Université de Gabes **Faculté des Sciences de Gabes** **Département des Mathématiques**	FSG كليـة العـلـوم بقـابس Faculté des Sciences de Gabès	جَامعة قَابس كلية العلوم بقَابس قسم الريَاضيَات

Courbes et intégrales

Note de cours du module optionnel, complément de mathématiques, pour les étudiants de deuxième année de licence fondamentale mathématiques

Préparée par Noureddine Ghiloufi

Année universitaire 2016/2017.

Table des matières

Chapitre 1

Courbes paramétrées

1.1 Définitions et exemples

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, i, j). Une courbe paramétrée est donnée par une application F d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. La courbe en question est l'image de l'application : $\mathscr{C} := F(I) = \{F(t);\ t \in I\}$.

Exemple 1.1 *1. Droite : Soit $A = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un point et $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ un vecteur ; la courbe paramétrée qui détermine la droite passant par A et ayant v comme vecteur directeur est donnée par :*

$$\begin{array}{rccl} F : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (x_0 + at, y_0 + bt) \end{array}$$

2. Cercle : Soit $A = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un point et $r > 0$. Le cercle de centre A et de rayon r est d'équation algébrique : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ ainsi la courbe paramétrée qui le détermine est donnée par :

$$\begin{array}{rccl} \gamma(A, r) : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t)) \end{array}$$

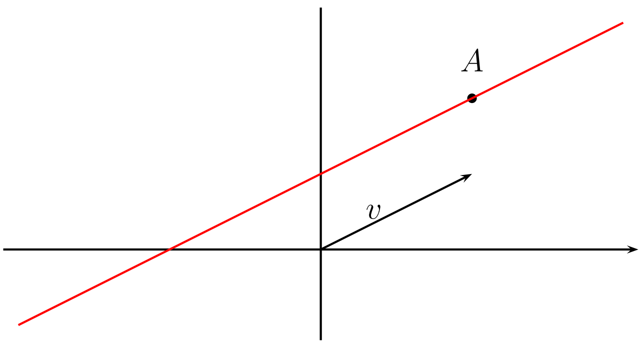


FIGURE 1.1 – Droite passant par le point $A = (2, 2)$ de vecteur directeur $v = (2, 1)$

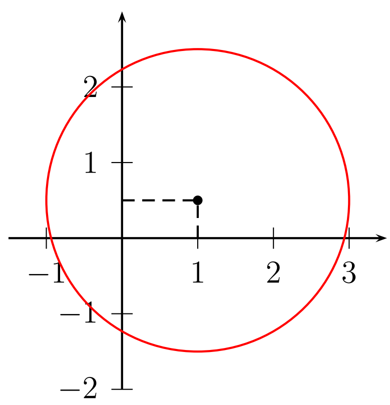


FIGURE 1.2 – Cercle de centre $(1, \frac{1}{2})$ et de rayon 2

3. *Ellipse : d'équation algébrique :* $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ *est donné par :*

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (x_0+a\cos(t), y_0+b\sin(t)) \end{array}$$

4. *Hyperbole : D'équation algébrique :* $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *est donné par :*

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (a\cosh(t), b\sinh(t)) \end{array}$$

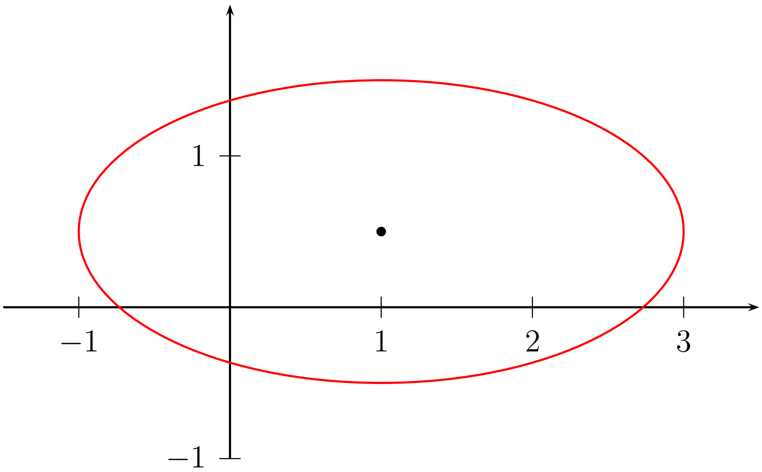


FIGURE 1.3 – Ellipse avec $(x_0,y_0)=(1,\frac{1}{2})$, $a=2$ et $b=1$

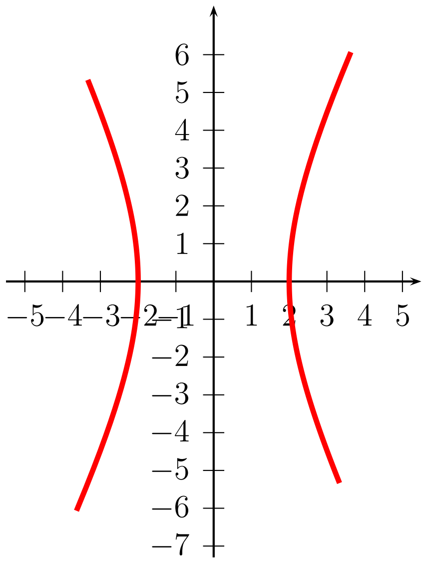


FIGURE 1.4 – Hyperbole avec $a=2$ et $b=4$.

