

# ***Résistance Des Matériaux***

***(RDM)***

***Université Hassan II Ain Chok***

***Fac. Sciences Casablanca***

***LP : TMBTP***

***Pr.: A. AKEF***

# Chapitre I

**INTRODUCTION**

**GENERALE**

La **Résistance Des Matériaux (RDM)**, est la **science** du **dimensionnement** des pièces ou éléments qui constituent un **ouvrage d'art** ou tout **objet utilitaire**.

Le **génie civil**, domaine de la **création intelligente**, s'appuie essentiellement sur la **RDM** pour la réalisation des ouvrages d'art ou des constructions telles que les **gros œuvres des bâtiments**, les **ponts en béton armé ou métalliques** etc...





# I Statique des corps rigides

## 1) Systeme matériel

### a - Définition

Un **systeme matériel** est un corps, ou un ensemble de corps, ou une partie d'un corps dont-on se propose d'étudier l'équilibre ou le mouvement.

### b - Remarque

Dans ce cours, on se limitera à l'étude des systèmes matériels en **équilibre** ou en **quasi-équilibre** (**hypothèses des petites déformations**).

## 2) Équilibre d'un corps ou d'un système

### a - Définition

L'**équilibre** d'un solide signifie qu'il **ne bouge pas** (dans un référentiel donné) soit :

 aucune translation;

 aucune rotation autour de quelque point (ou pivot) que ce soit.

### b - Remarque

L'**équilibre** d'un système matériel se réalise uniquement grâce aux **forces extérieures** directement appliquées à sa surface limite (**forces de contact**) ou à ses molécules (**forces à distance**). Les forces intérieures ne sont pas pris en compte.

## **c - Transmission des forces**

Les forces sont **transmises** par l'intermédiaire des **surfaces en contact**. On détermine ces forces à partir des conditions d'équilibre en utilisant la **géométrie du corps non déformé**.

On néglige les variations d'angle et de longueur qui résultent de l'application des forces.

### 3) Système isostatique ou hyperstatique

#### a - Système isostatique

Un système est **isostatique** ou statiquement déterminé si le **nombre d'inconnues** (forces), est **égal** au **nombre d'équations d'équilibre**. Le problème est mathématiquement déterminé.

#### b - Système hyperstatique

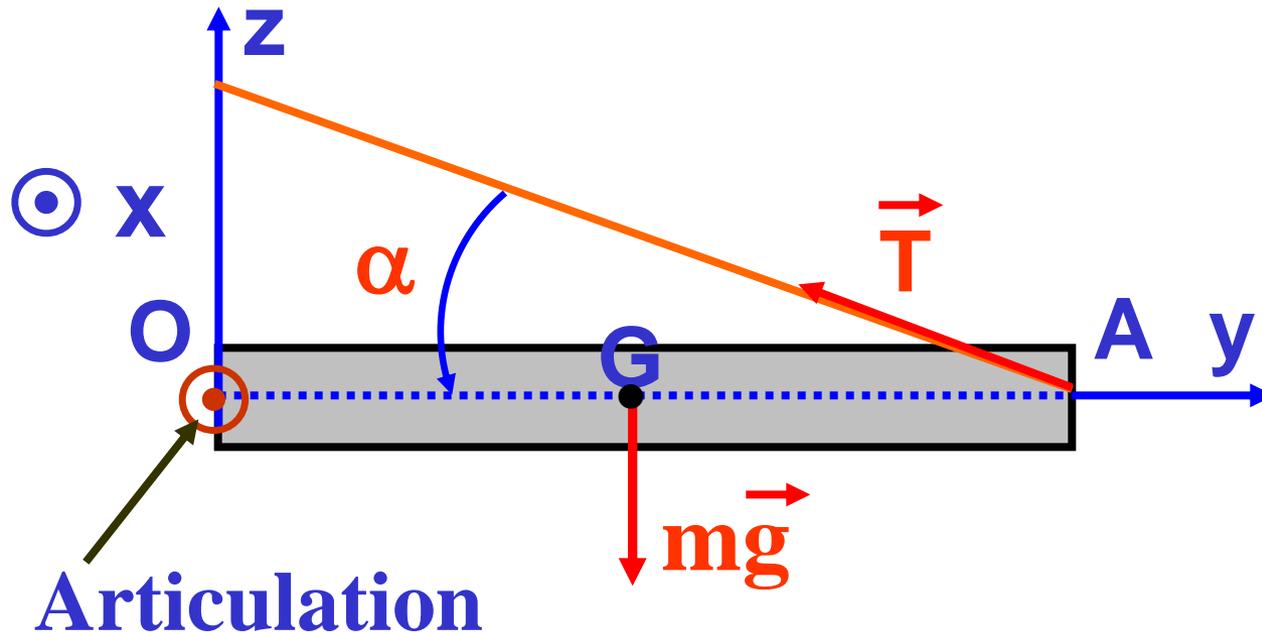
Un système est **hyperstatique** si le **nombre d'inconnues** est **supérieur** au **nombre d'équations d'équilibre**. Le problème est mathématiquement indéterminé. On **lève l'indétermination** en prenant en compte la déformation du système (**petites déformations et compatibilité géométrique**).

## c - Remarque

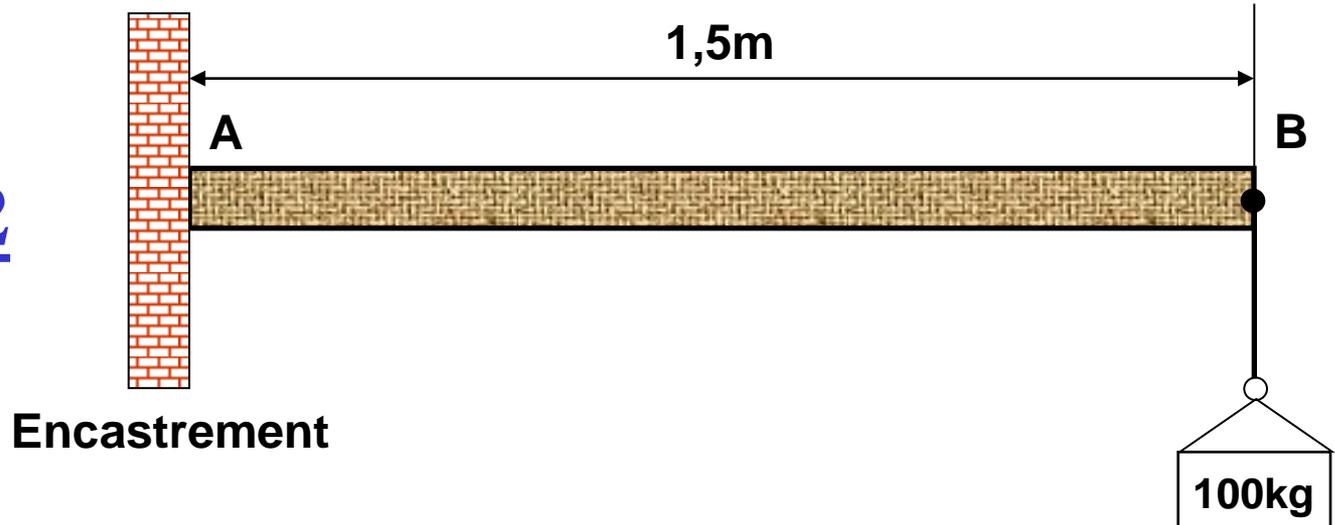
On ne doit faire **aucune hypothèse** sur les **forces extérieures inconnues**. En d'autres termes, on ne connaît ni leurs directions, ni leurs sens, ni leurs intensités. La détermination de ces caractéristiques fait l'objet de la résolution du problème.

# Exercice 1

Déterminer la tension du fil  $\vec{T}$  et la réaction  $\vec{R}$  au point  $O$  pour que la tige  $OA$ , de longueur  $L$  et de masse  $m$ , soit en équilibre ( voir figure ci-dessous). On donne  $\alpha$ .



## Exercice 2



La figure ci-dessus représente une poutre AB encadrée au point A. Au point B, on suspend une masse de 100 kg.

- 1) En négligeant la masse de la poutre, calculer les éléments de réduction du torseur des forces appliquées au point A.
- 2) Refaire le même calcul en tenant compte de la masse de la poutre qui est de 10 kg.

# Chapitre II

## NOTIONS DE BASE

# I Introduction

## 1) Qu'est-ce que la R.D.M.

La résistance mécanique des matériaux (**R.D.M.**), concerne leurs aptitudes à **supporter les efforts extérieurs** auxquelles ils sont soumis (traction, compression, cisaillement, flexion, etc....)

## 2) But de la R.D.M.

Le **but** de la **R.D.M.** est d'assurer qu'on utilise, dans une pièce donnée une **quantité minimale de matériau**, tout en satisfaisant aux exigences suivantes :

**Résistance** - **Rigidité** - **Stabilité**      **Endurance** -  
**Résilience**

## **II** Hypothèses de base

### **1)** Objectif

Ces **hypothèses** permettent de **réduire la complexité** des développements mathématiques tout en conservant une certaine généralité. Ces hypothèses de base concernent la continuité, l'homogénéité, l'isotropie, les déformations et les forces internes du matériau étudié.

## 2) Remarque

Les forces internes, dites **résiduelles** sont souvent présentes dans les matériaux. Elle résultent en général du **processus de fabrication** (pliage, soudage, etc....). On tient compte de ces forces résiduelles en diminuant la force trouvée ou en augmentant le section (On prend une certaine **sécurité**).

### **III Méthode de résolution**

On **résout** un problème de R.D.M. selon une démarche systématique qui comporte **trois étapes fondamentales** :

-  l'étude des forces et des conditions d'équilibre;
-  l'étude des déplacements et de la compatibilité géométrique;
-  l'application des relations forces-déformations (E.L.S.).

## **IV** Contrainte

### **1)** Forces internes

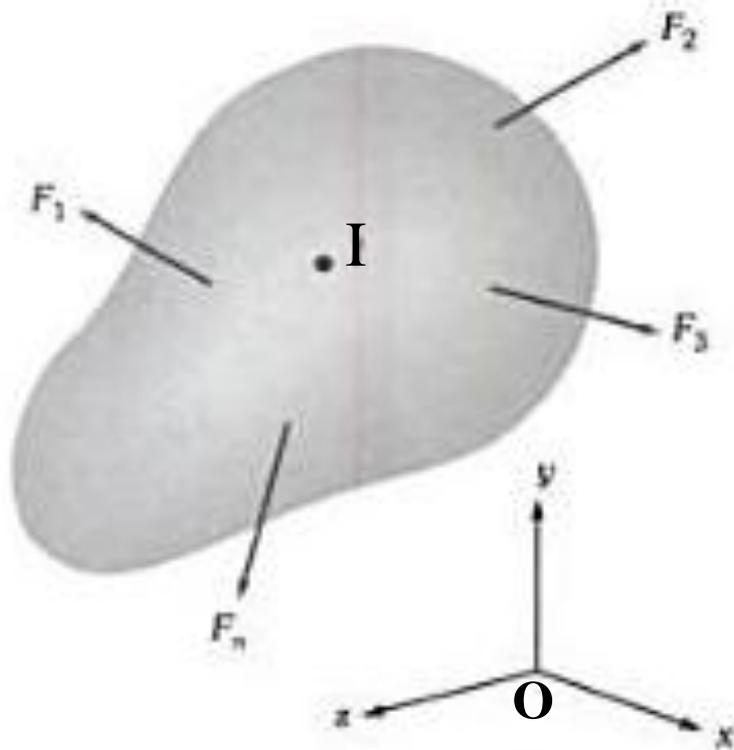
Les **forces internes** prise en compte sont celles due aux sollicitations externes et **capables de déformer** le matériau.

La **RDM** consiste à **dimensionner** le matériau pour qu'il **supporte** l'action des **forces internes** sans se détériorer.

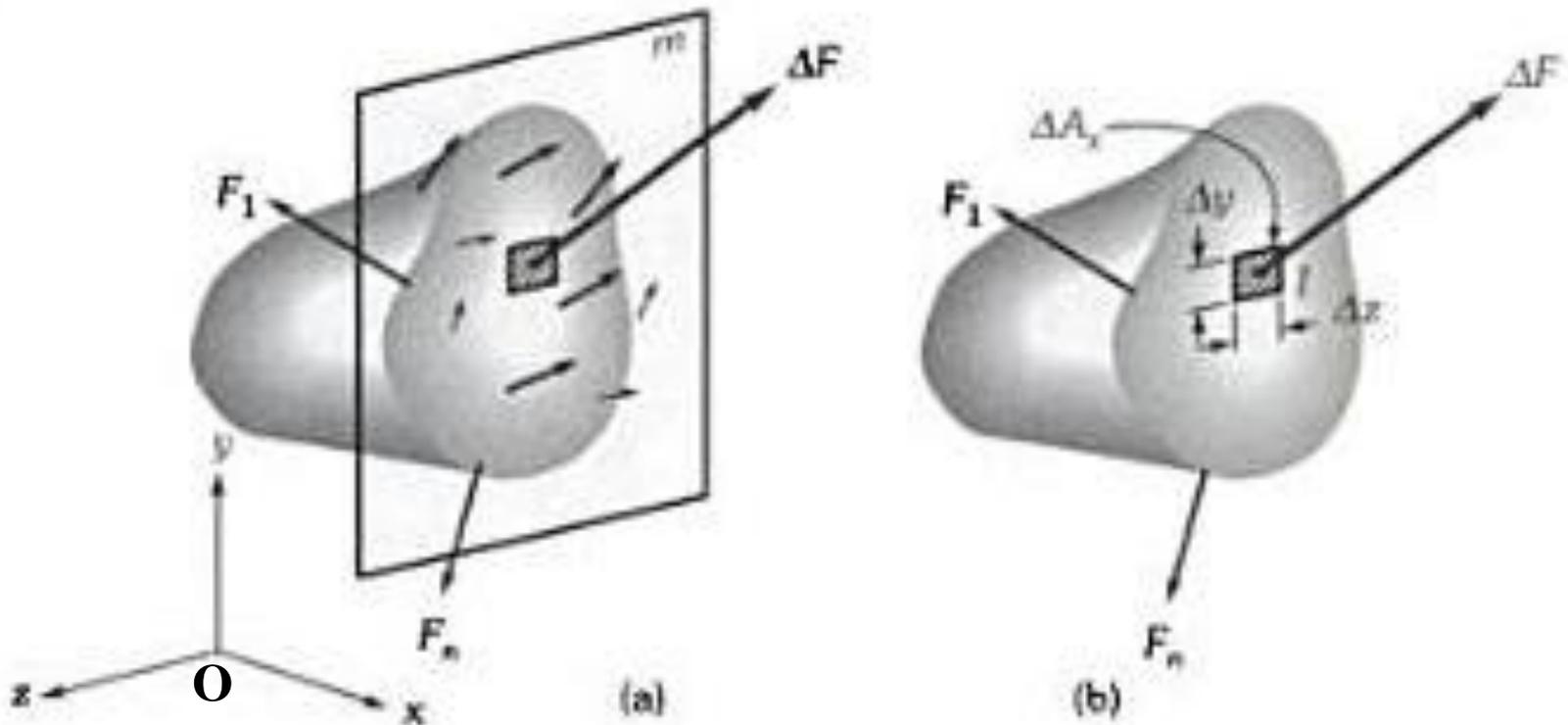
## 2) État des forces internes

On étudie dans un système d'axes  $xyz$ , le point interne  $I$  d'un corps soumis à des forces externes

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$$



Le plan (m) est normal à l'axe des x et passe par I.  
**La section** est soumise à des **forces internes** variant en intensités et en direction d'un point à un autre.

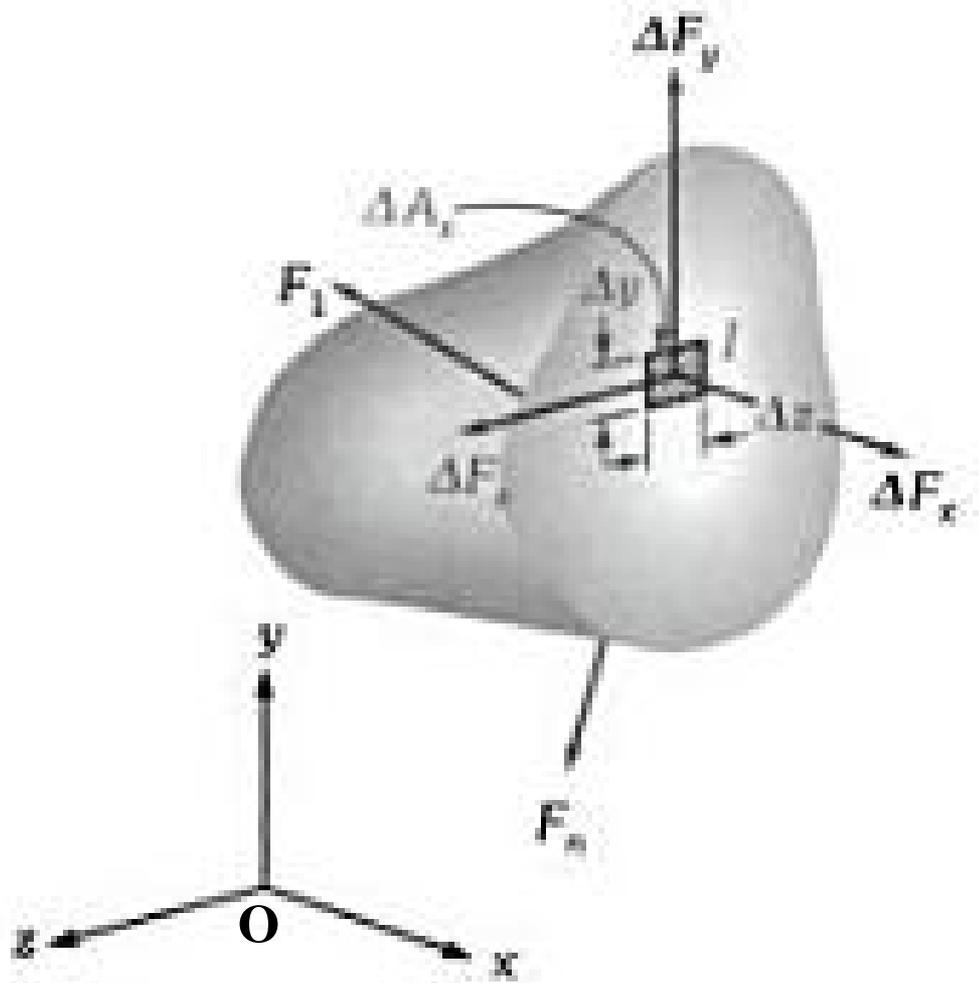


Au point I, une force d'intensité moyenne  $\Delta\vec{F}$  agit sur l'élément de surface  $\Delta A_x$ .

$$\Delta\vec{F} = \Delta\vec{F}_x + \Delta\vec{F}_y + \Delta\vec{F}_z$$

$$\Delta A_x = \Delta y \Delta z$$

L'intensité moyenne de chacune de ces composantes, par unité de surface est :



$$\frac{\Delta F_x}{\Delta A_x}; \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x}; \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x}$$

$(\Delta F_x / \Delta A_x)$  : la force interne agit dans la **direction normale à la face** considérée.

$(\Delta F_y / \Delta A_x$  et  $\Delta F_z / \Delta A_x)$  : la force interne agit **parallèlement à la face** considérée.

Si  $\Delta A_x$  tend vers 0, ces trois rapports tendent vers des **limites** qu'on définit comme étant les composantes des **contraintes** qui agissent sur la surface normale à l'axe des x au point I.

### 3) État de contrainte

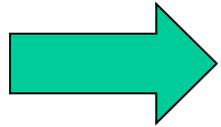
#### a - Définition

Les sollicitations sont quantifiées par la notion de **contrainte  $\sigma$** , qui est l'effort surfacique exercé sur une partie de la pièce en un point par le reste de la pièce.

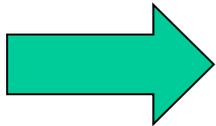
$\sigma$  est homogène à **une pression** et est exprimé en **méga pascal (MPa)** ou en Newton par millimètre carré (**N/mm<sup>2</sup>**).

## **b** – Contrainte normale

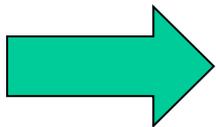
Les contraintes normales notée  $\sigma$ , sont définie par les relations :



$$\sigma_{xx} = \sigma_x = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x}$$



$$\sigma_{yy} = \sigma_y = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_y}$$



$$\sigma_{zz} = \sigma_z = \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_z}$$

