi) = 0$$

   de plus on a $\Im m f(z_0) = 0$ donc le sup est atteint en z_0 ainsi $\Im m f = 0$ sur $\mathbb{D}(z_0, r)$. D'après le théorème 1.6, f est constante sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ et donc constante sur Ω (par le principe de prolongement analytique).

   – Cas où $f(z_0) \in \mathbb{C}$: On note $f(z_0) = |f(z_0)|e^{i\theta_0}$. On considère $F(z) = f(z)e^{-i\theta_0}$, alors F est holomorphe sur Ω, $F(z_0) = |f(z_0)|e^{i\theta_0}e^{-i\theta_0} = |f(z_0)| \geq 0$ et

$$|F(z_0)| = |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(z_0 + re^{it})|dt$$

   D'après le premier cas, F est constante donc on est de même pour f.

(c) **En déduire que s'il existe une fonction g holomorphe sur Ω, telle que $|f| = \Re e g$ sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ alors f et g sont constantes sur Ω.**

s'il existe une fonction g holomorphe sur Ω, telle que $|f| = \Re e g$ sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ alors pour tout $\rho < r$ on aura d'après l'égalité de la moyenne,

$$|f(z_0)| = \Re e g(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re e g(z_0 + \rho e^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})|dt$$

D'après la question précédente, f est constante sur Ω. De plus, comme $\Re e g$ est constante sur $\mathbb{D}(z_0, \rho)$ alors d'après le théorème 1.6, g est constante sur $\mathbb{D}(z_0, \rho)$ et donc constante sur Ω par le principe de prolongement analytique.

2. (a) **Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et une fonction h holomorphe sur Ω, ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ tels que $f = Ph$ sur Ω.**

Si f est identiquement nulle alors P le polynôme nulle convient.
Si f est non identiquement nulle alors les zéros de f sont isolés ainsi le compact $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ rencontre un nombre fini de ces zéros. Soit $a_0, ..., a_s$ les zéros de f dans le disque $\mathbb{D}(z_0, r)$ de multiplicités respectives $n_1, ..., n_s$. Alors la fonction $h(z) = \dfrac{f(z)}{\prod_{j=1}^{s}(z - a_j)^{n_j}}$ est (prolongeable en) une fonction holomorphe sur Ω et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{D}(z_0, r)$.

(b) **En déduire qu'il existe une fonction ψ holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ telle que sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ on ait $f = Pe^{\psi}$.**

On a la fonction h est holomorphe et ne s'annule pas sur $\mathbb{D}(z_0, r)$. Donc il existe une fonction ψ holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ telle que sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ on ait $h = e^{\psi}$ (ψ, à une constante additive près, est une primitive de $\dfrac{h'}{h}$ qui est assuré car cette fonction est holomorphe sur l'ouvert étoilé $\mathbb{D}(z_0, r)$).

(c) **Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et une fonction φ holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ telle que**

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^*;\ \frac{1}{z} = P(z)e^{\varphi(z)}.$$

On suppose qu'il existe un polynôme P et une fonction holomorphe φ sur $\mathbb{C}^*$ telle que

$$\frac{1}{z} = P(z)e^{\varphi(z)},\ \forall\, z \in \mathbb{C}^*.$$

Comme $\frac{1}{z}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}^*$ alors P n'admet pas de zéros dans $\mathbb{C}^*$ donc $P(z) = cz^m,\ c \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N}$. Par suite, on aura $e^{-\varphi(z)} = cz^{m+1}$ sur $\mathbb{C}^*$ ainsi par dérivation on aura

$$(m+1)cz^m = -\varphi'(z)e^{-\varphi(z)} = -cz^{m+1}\varphi'(z),\ \forall\, z \in \mathbb{C}^*.$$

c'est-à-dire, $-\dfrac{1}{m+1}\varphi'(z) = \dfrac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}^*$. En conclusion $\mathbb{C}^*$ admet une détermination continue du logarithme et ce qui est absurde.

□

Solution du problème 1. **Soit $R > 2$ et g une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}^*(0, R) := \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| < R\}$.**
Pour tout $0 < r < R$, on pose

$$\mathscr{M}_g(r) = \sup_{|z|=r} |e^{g(z)}| \quad et \quad A_g(r) = \sup_{|z|=r} \Re e\, g(z)$$

où $\Re e\, g$ est la partie réelle de g.

1. **Établir une relation entre $\mathscr{M}_g(r)$ et $A_g(r)$.**

En utilisant le fait que la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\mathscr{M}_g(r) = \sup_{|z|=r} |e^{g(z)}| = \sup_{|z|=r} e^{\Re e\, g(z)} = \exp\left(\sup_{|z|=r} \Re e\, g(z)\right) = e^{A_g(r)}.$$

D'où $\mathscr{M}_g(r) = e^{A_g(r)}$.

2. **On suppose que 0 est une singularité apparente de g.**
Montrer que l'application $A_g : \ r \longmapsto A_g(r)$ est croissante sur $]0, R[$.

Comme g est holomorphe sur $\mathbb{D}(0, R)$ alors par le principe du maximum, on a

$$A_g(r) = \sup_{|z|=r} \Re e\, g(z) = \sup_{|z|\le r} \Re e\, g(z).$$

Donc si $r_1 < r_2 < R$ alors

$$A_g(r_1) = \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}(0,r_1)} \Re e\, g(z) \le \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}(0,r_2)} \Re e\, g(z) = A_g(r_2)$$

Car $\overline{\mathbb{D}}(0, r_1) \subset \overline{\mathbb{D}}(0, r_2)$.

3. **On suppose dans cette question que 0 est un pôle de g d'ordre $p \ge 1$.**
Donner la forme de la série de Laurent de g et en déduire que $\lim\limits_{r\to 0^+} A_g(r) = +\infty$.

La fonction $z \longmapsto z^p g(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de 0 ; donc elle est développable en série entière. Ainsi on a

$$z^p g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \quad \Longrightarrow g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{k-p}.$$

Soit $a_0 = |a_0| e^{i\theta_0}$. Alors pour tout $r > 0$ on a

$$A_g(r) \ge \Re e g(re^{\frac{i}{p}\theta_0}) = \Re e\left[\frac{a_0}{r^p e^{i\theta_0}}\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{a_0} r^k e^{i\frac{k}{p}\theta_0}\right)\right] = \frac{|a_0|}{r^p}\Re e\left[\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{a_0} r^k e^{i\frac{k}{p}\theta_0}\right)\right].$$

Comme

$$\lim_{r\to 0^+} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{a_0} r^k e^{i\frac{k}{p}\theta_0} = 0$$

alors $\lim\limits_{r\to 0^+} \Re e g(re^{\frac{i}{p}\theta_0}) = +\infty$. Ce qui prouve que $\lim\limits_{r\to 0^+} A_g(r) = +\infty$.

4. **En déduire que si A_g est croissante sur $]0, R[$ alors 0 est une singularité apparente de g.**

Avec un raisonnement analogue a celui de la question précédente, on peut montrer de même que si 0 est une singularité essentielle de g (ie. $g\left(\mathbb{D}^*(0, \eta)\right)$ est dense dans $\mathbb{C}$ pour tout $\eta > 0$) alors $\lim\limits_{r\to 0^+} A_g(r) = +\infty$; en effet on montre qu'il existe une sous-suite $(r_s)_s$ qui décroît vers 0 et telle que $A_g(r_s) \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Comme A_g est croissante sur $]0, R[$ alors elle est majoré au voisinage de 0 ce qui contredit le fait que 0 est un pôle ou une singularité essentielle de g. D'où 0 est une singularité apparente de g.

5. **On suppose dans cette question que $R = +\infty$ et que A_g est majorée sur $]0, +\infty[$. montrer que g est constante sur $\mathbb{C}^*$.** *Indication :* **on pourra montrer que e^g est constante sur $\mathbb{C}$.**

Comme A_g est majorée sur $]0, +\infty[$ alors d'après la question précédente on a 0 est une singularité apparente de g. ie. g se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Par suite la fonction e^g est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et est bornée sur $\mathbb{C}$ car $\sup_{z\in\mathbb{C}} |e^{g(z)}| \leq e^M$ où $M \geq A_g(r)$ pour tout $r > 0$. Par le théorème de Liouville, la fonction e^g est constante sur $\mathbb{C}$. Par dérivation on obtient

$$0 = (e^g)'(z) = g'(z)e^{g(z)}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

ie. $g'(z) = 0,\ \forall\, z \in \mathbb{C}$. Ce qui prouve que g est constante sur $\mathbb{C}$.

6. **Montrer que s'il existe $0 < r_0 < 1$ tel que $A_g(r_0) > A_g(1)$ alors A_g est strictement décroissante sur $]0, r_0[$.** *Indication :* **on pourra appliquer le principe du maximum à des couronnes convenables.**

Pour tout $r <\leq r_0$, on pose $C_r := \{z \in \mathbb{C};\ r \leq |z| \leq 1\}$. Alors C_r est un compact de $\mathbb{D}^*(0, R)$. Par le principe du maximum, on obtient

$$\sup_{z\in C_r} \Re e g(z) = \sup_{z\in\partial C_r} \Re e g(z) = \max(A_g(r),\ A_g(1)) \geq A_g(r_0) > A_g(1).$$

D'où $\sup_{z\in C_r} \Re e g(z) = A_g(r)$ pour tout $0 < r \leq r_0$.
Pour $0 < r_2 < r_1 < r_0$, on a $C_{r_1} \subset C_{r_2}$ donc

$$A_g(r_2) = \sup_{z\in C_{r_2}} \Re e g(z) \geq \sup_{z\in C_{r_1}} \Re e g(z) = A_g(r_1)$$

Ce qui prouve que A_g est décroissante sur $]0, r_0[$. Si on a $A_g(r_2) = A_g(r_1)$ alors

$$\sup_{z\in C_{r_2}} \Re e g(z) = \sup_{z\in\mathscr{C}(0,r_1} \Re e g(z) = \Re e g(z_1)$$

avec $z_1 \in \mathscr{C}(0, r_1) \subset \overset{\circ}{C}_{r_2}$. Par le principe du maximum g est constante sur C_{r_2} et par le principe de prolongement analytique, elle est constante sur $\mathbb{D}^*(0, R)$, ce qui est absurde car $A_g(r_0) > A_g(1)$.

7. **On suppose qu'il existe $0 < r_1 < 1$ tel que $A_g(r_1) = A_g(1)$.
Montrer qu'on a ou bien g est constante ou $\lim_{r\to 0^+} A_g(r) = +\infty$.**

Deux cas se présente : ou bien que 0 est une singularité apparente ou bien ne l'est pas.

– Dans le premier cas on a g est holomorphe sur $\mathbb{D}(0, R)$ donc $A_g(r) = \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}(0,r)} \Re e g(z)$ pour tout $r < R$. Par suite on obtient

$$A_g(r_1) = \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}(0,r_1)} \Re e g(z) = \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}(0,1)} \Re e g(z) = A_g(1) = \Re e g(\xi_1)$$

où $\xi_1 \in \mathscr{C}(0, 1)$. De même par les principes de maximum et de prolongement analytique, on aura g est constante sur $\mathbb{D}(0, R)$.
– Dans le deuxième cas, 0 est un pôle d'ordre $p \geq 1$ ou une singularité essentielle pour g, on a montré que $\lim_{r\to 0^+} A_g(r) = +\infty$.