Il est à remarquer que l'équation algébrique de l'hyperbole est

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\times\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1.$$

Ce qui permet de donner une autre paramétrisation :

$$\begin{array}{rccl} G: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \left(\frac{a}{2}\left[t+\frac{1}{t}\right], \frac{b}{2}\left[-t+\frac{1}{t}\right]\right) \end{array}$$

D'où la non unicité de la paramétrisation des courbes paramétrées.

EXERCICE 1 1. *Montrer que le deux paramétrages suivants définissent la même courbe et déterminer cette courbe.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 1-t \\ y(t) & = & 1+t^2 \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}, \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 1-\tan(t) \\ y(t) & = & \dfrac{1}{\cos^2(t)} \end{array}\right. \quad t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

2. *En discutant suivant les réels a, $b\in\mathbb{R}$, donner le domaine de définition du pramétrage*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \sqrt{t-a} \\ y(t) & = & \sqrt{b-t} \end{array}\right.$$

et déterminer la courbe obtenue.

1.2 Étude d'une courbe paramétrée

1.2.1 Réduction du domaine de définition

Étant donné une courbe paramétrée définie par une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (x(t), y(t))$. Le domaine de définition de F est $\mathscr{D}_F := \mathscr{D}_x \cap \mathscr{D}_y$.
Pour réduire le domaine d'étude de cette courbe (et la tracer), on utilise la périodicité et la parité de F. En pratique, pour tout $t \in I$, on cherche $t' \in I$ qui dépend de t qui vérifie certaines propriétés ; en générale on cherche t' sous la forme $t' = -t,\ \ t+\lambda,\ \ \frac{\lambda}{t}$.
Dans ce cas, on divise $I = J \cup J'$ et on fait l'étude (et on trace la branche de la courbe) sur J et on termine la courbe par la symétrie convenable.

Périodicité

Si $F(t') = F(t)$ pour tout $t \in J$, alors on fait l'étude sur J et la courbe sera entièrement déterminée (la courbe est parcourue plusieurs fois sur I). Comme cas particulier si F est périodique de période $T > 0$ (i.e. $\forall t \in I$ on a $t \pm T \in I$ et $F(t+T) = F(t)$) alors il suffit de faire l'étude sur un intervalle $J \subset I$ de langueur T et la courbe sera entièrement déterminée.

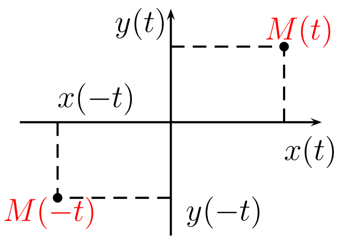
Symétrie centrale

Si on a pour tout $t \in J$, il existe $t' \in J'$ tel qu'on ait

$$\begin{cases} x(t') &= 2\alpha - x(t) \\ y(t') &= 2\beta - y(t). \end{cases}$$

alors la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport au point $A = (\alpha, \beta)$. On fait l'étude sur J et on termine par la symétrie $\mathcal{S}_A$.

Comme cas particulier, si $x(.)$ et $y(.)$ sont impaires (I est symétrique et $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$) on fait l'étude sur $I^+ = I \cap \mathbb{R}_+$ et on termine par la symétrie centrale $\mathcal{S}_O$ de centre l'origine.



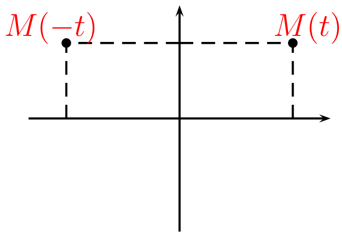
Symétrie axiale

1. Si pour tout $t \in J$ on a

$$\begin{cases} x(t') &= 2\alpha - x(t) \\ y(t') &= y(t). \end{cases}$$

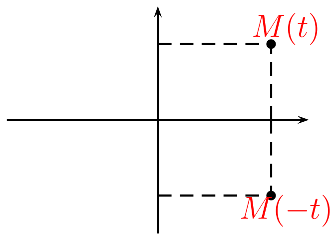
   alors la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $\Delta_\alpha : x = \alpha$. On fait l'étude sur J et on termine par la symétrie $\mathcal{S}_{\Delta_\alpha}$.

   Comme cas particulier, si $x(.)$ est impaire mais $y(.)$ est paire (I est symétrique et $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ on fait l'étude sur $I^+ = I \cap \mathbb{R}_+$ et on termine par la symétrie axiale $\mathcal{S}_{(Oy)}$.

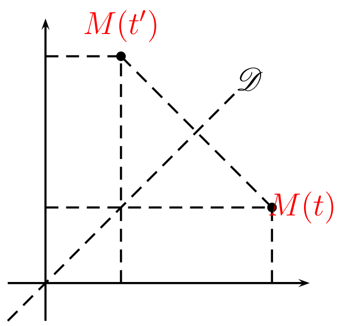


2. Si pour tout $t \in J$ on a
$$\begin{cases} x(t') &= x(t) \\ y(t') &= 2\beta - y(t). \end{cases}$$
alors la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $\mathscr{D}_\beta : y = \beta$. On fait l'étude sur J et on termine par la symétrie $\mathcal{S}_{\mathscr{D}_\beta}$.

Comme cas particulier, si $x(.)$ est paire mais $y(.)$ est impaire (I est symétrique et $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, on fait l'étude sur $I^+ = I \cap \mathbb{R}_+$ et on termine par la symétrie axiale $\mathcal{S}_{(Ox)}$.