## **c – Contrainte de cisaillement**

**La contrainte de cisaillement ou tangentielle notée  $\tau$ , est définie par la relation :**

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x}$$

et

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x}$$

$$\tau_{yx} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y}$$

et

$$\tau_{yz} = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_y}$$

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_z}$$

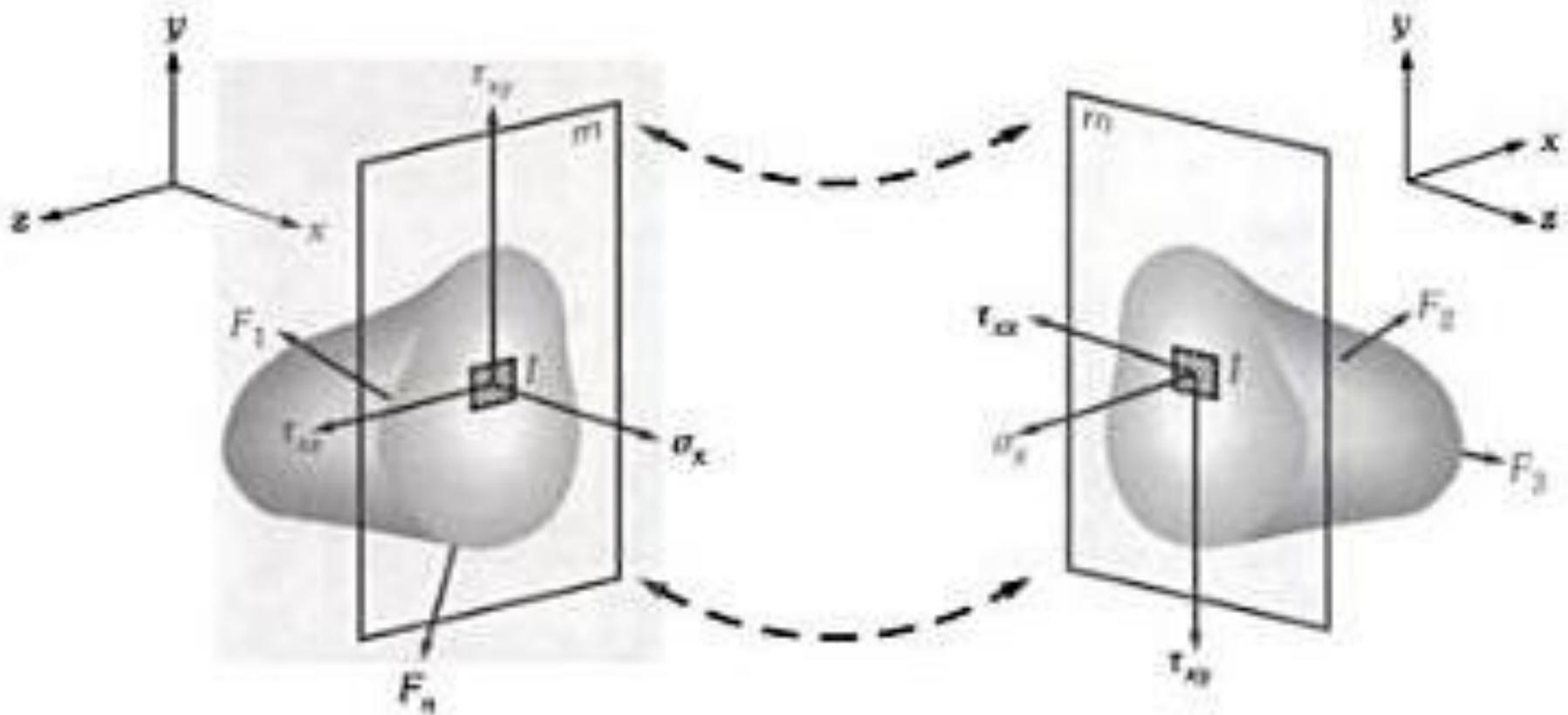
et

$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_z}$$

## **d** – Convention de signe

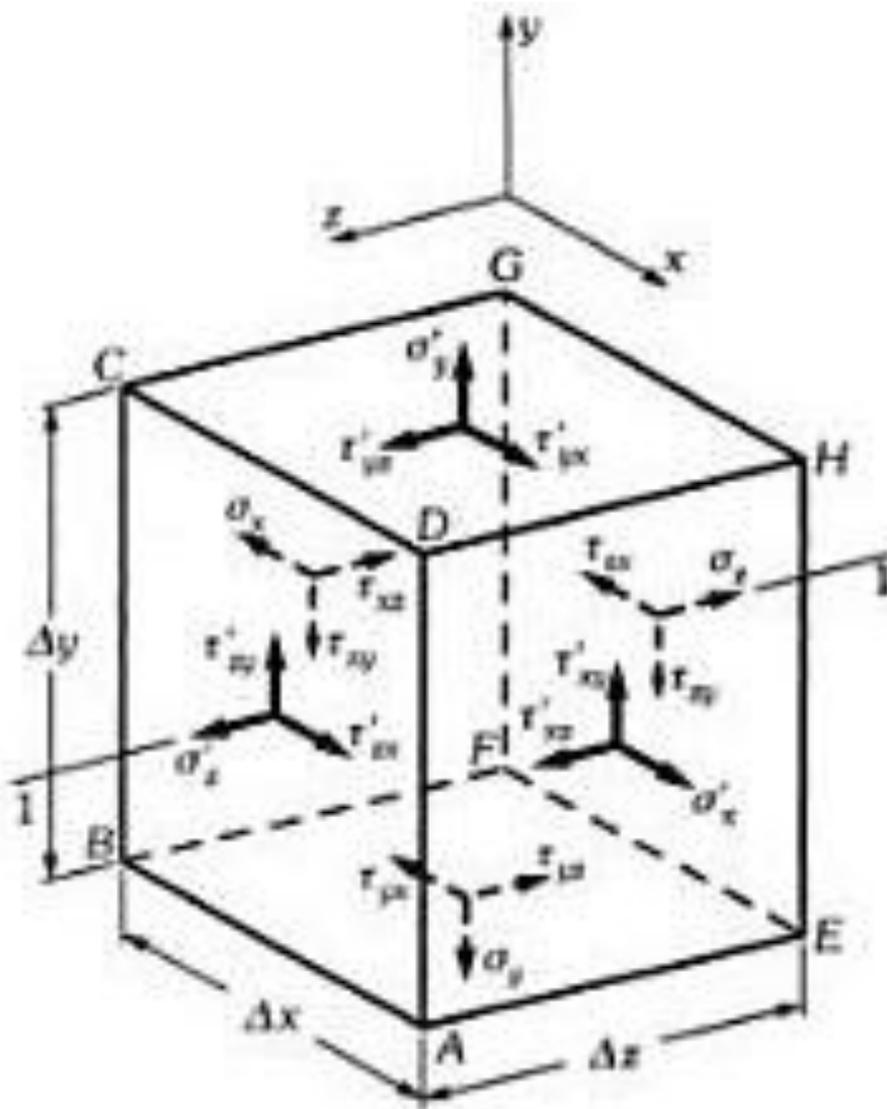
 Une **face** est **positive** lorsque sa **normale externe** est dirigée dans le sens **positif d'un axe**.

 Une **contrainte** est **positive** lorsqu'elle agit dans le sens **positif d'un axe**, sur une **face positive** ou dans le sens **négatif d'un axe** sur une **face négative**.



Les **mêmes** composantes de contrainte agissent au point I sur la partie droite du corps sectionné (principe de la coupe: **solide en équilibre en deux parties**).

## e – État de contrainte en un point



**État de contrainte au point I** montrant toutes les composantes de contraintes sur les faces négatives et leurs contreparties (primées) sur les faces positives. Lorsque les dimensions  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  de l'élément tendent vers zéro, la valeur des composantes primées tend vers celle de leurs contrepartie non primées.

## f – Réciprocité

Les **relations** qui régissent les **contraintes de cisaillement** sont les suivantes :

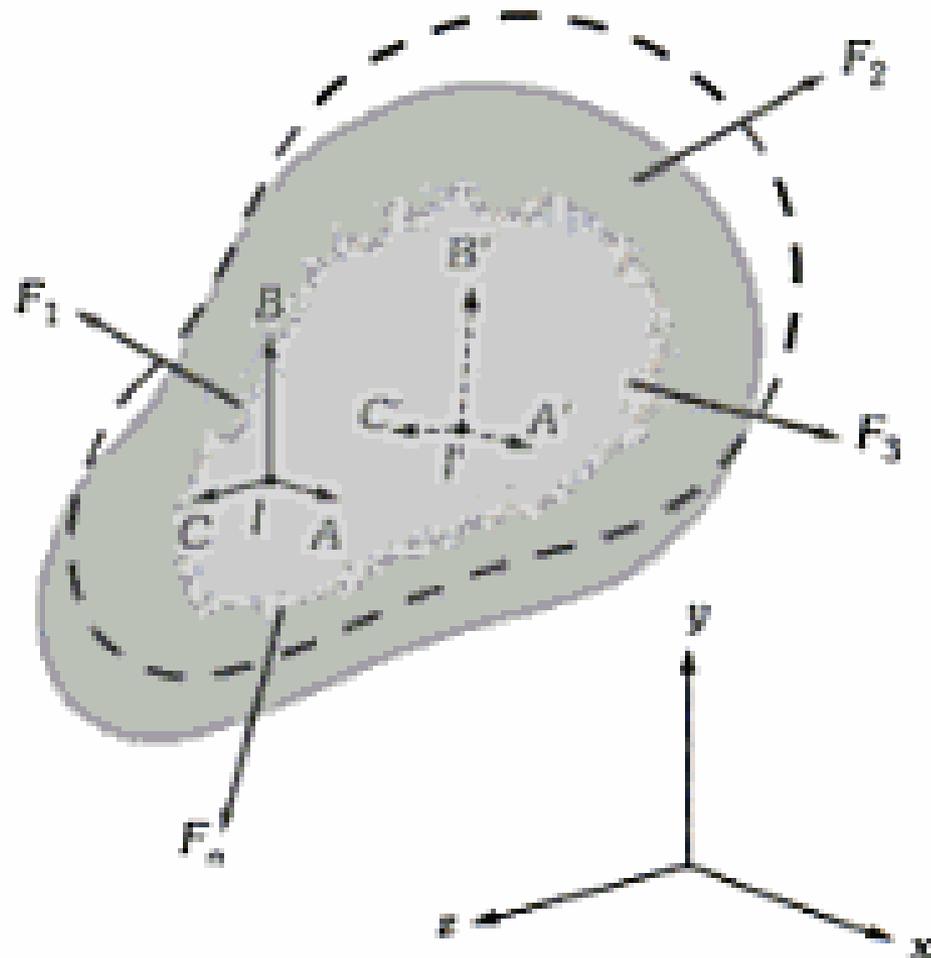


$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} ; \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

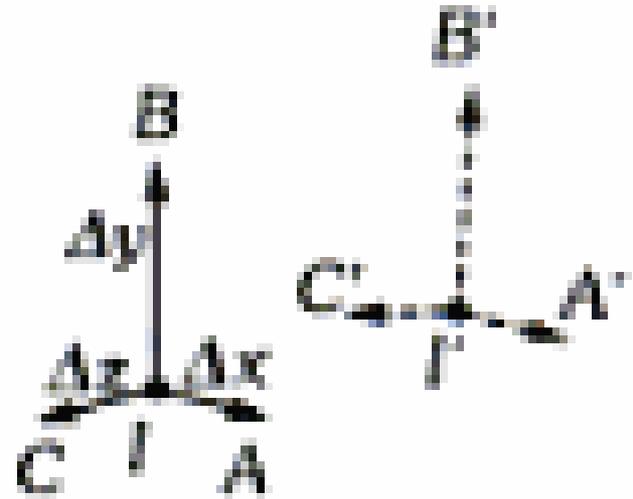
# V Déformation

## 1) Présentation

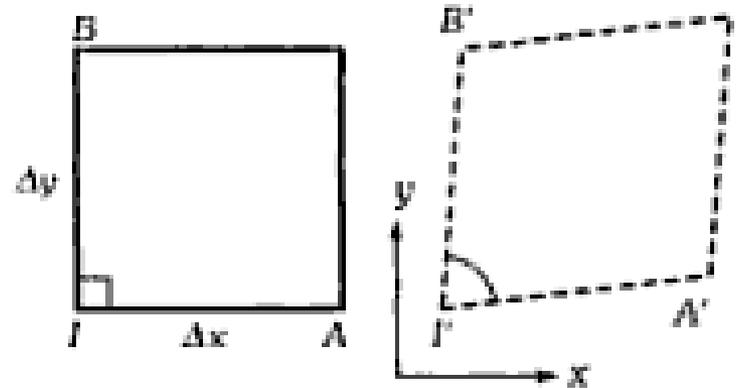
Sous l'action des **forces externes** et des **variations de température**, le **corps se déforme** : le point I se déplace en I', le point A en A', le point B en B' et le point C en C'.



Trois éléments parallèles aux axes de référence **avant déformation** ; leur position relative et leur longueur **après déformation**.



Les **angles** entre les **segments de référence** ne sont plus les mêmes.



## 2) Déformation normale

La **déformation normale** notée  $\varepsilon$  est le quotient de la variation de longueur par la longueur initiale, lorsque celle-ci tend vers zéro.

Les trois  
déformations  
normales :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I'A' - IA}{IA}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I'B' - IB}{IB}$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{I'C' - IC}{IC}$$

### 3) Déformation de cisaillement

La **déformation de cisaillement** notée  $\gamma$  est la tangente de la variation d'un angle originellement droit lorsque les côtés, qui sous-tende l'angle tendent vers zéro.

Les trois déformations de cisaillement

:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \tan \left( \frac{\pi}{2} - \widehat{A'IB'} \right)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \tan \left( \frac{\pi}{2} - \widehat{B'IC'} \right)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \tan \left( \frac{\pi}{2} - \widehat{A'IC'} \right)$$

### 3) Convention de signe

Une **déformation** normale  $\varepsilon$  est **positive** lorsqu'il y a **allongement**.

Une **déformation** de cisaillement  $\gamma$  est **positive**, lorsque l'angle droit, sous-tendu par les côtés dirigés selon le sens positif d'axes de référence, **diminue**.

## **VI** Relations constitutives

### **1)** Notions de base

Les **relations constitutives** décrivent le **comportement** des matériaux et font intervenir les propriétés du matériau utilisé. On distingue les comportements élastique, plastique et visqueux.

En **RDM**, le comportement élastique des matériaux est le plus désiré.

## 2) Loi de Hooke

Elle établit une **corrélation** entre la **déformation absolue** suivant une direction et la **contrainte** dans cette direction.



$$\sigma = E\varepsilon$$

**E** est le module d'élasticité ou module de Young ou module de rigidité.

### 3) Loi de Coulomb

Elle établit une **corrélation** entre la déformation **absolue** de **cisaillement** et la contrainte de cisaillement ou **scission**.



$$\tau = G\gamma$$

**G** est le module d'élasticité en cisaillement ou module d'élasticité transversale ou module de Coulomb.

## 4) Coefficient de Poisson

C'est le **rapport** de la **déformation latérale** à celle de la **direction axiale**.



$$\nu = - \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_L}$$

$$\varepsilon_L \geq 0 \Leftrightarrow \varepsilon_t \leq 0$$

$$\varepsilon_L \leq 0 \Leftrightarrow \varepsilon_t \geq 0$$

$$0 < \nu < 0,5$$

## 5) Relation entre E et G

Cas d'un milieu **isotrope**. C'est la cas de la plupart des matériaux d'ingénierie.



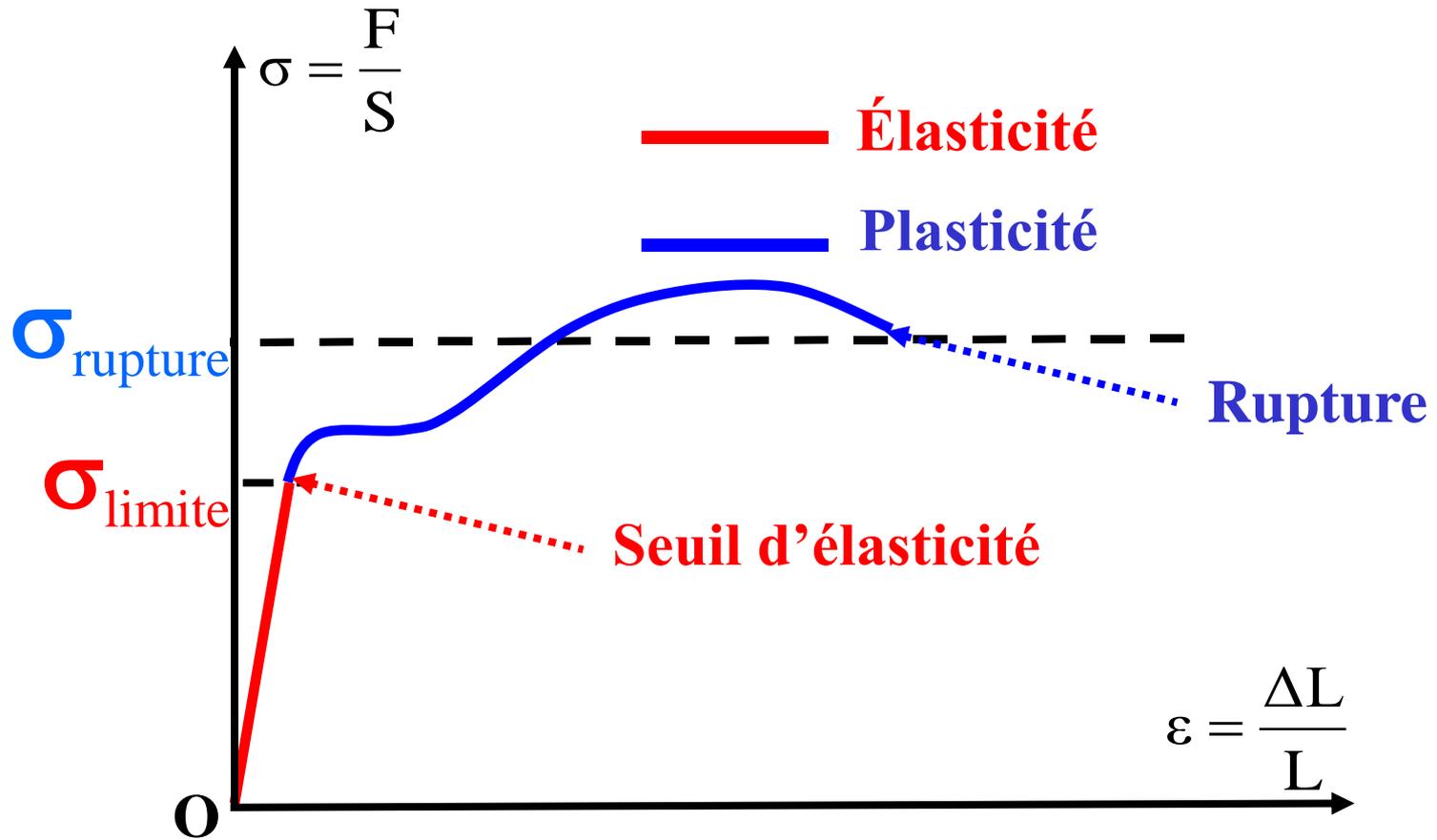
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

