Dynamique des Structures

Méthode des éléments finis appliquée aux structures discrètes

Dynamique : Les variations temporelles sont trop importantes pour négliger les effets d'inertie et d'amortissement.

Laurent BAILLET
Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique
UFR Mécanique / Université Joseph Fourier Grenoble

e-mail : laurent.baillet@ujf-grenoble.fr

Bibliographie

Dynamics of structures, Theory and applications to earthquake engineering, Anil K.Chopra

Schaum's outlines, Theory and problems of Mechanical vibrations, S.Graham Kelly

Mécanique des vibrations linéaires, Lalanne & al.

Dynamics of structures, J.L.Humar

Finite element procedures, K.J.Bathe

Comprendre les éléments finis, Alaa Chateauneuf

Optique et physique moderne, R.A.Serway

Sommaire

L.BAILLET

Introduction

Composantes des systèmes mécaniques

L.BAILLET

Composantes

∗ d'inerties

Energie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

M masse du système
v vitesse du centre de la masse
I moment d'inertie de la masse
ω vitesse angulaire

∗ de raideur,

$$F = kx$$

F force appliquée
x changement de l'allongement
k raideur (N/m)

∗ d'amortissement

$$F = cv$$

F force appliquée
c coefficient d'amortissement (kg/s)
v vitesse

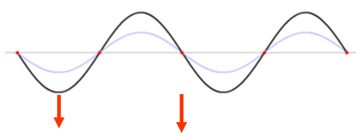
Introduction

Ondes stationnaires / modes de vibration

L.BAILLET

Mouvement résultant de la somme de deux ondes sinusoïdales de même amplitude, de même fréquence, et de même longueur d'onde se déplaçant dans des directions opposées

$$y(x,t) = A_0 \sin(kx - \omega t) + A_0 \sin(kx + \omega t) = 2A_0 \sin kx \cos(\omega t)$$



L'onde stationnaire résultante *y(x,t)*

- cesse d'être en mouvement → onde stationnaire
- est le produit de deux fonctions, l'une spatiale, l'autre temporelle
- est de forme sinkx oscillant à la pulsation ω

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} ; \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f ; c = \lambda f = \frac{\omega}{k}$$

Introduction

Ondes stationnaires / modes de vibration

L.BAILLET

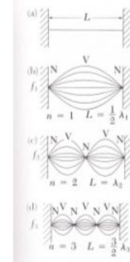


Figure 3.6 Ondes stationnaires dans une corde de longueur L, fixée à ses deux extrémités. Les modes de vibration normaux forment une série harmonique: (b) la fréquence fondamentale, ou première harmonique; (c) la seconde harmonique et (d) la troisième harmonique.

Ondes stationnaires dans une corde fixée à ses deux extrémités

Tiré de Physique et optique moderne, R.A.Serway

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \text{ (n = 1,2,3...) Longueurs d'ondes des modes normaux}$$

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} \text{ (n = 1,2,3...) Fréquence des modes normaux}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow \boxed{f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \text{ (n = 1,2,3...)}}$$

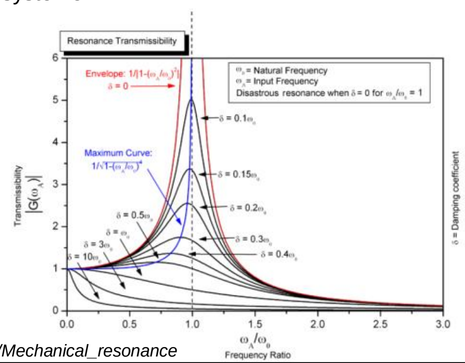
Un mode de vibration libre de la corde est une onde stationnaire résultant de la combinaison de deux ondes de même amplitude se déplaçant en sens opposés.

Introduction

Résonance

L.BAILLET

La résonance est la capacité d'un système mécanique à emmagasinner de plus en plus d'énergie, lorsque celle-ci est appliquée sous forme périodique et proche d'une fréquence dite « fréquence de résonance » ou « fréquence naturelle » ou fréquence propre.
Cette excitation entraine des oscillations dont l'amplitude croit. Le mouvement du système peut alors atteindre un régime d'équilibre dépendant de son amortissement, ou aller jusqu'à la rupture d'un composant du système.



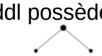
http://en.wikipedia.org/wiki/Mechanical_resonance

Introduction

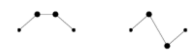
Degrés de liberté

L.BAILLET

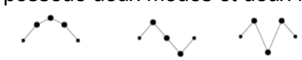
Un système à 1ddl possède un mode et une fréquence de vibration



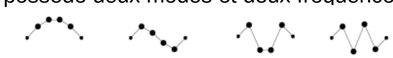
Un système à 2ddl possède deux modes et deux fréquences de vibration



Un système à 3ddl possède deux modes et deux fréquences de vibration



Un système à 4ddl possède deux modes et deux fréquences de vibration



Un système continu possède une infinité de modes et fréquences de vibration

$f_1=v/(2L)$ < $f_2=2v/(2L)$ < $f_3=3v/(2L)$ < $f_4=4v/(2L)$ <....

Animation courtesy of Dr. Dan Russell, Grad. Prog. Acoustics, Penn State

Introduction

Séries de Fourier

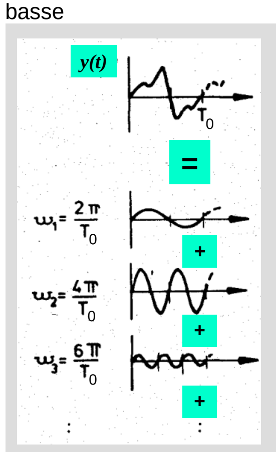
$$y(t) = y(t+T_0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1,\infty} (A_n \cos 2\pi f_n t + B_n \sin 2\pi f_n t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1,\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

$f_n = n\dfrac{1}{T_0} = nf_1$ $\quad$ $f_1 = \dfrac{1}{T_0}$ Fréquence la plus basse

et

$$A_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} y(T_0)\cos\omega_n t \; dt$$

$$B_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} y(T_0)\sin\omega_n t \; dt$$



(figure adaptée d'Ewins)

Introduction

Tacoma Narrows Bridge

Mode de torsion : 0.2 Hz

Rupture du pont, le 7 nov. 1940.

« La vitesse du vent n'était que de 67 km/h, tandis que le pont avait été dimensionné pour des vitesses beaucoup plus élevées, mais en ne tenant compte que des effets statiques. »

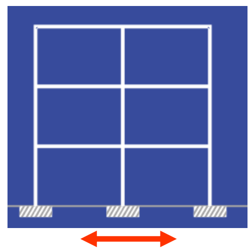
Source : Wikipedia

Introduction

Séisme de Gölcük

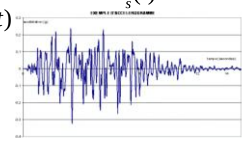
Yann Arthur Bertrand

"La Terre vue du ciel"



$\ddot{x}_s(t)$

$\ddot{x}_s(t)$



Séisme de Gölcük, août 1999, magnitude de 7.4 (échelle de Richter), 15 500 morts. […] L'effondrement partiel ou total de 50 000 immeubles a suscité une polémique mettant en cause les entrepreneurs, accusés de ne pas avoir respecté les normes de construction antisismique. […] Les tremblements de terre ont provoqué la mort de 169 000 personnes à travers le monde entre 1985 et 2000.

Introduction

Dynamique des milieux continus solides

- Équations analytiques des ondes dans les milieux élastiques

Équation vectorielle de l'équilibre local

$$div\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \rho\underline{\gamma} = \rho\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} \qquad (\underline{f} = \rho\underline{g}\ldots)$$

Loi de Hooke (comportement élastique linéaire)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda e \underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} \qquad (e = div\underline{u} = trace(\underline{\underline{\varepsilon}})\,;\, \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(grad\underline{u} + grad^T\underline{u}))$$

$\Rightarrow$ Équation vectorielle du mouvement de Navier

$$\boxed{\begin{gathered}\rho\underline{g} + (\lambda+\mu)grad(div\underline{u}) + \mu\Delta\underline{u} = \rho\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} \\ \text{où} \quad \underline{u} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\}^T \quad \text{et} \quad u_i(x_1, x_2, x_3, t)\end{gathered}}$$

P.Germain, Mécanique des milieux continus 1962
S.Laroze, Mécanique des structures, tome 3, 1992

Dynamique des milieux continus solides

Équation vectorielle du mouvement de Navier

$$\rho \underline{g} + (\lambda + \mu) grad(div \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u} = \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}$$

où $\underline{u} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\}^T$ et $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$

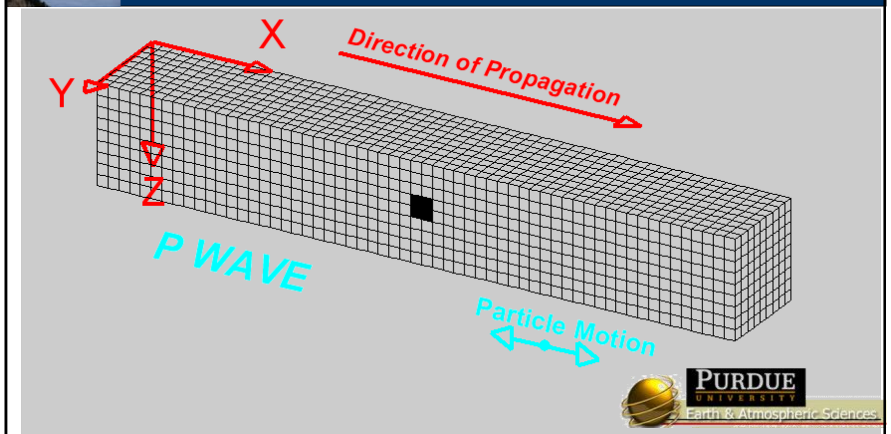
Décomposition du champ de déplacement en un champ irrotationnel et un champ de divergence nulle

$$\boxed{\underline{u} = \underline{u_L} + \underline{u_T} \quad \text{avec} \quad rot \underline{u_L} = \underline{0} \quad \text{et} \quad div \underline{u_T} = 0}$$

ondes longitudinales

ondes transversales

Dynamique des milieux continus solides : Onde longitudinale (P-Wave)

