Université de Gabès, Faculté des Sciences de Gabès.

Départements de Mathématiques.

Cours d'Algèbre LFSNA1.
2014-2015

présenté par

Hedi REGEIBA

Faculté des Sciences de Gabès, cité Erriadh 6072 Zrig Gabès Tunisie.

Contents

Chapter 1

Espaces vectoriels.

1.1 Généralités.

1.1.1 Introduction et but.

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ on sait additionner deux couples ou deux triplets

$$(x_1,\ x_2) + (y_1,\ y_2) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2).$$

De la même façon on sait calculer pour $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha(x_1,\ x_2,\ x_3) = (\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ \alpha x_3).$$

<u>But:</u> Généraliser toutes notions à des ensembles arbitreures dont les éléments seront appelés vecteurs
Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres ou celui des nombres complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1.2 Espaces vectoriels.

Définition 1.2.1. *On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide E muni de deux applications*

- *une loi interne:*

$$\begin{aligned} '+' : \qquad & E \times E \longrightarrow E \\ & (x, y) \longrightarrow x + y \end{aligned}$$

- *une loi externe:*

$$\begin{aligned} '\cdot' : \qquad & \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\ & (\alpha, x) \longrightarrow \alpha \cdot x \end{aligned}$$

vérifiant:

1. $\forall (x,\ y,\ z) \in E^3,\ x + (y + z) = (x + y) + z,$

2. $\exists 0_E \in E| \ \forall x \in E, \ x + 0_E = x = 0_E + x,$

3. $\forall x \in E, \ \exists x' \in E| \ x + x' = 0_E = x' + x,$

4. $\forall (x, y) \in E^2, \ x + y = y + x,$

5. $\forall x \in E, \ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \ (\alpha\beta) \cdot x = \alpha(\beta \cdot x),$

6. $\forall (x, y) \in E^2, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$

7. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \ \forall x \in E, \ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$

8. $\forall x \in E, \ 1 \cdot x = x.$

Exemple 1.2.2.

- *Si on prend $E = \mathbb{K}$ avec la loi '+' et la loi '$\cdot$' respectivement l'addition et la multiplication de $\mathbb{K}$. On a $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

- *Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels on définit sur $E \times F$*

$$(x, \ y) + (x', \ y') = (x + x', \ y + y')$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \alpha \cdot (x, \ y) = (\alpha \cdot x, \ \alpha \cdot y).$$

  Alors il est facile de vérifier que $E \times F$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- *En appliquant par récurrence des deux premiers exemples à $E = F = \mathbb{K}$.*

$$\forall n \geq 1, \ \mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}, \ \textit{est un } \mathbb{K}\textit{-espace vectoriel.}$$

$$\textit{où } (x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_n) + (y_1, \ y_2, \ \cdot, \ y_n) = (x_1 + y_1, \ x_2 + y_2, \ \cdots, \ x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_n) = (\alpha x_1, \ \alpha x_2, \ \cdots, \ \alpha x_n).$$

Remarque 1.2.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel donc*

- *Les éléments de E s'appellent des vecteurs.*

- *Les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent des scalaires.*

Proposition 1.2.4.

1. $\forall x \in E, \ 0 \cdot x = 0_E$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \alpha \cdot 0_E = 0_E$

3. $\alpha \cdot x = 0_E \ \Leftrightarrow \ \alpha = 0$ *ou* $x = 0_E$

4. $\forall x \in E, \ \forall \alpha \in \mathbb{K} \ (-\alpha)x = -(\alpha x).$

1.3 Sous-espaces vectoriels.

Définition 1.3.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel (s-e-v) si*

- $F \neq \varnothing$
- $\forall (x,\ y) \in F^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$ *on a* $\alpha x + y \in F$.

Si F est un s-e-v alors F muni de la loi '+' et la loi '$\cdot$' est lui même un espace vectoriel.

Exemple 1.3.2. *Soit $E = \mathbb{R}^3$. On prend*

1. $F = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 |\ 2x + y - 3z = 1\}$
2. $G = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 |\ 3x - 2y + 8z = 0\}$.

Définition 1.3.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-e-v. F et G deux $\mathbb{K}$-s-e-v de E on définit*

$$F + G = \{w \in E|\ w = u + v,\ u \in F,\ v \in G\}.$$

Proposition 1.3.4.