3. Si pour tout $t \in J$ on a
$$\begin{cases} x(t') &= y(t) \\ y(t') &= x(t). \end{cases}$$
alors la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $\mathscr{D} : y = x$. On fait l'étude sur J et on termine par la symétrie $\mathcal{S}_{\mathscr{D}}$.



Translation

Si pour tout $t \in J$ on a
$$\begin{cases} x(t') &= x(t) + \alpha \\ y(t') &= y(t) + \beta. \end{cases}$$
alors On fait l'étude sur J et on termine par la translation τ_v de vecteur $v = (\alpha, \beta)$.

Exemple 1.2 *1. Si on pose*
$$F(t) = \left(\frac{t^2 - a^2}{at}, (\log(t) - \log(a))^3\right), \quad a > 0$$
alors F est définie sur $]0, +\infty[$. De plus on a $x(\frac{a^2}{t}) = -x(t)$ et $y(\frac{a^2}{t}) = -y(t)$. Donc il suffit d'étudier F sur $]0, a]$ et tracer son image puis terminer la courbe par une symétrie centrale $\mathcal{S}_O$.

2. *Si on pose*
$$G(t) = (R(t - \cos(t)), R(1 - \sin(t)), \quad R > 0$$
alors G est définie sur $\mathbb{R}$. De plus on a $x(t+2\pi) = x(t) + 2\pi R$ et $y(t+2\pi) = y(t)$. Donc il suffit d'étudier G sur un intervalle de langueur 2π et terminer la courbe par une un infinité de translation de vecteur $(2\pi R, 0)$.

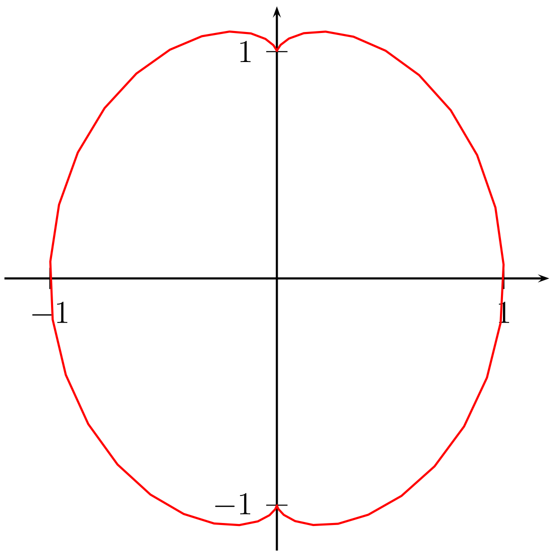


FIGURE 1.5 – Courbe symétrique.

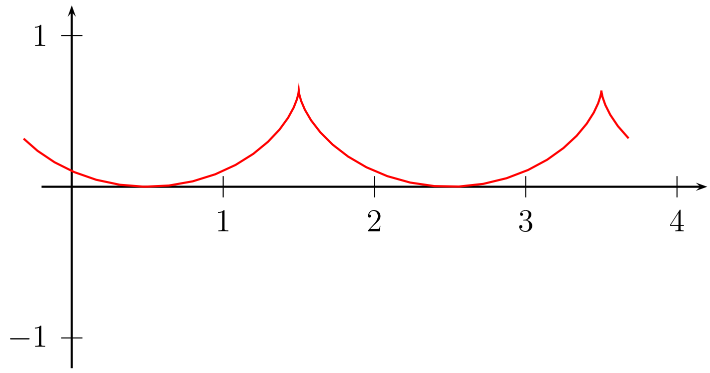


FIGURE 1.6 – Courbe de l'exemple 2 avec $R = \frac{1}{\pi}$.

1.2.2 Étude locale

Régularité

Soit $F : I \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (x(t), y(t))$ une application. On dit que F est continue en $t_0 \in I$ (resp. sur I) si les deux fonctions $x(.)$ et $y(.)$ le sont en t_0 (resp. sur I). De même, on dit que F est dérivable en t_0 si ses composantes le sont et on note alors $F'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$.
Par application de la formule de Taylor, si F est $n-$fois dérivable sur un voisinage de t_0 alors on a

$$\begin{cases} x(t) &= x(t_0) + (t-t_0)x'(t_0) + \cdots + \dfrac{(t-t_0)^n}{n!}x^{(n)}(t_0) + (t-t_0)^n\varepsilon_1(t-t_0) \\ y(t) &= y(t_0) + (t-t_0)y'(t_0) + \cdots + \dfrac{(t-t_0)^n}{n!}y^{(n)}(t_0) + (t-t_0)^n\varepsilon_2(t-t_0) \end{cases}$$

avec $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon_j(t-t_0) = 0$ pour $j = 1, 2$.
Autrement dit, on a

$$F(t) = F(t_0) + (t-t_0)F'(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}F^{(n)}(t_0) + (t-t_0)^n\varepsilon(t-t_0).$$

Définition 1.3 *1. Un point $F(t_0)$ est dit un point régulier si $F'(t_0) \neq 0$. Il est dit singulier dans cas contraire (i. e. $F'(t_0) = 0$).*

