GENERALITES SUR LES FLUIDES

I- Qu'est-ce qu'un fluide ?

Un fluide est un milieu matériel, continu, déformable et qui peut s'écouler.
Un fluide peut être soit un liquide, soit un gaz. On les distingue selon leurs propriétés.

II- Principales propriétés

1- La compressibilité

Un fluide peut être compressible ou incompressible.
Si, par un moyen quelconque on arrive à réduire le volume d'une quantité de fluide, on dira que le fluide est compressible. Dans le cas contraire, le fluide est alors incompressible.
Quelques soit l'action mécanique, la masse d'une quantité de fluide ne change pas, par contre son volume peut changer.
Notons ρ la masse volumique d'un fluide

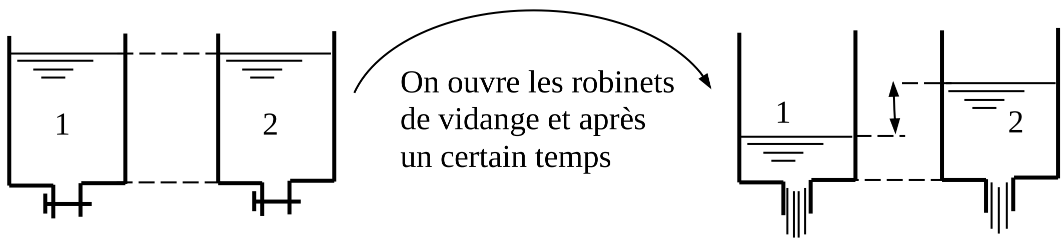
$\rho = \dfrac{\text{Masse}}{\text{Volume}}$ dans le S.I. la masse est en (kg), le volume en (m^3) et ρ en (kg/m^3)

- Le volume ne change pas $\Rightarrow$ **ρ = cte** : cas des liquides (eau, huile) $\Rightarrow$ **fluide incompressible**
- Le volume change $\Rightarrow$ **ρ varie** : cas des gaz (air) $\Rightarrow$ **fluide compressible**

Remarque : Dans certains cas, un gaz peut être considéré incompressible, et ce lorsque la variation de la pression ou de la vitesse est faible. Exemple de l'air dans un circuit de ventilation.

2- La viscosité

La viscosité traduit la facilité ou la difficulté à l'écoulement.
Considérons 2 récipients identiques contenant une même quantité de 2 liquides différents.



On constate que le liquide 1 se vide plus rapidement que le liquide 2. On dit que : la viscosité du liquide 1 est plus faible que celle du liquide 2, ou le liquide 1 est moins visqueux que le liquide 2.

La viscosité est caractérisée par :

a/ la viscosité cinématique : notée ν

Son unité dans le S.I. est le (m^2/s).
On utilise souvent le Stokes (St), ou le centiStokes (cSt).
$1\ St = 10^{-4}\ m^2/s$
$1\ cSt = 10^{-6}\ m^2/s$: il correspondant approximativement à la viscosité cinématique de l'eau à 20°C.

b/ la viscosité dynamique : notée μ

Son unité dans le S.I. est le Poiseuille (Pl) ou (Pa.s).

$$\mu = \rho.\nu$$

On trouve comme autre unité le Poise (Po), 10 Po = 1 Pl.

c/ Influence de la température

La viscosité dépend de la température.
Lorsque la température augmente la viscosité cinématique des liquides diminue et celle de gaz augmente.

à 20°C $\nu_{eau} \approx 1$ cSt et $\nu_{air} \approx 15$ cSt
à 40°C $\nu_{eau} \approx 0.66$ cSt et $\nu_{air} \approx 16$ cSt

III- Notion de pression

La pression p est le rapport d'une force F par une surface S.

$$p = \frac{F}{S}$$ dans le S.I. F est en (N), S en (m^2) et p en (N/m^2)

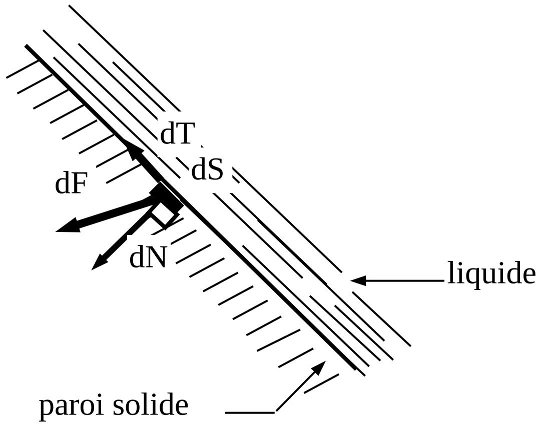
En mécanique des fluides on utilise le Pascal (Pa) à la place de (N/m^2). **1 Pa = 1 N/m²**

Le Pascal est une quantité très faible, alors dans la pratique, on utilise souvent le bar.

$1bar = 10^5$ Pa et $1bar = 1daN/cm^2$.

1- Pression d'un fluide sur une paroi solide

Soit un liquide qui s'écoule sur une paroi solide. Considérons un élément de surface dS de cette paroi :



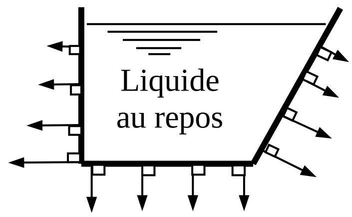
dF : force exercée par le liquide sur l'élément de surface dS

dT : force tangentielle de frottement due à la viscosité du liquide et s'oppose au mouvement.

dN : force normale à la surface.

$$p = \lim_{ds \to 0} \frac{dF}{dS}$$

Pour un liquide au repos dT = 0, $p = \lim_{ds \to 0} \frac{dN}{dS}$ alors les forces de pression sont perpendiculaires à la paroi.



Forces de pression

2/ Pression atmosphérique : notée p_{atm}

C'est la pression de l'air qui nous entoure.

Elle dépend de l'altitude et des conditions climatiques

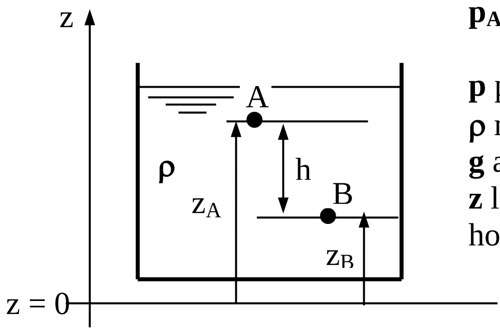
Altitude $\nearrow \Rightarrow p_{atm} \searrow$

Au niveau de la mer : $p_{atm} \approx 1$ bar

STATIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLE

I- Equation de la statique des fluides incompressibles

Considérons 2 points A et B appartenant à un liquide au repos. L'équation de la statique s'écrit :



$\mathbf{p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B}$ et ce quelques soit la position de A et B.

p pression statique en **(Pa)**
ρ masse volumique du liquide en **(kg/m^3)**
g accélération de la pesanteur en **(m/s^2)**
z la cote en **(m)** suivant l'axe vertical par rapport à un plan de référence horizontal quelconque, elle positive vers le haut et négative vers le bas.

Plan de référence horizontal

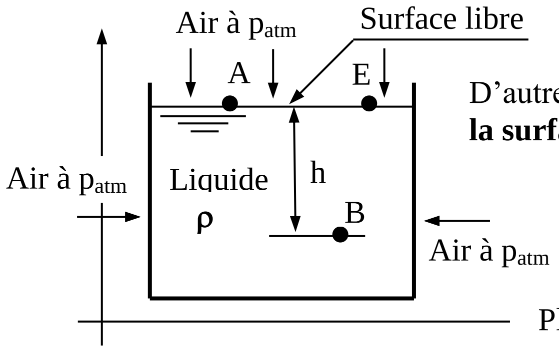
$\mathbf{p_B = p_A + \rho g (z_A - z_B)}$ $\mathbf{z_A - z_B = h}$

L'équation de la statique s'écrit :

$$\mathbf{p_B = p_A + \rho g\, h}$$

Attention le pt B doit être en dessous du pt A.
Cette dernière équation est appelée **relation fondamentale de l'hydrostatique**.
Conséquence : - si le pt A et le pt B appartiennent au même liquide et que $z_A = z_B$ alors $p_A = p_B$
- si $p_A = p_B$ et A et B appartiennent au même liquide, alors $z_A = z_B$, on dit que A et B appartiennent à un même plan horizontal.

$\mathbf{p_A = p_{atm}}$
$\mathbf{p_B = p_{atm} + \rho g\, h}$



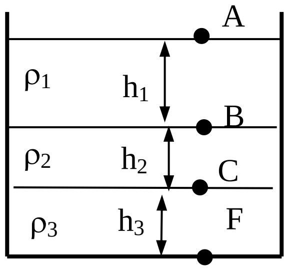
D'autre part $p_A = p_E = p_{atm} \Rightarrow z_A = z_E$ alors
la surface libre est une surface horizontale.

Plan de référence horizontal

Exemple
Calculer la pression au fond d'une piscine de profondeur 5m remplie d'eau.
On donne : $p_{atm} \approx 1$ bar, $\rho = 10^3$ kg/m^3 et g = 10 m/s^2.

II- Liquides superposés non miscibles et non réactifs chimiquement

Les liquides au repos se superposent dans l'ordre décroissant des masses volumiques



* $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$
* La quantité de liquide n'a pas d'influence (h_1, h_2, h_3)
* Les surfaces de séparation sont horizontales
* La relation fondamentale de l'hydrostatique ne s'écrit qu'entre 2 pts appartenant à un même liquide

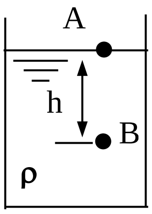
$$p_F = p_A + \rho_1 g\, h_1 + \rho_2 g\, h_2 + \rho_3 g\, h_3$$

Exemple

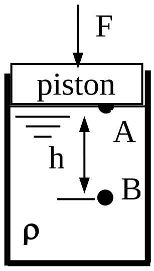
Dans un tube en U à moitié rempli d'eau, on verse dans l'une des branches une hauteur d'huile h_2 = 24 cm. A partir de la surface de séparation, on mesure dans l'autre branche une hauteur d'eau h_1 = 20 cm. On donne la masse volumique de l'eau $\rho_1 = 10^3$ kg/m^3, calculer la masse volumique ρ_2 de l'huile

III- Transmission de la pression (principe de Pascal)

Les liquides au repos transmettent intégralement la pression dans toutes les directions de l'espace.
Nous savons que dans un liquide ρ au repos $\mathbf{p_B = p_A + \rho g\, h}$ (B en dessous A)
Si par un moyen quelconque $\mathbf{p_A}$ devient $\mathbf{p_A + \Delta p}$, alors $\mathbf{p_B}$ devient $\mathbf{p_B + \Delta p}$.