8. **On suppose que 0 est un pôle simple de g. Pour $0 < \varepsilon < 1$, on considère $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_{0,\varepsilon} \vee \Gamma_{1,\varepsilon}$ le bord de $\mathbb{D}(1, 1) \setminus \mathbb{D}(0, \varepsilon)$ orienté dans le sens positif (Voir la figure ci-dessous).**

(a) **Calculer en fonction de $g(1)$ la valeur de $\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z-1} dz$.**

Soit $P = \{z \in \mathbb{D}(0, R), \Re e(z) > 0\}$. Alors P est bien un ouvert étoilé et contient le lacet Γ_ε. De plus la fonction g est holomorphe sur P. D'après la formule intégrale de Cauchy,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z-1} dz = 2i\pi g(1).$$

(b) **Montrer que pour tout $0 < a < \pi$, on a**

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-a}^{a} \frac{g(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta} - 1} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = -2iaRes(g, 0).$$

Comme $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon e^{i\theta} g(\varepsilon e^{i\theta}) = Res(g, 0)$ existe alors il existe $b > 0$ tel que $|\varepsilon e^{i\theta} g(\varepsilon e^{i\theta})| \leq b$ uniformément par rapport à θ pour $\varepsilon > 0$ assez petit ; ainsi par le théorème de convergence dominé (intégrale simple dependant d'un paramètre), on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-a}^{a} \frac{g(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta} - 1} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = \int_{-a}^{a} \left(\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{g(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta} - 1} i\varepsilon e^{i\theta} \right) d\theta = -2iaRes(g, 0).$$

(c) **En déduire la valeur de**

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\Gamma_{0,\varepsilon}} \frac{g(z)}{z-1} dz.$$

On a

$$\int_{\Gamma_{0,\varepsilon}} \frac{g(z)}{z-1} dz = \int_{-a(\varepsilon)}^{a(\varepsilon)} \frac{g(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta} - 1} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta.$$

où $a(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ donc par passage à la limite (d'une intégrale simple cependant d'un paramètre) on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\Gamma_{0,\varepsilon}} \frac{g(z)}{z-1} dz = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-a(\varepsilon)}^{a(\varepsilon)} \frac{g(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta} - 1} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = -2i\pi \times \frac{\pi}{2} Res(g, 0) = -i\pi^2 Res(g, 0).$$

(d) **En déduire la valeur de**

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} g(1 + e^{i\theta}) d\theta.$$

D'après la question 8.a), on a

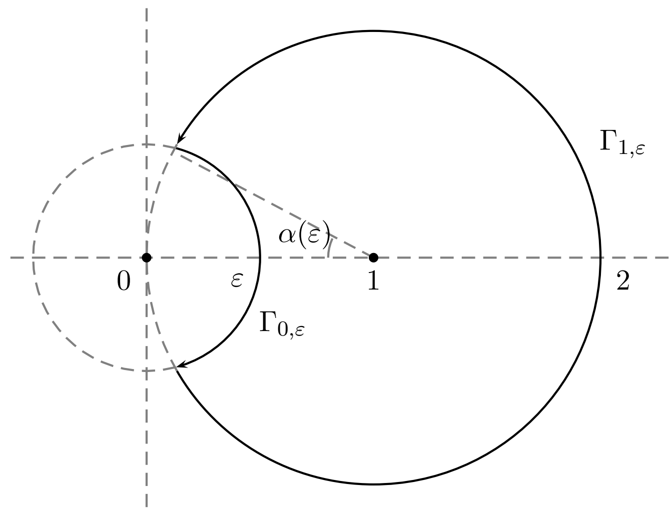
$$\int_{\Gamma_{1,\varepsilon}} \frac{g(z)}{z-1} dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z-1} dz - \int_{\Gamma_{0,\varepsilon}} \frac{g(z)}{z-1} dz = \int_{-\pi+\alpha(\varepsilon)}^{\pi-\alpha(\varepsilon)} g(1 + e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta.$$

Donc par la question 8.c), on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\pi+\alpha(\varepsilon)}^{\pi-\alpha(\varepsilon)} g(1+e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(2i\pi g(1) - \int_{\Gamma_{0,\varepsilon}} \frac{g(z)}{z-1} dz \right) = 2i\pi g(1) + i\pi^2 Res(g, 0).$$

D'où

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} g(1 + e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta = 2\pi g(1) + \pi^2 Res(g, 0).$$



□

Solution du problème 2 **Soit Ω un domaine dans $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Si le cercle $\mathscr{C}(0,r) := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = r\}$ centré en 0 et de rayon r est inclus dans Ω on posera $M_f(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.**

1. **Dans cette question $\Omega = \mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$.**

(a) **Montrer que si f n'est pas constante, la fonction M_f est strictement croissante sur $]0,1[$.**

Par le principe du maximum, on a

$$M_f(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| = \sup_{|z|\le r} |f(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}(r)} |f(z)|$$

et si $r_1 \le r_2$ alors $\mathbb{D}(r_1) \subset \mathbb{D}(r_2)$ donc

$$\sup_{z\in\mathbb{D}(r_1)} |f(z)| \le \sup_{z\in\mathbb{D}(r_2)} |f(z)|$$

D'où $M_f(r_1) \le M_f(r_2)$. Ainsi M_f est croissante sur $]0,1[$.
On suppose qu'il existe $0 < r_3 < r_4 < 1$ tels que $M_f(r_3) = M_f(r_4)$ et comme $\mathscr{C}(0,r_3)$ est compact et $|f|$ est continue alors elle atteint son maximum sur ce compact ainsi on a

$$M_f(r_4) = \sup_{z\in\mathbb{D}(r_4)} |f(z)| = M_f(r_3) = \sup_{z\in\mathscr{C}(0,r_3)} |f(z)| = |f(z_3)|, \quad z_3 \in \mathscr{C}(0,r_3)$$

Par suite $|f|$ atteint son maximum (en z_3) à l'intérieur de $\mathbb{D}(r_4)$. Et f est constante sur $\mathbb{D}(r_4)$ par le principe de maximum ; et f est constante sur $\mathbb{D}$ par le principe de prolongement analytique. C'est qui est absurde. D'où M_f est strictement croissante sur $]0,1[$.

(b) **Montrer que si pour $r_0 \in]0,1[$ la fonction $\theta \to |f(r_0e^{i\theta})|$ est constante et si $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}(0,r_0)$ alors f est constante.**

On suppose que $|f|_{|\mathscr{C}(0,r_0)} \equiv c_0$. Si $c_0 = 0$ alors f est nulle sur $\mathscr{C}(0,r_0)$ alors par le principe de zéros isolés, f est identiquement nulle sur Ω ce qui est absurde, donc $c_0 \neq 0$. D'après le principe du maximum, on a pour $z \in \mathbb{D}(r_0)$,

$$|f(z)| \le \sup_{|\xi|<r_0} |f(\xi)| = \sup_{|\xi|=r_0} |f(\xi)| = c_0.$$

De même comme $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}(r_0)$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}(r_0)$ alors par le principe du maximum, on a

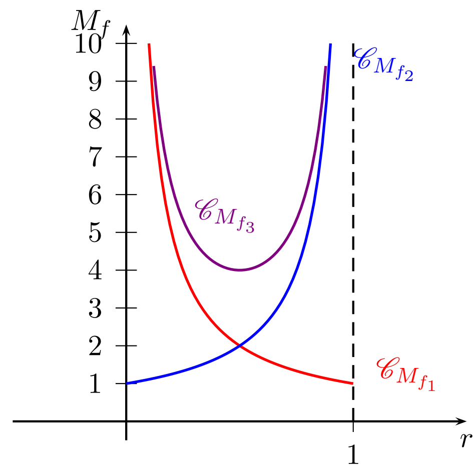
$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq \sup_{|\xi|<1} \frac{1}{|f(\xi)|} = \sup_{|\xi|=1} \frac{1}{|f(\xi)|} = \frac{1}{c_0}.$$

Par suite on a $|f| \equiv c_0$ sur $\mathbb{D}(r_0)$, D'après le théorème 1.6, $f \equiv Cte$ sur $\mathbb{D}(r_0)$ et par le principe de prolongement analytique, $f \equiv Cte$ sur Ω.

2. **Dans cette question $\Omega = \mathbb{D}^*(0,1)$.**

(a) **Calculer $M_f(r)$ pour chacune des fonctions suivantes : $\frac{1}{z}$; $\frac{1}{z-1}$; $\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}$. Tracer dans chaque cas le graphe de la fonction $r \longmapsto M_f(r)$, $(0 < r < 1)$.**

- $M_{f_1}(r) = \sup_{|z|=r} |f_1(z)| = \sup_{|z|=r} \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r}$.
- $M_{f_2}(r) = \sup_{|z|=r} |f_2(z)| = \sup_{|z|=r} \frac{1}{|z-1|} \leq \frac{1}{1-r}$. Comme $|f_2(r)| = \frac{1}{1-r}$ alors $M_{f_2}(r) = \frac{1}{1-r}$.
- $M_{f_3}(r) = \sup_{|z|=r} |f_3(z)| = \sup_{|z|=r} \frac{1}{|z(z-1)|} = \sup_{|z|=r} \frac{1}{|z||z-1|} = \frac{1}{r(1-r)}$.



(b) **On suppose qu'il existe deux réels r_1 et r_2 tels que $0 < r_1 < r_2 < 1$ avec $M_f(r_1) > M_f(r_2)$. Prouver que 0 n'est pas une singularité artificielle pour f.**

Si 0 est une singularité artificielle pour f alors est prolongeable en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ et donc d'après la question 1.(a), M_f est croissante sur $]0,1[$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Prouver que si $0 < r < r' \leq r_1$ alors $M_f(r) > M_f(r')$.

On considère $C_r = \{z \in \Omega,\ r \leq |z| \leq r_2\}$ pour tout $0 < r \leq r_1$. D'une part, comme $C_{r'} \subsetneq C_r$ et f non constante alors

$$\sup_{\xi \in C_{r'}} |f(\xi)| < \sup_{\xi \in C_r} |f(\xi)|$$

D'autre part, d'après le principe du maximum,

$$\begin{aligned}
\sup_{\xi \in C_r} |f(\xi)| &= \sup_{\xi \in \partial C_r} |f(\xi)| = \max(\sup_{|\xi|=r} |f(\xi)|, \sup_{|\xi|=r_2} |f(\xi)|) \\
&= \max(M_f(r), M_f(r_2)) \\
&\geq \sup_{\xi \in C_{r_1}} |f(\xi)| = \max(M_f(r_1), M_f(r_2)) \\
&= M_f(r_1) > M_f(r_2).
\end{aligned}$$

Donc $\sup_{\xi \in C_r} |f(\xi)| = M_f(r)$. D'où

$$M_f(r) = \sup_{\xi \in C_r} |f(\xi)| > \sup_{\xi \in C_{r'}} |f(\xi)| = M_f(r').$$

(c) **On suppose qu'il existe deux réels r_3 et r_4 tels que $0 < r_3 < r_4 < 1$ avec $M(r_3) < M(r_4)$. Comparer $M(r)$ et $M(r')$ pour $r_4 \leq r < r' < 1$.**

Il suffit de considérer $Y_r = \{z \in \Omega,\ r_3 \leq |z| \leq r\}$ pour tout $r_4 \leq< r < 1$ et de raisonner de la même façon pour montrer que $M_f(r) < M_f(r')$ pour $r_4 \leq r < r' < 1$.

(d) **On suppose qu'il existe $r_0 \in]0,1[$ tel que $M(r_0) = 0$. Que dire de f ?**

Si $M_f(r_0) = 0$ alors par le principe du maximum on a pour tout $z \in \mathbb{D}(r_0)$, $|f(z)| \leq \sup_{|\xi|<r_0} |f(\xi)| = M_f(r_0) = 0$ D'où f est identiquement nulle sur $\mathbb{D}(r_0)$ et par le principe de zéros isolés, f est identiquement nulle sur Ω.

(e) **On suppose que f n'est pas constante et qu'il existe $r_0 \in]0,1[$ tel que $0 < M(r_0) \leq M(r)$ pour tout $r \in]0,1[$. Prouver que M est strictement monotone sur $]0,r_0[$ et sur $]r_0,1[$. (ind. considérer $r_{\pm\epsilon} = r_0 \pm \epsilon$).**

Pour tout $0 < \epsilon < \min(r_0, 1-r_0)$ on a $M_f(r-\epsilon) \geq M_f(r_0)$ (resp. $M_f(r+\epsilon) \geq M_f(r_0)$) alors d'après 2. (b) (resp 2.(c)), M_f est strictement décroissante (resp. croissante) sur $]0, r_0-\epsilon[$ (resp. sur $]r_0+\epsilon, 1[$). D'où M_f est strictement décroissante sur $]0,r_0[$ et strictement croissante sur $]r_0,1[$.

