Econométrie I

S5 - Module M3

Parcours : Economie

Chapitre 0: Les Tests d'Hypothèses

Driss TOUIAR

Faculté des Sc. Juridiques, Economiques et Sociales
Département des Sc Economiques et de Gestion- Fès

November 9, 2017

Table des matières

1 Introduction Générale

Table des matières

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population

Table des matières

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion

Table des matières

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p

Table des matières

1. Introduction Générale
2. LES TESTS Pour 1 Population
   - Tests Relatifs à Une Proportion
     - Test Unilatéral à gauche pour p
     - Test Unilatéral à droite pour la proportion

Table des matières

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion

Table des matières

1 Introduction Générale

2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne

Table des matières

1. Introduction Générale
2. LES TESTS Pour 1 Population
   - Tests Relatifs à Une Proportion
     - Test Unilatéral à gauche pour p
     - Test Unilatéral à droite pour la proportion
     - Test Bilatéral pour la proportion
   - Tests Relatifs à Une Moyenne
     - Test Unilatéral à droite pour μ

Table des matières

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ

Table des matières

1 Introduction Générale

2 LES TESTS Pour 1 Population

- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne

Table des matières

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance

Table des matières

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance

Table des matières

1. Introduction Générale
2. LES TESTS Pour 1 Population
    - Tests Relatifs à Une Proportion
        - Test Unilatéral à gauche pour p
        - Test Unilatéral à droite pour la proportion
        - Test Bilatéral pour la proportion
    - Tests Relatifs à Une Moyenne
        - Test Unilatéral à droite pour μ
        - Test Unilatéral à gauche pour μ
        - Test Bilatéral pour la moyenne
    - Tests Relatifs à Une Variance
        - Test Unilatéral à droite pour la variance
        - Test Unilatéral à gauche pour la variance

Table des matières

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance
  - Test Unilatéral à gauche pour la variance
  - Test Bilatéral pour la variance

Table des matières

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance
  - Test Unilatéral à gauche pour la variance
  - Test Bilatéral pour la variance

3 LES TESTS Pour 2 Populations

Table des matières

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance
  - Test Unilatéral à gauche pour la variance
  - Test Bilatéral pour la variance

3 LES TESTS Pour 2 Populations
- Tests de comparaison de 2 Variances

Table des matières

1. Introduction Générale
2. LES TESTS Pour 1 Population
   - Tests Relatifs à Une Proportion
     - Test Unilatéral à gauche pour p
     - Test Unilatéral à droite pour la proportion
     - Test Bilatéral pour la proportion
   - Tests Relatifs à Une Moyenne
     - Test Unilatéral à droite pour μ
     - Test Unilatéral à gauche pour μ
     - Test Bilatéral pour la moyenne
   - Tests Relatifs à Une Variance
     - Test Unilatéral à droite pour la variance
     - Test Unilatéral à gauche pour la variance
     - Test Bilatéral pour la variance
3. LES TESTS Pour 2 Populations
   - Tests de comparaison de 2 Variances

Table des matières

1. Introduction Générale
2. LES TESTS Pour 1 Population
   - Tests Relatifs à Une Proportion
     - Test Unilatéral à gauche pour p
     - Test Unilatéral à droite pour la proportion
     - Test Bilatéral pour la proportion
   - Tests Relatifs à Une Moyenne
     - Test Unilatéral à droite pour μ
     - Test Unilatéral à gauche pour μ
     - Test Bilatéral pour la moyenne
   - Tests Relatifs à Une Variance
     - Test Unilatéral à droite pour la variance
     - Test Unilatéral à gauche pour la variance
     - Test Bilatéral pour la variance
3. LES TESTS Pour 2 Populations
   - Tests de comparaison de 2 Variances

Table des matières

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance
  - Test Unilatéral à gauche pour la variance
  - Test Bilatéral pour la variance

3 LES TESTS Pour 2 Populations
- Tests de comparaison de 2 Variances

Bibliographie I

Pierre-André CORNILLON, Arnaud GUYADER, and François HUSSON.
Statistiques avec R.
Paris : PUR cop edition, 2012.

François HUSSON, SEBASTIEN LE, and J PAGES.
Analyse de données avec R.
Paris : PUR cop edition, 2009.

Bibliographie II

- Pierre LAFAYE de MICHEAUX, Rémy DROUILHET, and Benoit LIQUET.
  Le logiciel R - Maîtriser le langage - Effectuer des analyses (bio)Statistiques.
  Springer-Verlag 2 ème edition, 2014.

- Driss TOUIJAR.
  Statistique Descriptive Cours, Exercices et Examens corrigés, avec mise en oeuvre sous R.
  Octobre 2016.

Avertissement

Ce document est un support de Cours et non pas Le Cours.

Par conséquent, votre présence aux séances du cours est indispensable pour mieux cerner le programme de l'Econométrie...

La naissance de l'économétrie moderne

- L'économétrie moderne est née à la fin des années 30 et pendant les années 40.

La naissance de l'économétrie moderne

- L'économétrie moderne est née à la fin des années 30 et pendant les années 40.
- C'est la résultante de trois phénomènes :

La naissance de l'économétrie moderne

- L'économétrie moderne est née à la fin des années 30 et pendant les années 40.
- C'est la résultante de trois phénomènes :
  - le développement de la théorie de l'inférence statistique à la fin du XIX ème siècle ;

La naissance de l'économétrie moderne

- L'économétrie moderne est née à la fin des années 30 et pendant les années 40.
- C'est la résultante de trois phénomènes :
  - le développement de la théorie de l'inférence statistique à la fin du XIX ème siècle ;
  - la théorie macro-économique et la comptabilité nationale qui offrent des agrégats objectivement mesurables ;

La naissance de l'économétrie moderne

- L'économétrie moderne est née à la fin des années 30 et pendant les années 40.
- C'est la résultante de trois phénomènes :
  - le développement de la théorie de l'inférence statistique à la fin du XIX ème siècle ;
  - la théorie macro-économique et la comptabilité nationale qui offrent des agrégats objectivement mesurables ;
  - Enfin, et surtout , la forte demande de travaux économétriques(publics, entreprises) : modélisation.

La naissance de l'économétrie moderne

- L'économétrie moderne est née à la fin des années 30 et pendant les années 40.
- C'est la résultante de trois phénomènes :
  - le développement de la théorie de l'inférence statistique à la fin du XIX ème siècle ;
  - la théorie macro-économique et la comptabilité nationale qui offrent des agrégats objectivement mesurables ;
  - Enfin, et surtout , la forte demande de travaux économétriques(publics, entreprises) : modélisation.
- A partir des années 60, l'informatique va rendre presque routinière l'utilisation de l'économétrie.

La naissance de l'économétrie moderne

On peut distinguer deux grandes périodes de la recherche économétrique moderne.

La naissance de l'économétrie moderne

On peut distinguer deux grandes périodes de la recherche économétrique moderne.

- $\rightarrow$ années 70 l'économétrie va étudier la spécification et la solvabilité de modèles macroéconomiques à équations simultanées.

La naissance de l'économétrie moderne

On peut distinguer deux grandes périodes de la recherche économétrique moderne.

- $\rightarrow$ années 70 l'économétrie va étudier la spécification et la solvabilité de modèles macroéconomiques à équations simultanées.
- Puis à la suite de ce que l'on a appelé la révolution des anticipations rationnelles et de la critique de Lucas, la recherche se tournera davantage vers la microéconomie et l'analyse des séries temporelles .

Introduction Générale

L'économétrie c'est la branche des sciences économiques qui traite des modèles et des méthodes mathématiques appliquées aux grandeurs et variations économiques.

Introduction Générale

L'économétrie c'est la branche des sciences économiques qui traite des modèles et des méthodes mathématiques appliquées aux grandeurs et variations économiques.
Pour analyser, interpréter et prévoir divers phénomènes économiques, on utilise Le calcul infinitésimal, les probabilités, les statistiques et la théorie des jeux ainsi que d'autres domaines des mathématiques.

Introduction Générale

Exemples

- les variations de prix sur le marché;

Introduction Générale

Exemples

- les variations de prix sur le marché;
- l'évolution des coûts de production;

Introduction Générale

Exemples

- les variations de prix sur le marché;
- l'évolution des coûts de production;
- le taux de croissance;

Introduction Générale

Exemples

- les variations de prix sur le marché;
- l'évolution des coûts de production;
- le taux de croissance;
- les variations du taux de change...

Introduction Générale

Les modèles utilisés ne permettent pas de prévoir, au sens strict, l'évolution des phénomènes économiques, mais davantage de construire des hypothèses et d'extrapoler des tendances futures à partir d'éléments actuels.

Introduction

- Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon aléatoire relatif à la V.A. parente X de loi $\mathscr{L}(\theta)$, où $\theta \in \Theta$ est un paramètre réel inconnu.