2. *On appelle premier invariant de F en t_0 le premier entier $p \geq 1$ tel que $F^{(p)}(t_0) \neq 0$.*
3. *On appelle deuxième invariant de F en t_0 le premier entier $q \geq p$ tel que $F^{(p)}(t_0)$ et $F^{(q)}(t_0)$ soient non colinéaires donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.*

On fait un changement de repère, on travail dans la nouvelle base $(F^{(p)}(t_0), F^{(q)}(t_0))$ au lieu de (O, i, j).
La formule de Taylor-Young à l'ordre p s'écrit :

$$F(t) - F(t_0) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} F^{(p)}(t_0) + o\left((t-t_0)^p\right).$$

Comme conséquence, la droite tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en $F(t_0)$ a la direction de $F^{(p)}(t_0)$ et est caractérisée par l'équation :

$$\begin{vmatrix} x(t) - x(t_0) & x^{(p)}(t_0) \\ y(t) - y(t_0) & y^{(p)}(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire $y^{(p)}(t_0)(x(t) - x(t_0)) - x^{(p)}(t_0)(y(t) - y(t_0)) = 0$.
De même, la formule de Taylor-Young à l'ordre q s'écrit :

$$\begin{aligned} F(t) - F(t_0) &= \frac{(t-t_0)^p}{p!} F^{(p)}(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^q}{q!} F^{(q)}(t_0) + o\left((t-t_0)^q\right) \\ &= \frac{(t-t_0)^p}{p!} F^{(p)}(t_0) \left(1 + \alpha_1(t-t_0) + \cdots + \alpha_{q-p-1}(t-t_0)^{q-p-1}\right) \\ &\quad + \frac{(t-t_0)^q}{q!} F^{(q)}(t_0) + o\left((t-t_0)^p\right) \\ &= \frac{(t-t_0)^p}{p!} F^{(p)}(t_0)(1 + \eta(t-t_0)) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} F^{(q)}(t_0) + o\left((t-t_0)^p\right). \end{aligned}$$

Comme conséquence, on peut distinguer quatre cas :

1. *Premier cas : p et q sont impairs.* Alors si $t > t_0$ on a $(t-t_0)^p > 0$ et $(t-t_0)^q > 0$ mais si $t < t_0$ on a $(t-t_0)^p < 0$ et $(t-t_0)^q < 0$. Ce qui donne que le point $F(t_0)$ est un **point d'inflexion** (voir figure 1.7).
2. *Deuxième cas : p est impair et q est pair.* Alors si $t > t_0$ on a $(t-t_0)^p > 0$ et $(t-t_0)^q > 0$ mais si $t < t_0$ on a $(t-t_0)^p < 0$ et $(t-t_0)^q > 0$. Ce qui donne que le point $F(t_0)$ est un **point ordinaire** (voir figure 1.8).
3. *Troisième cas : p est pair et q est impair.* Alors si $t > t_0$ on a $(t-t_0)^p > 0$ et $(t-t_0)^q > 0$ mais si $t < t_0$ on a $(t-t_0)^p > 0$ et $(t-t_0)^q < 0$. Ce qui donne que le point $F(t_0)$ est un **point de rebroussement de première espèce** (voir figure 1.9).
4. *Quatrième cas : p et q sont pairs.* Alors si $t > t_0$ on a $(t-t_0)^p > 0$ et $(t-t_0)^q > 0$ mais si $t < t_0$ on a $(t-t_0)^p > 0$ et $(t-t_0)^q < 0$. Ce qui donne que le point $F(t_0)$ est un **point de rebroussement de deuxième espèce** (voir figure 1.10).

1.2.3 Branches infinies

On dit que la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ possède une branche infinie quand t tend vers $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si $\lim_{t \to t_0} |x(t)| + |y(t)| = +\infty$. Trois cas se présente :