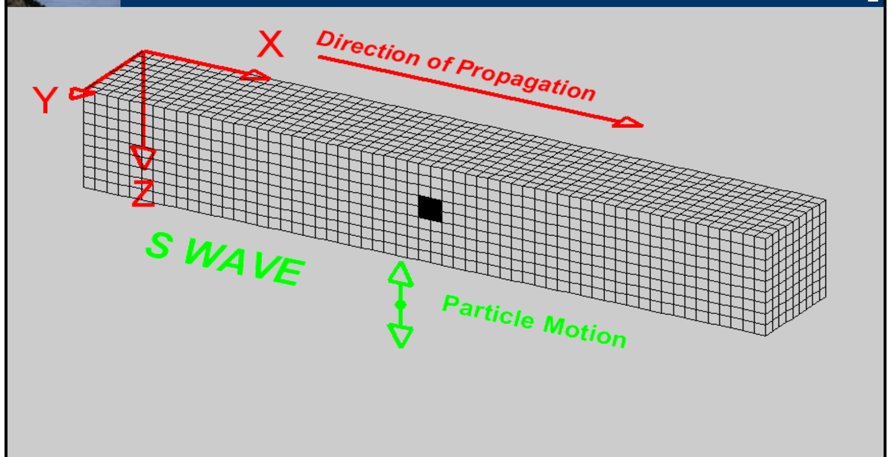


Mouvement alternatif de traction/compression.
Mouvement de la particule // à la direction de propagation.
Rotation identiquement nulle

Introduction

Dynamique des milieux continus solides : Onde transversale (S-Wave)

L.BAILLET

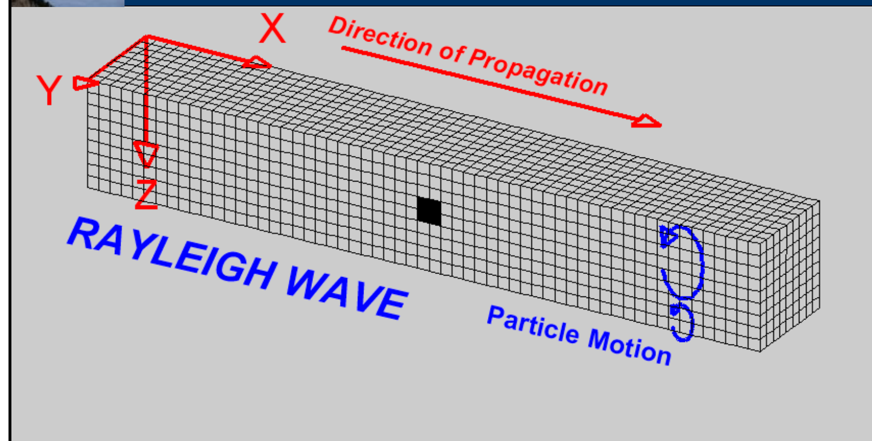


Mouvement alternatif de cisaillement.
Mouvement de la particule ⊥ à la direction de propagation.
Aucun changement de volume

Introduction

Dynamique des milieux continus solides : Onde de Rayleigh (Surface)

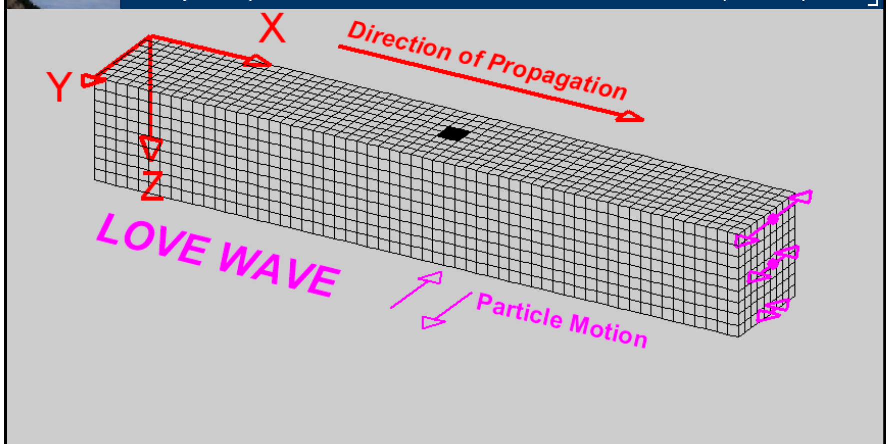
L.BAILLET



Particle motion consists of elliptical motions (generally retrograde elliptical) in the vertical plane and parallel to the direction of propagation. Amplitude decreases with depth.

Introduction

Dynamique des milieux continus solides : Onde de Love (Surface)



Particle motion consists of alternating transverse motions. Particle motion is horizontal and perpendicular to the direction of propagation (transverse). Amplitude decreases with depth.

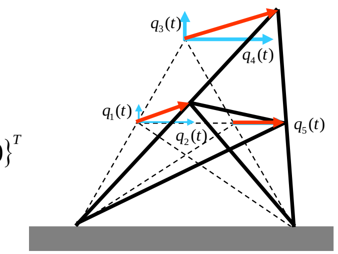
Introduction

Méthode des éléments finis en dynamique

Champ de déplacement $\underline{u} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\}$

$$\boxed{u_i(x_1, x_2, x_3, t) = N_j(x_1, x_2, x_3)\, q_j(t)}$$

Vecteur des ddl : $\underline{q}(t) = \{q_1(t) \quad q_2(t) \quad \cdots \quad q_n(t)\}^T$



accélération

vitesse

déplacement, rotation...

$$\underbrace{\mathrm{M}\frac{\partial^2 \underline{q}}{\partial t^2}}_{\text{Force d'inertie}} + \underbrace{\mathrm{C}\frac{\partial \underline{q}}{\partial t}}_{\text{Force d'amortissement}} + \underbrace{\mathrm{K}\,\underline{q} = \underline{F}}_{\text{Statique}}$$

- M : matrice de masse (nxn)
- C : matrice d'amortissement (nxn)
- K : matrice de raideur (nxn)
- $\underline{F}$: vecteurs des forces extérieures (n)

$\Rightarrow$ Analyse modale, analyse temporelle

Introduction

Analyse modale en vibrations libres : bases théoriques

L.BAILLET

Structure à *n* ddl

But : calculer les *n* fréquences de résonance f_i (ou pulsations $\omega_i = 2\pi f_i$) et les modes de vibration $\underline{\phi_i}$

$$M\frac{\partial^2 \underline{u_t}}{\partial t^2} + K\,\underline{u_t} = \underline{0}$$

Solutions $\underline{u_t} = \underline{\phi_i}\sin(\omega_i t + \varphi_i)$

$$(-\omega_i^2 M\underline{\phi_i} + K\underline{\phi_i})\sin(\omega_i t + \varphi_i) = \underline{0} \Rightarrow \boxed{M^{-1}K\underline{\phi_i} = \omega_i^2\,\underline{\phi_i}}$$

i=1,...,n

n valeurs propres $(\omega_i)^2$ $\Rightarrow$ fréquences de résonances f_i

n vecteurs propres $\underline{\phi_i}$ $\Rightarrow$ modes de vibration $\underline{\phi_i}$

Introduction

Analyse modale en vibrations libres : bases théoriques

L.BAILLET

Les degrés de liberté $\underline{u_t}$ peuvent être décrits par une combinaison linéaire des *n* modes de vibrations indépendants

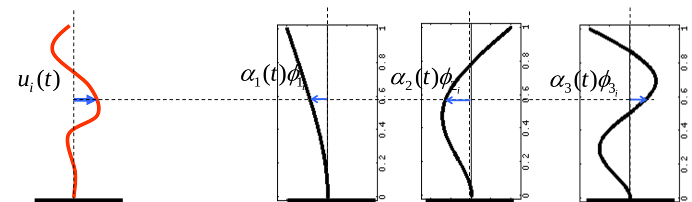
$$\underline{u_t} = \sum_{i=1,n} a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)\underline{\phi_i} = \sum_{i=1,n} [c_i \sin(\omega_i t) + d_i \cos(\omega_i t)]\underline{\phi_i}$$

$$\boxed{\underline{u_t} = \sum_{i=1,n} \alpha_i(t)\underline{\phi_i} = \Phi\underline{\alpha_t}}$$

$\underline{\alpha_t}$ vecteur des composantes modales (*dim* n)

$\Phi=[\underline{\phi_1}\ \underline{\phi_2}\ \underline{\phi_3}\ ....\ \underline{\phi_n}]$ matrice modale *dim(nxn)*

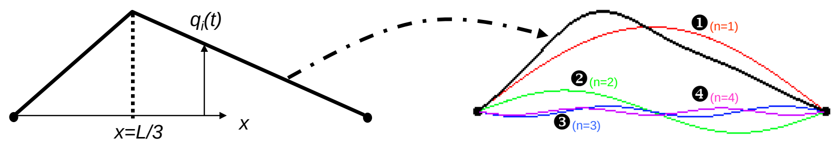
a_i , φ_i , c_i , d_i , constantes obtenues par les conditions initiales



$$\underline{u_t} = \{u_1(t)\ \ u_2(t)\ \ \cdots\ \ u_n(t)\}^T = \alpha_1(t)\underline{\phi_1} + \alpha_2(t)\underline{\phi_2} + \alpha_3(t)\underline{\phi_3} + \ldots$$