- *$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme des s-e-v F et G (c-à-d la somme de deux s-e-v est un s-e-v).*
- *$F \cap G$ est un s-e-v (l'intersection de deux s-e-v est s-e-v).*
- *Soit $V = \{v_1,\ \cdots,\ v_p\}$ une famille de p vecteurs de E. On appelle s-e-v engendré par V l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $v_1,\ \cdots,\ v_p$. On le note*

  $$vect(V) = vect\{v_1,\ \cdots,\ v_p\} = \{v \in E|\ v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p \text{ avec } \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_p \in \mathbb{K}\}$$

  $vect(V)$ est un s-e-v.

1.4 Familles libres - Familles liées, Familles génératrice, Bases d'un espace vectoriel.

1.4.1 Familles libres- Familles liées.

Remarque 1.4.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-e-v, $v_1,\ \cdots,\ v_p \in E$*

$$v \in vect\{v_1,\ \cdots v_p\} \Leftrightarrow \exists \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_p \in \mathbb{K}|\ v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p.$$

Supposons $w \in E$ est combinaison linéaire (C-L) de $v_1,\ \cdots,\ v_p$. Alors

$$vect\{v_1,\ \cdots,\ v_p\} \Leftrightarrow vect\{v_1,\ \cdots,\ v_p, w\}.$$

Définition 1.4.2. *Soient E un $\mathbb{K}$-e-v, $p \geq 1$ et $V = \{v_1,\ \cdots,\ v_p\}$ une famille de p vecteurs de E. On dit que la famille est libre (ou que $v_1,\ \cdots,\ v_p$ sont linéairement independents) aucun vecteur de la famille V n'est combinaison linéaire des autres. c-à-d*

$$\forall i \in \{1,\ \cdots,\ p\}\ v_i \text{ n'est pas C-L de } v_1,\ \cdots,\ v_{i-1},\ v_{i+1},\ \cdots,\ v_p.$$

Dans le cas contraire on dit que la famille V est une famille liée (ou que $v_1,\ \cdots,\ v_p$ sont linéairement dépendants)

Proposition 1.4.3. *Soit* $V = \{v_1, \cdots, v_p\}$, V *est une famille libre si et seulement si* $\forall (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \mid \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0$ *a une unique solution qui est* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$.

Exemple 1.4.4.

1. $E = \mathbb{K}[X]$ *soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $P \in E$
$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n,$$
$$P \equiv 0 \text{ si et seulement si } a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ *la famille* $\vartheta_n = \{1, X, \cdots, X^n\}$ *est une famille libre dans l'espace vectoriel des polynômes*

2. *La famille* $\{1, \cos^2(x), \sin^2(x)\}$ *est une famille liée de* $\mathbb{R}^3$, *car*
$$1 = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

Proposition 1.4.5.

- $\vartheta = \{0_E\}$ *est liée.*
- *Toute famille contenant une famille liée est liée.*
- *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

Définition 1.4.6. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-e-v,* $p \geq 1$ *et* $\vartheta = \{v_1, \cdots, v_p\}$ *famille de* p *vecteurs non tous nuls alors il existe un entier* r *tel que*

- $1 \leq r \leq p$.
- *On peut extraire de* ϑ *une famille libre à* r *vecteurs.*
- *Toute famille de plus que* r *vecteurs est liée.*

r *s'appelle le rang de la famille* ϑ.

1.4.2 Familles génératrice.

Définition 1.4.7. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $\vartheta = \{v_1, \cdots, v_p\}$ *une famille de* p *vecteurs de* E. *On dit que* ϑ *est une famille génératrice (ou que* $v_1, \cdots, v_p$ *engendrent) de* E *si tout vecteur dans* E *est une C.L de* $v_1, \cdots, v_p$ *c.à.d*
$$\forall\ v \in E,\ \exists (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \mid v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p.$$

Exemple 1.4.8. *Soient* $E = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et*
$$\vartheta = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\},$$
Pour tout $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *on a*
$$\begin{aligned} v &= (x, y, z) \\ &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \\ &= xe_1 + ye_2 + ze_3. \end{aligned}$$
Donc ϑ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^3$.