3. **Dans cette question $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ |z| > 1\}$.
On suppose qu'il existe $r_0 > 1$ et $A > 0$ tels que $M(r) \leq A$ pour $r \geq r_0$. Prouver que si f n'est pas constante alors la fonction M est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.**

Soit $g(\zeta) = f(\dfrac{1}{\zeta})$ alors g est holomorphe sur $\mathbb{D}^*$ bornée par A donc elle se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. D'après la question 1., M_g est strictement croissante sur $]0,1[$. Mais

$$M_g(\rho) = \sup_{|\zeta|=\rho} |g(\zeta)| = \sup_{|\zeta|=\rho} |f(\frac{1}{\zeta})| = \sup_{|z|=\frac{1}{\rho}} |f(z)| = M_f(\frac{1}{\rho})$$

Par suite $M_f(r) = M_g(\frac{1}{r})$ pour tout $r > 1$. D'où M_f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

□

Solution du problème 3

– **Partie I.**

Soit $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C});\ F(z) = P(z) + iQ(z),\ \forall z \in \mathbb{C}$. Pour tout $r > 0$ on pose

$$M_F(r) = \sup_{|z|=r} |F(z)| \quad \text{et} \quad A_F(r) = \sup_{|z|=r} P(z).$$

1. (a) **Montrer que $M_F(r) = \sup\limits_{|z|\leq r} |F(z)|$ et que $r \longmapsto M_F(r)$ est croissante.**

Par le principe du maximum, on a

$$M_F(r) = \sup_{|z|=r} |F(z)| = \sup_{|z|\leq r} |F(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}(r)} |F(z)|$$

et si $r_1 \leq r_2$ alors $\mathbb{D}(r_1) \subset \mathbb{D}(r_2)$ donc

$$\sup_{z\in\mathbb{D}(r_1)} |F(z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}(r_2)} |F(z)|$$

D'où $M_F(r_1) \leq M_F(r_2)$. Ainsi M_F est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) **En déduire que $A_F(r) = \sup_{|z|\leq r} P(z)$ et que $r \longmapsto A_F(r)$ est croissante.**

Comme $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ alors $G := \exp \circ F$ est entière donc par la question précédente, on a

$$\begin{array}{rclcl} M_G(r) & = & \sup_{|z|=r} |G(z)| & = & \sup_{|z|\leq r} |G(z)| \\ & = & \sup_{|z|=r} |\exp(F(z))| & = & \sup_{|z|\leq r} |\exp(F(z))| \\ & = & \sup_{|z|=r} \exp(P(z)) & = & \sup_{|z|\leq r} \exp(P(z)) \\ & = & \exp\left(\sup_{|z|=r} P(z)\right) & = & \exp\left(\sup_{|z|\leq r} P(z)\right) \qquad (\exp \nearrow) \\ & = & e^{A_F(r)} & = & e^{\sup_{|z|\leq r} P(z)}. \end{array}$$

D'où $A_F(r) = \sup_{|z|\leq r} P(z)$.

(c) **Montrer que s'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\rho,\ \beta \in \mathbb{R}$ tels que $M_F(r) \leq \rho r^k + \beta$, pour r assez grand alors F est un polynôme de degré inférieur ou égale à k.**

Si $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ le développement de F en série entière alors d'après l'inégalité de Cauchy on a

$$|a_n| \leq \frac{M_F(r)}{r^n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$. En particulier on a

$$|a_n| \leq \lim_{r\to+\infty} \frac{M_F(r)}{r^n} \leq \lim_{r\to+\infty} \frac{\rho r^k + \beta}{r^n} = 0, \quad \forall\, n \geq k+1$$

Donc $F(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$.

2. $F(0) = 0$ et $r > 0$.

(a) **Pour $\varepsilon > 0$, on pose**

$$\omega_\varepsilon(z) = \frac{F(2rz)}{2A_F(2r) + \varepsilon - F(2rz)}.$$

Montrer que ω_ε est holomorphe sur $\mathbb{D}$.

On a ω_ε est le rapport de deux fonctions holomorphes donc elle est holomorphe dès qu'elle est définie. Or pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$\Re e(2A_F(2r) + \varepsilon - F(2rz)) = \underbrace{(A_F(2r) + \varepsilon)}_{\geq \varepsilon} + \underbrace{(A_F(2r) - P(2rz))}_{\geq 0} \geq \varepsilon.$$

En effet par le principe du maximum on a $A_F(2r) \geq P(2rz)$ et $A_F(2r) \geq P(0) = 0$. D'où ω_ε est bien définie sur $\mathbb{D}$.

(b) **Montrer que $|\omega_\varepsilon(z)| < 1,\ \forall\, z \in \mathbb{D}$.**

On a

$$\begin{array}{rcl} 1 - |\omega_\varepsilon(z)|^2 & = & 1 - \dfrac{P^2(2rz) + Q^2(2rz)}{(2A_F(2r) + \varepsilon - P(2rz))^2 + Q^2(2rz)} \\ & = & \dfrac{(2A_F(2r) + \varepsilon)^2 - 2P(2rz)(2A_F(2r) + \varepsilon)}{(2A_F(2r) + \varepsilon - P(2rz))^2 + Q^2(2rz)} > 0 \end{array}$$

car

$$\begin{aligned}&(2A_F(2r)+\varepsilon)^2 - 2P(2rz)(2A_F(2r)+\varepsilon)\\&= 4A_F^2(2r) + 4\varepsilon A_F(2r) + \varepsilon^2 - 4A_F(2r)P(2rz) - 2\varepsilon P(2rz)\\&= 4A_F(2r)(A_F(2r) - P(2rz)) + 2\varepsilon(A_F(2r) - P(2rz)) + 2\varepsilon A_F(2r) + \varepsilon^2\\&\geq \varepsilon^2 > 0.\end{aligned}$$

(c) **En déduire, en utilisant le lemme de Schwarz, que**

$$|F(2rz)| \leq |z||2A_F(2r) + \varepsilon - F(2rz)|,\ \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

On a $\omega_\varepsilon : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est holomorphe et $\omega_\varepsilon(0) = 0$; donc d'après le lemme de Schwarz, on a $|\omega_\varepsilon(z)| \leq |z|,\ \forall\, z \in \mathbb{D}$. d'où

$$|F(2rz)| \leq |z||2A_F(2r) + \varepsilon - F(2rz)|,\ \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

3. (a) **En déduire que $|F(2rz)|(1-|z|) \leq 2A_F(2r)|z|,\ \forall\, z \in \mathbb{D}$.**

D'après la question 2.(c), on a pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}|F(2rz)| \leq |z||2A_F(2r) + \varepsilon - F(2rz)| &\leq |z|(2|A_F(2r)| + \varepsilon + |F(2rz)|)\\&\leq |z|(2A_F(2r) + \varepsilon + |F(2rz)|)\end{aligned}$$

Donc $|F(2rz)|(1-|z|) \leq 2A_F(2r)|z| + \varepsilon|z|,\ \forall\, \varepsilon > 0$. D'où par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on aura $|F(2rz)|(1-|z|) \leq 2A_F(2r)|z|,\ \forall\, z \in \mathbb{D}$.

(b) **Conclure que $M_F(r) \leq 2A_F(2r)$.**

D'après la question 3.(a) et le principe du maximum, on a

$$M_F(r) = \sup_{|z|<\frac{1}{2}} |F(2rz)| = \sup_{|z|=\frac{1}{2}} |F(2rz)| \leq 2A_F(2r) \sup_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{|z|}{1-|z|} = 2A_F(2r).$$

(c) **En déduire que s'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\rho,\ \beta \in \mathbb{R}$ tels que $A_F(r) \leq \rho r^k + \beta$, pour r assez grand alors F est un polynôme de degré inférieur ou égale à k.**

D'après la question 3.(b), on a

$$M_F(r) \leq 2A_F(2r) \leq 2^{k+1}\rho r^k + \beta$$

pour r assez grand. D'après la question 1.(c), F est un polynôme de degré inférieur ou égale à k.

– **Partie II.**

1. Pour $\alpha \in \mathbb{D}$, on pose $\varphi_\alpha(z) = \dfrac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$.

(a) **Montrer que φ_α est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{\alpha}}\}$ et que $\varphi_\alpha(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$.**

On a φ_α est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{\alpha}}\}$ comme fraction rationnelle.
Pour $z = e^{i\theta} \in \mathscr{C}$ on a

$$|\varphi_\alpha(z)| = \left|\frac{\alpha - e^{i\theta}}{1 - \overline{\alpha} e^{i\theta}}\right| = \left|e^{i\theta}\frac{\alpha e^{-i\theta} - 1}{1 - \overline{\alpha} e^{i\theta}}\right| = 1.$$

(b) **En déduire que φ_α est un automorphisme de $\mathbb{D}$ et donner φ_α^{-1}.**

Par le principe du maximum, pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a

$$|\varphi_\alpha(z)| \leq \sup_{|\xi|<1} |\varphi_\alpha(\xi)| = \sup_{|\xi|=1} |\varphi_\alpha(\xi)| = 1$$

Donc $\varphi_\alpha(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Par le théorème de l'application ouverte, $\varphi_\alpha(\mathbb{D})$ est ouvert donc

$$\varphi_\alpha(\mathbb{D}) = \overset{\circ}{\widehat{\varphi_\alpha(\mathbb{D})}} \subset \overset{\circ}{\overline{\mathbb{D}}} = \mathbb{D}.$$

Ainsi $\varphi_\alpha(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.
Pour $z \in \mathbb{D}$, l'égalité $w = \varphi_\alpha(z)$ est équivalente à

$$z = \frac{\alpha - w}{1 - \overline{\alpha} w} = \varphi_\alpha(w).$$

D'où φ_α est un automorphisme de $\mathbb{D}$ et $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\alpha$.

2. **Soit ψ un automorphisme de $\mathbb{D}$. On note par $\alpha = \psi^{-1}(0)$.**

(a) **Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\psi(z) = \lambda \varphi_\alpha(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.**

Soit $g(z) = \psi \circ \varphi_\alpha^{-1}(z)$. Alors $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est holomorphe et $g(0) = \psi \circ \varphi_\alpha^{-1}(0) = \psi(\alpha) = 0$. D'après le lemme de Schwarz, on a $|g(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. D'autre part, on a $g^{-1} = \varphi_\alpha \circ \psi^{-1}$ vérifie aussi les mêmes hypothèse donc on a $|g^{-1}(w)| \leq |w|$ pour tout $w \in \mathbb{D}$. Par suite on a $|z| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. D'où l'égalité $|g(z)| \leq |z|$ $\forall\, z \in \mathbb{D}$. Par le lemme de Schwarz, il existe $\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1$ tel que $g(z) = \lambda z,\ \forall\, z \in \mathbb{D}$. Ainsi on a $\psi(z) = \lambda \varphi_\alpha(z),\ \forall\, z \in \mathbb{D}$.

(b) **Verifier que $\lambda = -\dfrac{\psi'(0)}{1 - |\alpha|^2}$.**

On a $\psi(z) = \lambda \varphi_\alpha(z),\ \forall\, z \in \mathbb{D}$ donc

$$\psi'(z) = \lambda \varphi_\alpha'(z) = \lambda \frac{\overline{\alpha} z - 1 + \overline{\alpha}(\alpha - z)}{(1 - \overline{\alpha} z)^2},\ \forall\, z \in \mathbb{D}$$

Pour $z = 0$ on aura $\psi'(0) = \lambda(|\alpha|^2 - 1)$. Ce qui donne $\lambda = \dfrac{\psi'(0)}{|\alpha|^2 - 1}$.

Remarquons que $1 = |\lambda| = \left|\dfrac{\psi'(0)}{|\alpha|^2 - 1}\right|$ donc $|\psi'(0)| = 1 - |\alpha|^2 = 1 - |\psi^{-1}(0)|$.