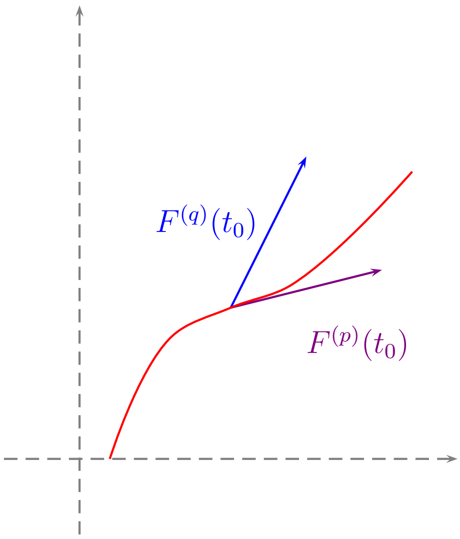


Figure 1.7 – Point d'inflexion

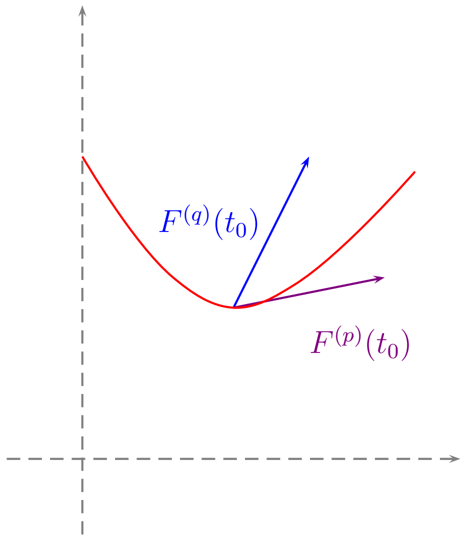


Figure 1.8 – Point ordinaire

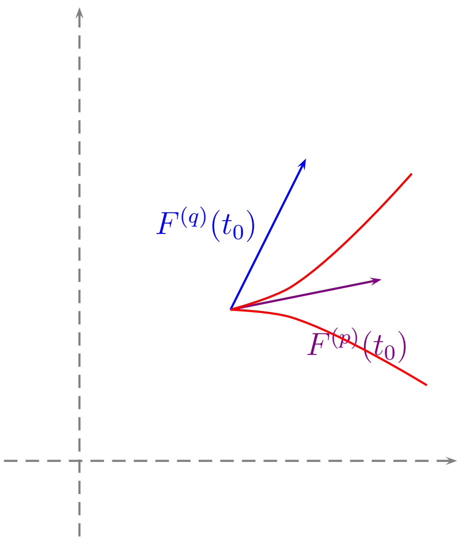


Figure 1.9 – Point de rebroussement de première espèce.

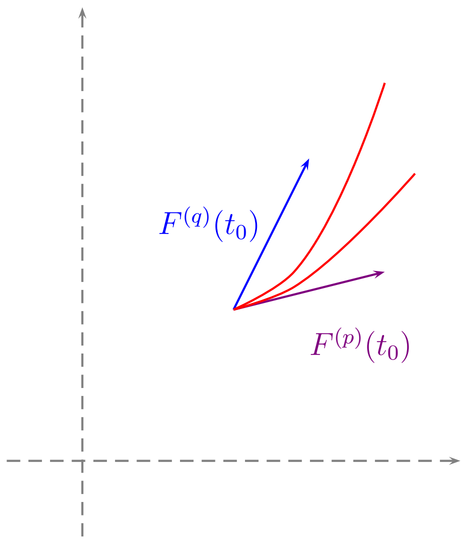


Figure 1.10 – Point de rebroussement de deuxième espèce.

1. Si $\lim_{t\to t_0} x(t) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) = \infty$ alors la droite d'équation $x = \ell$ est une asymptote (horizontale) à la courbe.
2. Si $\lim_{t\to t_0} y(t) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t\to t_0} x(t) = \infty$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote (verticale) à la courbe.
3. Si $\lim_{t\to t_0} y(t) = \infty$ et $\lim_{t\to t_0} x(t) = \infty$ alors on cherche $\mathfrak{a} = \lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$. Ainsi on a trois sous-cas :
   - Si $\mathfrak{a} = 0$, on a une branche parabolique de direction (Ox).
   - Si $\mathfrak{a} = \infty$, on a une branche parabolique de direction (Oy).
   - Si $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^*$, on regarde $\mathfrak{b} = \lim_{t\to t_0} y(t) - \mathfrak{a}x(t)$.
     - Si $\mathfrak{b} \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}$ est une asymptote à la courbe.
     - Si $\mathfrak{b} = \infty$ alors la courbe admet une branche parabolique de direction la droite

d'équation $y = \mathfrak{a}x$.

Pour tracer la courbe, on a besoin parfois de déterminer son intersection avec les axes : pour chercher les points de l'axes (Ox), il suffit de résoudre l'équation $y(t) = 0$ cependant, pour ceux de (Oy), on résoud l'équation $x(t) = 0$.

Il est parfois nécessaire de déterminer les points doubles, c'est les points où la courbe passe au moins deux fois ; on résoud alors le système $F(t) = F(t')$

1.3 Exemples

1.3.1 Exemple 1

Étude de la courbe paramétrée définie par :

$$F(t) = \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2 - a^2}{at} \\ y(t) = \left(\log(t) - \log(a)\right)^3 \end{cases} \qquad a > 0.$$

On a F est définie sur $]0, +\infty[$.

Réduction du domaine d'étude

On a

$$x\left(\frac{a^2}{t}\right) = -x(t), \quad y\left(\frac{a^2}{t}\right) = -y(t)$$

de plus, si t parcours $]0, a]$ alors $\frac{a^2}{t}$ parcours $[a, +\infty[$. Donc il suffit d'étudier la courbe sur $]0, a]$ et terminer la courbe par la symétrie centrale $\mathcal{S}_O$.

Tableau des variations

On a F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et

$$x'(t) = \frac{t^2 + a^2}{at^2} \geq 0, \quad y'(t) = \frac{3}{t}(\log(t) - \log(a))^2 \geq 0.$$

D'où le tableau de variations :

