

Produit Scalaire : Rappels et Applications

I. Définition du produit scalaire

Définition

1) Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls est le réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (ou $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$) défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

On appelle carré scalaire et on note $\vec{u}^2$ le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$

2) En notant $\vec{u} = \overrightarrow{IA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{IB}$ et H le projeté orthogonal de B sur (IA) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IH} = \begin{cases} IA \times IH & \text{si } \overrightarrow{IA} \text{ et } \overrightarrow{IH} \text{ ont le même sens} \\ -IA \times IH & \text{si } \overrightarrow{IA} \text{ et } \overrightarrow{IH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

II. Calcul

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et les réels α et β :

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $(\alpha\vec{u}) \cdot (\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \cdot \vec{v})$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

d) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

e) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

III. Orthogonalité

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

IV. Vecteur normal

Un vecteur non nul est dit normal à une droite D s'il est orthogonal à un vecteur directeur de D.

V. Application à l'analyse

Soient un repère orthonormal, $\vec{u}(x_u y_u)$ et $\vec{v}(x_v y_v)$. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$$

VI. Coordonnée d'un vecteur normal

Soit D la droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans un repère orthonormal.

Alors $\vec{n}(a, b)$ est normal à D

VII. Théorème d'Al Kashi

Soit ABC un triangle quelconque.

On a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \times \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

VIII. Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC].

On a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

IX. Aire d'un triangle

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin(\hat{A})$$

X. Applications

Dans chaque cas, déterminons l'ensemble des points M vérifiant l'égalité :

a) $MA - MB = 0$

$$\iff MA = MB$$

L'ensemble des points M forme la médiatrice de [AB]

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

$$\iff \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM}$$

L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) passant par A

c) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ⁽¹⁾

En introduisant I milieu de [AB] :

$$_{(1)} \iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 0$$

$$\iff MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$$

Comme I est le milieu de [AB] , $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 0$

De plus , comme A , I et B sont alignés dans cet ordre , $\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = -1$

On en déduit :

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\|\overrightarrow{IA}\| \times \|\overrightarrow{IB}\|$$

soit :

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\frac{AB^2}{4}$$

Il advient :

$$_{(1)} \iff MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0$$

$$\iff MI^2 = \frac{AB^2}{4}$$

$$\iff MI = \frac{1}{2}AB$$

L'ensemble des points M est le **cercle de diamètre [AB]**

d) $MA^2 + MB^2 = a$ pour tout a positif ⁽²⁾

On introduit le milieu I du segment [AB] :

$$_{(2)} \iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = a$$

$$\iff 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}) + IA^2 + IB^2 = a$$

$$\iff 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = a$$

$$\iff 2MI^2 = a - IA^2 - IB^2$$

• Si $a - IA^2 - IB^2 < 0$, l'équation n'aura pas de solution. L'ensemble des points M est l'ensemble vide.

• Si $a - IA^2 - IB^2 > 0$, $_{(2)} \iff MI = \sqrt{\frac{a - IA^2 - IB^2}{2}}$

L'ensemble des points M représente le **cercle de centre I et de diamètre** $\sqrt{\frac{a - IA^2 - IB^2}{2}}$

• Si $a - IA^2 - IB^2 = 0$, l'ensemble des points M est réduit au point I.

e) $MA^2 - MB^2 = a$ pour tout a réel. ⁽³⁾

Même technique que pour le d) , on introduit le point I milieu de [AB].

On obtient alors :

$$_{(3)} \iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = a$$

En utilisant l'identité remarquable $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$:

$$\iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = a$$

$$\iff 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = a$$

$$\iff \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = \frac{a}{2}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

$$(3) \iff \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HI} = \frac{a}{2}$$

L'ensemble des points M est **la droite perpendiculaire à (AB) telle que $HI = \frac{|a|}{2BA}$** .