3. **Soient $a \in \mathbb{D}$ et $f :\ \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe.**

(a) **Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $\left|\dfrac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)} f(z)}\right| \leq \left|\dfrac{z - a}{1 - \overline{a} z}\right|$.**

Soit $h(z) = \varphi_{f(a)} \circ f \circ \varphi_a(z)$ alors $h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ holomorphe et $h(0) = 0$ donc par le lemme de Schwarz, $|h(z)| \leq |z|$ $\forall\, z \in \mathbb{D}$. Par suite, $|\varphi_{f(a)} \circ f(z)| \leq |\varphi_a(z)|,\ \forall\, z \in \mathbb{D}$. c'est-à-dire

$$\left|\frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)} f(z)}\right| \leq \left|\frac{z - a}{1 - \overline{a} z}\right|, \quad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

(b) **En déduire que $|f'(z)| \leq \dfrac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2},\ \forall\, z \in \mathbb{D}$.**

D'après la question précédente, on a

$$\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{1-\overline{f(\zeta)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-\zeta}{1-\overline{\zeta}z}\right|, \quad \forall\, z,\zeta \in \mathbb{D}.$$

Donc

$$\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right| \leq \left|\frac{1-\overline{f(\zeta)}f(z)}{1-\overline{\zeta}z}\right|, \quad \forall\, z \neq \zeta \in \mathbb{D}.$$

Par suite

$$|f'z)| = \lim_{\zeta\to z}\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right| \leq \lim_{\zeta\to z}\left|\frac{1-\overline{f(\zeta)}f(z)}{1-\overline{\zeta}z}\right| = \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}, \quad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

4. **Soit $h:\ \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe.**

(a) **On suppose $h(0)=0$ et qu'il existe $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $h(a)=a$. Montrer que $h(z)=z,\ \forall\, z \in \mathbb{D}$.**

Par le lemme de Schwarz, on a $h(z) = e^{i\theta}z,\ \forall\, z \in \mathbb{D}$. Comme $h(a)=a$ alors $e^{i\theta}=1$. D'où $h(z)=z,\ \forall\, z \in \mathbb{D}$.

(b) **On suppose qu'il existe $a \neq b \in \mathbb{D}$ tels que $h(a)=a$ et $h(b)=b$. Montrer de même que $h(z)=z,\ \forall\, z \in \mathbb{D}$.**

Soit $U(z) = \varphi_b \circ h \circ \varphi_b$ alors $U:\ \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est holomorphe et

$$U(0) = \varphi_b \circ h \circ \varphi_b(0) = \varphi_b \circ h(b) = \varphi_b(b) = 0$$

et

$$U(a) = \varphi_b \circ h \circ \varphi_b(a) = a$$

car $\varphi_b \circ h(a) = \varphi_b(a)$. D'après la question précédente on a $U(z)=z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ ce qui donne $h(z)=z,\ \forall\, z \in \mathbb{D}$.

5. **Soit G une fonction holomorphe sur Ω telle que $G(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$.**

(a) **Montrer que si G ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$ alors G est constante sur Ω.**

D'après le principe du maximum, pour $z \in \mathbb{D}$, on a

$$|G(z)| \leq \sup_{|\xi|<1}|G(\xi)| = \sup_{|\xi|=1}|G(\xi)| = 1.$$

De même comme $\frac{1}{G}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ alors par le principe du maximum, on a

$$\left|\frac{1}{G(z)}\right| \leq \sup_{|\xi|<1}\frac{1}{|G(\xi)|} = \sup_{|\xi|=1}\frac{1}{|G(\xi)|} = 1.$$

Par suite on a $|G| \equiv 1$ sur $\mathbb{D}$, D'après le théorème 1.6, $G \equiv Cte$ sur $\mathbb{D}$ et par le principe de prolongement analytique, $G \equiv Cte$ sur Ω.

(b) **Montrer que G admet un nombre fini de zéros dans $\mathbb{D}$.**

On a $G(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$, donc G est non identiquement nulle. Par le principe de zéros isolés, G admet un nombre fini de zéros dans le compact $\overline{\mathbb{D}}$ et en particulier dans $\mathbb{D}$. Soient alors $a_1, ..., a_p$ ces zéros de multiplicités respectives $\ell_1, ..., \ell_p$.

(c) **Montrer qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}$ tel que $G(z) = e^{i\eta} \prod_{k=1}^{p} (\varphi_{a_k}(z))^{\ell_k}, \ \forall\, z \in \mathbb{D}$.**

Soit

$$R(z) = \frac{G(z)}{\prod_{k=1}^{p} (\varphi_{a_k}(z))^{\ell_k}} = \frac{G(z)}{\prod_{k=1}^{p} (a_k - z)^{\ell_k}} \prod_{k=1}^{p} (1 - \overline{a_k} z)^{\ell_k}$$

Posons $\mathcal{V} = \Omega \cap \mathbb{D}(\frac{1}{\max_{k=1}^{p} |a_k|})$, alors R est holomorphe sur $\mathcal{V} \setminus \{a_1, ..., a_p\}$ et prolongeable par continuité en chaque a_k donc R est holomorphe sur $\mathcal{V}$ de plus $R(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$ et R ne s'annule pas dans $\mathbb{D}$. Par la question 5.(a), $R \equiv e^{i\eta}$ sur $\mathbb{D}$.

(d) **Montrer que si G est entière alors il existe $(\eta, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ tel que $G(z) = e^{i\eta} z^m$.**

D'après la question précédente on a $G(z) = e^{i\eta} \prod_{k=1}^{p} (\varphi_{a_k}(z))^{\ell_k}$, $\forall\, z \in \mathbb{D}$ et par le principe de prolongement analytique, l'égalité est vraie sur $\mathbb{C}$ donc $\varphi_{a_k}(z))^{\ell_k}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ ainsi soit qu'on a $\ell_k = 0$ (qui n'est pas possible) ou $a_k = 0$ et donc 0 est l'unique zéro de G. Dans ce cas on a $G(z) = e^{i\eta} z^m$ où $m \in \mathbb{N}$.

□

Solution du problème 4

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque $\overline{\mathbb{D}}(0, r)$ où $r > 0$ et soit f une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$ vérifiant $f(0) = 0, \ f'(0) = 1$ et $f(z) \neq 0$ pour tout $0 < |z| \leq r$. On pose $\eta = \inf_{|z|=r} |f(z)|$.

1. (a) **Prouver que $\eta > 0$.**

On a $|f|$ est continue sur le compact $\mathscr{C}(0, r)$ donc elle atteint ses extremums, en particulier il existe $z_0 \in \mathscr{C}(0, r)$ tel que $\eta = \inf_{|z|=r} |f(z)| = |f(z_0)| > 0$ car $f(z_0) \neq 0$.

(b) **Montrer que pour tout $w \in \mathbb{D}(0, \eta)$, la fonction $z \longmapsto f(z) - w$ admet un unique zéro simple dans le disque $\mathbb{D}(0, r)$.**

Soit $w \in \mathbb{D}(0, \eta)$. Si on pose $f_w = f - w$, alors on a

$$|f(z) - f_w(z)| = |w| < \eta \leq |f(z)|, \quad \forall\, z \in \mathscr{C}(0, r).$$

D'après le théorème de Rouché, f et f_w ont même nombre de zéros comptés avec leurs multiplicités dans le disque $\mathbb{D}(0, r)$; or f admet exactement un seul zéro (de multiplicité 1) et donc de même pour f_w.

On note $F(w)$ ce zéro (c'est-à-dire $f(F(w)) - w = 0$). Que vaut $F(0)$?

On a $f(0) - 0 = 0$ donc $F(0) = 0$ (par unicité).

2. (a) **Montrer que 0 est une singularité artificielle de la fonction $z \longmapsto \dfrac{z}{f(z)}$ et donner la valeur de $\dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\gamma(0,r)} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz$.**

On a f est holomorphe sur $\mathcal{U}$ donc $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ sur un voisinage de $\mathbb{D}(0,r)$. Comme $f(0)=0=b_0$ et $f(0)=1=b_1$ alors

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{+\infty} b_n z^n = z\left(1+\sum_{n=2}^{+\infty} b_n z^{n-1}\right)$$

Par suite

$$\frac{z}{f(z)}=\frac{1}{1+\sum_{n=2}^{+\infty} b_n z^{n-1}}, \quad \forall\, z\in\mathbb{D}(0,r)$$

Ainsi $z\longmapsto \dfrac{z}{f(z)}$ est holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$.

On a $z\longmapsto \dfrac{z}{f(z)}f'(z)$ est holomorphe sur un voisinage $\mathcal{V}=\mathbb{D}(0,r+\epsilon)$ de $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$ et $\gamma(0,r)$ est un lacet de $\mathcal{V}$; donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,r)}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=0.$$

(b) **établir que pour tout $w\in\mathbb{D}(0,\eta)$ on a $F(w)=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma(0,r)}\frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz$.**

Soit $w\in\mathbb{D}(0,\eta)$. Alors $A_w : z\longmapsto \dfrac{zf'(z)}{f(z)-w}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}(0,r+\epsilon)\setminus\{F(w)\}$ et $F(w)$ est un pôle simple de A_w. Par le théorème des Résidus,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,r)}\frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz &= Res(A_w,F(w))Ind_{\gamma(0,r)}(F(w)) = Res(A_w,F(w))\\
&= \lim_{z\to F(w)}(z-F(w))\frac{zf'(z)}{f(z)-w} = \lim_{z\to F(w)}\frac{zf'(z)}{\frac{f(z)-w}{z-F(w)}}\\
&= \lim_{z\to F(w)}\frac{zf'(z)}{\frac{f(z)-f(F(w))}{z-F(w)}} = \frac{F(w)f'(F(w))}{f'(F(w))} = F(w)
\end{aligned}$$

car $F(w)$ est un zéro simple de $f-w$ donc $f'(F(w))\neq 0$.

(c) **En déduire que $F(w)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n w^n$ dans $\mathbb{D}(0,\eta)$ où a_n est donné par**

$$a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,r)}\frac{zf'(z)}{(f(z))^{n+1}}dz$$

pour tout $n\geq 1$ et donc F est holomorphe sur $\mathbb{D}(0,\eta)$.

On a pour tout $w\in\mathbb{D}(0,\eta)$,

$$\begin{aligned}
F(w) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,r)}\frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,r)}\frac{zf'(z)}{f(z)}\frac{1}{1-\frac{w}{f(z)}}dz\\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,r)}\frac{zf'(z)}{f(z)}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w}{f(z)}\right)^n\right]dz\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,r)}\frac{zf'(z)}{(f(z))^{n+1}}dz\right)w^n
\end{aligned}$$

puisque il y'a convergence uniforme de la série sur le cercle $\mathscr{C}(0,r)$.

(d) **Calculer la dérivée de la fonction $h_n(z) = \dfrac{z}{(f(z))^n}$ et en déduire que l'on a l'égalité**
$$a_n = \frac{1}{2in\pi}\int_{\gamma(0,r)} \frac{1}{(f(z))^n}dz.$$

On a $h_n'(z) = \dfrac{1}{(f(z))^n} - n\dfrac{zf'(z)}{(f(z))^{n+1}}$ donc
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,r)} \frac{1}{(f(z))^n}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,r)}\left(h_n'(z) + n\frac{zf'(z)}{(f(z))^{n+1}}\right)dz = n\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,r)} \frac{zf'(z)}{(f(z))^{n+1}}dz = na_n$$
car h_n' admet une primitive.