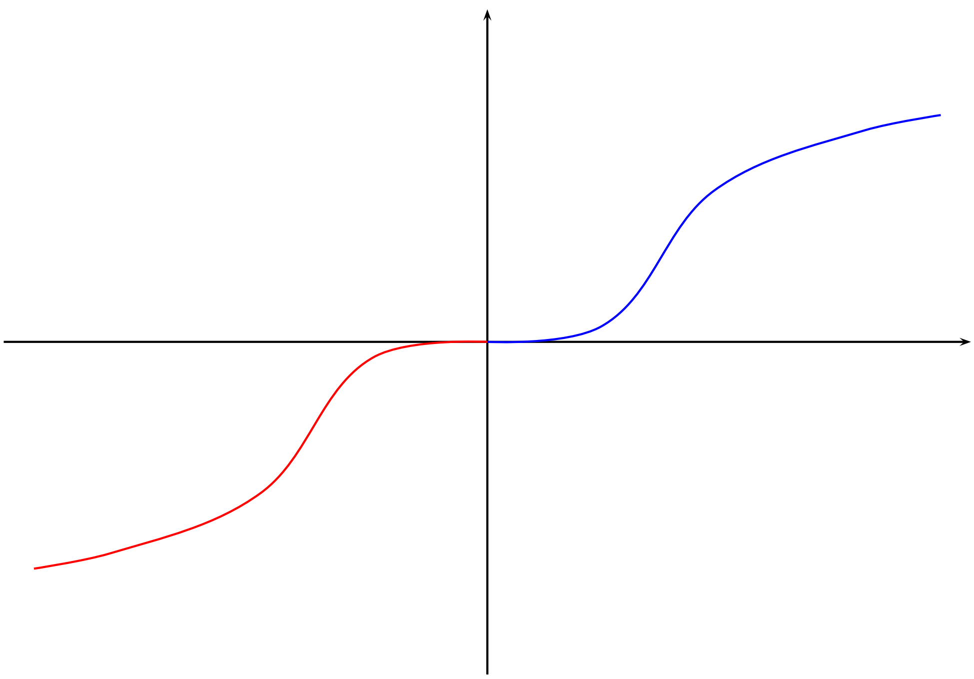
t	0		a
$x'(t)$		$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0
$y'(t)$		$+$	0
$F^{(p)}(t)$			$(.,0)$

Branches infinies

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(\log(t)-\log(a))^3}{\frac{t^2-a^2}{at}} = 0.$$

Donc la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) lorsque $t \to 0^+$.
Par symétrie, la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) lorsque $t \to +\infty$.

Traçage de la courbe



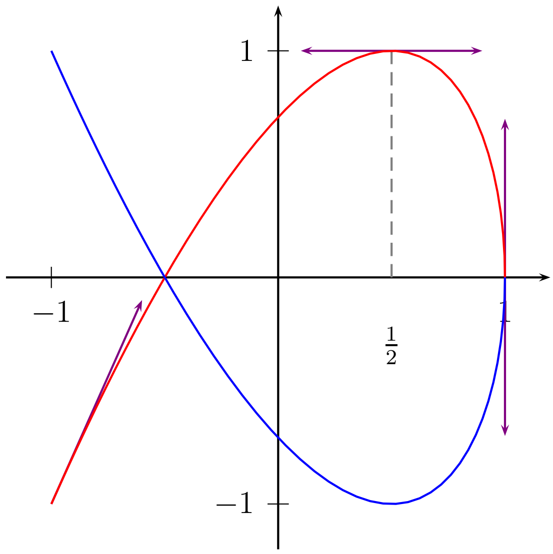
1.3.2 Exemple 2

Étude de la courbe plane définie par :

$$G(t) = \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{array} \right.$$

G est définie sur $\mathbb{R}$. Comme G est périodique de période 2π alors il suffit d'étudier la fonction sur $[-\pi, \pi]$. Par parité, on fait l'étude sur $[0, \pi]$ et on termine par la symétrie $\mathcal{S}_{(Ox)}$. De plus comme $G(\pi - t) = G(t)$ alors on restreint l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$.
D'autre part on a $x'(t) = -2\sin(2t)$ et $y'(t) = 3\cos(3t)$ ce qui donne le tableau des variations et la courbe

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0
$x(t)$	1		$\frac{1}{2}$		-1
$y(t)$	0		1		-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0
$G^{(p)}(t)$	$(0,+)$		$(-,0)$		$(4,-9)$



1.3.3 Exemple 3

Étude de la courbe plane définie par :

$$H(t) = \begin{cases} x(t) = (t-1)^2 e^t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}$$

H est définie sur $\mathbb{R}$. De plus H est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$H'(t) = \begin{cases} x'(t) = 2(t-1)e^t + (t-1)^2 e^t = (t-1)e^t(t+1) = (t^2-1)e^t \\ y'(t) = 2t \end{cases}$$