Introduction

- Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon aléatoire relatif à la V.A. parente X de loi $\mathscr{L}(\theta)$, où $\theta \in \Theta$ est un paramètre réel inconnu.
- Le semestre précédent, on cherchait à estimer θ. Mais il arrive qu'on ait une idée préconçue sur sa valeur: $\theta = \theta_0$.

Introduction

- Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon aléatoire relatif à la V.A. parente X de loi $\mathscr{L}(\theta)$, où $\theta \in \Theta$ est un paramètre réel inconnu.
- Le semestre précédent, on cherchait à estimer θ. Mais il arrive qu'on ait une idée préconçue sur sa valeur: $\theta = \theta_0$.
- On désire alors tester la validité de cette hypothèse, en la confrontant à une hypothèse alternative.

Introduction

Cette dernière exprime une tendance différente au sujet du paramètre.

Introduction

Cette dernière exprime une tendance différente au sujet du paramètre.

Exemple des Hypothèses

- Est-ce que le taux de chômage au Maroc est p_0 ?

Introduction

Cette dernière exprime une tendance différente au sujet du paramètre.

Exemple des Hypothèses

- Est-ce que le taux de chômage au Maroc est p_0 ?
- Est-ce que l'espérance de vie au Maroc est m_0 ?...ou a augmenté ?

Méthodologie du test d'hypothèse

- On suppose que Θ est partitionné en Θ_0 et Θ_1: $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ et $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$

Méthodologie du test d'hypothèse

- On suppose que Θ est partitionné en Θ_0 et Θ_1: $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ et $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$
- Exprimons le fait que $\theta \in \Theta_0$ par l'hypothèse H_0 et le fait que $\theta \in \Theta_1$ par H_1.

Méthodologie du test d'hypothèse

Formulation des Hypothèses

$$\begin{cases} H_0 & : \quad "\theta \in \Theta_0" \\ \\ H_1 & : \quad "\theta \in \Theta_1" \end{cases}$$

Méthodologie du test d'hypothèse

- H_0 : s'appelle l'hypothèse nulle.

Méthodologie du test d'hypothèse

- H_0 : s'appelle l'hypothèse nulle.
- H_1 : s'appelle l'hypothèse alternative.

Méthodologie du test d'hypothèse

- H_0 : s'appelle l'hypothèse nulle.
- H_1 : s'appelle l'hypothèse alternative.

- Si Θ_0 se réduit au seul point θ_0 :
    - Θ_0 devient θ_0 : $\Theta_0 = \{\theta_0\}$

Méthodologie du test d'hypothèse

- H_0 : s'appelle l'hypothèse nulle.
- H_1 : s'appelle l'hypothèse alternative.

- Si Θ_0 se réduit au seul point θ_0 :
  - Θ_0 devient θ_0 : $\Theta_0 = \{\theta_0\}$
  - H_0 : "$\theta = \theta_0$" sera appelée l'hypothèse simple.

Méthodologie du test d'hypothèse

Soit l'hypothèse simple H_0 : "$\theta = \theta_0$"

Si H_1 est telle que H_1 : "$\theta > \theta_0$" ; alors on dit que le test est unilatéral à droite:

Méthodologie du test d'hypothèse

Soit l'hypothèse simple H_0 : "$\theta = \theta_0$"

Si H_1 est telle que H_1 : "$\theta > \theta_0$" ; alors on dit que le test est unilatéral à droite:

$$\text{T.U.D.} \begin{cases} H_0 & : \quad "\theta = \theta_0" \\ & \# \\ H_1 & : \quad "\theta > \theta_0" \end{cases}$$

Méthodologie du test d'hypothèse

Soit l'hypothèse simple H_0 : "$\theta = \theta_0$"

Si H_1 est telle que H_1 : "$\theta < \theta_0$" ; alors on dit que le test est unilatéral à gauche:

Méthodologie du test d'hypothèse

Soit l'hypothèse simple H_0 : "$\theta = \theta_0$"

Si H_1 est telle que H_1 : "$\theta < \theta_0$" ; alors on dit que le test est unilatéral à gauche:

$$\text{T.U.G.} \left\{ \begin{array}{ccc} H_0 & : & "\theta = \theta_0" \\ & \# & \\ H_1 & : & "\theta < \theta_0" \end{array} \right.$$

Méthodologie du test d'hypothèse

Soit l'hypothèse simple H_0 : "$\theta = \theta_0$"

Si H_1 est telle que H_1 : "$\theta \neq \theta_0$" ; alors on dit que le test est Bilateral:

Méthodologie du test d'hypothèse

Soit l'hypothèse simple H_0 : "$\theta = \theta_0$"

Si H_1 est telle que H_1 : "$\theta \neq \theta_0$" ; alors on dit que le test est Bilateral:

$$\text{T.B.} \begin{cases} H_0 & : \quad "\theta = \theta_0" \\ & \# \\ H_1 & : \quad "\theta \neq \theta_0" \end{cases}$$

Règle de décision

Definition

Un test d'hypothèse, est une règle de décision permettant, au vu de la réalisation $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'E.A., de répondre à la question " dans lequel des deux sous ensemble se trouve θ ?"

Les Types d'erreurs

- Cette règle de décision peut conduire à deux types d'erreurs :

Les Types d'erreurs

- Cette règle de décision peut conduire à deux types d'erreurs :
- On rejette H_0 alors que H_0 est vraie:

$$\boxed{RH_0/H_0\ vraie}$$

On l'appelle "erreur de première espèce"

Les Types d'erreurs

- Cette règle de décision peut conduire à deux types d'erreurs :
- On rejette H_0 alors que H_0 est vraie:

$$\boxed{RH_0/H_0 \ vraie}$$

On l'appelle "erreur de première espèce"

- On ne rejette pas H_0 alors que H_1 est vraie:

$$\boxed{NRH_0/H_1 \ vraie}$$

c'est "l'erreur de seconde espèce".

Les Types de risques

→ On définit alors la probabilité de commettre l'une ou l'autre erreur:

1. $\alpha = P\left(RH_0/H_0\ vraie\right) = P_0\left(RH_0\right)$

   → C'est le risque de première espèce.

Les Types de risques

$\rightarrow$ On définit alors la probabilité de commettre l'une ou l'autre erreur:

1. $\alpha = P\left(RH_0 / H_0 \ vraie\right) = P_0\left(RH_0\right)$

   $\rightarrow$ C'est le risque de première espèce.

2. $\beta = P\left(NRH_0 / H_1 \ vraie\right) = P_1\left(NRH_0\right)$

   $\rightarrow$ C'est le risque de seconde espèce.

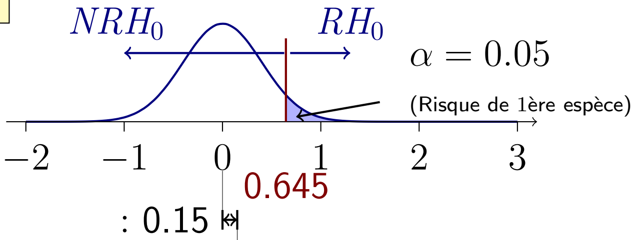
La puissance du Test

→ La puissance du Test est définie comme suit :

1. $\pi = 1 - \beta = P\left(NRH_0 / H_0 \; vraie\right) = P_1\left(NRH_0\right)$

La puissance d'un test d'hypothèse :

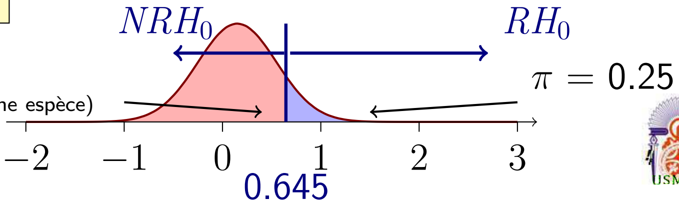
Sous H_0:



Sous H_1:

$\beta = 0.4$

(Risque de 2ème espèce)



Méthodologie du test d'hypothèse

- Voici un tableau résumant toutes les situations

Décision / Réalité	RH_0	NRH_0
H_0 est vraie	Erreur de 1ère espèce	Bonne Décision
H_1 est vraie	Bonne Décision	Erreur de 2ème espèce

Procédure à suivre

1. définir le paramètre θ à tester

Procédure à suivre

1. définir le paramètre θ à tester
2. Formuler les deux hypothèses H_0 et H_1

Procédure à suivre

1. définir le paramètre θ à tester
2. Formuler les deux hypothèses H_0 et H_1
3. Préciser le Genre du test

Procédure à suivre

1. définir le paramètre θ à tester
2. Formuler les deux hypothèses H_0 et H_1
3. Préciser le Genre du test
4. Choisir la Statistique du test (bon estimateur de θ)