$\mathbf{p_B = p_A + \rho g\, h}$
$\mathbf{p_A = p_{atm}}$
$\mathbf{p_B = p_{atm} + \rho g\, h}$

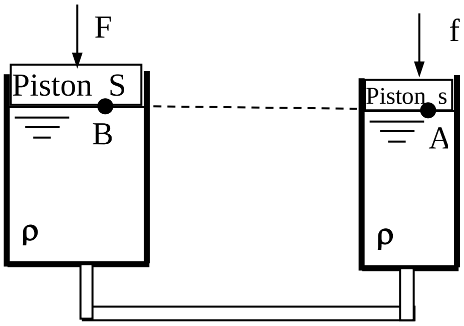


$\mathbf{p_B = p_A + \rho g\, h}$
$\mathbf{p_A = p_{atm} + F/S}$
$\mathbf{p_B = p_{atm} + \rho g\, h + F/S}$
avec **S** section du piston et son poids négligé

Ce principe est très utilisé dans la pratique.
Exemple : - le système de freinage dans une voiture : la force exercée sur la pédale de frein engendre une pression et cette dernière et transmise par l'huile à travers des conduites jusqu'au dispositif permettant de bloquer la rotation de la roue

- la presse hydraulique : le principe de la presse est décrit ci-dessous

Un grand et un petit cylindre relié à la base par une conduite sont remplis de liquide

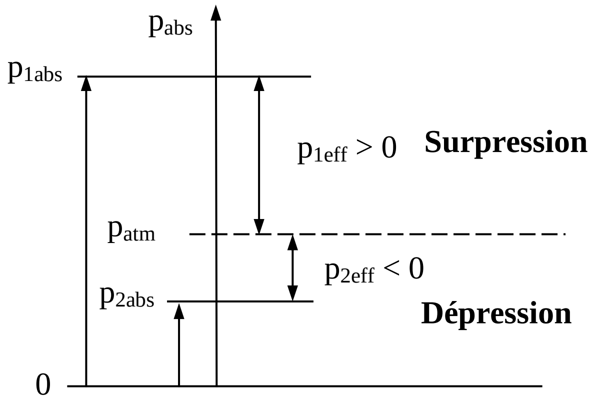


A et B appartiennent au même liquide et même plan horizontal alors $\mathbf{p_B = p_A}$, d'autre part
$\mathbf{p_A = \Sigma forces /s = p_{atm} + f/s + Pp/s}$
$\mathbf{p_B = \Sigma forces /S = p_{atm} + F/S + PG/S}$
d'où $\mathbf{F/S + PG/S = f/s + Pp/s}$
En choisissant convenablement les poids des pistons de sorte que $\mathbf{PG/S = Pp/s}$ on obtient
$\mathbf{F/S = f/s} \Rightarrow \mathbf{F = f.\, S/s}$

IV- Pression absolue, pression effective (relative)

La pression d'un fluide peut être donnée en absolue ou en effective.
La référence pour la pression absolue est le zéro et pour l'effective c'est la pression atmosphérique.

$$\mathbf{p_{absolue} = p_{effective} + p_{atm}}$$



$p_{abs} > p_{atm} \Rightarrow p_{eff} > 0 \Rightarrow$ Surpression
$p_{abs} < p_{atm} \Rightarrow p_{eff} < 0 \Rightarrow$ Dépression

Remarque :

- La pression absolue est toujours positive. Elle est nulle dans le cas du vide (pas de matière).
- La pression effective peut être positive, négative ou nulle. La pression effective minimale correspond au cas du vide ($p_{abs} = 0$).

$$\mathbf{p_{eff}\ mini = - p_{atm} \approx -1\ bar}$$

- La relation fondamentale de l'hydrostatique peut s'écrire en pression absolue ou en pression effective. Si p_A est effective alors p_B est effective et si p_A est absolue alors p_B est absolue.

$$\mathbf{p_{B\,abs} = p_{A\,abs} + \rho g\, h} \quad \text{ou} \quad \mathbf{p_{B\,eff} = p_{A\,eff} + \rho g\, h}$$

Exemple

Soit $\mathbf{p_{atm} \approx 1\ bar}$ compléter :

$p_{abs} = 4.5$ bar $\Rightarrow p_{eff} =$ …..	$p_{eff} = 3$ bar $\Rightarrow p_{abs} =$ …..
$p_{abs} = 1.2$ bar $\Rightarrow p_{eff} =$ …..	$p_{eff} = -0.4$ bar $\Rightarrow p_{abs} =$ …..
$p_{abs} = 0.7$ bar $\Rightarrow p_{eff} =$ …..	$p_{eff} = 0.6$ bar $\Rightarrow p_{abs} =$ …..
$p_{abs} = 1$ bar $\Rightarrow p_{eff} =$ …..	

V- Mesure de la pression

Pour mesurer la pression d'un fluide (liquide ou gaz) on utilise l'un des procédés suivants :

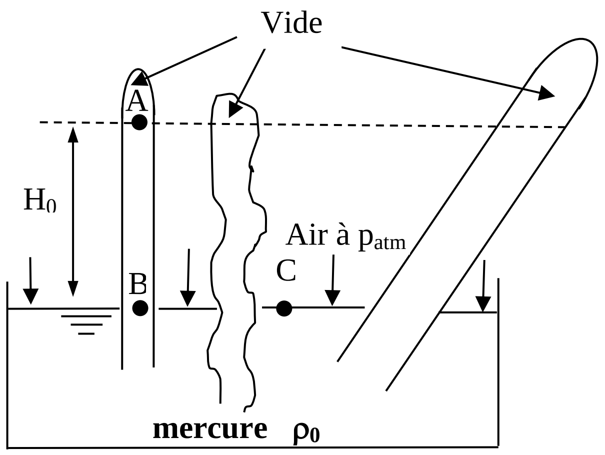
- application de la relation fondamentale de l'hydrostatique (dispositif à liquide)
- le principe de la presse hydraulique (pression équilibrée par une force connue appliquée sur une surface connue)
- déformation élastique d'un métal
- effet piézoélectrique

1- Application de la RFH

a - Mesure de la pression atmosphérique

Expérience de Torricelli

Des tubes de différentes formes et différentes longueurs sont remplies de mercure puis renversés dans un bac contenant du mercure sans que l'air ne puisse rentrer.
On constate que la hauteur du mercure dans les tubes se stabilise à un même niveau H_0, voir figure ci-dessous.



Le mercure dans le tube étant au repos, on applique la R.F.H. entre A et B

$$\mathbf{p_B = p_A + \rho_0 g\, H_0}$$

B et C appartiennent au même liquide et au même plan horizontal alors $\mathbf{p_B = p_C}$ **et** $\mathbf{p_C = p_{atm}}$

d'où $\mathbf{p_B = p_{atm} = p_A + \rho_0 g\, H_0}$

$\mathbf{p_A = 0}$ cas du vide, alors:

$$\mathbf{p_{atm} = \rho_0 g\, H_0}$$

Exemple

On entend parfois, " la pression atmosphérique est de 760 mm de mercure". Quelle est cette pression atmosphérique en Pascal et en Bar si, $\rho_0 = 13600$ kg/m^3 et $g = 9.81$ m/s^2.

On trouve trois types d'appareils de mesure de la pression atmosphérique

- Le baromètre à mercure
- Le baromètre anéroïde
- Le baromètre électronique

Le baromètre à mercure : Il est basé sur le principe de l'expérience de Torricelli.

Le baromètre anéroïde (à aiguille) : Les parois d'une capsule vide d'air, dite « capsule de Vidie » sont maintenues écartées par un ressort. La pression atmosphérique appuie plus ou moins sur la boîte (capsule) anéroïde et fait ainsi tourner l'aiguille sur le cadran, grâce à un mécanisme de précision.

Le baromètre électronique : Ce type de baromètre de conception toute nouvelle est un appareil de précision. Une puce électronique sensible à la pression atmosphérique indique la pression du moment par affichage numérique.

Baromètre à mercure

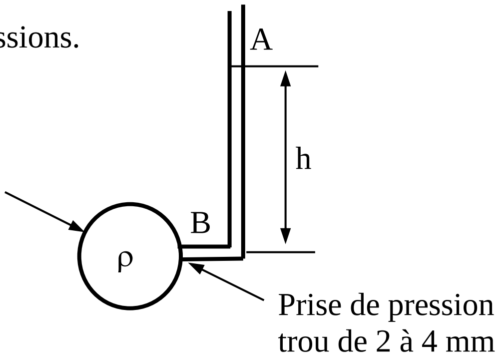
Baromètre anéroïde

Baromètre électronique

b - Mesure de la pression effective

***1 -Tube piézométrique**

Il s'agit d'un tube transparent placé verticalement dont l'extrémité basse est reliée à la prise de pression et l'autre extrémité ouverte à l'air libre.
Il est utilisé seulement pour les liquides de faibles pressions.



$\mathbf{p_{Beff} = p_{Aeff} + \rho g\, h}$

$\mathbf{p_{Aeff} = 0}$ tube ouvert à l'air libre

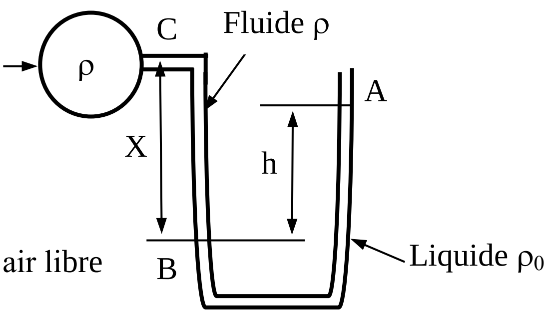
$\mathbf{p_{Beff} = \rho g\, h}$

Connaissant ρ la mesure de h permet de déterminer la pression dans le réservoir ou la conduite.

***2 -Tube U**

Le tube en U contient un liquide de masse volumique ρ_0 grande devant la masse volumique ρ du fluide dont on veut mesurer la pression. Le tableau ci-dessous donne quelque cas.

Fluide ρ	Air $\rho = 1.2$ kg/m^3	Huile $800 < \rho < 950$ kg/m^3	Eau $\rho = 1000$ kg/m^3
Liquide ρ_0	Alcool ρ_0 =750 kg/m^3 Huile Eau Mercure	Mercure $\rho_0 = 13600$ kg/m^3	Mercure



$\mathbf{p_{Beff} = p_{Aeff} + \rho_0 g\, h}$

$\mathbf{p_{Aeff} = 0}$ tube ouvert à l'air libre

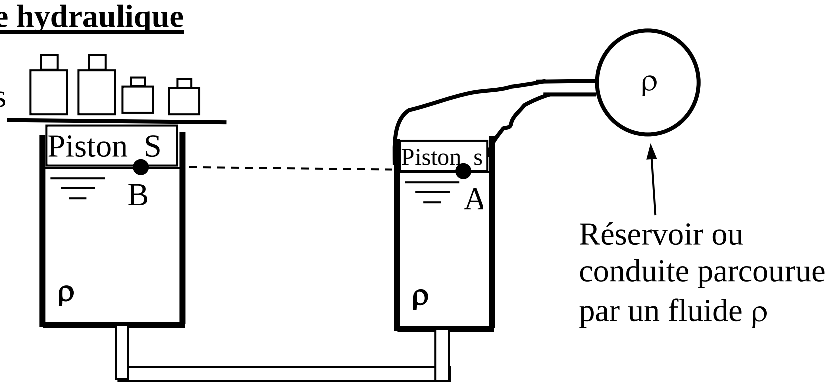
$\mathbf{p_{Beff} = p_{Ceff} + \rho g\, X}$

d'où $\mathbf{p_{Ceff} = \rho_0 g\, h - \rho g\, X}$

$\boldsymbol{\rho}$ étant très petit devant $\boldsymbol{\rho_0}$, alors, en première approximation, on néglige $\mathbf{\rho g\, X}$ devant $\mathbf{\rho_0 g\, h}$

$\mathbf{p_{ceff} = \rho_0 g\, h}$

2- Application du principe de la presse hydraulique



$\mathbf{p_B = p_A}$

$\mathbf{p_A = p_{mesurée}}$

$\mathbf{p_B = M.g/S}$

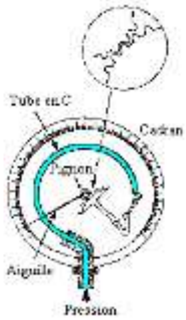
$\mathbf{p_{mesurée} = M.g/S}$

Ce dispositif n'est pas très pratique vu le nombre de masses nécessaires pour avoir l'équilibre.