3. **Application. Soit $\mathcal{U} = \mathbb{C},\ f(z) = ze^{-z}$ et $r = 1$.**

(a) **Vérifier que l'on a $\eta = \dfrac{1}{e}$ et $a_n = \dfrac{n^{n-1}}{n!}$.**

On a
$$\eta = \inf_{|z|=1} |f(z)| = \inf_{|z|=1} |ze^{-z}| = \inf_{|z|=1} |e^{-z}| = \inf_{|z|=1} e^{-\Re ez} \geq e^{-1}.$$
Or $|f(1)| = e^{-1}$ Donc $\eta = e^{-1}$. De plus d'après la question précédente et le théorème de Résidus,
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2in\pi}\int_{\gamma(0,r)} \frac{1}{(ze^{-z})^n}dz = \frac{1}{2in\pi}\int_{\gamma(0,r)} \frac{e^{nz}}{z^n}dz \\ &= \frac{1}{n}Res\left(\frac{e^{nz}}{z^n}, 0\right) = \frac{1}{n}\frac{1}{(n-1)!}\left.(e^{nz})^{(n-1)}\right|_{z=0} = \frac{1}{n}\frac{1}{(n-1)!}n^{n-1}. \end{aligned}$$

(b) **Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} a_n w^n$?**

Comme $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors d'après le règle de D'Alembert, le rayon de convergence de la série est R qui satisfait
$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n-1}}{(n+1)^n}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\exp\left(-(n-1)\log(1+\frac{1}{n})\right) = e^{-1}. \end{aligned}$$

□

Solution du problème 5

Dans ce problème, $\mathbb{D}(r)$ (resp. $\mathscr{C}(r)$) sera le disque (resp. le cercle) de centre 0 et de rayon r et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $s \in \mathbb{N},\ 0 \leq s \leq n$ le coefficient de Binôme C_n^s est $C_n^s = \dfrac{n!}{s!(n-s)!}$. On rappelle que pour tous $z, \xi \in \mathbb{C}$ on a $(z+\xi)^n = \sum_{s=0}^{n} C_n^s z^s \xi^{n-s}$.

1. **Montrer que $C_{2n}^n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\mathscr{C}(1)} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}dz$.**

On a
$$h(z) := \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} = \frac{1}{z^{n+1}}\sum_{s=0}^{n} C_{2n}^s z^s = \sum_{s=0}^{n} C_{2n}^s z^{s-n-1}$$

Donc $Res(h,0)$ est le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement en série de Laurent de h. C'est-à-dire $Res(h,0) = C_{2n}^n$.
Comme h est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et 0 est un pôle de h, alors d'après le théorème des résidus,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(1)} h(z)dz = Res(h,0) = C_{2n}^n.$$

2. $\boxed{\textbf{Montrer que } \sum_{s=0}^{n}(C_n^s)^2 \textbf{ est le terme constant de } (1+z)^n(1+\frac{1}{z})^n \textbf{ (pour } z \neq 0\textbf{).}}$

Pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$$(1+z)^n(1+\frac{1}{z})^n = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k\right)\left(\sum_{s=0}^{n} C_n^s \frac{1}{z^s}\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n} C_n^k C_n^s z^{k-s}$$

de terme constant $(k=s)$, égale à $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$.

3. $\boxed{\textbf{En déduire que } \sum_{s=0}^{n}(C_n^s)^2 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(1)}(1+z)^n\left(1+\frac{1}{z}\right)^n\frac{dz}{z} = C_{2n}^n.}$

On a

$$h(z) = \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} = (1+z)^n\frac{(1+z)^n}{z^n}\frac{1}{z} = (1+z)^n\left(1+\frac{1}{z}\right)^n\frac{1}{z}.$$

Par le théorème des résidus et la question précédente,

$$C_{2n}^n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(1)} h(z)dz = Res(h,0)$$

donné par le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement en série de Laurent de $h(z) = (1+z)^n(1+\frac{1}{z})^n\frac{1}{z}$ qui est $\sum_{s=0}^{n}(C_n^s)^2$. D'où

$$\sum_{s=0}^{n}(C_n^s)^2 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(1)}(1+z)^n\left(1+\frac{1}{z}\right)^n\frac{dz}{z} = C_{2n}^n.$$

4. $\boxed{\textbf{En déduire que } C_{2n}^n = \frac{4^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta \textbf{ et que } C_{2n}^n < 4^n\textbf{.}}$

– D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
C_{2n}^n &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(1)}(1+z)^n\left(1+\frac{1}{z}\right)^n\frac{dz}{z}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+e^{i\theta}\right)^n\left(1+e^{i\theta}\right)^n d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^n e^{-i\frac{n\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)^n d\theta\\
&= \frac{4^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta.
\end{aligned}$$

–
$$4^n - C_{2n}^n = 4^n\left[1-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta\right] = 4^n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1-\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]d\theta \geq 0.$$

Si $4^n = C_{2n}^n$ alors
$$\int_0^{2\pi}\underbrace{\left[1-\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}_{cont.\geq 0}d\theta = 0.$$

Ce qui donne $1-\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)=0$ pour tout $\theta\in[0,2\pi]$. D'où l'absurdité, et donc $C_{2n}^n < 4^n$.

5. **Montrer que pour tout $\xi\in\mathbb{D}(\frac{1}{4})$, on a**
$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n\xi^n = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(1)}\frac{1}{z^2\xi+(2\xi-1)z+\xi}dz.$$

Comme $C_{2n}^n < 4^n$ alors la série $\sum_{n\geq 0} C_{2n}^n\xi^n$ est de rayon $R\geq\frac{1}{4}$. Soit alors la fonction $\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n\xi^n$ (holomorphe sur $\mathbb{D}(R)\supseteq\mathbb{D}(\frac{1}{4})$). D'après la question 1., on a
$$\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{(1+e^{i\theta})^{2n}}{e^{in\theta}}d\theta\right)\xi^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left((1+e^{i\theta})^2e^{-i\theta}\xi\right)^n d\theta.$$

De plus comme la série
$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi}\left|(1+e^{i\theta})^2e^{-i\theta}\xi\right|^n \leq \sum_{n\geq 0}|4\xi|^n$$
est normalement convergente sur $[0,2\pi]$ alors
$$\begin{aligned}
\varphi(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((1+e^{i\theta})^2e^{-i\theta}\xi\right)^n d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-(1+e^{i\theta})^2e^{-i\theta}\xi}d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-(2+e^{i\theta}+e^{-i\theta})\xi}d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathscr{C}(1)}\frac{1}{1-(2+z+\frac{1}{z})\xi}\frac{dz}{z}\\
&= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(1)}\frac{1}{z^2\xi+(2\xi-1)z+\xi}dz
\end{aligned}$$

6. **Soit $x\in]0,\frac{1}{4}[$.**

   (a) **Montrer que** $\left|\frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x}\right| < 1, \quad \left|\frac{1-2x+\sqrt{1-4x}}{2x}\right| > 1.$

   Comme $x\in]0,\frac{1}{4}[$ alors
$$(1-2x-\sqrt{1-4x})-2x = 1-4x-\sqrt{1-4x} = \sqrt{1-4x}(\sqrt{1-4x}-1) < 0$$
   et
$$(1-2x-\sqrt{1-4x})+2x = 1-\sqrt{1-4x} > 0.$$

Donc on a bien $|1-2x-\sqrt{1-4x}| < 2x$ et par suite on conclus que

$$\left|\frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x}\right| < 1.$$

De même on montre que $(1-2x+\sqrt{1-4x}) > 2x$ donc

$$\left|\frac{1-2x+\sqrt{1-4x}}{2x}\right| > 1.$$

(b) **En déduire que** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Il est facile de verifier que $xz^2+(2x-1)z+x = x(z-z_1)(z-z_2)$ où

$$z_1 = \frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x}, \quad z_2 = \frac{1-2x+\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

D'après le théorème de résidus,

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(1)} \frac{1}{x(z-z_1)(z-z_2)}dz = -\frac{1}{x(z_1-z_2)} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

On conclus que le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} C_{2n}^n \xi^n$ est $R=\frac{1}{4}$.

7. **Montrer que pour tout** $\xi \in \mathbb{D}(\frac{1}{4})$**, on a** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n \xi^n = \exp\left(-\frac{1}{2}\log_0(1-4\xi)\right)$ **où** $\log_0$ **est la détermination principale du logarithme.**

On a la fonction φ est holomorphe sur $\mathbb{D}(\frac{1}{4})$; de même, la fonction ϕ définie par $\phi(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\log_0(1-4\xi)\right)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus[\frac{1}{4},+\infty[$ et en particulier sur $\mathbb{D}(\frac{1}{4})$. D'après la question 6.(b), on a $\phi_{|]0,\frac{1}{4}[} \equiv \varphi_{|]0,\frac{1}{4}[}$. Comme l'ensemble $]0,\frac{1}{4}[$ admet un point d'accumulation (une infinité de points en fait) alors par le principe de prolongement analytique, les deux fonctions ϕ et φ coincident sur $\mathbb{D}(\frac{1}{4})$.

$\square$

Solution du problème 6

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ qui contient le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$.

1. **Soient F et G deux fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que F et G ne s'annule pas dans $\mathbb{D}$ et que $|F(z)| = |G(z)|, \ \forall\, |z| = 1$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| = 1$ tel que $F = \lambda G$ sur Ω.**

Soit $T(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$. Alors T et $\frac{1}{T}$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$, continues sur $\overline{\mathbb{D}}$. D'après le principe du maximum, Pour $z \in \mathbb{D}$ on a

$$|T(z)| \leq \sup_{|\xi|<1} |T(\xi)| = \sup_{|\xi|=1} |T(\xi)| = 1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{|T(z)|} \leq \sup_{|\xi|<1} \frac{1}{|T(\xi)|} = \sup_{|\xi|=1} \frac{1}{|T(\xi)|} = 1$$

$|T(z)| = 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. D'après le théorème 1.6, T est constante sur $\mathbb{D}$; ie. il existe $\lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| = 1$ tel que $F(z) = \lambda G(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Donc $F = \lambda G$ sur Ω par le principe de prolongement analytique.

Le résultat reste-t-il vrai si F ou G s'annule dans $\mathbb{D}$?

Le résultat n'est pas vrai si l'une des fonctions s'annule comme le montre le contre exemple suivant : On a $F(z) = z$ et $G(z) = z^2$ vérifies les hypothèse mais ne sont pas proportionnelles.

2. **Soient F et G deux fonctions entières telles que $|F(z)| \leq |G(z)|, \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.**

   (a) **Montrer que si z_0 est un zéro de G d'ordre n alors z_0 est un zéro de F d'ordre m où $m \geq n$.**

   Comme $G(z_0) = 0$ alors $F(z_0) = 0$. Si F est identiquement nulle alors rien à démontrer. Sinon, z_0 est un zéro isolé pour F, il existe donc G_1 et F_1 deux fonction entières telles que $F_1(z_0) \neq 0, \ G_1(z_0) \neq 0$ et

   $$F(z) = (z - z_0)^m F_1(z), \ G(z) = (z - z_0)^n G_1(z), \ \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

   D'après l'hypothèse, on a

   $$|(z - z_0)^m F_1(z)| \leq |(z - z_0)^n G_1(z)|, \ \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

   En particulier, si $n > m$ alors,

   $$|F_1(z)| \leq |z - z_0|^{n-m} |G_1(z)|, \ \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}.$$

   Par continuité on aura $F_1(z_0) = 0$ ce qui est absurde. D'où $m \geq n$.

   (b) **Montrer que $\dfrac{F}{G}$ est (prolongeable en) une fonction entière.**

   Soit $S(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$, alors S est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}_G$ et comme G non identiquement nulle alors les points de $\mathcal{Z}_G$ sont isolés. Soit $z_0 \in \mathcal{Z}_G$ alors d'après la question précédente, on a

   $$S(z) = \frac{(z - z_0)^n G_1(z)}{(z - z_0)^m F_1(z)} = \frac{(z - z_0)^{n-m} G_1(z)}{F_1(z)}$$

   au voisinage de z_0 et donc S est holomorphe au voisinage de z_0 ainsi S est holomorphe au voisinage de chaque point de $\mathcal{Z}_G$ et par suite S est entière.

   (c) **En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$ tel que $F = \lambda G$ sur $\mathbb{C}$.**

   On a S est entière et $|S(z)| \leq 1$ sur $\mathbb{C}$. Par le théorème de Liouville, S est constante sur $\mathbb{C}$ (ie. $S \equiv \lambda$ sur $\mathbb{C}$ où $|\lambda| \leq 1$.

3. (**Applications**)

   – **Montrer que si u est une fonction holomorphe sur Ω, injective sur $\mathbb{D}$ et vérifie**

   $$|u'(z)| = |z|, \ \forall\, |z| = 1$$

   alors $u(z) = a + bz$ où $a, \ b \in \mathbb{C}$ avec $|b| = 1$.

   Les fonctions u' et 1 sont holomorphe sur Ω et vérifies les conditions de la question 1, donc il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $|b| = 1$ et $u'(z) = bz$ sur Ω. Par suite $u(z) = a + bz$ où $a \in \mathbb{C}$.