Procédure à suivre

1. définir le paramètre θ à tester
2. Formuler les deux hypothèses H_0 et H_1
3. Préciser le Genre du test
4. Choisir la Statistique du test (bon estimateur de θ)
5. Préciser la loi de la statistique sous H_0

Procédure à suivre

1. définir le paramètre θ à tester
2. Formuler les deux hypothèses H_0 et H_1
3. Préciser le Genre du test
4. Choisir la Statistique du test (bon estimateur de θ)
5. Préciser la loi de la statistique sous H_0
6. Écrire la règle de Décision

Procédure à suivre

1. définir le paramètre θ à tester
2. Formuler les deux hypothèses H_0 et H_1
3. Préciser le Genre du test
4. Choisir la Statistique du test (bon estimateur de θ)
5. Préciser la loi de la statistique sous H_0
6. Écrire la règle de Décision
7. Faire l'application numérique et décider

Procédure à suivre

1. définir le paramètre θ à tester
2. Formuler les deux hypothèses H_0 et H_1
3. Préciser le Genre du test
4. Choisir la Statistique du test (bon estimateur de θ)
5. Préciser la loi de la statistique sous H_0
6. Écrire la règle de Décision
7. Faire l'application numérique et décider
8. Conclure

Plan

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance
  - Test Unilatéral à gauche pour la variance
  - Test Bilatéral pour la variance
3 LES TESTS Pour 2 Populations
- Tests de comparaison de 2 Variances

Procédure à suivre

1. paramètre $\theta = p$ à tester;

Procédure à suivre

1. paramètre $\theta = p$ à tester;
2. F.H. $\Rightarrow$ T.U.G. pour la proportion;

Procédure à suivre

1. paramètre $\theta = p$ à tester;
2. F.H. $\Rightarrow$ T.U.G. pour la proportion;
3. F est un bon estimateur de p;

Procédure à suivre

1. paramètre $\theta = p$ à tester;
2. F.H. $\Rightarrow$ T.U.G. pour la proportion;
3. F est un bon estimateur de p;
4. Si le T.C.L. ($n \geq 30$; $np_0 \geq 5$ et $nq_0 \geq 5$) est vérifié sous H_0 alors :

$$Z = \frac{F - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0\ ;\ 1)$$

Procédure à suivre

1. paramètre $\theta = p$ à tester;
2. F.H. $\Rightarrow$ T.U.G. pour la proportion;
3. F est un bon estimateur de p;
4. Si le T.C.L. $(n \geq 30;\ np_0 \geq 5$ et $nq_0 \geq 5)$ est vérifié sous H_0 alors :
$$Z = \frac{F - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0\ ;\ 1)$$
5. ...

Test Unilatéral à gauche pour p

Formulation des hypothèses

$$\text{T.U.G}\left\{\begin{array}{ccc} H_0 & : & ''p = p_0\ '' \\ & \# & \\ H_1 & : & ''p < p_0\ '' \end{array}\right.$$

Test Unilatéral à gauche pour p

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } f < c_\alpha = p_0 - z_\alpha \times \sqrt{\dfrac{p_0 \times q_0}{n}} & \text{On rejette } H_0 \\ \text{Si } f \geq c_\alpha = p_0 - z_\alpha \times \sqrt{\dfrac{p_0 \times q_0}{n}} & \text{On ne rejette pas } H_0 \end{cases}$$

Test Unilatéral à gauche pour p

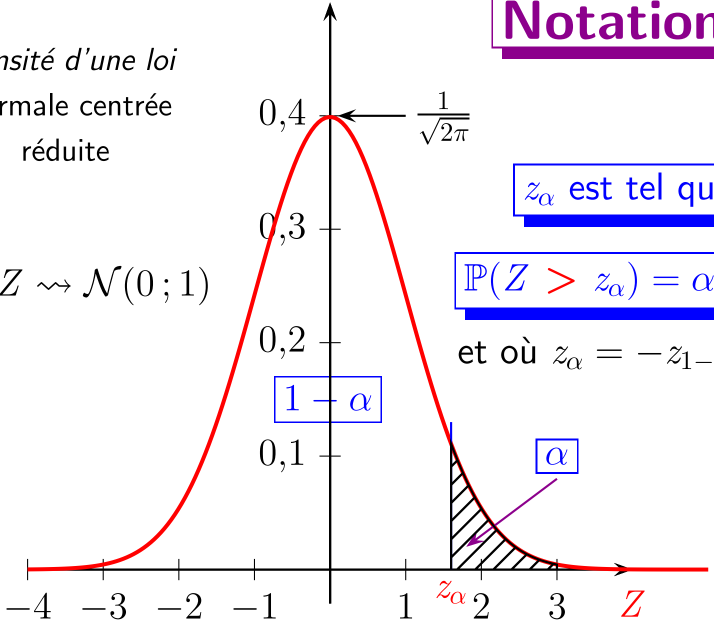
Proof.

Début de la démonstration □

Notation

Densité d'une loi *N*ormale centrée réduite

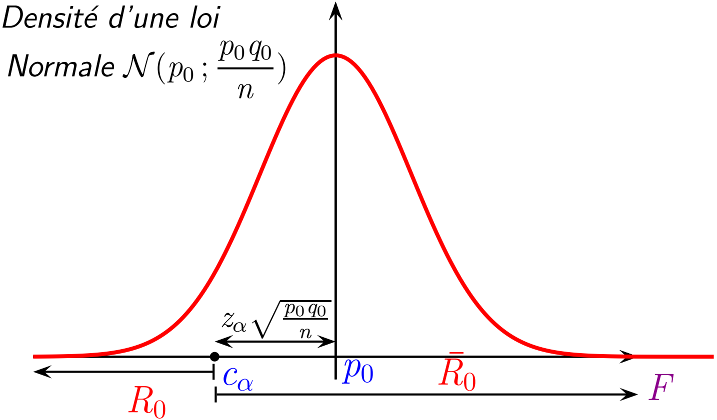
$Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0\,;1)$



z_α est tel que

$\mathbb{P}(Z > z_\alpha) = \alpha$

et où $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$



$$\alpha = \mathbb{P}_0(RH_0) = \mathbb{P}_0(F < c_\alpha)$$

$$= \mathbb{P}_0\Big(\frac{F - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} < \frac{c_\alpha - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}\Big)$$

$$= \mathbb{P}_0\Big(Z < \frac{c_\alpha - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{c_\alpha - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} = -z_\alpha \Rightarrow \boxed{c_\alpha = p_0 - z_\alpha\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}$$

Test Unilatéral à gauche pour p

Proof.

Fin de la démonstration □

Remarque

Les logiciels utilisent souvent *le niveau de signification* α_0(*p-value*) d'une réalisation f de F : c'est le plus petit α à partir du quel on ne peut plus rejeter H_0 :

$$\alpha_0 = \mathbb{P}_0(F < f)$$

Application

Supposons que $n = 100,\ p_0 = 0.75\ et\ f = 0.65$

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \mathbb{P}_0(F < f) \\ &= \mathbb{P}_0(Z < -2.309) = 1\%\end{aligned}$$

Le test est donc significatif à 5 %

Test Unilatéral à gauche pour p

α_0 p-value	**Interpretation**
$\alpha_0 < 1\%$	very strong evidence against H_0
$1\% \leq \alpha_0 < 5\%$	moderate evidence against H_0
$5\% \leq \alpha_0 < 10\%$	suggestive evidence against H_0
$10\% \leq \alpha_0$	little or no real evidence against H_0

Plan

1 Introduction Générale

2 LES TESTS Pour 1 Population

- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance
  - Test Unilatéral à gauche pour la variance
  - Test Bilatéral pour la variance

3 LES TESTS Pour 2 Populations

- Tests de comparaison de 2 Variances

Test Unilatéral à droite pour p

Formulation des hypothèses

$$\text{T.U.G} \begin{cases} H_0 & : & "p = p_0" \\ & \# & \\ H_1 & : & "p > p_0" \end{cases}$$

Test Unilatéral à droite pour p

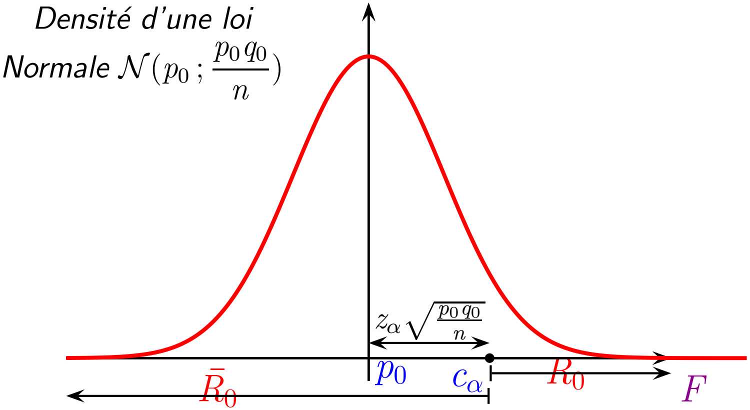
Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } f > c_\alpha = p_0 + z_\alpha \times \sqrt{\dfrac{p_0 \times q_0}{n}} & \text{On rejette } H_0 \\ \\ \text{Si } f \leq c_\alpha = p_0 + z_\alpha \times \sqrt{\dfrac{p_0 \times q_0}{n}} & \text{On ne rejette pas } H_0 \end{cases}$$

Test Unilatéral à droite pour p

Proof.