3- Déformation élastique d'un métal

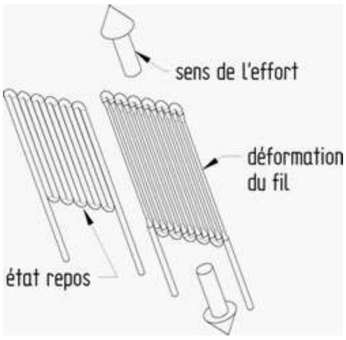
a- Manomètre tube de Bourdon

Il permet de mesurer la pression effective d'un fluide.
Le tube métallique en forme de point d'interrogation et fermé à l'une des extrémités se dilate sous l'effet de la pression du fluide et fait dévier l'aiguille devant un cadran gradué.



b- Jauge de contrainte

La jauge est collée à un corps d'épreuve qui sera soumis à la pression à mesurer.
Sous l'action de la pression, la jauge se déforme de manière élastique. Cette déformation modifie la résistance électrique du fil. On mesure alors cette variation de résistance entre l'état repos et l'état sous contrainte.



4- Effet piézoélectrique

La piézoélectricité désigne la propriété que possèdent certains matériaux cristallins comme le quartz, la céramique ou le titanate de baryum de développer une charge électrique proportionnelle à la contrainte qui leur est appliquée.

VI- Force de pression sur une surface plane

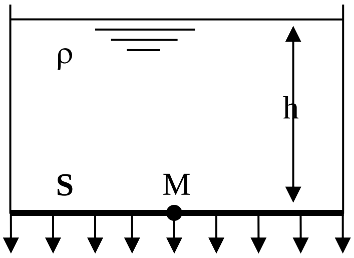
La force de pression d'un fluide au repos sur l'élément de surface dS est :

$$df = p_{eff}\, dS$$

La résultante sur la surface S est :

$$F = \int_S p_{eff}\, ds$$

1- Force de pression sur une surface horizontale (fond d'un réservoir)



La pression en un point quelconque M de la surface de base du réservoir est :

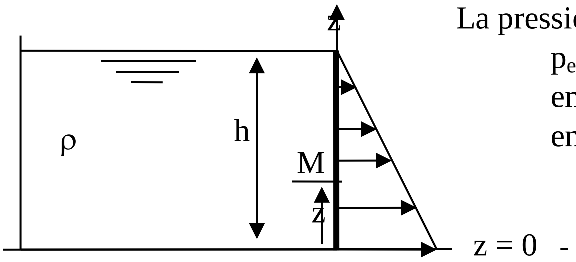
$$p_{eff} = \rho g h$$

La résultante des forces de pression sur la surface S est :

$$F = \int_S p_{eff}\, ds = \int_S \rho g h\, dS = \rho g h \int_S dS = \rho g h . S$$

D'où $F = \rho g . S . h$

2- Force de pression sur une surface verticale



La pression effective en un point quelconque M de la surface est :

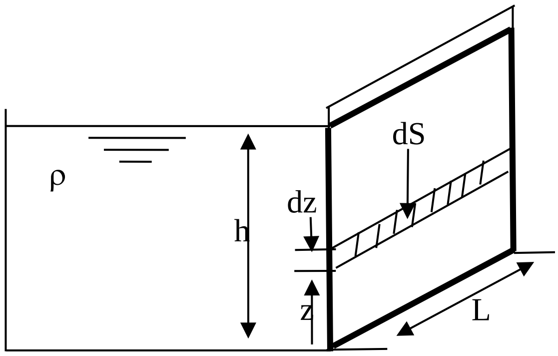
$p_{eff} = \rho g\,(h - z)$

en $z = 0$ $\quad p_{eff} = \rho g h$

en $z = h$ $\quad p_{eff} = 0$

$$F = \int_{S'} \rho g\,(h - z)\, dS$$

$dS = L.dz$ (la pression varie seulement suivant z)

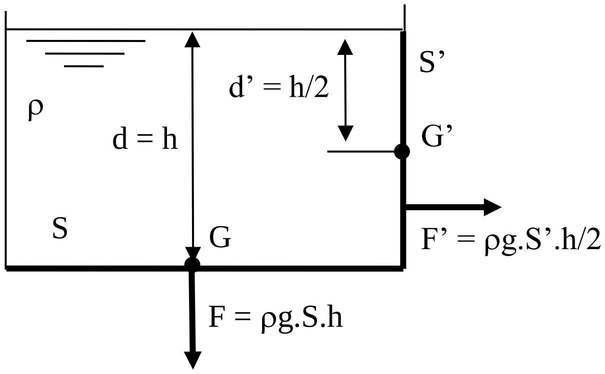


$$F = \rho g L \int_0^h (h - z)\, dz = \rho g L \left[hz - \frac{z^2}{2} \right]_0^h$$

$$F = \rho g L \frac{h^2}{2} \qquad \text{et } S = h.L$$

D'où $F = \rho g.S.\frac{h}{2}$

3- Cas général (formule pratique)



En général, la résultante des forces de pression sur une surface plane s'écrit :

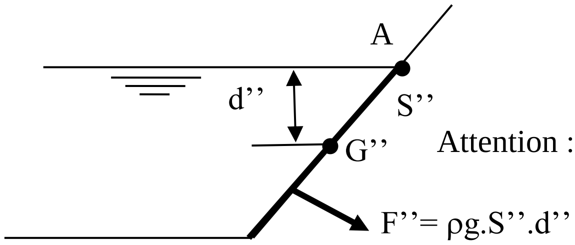
$$F = \rho g.S.d$$

Avec :

S : Surface mouillée considérée (en contact avec le liquide)

d : distance entre le centre de gravité de S et la surface libre

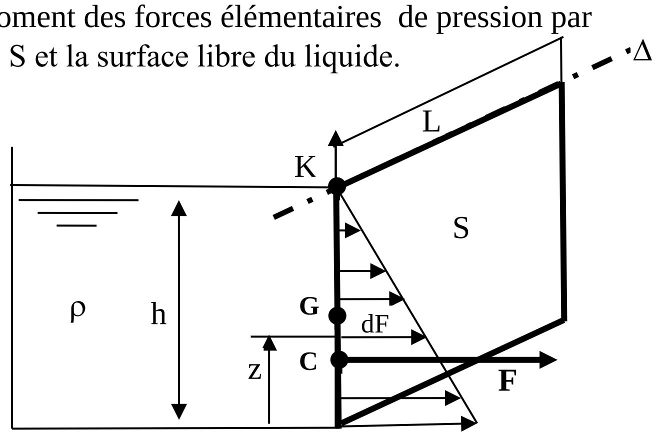
Remarque



Attention : d'' ≠ AG''

4- Point d'application de la résultante des forces de pression

On calcule le moment des forces élémentaires de pression par rapport à un point ou une droite. Prenons le cas de la surface verticale, et calculons le moment des forces élémentaires de pression par rapport à la droite Δ. Δ étant l'intersection de la surface S et la surface libre du liquide.



$dF = p_{eff}.ds$, avec $p_{eff} = \rho g.(h - z)$ et $ds = L.dz$

$dF = \rho g L.(h - z)dz$ et $F = \frac{1}{2}\rho g L h^2$

$dm_{/\Delta} = dF.(h - z) = \rho g L.(h - z)(h - z)dz$

$m_{/\Delta} = \int dm_{/\Delta} = \rho g\, L. \int_0^h (h - z)^2 dz$

$m_{/\Delta} = - 1/3\rho g L.(h - z)^3]_0^h = 1/3\rho g L h^3$

D'autre part,

$m_{/\Delta} = KC.\ F = KC.\frac{1}{2}\rho g L h^2 = 1/3\rho g L h^3$

D'où $KC = 2/3h$

Dans le cas général :

On pose $h - z = u$, $dF = \rho g.u.ds$

$dm_{/\Delta} = dF.u = \rho g.u^2.ds$

$m_{/\Delta} = \int dm_{/\Delta} = \rho g.\int u^2 ds$

$\int u^2 ds = I_\Delta$: Moment quadratique de la surface S par rapport à Δ

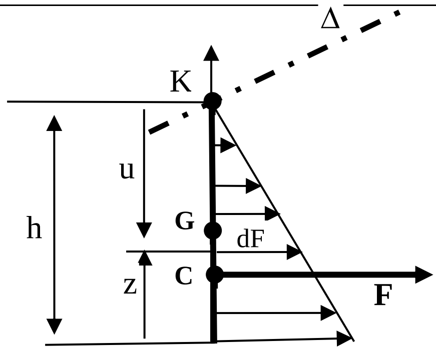
$m_{/\Delta} = \rho g.\ I_\Delta$

D'autre part,

$m_{/\Delta} = KC.\ F$ avec $F = \rho g.S.KG$

$m_{/\Delta} = \rho g.S.KG.KC = \rho g.\ I_\Delta$

D'où $KC = I_\Delta/(S.KG)$



Rappelons le théorème de HUYGENS

$I_\Delta = I_{\Delta G} + S.KG^2$

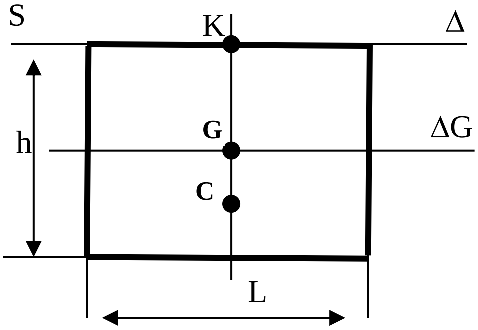
ΔG : droite parallèle à Δ et passant par G centre de gravité de la surface S

D'où

$$\mathbf{KC = I_{\Delta G}/(S.KG) + KG}$$

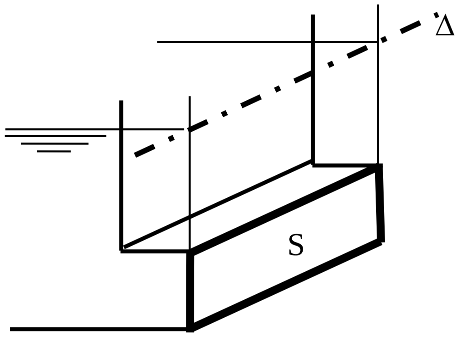
$I_{\Delta G} = Lh^3/12$, $S = Lh$ et $KG = h/2$.