D'où le tableau de variations est

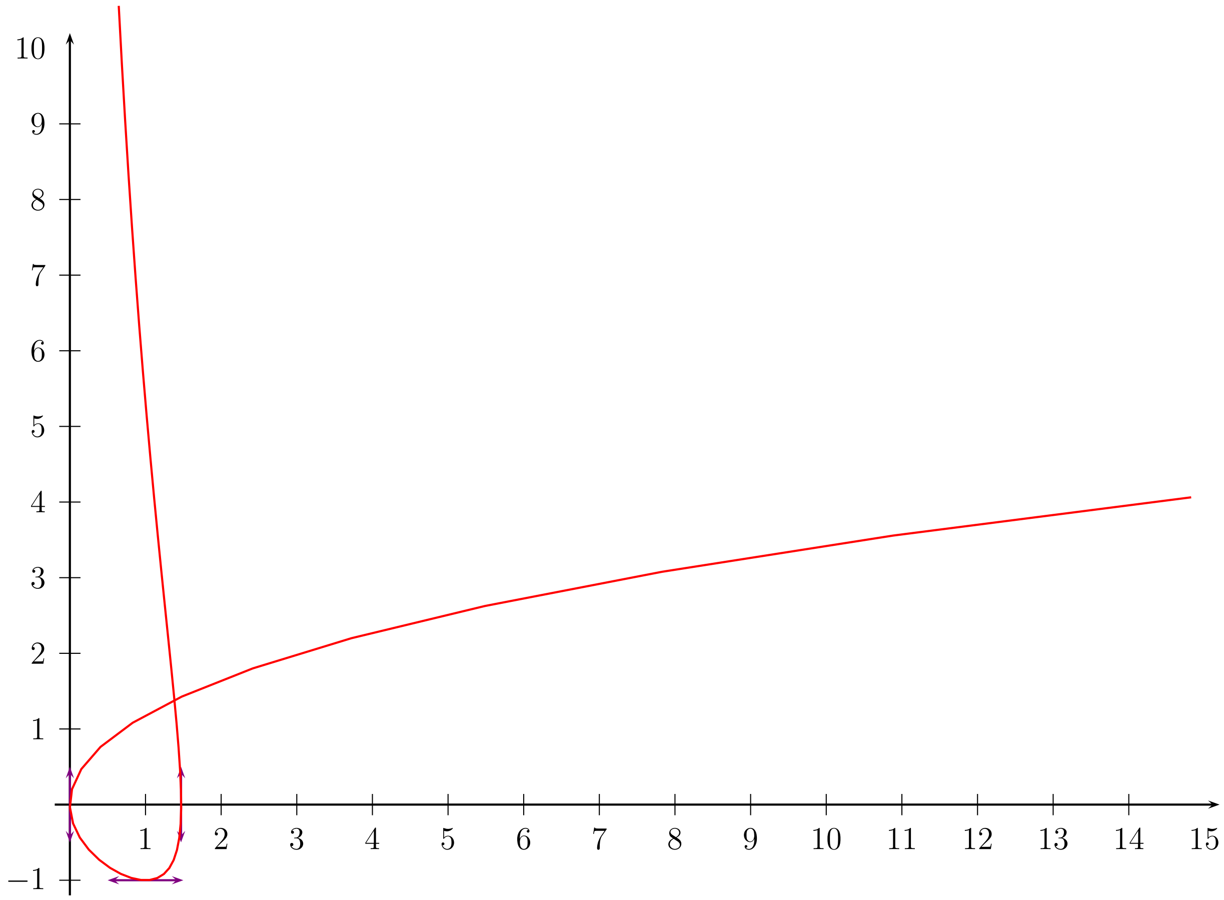
t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x(t)$	0		$\frac{4}{e}$		1		0		$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$		0		-1		0		$+\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$H^{(p)}(t)$			$(0,-)$		$(-,0)$		$(0,+)$		

On a $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = 0$. Ce qui donne que la droite d'équation $x = 0$ est une

asymptote verticale de la courbe.
Quand $t \to +\infty$ on a $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$. On calcul donc

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2-1}{(t-1)^2 e^t} = 0$$

Par suite on a une branche parabolique de direction (Ox).



1.3.4 Exemple 4

Étude des exemples suivants :

$$K(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(t)\cos(2t) \\ y(t) = \cos(2t)\sin(t) \end{cases} , \quad L(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \cos(\dfrac{t}{3}) + \sin(\dfrac{t}{3}) \end{cases}$$

Étude de K

K est définie sur $\mathbb{R}$ et est périodique de période 2π donc l'étude sera faite sur $[-\pi, \pi]$. Comme $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ alors on a une symétrie axiale par rapport à (Ox) et donc l'étude est réduite à $[0, \pi]$. De plus on a $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$ donc on a une symétrie axiale par rapport à (Oy) et donc l'étude est réduite à $[0, \frac{\pi}{2}]$. Enfin, comme $x(\frac{\pi}{2} - t) = -y(t)$ et $y(\frac{\pi}{2} - t) = -x(t)$ donc on a une symétrie axiale par rapport à la deuxième

bissectrice et donc l'étude est réduite à $[0, \frac{\pi}{4}]$.
Pour les dérivées, on a

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\sin(t)\cos(2t) - 2\cos(t)\sin(2t) = -\sin(t)(2\cos^2(t)-1) - 4\cos^2(t)\sin(t) \\ &= \sin(t)(1+6\cos^2(t)). \end{aligned}$$

Donc $x'(t) =\leq 0, \quad \forall t \in [0, \dfrac{\pi}{4}]$ et $x'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0$. De même,

$$\begin{aligned} y'(t) &= -2\sin(2t)\sin(t) + \cos(2t)\cos(t) = -4\cos(t)\sin^2(t) + (1-2\sin^2(t))\cos(t) \\ &= \cos(t)(1-6\sin^2(t)). \end{aligned}$$

Donc $y'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = t_0 := \arcsin(\frac{1}{\sqrt{6}})$ et $y'(t) \geq 0 \Longleftrightarrow t \in [0, t_0]$.
D'où le tableau de variations :

t	0		$\arcsin(\frac{1}{\sqrt{6}})$		$\dfrac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	
$x(t)$	1	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{10}{3}}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$K^{(p)}(t)$	$(0,+)$		$(-,0)$		$(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Comme $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ et $\cos(t) = \sqrt{1-\sin^2(t)}$ alors on a

$$x(t_0) = \frac{2}{3} \times \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}} \approx 0.609, \quad y(t_0) = \frac{2}{3} \times \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.272.$$

Étude de L

On a

$$L(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \cos(\dfrac{t}{3}) + \sin(\dfrac{t}{3}) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(\dfrac{t}{3}) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\dfrac{t}{3})\right) = \sqrt{2}\sin(\dfrac{t}{3} + \dfrac{\pi}{4}). \end{cases}$$