Début de la démonstration □



$$\alpha = \mathbb{P}_0(RH_0) = \mathbb{P}_0(F > c_\alpha)$$

$$= \mathbb{P}_0\left(\frac{F - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} > \frac{c_\alpha - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_0\left(Z > \frac{c_\alpha - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{c_\alpha - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} = +z_\alpha \Rightarrow \boxed{c_\alpha = p_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}$$

Test Unilatéral à droite pour p

Proof.

Fin de la démonstration $\square$

Test Unilatéral à droite pour p

Application

Supposons que $n = 100,\ p_0 = 0.75\ et\ f = 0.65$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \mathbb{P}_0(F > f) \\ &= \mathbb{P}_0(Z > -2.309) = 99\% \end{aligned}$$

Le test n'est donc pas significatif à 5 %

Plan

1. Introduction Générale
2. LES TESTS Pour 1 Population
   - Tests Relatifs à Une Proportion
     - Test Unilatéral à gauche pour p
     - Test Unilatéral à droite pour la proportion
     - Test Bilatéral pour la proportion
   - Tests Relatifs à Une Moyenne
     - Test Unilatéral à droite pour μ
     - Test Unilatéral à gauche pour μ
     - Test Bilatéral pour la moyenne
   - Tests Relatifs à Une Variance
     - Test Unilatéral à droite pour la variance
     - Test Unilatéral à gauche pour la variance
     - Test Bilatéral pour la variance
3. LES TESTS Pour 2 Populations
   - Tests de comparaison de 2 Variances

Test Bilatéral pour la proportion

Formulation des hypothèses

$$\text{T.B.} \begin{cases} H_0 & : & "p = p_0" \\ & \# & \\ H_1 & : & "p \neq p_0" \end{cases}$$

Test Bilatéral pour la proportion

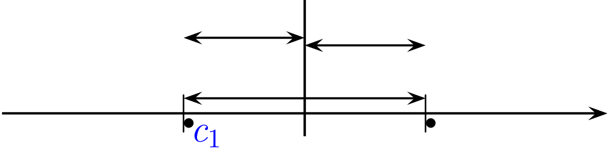
Règle de Décision

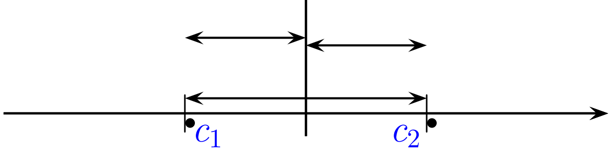
$$\begin{cases} \text{Si } f \notin [c_1 \ , \ c_2] & \text{On rejette } H_0 \\ \\ \text{Si } f \in [c_1 \ , \ c_2] & \text{On ne rejette pas } H_0 \end{cases}$$

Test Bilatéral pour la proportion

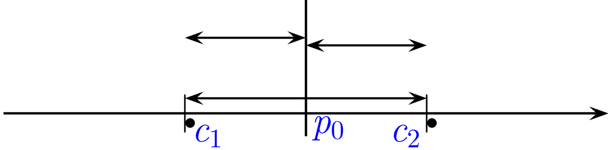
Proof.

Début de la démonstration □

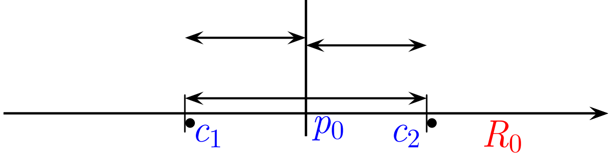

c_1



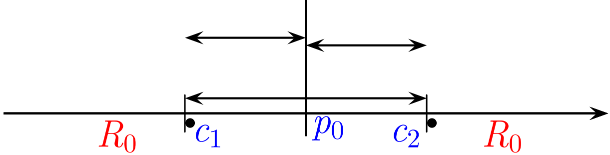
c_1
c_2

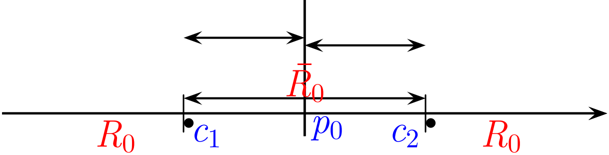


c_1
p_0
c_2

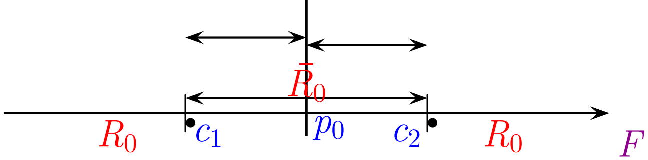


c_1
p_0
c_2
R_0

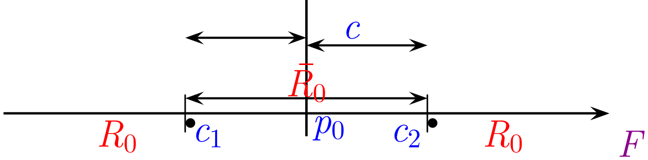

R_0
c_1
p_0
c_2
R_0



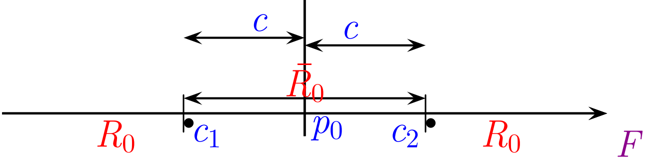
$\bar{R}_0$
R_0
c_1
p_0
c_2
R_0

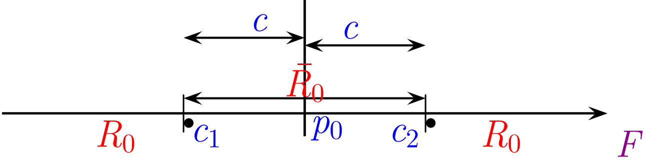


$\bar{R}_0$
R_0
c_1
p_0
c_2
R_0
F

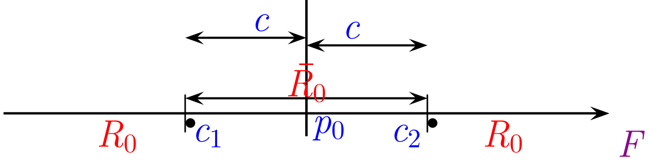


c
$\bar{R}_0$
R_0
c_1
p_0
c_2
R_0
F


c
c
$\bar{R}_0$
R_0
c_1
p_0
c_2
R_0
F

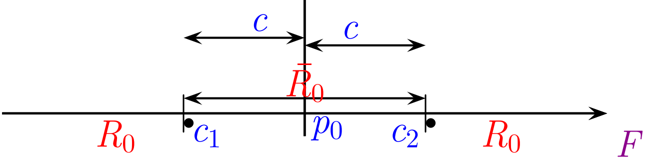


$$f \in [c_1 \ , \ c_2] \Leftrightarrow f \in [p_0 - c \ , \ p_0 + c]$$



$$f \in [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow f \in [p_0 - c\ ,\ p_0 + c]$$

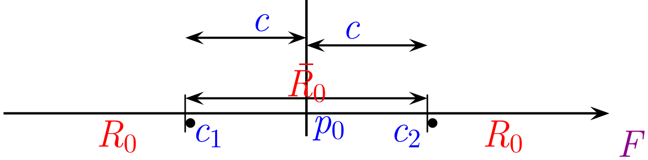
$$\Leftrightarrow -c \leq f - p_0 \leq +c \Leftrightarrow \mid f - p_0 \mid \leq c$$



$$f \in [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow f \in [p_0 - c\ ,\ p_0 + c]$$

$$\Leftrightarrow -c \leq f - p_0 \leq +c \Leftrightarrow | f - p_0 | \leq c$$

$$f \notin [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow | f - p_0 | > c$$