Introduction

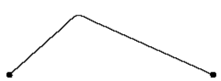
La corde vibrante : Analyse modale

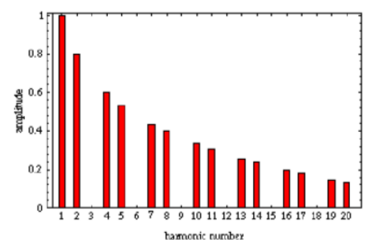


Déplacement initial $\underline{q}(t=0)$ imposé à la corde

Solution générale $\underline{q}(t)$ en prenant 4 modes

$$\underline{q}(t)=\sum_{1,4}\alpha_i(t)\underline{\phi_i}$$





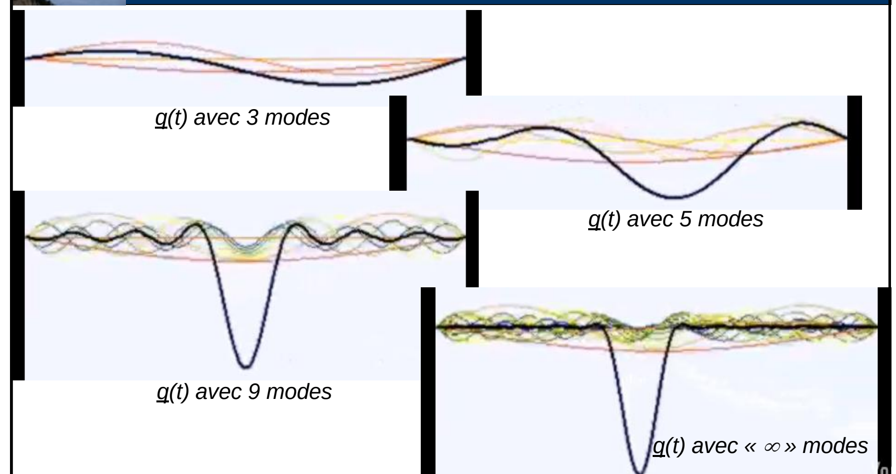
Solution générale $\underline{q}(t)$ en prenant un nombre important de modes

$$\underline{q}(t)=\sum_{1,\infty}\alpha_i(t)\underline{\phi_i}$$

http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos/string/Fixed.html

Introduction

Traveling Wave Equals Sum of Stationary Modes



http://www.youtube.com/watch?v=GMXlzCX5gio&feature=related

Modes propres d'une plaque appuyée en son centre

(archet)

(pot vibrant)

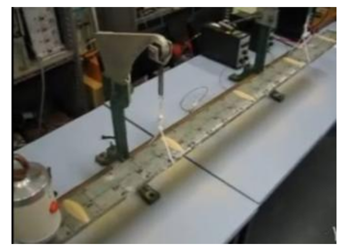
http://www.youtube.com/watch?v=EprMFajNzfQ

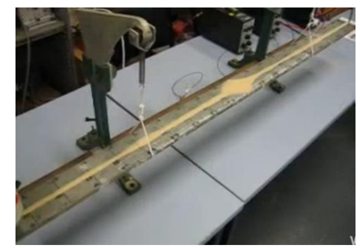
http://www.youtube.com/watch?v=GtiSCBXbHAg

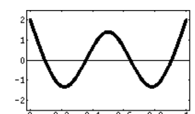
Une structure continu possède une infinité de modes propres

Introduction
Méthode des éléments finis en dynamique :Analyse modale
L.BAILLET

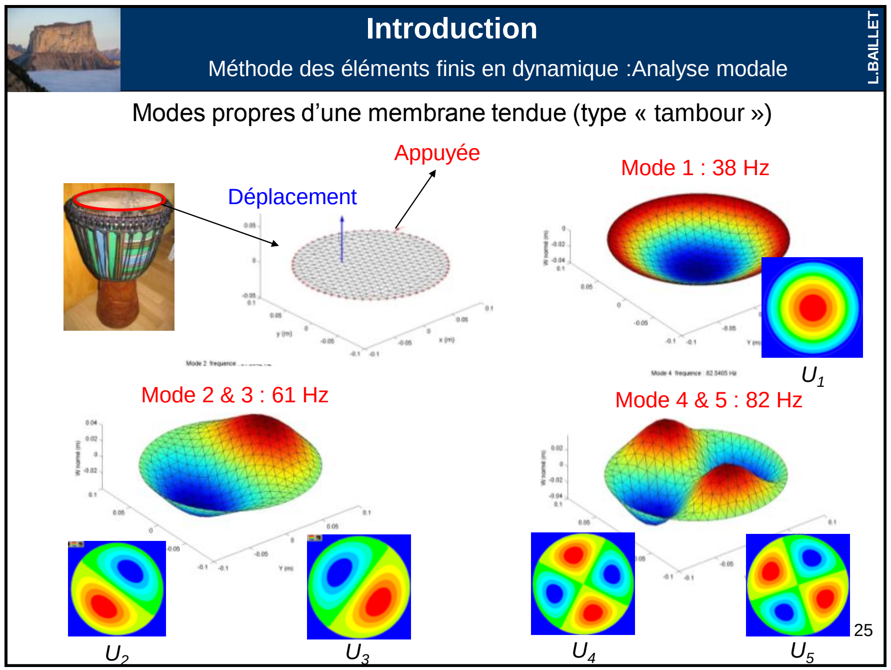
Modes de vibrations d'une barre libre-libre

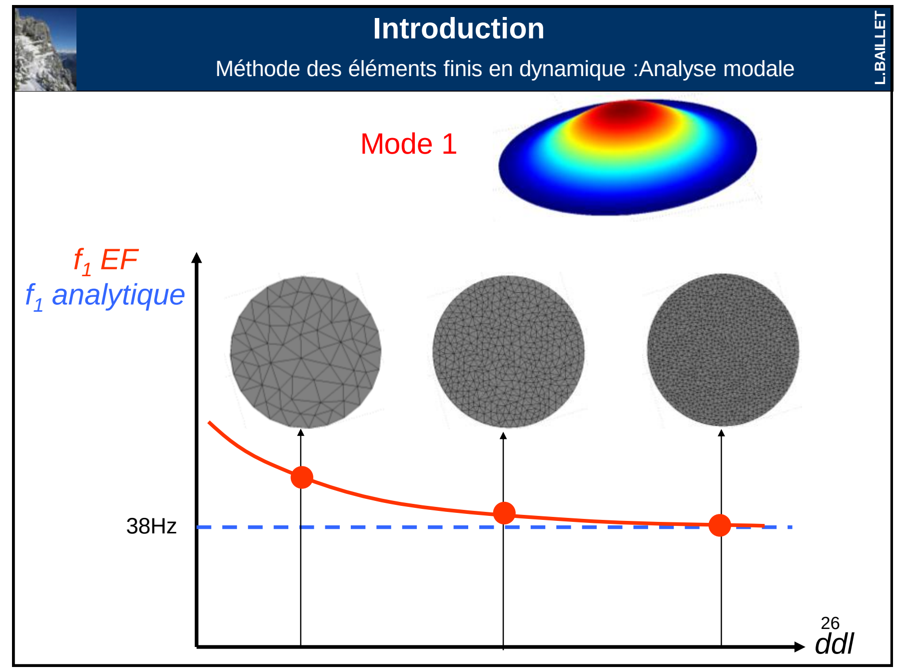






http://www.youtube.com/watch?v=XkmgMkDKAyU&feature=related

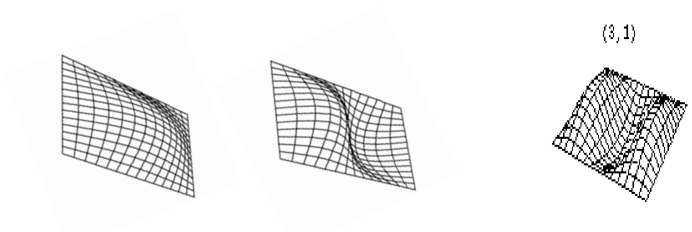

Introduction
Méthode des éléments finis en dynamique :Analyse modale
L.BAILLET
Modes propres d'une membrane tendue (type « tambour »)
Appuyée
Déplacement
Mode 1 : 38 Hz
U_1
Mode 2 & 3 : 61 Hz
Mode 4 & 5 : 82 Hz
U_2
U_3
U_4
U_5
25


Introduction
Méthode des éléments finis en dynamique :Analyse modale
L.BAILLET
Mode 1
f_1 EF
f_1 analytique
38Hz
26
ddl

Analyses modale et temporelle par éléments finis

Analyse modale en vibrations libres : membrane rectangulaire

L.BAILLET



The (1,1) Mode   The (1,2) Mode   The (3,1) Mode

http://www.kettering.edu/physics/drussell/Demos/MembraneSquare/Square.html

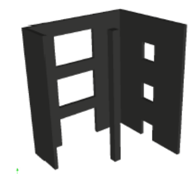
Animation courtesy of Dr. Dan Russell, Grad. Prog. Acoustics, Penn State

Introduction

Méthode des éléments finis en dynamique :Analyse modale

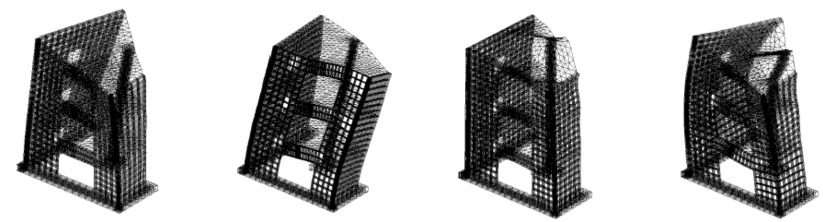
L.BAILLET

Modélisation de la maquette SMART sous séisme : utilisation d'un modèle d'endommagement anisotrope 3D
G. Lebon1, F. Ragueneau1, R. Desmorat1, Giens 2009



maquette SMART = éléments barre élastoplastique, modèles élastiques 3D (poutres, fondation) ou 2D (planchers).