$KC = Lh^3/12/(Lh.h/2) + h/2 = h/6 + h/2 = 2/3h$



<u>Remarque</u>

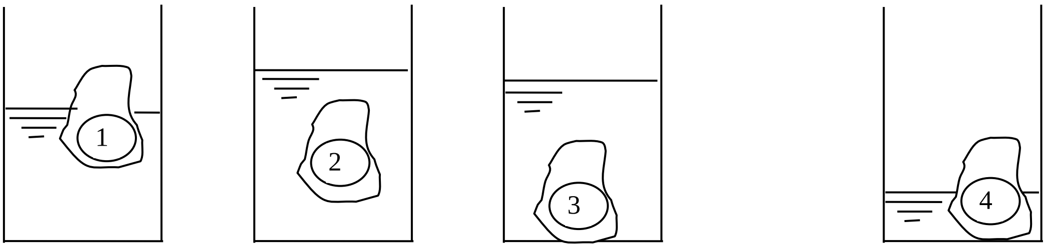
Si la surface considérée n'est pas en contact avec la surface libre, alors, Δ sera l'intersection des prolongements de la surface libre et de la surface considérée



VII- <u>Corps flottants corps immergés</u>

<u>1- Introduction</u>

Un solide placé dans un liquide au repos prend l'une des positions représentées ci-dessous :



1 Une partie du solide est immergée (à l'intérieure du liquide). On dit que le solide **flotte**

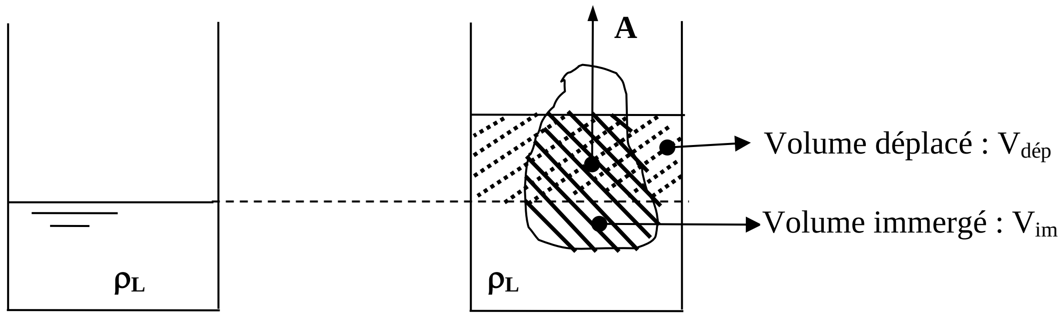
2 Le solide est complètement immergé et reste entre deux couches liquides

3 Le solide est complètement immergé mais coule (touche le fond)

4 Peu de liquide pour pouvoir juger (avec plus de liquide on aura l'une des positions précédentes)

2- Poussée d'ARCHIMÈDE

Dans les différents cas représentés ci-dessus, le solide subit de la part du liquide qui l'entoure une poussée (Poussée d'Archimède) verticale, dirigée de bas en haut et égale au poids du volume du liquide déplacé.
Considérons un récipient contenant un liquide de masse volumique ρ_L. On place dedans un solide, le niveau du liquide se déplace, voir figure ci-dessous :



L'intensité de la poussée d'Archimède est :

$$A = \rho_L . V_{dép} . g$$

Le liquide étant incompressible, alors le volume déplacé est égal au volume immergé du solide.

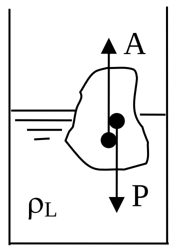
$$V_{dép} = V_{im}$$

Alors **$A = \rho_L . g . V_{im}$** **A en (N) , ρ_L en (kg/m^3), g en (m/s^2) et Vim en (m^3)**

3- Conditions d'immersion et de Flottaison

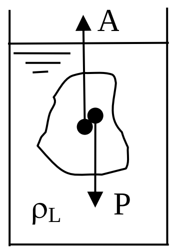
Soient : ρ_L la masse volumique du liquide, V_{im} le volume immergé du solide, ρ_S la masse volumique du solide et V_S le volume du solide.

a- Corps flottant



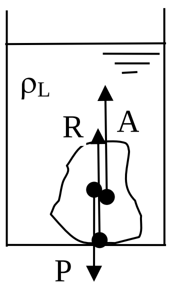
Le corps est en équilibre statique, alors, $\sum \vec{Fext} = \vec{0}$
Les forces extérieures qui agissent sur le corps sont :
Son propre poids : $P = m.g = \rho_S.V_S.g$
La poussée d'Archimède : $A = \rho_L.V_{im}.g$
L'équilibre $\Rightarrow$ $P = A \Rightarrow \rho_S.V_S = \rho_L.V_{im}$
La relation $\rho_S.V_S = \rho_L.V_{im}$ est appelée condition d'équilibre d'un corps flottant
D'autre part $V_{im} < V_S$
Alors $\rho_S < \rho_L$
La condition pour qu'un solide flotte à la surface d'un liquide est $\rho_S < \rho_L$

b- Corps immergés restant entre deux couches liquides



L'équilibre $\Rightarrow$ $P = A \Rightarrow \rho_S.V_S = \rho_L.V_{im}$
D'autre part $V_{im} = V_S$
Alors $\rho_S = \rho_L$
La condition pour qu'un solide soit immergé dans un liquide et sans qu'il touche le fond est $\rho_S = \rho_L$

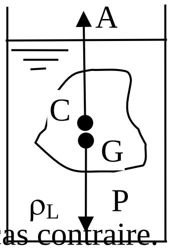
c- Corps immergés mais coule



Les forces extérieures qui agissent sur le corps sont : Son poids P, la poussée d'Archimède A et la réaction aux appuis R
L'équilibre $\Rightarrow$ $P = A + R \Rightarrow \rho_S.V_S.g = \rho_L.V_{im}.g + R$
D'autre part $V_{im} = V_S$
D'où $\rho_S = \rho_L + R / V_S.g$
La condition pour qu'un solide soit immergé dans un liquide et coule (touche le fond) est $\rho_S > \rho_L$

4- Stabilité de l'équilibre des corps immergés et des corps flottants

a- Corps immergés

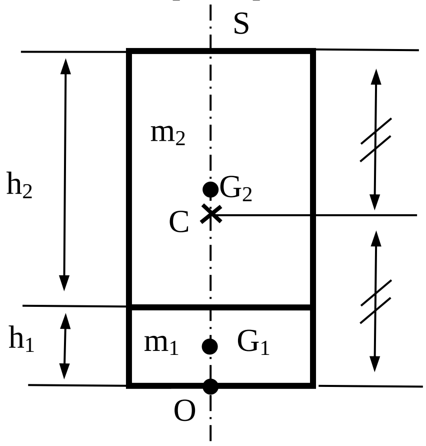


Les forces extérieures qui agissent sur le corps sont :

- Le poids P appliqué en G
  G : centre de gravité du corps
- La poussée d'Archimède A appliquée en C
  C : centre de poussée du volume immergé

G et C sont confondus lorsque le solide est homogène et distincts dans le cas contraire.
En effet, G est le centre de masse, il dépend des matériaux qui constituent le corps. Cependant, C est le centre géométrique, il dépend de la forme du corps.

Exemple :
Considérons un corps constitué de deux cylindres de matériaux différents superposés, de même section S, de masse m_1 et m_2 et de hauteur h_1 et h_2.Voir Figure.

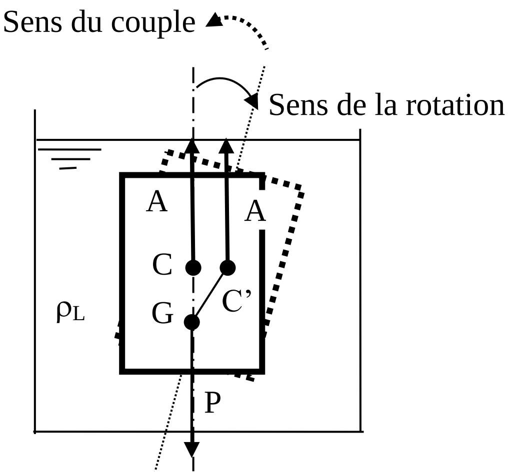


$$OG = \frac{m_1 OG_1 + m_2 OG_2}{m_1 + m_2}$$

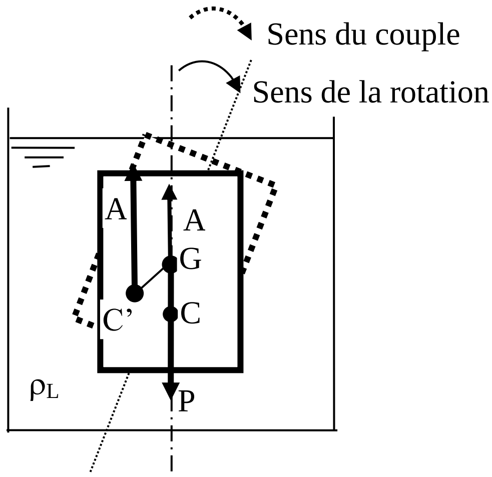
$$OC = \frac{h_1 + h_2}{2} \qquad OC \neq OG$$

Selon la position de G et de C l'équilibre peut être **Stable** ou **Instable**

- si le corps est homogène **G** et **C** sont **confondus** la **stabilité est indifférente**
- si le corps est hétérogène (non homogène) **G** et **C** sont **distincts**. On a deux possibilités :
  - * **G en dessous de C**, l'équilibre est parfaitement **Stable**
  - * **G au-dessus de C,** l'équilibre est **Instable**



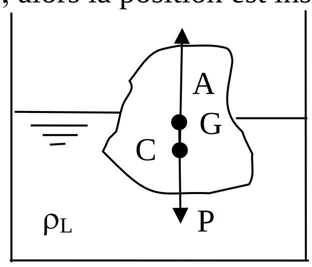
STABLE



INSTABLE

On fait dévier le solide d'un petit angle par rapport à G. Le centre de poussée change de position et passe de C à C'. Il se crée un couple (P, A). Si le couple tend à ramener le solide à sa position de départ, alors la position là où il a été est stable. Si le couple tend à l'écarter encore plus, alors la position est instable.

b- Corps flottants



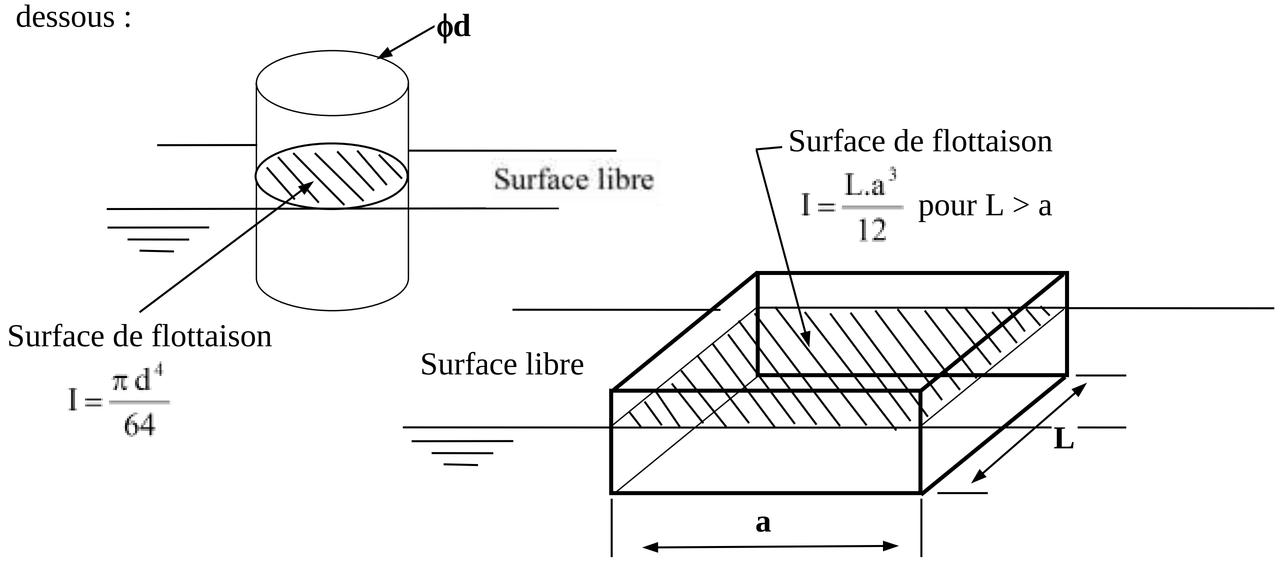
Les forces extérieures qui agissent sur le corps sont :