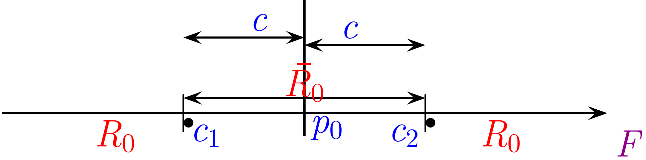


$$f \in [c_1 \ , \ c_2] \Leftrightarrow f \in [p_0 - c \ , \ p_0 + c]$$

$$\Leftrightarrow -c \leq f - p_0 \leq +c \Leftrightarrow \mid f - p_0 \mid \leq c$$

$$f \notin [c_1 \ , \ c_2] \Leftrightarrow \mid f - p_0 \mid > c$$

$$\alpha = \mathbb{P}_0(RH_0) = \mathbb{P}_0(\mid F - p_0 \mid \ > \ c)$$



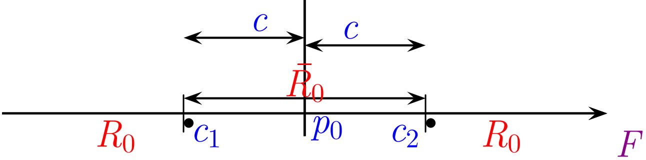
$$f \in [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow f \in [p_0 - c\ ,\ p_0 + c]$$

$$\Leftrightarrow -c \leq f - p_0 \leq +c \Leftrightarrow \mid f - p_0 \mid \leq c$$

$$f \notin [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow \mid f - p_0 \mid > c$$

$$\alpha = \mathbb{P}_0(RH_0) = \mathbb{P}_0(\mid F - p_0 \mid \ > \ c)$$

$$= \mathbb{P}_0\Big(\frac{|F - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} > \frac{c}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}\Big)$$



$$f \in [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow f \in [p_0 - c\ ,\ p_0 + c]$$

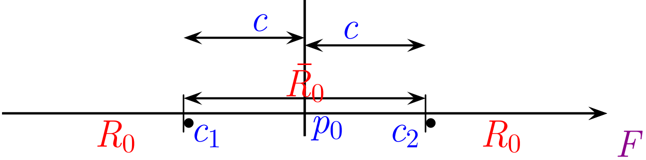
$$\Leftrightarrow -c \leq f - p_0 \leq +c \Leftrightarrow \mid f - p_0 \mid \leq c$$

$$f \notin [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow \mid f - p_0 \mid > c$$

$$\alpha = \mathbb{P}_0(RH_0) = \mathbb{P}_0(\mid F - p_0 \mid \ > \ c)$$

$$= \mathbb{P}_0\left(\frac{|F - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} > \frac{c}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_0\left(\mid Z \mid \ > \ \frac{c}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}\right)$$



$$f \in [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow f \in [p_0 - c\ ,\ p_0 + c]$$

$$\Leftrightarrow -c \leq f - p_0 \leq +c \Leftrightarrow \mid f - p_0 \mid \leq c$$

$$f \notin [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow \mid f - p_0 \mid > c$$

$$\alpha = \mathbb{P}_0(RH_0) = \mathbb{P}_0(\mid F - p_0 \mid\ >\ c)$$

$$= \mathbb{P}_0\left(\frac{|F - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} > \frac{c}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_0\left(\mid Z \mid\ >\ \frac{c}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} = +z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \boxed{c = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}$$

Test Bilatéral pour la proportion

Proof.

Fin de la démonstration □

Test Bilatéral pour la proportion

D'où

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } |\, f - p_0 \,| \quad > \quad z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\dfrac{p_0 \times q_0}{n}} & \text{On rejette } H_0 \\ \\ \text{Si } |\, f - p_0 \,| \quad \leq \quad z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\dfrac{p_0 \times q_0}{n}} & \text{On ne rejette pas } H_0 \end{cases}$$

Test Bilatéral pour la proportion

Ou encore

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } |z| > z_{\frac{\alpha}{2}} & \text{On rejette } H_0 \\ \\ \text{Si } |z| \leq z_{\frac{\alpha}{2}} & \text{On ne rejette pas } H_0 \end{cases}$$

Où $z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 \times q_0}{n}}}$

Test Bilatéral pour la proportion

Application

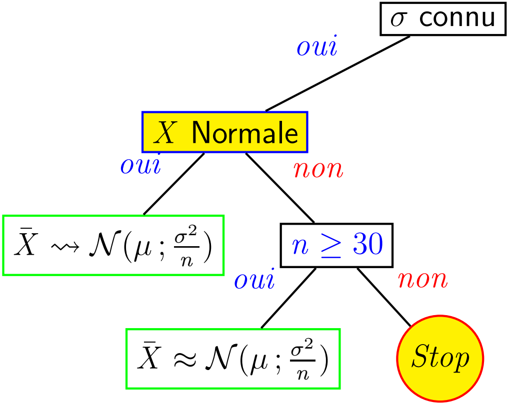
Supposons que $n = 100,\ p_0 = 0.75\ et\ f = 0.65$

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \mathbb{P}_0\left(\left|\frac{F-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}\right| > \left|\frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}\right|\right) \\ &= 2 \times \mathbb{P}_0(Z > |-2.309|) = 2 \times 1\% = 2\%\end{aligned}$$

Le test est donc significatif à 5 %

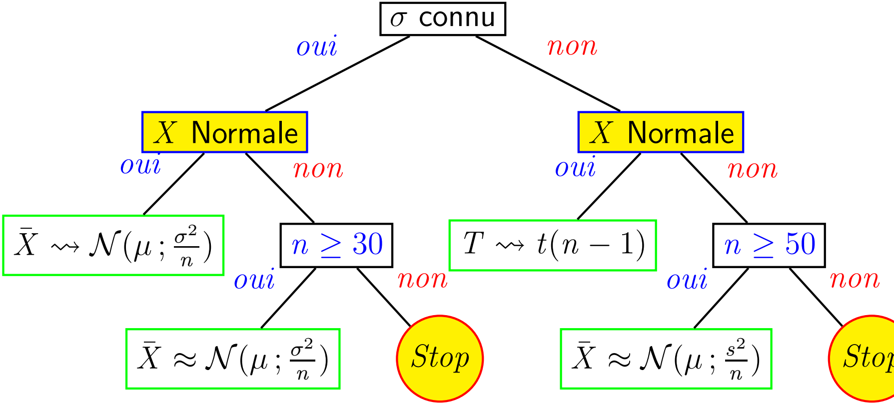
Rappel sur les lois

$$X \rightsquigarrow \mathscr{L}(\mu\,;\sigma^2)$$



Rappel sur les lois

$$X \rightsquigarrow \mathscr{L}(\mu\,;\sigma^2)$$



Où $T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$

Introduction

Exemple des Hypothèses

- Est-ce que l'espérance de vie des marocains μ_0 a augmenté depuis le dernier recensement ?

Introduction

Exemple des Hypothèses

- Est-ce que l'espérance de vie des marocains μ_0 a augmenté depuis le dernier recensement ?
- Est-ce que le niveau m_0 des étudiants a augmenté ?

Introduction

Exemple des Hypothèses

- Est-ce que l'espérance de vie des marocains μ_0 a augmenté depuis le dernier recensement ?
- Est-ce que le niveau m_0 des étudiants a augmenté ?

Pour répondre à ces questions, on doit confronter 2 hypothèses:

Plan

1 Introduction Générale

2 LES TESTS Pour 1 Population

- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance
  - Test Unilatéral à gauche pour la variance
  - Test Bilatéral pour la variance

3 LES TESTS Pour 2 Populations

- Tests de comparaison de 2 Variances

Test Unilatéral à droite pour μ

Formulation des hypothèses

$$\text{T.U.D} \begin{cases} H_0 & : \quad "\mu = \mu_0 " \\ & \# \\ H_1 & : \quad "\mu > \mu_0 " \end{cases}$$

On adopte ensuite une Règle de décision basée sur la statistique $\bar{X}$ et qui répondra à la question:

Test Unilatéral à droite pour μ

Formulation des hypothèses

$$\text{T.U.D} \begin{cases} H_0 & : & "\mu = \mu_0" \\ & \# & \\ H_1 & : & "\mu > \mu_0" \end{cases}$$

On adopte ensuite une Règle de décision basée sur la statistique $\bar{X}$ et qui répondra à la question:
à partir de quelle réalisation de $\bar{X}$ décidera-t-on du rejet de H_0 pour un risque α ?