Analyse modale



9Hz   16Hz   31Hz   32Hz

Quatre premiers modes propres de la maquette

Introduction

Méthode des éléments finis en dynamique :Analyse temporelle

L.BAILLET

Vecteur des ddl : $\underline{q}(t)=\{q_1(t) \quad q_2(t) \quad \cdots \quad q_n(t)\}^T$

$$\mathrm{M}\frac{\partial^2 \underline{q}}{\partial t^2}+\mathrm{C}\frac{\partial \underline{q}}{\partial t}+\mathrm{K}\,\underline{q}=\underline{F} \quad \Rightarrow \quad \underline{q}_{t+\delta t}=f\left(\underline{q}_{t-\delta t},\underline{q}_t,\underline{F}_t\right)$$

Séries de Taylor :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_i(t)}{\partial t}=f\left(q_i(t-\delta t),q_i(t),q_i(t+\delta t)\right) \\ \dfrac{\partial^2 q_i(t)}{\partial t^2}=g\left(q_i(t-\delta t),q_i(t),q_i(t+\delta t)\right) \end{cases}$$

La résolution dépend du développement de Taylor utilisé :

- explicite (différence centrée, Runge Kutta,…)
- implicite (Newmark, HHT,…)

29

Introduction

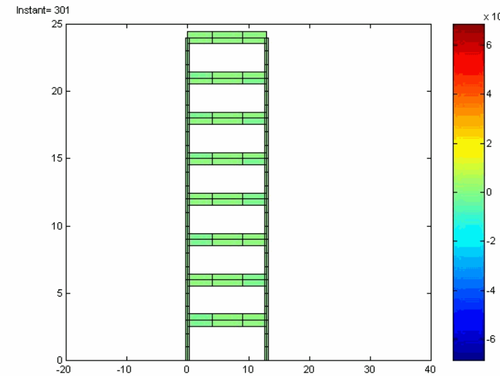
Méthode des éléments finis en dynamique :Analyse temporelle

L.BAILLET

Comportement d'un immeuble en béton armé sous séisme

Source :

http://www.necs.fr/



Structure étudiée: bâtiment à ossature en béton armé
Comportement mécanique: fissuration béton (mécanique de l'endommagement), plasticité armatures
Conditions aux limites: encastrement à la base
Chargement: séisme mono-directionnel (repère relatif)

30

Introduction

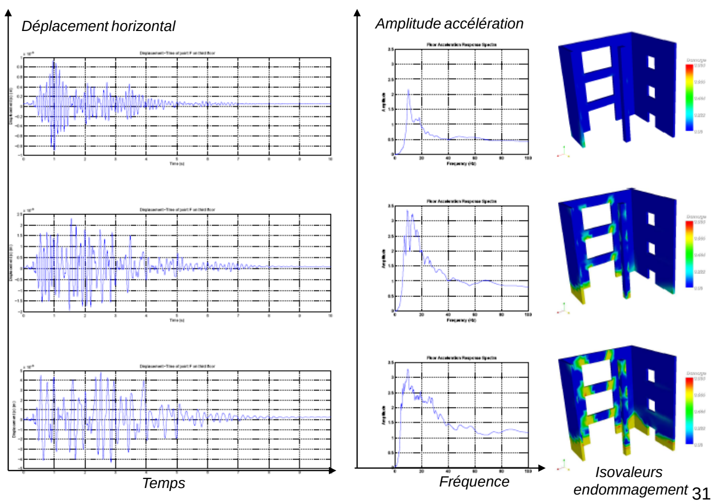
Méthode des éléments finis en dynamique :Analyse temporelle

L.BAILLET

Séisme d'intensité 0.1g

Séisme d'intensité 0.4g

Séisme d'intensité 0.8g.



31

Évolution du spectre des accélérations et de la variable d'endommagement pour 3 séismes

Sommaire

L.BAILLET

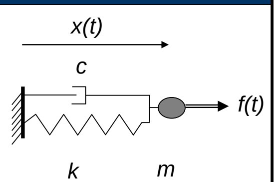
32

I. L'oscillateur à 1 degré de liberté

Structure dissipative excitée

L.BAILLET

Oscillations forcées amorties $\boxed{m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=f(t)}$



Solution générale = superposition de deux mouvements

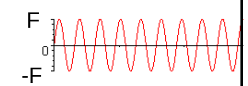
- réponse transitoire (ou libre)
  solution de l'équation homogène : $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0$
- réponse stationnaire (ou forcée)
  solution particulière de l'équation complète : $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=f(t)$

I. L'oscillateur à 1 degré de liberté

Structure dissipative excitée : sollicitation harmonique

L.BAILLET

Réponse à une sollicitation harmonique $f(t)=F\sin\omega_f t$



Solution stationnaire (particulière) $x(t)=X\sin(\omega_f t-\phi),\quad X\geq 0$

$$\tan\phi=\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2},\quad X=\frac{F}{k}\boxed{\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}}\quad \text{avec}\quad \beta=\frac{\omega_f}{\omega},\quad \phi\in\left[0{,}180°\right]$$

$\frac{F}{k}$ = déflexion statique

fad=facteur d'amplification dynamique

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

I. L'oscillateur à 1 degré de liberté

Structure dissipative excitée : sollicitation harmonique

L.BAILLET

Solution générale = réponse libre (transitoire) + réponse forcée (stationnaire)

$$x(t)=e^{-\xi\omega t}\left[A\cos\omega_a t+B\sin\omega_a t\right]+X\sin(\omega_f t-\phi)$$

Régime permanent

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t)=e^{-\xi\omega t}\left[A\cos\omega_a t+B\sin\omega_a t\right]+\boxed{\frac{F}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}((1-\beta^2)\sin\omega_f t-2\xi\beta\cos\omega_f t)}}$$

A et *B* obtenues par les conditions initiales, $\omega_a=\omega\sqrt{1-\xi^2}$ et $\beta=\dfrac{\omega_f}{\omega}$

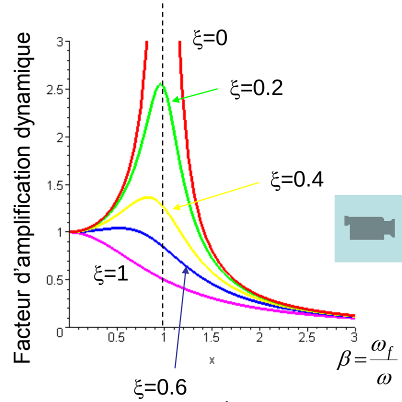
$$\begin{cases} A=\dfrac{F}{k}\dfrac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}+x_0 \\ B=\dfrac{F}{k}\dfrac{\omega}{\omega_a}\left\{\dfrac{2\beta\xi-\beta(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)^2+(2\beta\xi)^2}\right\}+\dfrac{\dot{x}_0+x_0\omega\xi}{\omega_a}\end{cases}$$

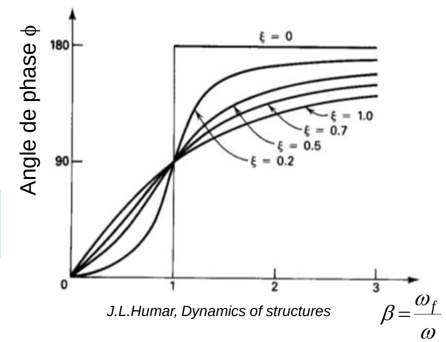
I. L'oscillateur à 1 degré de liberté

Structure dissipative excitée : sollicitation harmonique

L.BAILLET

$\omega_f=\omega$



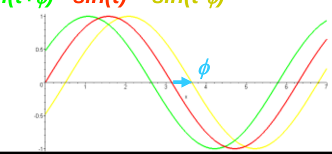


J.L.Humar, Dynamics of structures

$$fad=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$$\boxed{fad_{\max}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\ \text{pour}\ \beta=\sqrt{1-2\xi^2}}$$

sin(t+ϕ) *sin(t)* *sin(t-ϕ)*



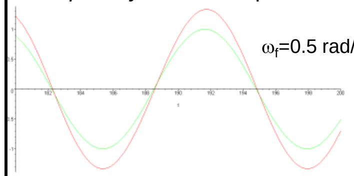
18

I. L'oscillateur à 1 degré de liberté

Structure dissipative excitée : sollicitation harmonique

L.BAILLET

Exemple : système au repos excité à t>0 par $f(t) = F \sin \omega_f t$



ω_f=0.5 rad/s

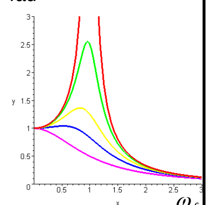
en vert : $\sin \omega_f t$

en rouge : $x(t)$

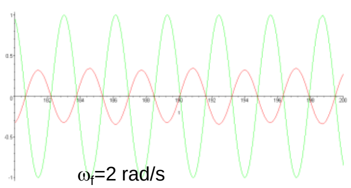
$t \in [180,200]$

$\omega = 1 \text{ rad/s}$

fad

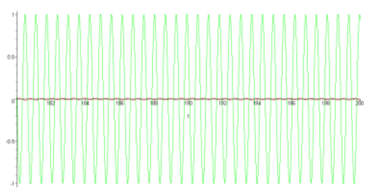


$\beta = \dfrac{\omega_f}{\omega}$



ω_f=2 rad/s

ω_f=20 rad/s



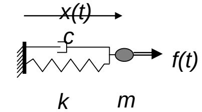
I. L'oscillateur à 1 degré de liberté

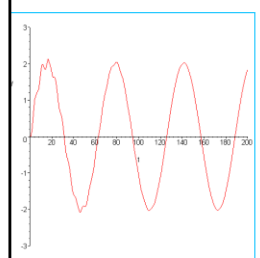
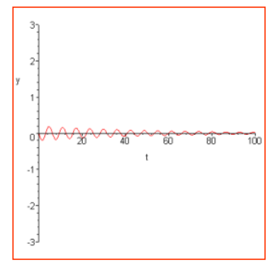
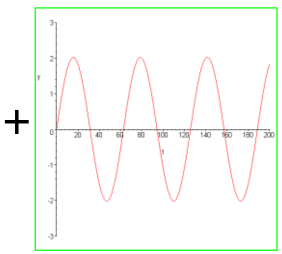
Structure dissipative excitée : sollicitation harmonique

L.BAILLET

Exemple : système au repos excité à t>0 par $f(t) = F \sin \omega_f t \quad ; \omega_f \neq \omega$

Soit $\omega_f < \omega$ d'où $x(t) = e^{-\xi\omega t}\left[A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t\right] + X \sin(\omega_f t - \phi)$



 =  + 

Réponse totale — Réponse libre — Réponse forcée

38

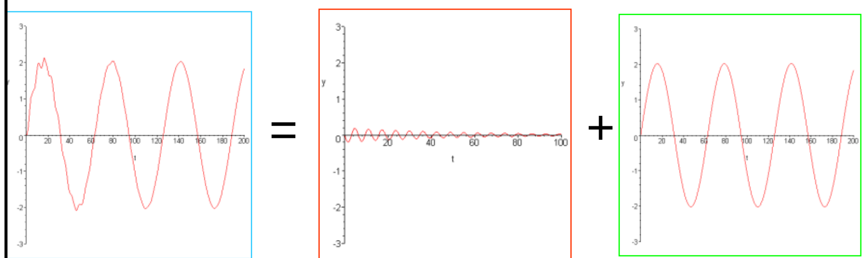
Tracés de *x(t)* en fonction de *t* pour les paramètres $\omega_f = 0.1; \omega = 1; F = 10; k = 5.; \xi = 0.02$

I. L’oscillateur à 1 degré de liberté

Structure dissipative excitée : sollicitation harmonique

L.BAILLET

Exemple : système au repos excité à t>0 par $f(t) = F \sin \omega_f t$



Réponse totale = Réponse libre (ou transitoire) + Réponse forcée (ou stationnaire)

La réponse libre (ou transitoire) s’amortit au cours du temps d’autant plus vite que l’amortissement ξ est élevé.