# **Chapitre III**

**TRACTION**

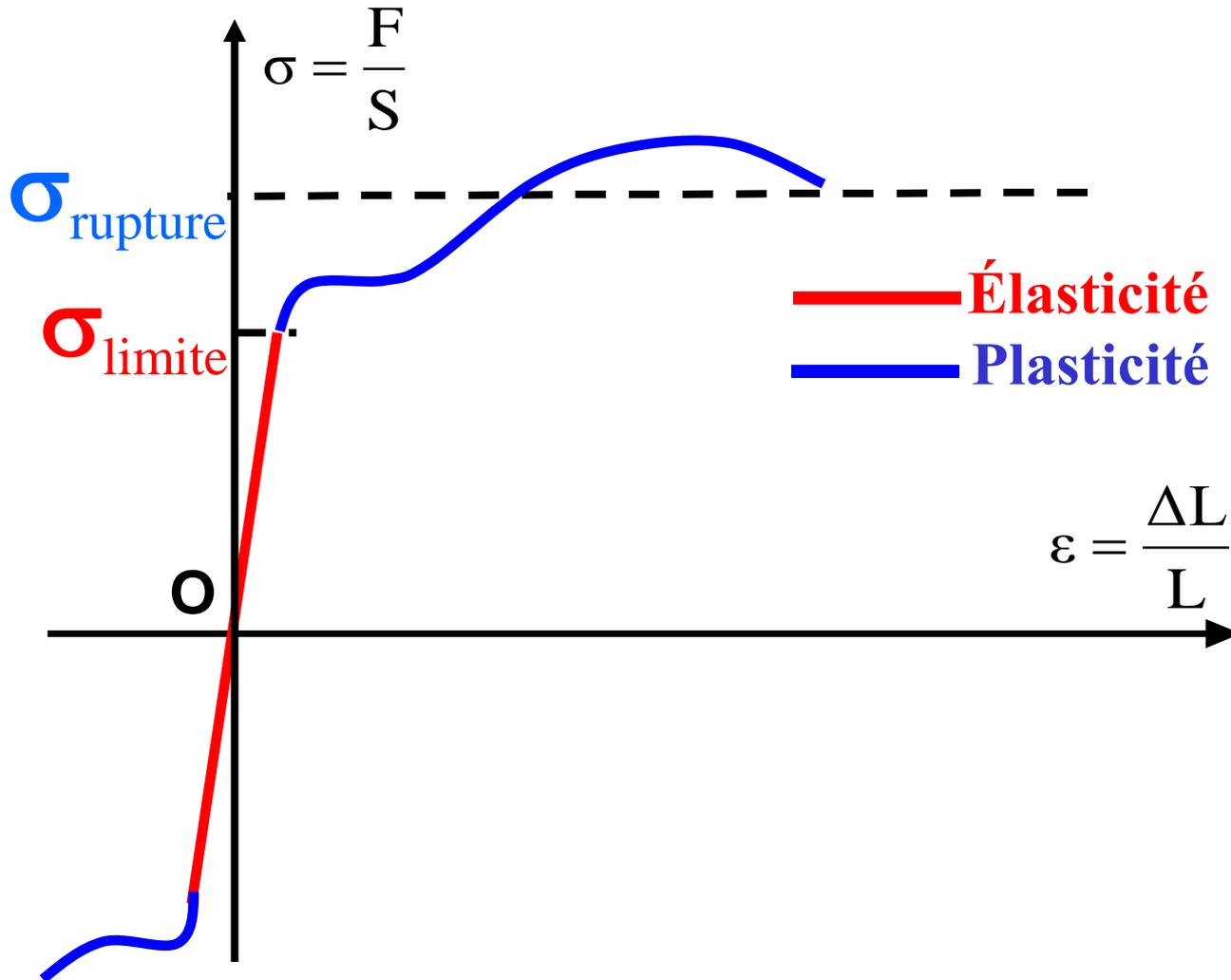
**COMPRESSION**

# I Diagramme contrainte déformation

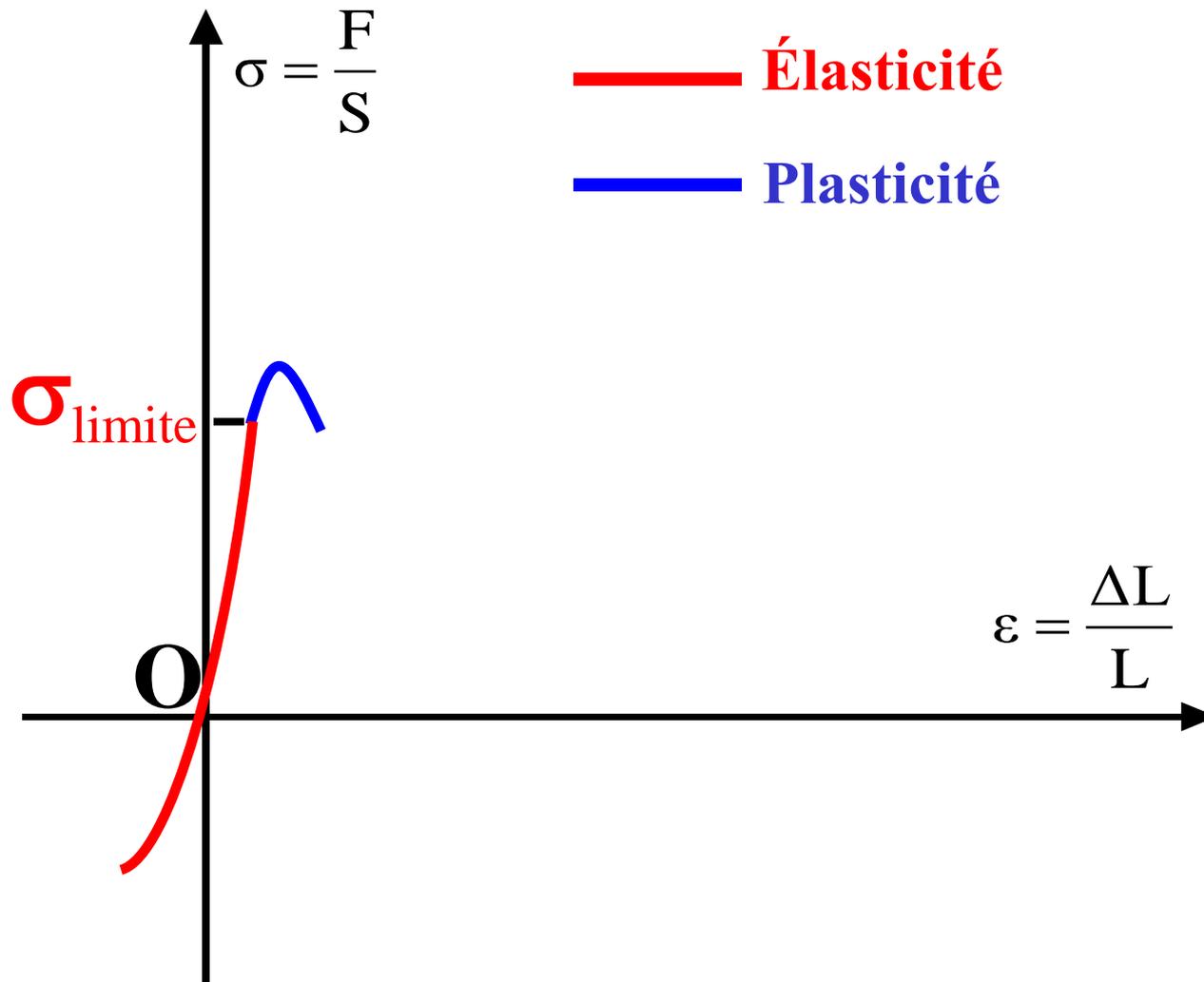


**S** et **L** sont respectivement la section et la longueur **initiales** du fil métallique.

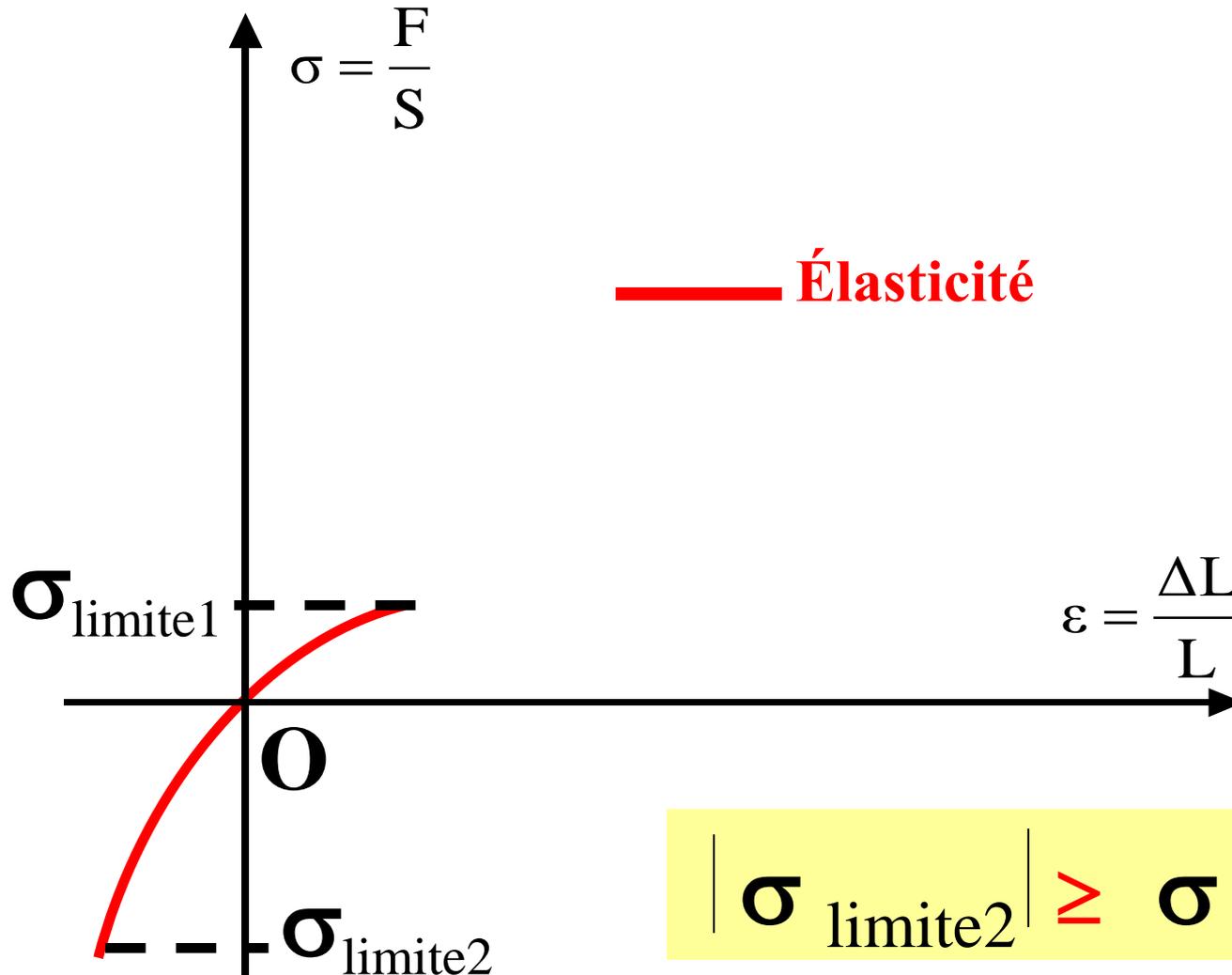
# Diagramme contrainte déformation de l'acier à l'aide d'une machine de traction compression



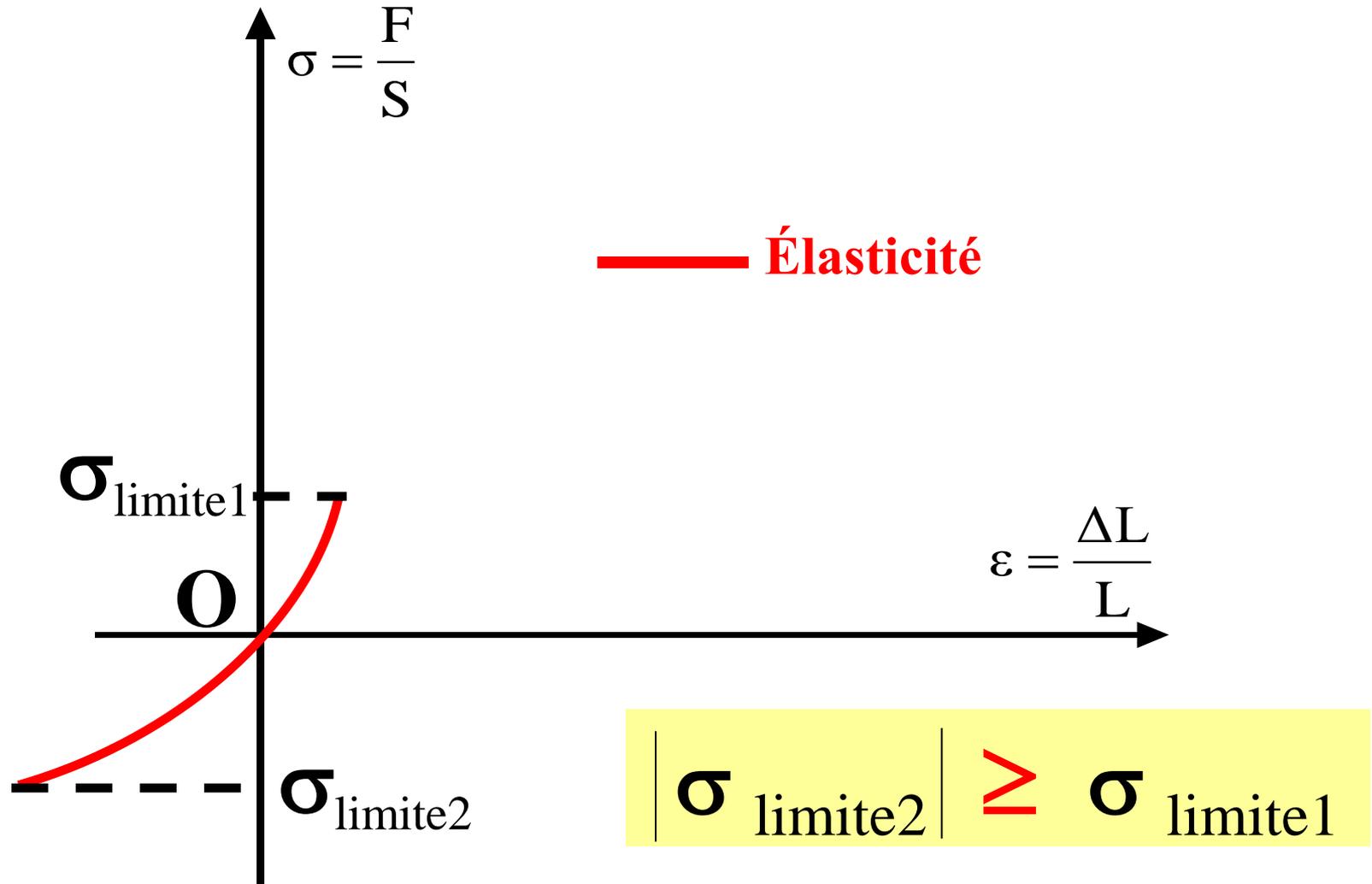
# Diagramme contrainte déformation de la fonte (**matériau fragile**)



# Diagramme contrainte déformation du marbre



# Diagramme contrainte déformation du **béton**



## **II** Loi de Hooke

### **1)** Expression de la loi

Loi de **Hooke** en  
élasticité linéaire  
(1676) :

$$\sigma = E \varepsilon$$

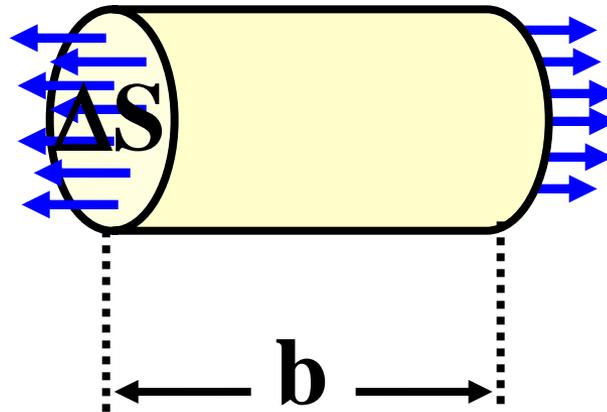
### **2)** Module d'élasticité

**E** est le **module d'Young** (Thomas Young: 1773-1829)  
ou **module d'élasticité longitudinale**.

**E** est exprimé en **N/m<sup>2</sup>** ou **Pascals**.

### 3) Remarque

La loi de **Hooke** est en effet une **loi locale**. Considérons un tronçon d'éprouvette de **longueur infiniment petite  $b$**  et qui subit un allongement  $\Delta b$ .



**Tronçon d'éprouvette**

En tout point **M** de la section **S**, la contrainte est définie par :



$$\sigma(M) = \frac{F}{S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = E \varepsilon (M)$$

Pour un **matériau homogène**, l'effort **normal** est répartie dans chaque section de façon **uniforme**.



$$\begin{aligned} \sigma(M) &= \frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L} \\ &= \frac{\Delta F}{\Delta S} = E \frac{\Delta b}{b} \end{aligned}$$

#### 4) Quelques valeurs du module de Young

<b>Matériau</b>	<b>E en GPa</b>
<b>Acier de construction</b>	<b>210</b>
<b>Cuivre</b>	<b>124</b>
<b>Bois</b>	<b>3 à 20</b>
<b>Fonte</b>	<b>83 à 170</b>
<b>Aluminium</b>	<b>70</b>
<b>Verre</b>	<b>69</b>
<b>Béton</b>	<b>20 à 50</b>

## Exercice 3

Un barreau rectiligne de section constante  $S = 6\text{cm}^2$  et de longueur  $L = 4\text{ m}$  est soumis à une tension axiale  $F = 126000\text{ N}$ .

1) Trouver son module de Young sachant que son allongement total est  $\Delta L = 0,40\text{ cm}$ .

2) Calculer la force nécessaire pour l'allonger de  $6\text{mm}$ .

## **IV** Variations des dimensions

### **1)** Dimension longitudinale

L'expérience montre que lors d'un essai de **traction** ou de **compression** d'une barre d'essai, la **dimension longitudinale** subit une **augmentation** ou une **diminution**.

- $\Delta L > 0$  pour une traction.
- $\Delta L < 0$  pour une compression.

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

et

$$\varepsilon = \left| \frac{\Delta L}{L} \right|$$

**F** : la charge

**S** : la section

**L** : la longueur initiale

$\Delta L$  : la variation de longueur

**donnent**

$$\Delta L = \frac{FL}{ES}$$

**Pour la traction**

$$\Delta L = -\frac{FL}{ES}$$

**Pour la compression**

## 2) Rigidité du barreau

La **rigidité** du barreau notée **K** est donné par la formule suivante :



$$K = \frac{F}{|\Delta L|} = \frac{ES}{L}$$

### 3) Remarque

Pour toute **variation** de **charge** ou de **section**, il faut faire intervenir une longueur infinitésimale  $dL$  et écrire :

$$\Delta(dL) = \frac{F}{ES} dL$$

$F$  est la charge appliquée à l'élément  $dL$

$$\Delta L = \int_0^L \frac{F}{ES} dL$$

**En traction**

$$\Delta L = - \int_0^L \frac{F}{ES} dL$$

**En compression**

## Exercice 4

Une barre d'aluminium de **3 m** de long est soumise à une contrainte de **700 Kg/cm<sup>2</sup>**.

- 1) Calculer la longueur finale de la barre en traction.
- 2) Calculer la longueur finale de la barre en compression.

## 4) Dimension transversale

L'expérience montre que lors d'un essai de **traction** ou de **compression** d'une barre d'essai, la **dimension transversale** subit une **diminution** ou une **augmentation**.

On pose :

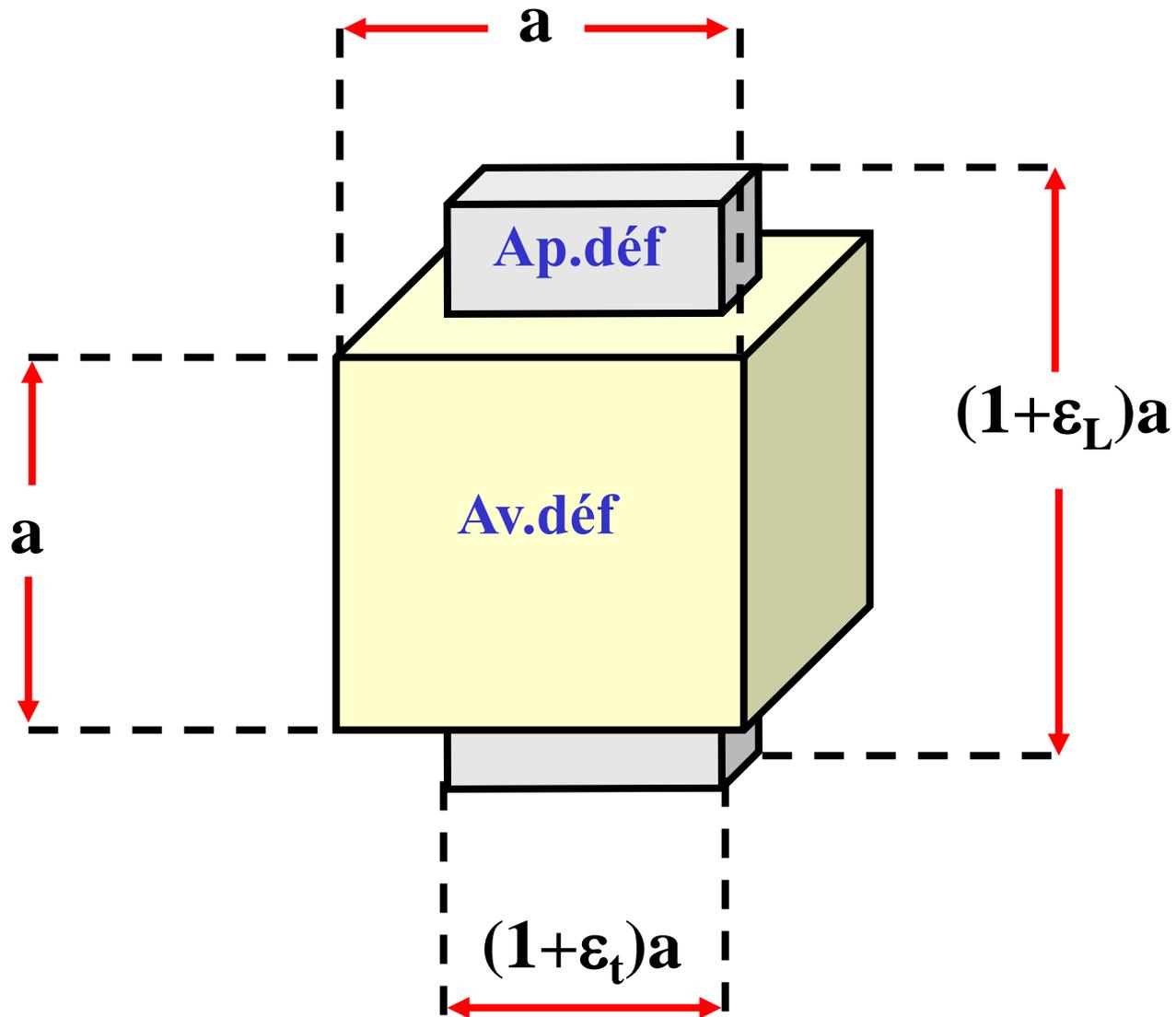
$$\nu = - \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_L}$$

$$0 < \nu < 0,5$$

$$\varepsilon_L > 0 ; \varepsilon_t < 0$$

$\nu$  est le **module de Poisson** (1781-1840), ou **module de compression transversale**.

## 5) Variation du volume en traction



**La variation du volume de l'élément cube découpé dans la barre d'essai est:**

$$\begin{aligned}\Delta V &= a^3 (1 + \varepsilon_L) (1 + \varepsilon_t)^2 - a^3 \\ &= a^3 (1 + \varepsilon_L) (1 - \nu \varepsilon_L)^2 - a^3 \\ &\approx (1 - 2\nu) \varepsilon_L a^3 \\ &\approx (1 - 2\nu) \frac{\Delta L}{L} V \\ \frac{\Delta V}{V} &\approx (1 - 2\nu) \frac{\Delta L}{L}\end{aligned}$$

**D'après l'expérience, le volume d'une barre augmente en traction et diminue en compression, alors :**



$$0 < \nu < \frac{1}{2}$$

**matériau homogène**

## 6) Quelques valeurs du coefficient de Poisson

<b>Matériau</b>	<b><math>\nu</math></b>
<b>Cuivre</b>	<b>0,33</b>
<b>Aluminium</b>	<b>0,33</b>
<b>Acier de construction</b>	<b>0,27 à 0,30</b>
<b>Laiton</b>	<b>0,37</b>
<b>Fontes</b>	<b>0,21 à 0,26</b>
<b>Verre</b>	<b>0,18 à 0,30</b>
<b>Béton</b>	<b>0,20</b>

## Exercice 5

Une barre d'acier de section carré (**5cm x 5cm**), de longueur **L=1m** est soumise à une tension axiale **F=32.10<sup>4</sup> N**. On donne  $\nu = 0,3$ .

- 1) Calculer l'allongement du barreau.
- 2) Déterminer la diminution de la dimension latérale due à cette charge.
- 3) Déduire la variation de volume.

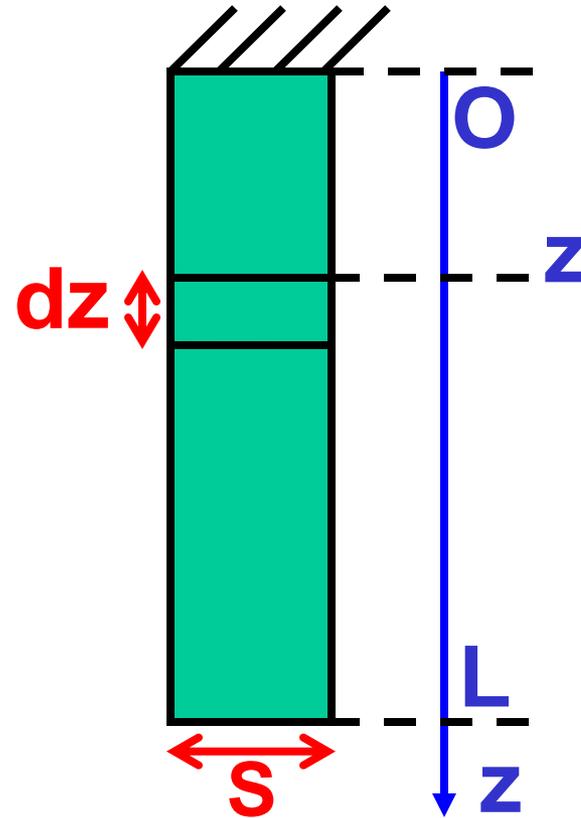
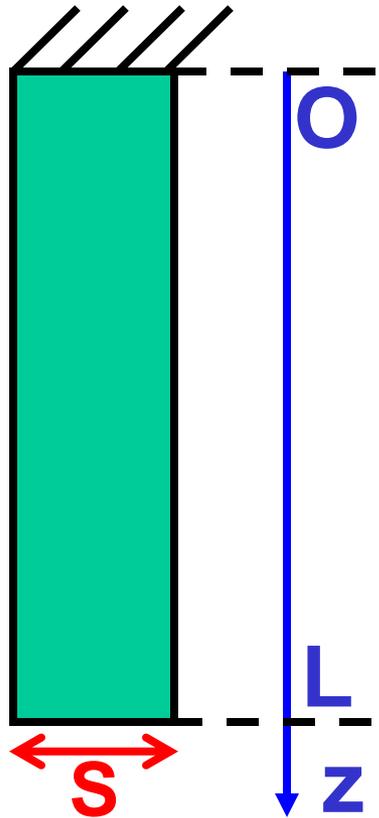
## V Coefficient de sécurité pour les charges en traction

En pratique on affecte à la limite élastique des matériaux  $\sigma_{\text{limite}}$ , un coefficient dit de **sécurité**  $\beta$  compris entre **1** et **10**.

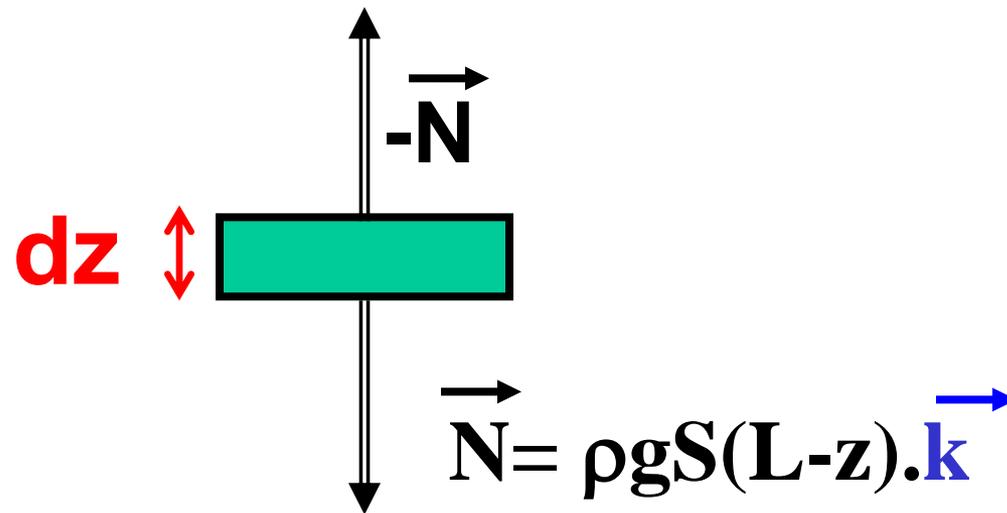
Condition de résistance :

$$\sigma_{\text{admis}} \leq \frac{\sigma_{\text{limite}}}{\beta} \quad \text{avec} \quad \sigma_{\text{maxi admis}} = \frac{\sigma_{\text{limite}}}{\beta}$$

## VI L'effet du poids en traction



Le tronçon élémentaire est en état de **traction** sous l'effet du poids du matériau situé au dessous de ce tronçon.



Son allongement est:



$$\Delta(dz) = \frac{N(z)}{ES} dz = \frac{\rho g S (L - z)}{ES} dz$$

L'allongement total du barreau est donné par :

$$\Delta L = \int_{z=0}^{z=L} \frac{N(z)}{ES} dz = \frac{\rho g}{E} \int_{z=0}^L (L - z) dz$$

$$\Delta L = \frac{\rho g}{E} \left[ Lz - \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=L} = \frac{\rho g L^2}{2E}$$



$$\Delta L = \frac{mgL}{2ES}$$

## Exercice 6

Un barreau carré en bronze, de section constante de  $49 \text{ cm}^2$  et de longueur  $6 \text{ m}$ , est fixé rigidement au sol. Sa base supérieure est soumise à une charge de compression de  $5000 \text{ Kg}$ .

- 1) Calculer la contrainte normale de compression et déduire les nouvelles dimensions du barreau.
- 2) Déterminer les variations des dimensions due à son propre poids ?
- 3) Comparer les variations trouvées à la première et à la deuxième question. Conclure.

On donne:  $\rho_{\text{bronze}} = 0,008 \text{ Kg/cm}^3$ .