Test Unilatéral à droite pour μ

a) Si σ est connu et (X est normale ou $n \geq 30$)

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } \bar{x} > c_\alpha = \mu_0 + z_\alpha \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{On rejette } H_0 \\ \\ \text{Si } \bar{x} \leq c_\alpha = \mu_0 + z_\alpha \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{On ne rejette pas } H_0 \end{cases}$$

Où z_α est la valeur critique d'ordre α de la $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Test Unilatéral à droite pour μ

b) Si σ est inconnu et X est normale

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } \bar{x} > c_\alpha = \mu_0 + t_{\alpha,n-1} \times \dfrac{s}{\sqrt{n}} & \text{On rejette } H_0 \\ \\ \text{Si } \bar{x} \leq c_\alpha = \mu_0 + t_{\alpha,n-1} \times \dfrac{s}{\sqrt{n}} & NRH_0 \end{cases}$$

Où $t_{\alpha,n-1}$ est la valeur critique d'ordre α d'une loi de student à $n-1$ $d.d.l.$

Test Unilatéral à droite pour μ

c) Si σ est inconnu et $n \geq 50$

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } \bar{x} > c_\alpha = \mu_0 + z_\alpha \times \dfrac{s}{\sqrt{n}} & \text{On rejette } H_0 \\ \text{Si } \bar{x} \leq c_\alpha = \mu_0 + z_\alpha \times \dfrac{s}{\sqrt{n}} & \text{On ne rejette pas } H_0 \end{cases}$$

Où z_α est la valeur critique d'ordre α de la $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Plan

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance
  - Test Unilatéral à gauche pour la variance
  - Test Bilatéral pour la variance
3 LES TESTS Pour 2 Populations
- Tests de comparaison de 2 Variances

Test Unilatéral à gauche pour μ

Formulation des hypothèses

$$\text{T.U.G} \begin{cases} H_0 & : \quad "\mu = \mu_0 " \\ & \# \\ H_1 & : \quad "\mu < \mu_0 " \end{cases}$$

On adopte ensuite une Règle de décision basée sur la statistique $\bar{X}$ et qui répondra à la question:

Test Unilatéral à gauche pour μ

Formulation des hypothèses

$$\text{T.U.G} \begin{cases} H_0 & : & "\mu = \mu_0" \\ & \# & \\ H_1 & : & "\mu < \mu_0" \end{cases}$$

On adopte ensuite une Règle de décision basée sur la statistique $\bar{X}$ et qui répondra à la question:
à partir de quelle réalisation de $\bar{X}$ décidera-t-on du rejet de H_0 pour un risque α ?

Test Unilatéral à gauche pour μ

a) Si σ est connu et (X est normale ou $n \geq 30$)

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } \bar{x} < c_\alpha = \mu_0 - z_\alpha \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{On rejette } H_0 \\ \text{Si } \bar{x} \geq c_\alpha = \mu_0 - z_\alpha \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{On ne rejette pas } H_0 \end{cases}$$

Où z_α est la valeur critique d'ordre α d'une $\mathcal{N}(0\,;\,1)$

Test Unilatéral à gauche pour μ

b) Si σ est inconnu et X est normale

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } \bar{x} < c_\alpha = \mu_0 - t_{\alpha,n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}} & \text{On rejette } H_0 \\ \\ \text{Si } \bar{x} \geq c_\alpha = \mu_0 - t_{\alpha,n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}} & NRH_0 \end{cases}$$

Où $t_{\alpha,n-1}$ est la valeur critique d'ordre α d'une loi de student à $n-1 \quad d.d.l.$

Test Unilatéral à gauche pour μ

c) Si σ est inconnu et $n \geq 50$

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } \bar{x} < c_\alpha = \mu_0 - z_\alpha \times \dfrac{s}{\sqrt{n}} & \text{On rejette } H_0 \\ \\ \text{Si } \bar{x} \leq c_\alpha = \mu_0 - z_\alpha \times \dfrac{s}{\sqrt{n}} & \text{On ne rejette pas } H_0 \end{cases}$$

Où z_α est la valeur critique d'ordre α d'une $\mathcal{N}(0\,;\,1)$

Plan

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance
  - Test Unilatéral à gauche pour la variance
  - Test Bilatéral pour la variance

3 LES TESTS Pour 2 Populations
- Tests de comparaison de 2 Variances

Test Bilatéral pour μ

Formulation des hypothèses

$$\text{T.B}\begin{cases} H_0 & : & "\mu = \mu_0" \\ & \# & \\ H_1 & : & "\mu \neq \mu_0" \end{cases}$$

Test Bilatéral pour μ

Règle de Décision

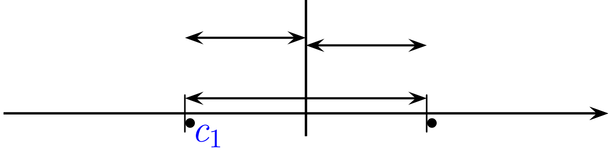
$$\begin{cases} \text{Si } \bar{x} \notin [c_1 \; , \; c_2] & \text{On rejette } H_0 \\ \\ \text{Si } \bar{x} \in [c_1 \; , \; c_2] & \text{On ne rejette pas } H_0 \end{cases}$$

Test Bilatéral pour μ

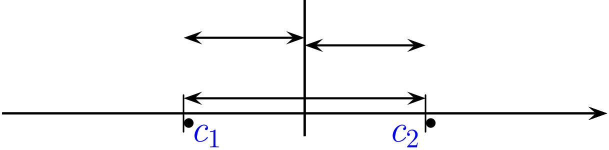
Proof.

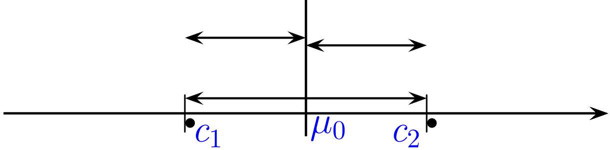
Début de la démonstration □

a) Si σ est connu et (X est normale ou $n \geq 30$)

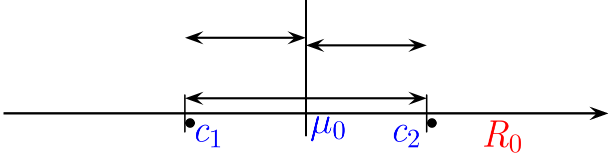


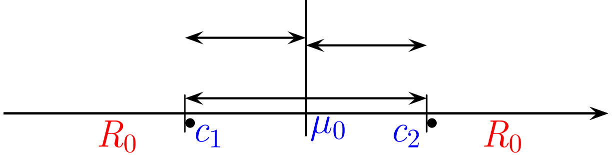
c_1


c_1
c_2

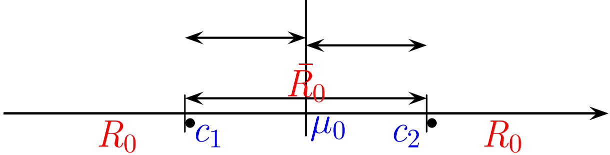


c_1
μ_0
c_2

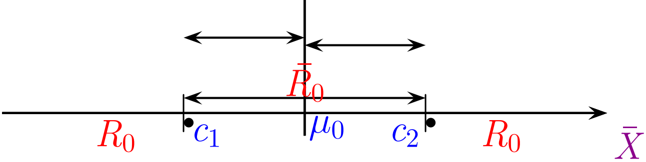

c_1
μ_0
c_2
R_0

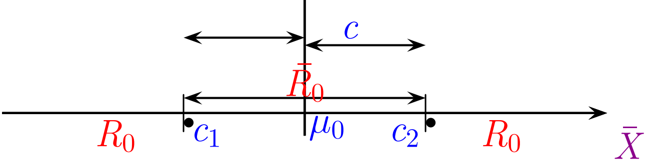


R_0
c_1
μ_0
c_2
R_0

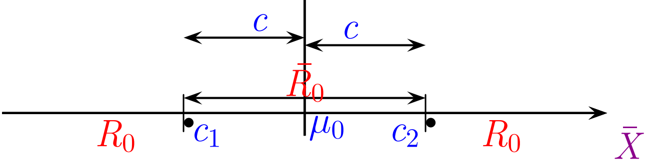


$\bar{R}_0$
R_0
c_1
μ_0
c_2
R_0

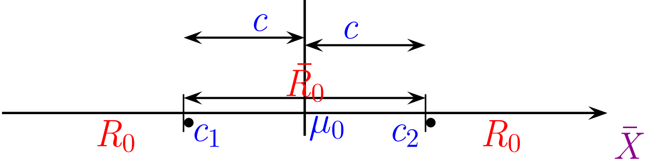

$\bar{R}_0$
R_0
c_1
μ_0
c_2
R_0
$\bar{X}$



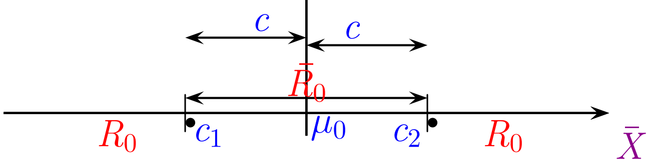
c
$\bar{R}_0$
R_0
c_1
μ_0
c_2
R_0
$\bar{X}$



c
c
$\bar{R}_0$
R_0
c_1
μ_0
c_2
R_0
$\bar{X}$

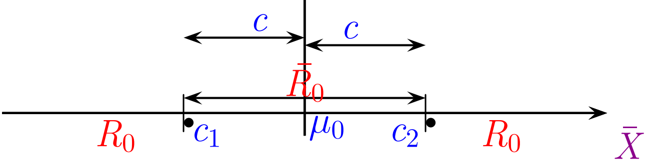


$$\bar{x} \in [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow \bar{x} \in [\mu_0 - c\ ,\ \mu_0 + c]$$



$$\bar{x} \in [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow \bar{x} \in [\mu_0 - c\ ,\ \mu_0 + c]$$

