UNIVERSITÉ DE GABÈS FACULTÉ DES SCIENCES DE GABÈS	FSG كلية العلوم بقابس Faculté des Sciences de Gabès	A.U. : 2015-2016

Éléments de correction de l'examen Final

Section: LFMa3
Épreuve de : Probabilités et Statistique

Nature de l'épreuve : D.C.☐E.F.☒	**Documents :**	**autorisés**	☐	**non autorisés**	☒
Date de l'épreuve : 25/05/2016	**Calculatrice :**	**autorisée**	☐	**non autorisée**	☒
Durée de l'épreuve : 02 Heure	**Session :**	**principale**	☒	**contrôle**	☐

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désignera un espace de probabilité.

Exercice 1 : (6 pts)

1. Montrer que si X et Y sont deux v.a.r. presque-sûrement égales, alors elles ont la même loi.

Pour tout borélien A; on a

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in A,\ X = Y) = \mathbb{P}(Y \in A).$$

---

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-2|x|}$ et X une variable aléatoire réelle de densité f. Donner la loi de la variable aléatoire $Y = |X|$.

Pour $t \leq 0$, on a $F_Y(t) = \mathbb{P}[Y \leq t] = 0$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$; on a

$$F_Y(t) = \mathbb{P}[Y \leq t] = \mathbb{P}[-t \leq X \leq t] = 2\int_0^t e^{-2x}dx = 1 - e^{-2t}.$$

Donc Y suit la loi exponentielle de paramètre 2. ou encore $\Gamma(2, 1)$.

---

3. Soient X et Y deux v.a.r. de même loi, g une application borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les v.a.r. $g(X)$ et $g(Y)$ ont la même loi.

On a pour toute f, application borélienne bornée,

$$\mathbb{E}[f(g(X))] = \mathbb{E}[f \circ g(X)] = \mathbb{E}[f \circ g(Y)] = \mathbb{E}[f(g(Y))].$$

Donc X et Y ont la même loi

---

4. Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y définie par $Y = F(X)$ où F est la fonction de répartition de la variable X.

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathbb{P}[Y \leq F^{-1}(t)] = F(F^{-1}(t)) = t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

C'est la loi uniforme sur $[0, 1]$

---

5. Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite. Le couple $(X, -X)$ admet il une densité?

Non, car sinon on aurait $\mathbb{P}[(X, -X) \in \Delta] = 0$, avec $\Delta = \{(x, -x); \, x \in \mathbb{R}\}$ ce qui est absurde

---

6. Soit X une variable aléatoire telle que X et $-X$ admettent la même loi et Y une v.a. indépendante de X telle que $\mathbb{P}[Y = 1] = 1 - \mathbb{P}[Y = -1] = \frac{1}{2}$. Déterminer la loi de XY en fonction de celle de X.

La v.a. XY admet la même loi que X car

$$F_{XY}(t) = \mathbb{P}[X \leq t, Y = 1] + \mathbb{P}[-X \leq t, Y = 1] = \frac{1}{2}[F_X(t) + F_{-X}(t)] = F_X(t).$$

Exercice 2 :(7 pts) Soient X et Y deux v.a. normales centrées réduites indépendantes

1. Trouver la constante α pour laquelle les v.a. $Z = X + \alpha Y$ et $Q = X - Y$ sont indépendantes.

On a $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$, $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] = 1 = Var(Y)$ et $\mathbb{E}[XY] = 0$.

Comme (Z, Q) est un vecteur Gaussien; alors $Z \perp Q$ ssi $cov(Z; Q) = 0$, ce qui donne $\alpha = 1$

2. Calculer la matrice de covariance du vecteur (Z, Q).

$$\Xi_{(Z,Q)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut également l'ecrire en fonction de α.

3. Déterminer le moment d'ordre 4 de X

$\mathbb{E}[X^4] = i^4 \Phi_X^{(4)}(0) = 3$

4. Calculer $E[Q^2]$ et $Var[Q^2]$.

---

on a $Q \sim \mathcal{N}(0,2)$ donc $N = \frac{\sqrt{2}}{2} Q \sim \mathcal{N}(0,1)$ et on a:

$$\mathbb{E}[Q^2] = Var(Q) = 2$$

et

$$Var(Q^2) = \mathbb{E}[Q^4] - \mathbb{E}[Q^2]^2 = 4\mathbb{E}[N^4] - 2^2 = 12 - 4 = 8.$$

---

5. Donner la loi de $U = \frac{1}{4} Q^2$.

Comme $U = \left(\frac{Q}{2}\right)^2$ et $\frac{Q}{2} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$. On a

$$f_U(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \{ f_{\frac{Q}{2}}(\sqrt{t}) - f_{\frac{Q}{2}}(-\sqrt{t}) \} 1_{\{t>0\}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} 1_{\{t>0\}}.$$

C'est la loi $\Gamma(1; \frac{1}{2})$.

Exercice 3 (7 pts): Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$. On pose $Z_1 = X_1$ et pour $n \geq 1$; $Y_n = X_n^2 e^{X_n}$ et $Z_n = \theta Z_{n-1} + X_n$.

1. Déterminer la loi de la v.a $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - m\right)$.

C'est une combinaison linéaire de v.a. gaussiennes indépendantes donc c'est une v.a. gaussienne. En calculant l'espérance et la variance on trouve la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

---

2. Déterminer la loi de Z_n; $n \geq 1$

$Z_n \sim \mathcal{N}((\theta^{n-1} + \ldots + \theta + 1)m, \ (\theta^{2(n-1)} + \ldots + \theta^2 + 1)\sigma^2)$

---

3. Etudier la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$

On étudie la convergence de la fonction caractéristique suivant la valeur de θ

---

4. On supposera maintenant que $\sigma^2 = 1$.

   (a) Donner $E(Y_1)$.

   $\mathbb{E}[X_1^2 e^{X_1}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{x-\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{1}{2}} \{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx \} = 2e^{\frac{1}{2}}$

   (b) Montrer que la suite $(\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} Y_i)_{n \geq 1}$ converge $\mathbb{P}-$presque sûrement vers une limite que l'on déterminera.

   Les v.a. $Y_n;\ n \geq 1$ sont i.i.d. Par L.F.G.N, on a $\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} Y_i \to^{(\mathbb{P}-p.s.)} \mathbb{E}[Y_1] = 2e^{\frac{1}{2}}$.

Betisier:

- $\mathbb{E}[X_1^2 e^{X_1}] = \mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[e^{X_1}]$ complètement faux
- $\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[g(Y)]$ alors $g(X)$ et $g(Y)$ ont la même loi. C'est pas suffisant !!!
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ et $Var(X) = Var(Y)$ alors X et Y ont même loi. Pas vrai dans le cas général
- Par T.C.L., on a $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - m) \sim \mathcal{N}(0,1)$. Le T.C.L. donne la convergence en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.