   – **Montrer que si v est une fonction entière vérifiant**

   $$|v'(z)| \leq |z|, \ \forall\, z \in \mathbb{C}$$

   alors $v(z) = \alpha + \beta z^2$ où $\alpha, \ \beta \in \mathbb{C}$ avec $|\beta| \leq \dfrac{1}{2}$.

   Conséquence immédiate de 2.

– **A-t-on $|\sin(z)| \leq |z|, \ \forall\, z \in \mathbb{C}$?**

Si $|\sin(z)| \leq |z|, \ \forall\, z \in \mathbb{C}$ alors d'après la question 2., il existera $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\sin(z) = \lambda z$ sur $\mathbb{C}$ ce qui n'est pas le cas.

□

Solution du problème 7

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soient $a_1, ..., a_n$ des points de U et $\Omega = U \setminus \{a_1, ..., a_n\}$. On se donne une fonction holomorphe g sur Ω et on se propose de chercher les fonctions F holomorphes sur Ω et solutions de l'équation :

$$F'(z) = g(z)F(z), \quad \forall\, z \in \Omega. \tag{E}$$

1. **Soit F une solution de (E). Montrer que s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $F(z_0) = 0$, alors F est identiquement nulle sur Ω, (on pourra calculer $F^{(n)}(z_0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$).**

   Soit $r > 0$ tel que $\mathbb{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Comme F est holomorphe sur Ω donc elle est développable en série entière sur $\mathbb{D}(z_0, r)$, pour montrer que F est nulle sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ et donc sur Ω par le principe des zéros isolés, il suffit de montrer, par récurrence, que $F^{(n)}(z_0) = 0$. Pour $n = 0$, le résultat résulte de l'hypothèse. Supposons alors que $F^{(n)}(z_0) = 0$. Par la formule de Leibniz,

$$F^{(n+1)}(z_0) = F'^{(n)}(z_0) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} g^{(n-j}(z_0) F^{(j)}(z_0) = 0.$$

2. **On suppose que (E) admet une solution F_0 non identiquement nulle. Montrer que toute solution F de (E) est de la forme $F(z) = \lambda F_0(z), \ \forall\, z \in \Omega$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.**

   Comme F_0 est solution non identiquement nulle sur Ω alors d'après la question 1., $F_0(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Par suite la fonction $a(z) = \dfrac{F(z)}{F_0(z)}$ est holomorphe sur Ω. De plus on a

$$a'(z) = \frac{F'(z)F_0(z) - F(z)F_0'(z)}{F_0^2(z)} = \frac{g(z)F(z)F_0(z) - F(z)g(z)F_0(z)}{F_0^2(z)} = 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

   Comme Ω est un domaine alors $a \equiv \lambda$ constante sur Ω.

3. (a) **Montrer que si g admet une primitive sur Ω alors (E) admet une solution de la forme $F(z) = e^{G(z)}$ où G est une fonction holomorphe sur Ω.**

   Soit G une primitive de g sur Ω. On vérifie facilement que $F(z) = e^{G(z)}$ est solution de (E).

   (b) **On prend $\Omega = \mathbb{C}^*$ et $g(z) = \dfrac{1}{z^2}$. Déterminer toutes les solutions de (E).**

   La fonction $g(z) = \dfrac{1}{z^2}$ admet une primitive $G(z) = -\dfrac{1}{z}$ donc d'après la question 3.(a), $F_0(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ est une solution de (E) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C}^*$. Par la question 2. les solutions de (E) sont de la forme $F(z) = \lambda e^{-\frac{1}{z}}$. où $\lambda \in \mathbb{C}$.

4. (a) **On suppose que g est de la forme $g = \dfrac{\varphi'}{\varphi}$ où φ est une fonction holomorphe sur U ayant comme zéros dans U les points $a_1, ..., a_n$. Exprimer en fonction de φ les solutions de (E).**

On a bien dans ce cas φ est une solution de (E) et qui ne s'annule pas sur Ω. Donc par la question 2., les solutions de (E) sont de la forme $F(z) = \lambda\varphi(z)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) **On prend $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ et $g(z) = \dfrac{m}{z-a}$, $m \in \mathbb{Z}$. Déterminer les solutions de (E).**

Si on pose $\varphi(z) = (z-a)^m$ alors φ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de zéro le point a qui vérifie $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \dfrac{m}{z-a} = g(z)$ sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Donc par la question 4.(a), les solutions de (E) sont de la forme $F(z) = \lambda(z-a)^m$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

5. **On suppose que U est un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et que $Res(g, a_k) = m_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $1 \leq k \leq n$.**

(a) **Montrer que $h(z) = g(z) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{z-a_k}$ admet une primitive sur Ω.**

Par hypothèse, la fonction $z \longmapsto (z-a_k)^{\ell_k} g(z)$ est (prolongeable en) une fonction holomorphe au voisinage de a_k où ℓ_k est l'ordre de a_k comme pôle de g. Ce qui donne que la fonction $z \longmapsto g(z) - \displaystyle\sum_{j=1}^{\ell_k} \frac{c_{j,k}}{(z-a_k)^j}$ est holomorphe au voisinage de a_k. Par suite la fonction $z \longmapsto g(z) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_k} \frac{c_{j,k}}{(z-a_k)^j}$ est holomorphe sur U. Comme U est étoilé alors cette fonction admet une primitive. De plus comme la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{(z-a_k)^j}$ admet une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{a_k\}$ pour tout $j \geq 2$ alors la fonction $h : z \longmapsto g(z) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{c_{1,k}}{z-a_k}$ admet une primitive sur Ω. Le résultat découle du fait que $c_{1,k} = Res(g, a_k) = m_k$ pour tout k.

(b) **En déduire que toute solution de (E) est de la forme $F(z) = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{m_k} e^{H(z)}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et H est une fonction holomorphe sur Ω à préciser.**

Soit H une primitive de h sur Ω. On pose

$$F_0(z) = \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{m_k} e^{H(z)}.$$

Alors on a bien

$$F_0'(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{(z-a_k)} F_0(z) + h(z)F_0(z) = g(z)F_0(z).$$

Donc F_0 est solution de (E) qui ne s'annule pas sur Ω. Par la question 2., les solutions de l'équation (E) sont de la forme $F(z)\lambda F_0(z)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

6. **On suppose que l'ouvert U est étoilé et que g est holomorphe sur U. On considère l'équation différentielle**

$$F'(z) = g(z)F(z) + \Phi(z), \forall\, z \in \Omega \qquad (E_\Phi)$$

où Φ est une fonction holomorphe sur U.

(a) **Soit F_Φ une solution particulière de (E_Φ). Montrer que toute solution de (E_Φ) est de la forme $F_\Phi + F_0$ où F_0 est une solution de (E) (équation homogène associé ie. sans second membre).**

Soit F une solution de (E_Φ). On pose $F_0 := F - F_\Phi$. Alors la fonction F_0 est holomorphe sur U et

$$F_0'(z) = F'(z) - F_\Phi'(z) = (g(z)F(z)+\Phi(z) - (g(z)F_\Phi(z)+\Phi(z)) = g(z)(F(z)-F_\Phi(z)) = g(z)F_0(z).$$

ie. F_0 est solution de (E).
Inversement, toute solution F_0 de (E) donne une solution $F := F_0 + F_\Phi$ de (E_Φ).

(b) **Prouver que g admet une primitive G sur Ω et que la fonction $z \longmapsto \Phi(z)e^{-G(z)}$ l'est aussi.**

La fonction g est holomorphe sur l'ouvert étoilé U donc elle admet une primitive G sur U. De même pour la fonction holomorphe $z \longmapsto \Phi(z)e^{-G(z)}$, elle admet aussi une primitive.

(c) **Montrer que toute solution de (E_Φ) est de la forme $F(z) = \lambda(z)e^{G(z)}$ où λ est une fonction holomorphe à préciser.**

Cherchons une solution particulière de (E_Φ) de la forme $F_\Phi(z) = \mu(z)e^{G(z)}$. où μ est une fonction holomorphe sur U à préciser. On a

$$F_\Phi'(z) = \mu'(z)e^{G(z)} + g(z)\mu(z)e^{G(z)} = \mu'(z)e^{G(z)} + g(z)F_\Phi'(z)$$

Donc F_Φ est solution de (E_Φ) est équivalent à $\mu'(z)e^{G(z)} = \Phi(z)$ ie. $\mu'(z) = \Phi(z)e^{-G(z)}$. Il suffit donc de choisir μ une primitive de $z \longmapsto \Phi(z)e^{-G(z)}$. D'après les questions 2. et 6.(a), les solutions de (E_Φ) sont de la forme $F(z) = \lambda e^{G(z)} + \mu(z)e^{G(z)} = (\lambda + \mu(z))e^{G(z)}$.

□

SOLUTION DU PROBLÈME 8
Le but de ce problème est de montrer la formule de Jensen qui admet plusieurs applications, en particulier elle permet de compter le nombre des zéros d'une fonction holomorphe dans un disque.
On rappelle que la détermination principale du logarithme $\log_0$ est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par

$$\log_0(\xi) = \ln|\xi| + i\ arg_{]-\pi,\pi[}(\xi).$$

Partie I.

1. **Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|1-e^{i\theta}|d\theta$ est convergente.**

Les bornes impropres de cette intégrale sont 0 et 2π. Par périodicité, il suffit d'étudier le cas 0. Or au voisinage de 0, on a

$$\ln|1-e^{i\theta}| = \frac{1}{2}\ln\left((1-\cos t)^2 + \sin^2 t\right) = \frac{1}{2}\ln(2-2\cos t) \underset{\mathscr{V}(0)}{\sim} \ln(t)$$

De plus la fonction ln est intégrable au voisinage de 0. Ce qui donne la convergence de l'intégrale en question.

2. **On considère la fonction g définie par $g(z) = \log_0(1-z)$.**
Donner le domaine d'holomorphie de la fonction g.

$g(z)$ existe si et seulement si $1-z \notin \mathbb{R}_-$ de plus $1-z \in \mathbb{R}_- \iff z \geq 1$. D'où g est holomorphe sur $\Omega := \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$.

3. **Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on considère le lacet γ_ε comme indique la figure. Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z} dz = 0$.**

On a

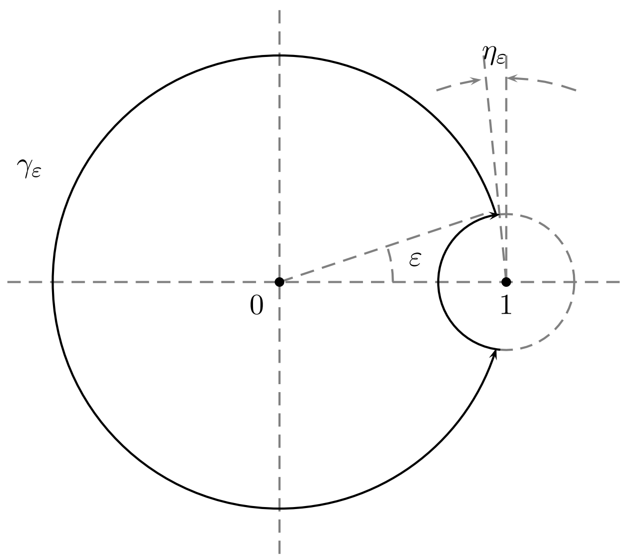
❶ g est holomorphe sur Ω.

❷ Ω est un ouvert étoilé (par rapport à 0).

❸ γ_ε est un lacet de Ω (pour tout $0 < \varepsilon < 1$).