Le domaine de définition est $\mathbb{R}$ et L est périodique de période 6π. Il suffit détudier cette courbe sur $[-3\pi, 3\pi]$ et la courbe sera entièrement déterminé. De plus comme on a $x(t+3\pi) = -x(t)$ et $y(t+3\pi) = -y(t)$ alors il suffit d'étudier cette courbe sur $[0, 3\pi]$ et terminer par la symétrie centrale $\mathcal{S}_O$.

$$L'(t) = \begin{cases} x'(t) = \sin(t) \\ y'(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\cos(\dfrac{t}{3} + \dfrac{\pi}{4}). \end{cases}$$

D'où le tableau de variations de L est

t	0		$\frac{3\pi}{4}$		π		2π		3π
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$x(t)$	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1
$y(t)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\searrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$L^{(p)}(t)$	$(0,+)$		$(-,0)$		$(0,-)$		$(0,-)$		$(0,-)$

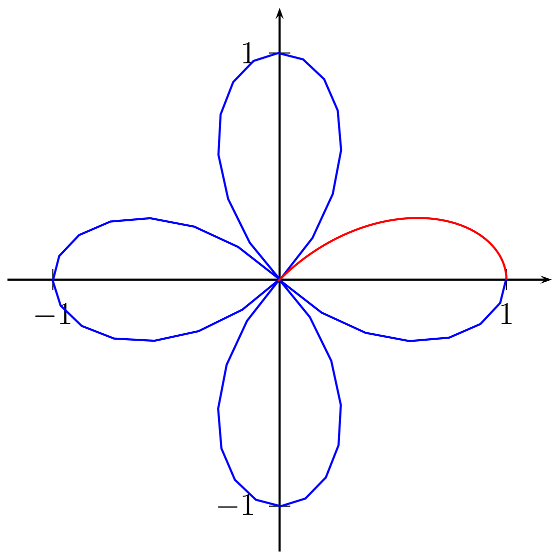


FIGURE 1.11 – Courbe de l'exemple 4 (à gauche).

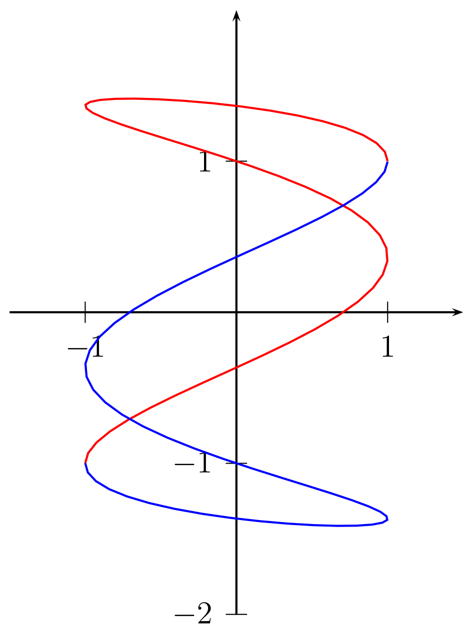


FIGURE 1.12 – Courbe de l'exemple 4 (à droite).

Exemple 5

Étudier et représenter graphiquement la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\sin(t)} \\ y(t) = \tan(\frac{t}{3}) \end{cases}$$

t	2π		$\frac{5\pi}{2}$		3π		4π		$\frac{9\pi}{2}$
$x'(t)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$		$\|$	$+$	0
$x(t)$	0	↗	1	↘	0		0	↗	1
$y(t)$	$-\sqrt{3}$	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	0		$\sqrt{3}$	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$+$		$+$				$+$	

1.4 Exercices

Étudier et tracer les courbes paramétrées plane suivantes en précisant à chaque exemple la nature des points singuliers, points doubles et les courbes asymptotes s'il y on a :

1. Cœur :
$$\begin{cases} x(t) = 4\cos^2(t)\sin^3(t) \\ y(t) = \cos^2(t)(3-2\cos^2(t)) \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)\cos(2t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x(t) = \cos^2(t)+\cos(t) \\ y(t) = \sin(t)-\sin^2(t) \end{cases}$$

4. Poisson :
$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2(t) \\ y(t) = \sin(t)\cos(t) \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \dfrac{\sin(t)}{2+\cos(t)} \end{cases}$$

6. Casque :
$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \dfrac{\cos^2(t)}{2-\cos(t)} \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x(t) = a(1-2t^2) \\ y(t) = b(3t-4t^3) \end{cases}, \quad a, b > 0$$

8.
$$\begin{cases} x(t) &= -3t^5+6t^4+5t^3-12t^2 \\ y(t) &= 1-t^4 \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{28t}{(3t-1)(t^2+3)} \\ y(t) &= \dfrac{28t^2}{(3t-1)(t^2+3)} \end{cases}$$

10. Folium de Descartes :
$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) &= \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

11. Strophoïde droite :
$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2-1}{t+1} \\ y(t) &= t\,\dfrac{t^2-1}{t+1} \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^3}{t-1} \\ y(t) &= \dfrac{t(t-2)}{t-1} \end{cases}$$

On pourra la comparer avec la parabole d'équation : $x = y^2+3y+5$

13.
$$\begin{cases} x(t) &= t^2+\dfrac{1}{t} \\ y(t) &= t+2-\dfrac{1}{t} \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} x(t) &= t^2+\dfrac{2}{t} \\ y(t) &= \left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2 \end{cases}$$