$\Rightarrow$ La réponse totale tend vers la solution stationnaire pour $t \to \infty$

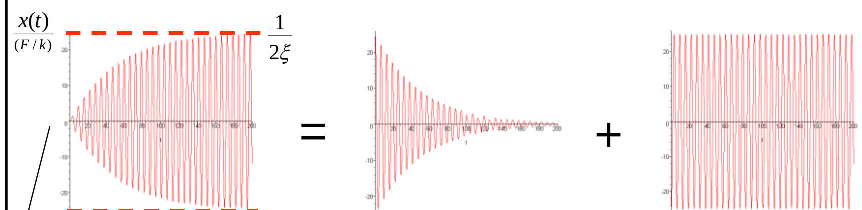
I. L’oscillateur à 1 degré de liberté

Structure dissipative excitée : sollicitation harmonique, résonance

L.BAILLET

Exemple : système au repos excité à t>0 par $f(t) = F \sin \omega_f t$

$$\boxed{\omega_f = \omega \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow fad = \frac{1}{2\xi}}$$



Réponse totale = Réponse libre + Réponse forcée

Tracés de $\frac{x(t)}{(F/k)}$ en fonction de t pour les paramètres $\omega_f = 1; \omega = 1; F = 10; k = 5.; \xi = 0.02; \frac{1}{2\xi} = 25$

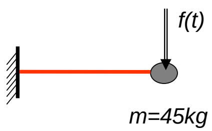
$$x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\omega_f t - \phi) = \frac{F}{k} \frac{1}{2\xi} \sin(\omega_f t - \phi) \Rightarrow \boxed{\frac{x_{max}}{F/k} = \frac{1}{2\xi}}$$

I. L'oscillateur à 1 degré de liberté

Structure dissipative excitée : sollicitation harmonique

L.BAILLET

Application



L=1.6m; E=200 x10⁹Pa, I=1.6x10⁻⁵m⁴

L'amplitude de la force appliquée à la masse est de 125N.

Quels sont les intervalles de la pulsation forcée (sollicitation) entrainant en régime en permanent une amplitude maximale de 0.2mm ?

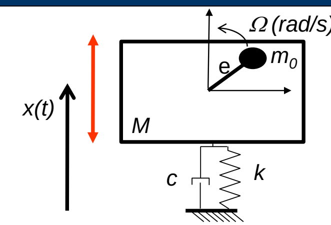
L'amortissement est négligeable.

I. L'oscillateur à 1 degré de liberté

Structure dissipative excitée : sollicitation harmonique

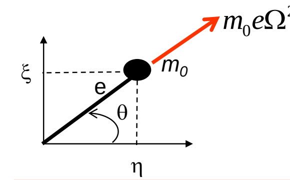
L.BAILLET

Application



$m=M+m_0$ masse totale du système

Le système est déséquilibré par une masse m_0 tournant à une vitesse angulaire Ω et située à une distance e de son axe de rotation.



$$\left.\begin{aligned}\eta &= e\cos\theta\\ \zeta &= e\sin\theta\\ \theta &= \Omega t-\pi\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}\ddot{\eta} &= -e\Omega^2\cos(\Omega t-\pi)\\ \ddot{\zeta} &= -e\Omega^2\sin(\Omega t-\pi)\end{aligned}\right.$$

$$\boxed{m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=-m_0e\Omega^2(\sin\Omega t-\pi)=m_0e\Omega^2\sin\Omega t}$$

I. L'oscillateur à 1 degré de liberté

Structure dissipative excitée : sollicitation harmonique

L.BAILLET

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=m_0 e\Omega^2 \sin\Omega t = F\sin\Omega t$$

avec $F=m_0 e\Omega^2$.

La réponse en régime permanent est donnée par $\boxed{x(t)=X\sin(\Omega t-\phi)}$

où $X=\dfrac{m_0 e\Omega^2}{k}\dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}=\dfrac{e\beta^2\, m_0/m}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$

$\tan\phi=\dfrac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$

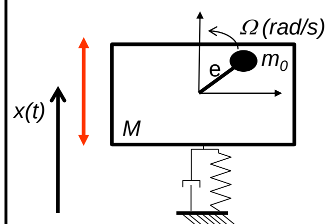
et $\beta=\dfrac{\Omega}{\omega}$

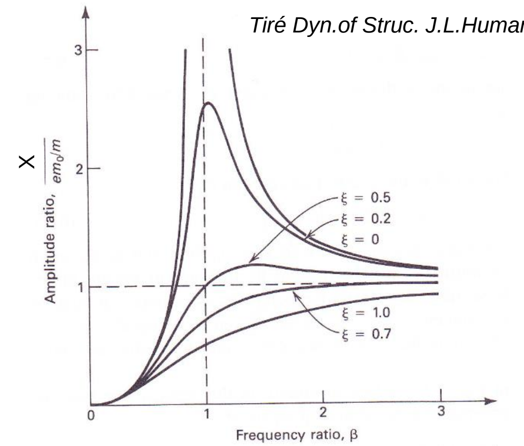
I. L'oscillateur à 1 degré de liberté

Structure dissipative excitée : sollicitation harmonique

L.BAILLET

Tiré Dyn.of Struc. J.L.Humar





L'amplitude maximale $X_{\max}=\dfrac{e(m_0/m)}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ est obtenue pour $\beta=\dfrac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}=\dfrac{\Omega}{\omega}$

http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&v=xHcimWmUVCA

I. L'oscillateur à 1 degré de liberté

Structure dissipative excitée : sollicitation harmonique

L.BAILLET

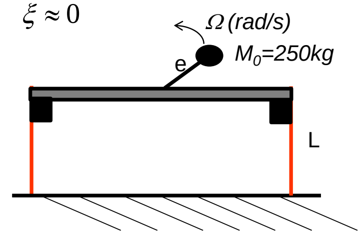
$E = 200000MPa$

$I = 25.8\times10^{6}\,mm^{4}$

$L = 3000mm$

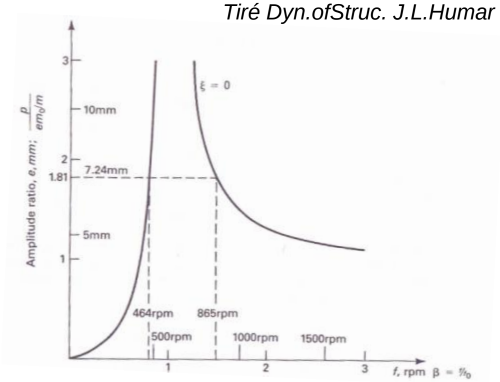
$I/y_{\max} = 249\times10^{3}\,mm^{3}$

$\xi \approx 0$



m=2500kg masse totale du système

Tiré Dyn.ofStruc. J.L.Humar



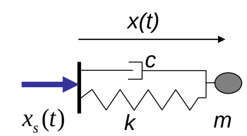
Donner les intervalles de vitesse Ω telles que les contraintes de flexion dans les 4 poteaux n'excèdent pas 100MPa.

I. L'oscillateur à 1 degré de liberté

Structure dissipative excitée : sollicitation harmonique

L.BAILLET

<u>Excitation harmonique du support</u> $x_s(t) = A_s \sin\omega_f t$



x(t) déplacement de la masse dans le repère mobile lié au support

$x(t)+x_s(t)$ déplacement de la masse dans un repère fixe

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{x}_s(t) = mA_s\omega_f^2 \sin(\omega_f\ t) = F\sin(\omega_f\ t)$$

$$avec\ F = A_s m\omega_f^2$$

Solution $x(t) = X\sin(\omega_f\,t - \phi)$

En régime permanent, le déplacement total u_{tot} de la masse dans le repère fixe est

$$\boxed{\frac{u_{tot}}{A_s} = \sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}}$$

http://www.youtube.com/watch?v=aZNnwQ8HJHU&feature=player_detailpage

Excitation harmonique du support

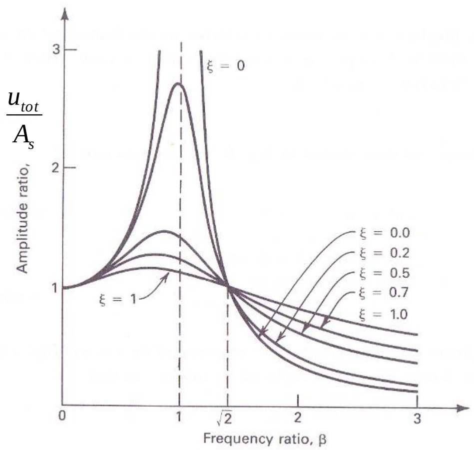
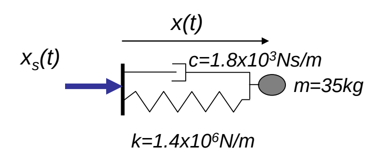


Figure 6.13 Variation of the amplitude of transmitted motion with frequency ratio and damping.

Tiré Dyn.of Struc. J.L.Humar

Application



Le sol est animé d'un déplacement harmonique de 10mm d'amplitude à une fréquence de 35Hz.

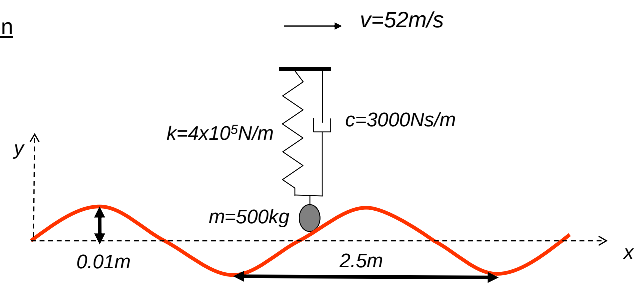
Quelle est l'amplitude relative et absolue de la masse en régime permanent ?