D'après la formule intégrale de Cauchy, ❶, ❷ et ❸ donnent

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z} dz = 2i\pi g(0) Ind_{\gamma_\varepsilon}(0) = 2i\pi \log_0(1) = 2i\pi(\ln(1) + iarg_{]-\pi,\pi[}(1)) = 0.$$



4. **En tendant ε vers 0, montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|1 - e^{i\theta}| d\theta = 0$.**

D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z} dz \\
&= \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{\log_0(1-e^{i\theta})}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}+\eta_\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}-\eta_\varepsilon} \frac{\log_0(1-(1+\varepsilon e^{it})}{1+\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} dt \\
&= i\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \log_0(1-e^{i\theta}) d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}+\eta_\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}-\eta_\varepsilon} \frac{\log_0(-\varepsilon e^{it})}{1+\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} dt \\
&= i\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \left(\ln|1-e^{i\theta}| + iarg_{]-\pi,\pi[}(1-e^{i\theta})\right) d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}+\eta_\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}-\eta_\varepsilon} \frac{\log_0(\varepsilon e^{i(t-\pi)})}{1+\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} dt \quad (s = t-\pi) \\
&= i\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \left(\ln|1-e^{i\theta}| + iarg_{]-\pi,\pi[}(1-e^{i\theta})\right) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}+\eta_\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\eta_\varepsilon} \frac{\log_0(\varepsilon e^{is})}{1-\varepsilon e^{is}} i\varepsilon e^{is} ds \\
&= i\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \left(\ln|1-e^{i\theta}| + iarg_{]-\pi,\pi[}(1-e^{i\theta})\right) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}+\eta_\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\eta_\varepsilon} \frac{\ln(\varepsilon)+is}{1-\varepsilon e^{is}} i\varepsilon e^{is} ds
\end{aligned}$$

En tendant ε vers 0, le résultat s'obtient après passage à la partie imaginaire.

5. **Calculer $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|1 - \alpha e^{i\theta}| d\theta$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.**

Si on pose $\alpha=|\alpha|e^{i\theta_\alpha}$ alors par périodicité, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1-\alpha e^{i\theta}|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1-|\alpha|e^{i(\theta+\theta_\alpha)}|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1-|\alpha|e^{i\theta}|d\theta.$$

On distingue trois cas :

– Si $|\alpha|=1$ alors
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1-\alpha e^{i\theta}|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1-e^{i\theta}|d\theta=0.$$

– Si $|\alpha|<1$ alors on a $\ln|1-z|=\Re e\log_0(1-z)$ sur $\mathbb{D}(0,1)$ donc elle est harmonique et par suite
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1-|\alpha|e^{i\theta}|d\theta=\ln(1)=0$$
(pour $\alpha=0$ l'égalité est évidente cependant, pour $\alpha\neq 0$, on applique l'égalité de la moyenne de cette fonction sur le cercle de centre 0 et de rayon $|\alpha|$).

– Si $|\alpha|>1$ alors on a d'après le deuxième cas,
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1-|\alpha|e^{i\theta}|d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left||\alpha|e^{i\theta}\left(\frac{e^{-i\theta}}{|\alpha|}-1\right)\right|d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ln|\alpha|+\ln\left|\frac{e^{-i\theta}}{|\alpha|}-1\right|\right)d\theta\\ &= \ln|\alpha|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|1-\frac{e^{i\theta}}{|\alpha|}\right|d\theta=\ln|\alpha|\end{aligned}$$
car $\dfrac{1}{|\alpha|}\in\mathbb{D}(0,1)$.

Partie II

Soit f une fonction holomorphe sur le disque $\mathbb{D}(R)$ telle que $f(0)\neq 0$ et soit $0<r<R$. On suppose que f admet exactement $a_1,\dots,a_n$ comme zéros dans le disque $\mathbb{D}(r)$ et $b_j=re^{i\theta_j},\ j=1,\dots,m$ comme zéros sur le cercle $\mathscr{C}(r)$ (tout les zéros sont comptés avec multiplicités).

1. **Montrer qu'il existe une fonction h holomorphe sur $\mathbb{D}(R)$ qui n'admet pas de zéros dans un disque $\mathbb{D}(r')$ où $r<r'\leq R$ telle qu'on ait**
$$f(z)=\left(\prod_{p=1}^n\frac{r(a_p-z)}{r^2-\overline{a}_pz}\right)\left(\prod_{j=1}^m(z-b_j)\right)h(z),\quad\forall\ z\in\mathbb{D}(r').$$

Si on pose
$$h(z)=\frac{f(z)\displaystyle\prod_{p=1}^n(r^2-\overline{a}_pz)}{\left(\displaystyle\prod_{p=1}^n r(a_p-z)\right)\left(\displaystyle\prod_{j=1}^m(z-b_j)\right)}$$
alors h est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(R)\setminus\{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m\}$. De plus h est holomorphe au voisinage de chaque point a_j car ce point est un zéro commun de même ordre de f et de $\displaystyle\prod_{p=1}^n(a_p-z)$. D'où h est holomorphe sur $\mathbb{D}(R)$ qui n'admet pas de zéro sur $\mathbb{D}(r')$ où $0<r<r'\leq R$.

2. **Montrer que la fonction** $\ln|h|$ **est harmonique sur** $\mathbb{D}(r')$ **et en déduire que**

$$\ln|h(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|h(re^{i\theta})|d\theta.$$

Comme h est holomorphe sur $\mathbb{D}(r')$ qui ne s'annule pas sur ce disque (ouvert étoilé) alors il existe une fonction holomorphe ψ sur $\mathbb{D}(r')$ telle que $h(z) = e^{\psi(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{D}(r')$ (ψ est une primitive de la fonction h'/h). Par suite on a $|h(z)| = |e^{\psi(z)}| = e^{\Re e\psi(z)}$. Ce qui donne que $\ln|h(z)| = \Re e\psi(z)$ sur $\mathbb{D}(r')$ qui est harmonique.
Par l'égalité de la moyenne,

$$\ln|h(0)| = \Re e\psi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re e\psi(re^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|h(re^{i\theta})|d\theta.$$

3. **Montrer que pour tout** $1 \leq j \leq m$**, on a** $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|re^{i\theta} - b_j|d\theta = \ln r.$

On a $b_j = re^{i\theta_j}$ donc en utilisant la question $I.4.$, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|re^{i\theta} - b_j|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|r(e^{i\theta} - e^{i\theta_j})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\ln(r) + \ln\left|e^{i(\theta-\theta_j)} - 1\right|)d\theta = \ln r.$$

4. **Montrer que** $\ln|h(0)| = \ln|f(0)| + \sum_{p=1}^{n} \ln\frac{r}{|a_p|} - m\ln r.$

Comme $|b_j = r$ pour tout $1 \leq j \leq m$ alors on a

$$\begin{aligned}
\ln|h(0)| &= \ln\left|\frac{f(0)r^{2n}}{\left(r^n\prod_{p=1}^{n} a_p\right)\left(\prod_{j=1}^{m} b_j\right)}\right| \\
&= \ln|f(0)| + n\ln(r) - \sum_{p=1}^{n}\ln|a_p| - \sum_{j=1}^{m}\ln|b_j| \\
&= \ln|f(0)| + n\ln(r) - \sum_{p=1}^{n}\ln|a_p| - m\ln|r|.
\end{aligned}$$

5. **En déduire la formule de Jensen :**

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})|d\theta = \ln|f(0)| + \sum_{p=1}^{n} \ln\frac{r}{|a_p|}.$$

D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|d\theta\\
=&\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ln|h(re^{i\theta})|+\ln\left|\left(\prod_{p=1}^{n}\frac{r(a_p-re^{i\theta})}{r^2-\overline{a}_pre^{i\theta}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}(re^{i\theta}-re^{i\theta_j})\right)\right|\right)d\theta\\
=&\ \ln|h(0)|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(\left(\prod_{p=1}^{n}\frac{|\frac{a_p}{r}-e^{i\theta}|}{|1-\frac{\overline{a}_p}{r}e^{i\theta}|}\right)\left(r^m\prod_{j=1}^{m}|e^{i\theta}-e^{i\theta_j}|\right)\right)d\theta\\
=&\ \ln|h(0)|+\sum_{p=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ln|1-\frac{a_p}{r}e^{i\theta}|-\ln|1-\frac{\overline{a}_p}{r}e^{i\theta}|\right)d\theta}_{=0\quad(I.5.)}+\\
&\ \overbrace{+m\ln(r)+\sum_{j=1}^{m}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|e^{i(\theta-\theta_j)}-1|d\theta}_{=0\quad(I.4.)}}^{=m\ln(r),\quad(II.3.)}\\
=&\ \left(\ln|f(0)|+n\ln(r)-\sum_{p=1}^{n}\ln|a_p|-m\ln|r|\right)+m\ln(r)=\ln|f(0)|+\sum_{p=1}^{n}\ln\frac{r}{|a_p|}.
\end{aligned}$$

6. **(Application)**

   (a) **Montrer que pour tout entier $k\geq 3$, la fonction $P_k(z)=z^k+z+3$ admet toute ses racines dans la couronne $C(1,2):=\{z\in\mathbb{C};\ 1<|z|<2\}$.**

   On pose $\Psi(z)=3$ alors on a bien P_k et Ψ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et pour tout $z\in\mathscr{C}(1)$ on a $|P_k(z)-\Psi(z)|=|z^k+z|\leq|z^k|+|z|=2<3=|\Psi(z)|$. Par le théorème de Rouché, P_k et Ψ ont même nombre de zéros comptés avec multiplicités dans le disque $\mathbb{D}(1)$. D'où P_k n'admet pas de zéro dans $\mathbb{D}(1)$.
   De même, en posant $\Phi(z)=z^k$ on a P_k et Φ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et pour tout $z\in\mathscr{C}(2)$ on a $|P_k(z)-\Phi(z)|=|z+3|\leq 3+|z|=5<2^k=|\Phi(z)|$ car $k\geq 3$. Par le théorème de Rouché, P_k et Φ ont même nombre de zéros comptés avec multiplicités dans le disque $\mathbb{D}(2)$. D'où P_k admet exactement k zéros dans $\mathbb{D}(2)$.On conclut que P_k admet toutes ses racines dans la couronne $C(1,2)$ car P_k n'admet pas de zéro sur le cercle $\mathscr{C}(1)$.

   (b) **Montrer que $A(1)=\ln 3$ puis Comparer $A(1)$ et $A(2)$ où**

   $$A(r):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|P_k(re^{i\theta})|d\theta.$$

   Comme P_k ne s'annule pas sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(1)$, alors d'après II.2., on a

   $$A(1):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|P_k(e^{i\theta})|d\theta=\ln|P_k(0)|=\ln(3).$$

   Si on note $a_1,\dots,a_k$ les zéros de P_k dans le disque $\mathbb{D}(2)$, par la formule de Jensen, (II.5.), et puisque $\frac{2}{|a_p|}>1$ pour tout $p=1,\dots,k$, on obtient

   $$A(2):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|P_k(2e^{i\theta})|d\theta=\ln|P_k(0)|+\sum_{p=1}^{k}\ln\frac{2}{|a_p|}\geq\ln|P_k(0)|=A(1).$$

7. **On suppose dans cette question que 0 est aussi un zéro de f d'ordre q. Montrer, en utilisant la fonction $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z^q}$, qu'on a**

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})|d\theta = q\ln r + \ln\frac{|f^{(q)}(0)|}{q!} + \sum_{p=1}^{n} \ln\frac{r}{|a_p|}.$$

Comme 0 est un zéro de f d'ordre q alors φ est holomorphe sur $\mathbb{D}(R)$. De plus les zéros non nul de φ sont exactement les zéros de f de mêmes ordres. D'après la formule de Jensen, si $a_1, \dots, a_n$ sont les zéros de f dans le disque $\mathbb{D}(r)$ alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\varphi(re^{i\theta})|d\theta = \ln|\varphi(0)| + \sum_{p=1}^{n} \ln\frac{r}{|a_p|}.$$

Le résultat découle du fait que $\ln|\varphi(re^{i\theta})| = \ln|f(re^{i\theta})| - q\ln(r)$ et $\varphi(0) = \dfrac{|f^{(q)}(0)|}{q!}$.