1.4.3 Base d'un espace vectoriel.

Définition 1.4.9. *On appelle base d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E une famille libre et génératrice.*

Exemple 1.4.10. *Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et*

$$\vartheta = \{e_1 = (1,\ 0,\ 0),\ e_2 = (0,\ 1,\ 0),\ e_3 = (0,\ 0,\ 1)\},$$

D'après l'exemple 1.4.8, la famille ϑ est génératrice.
La famille ϑ est-elle libre? En effet, Soient $\alpha_1,\ \alpha_2$ et $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} & \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = (0,\ 0,\ 0) \\ \Rightarrow\ & \alpha_1(1,\ 0,\ 0) + \alpha_2(0,\ 1,\ 0) + \alpha_3(0,\ 0,\ 1) = (0,\ 0,\ 0) \\ \Rightarrow\ & (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) = (0,\ 0,\ 0) \\ \Rightarrow\ & \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

<u>Clc:</u> ϑ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Définition 1.4.11. *Soit E un $\mathbb{K}$-e-v ayant une base formée par n vecteurs. Alors toute base de E contient n vecteurs.*
On appelle cet entier n la dimension de E. On écrit $n = dim_{\mathbb{K}}E$.

Proposition 1.4.12.

1. *Soient E un $\mathbb{K}$-e-v de dimension n et F un s-e-v de E alors F posséde également une base et $dim_{\mathbb{K}}F \leq dim_{\mathbb{K}}E$.*

2. *Si F_1 et F_2 sont deux s-e-v de E alors*

$$dim_{\mathbb{K}}(F_1 + F_2) = dim_{\mathbb{K}}(F_1) + dim_{\mathbb{K}}(F_2) - dim_{\mathbb{K}}(F_1 \cap F_2).$$

Chapter 2

Applications linéaires.

2.1 Définitions.

Définition 2.1.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une applications $f: E \to F$ est dite linéaire si*

(i) $\forall\ x,\ y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$,

(ii) $\forall\ x \in E,\ \alpha \in \mathbb{K},\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Remarque 2.1.2. *Si $f: E \to F$ est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$. Si $\alpha = 0$ dans (ii), on a*

$$f(0_E) = f(0 \cdot 0_E) = 0 \cdot f(0_E) = 0_F.$$

Proposition 2.1.3. *$f: E \to F$ est linéaire si et seulement si $\forall (x,\ y) \in E^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$.*

Exemple 2.1.4.

1. $E = F,\ \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{array}{rcl} f_\lambda & : & E \to F \\ & & x \mapsto \lambda x \text{ est linéaire: c'est l'homothétie de rapport } \lambda. \end{array}$$

En particulier:

- *Si $\lambda = 1$ on a $f_1 = Id_E$.*
- *Si $\lambda = 0$ on a $f_0 = 0$*

Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $f: E \to E: P \mapsto P'$

$$\begin{array}{rcl} \forall (P,\ Q) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha P + Q) & = & (\alpha P + Q)' \\ & = & (\alpha P)' + (Q)' \\ & = & \alpha P' + Q' \\ & = & \alpha f(P) + f(Q). \end{array}$$

Notation 2.1.5.

1. *$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F) = \{f:\ E \to F$ linéaire $\}$.*

2. *Si $E \to F$ et $f:\ E \to F$ linéaire on dit que f est endomorphisme $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) = \{f:\ E \to E$ linéaire $\}$*

Définition 2.1.6. *Soit f une application:*

1. *On dit que l'application f est injective si*
$$\forall\ x,\ x' \in E|\ f(x) = f(x') \Rightarrow\ x = x'.$$

2. *On dit que l'application f est surjective si*
$$\forall\ y \in F\ \exists\ x \in E|\ f(x) = y.$$

3. *On dit que l'application f est bijective si f est injective et surjective.*

4. *On dit que l'application f est un isomorphisme si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F)$ et f est bijective.*

5. *On dit que l'application f est un automorphisme si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et f est bijective.*

6. *On dit que E et F sont isomorphes s'il existe $f : E \to F$ linéaire et bijective.*

Notation 2.1.7. *On note par $Aut_{\mathbb{K}}(E)$ ou $GL_{\mathbb{K}}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E dans E.*

Proposition 2.1.8.

1. *Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit*
$$\begin{array}{rcl} f+g:\ E & \to & F \\ x & \to & f(x)+g(x) \\ \lambda f\ :\ E & \to & F \\ x & \to & \lambda f(x). \end{array}$$
Alors $f+g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F)$ et $\alpha f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F)$ et $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F)$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{K}$-e-v.