L.BAILLET

I. L'oscillateur à 1 degré de liberté

Structure dissipative excitée : sollicitation harmonique

<u>Application</u>



Quelle est l'amplitude absolue du système se déplaçant à une vitesse *v* sur une route ayant un profil sinusoïdale ?

49

L.BAILLET

Sommaire

50

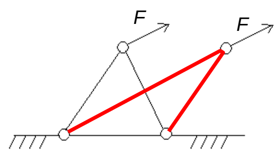
Structures discrètes

2.1. Définition

L.BAILLET

Une structure discrète est composée d'éléments discrets de forme simple (barres, poutres) interconnectés en structures plus complexes (treillis, ossature).

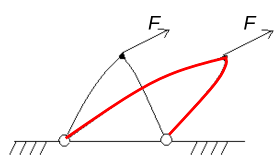
❑ Treillis (structure réticulée) : les <u>extrémités articulées</u> des **barres** sont assemblées pour former des structures planes (2D) ou spatiales (3D). Les barres travaillent seulement en <u>traction/compression</u> (pas de flexion).



Nœuds $\equiv$ articulations parfaites

Dans la pratique la liaison peut être rigide (soudure) ou souple (boulon d'attache)

❑ Ossatures : les **poutres** assemblées travaillent aussi en flexion (liaison encastrement).



Ces structures sont très utilisées: Légèreté, résistance, éléments préfabriqués

Structures discrètes

2.2. Les éléments barres (cas 2D)

L.BAILLET

<u>Objectif</u> : Construire les matrices de masse et de raideur (M et K) ainsi que l'équation dynamique (sans amortissement : $\mathrm{M}\,\underline{\ddot{q}}+\mathrm{K}\,\underline{q}=\underline{F}$)

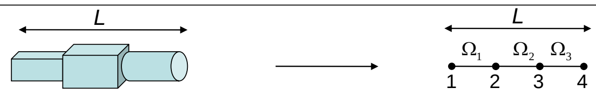
a) Discrétisation
b) Interpolation des déplacements
c) Déformations et contraintes
d) Énergie de déformation : matrice de raideur
e) Énergie cinétique
   1. Matrice de masse cohérente
   2. Matrice de masse concentrée
f) Passage de repères local-global
g) Assemblage des éléments
h) Équations de Lagrange

Structures discrètes

2.2. Les éléments barres (cas 2D) : Discrétisation

L.BAILLET

Les éléments barres sont soumis seulement à des efforts normaux (pas de couple transmis)



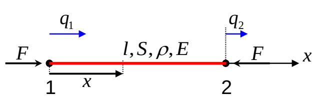
3 Éléments

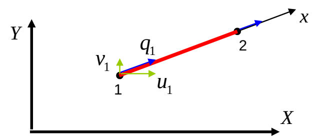
4 noeuds

Élément réel

Maillage

l, S, ρ, E : longueur, section, masse volumique, module d'Young (scalaires)





$\underline{q_e} = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix}$ Axes locaux ⟶ Axes globaux

Formulation locale ⟶ Formulation globale $\underline{q_e^g} = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \\ u_2(t) \\ v_2(t) \end{Bmatrix}$

$(u_n, v_n)_{n=1..4}$: déplacements nodaux (scalaires)

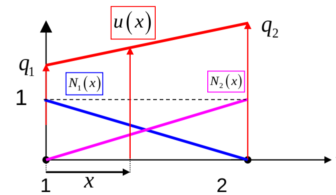
53

Structures discrètes

2.2. Les éléments barres (cas 2D) : Interpolation des déplacements

L.BAILLET

<u>Hypothèse</u> : Au sein de l'élément *e* [12] le déplacement varie **linéairement** de q_1 à q_2 entre les nœuds 1 et 2



$$u(x,t) = N_1(x)\, q_1(t) + N_2(x)\, q_2(t)$$

avec : $\begin{cases} N_1(x) = 1 - \dfrac{x}{l} \\ N_2(x) = \dfrac{x}{l} \end{cases}$

Forme matricielle : $\boxed{\begin{array}{l} u(x,t) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} \\ u(x,t) = N\, \underline{q_e} \end{array}}$

N_i : Fonctions de formes (ou de base)

N : Matrice d'interpolation $\quad N = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix}$

q_e : Vecteur des déplacements nodaux de la barre *e* $\quad \underline{q_e^T}(t) = \{q_1(t) \;\; q_2(t)\}$

54

Une seule déformation (axiale), pas d'effort tranchant

$$\varepsilon_{xx}(t) = \frac{\delta l}{l} = \frac{d\,u(x,t)}{d\,x} = \frac{d\,N_1(x)}{d\,x} q_1(t) + \frac{d\,N_2(x)}{d\,x} q_2(t)$$

Forme matricielle :

$$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon_{xx}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{d\,N_1(x)}{d\,x} & \dfrac{d\,N_2(x)}{d\,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} \\ \varepsilon_{xx} = B\,\underline{q_e} \end{array}}$$

avec $B = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{l} & \dfrac{1}{l} \end{bmatrix}$

La contrainte axiale est donnée par la loi de Hooke:

$$\boxed{\sigma_{xx}(t) = E\,\varepsilon_{xx}(t) = E\,B\,\underline{q_e}}$$

L'énergie de déformation dans la barre *e* s'écrit :

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{v_e} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\; dv_e = \frac{1}{2}\int_{v_e} \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\; dv_e$$

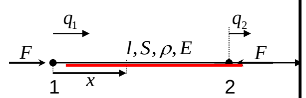
$$U_e = \frac{1}{2}\int_{v_e} \sigma_{xx}.\varepsilon_{xx}\; dv_e = \frac{1}{2}\int_{v_e} \left(E\,B\,\underline{q_e}\right)^T.\left(B\,\underline{q_e}\right) dv_e$$

$$U_e = \frac{1}{2}\underline{q_e}^T \left[\int_{v_e} B^T E\;B\,dv_e\right] \underline{q_e}$$

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}\underline{q_e}^T K_e \underline{q_e} \quad \text{avec} \quad K_e = \int_{v_e} B^T E\;B\,dv_e}$$

K_e : Matrice de rigidité élémentaire de la barre *e*

Application : matrice de rigidité d'une barre à 2 noeuds



$$K_e = \frac{ES}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Énergie de déformation

$$U_e = \frac{ES}{2l}(q_1^2 - 2q_1q_2 + q_2^2)$$

L'énergie cinétique dans la barre *e* s'écrit

$$T_e = \frac{1}{2}\int_{v_e} \rho V^2(x,t)\, dv_e = \frac{1}{2}\int_{v_e} \rho \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 dv_e$$

Vitesses nodales

$$u(x,t) = N\, \underline{q_e} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = N\, \underline{\dot{q}_e}$$

$$\underline{\dot{q}_e}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$T_e = \frac{1}{2}\int_{v_e} \rho \left(N\, \underline{\dot{q}_e}\right)^T \left(N\, \underline{\dot{q}_e}\right) dv_e = \frac{1}{2}\underline{\dot{q}_e^T}\left[\int_{v_e} \rho N^T.N\, dv_e\right]\underline{\dot{q}_e}$$

$$\boxed{T_e = \frac{1}{2}\underline{\dot{q}_e^T} M_e \underline{\dot{q}_e} \quad \text{avec} \quad M_e = \int_{v_e} \rho N^T.N\, dv_e}$$

M_e Matrice de masse élémentaire de la barre *e*

Structures discrètes

2.2. Les éléments barres (cas 2D) : Matrice de masse cohérente

L.BAILLET

$$M_e = \int_{v_e} \rho N^T.N \, dv_e = \int_{v_e} \rho \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} .dv_e$$

<u>Remarque</u> : La matrice de masse est symétrique

L'intégration sur le volume avec *S* et ρ constants donne pour une barre à 2 noeuds

$$M_e = \rho S \int_l \begin{bmatrix} N_1^2(x) & N_1(x)N_2(x) \\ N_1(x)N_2(x) & N_2^2(x) \end{bmatrix} dx$$

$$\boxed{M_e = \frac{\rho S l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

Calcul de *T* à partir des 2 formulations : $\begin{cases} T_e = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{v_e} \rho \left(N \, \underline{\dot{q}_e} \right)^2 dv_e \\ T_e = \dfrac{1}{2} \underline{\dot{q}_e^T} M_e \underline{\dot{q}_e} \end{cases}$

Structures discrètes

2.2. Les éléments barres (cas 2D) : Matrice de masse concentrée

L.BAILLET

On suppose que la masse *m* de la barre est concentrée aux 2 nœuds

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho S l/2 = m/2 & si \quad x = 0 \\ \rho S l/2 = m/2 & si \quad x = l \end{cases}$$

D'où $M_e^C = S \int_l \rho(x) \begin{bmatrix} N_1^2(x) & N_1(x)N_2(x) \\ N_1(x)N_2(x) & N_2^2(x) \end{bmatrix} dx$

$$\boxed{M_e^C = \frac{\rho S l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{m}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

<u>Avantages</u> : - Construction facile

- Matrice diagonale ≡ inversion immédiate

<u>Inconvénient</u> : résultats moins précis (spatialement et temporellement)

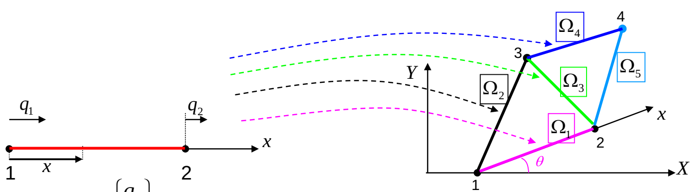
Montrer que T_e et T_e^C sont égaux avec $\dot{q}_1 = \dot{q}_2$

Structures discrètes

2.2. Les éléments barres (cas 2D) : Passage de repères local-global

L.BAILLET

Repère local — *Repère global*



$$\underline{q_e} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{q_1^g} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$u_1 \rightarrow$ Dépl /X noeud 1

$v_1 \rightarrow$ Dépl /Y noeud 1

$$\underline{q_2^g} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$\underline{q_e} = T_e \underline{q_e^g}$ avec $T_e = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

61

Structures discrètes

2.2. Les éléments barres (cas 2D) : Passage de repères local-global

L.BAILLET

On montre que

$$K_e^g = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha \end{bmatrix} = T_e^T K_e T_e$$

$$M_e^g = \frac{\rho S l}{6} \begin{bmatrix} \alpha & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \alpha \end{bmatrix}$$ avec $$\alpha = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

62

Les énergies cinétique et de déformation de la structure constituée de *n* barres sont obtenues par sommation :

$$\boxed{\begin{aligned} U^g &= \sum_{e=1}^{n} U_e^g \\ T^g &= \sum_{e=1}^{n} T_e^g \end{aligned}}$$

Énergies $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cinétique} \\ \text{Déformation} \\ \text{Dissipation} \end{array} \right. \longrightarrow$ $\boxed{\text{Équation du mouvement}}$

Soit $\begin{array}{l} \underline{q} = \{q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_{N-1} \quad q_N\}^T \\ \underline{\dot{q}} = \{\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dots \quad \dot{q}_{N-1} \quad \dot{q}_N\}^T \end{array}$ les déplacements et vitesses des *N* ddl dans le repère global.