- Le poids P appliqué en G
  G : centre de gravité du corps
- La poussée d'Archimède A appliquée en C
  C : centre de poussée c'est le centre géométrique de la partie immergée, il dépend de la forme du volume immergé et non des matériaux qui le constitue.
- G et C sont sur la même vertical

- Si G et C sont **confondus** la **stabilité** est **indifférente**
- Si G est **en dessous** de C l'équilibre est parfaitement **stable**
- Si G est **au-dessus** de C l'équilibre **peut être stable** ou **instable**. Dans ce cas on détermine la position du métacentre M défini par :

$$CM = \frac{I}{V_{im}}$$

I est le plus petit moment quadratique de la surface de flottaison.
La surface de flottaison est l'intersection de la surface libre et du corps flottant. Voir les exemples ci-dessous :



- Si **CM > CG** l'équilibre est **stable**
- Si **CM < CG** l'équilibre est **instable**

<u>Remarque</u> : **Placé dans un liquide, un solide prendra toujours la position stable**

<u>Exemple</u>
Un solide est constitué d'un cylindre en acier de section S = 20 cm^2 et de hauteur h_1 = 2 cm et surmonté d'un cylindre en liège de même section et de hauteur h_2 = 20 cm.
Le solide est placé dans l'eau.
On donne : masse volumique de l'eau $\rho_0 = 10^3$ kg / m^3
masse volumique de l'acier ρ_1 = 7800 kg / m^3
. masse volumique du liège ρ_2 = 150 kg / m^3
1/ Montrer que le solide flotte à la surface de l'eau
2/ Dans la position verticale (acier en bas), déterminer la hauteur immergée et montrer si cette position est stable ou instable.

DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES EN ECOULEMENT PERMANENT

I- Généralités

Fluide incompressible :

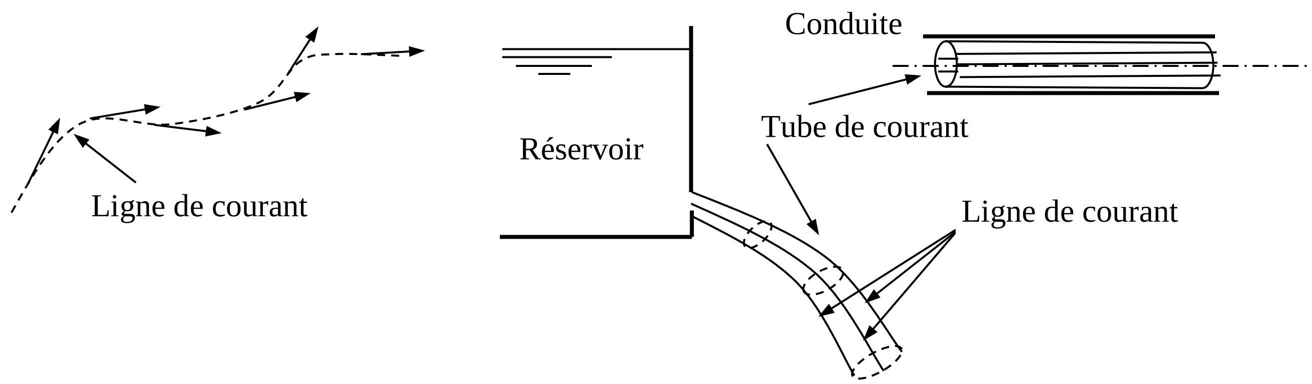
Liquide ou gaz pour lequel la masse volumique est constante (ρ = cte). En effet, lorsque la variation de pression ou de vitesse est faible, un gaz peut être considéré incompressible. Exemple, de l'air dans un circuit de ventilation.

Ecoulement permanent :

C'est un écoulement stationnaire : indépendant du temps.
On s'intéresse ici à l'écoulement établi.
Exemple : étude de l'écoulement dans une conduite munie d'un robinet.
Lorsqu'on ouvre le robinet, il se produit l'écoulement du fluide. On n'étudie l'écoulement qu'après un certain temps, et non juste après l'ouverture du robinet.

Ligne de courant, tube de courant

Une ligne de courant est une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse en ce point.
L'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé forme le tube de courant.



La trajectoire est le lieu géométrique des positions prises par une particule au cours de son mouvement. **En écoulement permanent Trajectoire = ligne de courant.**

II- Le débit

Le débit est la quantité de fluide écoulé pendant un temps donné.
La quantité peut être définie, soit par son volume, soit par sa masse. Par conséquent, le débit est défini par :

1- Le débit volumique

$$Q_V = \frac{\text{Volume}}{\text{Temps}}$$ Volume en (m^3), Temps en (s) et Q en (m^3/s)

D'autres unités sont utilisées comme le (l/mn), (l/s) ou (m^3/h).

2- Le débit massique

$$Q_m = \frac{\text{Masse}}{\text{Temps}}$$ Masse en (kg), Temps en (s) et Q en (kg/s)

D'autres unités sont utilisées comme le (kg/mn), ou (kg/h).

Masse = ρ. Volume

D'où $Q_m = \rho . Q_V$

3- Autre définition du débit

Pour un fluide traversant une surface S avec un vecteur vitesse $\vec{V}$

- Le débit volumique est :

$$\mathbf{Q_V} = \iint_S \vec{\mathbf{V}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{ds} \qquad \vec{n} \text{ Vecteur unitaire normal à S}$$

- Le débit massique est :

$$\mathbf{Q_m} = \iint_S \boldsymbol{\rho}.\vec{\mathbf{V}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{ds}$$

Dans la pratique, on ne s'intéresse pas à la vitesse en tout point de la surface S, mais à la vitesse moyenne, appelée aussi vitesse débitante

Pour un fluide traversant une section S avec une vitesse moyenne V_m, le débit volumique est :

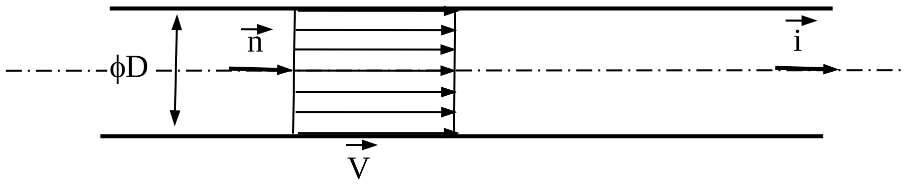
$$\mathbf{Qv = V_m.S} \qquad V_m \text{ en (m/s), S en } (m^2) \text{ et } Q_V \text{ en } (m^3/s)$$

Souvent, connaissant le débit Q_V et le diamètre de la conduite D, on a à calculer la vitesse moyenne dans cette conduite.

La section étant $S = \dfrac{\pi\, D^2}{4}$ alors $\mathbf{V_m} = \dfrac{\mathbf{4.Q_V}}{\boldsymbol{\pi}\mathbf{.D^2}}$ avec Q_V en (m^3/s), D en (m) et V_m en (m/s)

Exemple :

a- Fluide parfait traversant une conduite circulaire



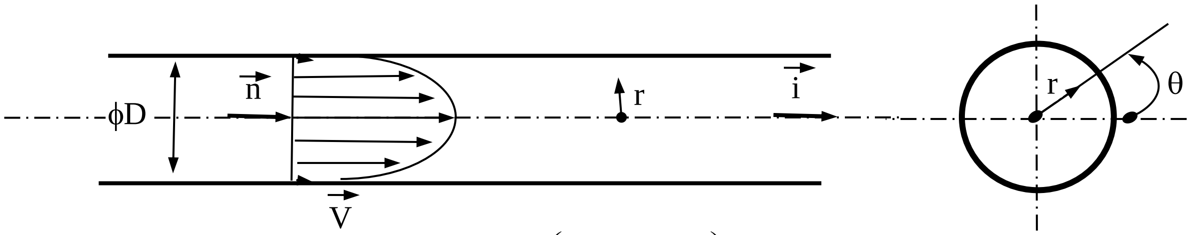
$\vec{V} = V.\vec{i}$ V = cte dans toute la section S

$\vec{n} = \vec{i}$ $\vec{V}.\vec{n} = \vec{V}.\vec{i} = V$

$$\mathbf{Q_V} = \iint_S \vec{\mathbf{V}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{ds} = \iint_S \mathbf{V\,ds} = \mathbf{V}.\iint_S \mathbf{ds} = \mathbf{V.S}$$

$$\mathbf{Vm = Q_v /S = V}$$

b- Fluide réel traversant une conduite circulaire



$\vec{V} = V.\vec{i}$ $V = f(r) = \mathbf{V_{Max}}\left(1 - \dfrac{\mathbf{r^2}}{\mathbf{R^2}}\right)$ avec R = D/2

$\vec{n} = \vec{i}$ $\vec{V}.\vec{n} = \vec{V}.\vec{i} = V$

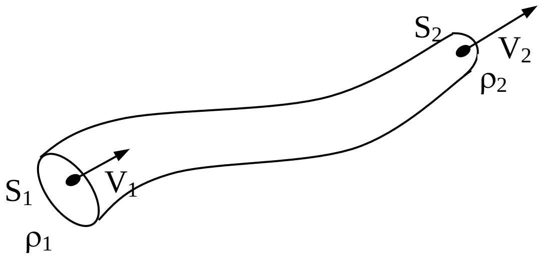
$$\mathbf{Q_V} = \iint_S \vec{\mathbf{V}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{ds} = \iint_S \mathbf{V\,ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \mathbf{r.f(r)\,dr\,d\theta} = \int_0^{2\pi}\mathbf{d\theta}\int_0^{R}\mathbf{r.f(r)\,dr} = \mathbf{2\pi.V_{Max}}\int_0^{R}\mathbf{r.(1-\frac{r^2}{R^2})dr}$$

$$\mathbf{Q_V} = \mathbf{2\pi.V_{Max}}\left[\frac{\mathbf{r^2}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{r^4}}{\mathbf{4R^2}}\right]_0^{R} = \mathbf{2\pi.V_{MAX}}\,\frac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{4}} = \pi.\mathbf{V_{Max}}\,\frac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{2}}$$

Vm = $\mathbf{Q_v}$ /S et $S = \pi R^2$ alors la vitesse moyenne est **Vm = $\mathbf{V_{Max}/2}$**

III- Conservation de débit

Le long d'un tube de courant (sans dérivation), le débit massique se conserve et ce quelques soit le fluide (liquide ou gaz).