2. *Soient $E,\ F$ et G trois $\mathbb{K}$-e-v. Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F,\ G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ G)$ c.à.d la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

   Cas particulier: si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ alors $f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{nfois} \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

3. *Si $f:\ E \to F$ est un isomorphisme alors $f^{-1}:\ F \to E$ est linéaire.*

2.2 Noyau et images.

Rappels : soit $f:\ E \to F$ une application. Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$.

- L'image directe de A par f notée
$$\begin{array}{rcl} f(A) & = & \{y \in F|\ \exists\ x \in A,\ f(x) = y\} \\ & = & \{f(x),|\ x \in A\}. \end{array}$$

- L'image réciproque de B par f notée par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E|\ f(x) \in B\}.$$

Conséquence :

- $\forall\ y \in F,\ y \in f(A)$ si $\exists\ x \in A|\ y = f(x)$.
- $\forall\ x \in E,\ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Remarque : on peut parler de $f^{-1}(B)$ même si f n'est pas forcément bijective mais on ne parle de l'application réciproque $f^{-1}(y)$ que si f est bijective.

Proposition 2.2.1. *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F)$*

a) Si E' un s-e-v de E, alors $f(E')$ est un s-e-v de F.

b) Si F' un s-e-v de F, alors $f^{-1}(F')$ est un s-e-v de E.

Définition 2.2.2. *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F)$. On appelle*

- *Noyau de f et on le note par*

$$ker(f) = \{x \in E|\ f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0\}).$$

- *Image de f et on la note par*

$$Im(f) = \{y \in F|\ \exists\ x \in E,\ y = f(x)\} = f(E).$$

Remarque : $ker(f)$ et $Im(f)$ sont des s-e-v de E et F (respectivement).

Proposition 2.2.3. *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F)$. Il y a équivalence entre*

(i) f est injective.

(ii) $ker(f) = \{0_E\}$.

(iii) L'image de toute famille libre de E est une famille libre de F.

Exemple 2.2.4. *Soit*

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,\ y,\ z) & \rightarrow & (2x + y - z,\ x - y + 2z,\ 3x + y) \end{array}$$

f est-elle injective?

2.3 Théorème du rang.

Définition 2.3.1. *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F)$. On appelle rang de f et note $rg(f)$ la dimension de $Im(f) = f(E)$ c.à.d*

$$rg(f) = dim(Im(f)).$$

Si $dim(Im(f)) = +\infty$, on dit que f est de rang infini.

Proposition 2.3.2. *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F)$ On suppose que $dimE$ est finie.*

a) Si $\mathcal{E} = \{e_1,\ \cdots,\ e_n\}$ est une base de F alors $\mathcal{E} = \{f(e_1),\ \cdots,\ f(e_n)\}$ est une famille génératrice de $Im(f)$.

b) Si f est un isomorphisme alors l'image d'une base de E est une base de F.

c) En particulier, si f est un isomorphisme $dimE = dimF$.

Théorème 2.3.3. *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F)$. On suppose que $dimE$ finie. Alors $dimE = dim(ker(f)) + rg(f)$ (formule du rang).*

Corollaire 2.3.4.

1. *Si $dim(E) > dim(F)$, il n'existe pas d'application linéaire injective de E dans F.*
2. *Si $dim(E) < dim(F)$, il n'existe pas d'application linéaire surjective de E dans F.*

2.4 Caractérisation des isomorphismes.

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F)$ alors il y'a équivalence entre

(i) f est injective.

(ii) f est surjective.

(iii) f est un isomorphisme.

Chapter 3

Matrices.

3.1 Définitions.

Définition 3.1.1.

- *Soient* $n,\ p \in \mathbb{N}^*$. *Une matrice de taille* $(n,\ p)$ *à coefficientss dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *est la donnée d'un tableau rectangulaire à* n *lignes et* p *colonnes constitué d'éléments de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.
- *L'éléments qui se trouve à l'intersection de la ligne* i *et de la colonne* j *s'appelle l'élément d'indice* $(i,\ j)$. *On le note* $a_{i,j}$ *et la matrice notée par* $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$.
- *L'ensemble des matrices de taille (ou de type)* $(n,\ p)$ *sera noté par* $M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$.
- $M_n(\mathbb{K}) = M_{(n,\ n)}(\mathbb{K})$ *s'appelle l'ensemble des matrices carrées d'ordre* n *à coefficients dans* $\mathbb{K}$.
- *Si* $p = 1$ $M_{(n,\ 1)}$ *s'appelle l'ensemble des matrices colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$.
- *Si* $n = 1$ $M_{(1,\ p)}$ *s'appelle l'ensemble des matrices lignes à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

Remarque 3.1.2.