## VII Dilatation thermique

Une variation de **température** entraîne généralement un allongement ou un raccourcissement. **La déformation due à la dilatation thermique** est donné par :



$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T$$

$\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique.  
 $\Delta T$  est l'écart de température.

L'allongement  $\Delta L_T$  correspondant à la variation de température se calcule par :

$$\Delta L_T = \varepsilon_T L = \alpha L \Delta T$$

## Exercice 7

On soumet une barre d'aluminium de longueur 2m et de section  $100 \text{ mm}^2$ , à une force axiale de traction de 10 kN.

On donne :

Module d'élasticité  $E = 70 \text{ GPa}$ ;

Coefficient de dilatation thermique  $\alpha = 23 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

- 1) Calculer l'allongement du barreau dû à la force de traction.
- 2) De combien doit-on abaisser la température de la pièce pour qu'elle garde ses dimensions initiales.

# Chapitre III

## CISAILLEMENT

# I Effort et contrainte de cisaillement

## 1) Définitions

Toute force agissant le long d'un plan en travers d'un matériau est appelée **force de cisaillement** ou **effort tranchant** notée généralement **T**.

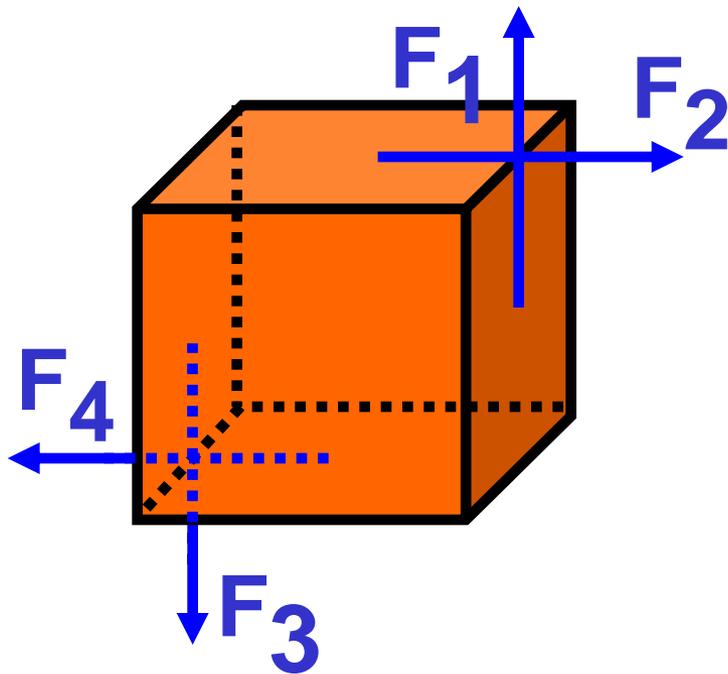
L'effort tranchant divisé par la surface sur la quelle il agit est appelée **contrainte de cisaillement** notée généralement  $\tau$  (**contrainte moyenne**).

## 2) Remarque

**On admet que la contrainte de cisaillement est constante** dans la section subissant la force de cisaillement.

## II Réciprocité

Considérons une pièce en forme d'un cube, d'arrête **a**, dont les quatre faces sont soumises à des **efforts tranchants** comme l'indique la figure ci-après :

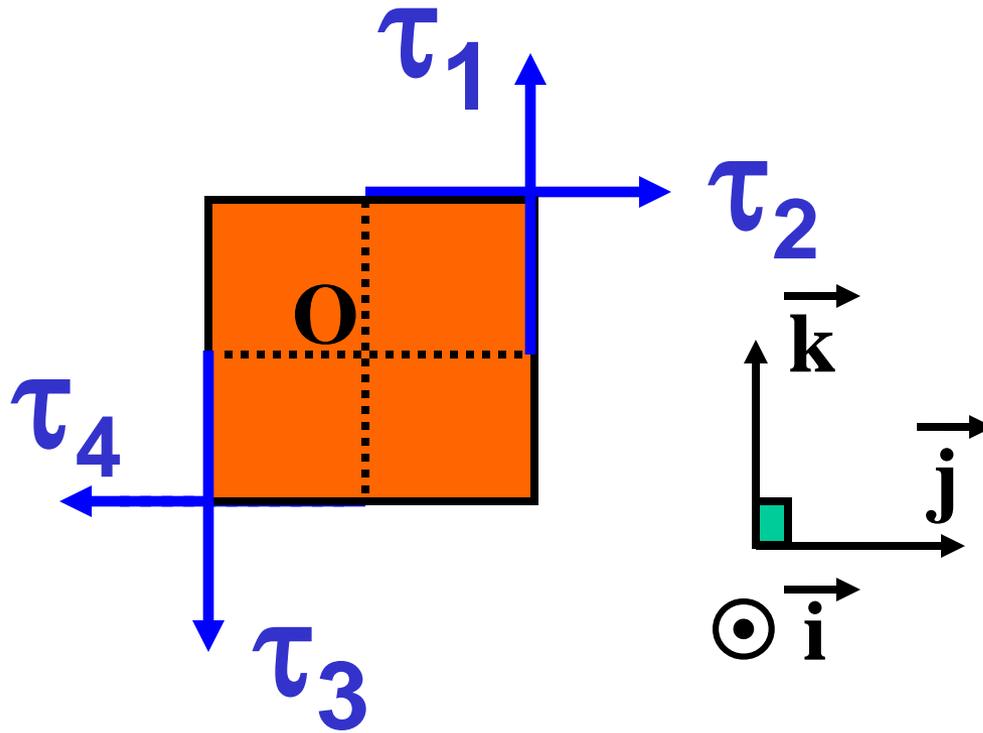


$$F_1 = \tau_1 \cdot S$$

$$F_2 = \tau_2 \cdot S$$

$$F_3 = \tau_3 \cdot S$$

$$F_4 = \tau_4 \cdot S$$



L'équilibre du cube est assuré par les relations :



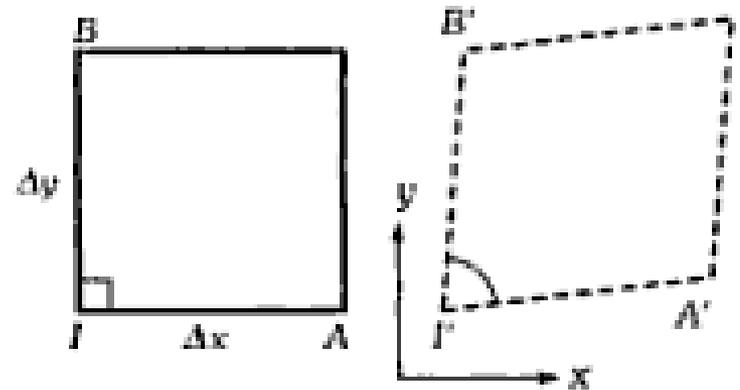
$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau$$

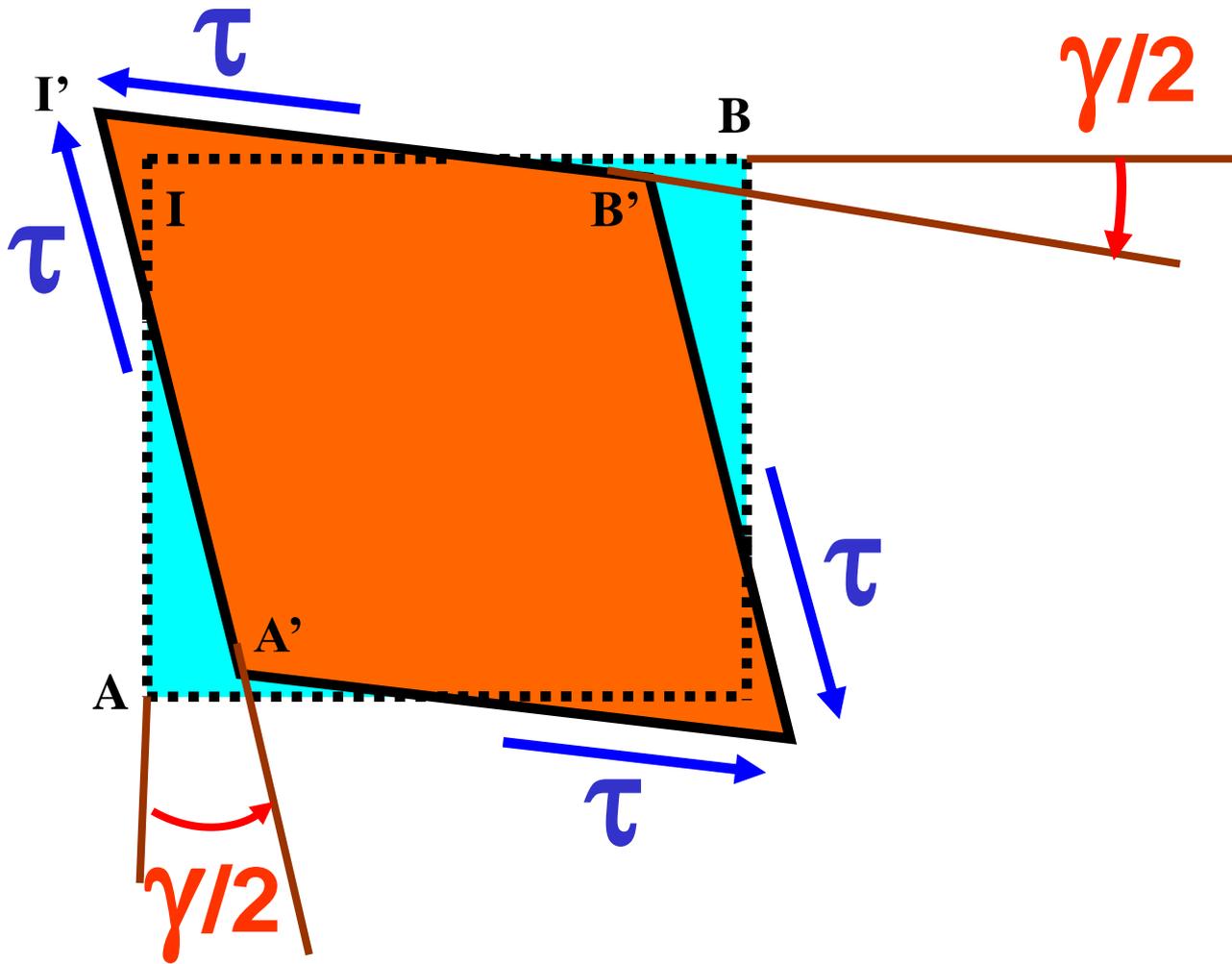
### III Distorsion

Les **angles droits** aux sommet du carré, subissent une **distorsion**.

La **diminution** de l'angle au sommet du carré, représentée ici par l'angle  $\gamma$  définit la **déformation de cisaillement** (exprimé en **radians**).

Les **angles** entre les **segments de référence** ne sont plus les mêmes.





$$\gamma = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \widehat{A'I'B'} \right)$$

## IV Module de cisaillement

Les **expériences** montrent que le diagramme de cisaillement a généralement la **même allure** que celui de traction ou de compression.

Dans la **zone d'élasticité**, la contrainte et la déformation de cisaillement sont liées par une **relation linéaire**.



$$\tau = G \gamma$$



$$\tau = G \gamma$$

**G** est le **module de cisaillement** (ou **module d'élasticité transversale** ou encore **module de Coulomb**) ayant la dimension de **N/m<sup>2</sup>** (ou **Pascals**).

## **IV** Condition de résistance

Comme dans le cas de la traction et de la compression, on considère en pratique la limite élastique **maximal admissible** (en cisaillement)

$\tau_{\text{maxi admis}}$

Nous avons :



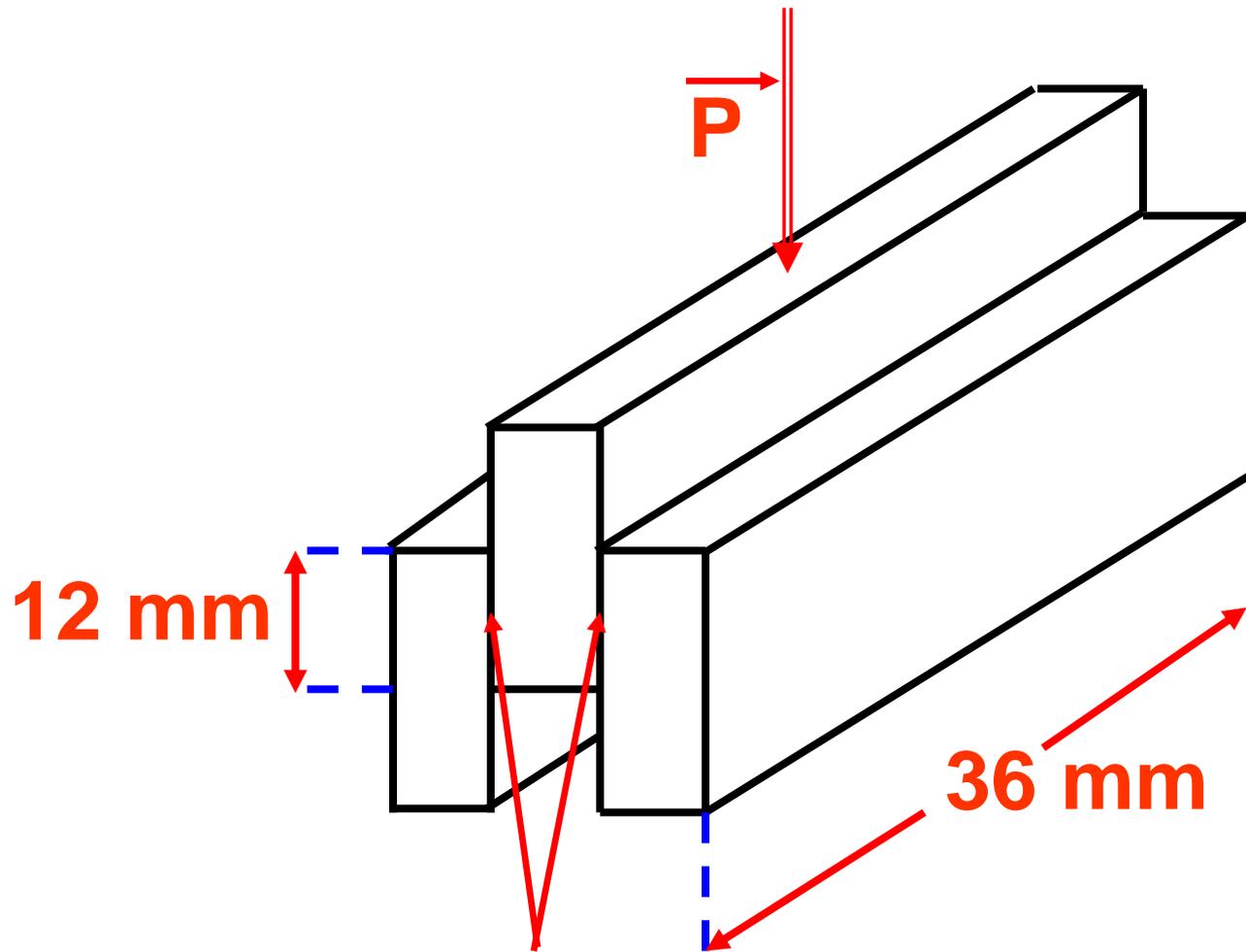
$$\tau_{\text{admis}} \leq \frac{\tau_{\text{limite}}}{\beta} \quad \text{avec} \quad \tau_{\text{max admis}} = \frac{\tau_{\text{limite}}}{\beta}$$

**Condition de résistance**

## Exercice 8

L'assemblage de la figure ci-après est utilisé pour déterminer la résistance au cisaillement d'un joint collé.

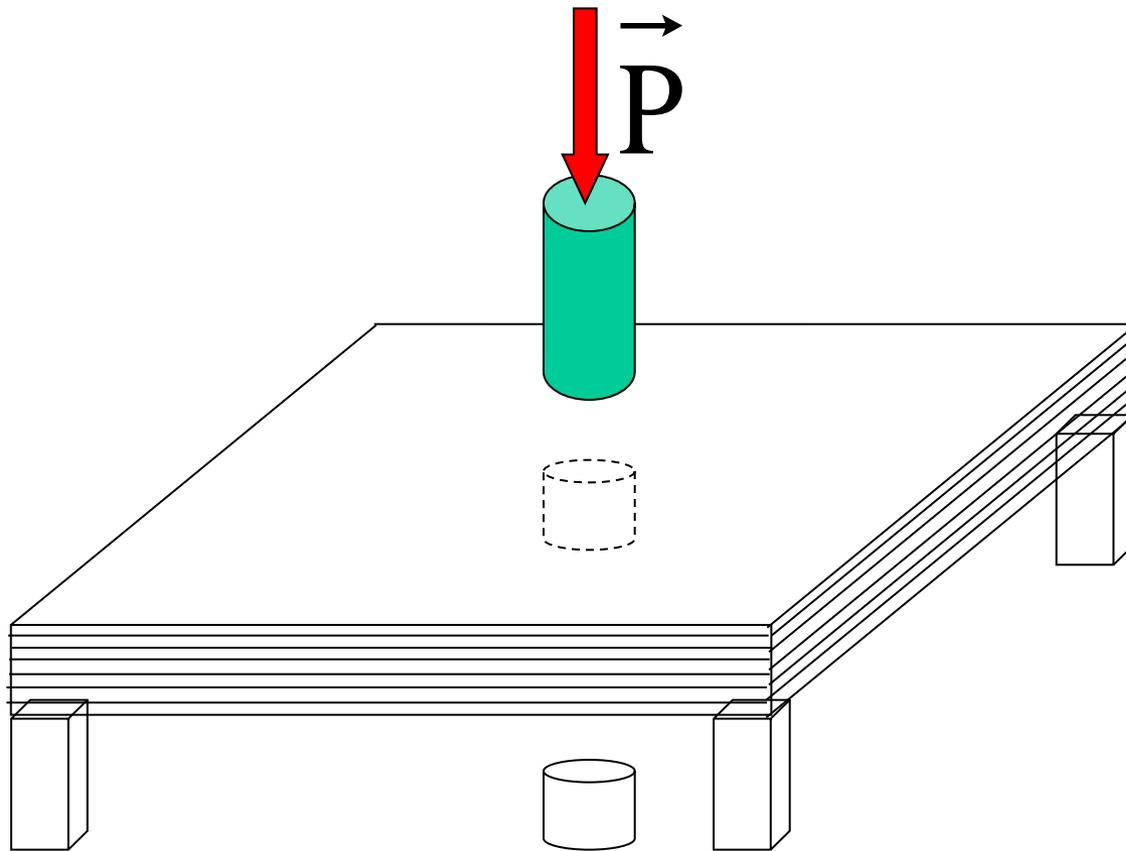
- 1) Pour une charge de 1200 Kg à la rupture, quelle est la contrainte moyenne de cisaillement dans le joint ?
- 2) Quelle sera la charge qu'il ne faut pas dépasser si le coefficient de sécurité vaut 1,2 ?



**Joint collé**

## Exercice 9

Un poinçon circulaire 2 cm de diamètre utilisé pour poinçonner un trou dans une plaque d'acier de 12 mm d'épaisseur. Si la force nécessaire pour faire pénétrer le poinçon dans la plaque est  $3 \cdot 10^5 \text{ N}$ , calculer la contrainte de cisaillement maximale développée dans le matériau.



## Exercice 10

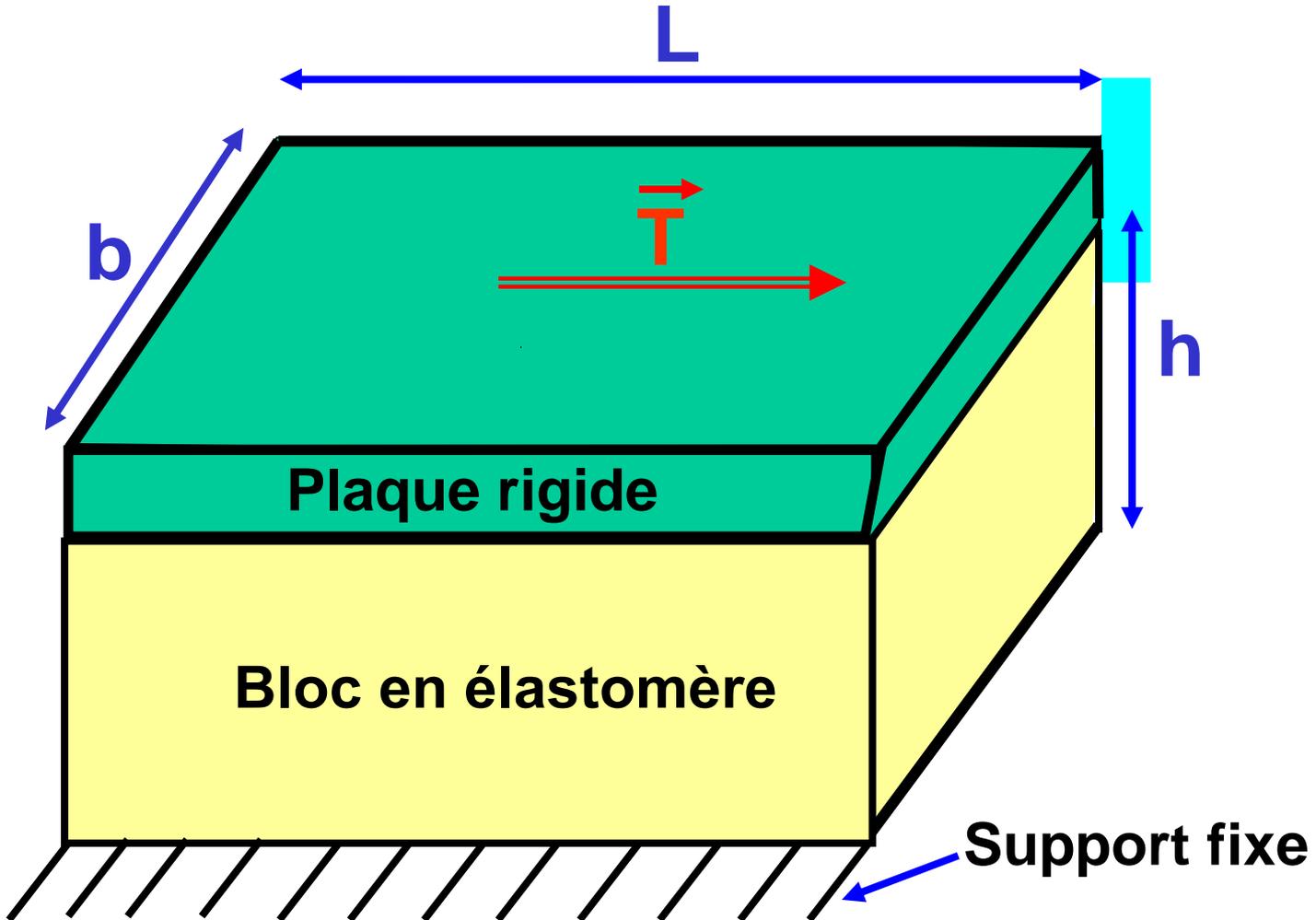
On veut étudier le cisaillement d'un bloc parallélépipédique en **élastomère** collé entre une plaque rigide et un support fixe comme le montre la figure.

On donne :

**$L = 10 \text{ cm}$  ;  $b = 5 \text{ cm}$  ;  $h = 2,5 \text{ cm}$ .**

**$G = 800 \text{ kPa}$  et  $T = 100 \text{ daN}$ .**

- 1) Calculer l'angle de glissement  **$\gamma$** .
- 2) Calculer le déplacement  **$a$** .