$\mathbf{Q_m = Q_{m1} = Q_{m2} = \rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2}$

V_1 et V_2 les vitesses moyennes dans les sections S_1 et S_2

Pour un fluide incompressible $\rho_1 = \rho_2 = \rho = cte$

$Q_m = Q_{m1} = Q_{m2} = \rho V_1 S_1 = \rho V_2 S_2$

$$\frac{\mathbf{Q_m}}{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\mathbf{Q_{m1}}}{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\mathbf{Q_{m2}}}{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{V_1 S_1} = \mathbf{V_2 S_2}$$

$$\frac{\mathbf{Q_m}}{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{Q_V} = \mathbf{Q_{V1}} = \mathbf{Q_{V2}} = \mathbf{V_1 S_1} = \mathbf{V_2 S_2}$$

Alors, pour un fluide incompressible, on a la conservation du débit volumique.

$$\mathbf{Q_V = Q_{V1} = Q_{V2} = V_1 S_1 = V_2 S_2}$$

Remarque

Dans la suite, pour alléger l'écriture, on nottera le débit volumique simplement Q

Exemple 1

Le temps de remplissage d'un récipient de volume 10 l est t = 20 s. L'eau arrive par une conduite de diamètre d = 15 mm.

Calculer le débit et la vitesse moyenne de l'eau dans la conduite.

Exemple 2

Dans une conduite de diamètre D = 30 cm circule un débit d'eau de 1800 l/mn. Le diamètre de la conduite passe de D à d = D/2.

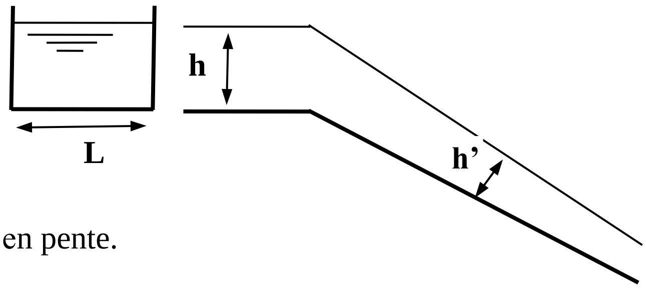
Calculer les vitesses moyennes dans les deux diamètres.

Exemple 3

La vitesse moyenne dans une conduite de diamètre d_1 = 24 cm est de 2.21 m/s.
Quel est le diamètre d_2 d'une conduite parcourue par le même débit et dans laquelle la vitesse moyenne soit le double ?

Exemple 4

Dans une section de la partie horizontale d'un canal rectangulaire de largeur L= 1.5 m, la hauteur d'eau est h = 20 cm et la vitesse moyenne est V = 1.2 m/s.
Dans la section en pente (voir figure) la hauteur d'eau est h' = 12 cm.



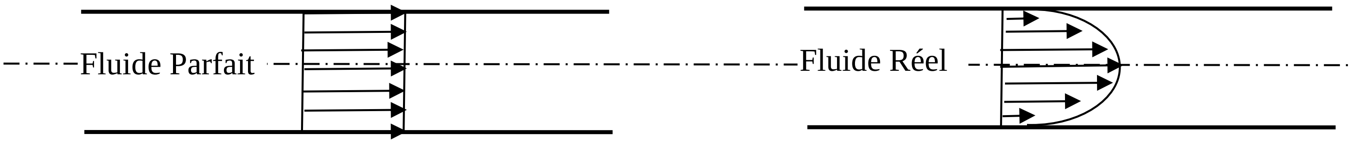
1/ Calculer la vitesse moyenne V' dans la section en pente.
2/ Calculer le débit d'eau dans le canal.

IV- Conservation de l'énergie : cas du fluide parfait

Fluide parfait : Ne pas confondre fluide parfait et gaz parfait.
Le fluide parfait est un fluide idéal. C'est un fluide non visqueux ou dont l'effet de la viscosité est négligeable
Le fluide parfait n'excite pas en réalité. C'est une hypothèse simplificatrice pour faciliter la résolution d'un problème et qui dans certain cas donne des résultats très proches de la réalité.

Caractéristiques :

* Pas de frottement $\Rightarrow$ Pas de perte d'énergie
* Le fluide glisse sur une paroi solide.
* La vitesse est uniforme dans une section donnée.
* La pression est perpendiculaire à la paroi, comme en statique.



La vitesse est cte dans toute la section
La vitesse à la paroi est **non nulle**
(le fluide glisse)

La vitesse varie en fonction de la distance à l'axe
La vitesse à la paroi est **nulle** (le fluide adhère)

L'énergie mécanique d'une particule fluide en mouvement est due à :

- L'énergie potentielle de position
- L'énergie potentille de pression
- L'énergie cinétique

$$E_{Méca} = Ep_{\text{ position}} + Ep_{\text{ pression}} + E_{Cinétique}$$

L'unité légale de l'énergie est le Joule (J)
Pour les fluides on s'intéresse à l'énergie par unité de volume (J /m^3).
1 J/m^3 = 1 N.m / m^3 = 1 N/m^2 = 1 Pa unité de la pression

1- Théorème de Bernoulli

Le long d'un tube de courant ou d'une ligne de courant l'énergie mécanique se conserve
Le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie par unité de volume. Il s'écrit :

$$\mathbf{p + \rho g z + ½ \rho V^2 = Cte}$$

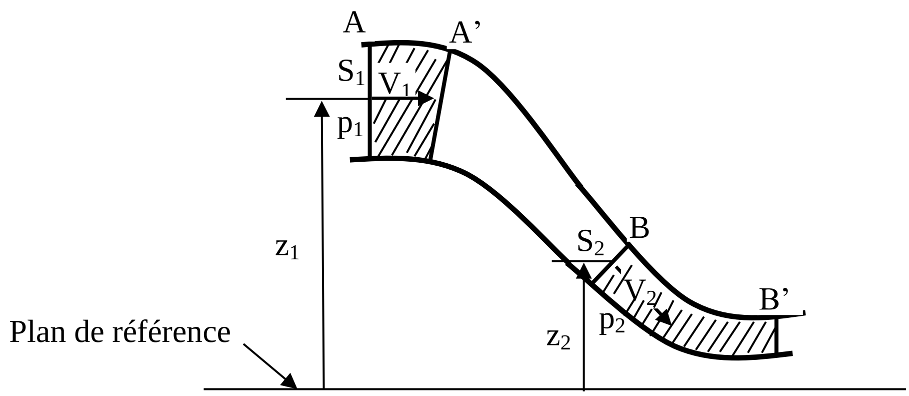
* **p** (Pa) : Energie potentielle de pression par unité de volume ou pression statique. C'est la grandeur que l'on mesure par exemple par un manomètre métallique tube de Bourdon.
* **ρgz** (Pa) : Energie potentielle de position par unité de volume.
  z (m) : cote par rapport à un plan de référence
  ρ (kg/m^3) : masse volumique du fluide
  g (m/s^2) : accélération de la pesanteur
* **½ ρV²** (Pa) : Energie cinétique par unité de volume, ou pression dynamique.
  V (m/s) : vitesse moyenne du fluide

2- Autres formes du Théorème de Bernoulli

a- Démonstration du Théorème de Bernoulli

On considère l'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible dans un tube de courant. Le tube est assez petit pour que la vitesse et la pression soient les mêmes en chaque point d'une section droite.
Soient p_1 et p_2, V_1 et V_2 les pressions et les vitesses en S_1 et S_2.
Soit dm la masse et dV le volume du fluide qui passe à travers la section S_1 entre les instants t et t + dt.
$dm = \rho.dV = \rho.\ S_1.AA' = \rho.\ S_1.V_1.dt$
Pendant ce temps la même masse et le même volume de fluide passe à travers la section S_2.
$dm = \rho.dV = \rho.\ S_2.BB' = \rho.\ S_2.V_2.dt$
Tout se passe comme si au bout du temps dt, la quantité de fluide comprise entre A et B passe entre A' et B'

D'où $S_1.V_1 = S_2.V_2$ conservation du débit



On applique le théorème de l'énergie cinétique à ce fluide entre les instants t et t + dt :

« La variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures »

Lors du déplacement du fluide, l'énergie cinétique varie de :

$$\frac{1}{2} dm.V_2^2 - \frac{1}{2} dm.V_1^2 = \frac{1}{2} dm.(V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2} \rho.dV.(V_2^2 - V_1^2)$$

Le travail des forces extérieures ayant agi sur le fluide est la somme :

- Des forces de pression :

$$p_1.S_1.AA' - p_2.S_2.BB' = (p_1 - p_2).dV$$

- De la pesanteur :

$$dm.g.(z_1 - z_2) = \rho.dV.g.(z_1 - z_2)$$

Soit :

$$\frac{1}{2} \rho.dV.(V_2^2 - V_1^2) = (p_1 - p_2).dV + \rho.dV.g.(z_1 - z_2)$$

On divise toute l'équation par dV, On obtient :

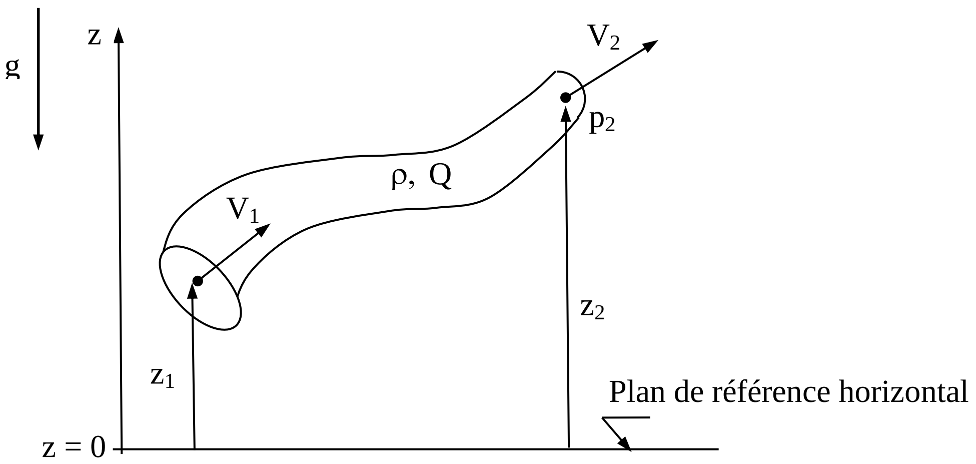
$$\frac{1}{2} \rho.(V_2^2 - V_1^2) = (p_1 - p_2) + \rho.g.(z_1 - z_2)$$

Que l'on peut écrire :

$$\mathbf{p_1 + \rho.g.z_1 + \frac{1}{2} \rho.V_1^2 = p_2 + \rho.g.z_2 + 1/2\, \rho.V_2^2}$$

b- Formes pratiques du Théorème de Bernoulli

On considère un tube de courant parcouru par un débit Q d'un fluide de masse volumique ρ.



Le théorème de Bernoulli s'écrit :

1/ $$\mathbf{p_1 + \rho g z_1 + 1/2\ \rho V_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + 1/2\, \rho V_2^2}$$

Les termes de cette équation sont des termes de pression ou d'énergie par unité de volume, d'unité (Pa ou J/m^3).

2/ $$\mathbf{\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}}$$

Les termes de cette équation sont des termes de hauteur ou d'énergie par unité de poids, d'unité (m ou J/N).