□

Solution du problème 9 *Sur les fonctions injectives*

I. **Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r_0) \subset U$. Soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge dans $\mathcal{H}(U)$ vers une fonction holomorphe g sur U.**

1. **On suppose dans cette question que $g(z) \neq 0, \forall\, z \in \mathscr{C}(z_0, r_0)$.**

(a) **Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a g_n et g ont même nombre de zéros dans le disque $\mathbb{D}(z_0, r_0)$.**

Soit $\eta := \inf_{z\in\mathscr{C}(z_0,r_0)} |g(z)|$. Comme $|g|$ est continue sur le compact $\mathscr{C}(z_0, r_0)$, alors il existe $\xi_1 \in \mathscr{C}(z_0, r_0)$ tel que $\eta = |g(\xi_1)| > 0$ puisque $g(\xi_1) \neq 0$. De plus comme $\mathscr{C}(z_0, r_0)$ est un compact de U alors la suite $(g_n)_n$ converge uniformément vers g sur ce compact ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\sup_{z\in\mathscr{C}(z_0,r_0)} |g_n(z) - g(z)| < \eta.$$

Par suite pour tout $z \in \mathscr{C}(z_0, r_0)$ on a

$$|g_n(z) - g(z)| < |g(z)|$$

D'après le théorème de Rouché, on a g_n et g ont même nombre de zéros (comptés avec leurs multiplicités) dans le disque $\mathbb{D}(z_0, r_0)$ pour tout $n \geq n_0$.

(b) **En déduire que si les fonctions g_n sont injectives (pour tout $n \geq n_1$) sur U alors g est constante ou injective.**

On suppose que g est non constante et non injective sur U. Il existe alors $z_3 \neq z_2 \in U$ tels que $g(z_2) = g(z_3)$. On pose $f_n(z) = g_n(z) - g_n(z_3)$. Alors la suite $(f_n)_n$ converge dans $\mathcal{H}(U)$ vers $f = g - g - z_3)$. De plus, comme g est supposé non constante alors f est non identiquement nulle, donc de zéros isolés. Or z_2 est un zéro de f par suite il existe $r_2 > 0$ tel que z_2 soit l'unique zéro de f dans $\overline{\mathbb{D}}(z_2, r_2)$ (en particulier $z_3 \notin \overline{\mathbb{D}}(z_2, r_2)$). D'après la question I.1.a), il existe $n_2 \geq n_1$ tel que pour tout $n \geq n_2$ on a f_n et f ont même nombre de zéros comptés avec leurs multiplicités, dans le disque $\mathbb{D}(z_2, r_2)$. Ainsi f_n admet au moins un zéro dans $\mathbb{D}(z_2, r_2)$ ce qui est absurde car g_n est injective.

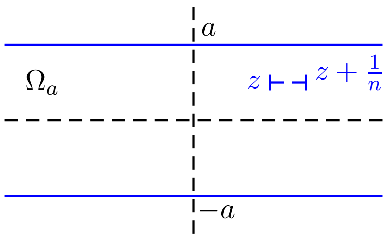
2. **Montrer, par un contre exemple, que les résultats précédents sont faux si g s'annule sur le cercle $\mathscr{C}(z_0, r_0)$.**

Soit $g_n(z) = z - 1 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$ et $g(z) = z - 1$ alors $(g_n)_n$ converge vers g dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ et g_n admet un zéro dans le disque $\mathbb{D}(0,1)$ mais g n'admet pas de zéro dans ce disque.

II. **On considère $a > 0$ et $\Omega_a := \{z \in \mathbb{C};\ -a < \Im m(z) < a\}$. Soit f une fonction holomorphe *non constante* sur Ω_a et $(h_n)_n$ la suite de fonctions définies par**

$$h_n(z) := n(f(z + \frac{1}{n}) - f(z)) = \frac{f(z+\frac{1}{n}) - f(z)}{\frac{1}{n}}, \quad \forall\, z \in \Omega_a.$$

1. **Montrer que $(h_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions holomorphes, qui converge simplement sur Ω_a vers une fonction h que l'on déterminera.**



Pour tout $z \in \Omega_a$ et $n \geq 1$, on a $z + \frac{1}{n} \in \Omega_a$ donc h_a est bien définie et est holomorphe sur Ω_a. De plus pour $z \in \Omega_a$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} h_n(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(z+\frac{1}{n}) - f(z)}{\frac{1}{n}} = f'(z).$$

D'où la suite $(h_n)_n$ converge simplement sur Ω_a vers $h = f'$.

2. **Montrer que la suite $(h_n)_n$ est localement bornée.**

Soit K un compact de Ω_a. Alors pour $z \in K$,on a

$$\begin{aligned}|h_n(z)| &= \left| n \int_{[z, z+\frac{1}{n}]} f'(w)dw \right| = n \left| \int_0^{\frac{1}{n}} f'(z+t)dt \right| \\ &\leq n \times \frac{1}{n} \sup_{\xi \in K+1} |f'(\xi)| = M < +\infty\end{aligned}$$

M est fini et est indépendant de n car $K + 1 := \{\xi + 1 \in \mathbb{C};\ \xi \in K\}$ est un compact de Ω_a et $|f'|$ est continue sur Ω_a donc elle est bornée sur ce compact.

3. **En déduire que $(h_n)_n$ converge dans $\mathcal{H}(\Omega_a)$ vers h.**

On a $(h_n)_n$ est une suite de fonctions holomorphe sur Ω_a et qui converge simplement vers h (qui est holomorphe) sur Ω_a et que cette suite est localement bornée ; donc par le théorème de Montel, la convergence de cette suite est uniforme sur tout compact de Ω_a. ie. la convergence de la suite $(h_n)_n$ vers $h = f'$ est dans $\mathcal{H}(\Omega_a)$.

4. (a) **En utilisant la question (I.1-a), Montrer que si f est injective sur Ω_a alors $f'(z) \neq 0,\ \forall\, z \in \Omega_a$.**

On suppose qu'il existe $z_0 \in \Omega_a$ tel que $f'(z_0) = 0$. Puisque f est injective alors f' est non constante ; d'après la question I.1-a, la fonction h_n s'annule sur un voisinage $\mathscr{V}(z_0) \subset \Omega_a$. ie. il existe $\xi_n \in \Omega_a$ tel que $f(\xi_n + \frac{1}{n}) = f(\xi_n)$ ce qui est absurde car f est injective sur Ω_a.

En déduire que f réalise un biholomorphisme de Ω_a dans $f(\Omega_a)$.

On a f est injective sur Ω_a et $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega_a$ donc par le théorème d'inversion local, f réalise un biholomrphisme local ; or elle est injective et surjective de Ω_a sur $f(\Omega_a)$ donc f réalise un biholomorphisme de Ω_a dans $f(\Omega_a)$.

(b) **(Réciproquement) Donner une fonction holomorphe *non injective* ψ sur $\Omega_{2\pi}$ qui vérifie $\psi'(z) \neq 0, \ \forall\, z \in \Omega_{2\pi}$.**

Soit $\psi(z) = \exp(z)$ alors ψ est holomorphe et $\psi'(z) = \exp(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega_{2\pi}$ mais $\psi(-i\pi + 2i\pi) = \psi(-i\pi)$ donc ψ est non injective sur $\Omega_{2\pi}$.

5. **On suppose dans cette question que f est injective sur $\Omega_a \setminus \Delta$ où Δ est une droite de $\mathbb{C}$ et on veut montrer que f est injective sur Ω_a.**

(a) **On suppose qu'il existe $z_1 \neq z_2 \in \Omega_a$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$.**
En utilisant le théorème de l'application ouverte, montrer qu'il existe $r > 0, \ \epsilon > 0$ tels que

$$\mathbb{D}(f(z_1), \epsilon) \subset f(\mathbb{D}(z_1, r)) \cap f(\mathbb{D}(z_2, r)).$$

On a f est injective sur $\Omega_a \setminus \Delta$ donc elle est non constante et puisqu'elle est holomorphe alors elle est ouverte ainsi pour $r > 0$ tel que $\mathbb{D}(z_1, r) \subset \Omega_a$ et $\mathbb{D}(z_2, r) \subset \Omega_a$ on a $f(\mathbb{D}(z_1, r))$ et $f(\mathbb{D}(z_2, r))$ sont deux ouverts de $\mathbb{C}$ qui contiennent $f(z_1) = f(z_2)$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathbb{D}(f(z_1), \varepsilon) = \mathbb{D}(f(z_2), \varepsilon) \subset f(\mathbb{D}(z_1, r)) \cap f(\mathbb{D}(z_2, r)).$$

(b) **En déduire que f est injective sur Ω_a et que**

$$\int_{\mathscr{C}(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \neq 0, \quad z \in \mathbb{D}(z_0, r) \subset\subset \Omega_a.$$

Si f est non injective sur Ω_a alors il existe $z_1 \neq z_2 \in \Omega_a$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$. Par la question II.5.a, il existe $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\mathbb{D}(z_1, r) \cap \mathbb{D}(z_2, r) = \emptyset$ mais $\mathbb{D}(f(z_1), \varepsilon) = \mathbb{D}(f(z_2), \varepsilon) \subset f(\mathbb{D}(z_1, r)) \cap f(\mathbb{D}(z_2, r))$. Donc pour tout $\xi \in D(f(z_1), \varepsilon)$ il existe $\zeta_1 \in \mathbb{D}(z_1, r)$ et $\zeta_2 \in \mathbb{D}(z_2, r)$ tels que $f(\zeta_1) = f(\zeta_2) = \xi$. Comme f est injective sur $\Omega_a \setminus \Delta$ alors $\zeta_1 \in \Delta$ ou $\zeta_2 \in \Delta$. Par suite $\xi \in f(\Delta)$; ainsi on a $\mathbb{D}(f(z_1), \varepsilon) \subset f(\Delta)$. Ce qui est absurde car $f(\Delta)$ est négligeable de $\mathbb{C}$ mais $\mathbb{D}(f(z_1), \varepsilon)$ est non négligeable. D'où l'injectivité de f sur Ω_a.
D'après la question II.4.a, on conclut que $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega_a$; or d'après le théorème des Résidus,

$$\int_{\mathscr{C}(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = 2i\pi f'(z) \neq 0, \quad z \in \mathbb{D}(z_0, r) \subset\subset \Omega_a.$$

III. **Soit F une fonction entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$). On suppose que F est injective sur $\{z \in \mathbb{C};\ |z| > 1\}$ et on pose $G(z) = F(\frac{1}{z})$.**

1. **Montrer que G est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et que pour tout $\eta < 1$ on a $G(\mathbb{D}^*(0, \eta))$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$.**

On a G est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ comme composée de deux fonctions holomorphes. On suppose qu'il existe $\eta < 1$ tel que $G(\mathbb{D}^*(0, \eta))$ est dense dans $\mathbb{C}$ donc $F(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, \frac{1}{\eta}))$ est dense dans $\mathbb{C}$. Mais F est injective sur $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, 1))$ donc $F(\mathbb{D}(0, \frac{1}{\eta}) \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, 1))$ et $F(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, \frac{1}{\eta}))$ sont deux ouverts d'intersection vide. Pour $\xi_0 \in F(\mathbb{D}(0, \frac{1}{\eta}) \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, 1))$, il existe $r_0 > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}}(\xi_0, r_0) \subset F(\mathbb{D}(0, \frac{1}{\eta}) \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, 1))$ donc $\overline{\mathbb{D}}(\xi_0, r_0) \cap F(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, \frac{1}{\eta})) = \emptyset$. Ce qui est absurde.

2. $\boxed{\textbf{En déduire que } F \textbf{ est de la forme } F(z) = \alpha z + \beta \textbf{ où } \alpha \neq 0.}$

D'après la question précédente, 0 est un pôle de G (d'ordre k) donc $z^k G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ ie. $F(z) = G(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{k-n}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Par suite $a_n = 0$ pour tout $n \geq k$. D'où F est un polynôme. On suppose que le degré du polynôme F est $\deg(F) > 1$. Alors d'après le théorème de D'Alembert-Gauss, pour tout $a \in \mathbb{C}$, l'équation $F(z) = a$ admet exactement $\deg(F)$ racine dans $\mathbb{C}$. Ainsi comme F est injective sur $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ alors cette équation admet au moins une racine dans $\overline{\mathbb{D}}$. Par conséquent on a $a \in F(\overline{\mathbb{D}})$. D'où $\mathbb{C} \subset F(\overline{\mathbb{D}})$ ce qui est absurde car $F(\overline{\mathbb{D}})$ est un compact de $\mathbb{C}$.

$\square$