Avant déformation



Après déformation



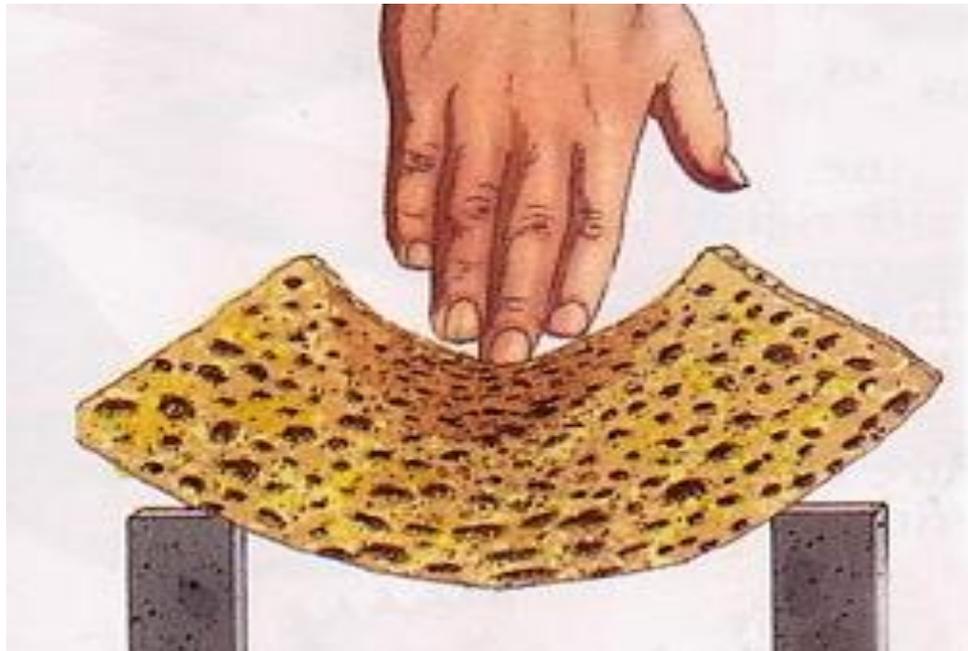
# Chapitre V

## FLEXION

# I Généralités

## 1) Présentation du problème

Une **poutre horizontale** suspendue en ses extrémités par deux câbles verticaux ou placée sur deux appuis fixes, subit une **flexion** qui se traduit par un **changement de courbure**.



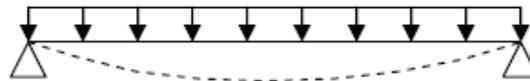
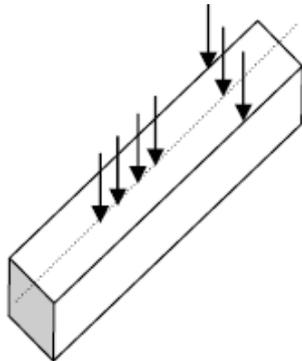
## 2) Hypothèses

### a - Le solide étudié

La poutre possède un **plan de symétrie vertical**.

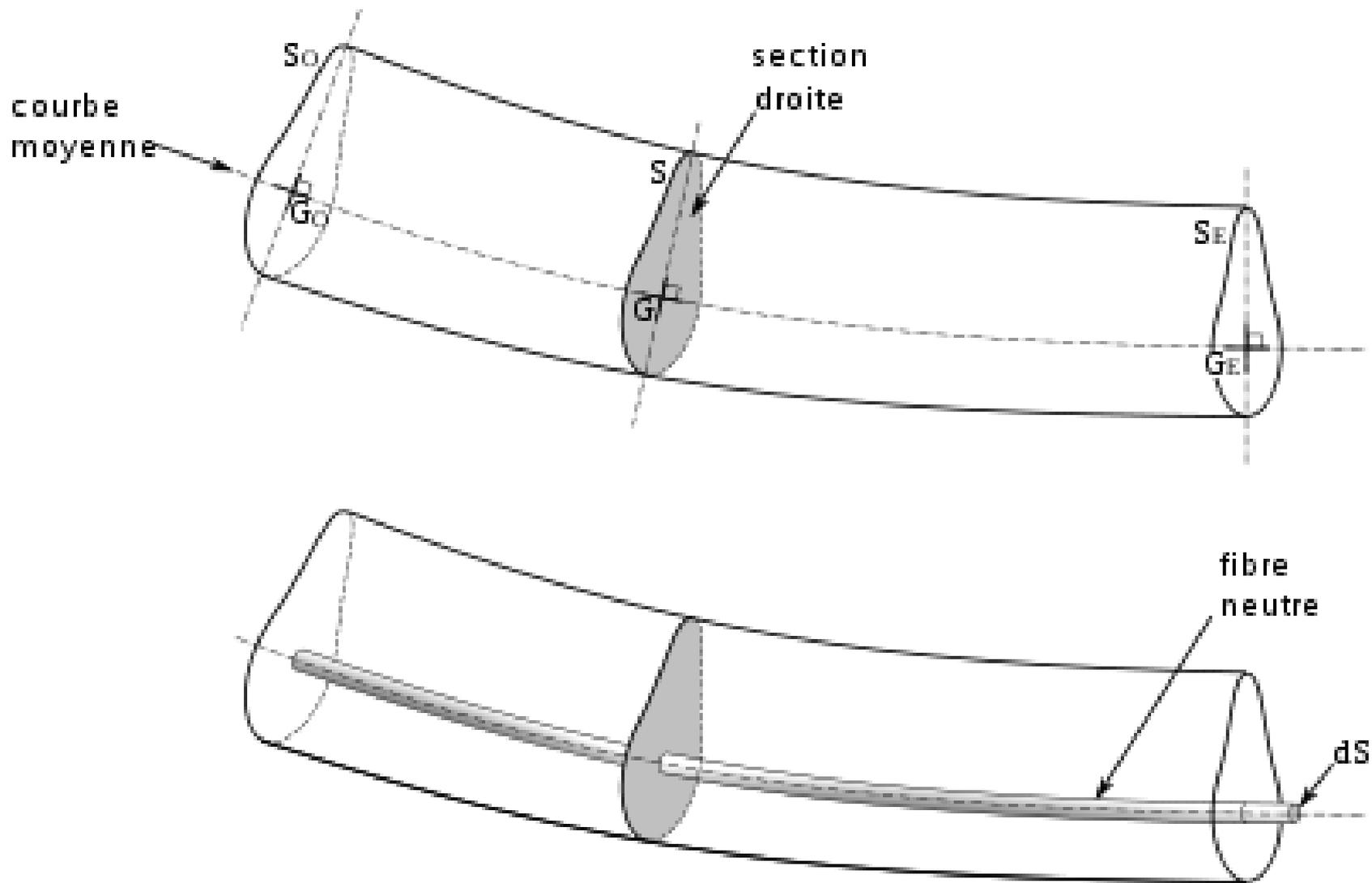
### b - Les forces appliquées

Toutes les **forces** sont **verticales** et leurs lignes d'action sont dans le plan vertical de symétrie de la poutre.



## c - Théorie des poutres

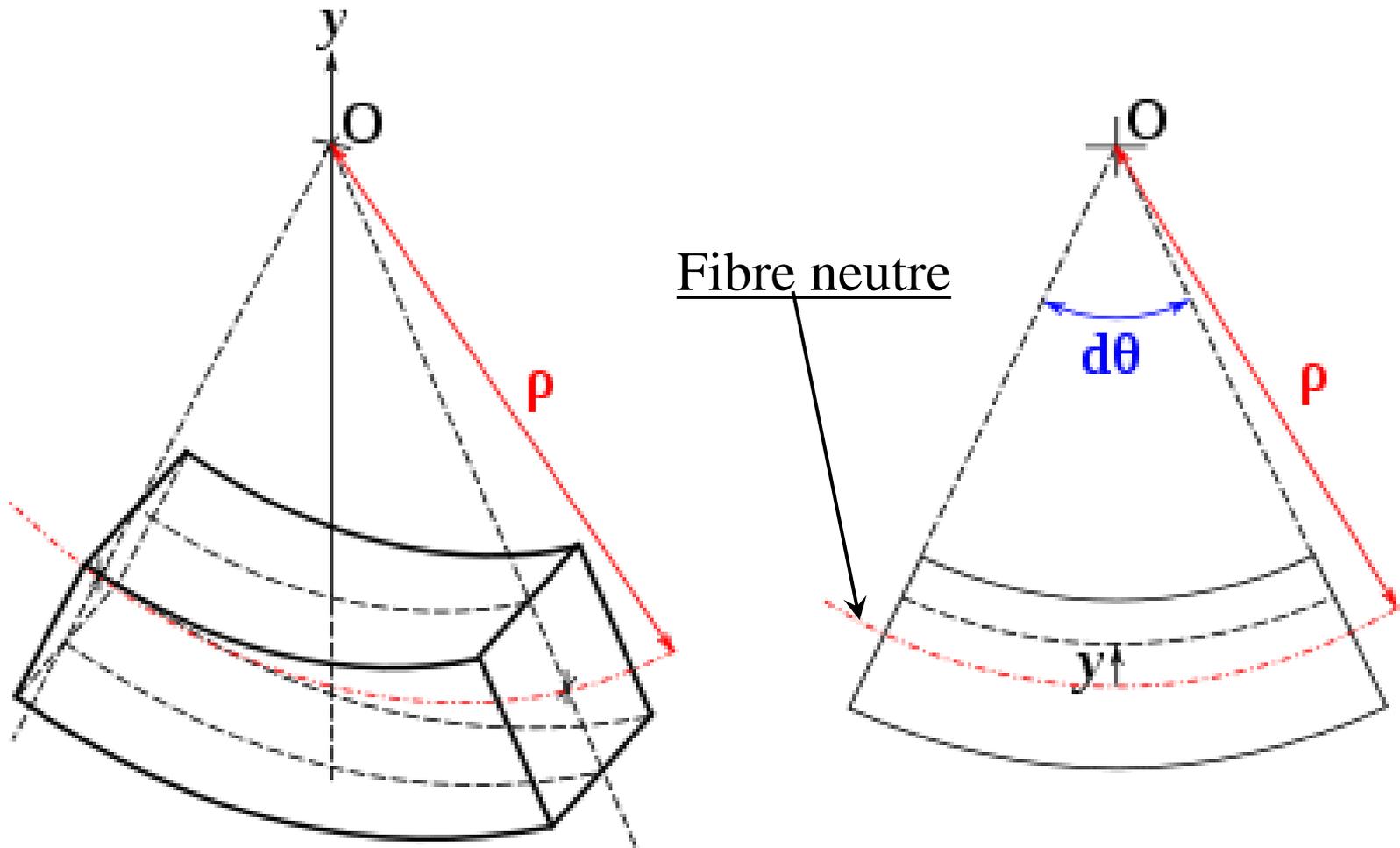
En théorie des poutres, on considère des **fibres**, c'est-à-dire des petits cylindres de matières générés par une portion  $dS$  et une courbe parallèle à la courbe moyenne (la « direction de la poutre ») ; **la courbe moyenne** passe par **les centres de gravité des sections droites** (sections perpendiculaires à la courbe moyenne).



## Poutre quelconque

## **d - Hypothèses de Navier et Bernoulli**

- ❖ Lors de la déformation, les **sections droites** restent **perpendiculaires** à la **courbe moyenne**.
- ❖ La fibre neutre a un allongement **nul** ;
- ❖ Les fibres à l'extérieur de la courbure sont **étirées**.
- ❖ Les fibres à l'intérieur de la courbure sont **comprimées**.
- ❖ La déformation longitudinale  $\varepsilon$  varie de manière **linéaire** en fonction de  $y$ .



Élément d'une poutre fléchie : **les fibres forment des arcs de cercle concentriques**, les fibres du haut sont donc comprimées et les fibres du bas étirées.

## II Définitions

### 1) Poutre

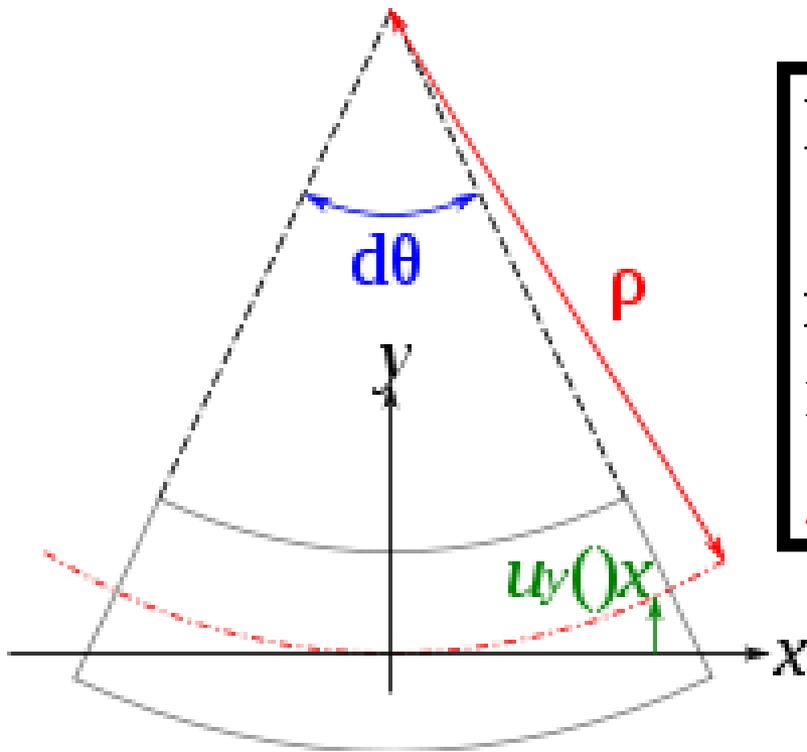
Grosse **pièce de charpente horizontale** en bois, en béton ou en métal soutenant une construction.

### 2) Fibre neutre

La fibre générée par la **courbe moyenne** est appelée « fibre neutre ». Elle garde sa longueur lors de la flexion.

### 3) Flèche

La flèche est le **déplacement vertical** d'amplitude  $u_y(x)$  du point de la courbe moyenne situé à l'abscisse  $x$ .



Le déplacement d'amplitude  $u_y(x)$  donne la forme finale de la fibre neutre. Cette amplitude est relié au **rayon de courbure** local  $\rho$ .

#### 4) Déformé de la poutre

La déformée de la poutre est le **graphique** de la fonction  $u_y(x)$ . Il donne la **forme de la courbe moyenne**.

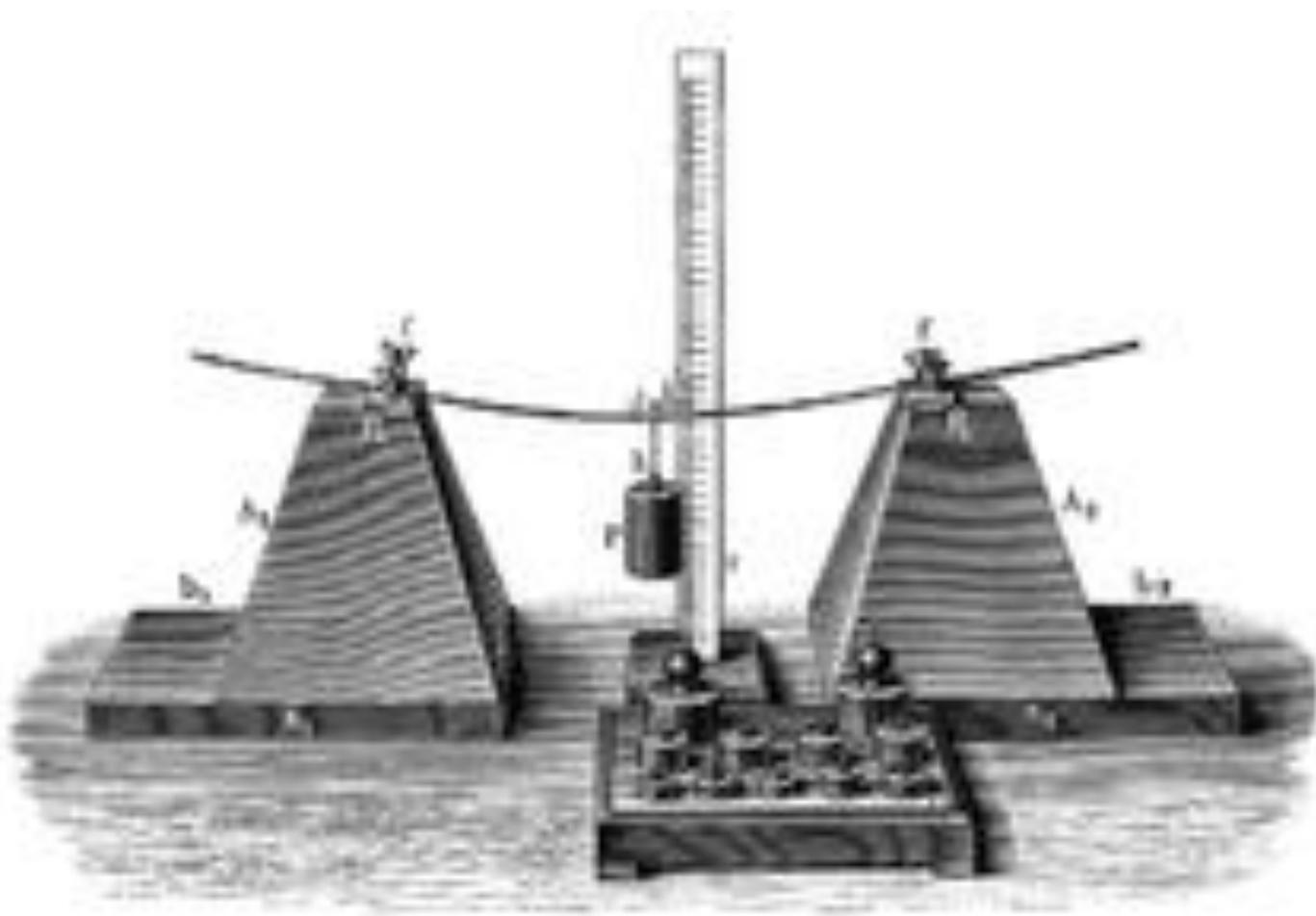
#### 5) Rayon de courbure

C'est le **rayon du cercle** formé par la **courbe moyenne**.

Pour les faibles déformations :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 u_y}{dx^2}$$

### **III** Étude expérimentale des déformations



Dispositif de mesure de la flèche



Test de **flexion trois points** sur un échantillon de **béton**.

# 1) Variation de la flèche

## a - Intensité de la charge

Pour une charge appliquée au même point, on constate que la **flèche** est d'autant plus **importante** que la **charge** est plus **grande**.

## b - Position de la charge

La **flèche** est d'autant plus **importante** que la **charge** est appliquée **loin des appuis**.

## **c - Dimension de la section**

Une poutre **fléchit** d'autant **plus** que sa **section** se trouve située dans sa **position de moindre inertie**.

## **2) Déformations longitudinales**

L'expérience fait apparaître :

-  un plan de fibres neutre qui conservent une longueur constante;
-  les fibres situées au-dessus du plan neutre sont comprimées;
-  les fibres situées au-dessous du plan neutre sont tendues.

### 3) Déformations transversales locales

Dans certaines zones de la poutre (**surtout au voisinage des appuis**), on voit apparaître un phénomène de **glissement transversal**. Ces déformations sont négligeables devant les déformations longitudinales.

### 4) Conclusions

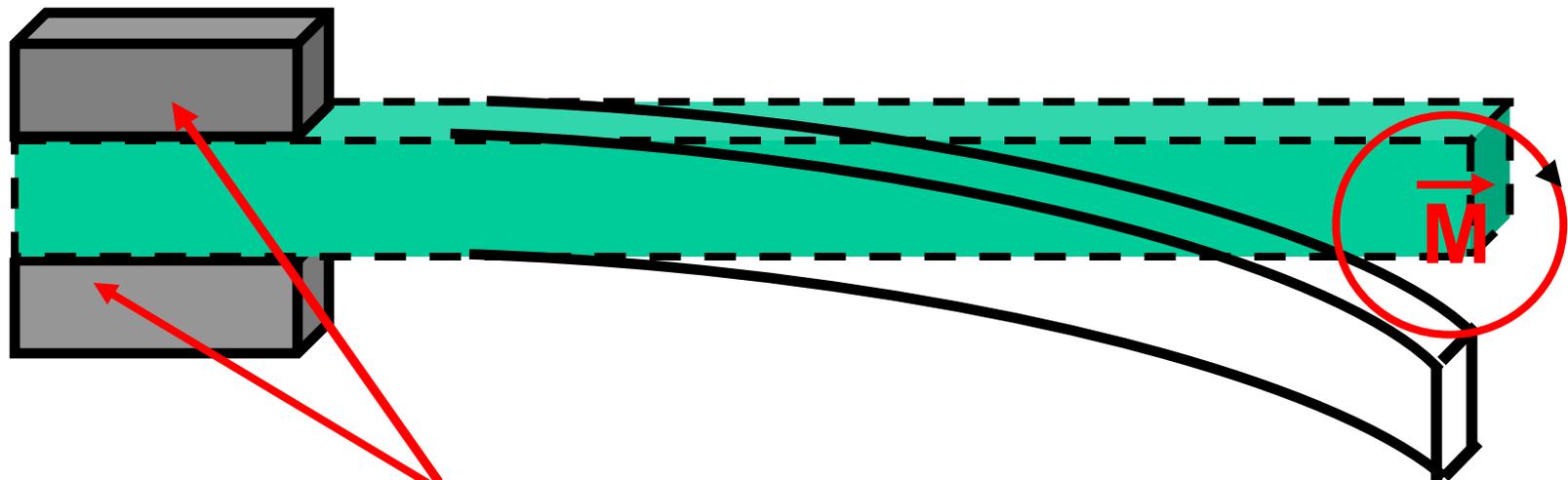
La **flexion** est une **sollicitation complexe** pour laquelle nous retrouvons des notions telles que :

-  la traction;
-  la compression;
-  le glissement longitudinal;
-  le glissement transversal.

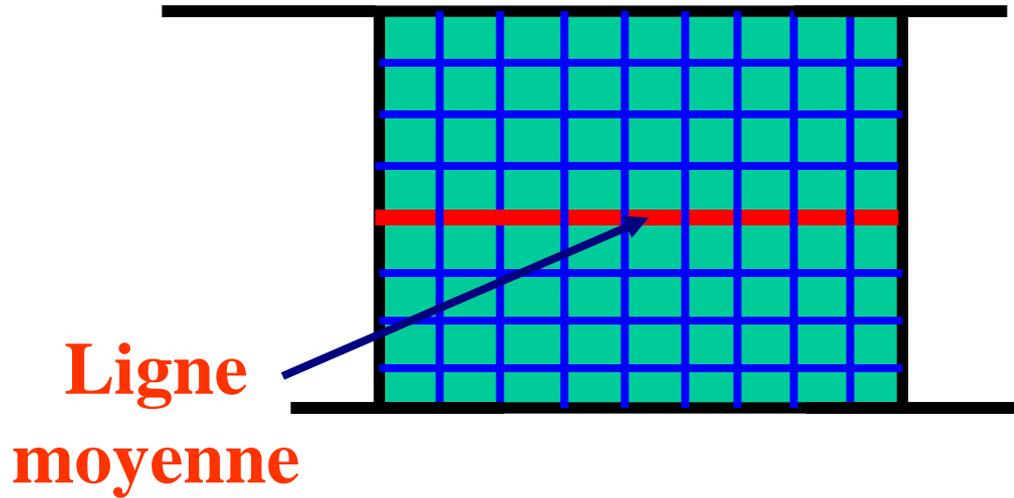
# IV Contraintes et déformations

## 1) Illustration

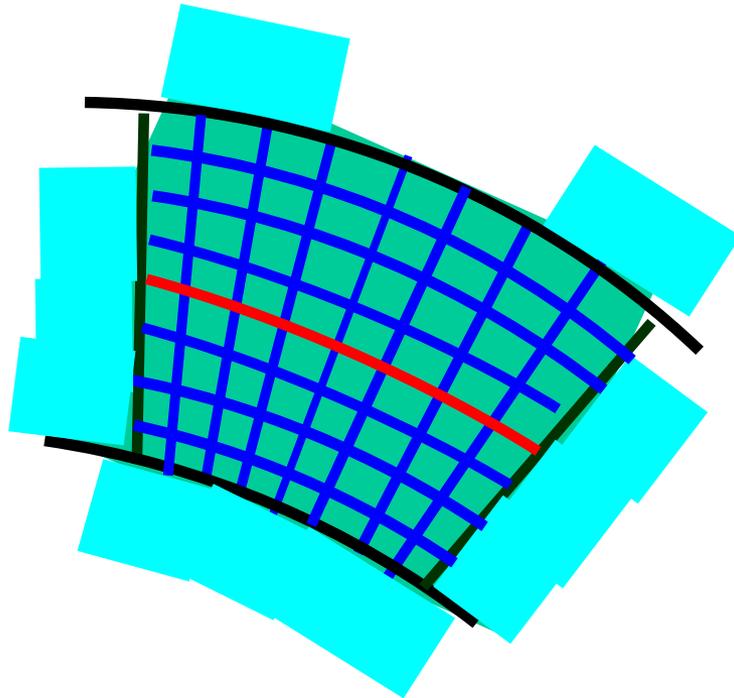
Pour **illustrer** ce type de **déformation**, on considère l'expérience schématisée par la figure ci-après.