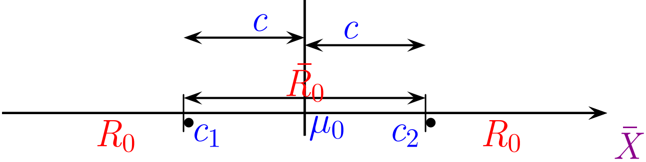
$$\Leftrightarrow -c \leq \bar{x} - \mu_0 \leq +c \Leftrightarrow \mid \bar{x} - \mu_0 \mid \leq c$$



$$\bar{x} \in [c_1 \,,\, c_2] \Leftrightarrow \bar{x} \in [\mu_0 - c \,,\, \mu_0 + c]$$

$$\Leftrightarrow -c \leq \bar{x} - \mu_0 \leq +c \Leftrightarrow \mid \bar{x} - \mu_0 \mid \leq c$$

$$\bar{x} \notin [c_1 \,,\, c_2] \Leftrightarrow \mid \bar{x} - \mu_0 \mid > c$$

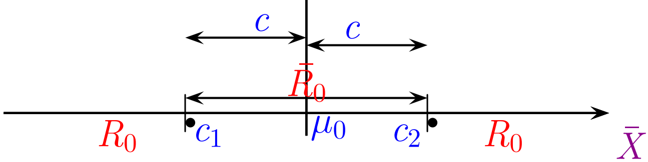


$$\bar{x} \in [c_1 \ , \ c_2] \Leftrightarrow \bar{x} \in [\mu_0 - c \ , \ \mu_0 + c]$$

$$\Leftrightarrow -c \leq \bar{x} - \mu_0 \leq +c \Leftrightarrow \mid \bar{x} - \mu_0 \mid \leq c$$

$$\bar{x} \notin [c_1 \ , \ c_2] \Leftrightarrow \mid \bar{x} - \mu_0 \mid > c$$

$$\alpha = \mathbb{P}_0(RH_0) = \mathbb{P}_0(\mid \bar{X} - \mu_0 \mid \ > \ c)$$



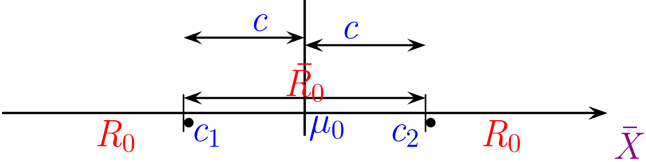
$$\bar{x} \in [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow \bar{x} \in [\mu_0 - c\ ,\ \mu_0 + c]$$

$$\Leftrightarrow -c \leq \bar{x} - \mu_0 \leq +c \Leftrightarrow \mid \bar{x} - \mu_0 \mid \leq c$$

$$\bar{x} \notin [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow \mid \bar{x} - \mu_0 \mid > c$$

$$\alpha = \mathbb{P}_0(RH_0) = \mathbb{P}_0(\mid \bar{X} - \mu_0 \mid \ > \ c)$$

$$= \mathbb{P}_0\left(\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$



$$\bar{x} \in [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow \bar{x} \in [\mu_0 - c\ ,\ \mu_0 + c]$$

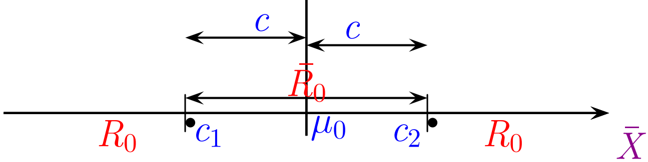
$$\Leftrightarrow -c \leq \bar{x} - \mu_0 \leq +c \Leftrightarrow \mid \bar{x} - \mu_0 \mid \leq c$$

$$\bar{x} \notin [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow \mid \bar{x} - \mu_0 \mid > c$$

$$\alpha = \mathbb{P}_0(RH_0) = \mathbb{P}_0(\mid \bar{X} - \mu_0 \mid \ > \ c)$$

$$= \mathbb{P}_0\left(\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_0\left(\mid Z \mid \ > \ \frac{c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$



$$\bar{x} \in [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow \bar{x} \in [\mu_0 - c\ ,\ \mu_0 + c]$$

$$\Leftrightarrow -c \leq \bar{x} - \mu_0 \leq +c \Leftrightarrow \mid \bar{x} - \mu_0 \mid \leq c$$

$$\bar{x} \notin [c_1\ ,\ c_2] \Leftrightarrow \mid \bar{x} - \mu_0 \mid > c$$

$$\alpha = \mathbb{P}_0(RH_0) = \mathbb{P}_0(\mid \bar{X} - \mu_0 \mid \ > \ c)$$

$$= \mathbb{P}_0(\tfrac{|\bar{X}-\mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \tfrac{c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})$$

$$= \mathbb{P}_0(\mid Z \mid \ > \ \tfrac{c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \ +z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \boxed{c = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Test Bilatéral pour la moyenne

Proof.

Fin de la démonstration □

Test Bilatéral pour la moyenne

D'où

a) Si σ est connu et (X est normale ou $n \geq 30$)

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } \mid \bar{x} - \mu_0 \mid & > & z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{On rejette } H_0 \\ \text{Si } \mid \bar{x} - \mu_0 \mid & \leq & z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{On ne rejette pas } H_0 \end{cases}$$

Test Bilatéral pour la moyenne

Ou encore

a) Si σ est connu et (X est normale ou $n \geq 30$)

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } \mid z \mid \quad > \quad z_{\frac{\alpha}{2}} & \text{On rejette } H_0 \\ \\ \text{Si } \mid z \mid \quad \leq \quad z_{\frac{\alpha}{2}} & \text{On ne rejette pas } H_0 \end{cases}$$

Où $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Test Bilatéral pour la moyenne

b) Si σ est inconnu et X est normale

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } |\, t \,| \; > \; t_{\frac{\alpha}{2};\, n-1} & \text{On rejette } H_0 \\ \\ \text{Si } |\, t \,| \; \leq \; t_{\frac{\alpha}{2};\, n-1} & \text{On ne rejette pas } H_0 \end{cases}$$

Où $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

Test Bilatéral pour la moyenne

c) Si σ est inconnu et $n \geq 50$

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } \mid z \mid \; > \; z_{\frac{\alpha}{2}} & \text{On rejette } H_0 \\ \\ \text{Si } \mid z \mid \; \leq \; z_{\frac{\alpha}{2}} & \text{On ne rejette pas } H_0 \end{cases}$$

Où $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

Plan

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance
  - Test Unilatéral à gauche pour la variance
  - Test Bilatéral pour la variance

3 LES TESTS Pour 2 Populations
- Tests de comparaison de 2 Variances

Tests Relatifs à Une Variance

Condition

Dans ce paragraphe on supposera toujours la normalité de la population de moyenne inconnue

Test Unilatéral à droite pour la variance

Formulation des hypothèses

$$\text{T.U.D}\begin{cases} H_0 & : & "\sigma^2 = \sigma_0^2 \text{"} \\ & \# & \\ H_1 & : & "\sigma^2 > \sigma_0^2 \text{"} \end{cases}$$

On adopte ensuite une Règle de décision basée sur la statistique $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

Test Unilatéral à droite pour la variance

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } s^2 > c_\alpha = \chi_{n-1;\,\alpha} \dfrac{\sigma_0^2}{(n-1)} & \text{On rejette } H_0 \\ \\ \text{Si } s^2 \leq c_\alpha = \chi_{n-1;\,\alpha} \dfrac{\sigma_0^2}{(n-1)} & NRH_0 \end{cases}$$

Test Unilatéral à droite pour la variance

Proof.