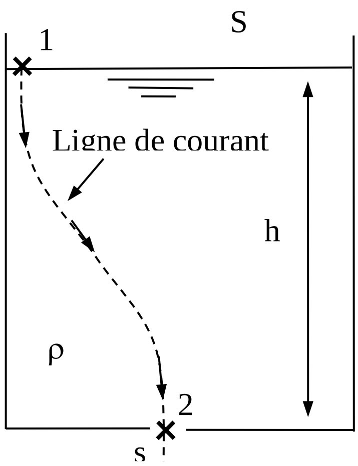
Exemple

Dans une conduite horizontale circule de l'eau. Le diamètre passe de D dans la section1 à d = D/2 dans la section 2. On donne: p_1 = 3 bar, V_1 = 2 m/s et $\rho = 10^3$ kg/m^3, calculer la pression p_2 dans la section 2.

3- Application du Théorème de Bernoulli

a- Vitesse de vidange d'un réservoir

On considère la vidange d'un réservoir de grande dimension de section S.
Hypothèse : Orifice de vidange de section s, avec s très petit devant S et réservoir de niveau constant h = Cte.
On applique le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant.



$$\mathbf{p_1 + \rho g z_1 + 1/2\ \rho V_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + 1/2\ \rho V_2^2}$$

La vitesse de vidange est $\mathbf{V = V_2}$

$$\mathbf{V_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} + 2g(z_1 - z_2) + V_1^2}$$

Le réservoir est ouvert à l'air libre : $\mathbf{p_{1abs} = p_{atm}}$
La sortie du liquide est à l'air libre : $\mathbf{p_{2abs} = p_{atm}}$
$\forall$ le plan de référence : $\mathbf{z_1 - z_2 = h}$

D'où $\mathbf{V_2^2 = 2gh + V_1^2}$

La conservation de débit s'écrit : $Q = V_1 S = V_2$
Puisqu'il y a un écoulement $\mathbf{V_2 \neq 0}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{V_1 = V_2 \dfrac{s}{S}} \\ \mathbf{S \succ\succ s \Rightarrow \dfrac{s}{S} \to 0} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{V_1 \to 0} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{V_2^2 = 2gh}$$

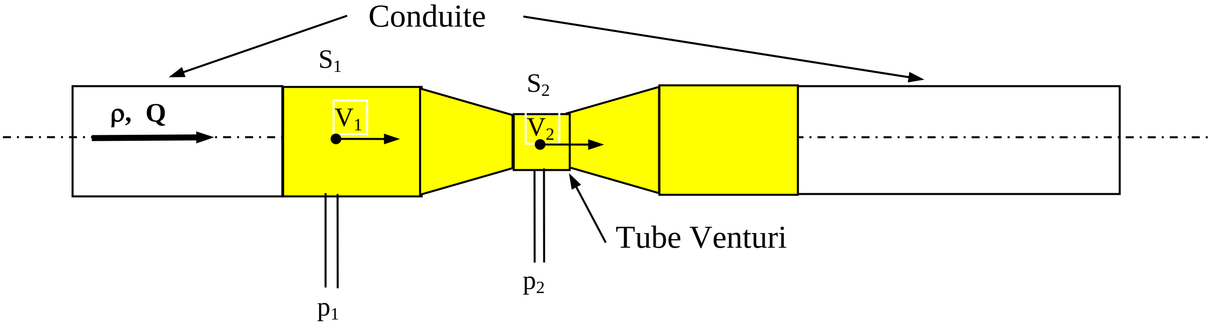
La vitesse de vidange est alors :

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{2gh}} \qquad \text{Formule de Torricelli}$$

En réalité, la vitesse de vidange est plus faible. Elle dépend de la viscosité du liquide et de la forme de l'orifice de vidange.

b- Tube de Venturi

Le tube de venturi est un dispositif de mesure de débit. Il est intercalé entre deux morceaux de conduites là où on désire mesurer le débit.



On suppose qu'il n'y a pas de perte d'énergie (fluide parfait pas de frottement) dans le tube de Venturi. On applique le théorème de Bernoulli entre les sections S_1 et S_2 du tube Venturi.

$$\mathbf{p_1 + \rho g z_1 + 1/2\ \rho V_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + 1/2\ \rho V_2^2}$$

$$\mathbf{1/2\ \rho V_2^2 - 1/2\ \rho V_1^2 = p_1 - p_2 + \rho g z_1 - \rho g z_2}$$

$$\mathbf{1/2\ \rho (V_2^2 - V_1^2) = p_1 - p_2 + \rho g z_1 - \rho g z_2}$$

$$\mathbf{1/2\ \rho V_1^2 \left[V_2^2 / V_1^2 - 1 \right] = p_1 - p_2 + \rho g (z_1 - z_2)}$$

Tube de Venturi horizontal : $\Rightarrow$ $\mathbf{z_1 - z_2 = 0}$

La conservation de débit s'écrit : $\mathbf{Q = V_1 S_1 = V_2 S_2} \Rightarrow \mathbf{V_2/V_1 = S_1/S_2}$

D'où $\mathbf{1/2\ \rho V_1^2 \left[S_1^2 / S_2^2 - 1 \right] = p_1 - p_2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_1^2 = \dfrac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[S_1^2 / S_2^2 - 1 \right]}}$

$$\mathbf{V_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[S_1^2 / S_2^2 - 1 \right]}}} \qquad \Rightarrow \mathbf{Q = S_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[S_1^2 / S_2^2 - 1 \right]}}}$$

Connaissant les caractéristiques du tube Venturi (S_1 et S_2 connues) la mesure de la différence de pression ($p_1 - p_2$) permet de déterminer le débit.

En réalité, le débit réel sera légèrement différent du débit trouvé à partir de l'équation précédente. En effet, il y a toujours des frottements (dont on n'a pas tenu compte) qui engendrent une différence de pression plus importante.

Par conséquent, il est nécessaire d'étalonner cet appareil.

$$\mathbf{Q_{réel} = C.S_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[S_1^2 / S_2^2 - 1 \right]}}}$$

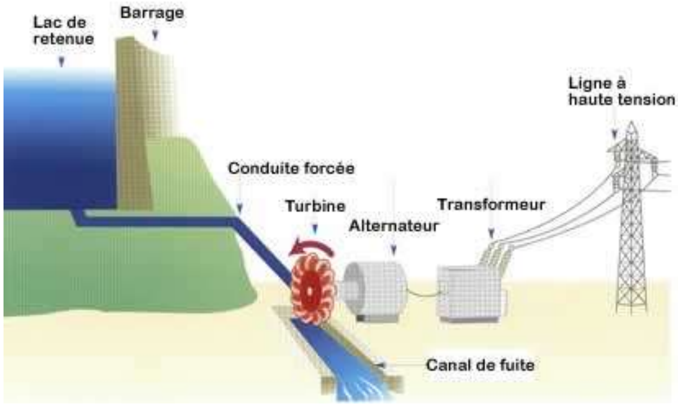
C : coefficient de correction obtenu par étalonnage du venturi

4- Fluide parfait traversant une machine hydraulique

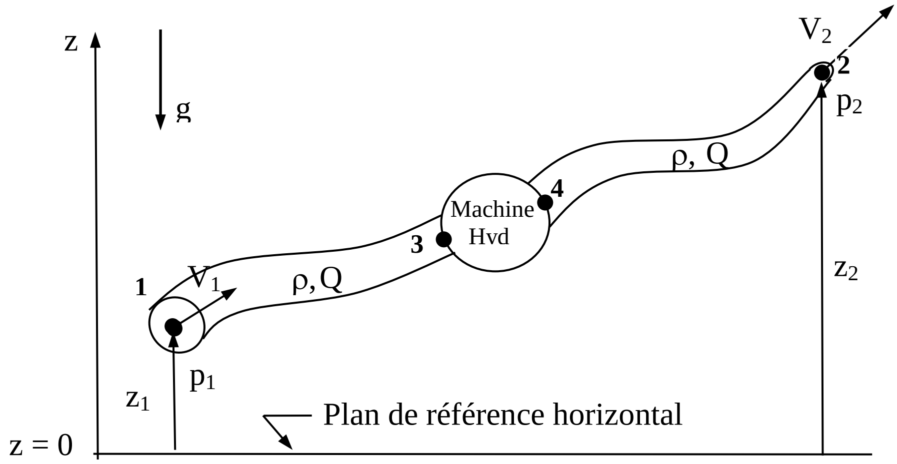
Une machine hydraulique peut être génératrice ou réceptrice.

Génératrice : Elle fournit de l'énergie au fluide (la machine aide le fluide à se déplacer).

Réceptrice : Elle absorbe l'énergie du fluide (le fluide engendre le mouvement de la machine).



Considérons une machine hydraulique parcourue par un débit Q d'un fluide de masse volumique ρ.



a- Conservation de l'énergie

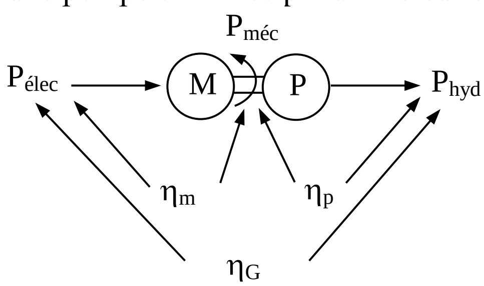
$$\mathbf{p_1 + \rho g z_1 + 1/2\ \rho V_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + 1/2\,\rho V_2^2 \ \pm\ E}$$

E en (Pa), c'est une quantité positive. C'est l'énergie par unité de volume fournie par une machine génératrice ou absorbée par une machine réceptrice.
On écrira :

+ E pour une machine réceptrice (Turbine)
- E pour une machine génératrice (Pompe)

b- Puissances mises en jeu

Considérons le cas d'une pompe entraînée par un moteur électrique.



η_m : rendement du moteur électrique
η_p : rendement de la pompe
η_G : rendement du groupe motopompe

Puissance hydraulique : P_{hyd} $\qquad P_{hyd} = E\,.\,Q$ $\qquad P_{hyd}$ en (W) si E en (Pa) et Q en (m^3/s)

Puissance mécanique : $\mathbf{P_{méc}}$ $\qquad \mathbf{P_{méc} = \dfrac{P_{hyd}}{\eta_p}}$

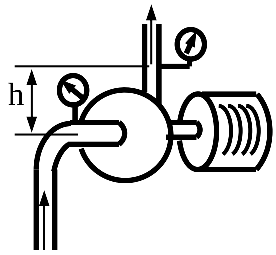
Puissance électrique : $\mathbf{P_{élec}}$ $\qquad P_{élec} = \dfrac{P_{méc}}{\eta_m} = \dfrac{P_{hyd}}{\eta_m\ \eta_p} = \dfrac{E.Q}{\eta_m\ \eta_p} = \dfrac{E.Q}{\eta_G}$

Exemple
Les pressions effectives à l'entrée et à la sortie de la pompe (voir figure) sont respectivement :- 0,4 bar et 2,2 bar. Le diamètre de la conduite d'aspiration est Da = 35 mm et celui du refoulement est Dr = 21 mm.

Le débit d'eau de la pompe est Q = 63,5 l/mn

On donne h = 1 m, $\rho = 10^3$ kg/m^3, g = 10 m/s^2,

le rendement de la pompe $\eta p = 0{,}6$ et celui du moteur électrique $\eta m = 0{,}85$.