Mâchoires d'un  
étau fixe



**État non déformé  
de la surface  
latérale**

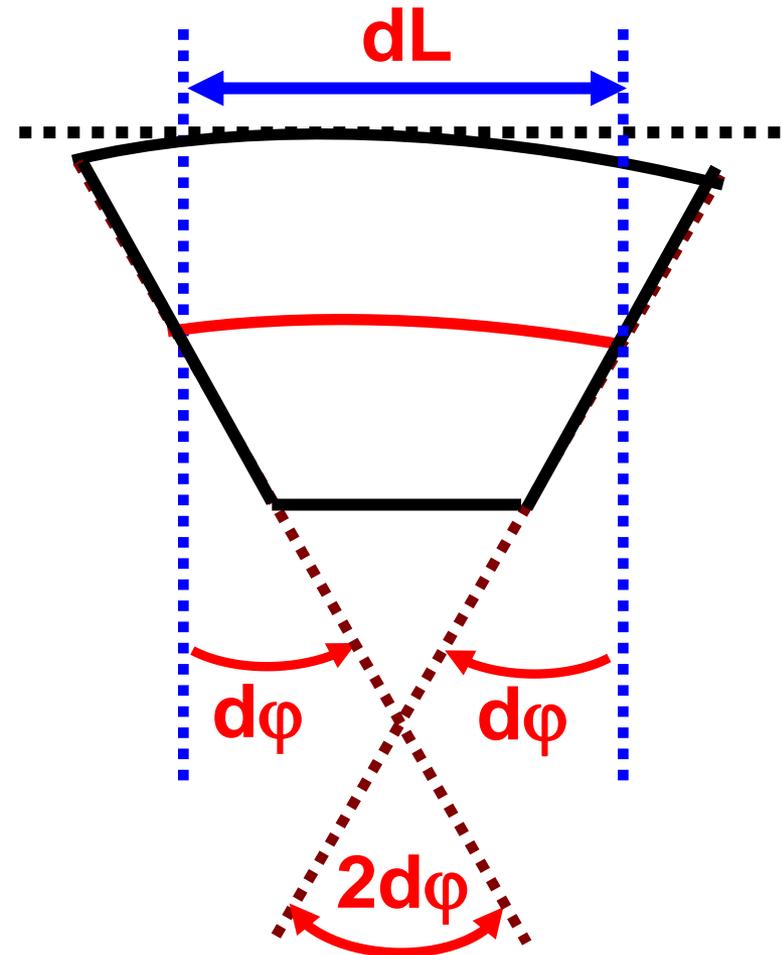


**État déformé  
de la surface  
latérale**

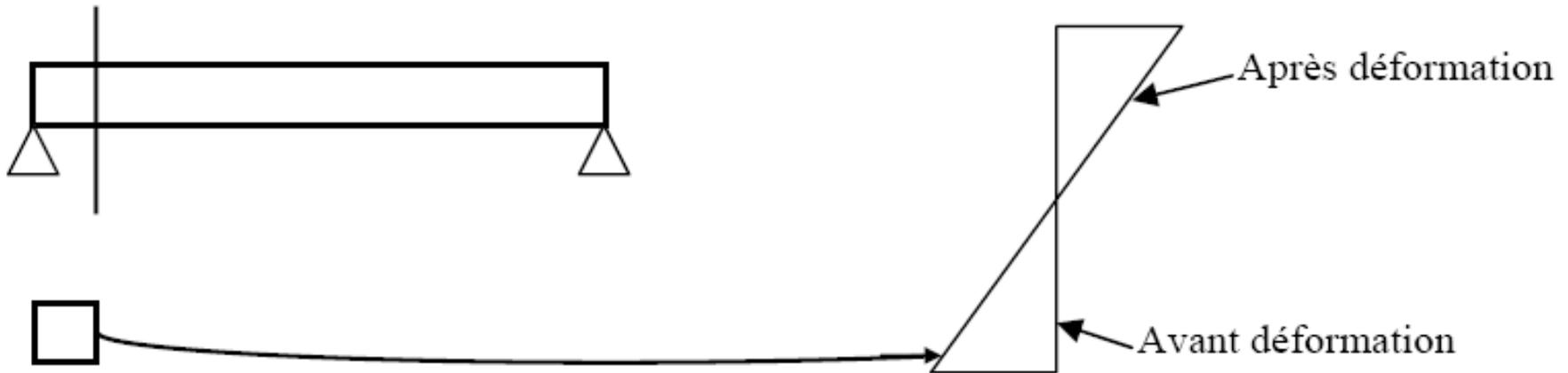
Après déformation, les couches supérieures s'allongent tandis que celles du bas se resserrent. La couche moyenne conserve pratiquement sa longueur.

Découpons, par imagination, dans la barre, un tronçon de longueur suffisamment petite  $dL$ .

Le segment infinitésimal sur la ligne moyenne conserve sa longueur  $dL$ .



La section transversale reste **plane**. Par conséquent le raccourcissement et l'allongement des couches sont **proportionnelles** à la distance transversale de ces couches mesurée à partir de la ligne moyenne.



La **contrainte normale** dans chaque couche est **proportionnelle** à son **allongement** ou à son **raccourcissement**.

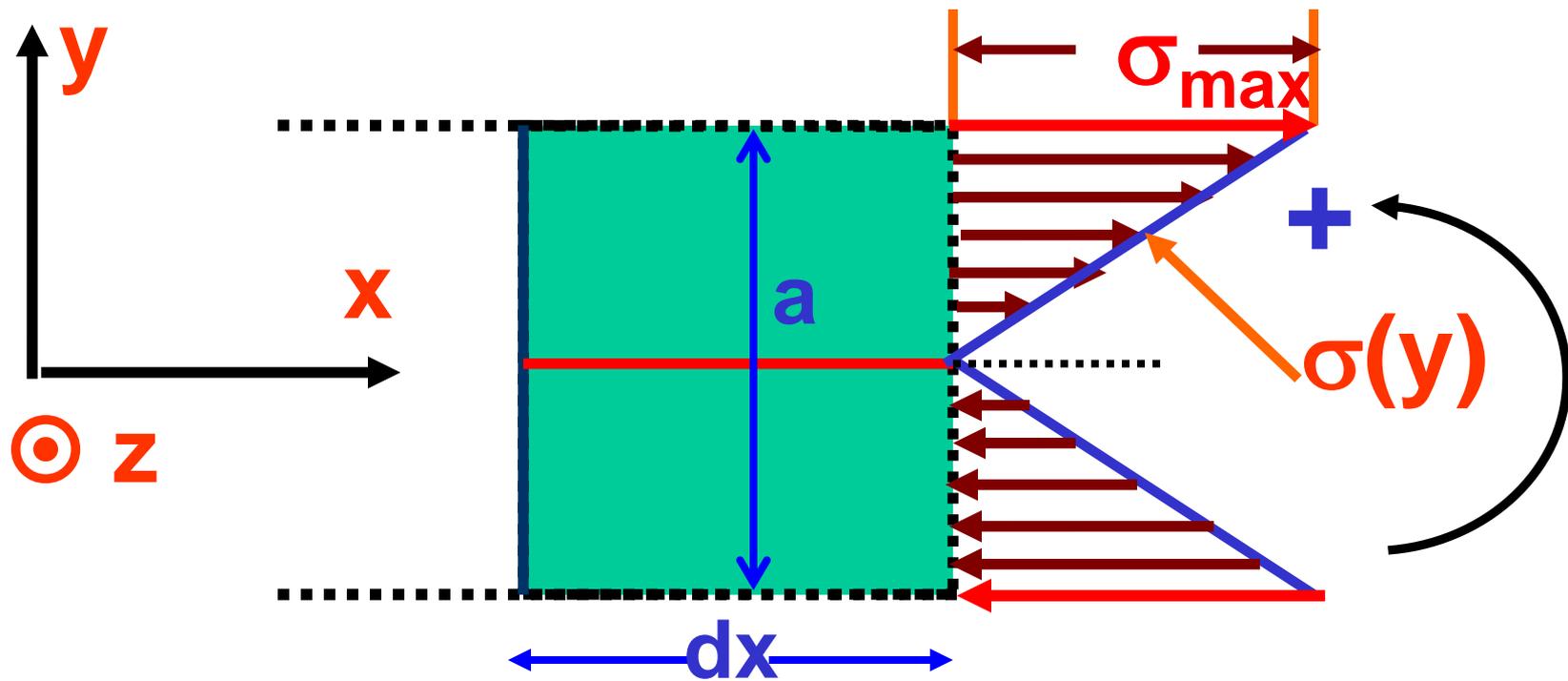
$$\varepsilon = m|y|$$

$\varepsilon$  est la déformation absolue;

$m$  coefficient de proportionnalité;

$|y|$  distance par rapport à la fibre neutre.

$$\sigma = E \varepsilon = E m|y|$$



$$\sigma = \sigma_{\max} \frac{2|y|}{a}$$

$\sigma_{\max}$  est la **contrainte normale** au niveau de la couche la plus éloignée de la ligne moyenne.

**Remarque:** l'effort normal exercé sur la section transversale **droite** du **tronçon élémentaire** est nul.



$$F = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} dz \sigma_{\max} \frac{2y}{a} dy = 0$$

**b** désigne la **largeur** de la section transversale.

# V Moment de flexion

## 1) Calcul du moment

Calculons le **moment de flexion** exercé sur la section transversale :

$$M_f = - \int_{-a/2}^{a/2} y \, dF$$

$$M_f = - \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{\max} \frac{2y^2}{a} \, dy \, dz = - \frac{b \sigma_{\max} a^2}{6}$$

Ce moment est compté **négalif** d'après le **sens conventionnel** de la figure.



$$|\mathbf{M}_f| = \sigma_{\max} \frac{I_{Gz}}{(a/2)}$$

avec

$$I_{Gz} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy dz = \frac{ba^3}{12}$$

$I_{Gz}$  est le **moment quadratique** de la **section transversale** par rapport à son **axe de rotation Gz**.

## 2) Moment de résistance

Le **moment de résistance** de la section transversale est donné par :

$$W_{Gz} = \frac{I_{Gz}}{(a/2)} = \frac{I_{Gz}}{y_{\max i}}$$

D'où :

$$|M_f| = \sigma_{\max} W_{Gz}$$

### 3) Moment admissible

Les moments de flexion **admissibles** dans le domaine de l'**élasticité linéaire** sont donnés par l'**inégalité** suivante :

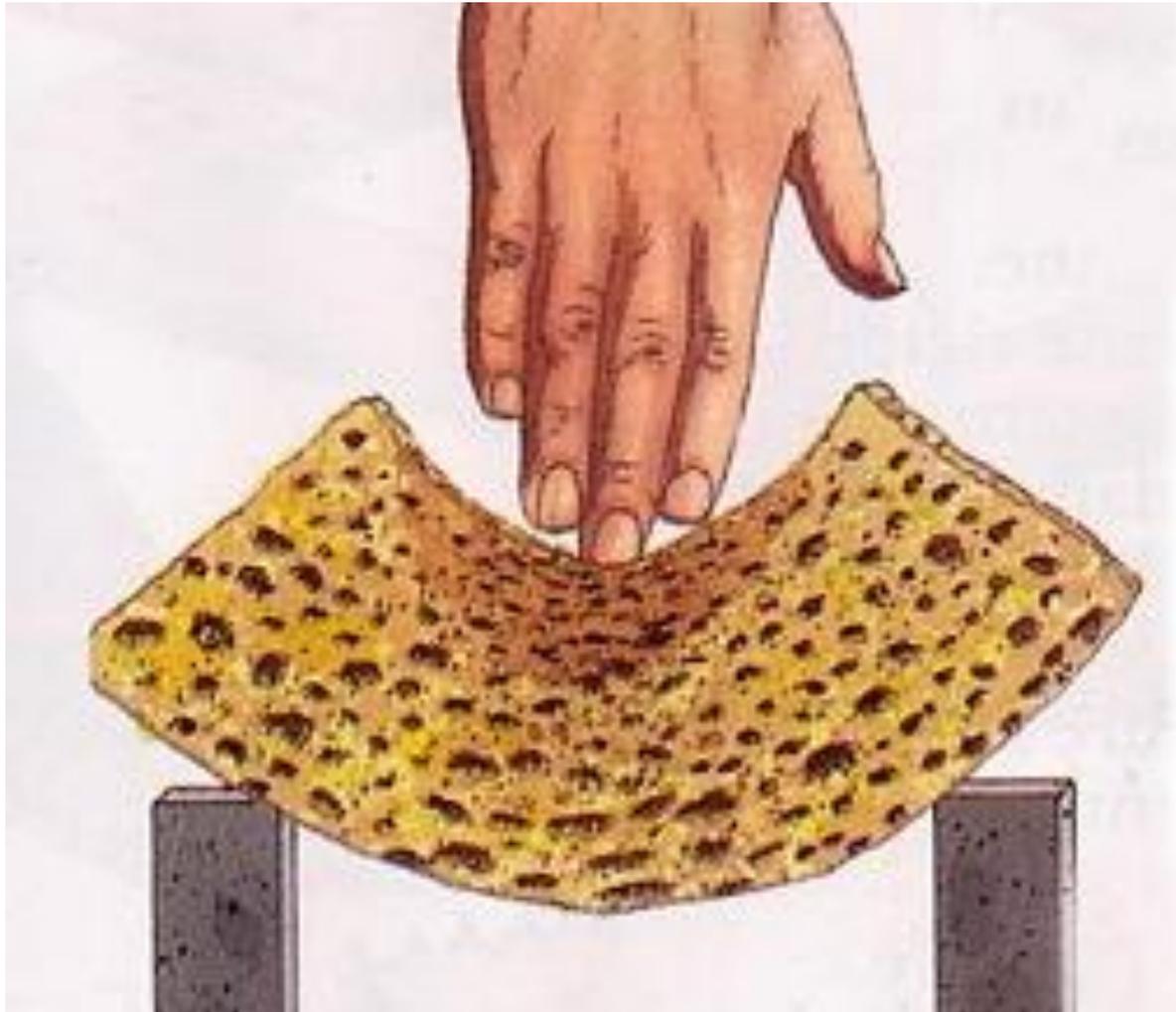
$$|M_f| \leq \sigma_{\text{limite}} W_{Gz} = M_{\text{limite}}$$

### 4) Remarques

Dans le cas de la déformation de **flexion pure**, le moment de flexion est proportionnelle à la contrainte normale maximale.

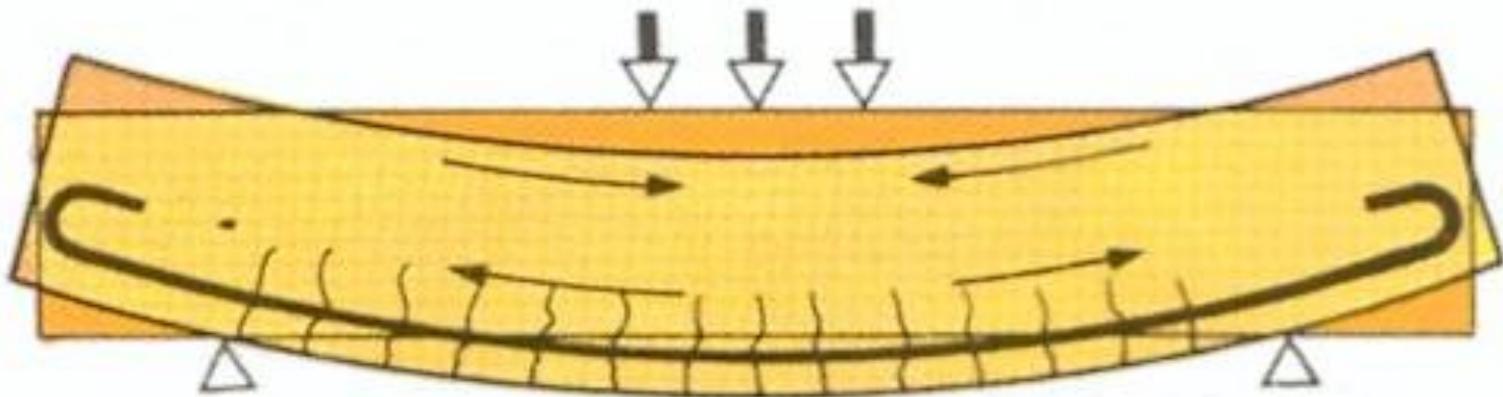
Dans le cas de l'exemple étudié, le **moment de flexion** est le même dans toutes les **sections transversales** de la barre (ou poutre).

Le **moment de flexion** est le même dans toutes les sections transversales de la barre (ou poutre), puisque **son poids est négligé** et que la barre n'est sollicitée qu'en ses extrémités par un **couple**. Dans ce cas on dit qu'il s'agit d'une **flexion pure**.



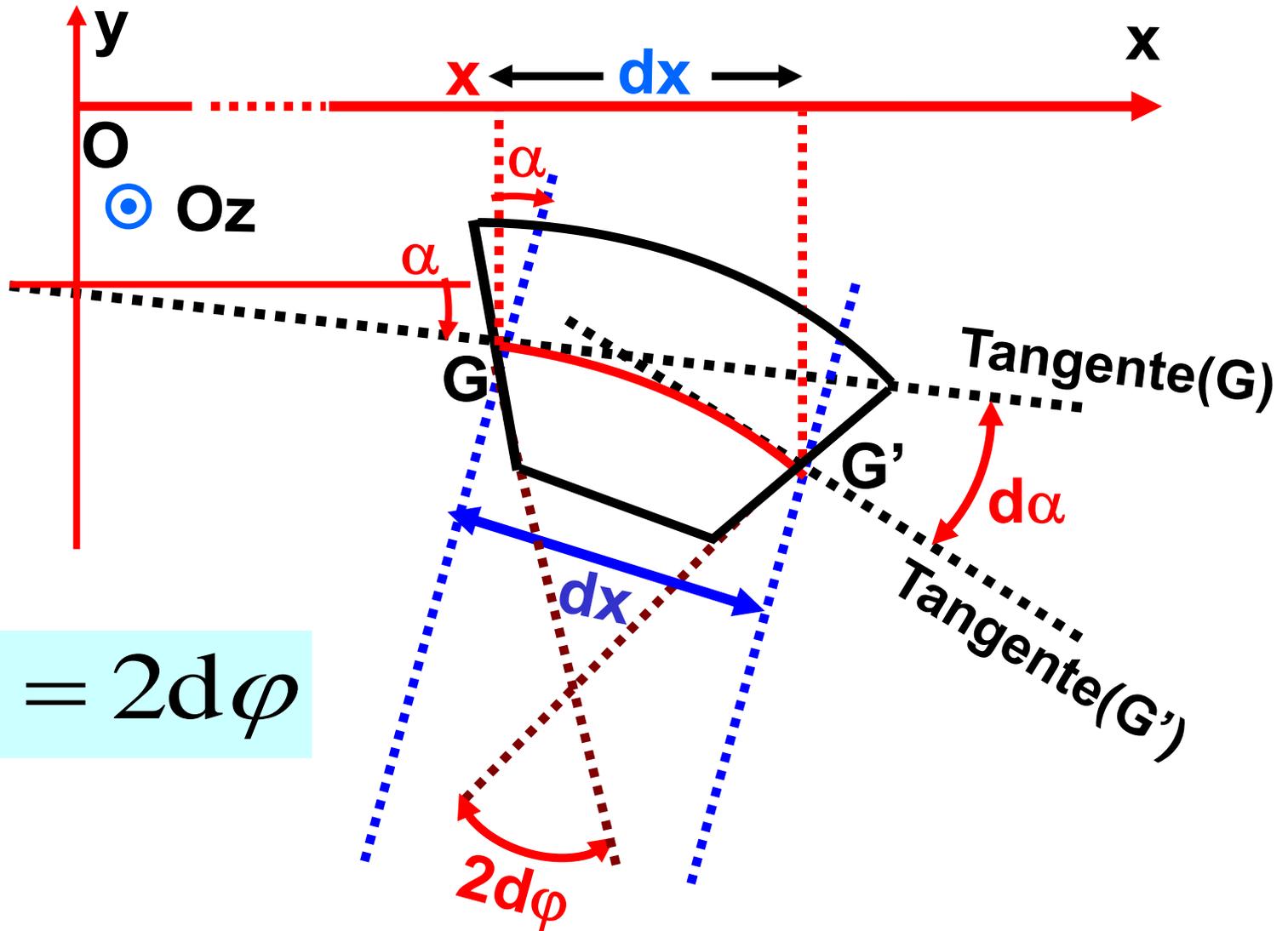
Principe de la **flexion simple** d'une poutre

Si la barre (ou la poutre), supporte des **charges localisées** ou des **charge réparties** ou que son **poids** n'est plus négligé, alors chaque section transversale droite subit à la fois un **moment fléchissant  $M_f$**  et un **effort tranchant noté  $T$** . On dit qu'il s'agit d'une **flexion simple**.



Fonctionnement du béton armé en flexion

## VI Équation de la déformée



$$d\alpha = 2d\phi$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \alpha$$



$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

**Loi de Hooke** appliquée à la **couche supérieure**, donne :

$$\sigma_{\max} = E \frac{\frac{a}{2} 2 d\varphi}{dx} = E \frac{\frac{a}{2} d\alpha}{dx} = E \frac{a}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

sachant que :

$$M_f = -\sigma_{\max} \frac{I_{Gz}}{(a/2)}$$

nous obtenons :

$$M_f = -EI_{Gz} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

**L'équation différentielle de la déformée est :**



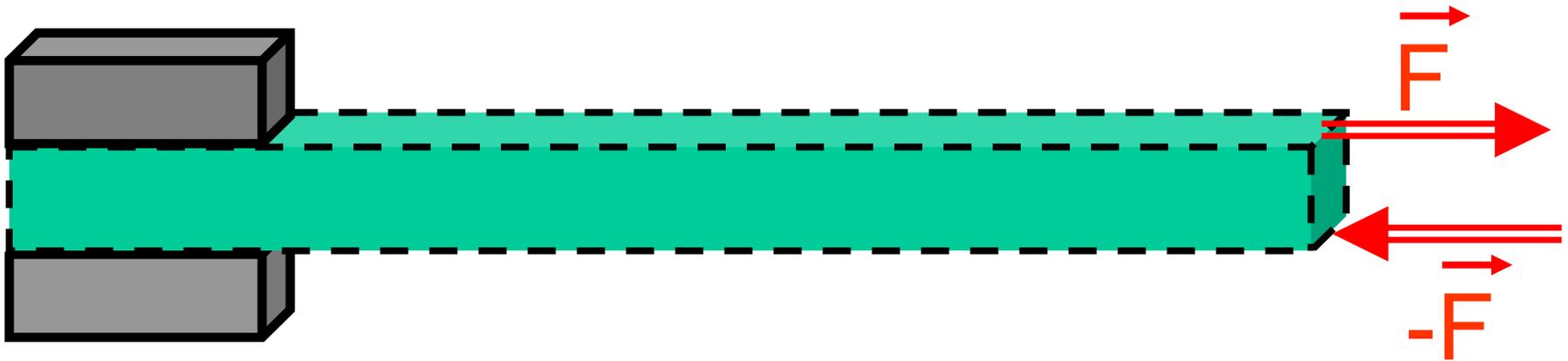
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_f}{EI_{GZ}}$$

**L'expression du rayon de courbure de la déformée est donné par :**



$$\frac{1}{\rho} = \frac{|M_f|}{EI_{GZ}}$$

## VII Calcul de la flèche



Admettons que l'extrémité ( $x = 0$ ) est **encastrée** et que la **section** est **constante**.