- *Se donner* $M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$ *revient à se donner* $n \times p$ *éléments de* $\mathbb{K}$.
- *Deux matrices* A *et* B *sont égales si et seulement si elles ont la même taille et* $a_{i,j} = b_{i,j},\ \forall\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le p$.

Définition 3.1.3. *Soient* $A,\ B \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *on pose:*

$$\begin{aligned} A + B = C = (c_{i,j})_{i,\ j} \quad &\text{avec } c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \\ \lambda A = D = (d_{i,j})_{i,\ j} \quad &\text{avec } d_{i,j} = \lambda a_{i,j}. \end{aligned}$$

Exemple 3.1.4.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 \\ -8 & -7 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda = -2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda A + B = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 7 \\ -14 & -9 & -8 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.1.5.

- $M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$ *muni de ces deux opérations est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*
- $dim(M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})) = n \times p$. *En effet,*
  Si on pose pour tout $i \in \{1,\ \cdots,\ n\}$ *et* $j \in \{1,\ \cdots,\ p\}$, $E_{i,\ j}$ *la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice* $(i,\ j)$ *qui vaut* 1. *Alors* $\{E_{i,j}\}_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ *est une base de* $M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$ *et donc* $dim(M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})) = n \times p$ *et* $dim(M_n(\mathbb{K})) = n^2$

3.2 Matrices et applications linéaires.

Définition 3.2.1. *Soient* $E,\ F$ *deux* $\mathbb{K}$*-e-v de dimension respectivement* p *et* n. *Soient* $\mathcal{E} = \{e_1,\ \cdots,\ e_p\}$ *une base de* E *et* $\mathcal{F} = \{f_1,\ \cdots,\ f_n\}$ *une base de* F, $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,\ F)$.
Soit $\ell \in \{1,\ \cdots,\ p\}$, $u(e_\ell) \in F$ *donc il se décompose dans la base*

$$u(e_\ell) = \sum_{n}^{k=1} a_{k,\ell} f_k,\ a_{k,\ell} \in \mathbb{K}.$$

On appelle matrice de u *relativement aux bases* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$ *de* E *et* F *respectivement la matrice dont les coefficients sont* $(a_{k,\ell})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le \ell\le p}}$. *On la note par* $Mat(u,\ \mathcal{E},\ \mathcal{F}) = (a_{k,\ell})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le \ell\le p}} \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$.

Proposition 3.2.2. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{L}(E,\ F) & \to & M_{(n,\ p)}(\mathbb{K}) \\ & u & \mapsto & mat(u,\ \mathcal{E},\ \mathcal{F}), \end{array} \quad \text{est un isomorphisme.}$$

Exemple 3.2.3. *Soient*

$$\begin{array}{rccc} u : & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,\ y,\ z,\ t) & \mapsto & (2x+y+z-t,\ 3x+2z-t,\ x+y+z), \end{array}$$

$\mathcal{E}_4$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^4$ *et* $\mathcal{E}_3$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *Déterminer* $Mat(u,\ \mathcal{E}_4,\ \mathcal{E}_3)$.

3.3 Produit de matrices.

Définition 3.3.1. *Soient* $A \in M_{(m,\ n)}(\mathbb{K})$, $B \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$, *on définit le produit* $A \times B \in M_{(m,\ p)}(\mathbb{K})$ *par* $A \times B = C$ *avec* $c_{i,k} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} b_{\ell,k}$.

Remarque 3.3.2. *Le produit* $A \times B$ *est possible si le nombre de colonnes de* A *est égal au nombre de lignes de* B.

Exemple 3.3.3. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \in M_{(2,\ 3)}(\mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{(3,\ 4)}(\mathbb{R})$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Calculer AB et C^2.

Définition 3.3.4.

1. *On définit la matrice identite d'indice n la matrice*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible s'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tel que*

$$A \times B = I_n = B \times A.$$

On note par $GL_n(\mathbb{K}) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \backslash\ M \text{ est inversible}\}$.