Pour un système conservatif (pas de dissipation)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T^g}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T^g}{\partial q_i} + \frac{\partial U^g}{\partial q_i} = F_i \qquad i = 1, \dots, N$$

À partir de : $\left\{ \begin{array}{l} T^g = \dfrac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T M \underline{\dot{q}} \\ U^g = \dfrac{1}{2} \underline{q}^T K \underline{q} \end{array} \right. \longrightarrow \boxed{\mathrm{M}\,\underline{\ddot{q}} + \mathrm{K}\,\underline{q} = \underline{F}}$

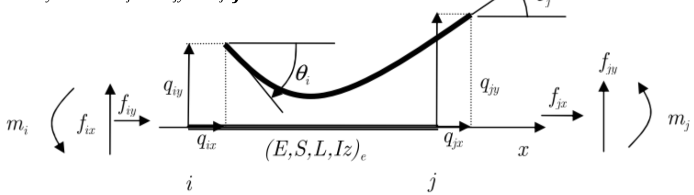
Pour un système non conservatif : $\boxed{\mathrm{M}\,\underline{\ddot{q}} + C\,\underline{\dot{q}} + \mathrm{K}\,\underline{q} = \underline{F}}$

Structures discrètes

2.4. Les éléments poutres

L.BAILLET

$$\underline{q_e} = \{q_{ix} \quad q_{iy} \quad q_i \quad q_{jx} \quad q_{jy} \quad q_j\}^T$$



$$K_e \underline{q_e} = \underline{F_e}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

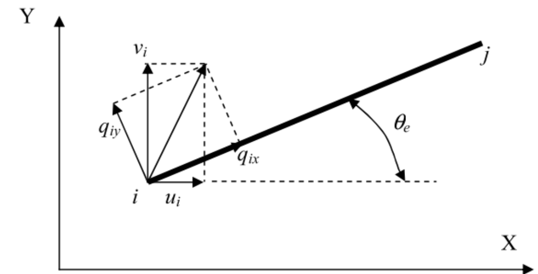
$$\underline{F_e} = \begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ m_i \\ f_{jx} \\ f_{jy} \\ m_j \end{Bmatrix}$$

65

Structures discrètes

2.4. Les éléments poutres

L.BAILLET



$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta_e & -\cos\theta_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_e & -\sin\theta_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta_e & \cos\theta_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{ix} \\ q_{iy} \\ \theta_i \\ q_{jx} \\ q_{jy} \\ \theta_j \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \underline{q_e^g} = T_e^{-1} \underline{q_e} = T_e^T \underline{q_e} \Leftrightarrow \underline{q_e} = T_e \underline{q_e^g}$$

$$\boxed{K_e^g = T_e^T K_e T_e \qquad M_e^g = T_e^T M_e T_e}$$

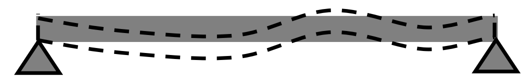
66

Structures discrètes
2.4. Les éléments poutres

La matrice de masse de l'élément poutre a la forme suivante :

$$M_e = \frac{\rho S L}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & & & & 156 & -22L \\ sym. & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Structures discrètes
2.4. Les éléments poutres



Modes de vibration en flexion d'une passerelle

2nd

3ième

Modes de vibration en torsion d'une passerelle

Sommaire

L.BAILLET

Structures discrètes

3.1. Fréquences et modes propres

L.BAILLET

Équation du mouvement pour un système discret à N degrés de liberté

$$\mathrm{M}\,\underline{\ddot{q}_t} + \mathrm{C}\,\underline{\dot{q}_t} + \mathrm{K}\,\underline{q_t} = \underline{F_t}$$

$\underline{q}$ le vecteur des inconnues globales dépendant de la structure (dépl, rot°)

On recherche la solution de l'équation pour une vibration libre ($\underline{F_t} = 0$)
On suppose qu'il n'y a pas d'amortissement (introduction par la suite):

$$(1)\quad \mathrm{M}\,\underline{\ddot{q}_t} + \mathrm{K}\,\underline{q_t} = \underline{0}$$

Par séparation des variables d'espace et de temps (indépendantes) puis écriture sous forme d'une fréquence pure, les solutions de (1) sont

$$\underline{q_t} = \underline{x}\sin(\omega t + \phi)$$

$$\underline{\ddot{q}_t} = -\omega^2\,\underline{x}\sin(\omega t + \phi)$$

Structures discrètes

3.1. Fréquences et modes propres

L.BAILLET

$$(1) \Leftrightarrow -\omega^2 \mathrm{M}\,\underline{x}\sin(\omega t+\phi)+\mathrm{K}\,\underline{x}\sin(\omega t+\phi)=\underline{0}$$

$$\forall t,\ \left(-\omega^2\mathrm{M}+\mathrm{K}\right)\underline{x}\sin(\omega t+\phi)=\underline{0} \quad \Rightarrow \quad \left(-\omega^2\mathrm{M}+\mathrm{K}\right)\underline{x}=\underline{0}$$

Si M est inversible, alors on a un problème « classique » aux valeurs propres:

$$\left(\mathrm{K}-\omega^2\mathrm{M}\right)\underline{x}=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M}^{-1}\mathrm{K}\underline{x}=\omega^2\,\underline{x} \qquad \begin{cases}\dim\left(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{K}\right)=N\times N\\ \dim\left(\underline{x}\right)=N\end{cases}$$

Ce problème admet *N* valeurs propres ω_i^2 et vecteurs propres $\underline{x^{(i)}}$

$$\boxed{\left(\omega_i^2,\underline{x^{(i)}}\right) \quad i=1\ldots N \quad , \quad \mathrm{M}^{-1}\mathrm{K}\,\underline{x^{(i)}}=\omega_i^2\,\underline{x^{(i)}}}$$

$\left(\omega_i\ ,\underline{x^{(i)}}\right)$ correspondent aux *N* pulsations (rad/s) et modes propres de vibration

71

Structures discrètes

3.2. Superposition modale

L.BAILLET

La réponse d'une structure à N degrés de liberté s'écrit sur la base modale en fonction des *N* modes propres

$$\underline{q_t}=\alpha_1(t)\underline{x^{(1)}}+\alpha_2(t)\underline{x^{(2)}}+\ldots+\alpha_N(t)\underline{x^{(N)}}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(t)\underline{x^{(i)}}$$

Remarque : pour les structures continues $N\rightarrow\infty$

Sous forme matricielle :

$$\boxed{\underline{q_t}=\Phi\ \underline{\alpha_t}} \qquad \begin{cases}\Phi=\left[\underline{x^{(1)}}\ldots\underline{x^{(N)}}\right] \quad \text{avec} \quad \dim(\Phi)=N\times N\\ \underline{\alpha_t}=\left\{\alpha_1(t)\ldots\alpha_N(t)\right\}^T \ \text{vecteur des coordonnées modales}\end{cases}$$

C'est un passage, une projection dans la base formée par les vecteurs propres.

Φ est la matrice modale de changement de base *N*x*N*

Intérêt: dans cette base modale, les *N* équations du mouvement couplées deviennent indépendantes.

72

Structures discrètes
3.2. Superposition modale

L.BAILLET

Les matrices de masse et de raideurs sont diagonales à travers le changement de base:

$$\lceil k \rfloor = \Phi^T \mathrm{K}\, \Phi = \begin{bmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_N \end{bmatrix}$$

$$\lceil m \rfloor = \Phi^T \mathrm{M}\, \Phi = \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_N \end{bmatrix}$$

Démonstration :

$$\Phi^T \mathrm{M}\, \Phi = \mathrm{M}_{\mathrm{mod}} = \begin{bmatrix} \underline{x^{(1)T}} \\ \vdots \\ \underline{x^{(N)T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{M}_{11} & & \mathrm{M}_{1N} \\ & \ddots & \\ \mathrm{M}_{N1} & & \mathrm{M}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x^{(1)}} & \cdots & \underline{x^{(N)}} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M}_{\mathrm{mod}}\{i,j\} = x^{(i)T}\mathrm{M}x^{(j)} \qquad \mathrm{K}_{\mathrm{mod}}\{i,j\} = x^{(i)T}\mathrm{K}x^{(j)}$$

Structures discrètes
3.2. Superposition modale

L.BAILLET

À partir de la définition de $\left(\omega_i\,,\underline{x^{(i)}}\right)$ $\quad \forall \{i,j\} \in 1,..,N \quad ,$

$$\begin{aligned} (a) & \left\{ \underline{x^{(j)T}} \left(\mathrm{K}\,\underline{x^{(i)}} - \omega_i^{\,2}\mathrm{M}\underline{x^{(i)}}\right) = 0 \right. \\ (b) & \left| \underline{x^{(i)T}} \left(\mathrm{K}\,\underline{x^{(j)}} - \omega_j^{\,2}\mathrm{M}\underline{x^{(j)}}\right) = 0 \right. \end{aligned}$$