Les conditions aux limites :  $x = 0$  :  $y = 0$  et  $(dy/dx) = 0$ .

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_f}{EI_{Gz}} \quad \longrightarrow \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_y = -\frac{|M_{\text{ext}}|}{EI_{Gz}} x$$

d'où :

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{|M_{\text{ext}}|}{EI_{Gz}} x^2$$

La flèche 'maximale' correspond dans ce cas à la position  $x = L$ , soit :

$$y_{\text{max}} = \frac{1}{2} \frac{|M_{\text{ext}}|}{EI_{Gz}} L^2$$

## **VIII** Charges

### 1) Charges concentrées

Les **charges** sont **appliquées** en **des points précis**. En dehors de ces points les charges sont nulles.

### 2) Charges réparties

Les **charges** sont **distribuées** sur une certaine longueur de façon uniforme ou non.

### 3) Intensité de charges

**L'intensité de charge** notée **q** (force par unité de longueur), est donnée par l'équation différentielle :

$$q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}$$

#### 4) Remarque

Il est utile, lorsque nous utilisons les équations d'équilibre, de **remplacer** la **charge répartie** par sa **résultante** qui lui est par définition statiquement équivalente.

$$R = \int_0^L dF = \int_0^L q dx$$

$$R \bar{x} = \int_0^L x dF = \int_0^L q x dx$$

$L$  est la longueur de la poutre.

$\bar{x}$  est le point d'application de la résultante équivalente.

La position  $\bar{x}$  est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L q x dx}{\int_0^L q dx}$$

# **IX Relations différentielles d'équilibre**

## **1) Effort tranchant T**



$$\frac{dT}{dx} = -q$$

**En intégrant entre deux sections de la poutre définies par les coordonnées  $x_1$  et  $x_2$ , pour lesquelles les efforts tranchants sont respectivement égaux à  $T_1$  et  $T_2$ , nous avons :**

$$T_2 - T_1 = - \int_{x_1}^{x_2} q dx$$

## 2) Moment fléchissant $M_f$



$$\frac{dM_f}{dx} = -T$$

En intégrant entre deux sections de la poutre définies par les coordonnées  $x_1$  et  $x_2$ , pour lesquelles les moments fléchissant sont respectivement égaux à  $M_{f_1}$  et  $M_{f_2}$ , nous avons :

$$M_{f_2} - M_{f_1} = - \int_{x_1}^{x_2} T dx$$

### 3) Calcul pratique de T et Mf

- L'effort tranchant **T** est égal à la **somme algébrique des forces** extérieures située **d'un même côté de la section** (par convention à gauche).
- Le moment de flexion **M<sub>f</sub>** est égal à la **somme algébrique des moments** de toutes les forces extérieures située **d'un même côté de la section** (par convention à gauche).
- A la **section** précise où **T = 0**, le **moment fléchissant** atteint une valeur **maximale ou minimale**.

# **X** État des contraintes

## **1)** Expression de la contrainte normale $\sigma$

$$\sigma = \sigma_{\max} \frac{2y}{a}$$

et

$$\sigma_{\max} = M_f \frac{a}{2I_{Gz}}$$

**par conséquent :**

$$\sigma = y \frac{M_f}{I_{Gz}}$$

## 2) Contrainte normale maximum

La contrainte  $\sigma$  est maximum dans la section pour laquelle  $M_f$  est maximum. En plus dans cette section, la contrainte maximale est obtenue lorsque la variable  $y$  est maximale.



$$\sigma_{\max i} = y_{\max i} \frac{M_{f \max i}}{I_{Gz}} = \frac{M_{f \max i}}{W_{Gz}}$$

## 3) Condition de résistance

La **condition de résistance** à l'extension du matériau constituant la poutre est :



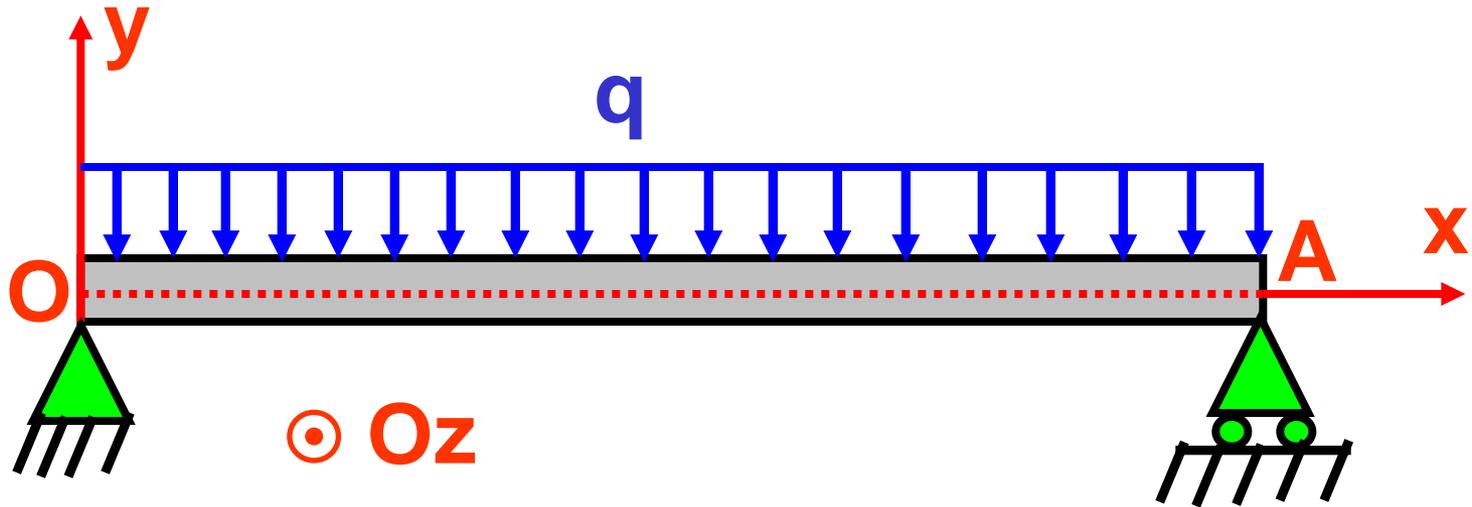
$$\sigma_{\max i} \leq \frac{\sigma_{\text{limite}}}{\beta}$$

$\beta$  est le coefficient de sécurité.

# Exercice 11

Une poutre de longueur  $L$ , posée sur deux appuis  $O$  et  $A$  supporte une charge uniformément répartie  $q$ .

- 1) Déterminer les réactions aux appuis  $O$  et  $A$ .
- 2) Donner l'expression de l'effort tranchant et tracer le diagrammes  $T(x)$ .
- 3) Trouver l'expression du moment fléchissant et tracer le diagramme  $M_f(x)$ .
- 4) Vérifier les équations différentielles d'équilibre.
- 5) Application numérique:  $q = 40 \text{ daNm}^{-1}$  et  $L = 4 \text{ m}$ .

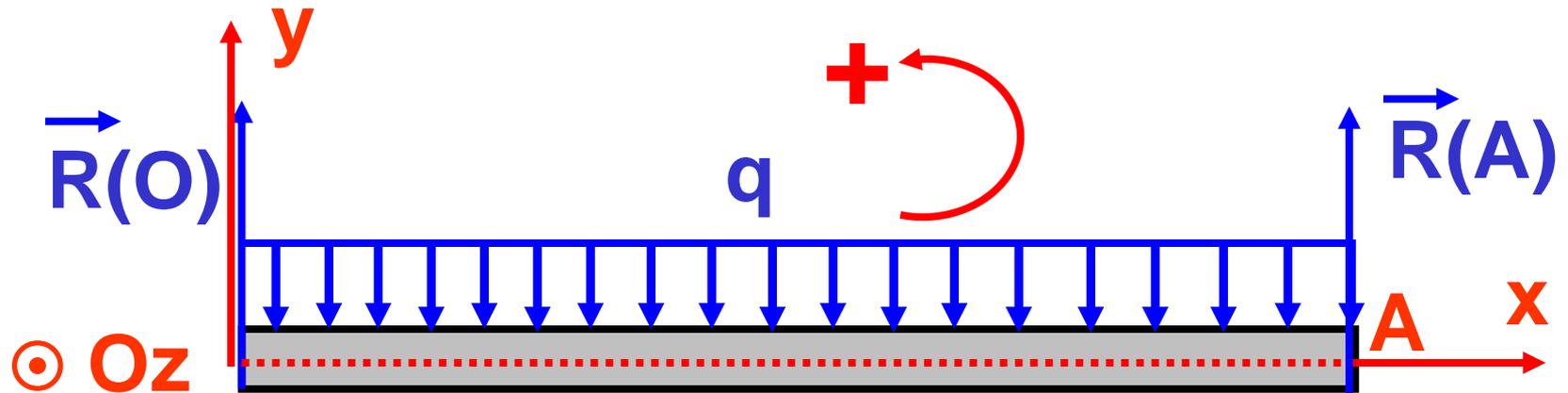


$q$  est une force par unité de longueur. C'est une constante.

La poutre repose sur un **appui fixe** au point  $x=0$  et sur un **appui mobile** au point  $x=L$ .

# 1) Calcul des réactions, $T(x)$ et $M_f(x)$

Étudions l'équilibre global de la poutre.



$$\left\{ \begin{array}{l} R(O) + R(A) - \int_0^L q \cdot dx = 0 \end{array} \right.$$

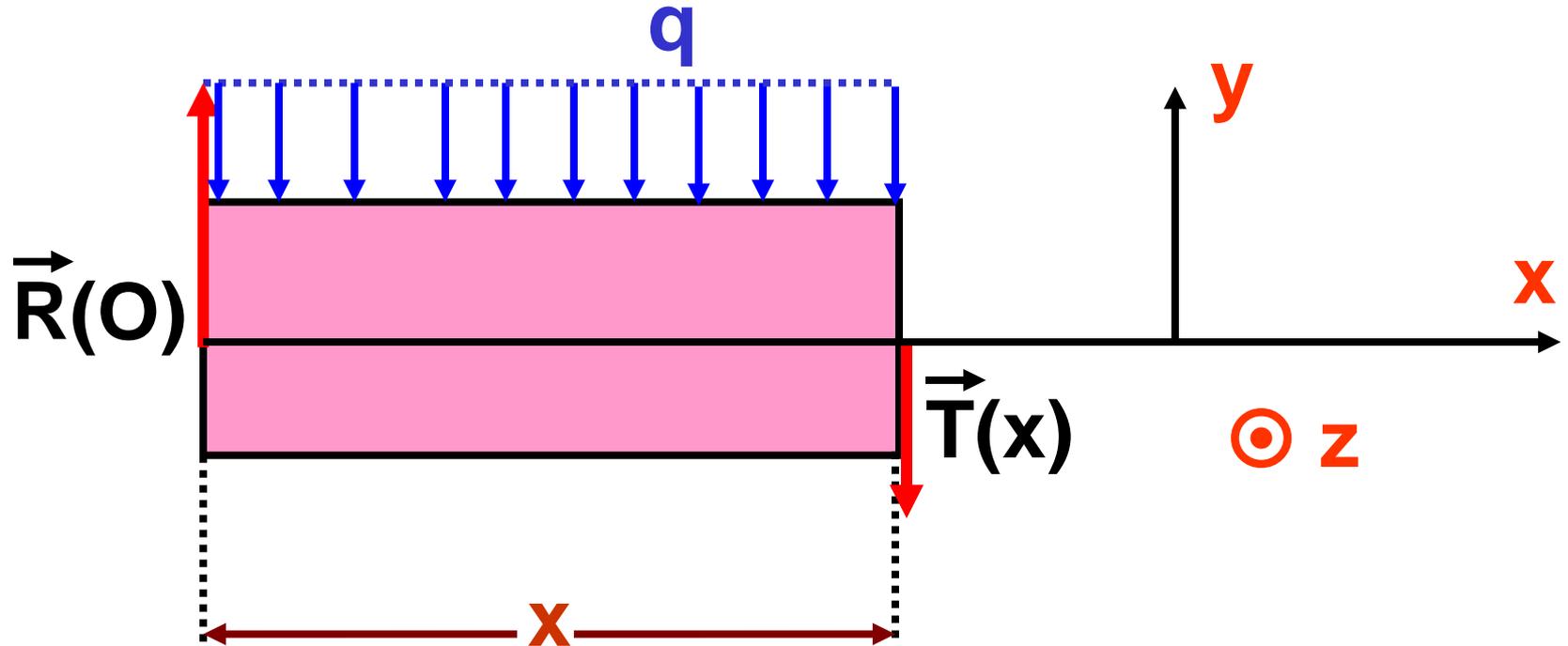


$$R(O) = R(A) = \frac{qL}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L \cdot R(A) - \int_0^L xq dx = 0 \end{array} \right.$$

## 2) Calcul de l'effort tranchant T(x)

Étudions l'équilibre d'un tronçon de poutre de longueur  $x$ .

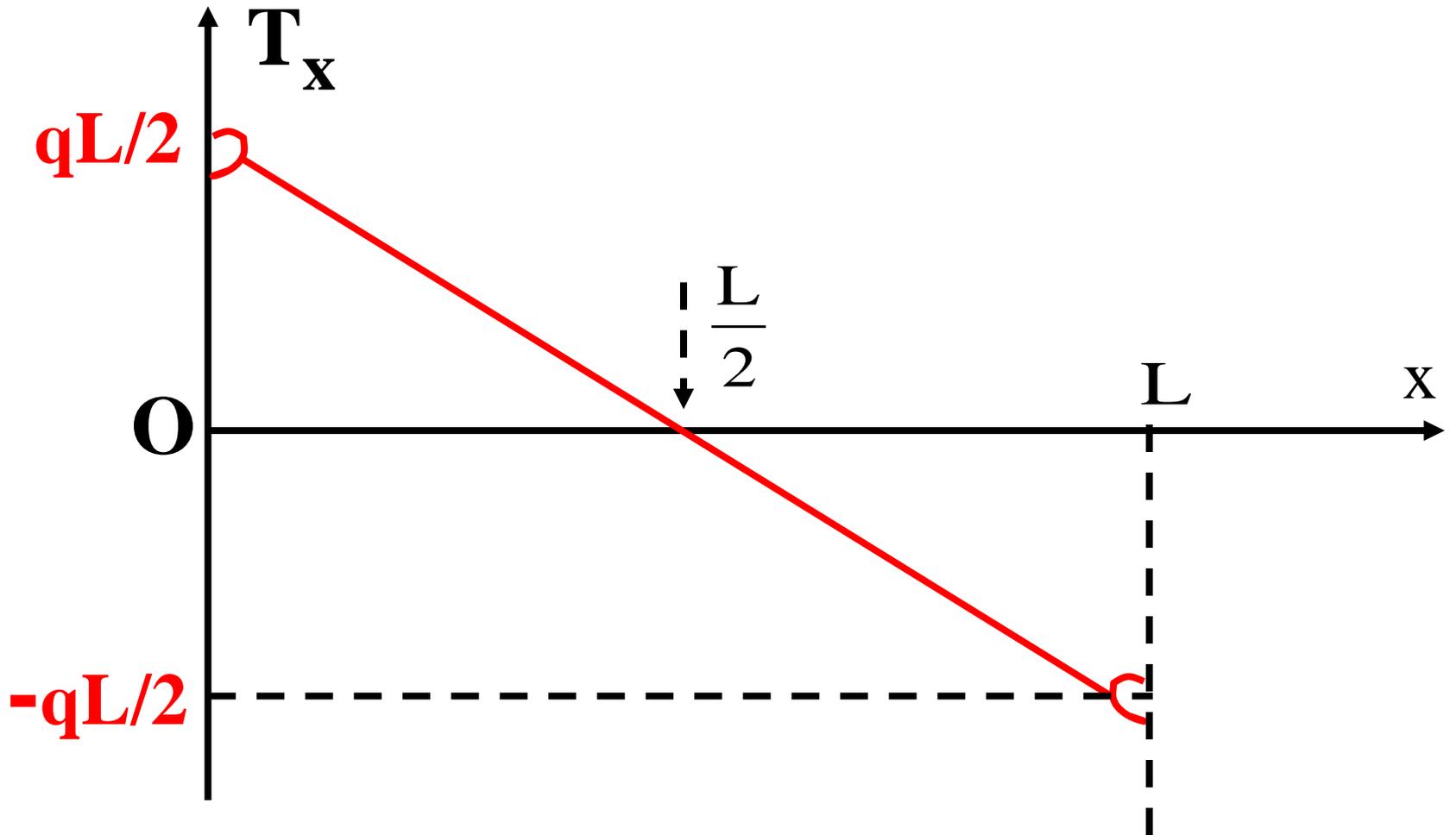


$$T(x) = R(O) - qx$$



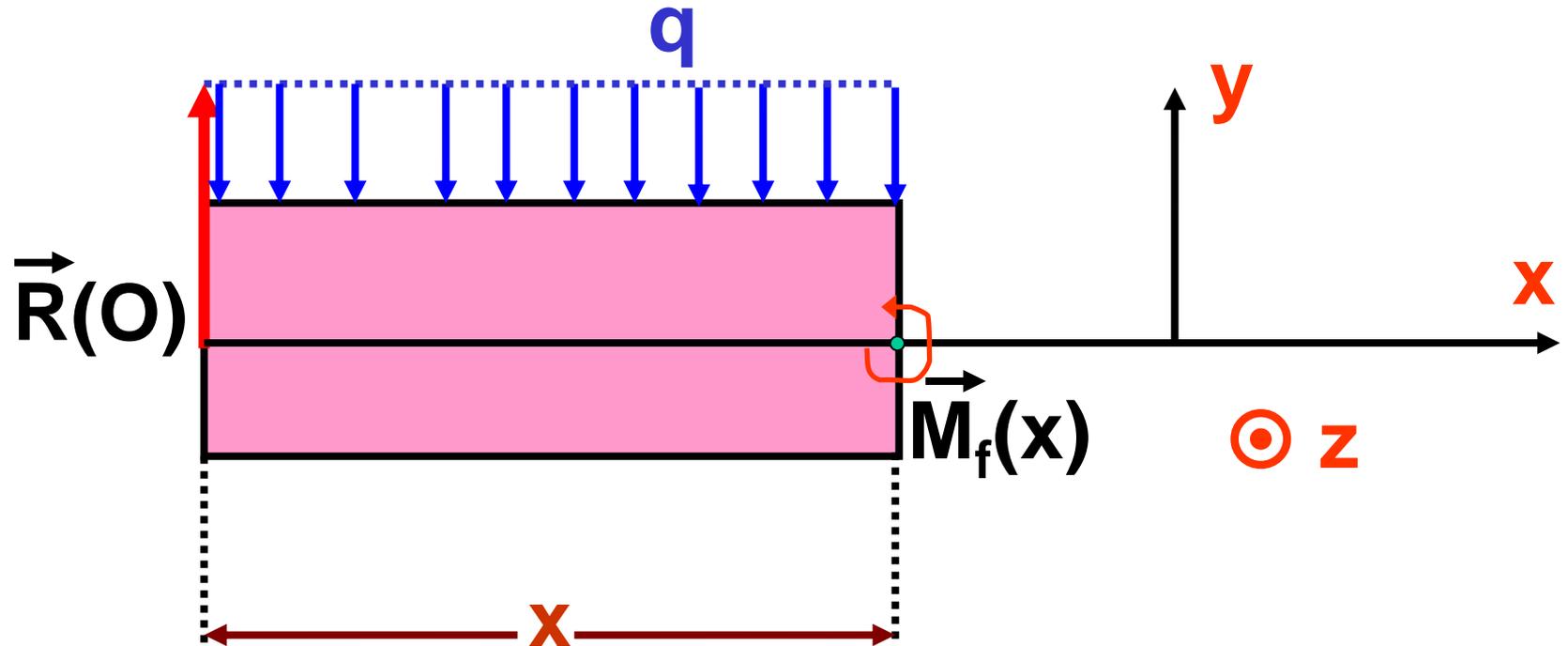
$$T(x) = -qx + \frac{qL}{2}$$

# Diagramme de l'effort tranchant



### 3) Calcul du moment fléchissant $M_f(x)$

Étudions l'équilibre d'un **tronçon de poutre de longueur  $x$** .

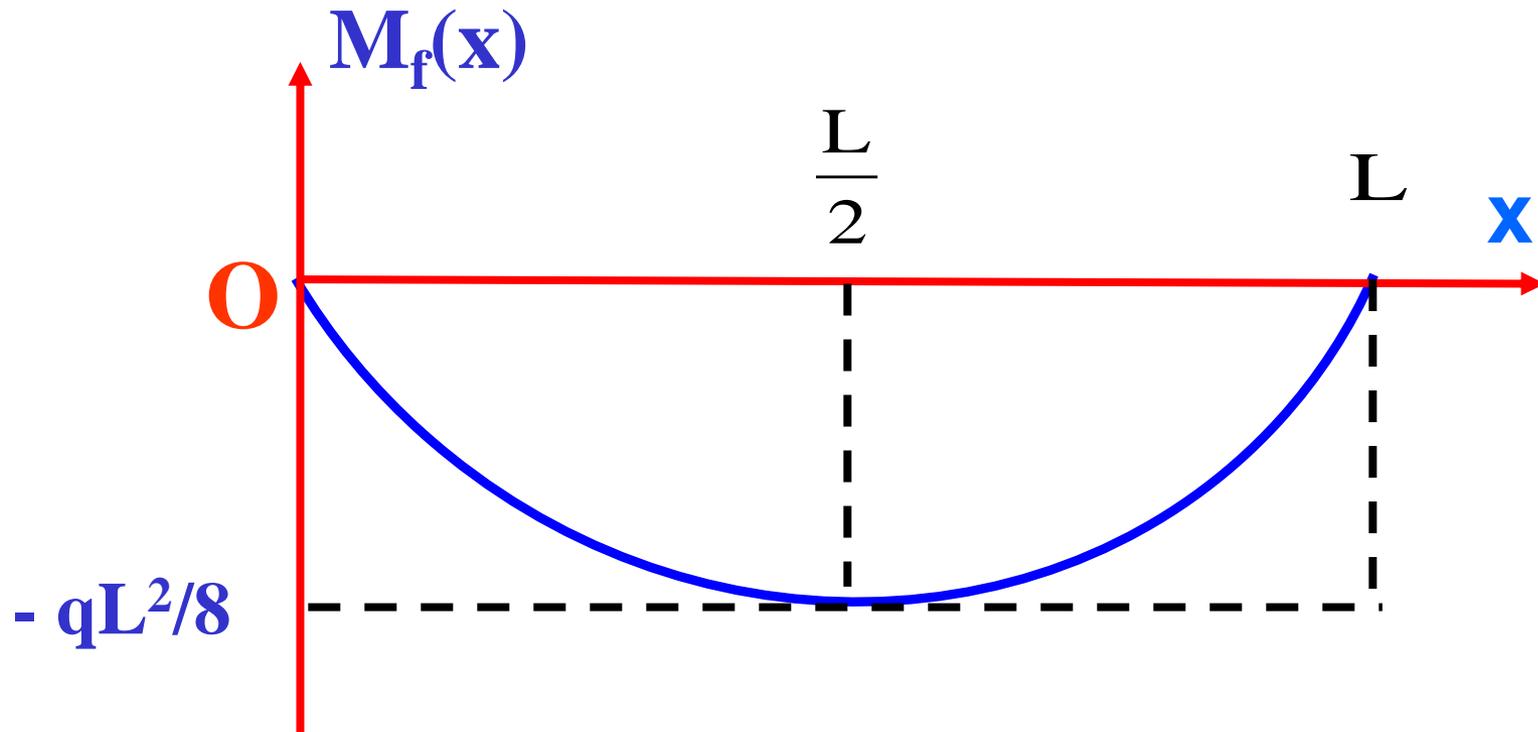


$$M_f(x) = -xR(O) + \frac{x}{2}qx$$



$$M_f(x) = \frac{q}{2}x^2 - \frac{qL}{2}x$$

# Diagramme du moment fléchissant



$$|M_{f \text{ maxi}}| = qL^2/8$$

## 4) Les équations différentielles d'équilibre



$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} = -q \\ \frac{dM_f(x)}{dx} = -T \end{cases}$$

**NB** : Ces équations sont **indépendantes des conditions aux limites** ( **conditions d'appuis** ).

### Remarques :

- ✓ La section correspondant à la **valeur maximale du moment de flexion** est appelée **section dangereuse**.
- ✓ L'effort tranchant **T** subit une **discontinuité** au niveau des appuis (lieu des **forces concentrées**).