Proposition 3.3.5. *On a*

1. $\forall\ A, B \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K}),\ \forall\ C \in M_{(p,\ m)}(\mathbb{K}),\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$(\alpha A + \beta B) \times C = \alpha A \times C + \beta B \times C.$$

2. $\forall\ A \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K}),\ \forall\ B, C \in M_{(p,\ m)}(\mathbb{K}),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$A \times (\alpha B + \beta C) = \alpha A \times B + \beta A \times C.$$

3. $\forall\ A \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K}),\ \forall\ B \in M_{(p,\ m)}(\mathbb{K}),\ \forall\ C \in M_{(m,\ \ell)}(\mathbb{K})$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

4. $\forall\ A \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$

$$I_n \times A = A = A \times I_p.$$

Définition 3.3.6. *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ deux bases d'une $\mathbb{K}$-e-v E, on appelle matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$ la matrice $P = mat(Id_E,\ \mathcal{E}',\ \mathcal{E})$.*

Définition 3.3.7.

- *Soient $A,\ B \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$ on dit que A et B sont équivalente s'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que*

$$B = QAP.$$

- *$A,\ B \in M_n(\mathbb{K})$. On dit qu'elles sont semblablles s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$B = P^{-1}AP.$$

3.3.1 Rang d'une matrice.

Définition 3.3.8. *Soit* $A \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$. *On appelle rang de* A *le rang de ses vecteurs colonnes* $c_1, \cdots, c_p$.

Proposition 3.3.9. *Soit* $A \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$ *le rang de* A *est le rang de l'application* $u : \ \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ *de matrice* A *dans la base canonique de* $\mathbb{K}^p$ *et* $\mathbb{K}^n$ *respectivement.*

Définition 3.3.10. *Soit* $A \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K}),\ A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$.
On pose ${}^tA = (a'_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} \in M_{(p,\ n)}(\mathbb{K})$ *définit par* $a'_{i,j} = a_{j,i}$. *On l'appelle transposée de* A.

Exemple 3.3.11. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_{(4,\ 2)}(\mathbb{R}),\ \Rightarrow\ {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{(2,\ 4)}(\mathbb{R}).$$

Proposition 3.3.12.

1. $\forall\ A \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$ *alors* ${}^t({}^tA) = A$.
2. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
3. $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$, *et* $\forall\ A \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$ *alors* ${}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$.
4. $\forall\ A \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K}),\ \forall\ B \in M_{(p,\ m)}(\mathbb{K})$ *alors* ${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$.
5. *Si* $A \in GL_n(\mathbb{K})$ *alors* ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Remarque 3.3.13. *L'application*

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & M_{(n,\ p)}(\mathbb{K}) & \to & M_{(p,\ n)}(\mathbb{K}) \\ & A & \mapsto & {}^tA, \end{array} \quad \textit{est un isomorphisme.}$$

Proposition 3.3.14.

1. $\forall\ A \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$ *on* $rang(A) \leq \inf(n,\ p)$.
2. *Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*
3. $\forall\ A \in M_{(n,\ p)}(\mathbb{K})$ *alors* $rang({}^tA) = rang(A)$.
4. $A \in M_n(\mathbb{K})$ *est inversible si et seulement si* $rang(A) = n$.

3.3.2 Trace d'une matrice.

Définition 3.3.15. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$. *On pose* $tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,i} = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$. *On l'appelle trace de* A.

Proposition 3.3.16.

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.
2. $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$.
3. $tr(AB) = tr(BA)$.
4. *Si* A *et* B *sont semblables alors* $tr(A) = tr(B)$.

Chapter 4

Déterminants.

4.1 Déterminants 2×2.

Définition 4.1.1. *Soit* $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$. *On pose*

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1},$$

on l'appelle le déterminants de la matrice M.

Exemple 4.1.2. *Soit* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \det(M) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$

Remarque 4.1.3.

1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{K}$ *alors* $\alpha M = \begin{pmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} \\ \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \det(\alpha M) = \alpha^2 a_{1,1}a_{2,2} - \alpha^2 a_{1,2}a_{2,1} = \alpha^2 \det(M)$

2. *Par contre si on multiplie juste une colonne par* α

$$M' = \begin{pmatrix} \alpha a_{1,1} & a_{1,2} \\ \alpha a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \det(M') = \alpha a_{1,1}a_{2,2} - \alpha a_{1,2}a_{2,1} = \alpha \det(M)$$

Proposition 4.1.4.

- $\forall\ M,\ M' \in M_2(\mathbb{K})$ *on a* $\det(MM') = \det(M) \times \det(M')$.