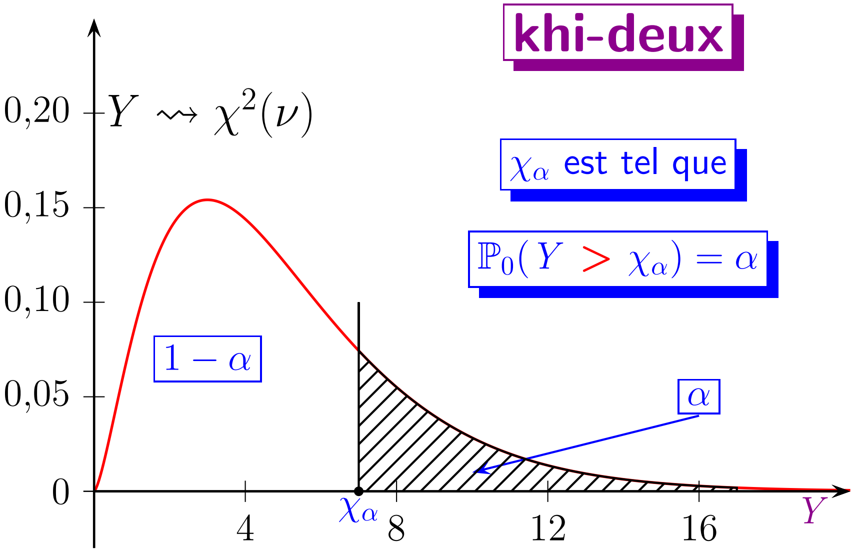
Détermination de c_α

Sous H_0 $\quad Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$

$$\alpha = \mathbb{P}_0(S^2 > c_\alpha) = \mathbb{P}_0\left(Y > \frac{(n-1)c_\alpha}{\sigma_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow \chi_{n-1;\alpha} = c_\alpha \times \frac{(n-1)}{\sigma_0^2} \Rightarrow c_\alpha = \chi_{n-1;\alpha} \times \frac{\sigma_0^2}{(n-1)}$$

(voir illustration graphique) $\square$


khi-deux
$Y \rightsquigarrow \chi^2(\nu)$
χ_α est tel que
$\mathbb{P}_0(Y > \chi_\alpha) = \alpha$
$1-\alpha$
α
0,20
0,15
0,10
0,05
0
4
8
12
16
χ_α
Y

Test Unilatéral à droite pour la variance

Proof.

Fin de la démonstration $\square$

Plan

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance
  - Test Unilatéral à gauche pour la variance
  - Test Bilatéral pour la variance

3 LES TESTS Pour 2 Populations
- Tests de comparaison de 2 Variances

Test Unilatéral à gauche pour la variance

Formulation des hypothèses

$$\text{T.U.G} \left\{ \begin{array}{lcl} H_0 & : & "\sigma^2 = \sigma_0^2" \\ & \# & \\ H_1 & : & "\sigma^2 < \sigma_0^2" \end{array} \right.$$

On adopte ensuite une Règle de décision basée sur la statistique $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

Test Unilatéral à gauche pour la variance

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } s^2 < c_\alpha = \chi_{n-1;\,1-\alpha} \dfrac{\sigma_0^2}{(n-1)} & \text{On rejette } H_0 \\ \\ \text{Si } s^2 \geq c_\alpha = \chi_{n-1;\,1-\alpha} \dfrac{\sigma_0^2}{(n-1)} & NRH_0 \end{cases}$$

Plan

1 Introduction Générale

2 LES TESTS Pour 1 Population

- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance
  - Test Unilatéral à gauche pour la variance
  - Test Bilatéral pour la variance

3 LES TESTS Pour 2 Populations

- Tests de comparaison de 2 Variances

Test Bilatéral pour la variance

Formulation des hypothèses

$$\text{T.B} \left\{ \begin{array}{lll} H_0 & : & "\ \sigma^2 = \sigma_0^2\ " \\ & \# & \\ H_1 & : & "\sigma^2 \neq \sigma_0^2\ " \end{array} \right.$$

Test Bilatéral pour la variance

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } s^2 \quad \notin \quad \left[\chi_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\, \dfrac{\sigma_0^2}{(n-1)}\ ,\ \chi_{n-1;\,\frac{\alpha}{2}}\, \dfrac{\sigma_0^2}{(n-1)}\right] & RH_0 \\ \\ \text{Si } s^2 \quad \in \quad \left[\chi_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\, \dfrac{\sigma_0^2}{(n-1)}\ ,\ \chi_{n-1;\,\frac{\alpha}{2}}\, \dfrac{\sigma_0^2}{(n-1)}\right] & NRH_0 \end{cases}$$

Tests de comparaison de 2 Variances

Condition

Dans ce paragraphe on supposera toujours la normalité des deux populations de moyennes inconnues

Plan

1 Introduction Générale
2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance
  - Test Unilatéral à gauche pour la variance
  - Test Bilatéral pour la variance

3 LES TESTS Pour 2 Populations
- Tests de comparaison de 2 Variances

Test bilatéral de comparaison de 2 Variances

Formulation des hypothèses

$$\text{TB}\begin{cases} H_0 & "\ \sigma_1^2 \ = \sigma_2^2\ " \\ \# & \\ H_1 & "\sigma_1^2 \ \neq \sigma_2^2\ " \end{cases}$$

Test bilatéral de comparaison de 2 Variances

Formulation des hypothèses

$$\text{TB}\begin{cases} H_0 & "\ \sigma_1^2 \ = \sigma_2^2\ " \\ \# & \\ H_1 & "\sigma_1^2 \ \neq \sigma_2^2\ " \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 & "\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1" \\ \# & \\ H_1 & "\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1" \end{cases}$$

Test bilatéral de comparaison de 2 Variances

La Statistique du test

$$\begin{cases} \text{Si } s_1^2 \geq s_2^2 \quad \text{alors} \quad R_c = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \\ \\ \text{Si } s_2^2 \geq s_1^2 \quad \text{alors} \quad R_c = \dfrac{S_2^2}{S_1^2} \end{cases}$$

R_c est appelé Rapport critique

Test bilatéral de comparaison de 2 Variances

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } r_c \notin \left[\mathscr{F}_{(n_1-1,n_2-1;\,1-\frac{\alpha}{2})};\mathscr{F}_{(n_1-1,n_2-1);\,\frac{\alpha}{2}}\right] & RH_0 \\ \\ \text{Si } r_c \in \left[\mathscr{F}_{(n_1-1,n_2-1;\,1-\frac{\alpha}{2})};\mathscr{F}_{(n_1-1,n_2-1;\,\frac{\alpha}{2})}\right] & NRH_0 \end{cases}$$

Où $\mathscr{F}_{(\nu_1,\nu_2;\,\alpha)}$ est la valeur critique d'ordre α de la loi de Fisher $\mathscr{F}_{(\nu_1\,;\,\nu_2)}$

Test bilatéral de comparaison de 2 moyennes

Formulation des hypothèses

$$\begin{cases} H_0 & \text{"}\ \mu_1 = \mu_2\ \text{"} \\ \# & \\ H_1 & \text{"}\mu_1 \neq \mu_2\ \text{"} \end{cases}$$

Test bilatéral de comparaison de 2 moyennes

Formulation des hypothèses

$$\begin{cases} H_0 & "\ \mu_1 = \mu_2\ " \\ \# & \\ H_1 & "\mu_1 \neq \mu_2\ " \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 & "\mu_1 - \mu_2 = 0" \\ \# & \\ H_1 & "\mu_1 - \mu_2 \neq 0" \end{cases}$$

Plan

1 Introduction Générale

2 LES TESTS Pour 1 Population
- Tests Relatifs à Une Proportion
  - Test Unilatéral à gauche pour p
  - Test Unilatéral à droite pour la proportion
  - Test Bilatéral pour la proportion
- Tests Relatifs à Une Moyenne
  - Test Unilatéral à droite pour μ
  - Test Unilatéral à gauche pour μ
  - Test Bilatéral pour la moyenne
- Tests Relatifs à Une Variance
  - Test Unilatéral à droite pour la variance
  - Test Unilatéral à gauche pour la variance
  - Test Bilatéral pour la variance

3 LES TESTS Pour 2 Populations
- Tests de comparaison de 2 Variances

Test bilatéral de comparaison de 2 moyennes

a) Si σ_1 et σ_2 sont connus et (X_1 est normale ou $n_1 \geq 30$) et (X_2 est normale ou $n_2 \geq 30$)

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } \mid \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \mid \; > \; z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad RH_0 \\ \\ \text{Si } \mid \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \mid \; \leq \; z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad NRH_0 \end{cases}$$

Test bilatéral de comparaison de 2 μ

b) σ_1 et σ_2 inconnus mais égales et X_1 et X_2 normales

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } \mid \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \mid \; > \; t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} \times \hat{s}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}} & RH_0 \\ \\ \text{Si } \mid \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \mid \; \leq \; t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} \times \hat{s}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}} & NRH_0 \end{cases}$$

Test bilatéral de comparaison de 2 μ

b) σ_1 et σ_2 inconnus mais égales et X_1 et X_2 normales

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} \times \hat{s}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}} & RH_0 \\ \text{Si } |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \leq t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} \times \hat{s}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}} & NRH_0 \end{cases}$$

Où $\hat{s}^2 = \dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$

Test bilatéral de comparaison de 2 moyennes

c) Si σ_1 et σ_2 sont inconnus, $n_1 \geq 50$ et $n_2 \geq 50$

Règle de Décision

$$\begin{cases} \text{Si } \mid \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \mid \; > \; z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}} \quad RH_0 \\ \\ \text{Si } \mid \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \mid \; \leq \; z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}} \quad NRH_0 \end{cases}$$

Où z_α est la valeur critique d'ordre α d'une $\mathcal{N}(0\,;\,1)$