## 5) Application numérique

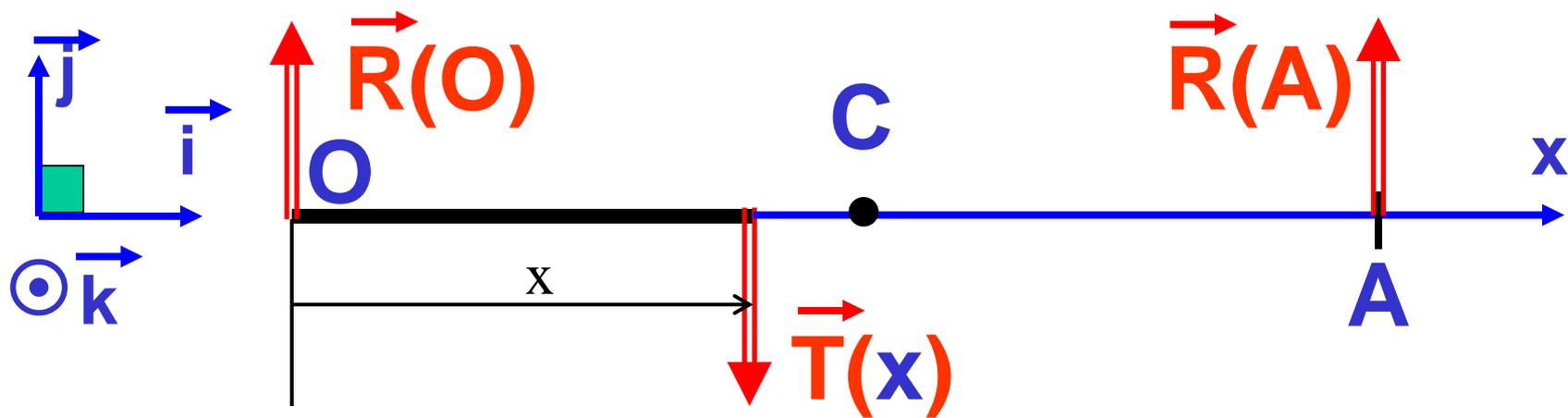
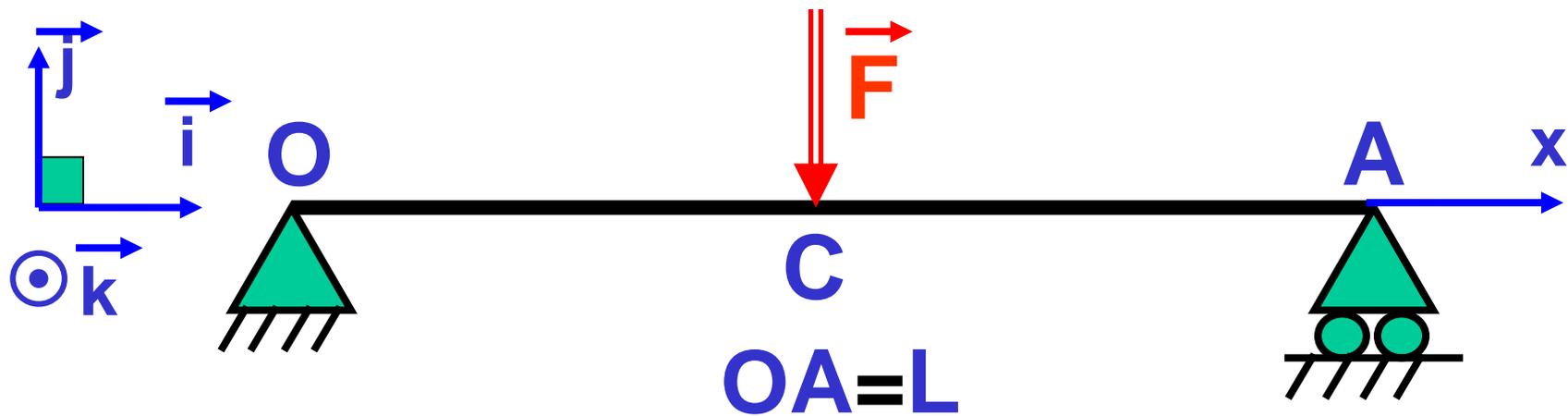
$$q = 40 \text{ daNm}^{-1} ; L = 4 \text{ m}$$

$R(O) = R(A)$	800 en N
$T(x)$	- 400(x-2) en N
$T_{\text{maxi}}$	800 N
$M_f(x)$	200 x(x-4) en Nm
$M_{f\text{maxi}}$	800 Nm

## Exercice 12

Une poutre de longueur  $L$ , prenant appuis en  $O$  et  $A$  supporte une charge localisée en son centre  $C$ .

- 1) Déterminer les réactions aux appuis  $O$  et  $A$ .
- 2) Donner l'expression de l'effort tranchant le long de la poutre et tracer le diagramme  $T(x)$ .
- 3) Quelle est l'expression du moment fléchissant le long de la poutre et tracer le diagramme  $M_f(x)$ .
- 4) Trouver l'expression de la flèche maximale  $f_c$ .

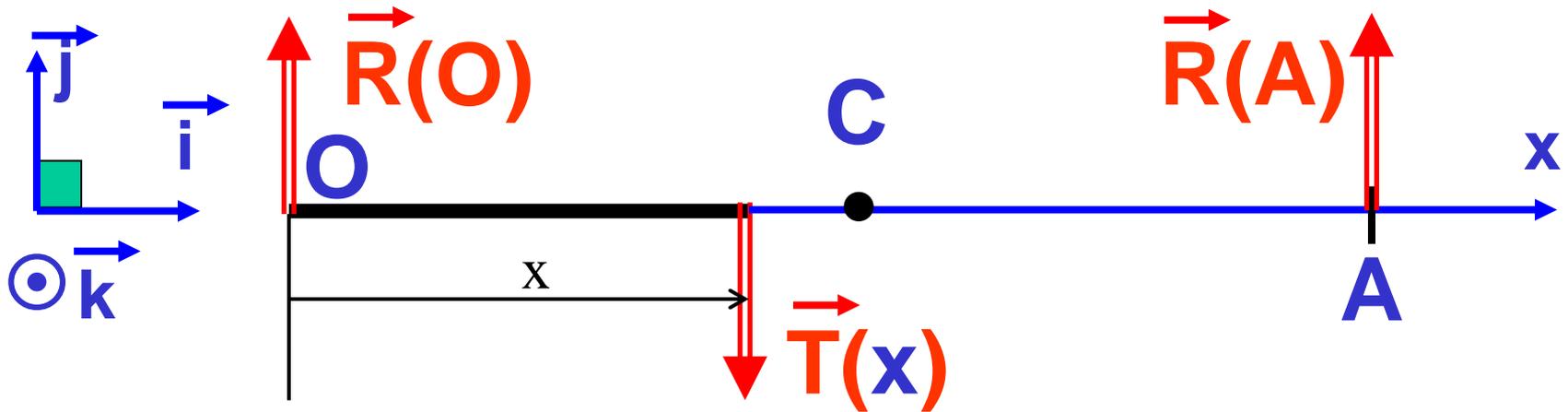


# 1) Calcul des réactions

En tenant compte de la symétrie, on peut écrire :



$$R(O) = R(A) = \frac{F}{2}$$



## 2) Calcul de l'effort tranchant T(x)

Soit M un point d'abscisse x :

**Zone OC ( $x < L/2$ )**

$$T(x) = R(O)$$

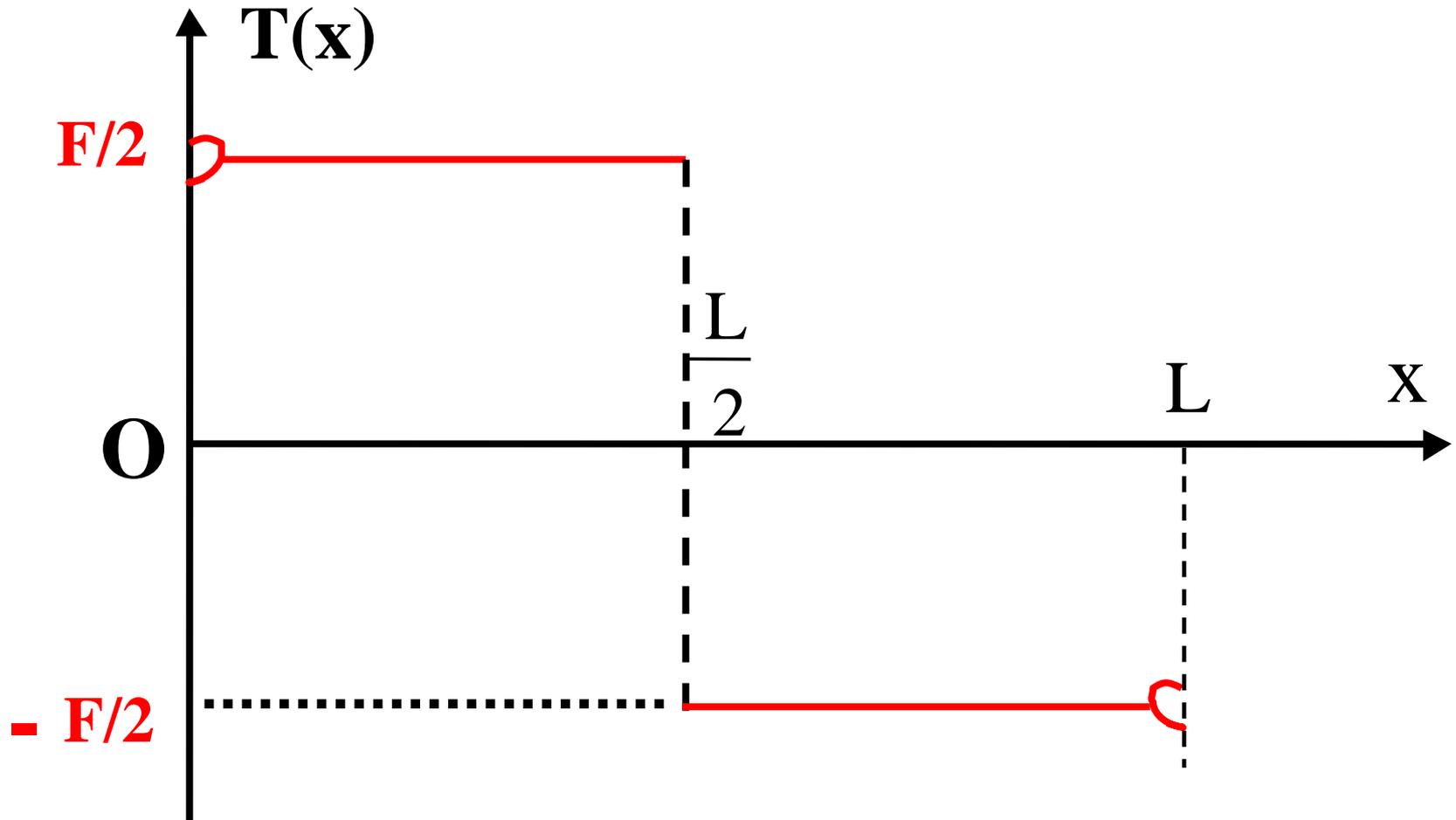
$$T(x) = \frac{F}{2}$$

**Zone CA ( $x > L/2$ )**

$$T(x) = R(O) - F$$

$$T(x) = -\frac{F}{2}$$

## Diagramme de l'effort tranchant



### 3) Calcul du moment fléchissant $M_f(x)$

Soit M un point d'abscisse x :

**Zone OC ( $x < L/2$ )**

$$M_f(x) = -xR(O)$$

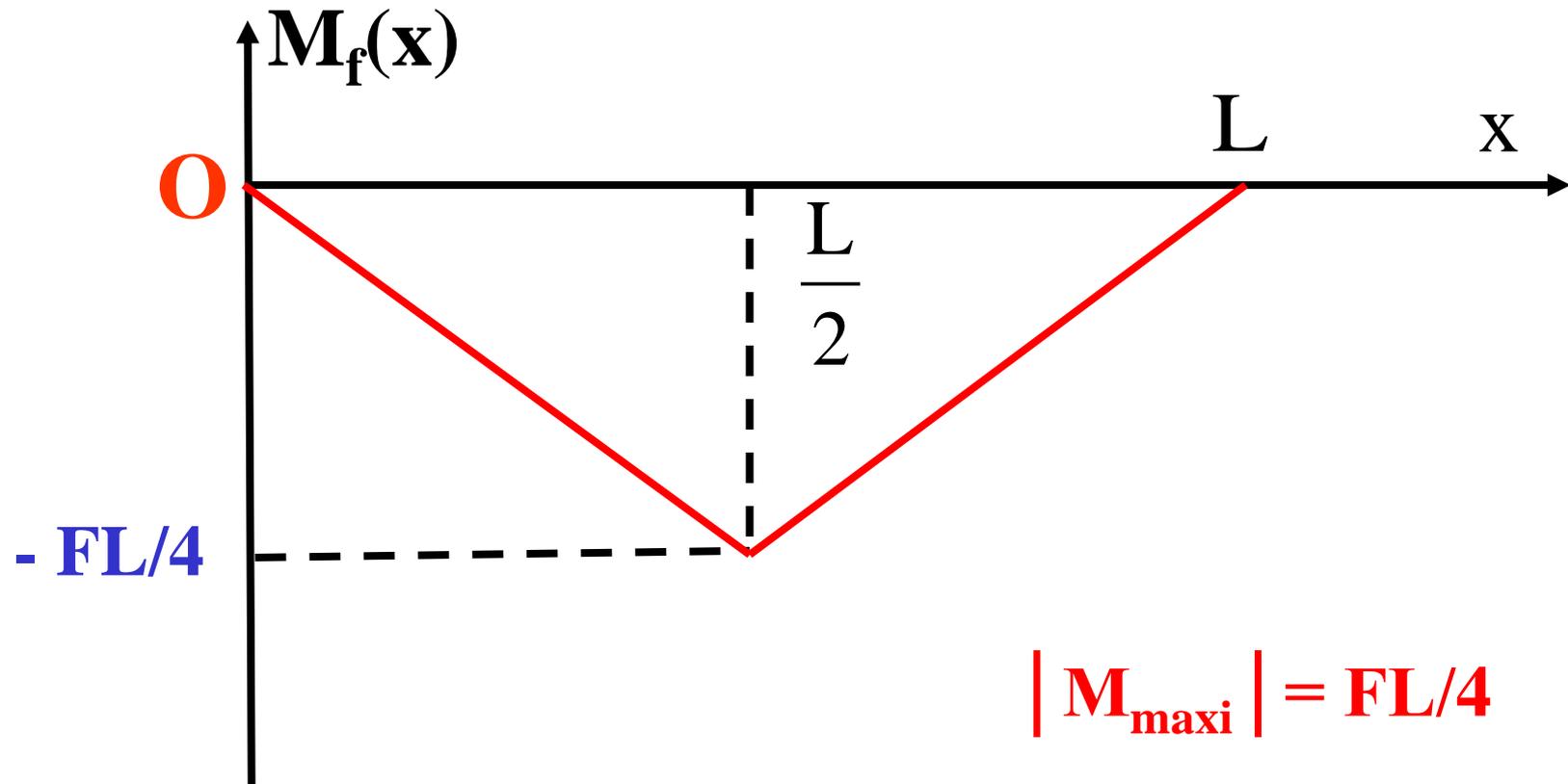
$$M_f(x) = -\frac{F}{2}x$$

**Zone OC ( $x > L/2$ )**

$$M_f(x) = -x\frac{F}{2} + \left(x - \frac{L}{2}\right)F$$

$$M_f(x) = \frac{F}{2}x - \frac{FL}{2}$$

# Diagramme du moment fléchissant



## 4) Calcul de la flèche maximale

On sait qu'on a un point M d'abscisse  $x$  situé dans la zone OC, le moment de flexion est donné par :

$$M_f(x) = -\frac{F}{2}x$$

L'équation différentielle de la déformée entre O et C est la suivante :

$$EI_{Gz} \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_f$$

ou

$$\frac{2EI_{Gz}}{F} \frac{d^2 y}{dx^2} = x$$

**Intégrons une première fois :**

$$\frac{2EI_{Gz}}{F} \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

**En  $x = L/2$  nous avons un extremum ;  $(dy/dx) = 0$**

$$C_1 = -\frac{L^2}{8}$$

**d'où**

$$\frac{2EI_{Gz}}{F} \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{8}$$

**Intégrons une deuxième fois :**

$$\frac{2EI_{Gz}}{F} y = \frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{8} x + C_2$$

**Pour  $x = 0, y = 0$ , ce qui entraîne  $C_2 = 0$ .**

$$y = \frac{F}{2EI_{Gz}} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{8} x \right)$$

**La flèche maximale en C est donné pour  $x = L/2$ .**

$$f_c = \frac{FL^3}{48EI_{Gz}}$$

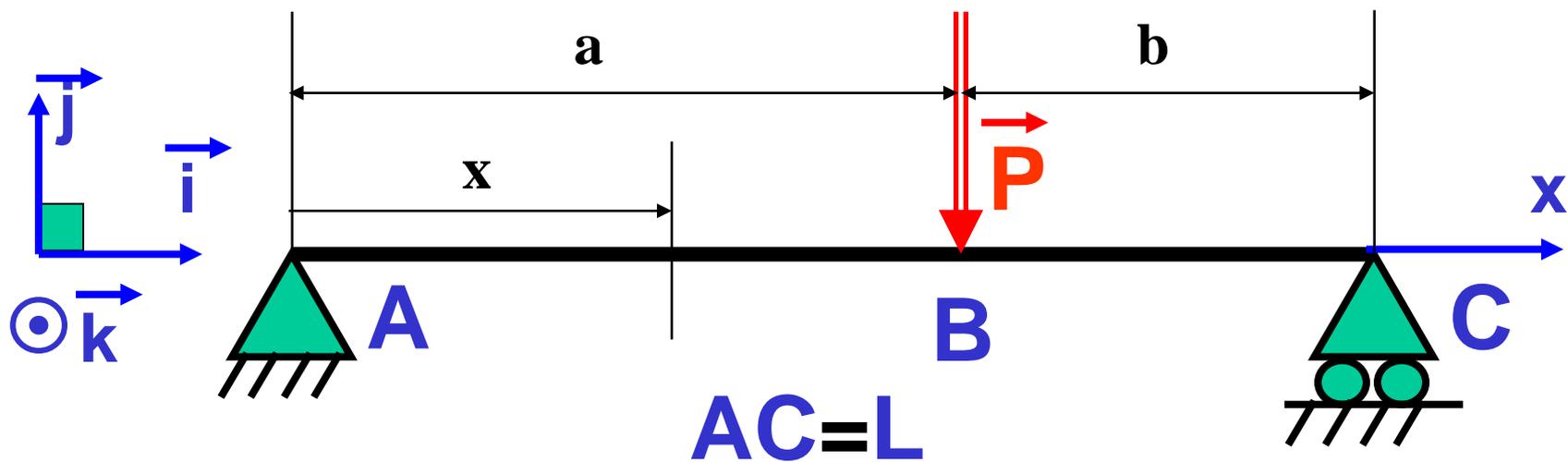
**$f_c$  en mm;      F en N;      L en mm;**

**E en Nmm<sup>2</sup>      I en mm<sup>2</sup>.**

## Exercice 13

La poutre illustrée à la figure ci-dessous repose sur deux appuis simples en A et C. Elle supporte une charge P concentrée en B.

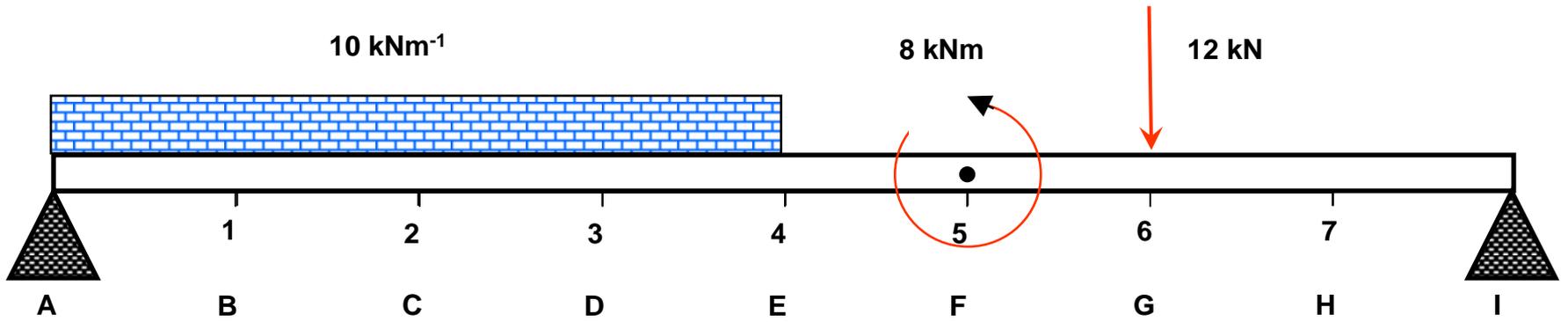
- 1) Déterminer les réactions en A,  $R_A$  et en C,  $R_C$ .
- 2) Étudier l'effort tranchant  $T(x)$ , le long de la poutre et tracer le diagramme correspondant.
- 3) Étudier le moment fléchissant  $M(x)$ , le long de la poutre et représenter la fonction sur un graphique.
- 4) Trouver en fonction des données la position de la section dangereuse.



## Exercice 14

La figure ci dessous représente une poutre soumise à un effort concentré en G de 12 kN, à un moment localisé en F de 8 kNm et à un chargement uniformément répartie de 10 kN/m entre A et E. La poutre repose sur des appuis simples en A et I.

- 1) Calculer les réactions en A  $R_A$  et en I  $R_I$ .
- 2) Déterminer la loi de variation de  $T(x)$ . Représenter sur un graphique  $T(x)$ .
- 3) Déterminer la loi de variation de  $M(x)$ . Représenter sur un graphique  $M(x)$ .
- 4) Quelle est la section la plus vulnérable ?.





**Fin du cours**

**Pr. A. AKEF**