- *Si on rajoute à une colonne une autre colonne multipliée par un scalaire alors le déterminant ne change pas. Même chose pour les lignes.*

- *Si* M *est inversible alors*

$$\exists\ M' \in M_2(\mathbb{K})|\ MM' = M'M = Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \det(M)\det(M') = \det(Id_2) = 1 \Rightarrow\ \det(M) \neq 0 \ \textit{et}\ \det(M') = \frac{1}{\det(M)}$$

- *Soit* $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$. *Posons* $M_1 = \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$. *Alors*

$$\begin{aligned} MM_1 &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} & 0 \\ 0 & a_{1,1}a_{2,2} - \alpha a_{1,2}a_{2,1} \end{pmatrix} \\ &= \det(M) Id_2. \end{aligned}$$

De même $M_1 M = \det(M) Id_2 = MM_1$. *Si* $\det(M) \neq 0$, *alors*

$$\left(\frac{M_1}{\det(M)}\right) M = M \left(\frac{M_1}{\det(M)}\right) = Id_2$$

$$\Rightarrow \quad M \textit{ est inversible et } M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

- *Ainsi* $\forall\ M \in M_2(\mathbb{K})$, M *est inversible et si* $\det(M) \neq 0$ *on a*

$$\det({}^t M) = \det(M).$$

4.2 Déterminant 3×3.

Soit $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$, pour $i, j \in \{1,\ 2,\ 3\}$ on note par $M_{i,j}$ la matrice obtenue on barrant dans M la ligne i et la colonne j

On pose $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(M_{i,j})$

Exemple 4.2.1.

$$M_{2,2} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix};\ M_{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix};\ M_{2,2} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{pmatrix}.$$

$$A_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} = -(a_{1,1}a_{3,2} - a_{1,2}a_{3,1}).$$

Théorème 4.2.2. *Soit* $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$ *et* $\Delta_i = \sum_{j=1}^{3} a_{i,j} A_{i,j}$. *Alors* Δ_i *est indépendant de* i *c.à.d* $\forall\ i,\ i' \in \{1,\ 2,\ 3\}$ *on a* $\Delta_i = \Delta_{i'}$.

De même, soit $j \in \{1,\ 2,\ 3\}$. *Posons* $\Delta'_j = \sum_{i=1}^{3} a_{i,j} A_{i,j}$ *alors* Δ'_j *est independant de* j *c.à.d* $\forall\ j, j' \in \{1,\ 2,\ 3\}$ *on a* $\Delta_j = \Delta'_j$. *On pose alors*

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{i=1}^{3} a_{i,j} \det(M_{i,j}) \\ &= \sum_{j=1}^{3} a_{i,j} \det(M_{i,j}). \end{aligned}$$

Définition 4.2.3.

- *On appelle* Δ *le déterminant de la matrice* M.
- *Dans la* 1^{er} *expression on dit qui l'on a développé le déterminant de* M *par rapport à la* j^{eme} *colonne.*

  Dans la 2^{eme} *on dit qui l'on a developpé le déterminant de* M *par rapport à le* i^{eme} *ligne.*

Exemple 4.2.4. *Soient*

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \; M_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.2.5.

- $\det({}^tM) = \det(M)$.
- *Si deux colonnes sont identiques (ou proportionnelles), le déterminant est nul.*
- *On ne change pas la valeur du déterminant si on rajoute à une colonne une autre colonne.*
- $\det(\alpha M) = \alpha^3 \det(M)$.
- *Par contre, si on multiplie une colonne par* α *le déterminant est multiplié par* α.
- *Si on change deux colonnes, le déterminant est transformé en son opposé.*
- *Comme* $\det({}^tM) = \det(M)$ *on peut remplacer les colonnes par les lignes dans les proprietés précédents.*
- $\forall\ M, M' \in M_3(\mathbb{K})$ *on a* $\det(MM') = \det(M)\det(M')$.
- $M \in M_3(\mathbb{K})$ *est inversible si et seulement si* $\det(M) \neq 0$.

Déterminant et inverse.

Soit $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$. On appelle comatrice de M la matrice

$$\mathrm{com}(M) = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix},$$

où $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(M_{i,j})$, alors ${}^t\mathrm{com}(M) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{pmatrix}$ et

$$M \times^t \mathrm{com}(M) =^t \mathrm{com}(M) \times M = \det(M) \times I_3.$$

Donc si $\det(M) \neq 0$ alors M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}{}^t\mathrm{com}(M)$.