Les matrices K et M sont symétriques, ce qui implique :

$$\begin{cases} \underline{x^{(j)T}}\mathrm{K}\,\underline{x^{(i)}} = \underline{x^{(i)T}}\mathrm{K}\,\underline{x^{(j)}} \\ \underline{x^{(j)T}}\mathrm{M}\,\underline{x^{(i)}} = \underline{x^{(i)T}}\mathrm{M}\,\underline{x^{(j)}} \end{cases}$$

$$(a)-(b) \Leftrightarrow \underline{x^{(j)T}}\mathrm{K}\,\underline{x^{(i)}} - \underline{x^{(i)T}}\mathrm{K}\,\underline{x^{(j)}} + \omega_j^{\,2}\,\underline{x^{(i)T}}\mathrm{M}\underline{x^{(j)}} - \omega_i^{\,2}\,\underline{x^{(j)T}}\mathrm{M}\underline{x^{(i)}} = 0$$

Soit $\left(\omega_j^{\,2} - \omega_i^{\,2}\right)\underline{x^{(j)T}}\mathrm{M}\underline{x^{(i)}} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} i \neq j \Rightarrow \quad \underline{x^{(j)T}}\mathrm{M}\underline{x^{(i)}} = 0 \\ i = j \Rightarrow \begin{cases} \underline{x^{(i)T}}\mathrm{M}\underline{x^{(i)}} = m_i \\ \underline{x^{(i)T}}\mathrm{K}\underline{x^{(i)}} = k_i \end{cases} \end{cases}$

m_i et k_i : masses et raideurs modales du mode i

Dans la **base réelle** : $\mathrm{M}\,\underline{\ddot{q}_t} + \mathrm{K}\,\underline{q_t} = \underline{0}$ et $\underline{q_t} = \Phi\,\underline{\alpha_t}$

Dans la **base modale** : $\Phi^T\left(\mathrm{M}\Phi\,\underline{\ddot{\alpha}_t} + \mathrm{K}\,\Phi\,\underline{\alpha_t}\right) = \underline{0} \Leftrightarrow \boxed{\lceil m \rfloor \underline{\ddot{\alpha}_t} + \lceil k \rfloor \underline{\alpha_t} = \underline{0}}$

$$\begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{\alpha}_N(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_N(t) \end{Bmatrix} = \underline{0}$$

si $\alpha_i(t) = \beta_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$; $\ddot{\alpha}_i(t) = -\omega_i^2 \beta_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$

alors: $\forall i = 1,.., N \quad , \quad -\omega_i^2 m_i + k_i = 0$

Une équation par ligne avec pour solution

$\alpha_i(t) = \beta_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$, $\boxed{\omega_i = \sqrt{\dfrac{k_i}{m_i}}}$ et C.I. pour β_i, ϕ_i

Equation du mouvement dans la **base modale** :

$$\left(\Phi^T\mathrm{M}\Phi\,\underline{\ddot{\alpha}_t} + \Phi^T\mathrm{C}\,\Phi\,\underline{\dot{\alpha}_t} + \Phi^T\mathrm{K}\,\Phi\,\underline{\alpha_t}\right) = \Phi^T\,\underline{F}$$

Hypothèse de Basile : $\Phi^T\mathrm{C}\,\Phi = \lceil c \rfloor$

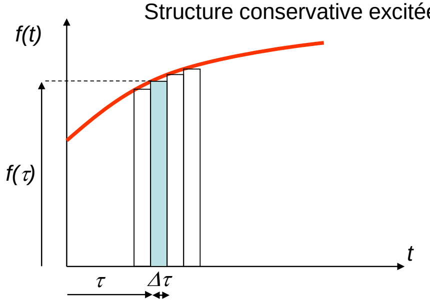
Exemple : $\mathrm{C} = a\mathrm{M} + b\mathrm{K}$

Alors: $\lceil m \rfloor \underline{\ddot{\alpha}_t} + \lceil c \rfloor \underline{\dot{\alpha}_t} + \lceil k \rfloor \underline{\alpha_t} = \Phi^T\,\underline{F}$

soit: $\boxed{\forall i = 1,.., N \quad , \quad m_i\ddot{\alpha}_i(t) + c_i\dot{\alpha}_i(t) + k_i\alpha_i(t) = f_i(t)}$

- Solution analytique pour les formes simples de $f_i(t)$
- Solution numérique de Duhamel pour les formes quelconques de $f_i(t)$

Structure conservative excitée : sollicitation quelconque



$$m_i\ddot{\alpha}_i(t)+c_i\dot{\alpha}_i(t)+k_i\alpha_i(t)=f_i(t)$$

La force appliquée *f(t)* est décomposée en somme d'impulsion f(τ)dτ agissant à l'instant $t=\tau$

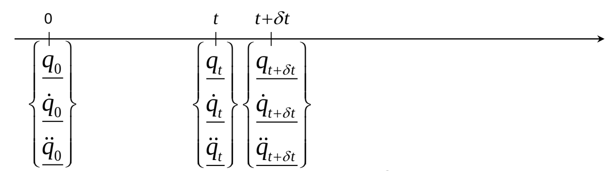
Pour un système au repos à *t=0*, la réponse totale à l'instant *t*

$$\boxed{\alpha_i(t)=\int_0^t f_i(\tau)h(t-\tau)d\tau=\frac{1}{m_i\omega_i}\int_0^t f_i(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau}$$

Intégrale de Duhamel = produit de convolution de l'excitation et de la réponse impulsionnelle

Cas général $\alpha_i(t)=(\alpha_0\cos\omega_i t+\frac{\dot{\alpha}_0}{\omega_i}\sin\omega_i t)+\int_0^t f_i(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau$

$$\mathrm{M}\,\underline{\ddot{q}_t}+\mathrm{C}\,\underline{\dot{q}_t}+\mathrm{K}\,\underline{q_t}=\underline{F_t}$$



$$\begin{array}{ccc} 0 & t & t+\delta t \\ \left\{\begin{matrix}\underline{q_0}\\ \underline{\dot{q}_0}\\ \underline{\ddot{q}_0}\end{matrix}\right\} & \left\{\begin{matrix}\underline{q_t}\\ \underline{\dot{q}_t}\\ \underline{\ddot{q}_t}\end{matrix}\right\} & \left\{\begin{matrix}\underline{q_{t+\delta t}}\\ \underline{\dot{q}_{t+\delta t}}\\ \underline{\ddot{q}_{t+\delta t}}\end{matrix}\right\}\end{array}$$

Séries de Taylor : $\underline{q_{t+\delta t}}=\underline{q_t}+\underline{\dot{q}_t}\delta t+\underline{\ddot{q}_t}\frac{(\delta t)^2}{2}+\ldots$

La force est facilement prise en compte par intégration directe

La résolution dépend du développement de Taylor utilisé :

- explicite (différence centrée, Runge Kutta,…)
- implicite (Newmark, HHT,…)

Structures discrètes

3.3. Méthode d'intégration directe : Schéma explicite différences centrées

L.BAILLET

Equation à t

(a) $\underline{\ddot{q}}_t = \dfrac{\underline{q}_{t+\delta t} - 2\underline{q}_t + \underline{q}_{t-\delta t}}{(\delta t)^2}$ (b) $\underline{\dot{q}}_t = \dfrac{\underline{q}_t - \underline{q}_{t-\delta t}}{\delta t}$ (c) $\mathrm{M}\,\underline{\ddot{q}}_t + \mathrm{C}\,\underline{\dot{q}}_t + \mathrm{K}\,\underline{q}_t = \underline{F}_t$

(a)+ (b)+ (c)⇒ $$\boxed{\underline{q}_{t+\delta t} = (\delta t)^2\,\mathrm{M}^{-1}\left(\underline{F}_t - \mathrm{K}\,\underline{q}_t - \mathrm{C}\,\underline{\dot{q}}_t\right) + 2\underline{q}_t - \underline{q}_{t-\delta t}}$$

• Si la matrice de masse est concentrée, *N* équations indépendantes

Pas de système à résoudre = opérations vectorielles

• Condition de stabilité : $\delta t < \delta t_{critique} \approx \dfrac{l_{element}}{c}$

avec *c* la vitesse des ondes longitudinales dans les barres $c = \sqrt{E/\rho}$

$\delta t_{critique}$ correspond au temps du parcours de l'onde longitudinale à travers un élément de taille $l_{element}$.

Structures discrètes

3.3. Méthode d'intégration directe : Schéma implicite de Newmark

L.BAILLET

$$\begin{cases} \underline{q}_{t+\delta t} \approx \underline{q}_t + \underline{\dot{q}}_t\delta t + \frac{1}{2}(\delta t)^2\left\{(1-2\beta)\underline{\ddot{q}}_t + 2\beta\underline{\ddot{q}}_{t+\delta t}\right\} & \text{(a)} \\ \underline{\dot{q}}_{t+\delta t} \approx \underline{\dot{q}}_t + \delta t\left\{(1-\gamma)\underline{\ddot{q}}_t + \gamma\underline{\ddot{q}}_{t+\delta t}\right\} & \text{(b)} \end{cases}$$

avec: $\begin{cases} 0 \le \beta \le 1/2 \\ 0 \le \gamma \le 1 \end{cases}$

(c) Equation à t+δt $\mathrm{M}\,\underline{\ddot{q}}_{t+\delta t} + \mathrm{C}\,\underline{\dot{q}}_{t+\delta t} + \mathrm{K}\,\underline{q}_{t+\delta t} = \underline{F}_{t+\delta t}$

(a)+ (b)+ (c)⇒

$$\boxed{\begin{aligned}\left[\mathrm{M} + \gamma\delta t\mathrm{C} + \beta(\delta t)^2\,\mathrm{K}\right]\underline{q}_{t+\delta t} = \underline{F}_{t+\delta t} &- \mathrm{K}\left[\underline{q}_t + \underline{\dot{q}}_t\delta t + (\delta t)^2(1/2-\beta)\underline{\ddot{q}}_t\right] \\ &- \mathrm{C}\left[\underline{\dot{q}}_t + \delta t(1-\gamma)\underline{\ddot{q}}_t\right]\end{aligned}}$$

•Résolution d'un système couplé à chaque pas

• Schéma unconditionnellement stable