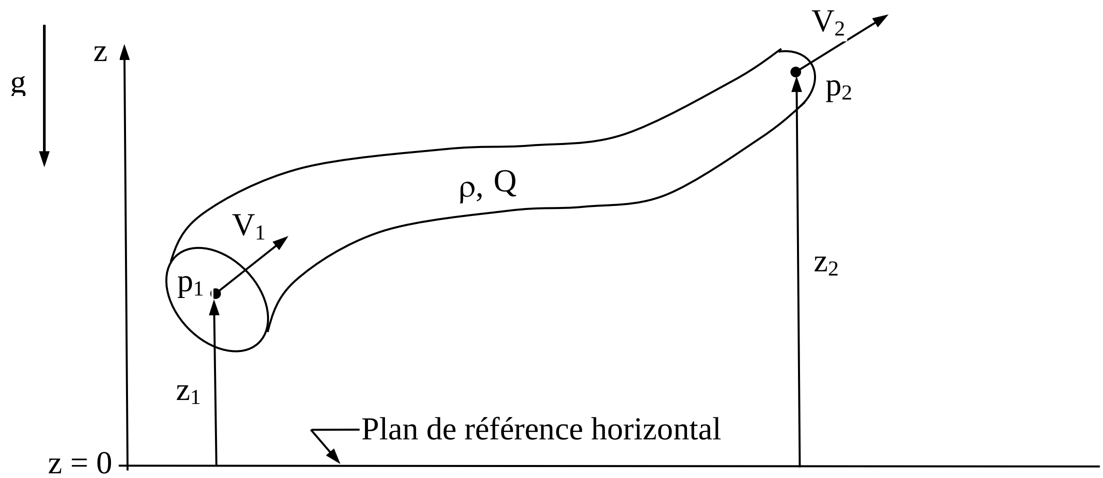
1/ Calculer l'énergie par unité de volume fournie par la pompe au liquide

2/ Calculer la puissance électrique consommée

V- Conservation de l'énergie : cas du fluide réel

Lors d'un écoulement de fluide réel, il se produit du frottement entre deux couches voisines ou entre le fluide et la paroi de la conduite. Ces frottements engendrent des pertes d'énergie.

Soit un tube de courant parcouru par un fluide réel incompressible, voir figure ci-dessous.



1- Equation de la conservation de l'énergie

Elle s'écrit :

$$\mathbf{p_1 + \rho g z_1 + 1/2\ \rho V_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + 1/2\ \rho V_2^2 + J_{12}}$$

J_{12} en (Pa), c'est une quantité positive. C'est l'énergie par unité de volume perdue entre les sections 1 et 2

$$\mathbf{J_{12} = (p_1 + \rho g z_1 + 1/2\,\rho V_1^2) - (p_2 + \rho g z_2 + 1/2\,\rho V_2^2)}$$

$\mathbf{J_{12}}$ = la charge du fluide en 1 - la charge du fluide en 2

J_{12} est appelée perte de charge

Dans la pratique, on ne détermine pas la perte de charge en faisant la différence des charges.

2- Détermination de la perte de charge J_{12}

On distingue deux types de perte de charge :

- La perte de charge <u>linéaire</u> ou <u>répartie</u>, c'est la perte d'énergie due aux frottements dans une conduite de section constante et de longueur donnée.
- La perte de charge <u>singulière</u> ou <u>locale</u>, c'est la perte due aux accidents de parcours du fluide (changement de direction, changement de section, vanne…)

a- <u>Perte de charge linéaire</u> **: J_L**

$$J_L = \lambda \frac{L}{d} \tfrac{1}{2} \rho V^2$$

d (m) : diamètre de la conduite considérée
L (m) : longueur de la conduite considérée
V (m/s) : vitesse moyenne
ρ (Kg/m^3) : masse volumique du fluide
λ (sans dimension) : coefficient de perte de charge linéaire. Il dépend de la nature de l'écoulement et de l'état de surface de la conduite.

- **La nature de l'écoulement** est caractérisée par le nombre de **Reynolds Re** (sans dimension) :

$$R_e = \frac{V\,d}{\nu} \qquad \nu\ (m^2/s)\text{: la viscosité cinématique du fluide}$$

- **L'état de surface** est défini par l'épaisseur moyenne des rugosités : ε.

Alors **λ = f(Re, ε/d)**

Selon le nombre de Reynolds, on distingue différents cas.

<u>**1er cas**</u> **: Re < 2000** L'écoulement est dit **laminaire**, c'est un écoulement organisé, pour lequel λ ne dépend que de Re. Pour déterminer λ on utilise la loi de **Poiseuille** :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

<u>**2^{éme} cas**</u> **: Re > 3000** L'écoulement est dit **turbulent**, c'est un écoulement agité. Différentes lois sont proposées à partir d'études expérimentales.

- Pour **3000 < Re < 10^5** l'écoulement est dit turbulent **hydrauliquement lisse**. λ ne dépend que de Re. La loi la plus utilisée est celle de **Blasius** :

$$\lambda = (100\,Re)^{-1/4}$$

- Pour **Re > 10^5** l'écoulement est dit turbulent **hydrauliquement rugueux**. λ ne dépend que de ε/d. On peut utiliser la loi de **Blench** :

$$\lambda = 0.79\sqrt{\varepsilon/d}$$

<u>**3^{éme} cas**</u> **: 2000 < Re < 3000** , c'est le régime transitoire entre le laminaire organisé et le turbulent. Pour ce cas, il n'y a pas de loi, mais on peut utiliser la loi de Blasius.

<u>Remarque</u>

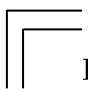
Connaissant Re et ε/d, on détermine λ à partir du diagramme de Moody, voir annexe.

b- <u>Perte de charge singulière</u> **: J_s**

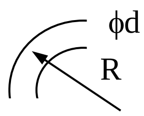
$$J_s = K\ \tfrac{1}{2} \rho V^2$$

K : coefficient de perte de charge singulière. Il dépend de la nature de la singularité.

<u>Exemple</u> : Coude à angle droit

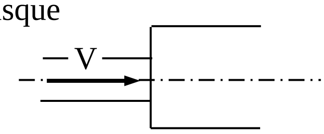


$K \approx 1$

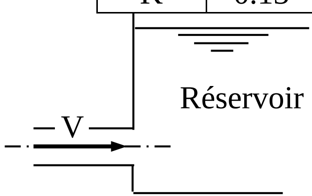


d/R	0.2	0.8	1.4	1.6
K	0.13	0.2	0.66	1

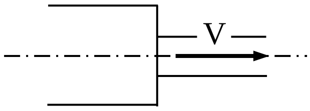
Elargissement brusque



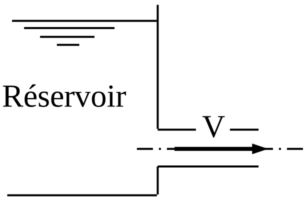
$K \approx 1$



Rétréissement brusque



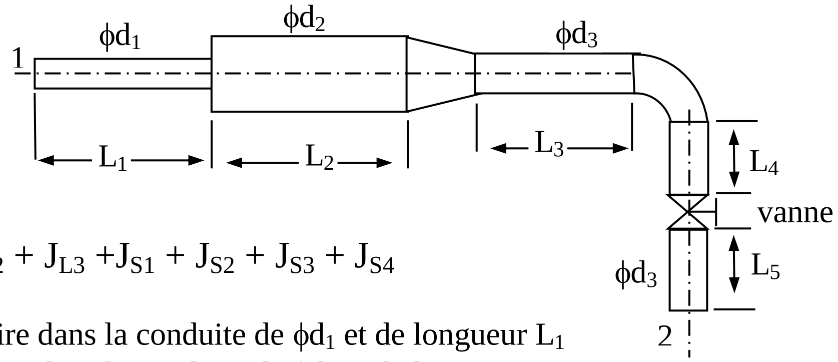
$K \approx 0.5$



Pour réduire les pertes singulières, on doit éviter les angles vifs et les changements brusques de sections.
La perte de charge totale entre deux points d'un circuit est :

$$J_{12} = \sum J_{Li} + \sum J_{sj}$$

<u>Exemple</u>



$J_{12} = J_{L1} + J_{L2} + J_{L3} + J_{S1} + J_{S2} + J_{S3} + J_{S4}$

Avec :

J_{L1} : perte linéaire dans la conduite de ϕd_1 et de longueur L_1

J_{L2} : perte linéaire dans la conduite de ϕd_2 et de longueur L_2

J_{L3} : perte linéaire dans la conduite de ϕd_3 et de longueur $L_3 + L_4 + L_5$

J_{S1} : perte singulière élargissement

J_{S2} : perte singulière rétrécissement progressif

J_{S3} : perte singulière coude

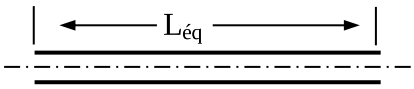
J_{S4} : perte singulière vanne

c- <u>Longueur équivalente</u>

Toute singularité peut être remplacée par un morceau de conduite d'une certaine longueur appelée longueur équivalente ($L_{éq}$) provoquant la même perte de charge.

<u>Exemple</u>

$\equiv$



$$J_s = K\ 1/2\,\rho V^2 \qquad = \qquad J_L = \lambda \frac{L_{éq}}{d}\, 1/2\,\rho V^2$$

<u>Exemple</u>

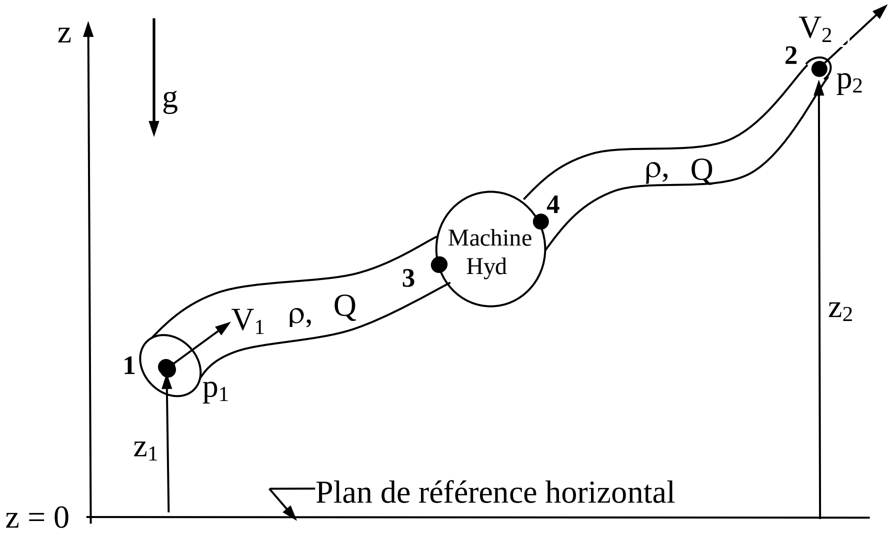
On considère l'écoulement d'huile ($\rho = 900$ Kg/m^3, $\nu = 32$cSt) dans une portion horizontal d'un circuit. La portion est constituée d'une conduite de $\phi d_1 = 14$ mm et de longueur $L_1 = 8$ m terminée par une conduite de $\phi d_2 = 24$ mm et de longueur $L_2 = 8$ m. Le coefficient de perte de charge singulière de l'élargissement est K = 0.7 et le débit dans la portion est Q = 68 l/mn. Calculer :

1/ Les différentes pertes de charge

2/ La pression à la sortie de la portion, sachant que la pression à son entrée est de 20 bar.

3- Fluide réel traversant une machine hydraulique

Considérons une machine hydraulique parcourue par un débit Q d'un fluide de masse volumique ρ.



a- Conservation de l'énergie

$$\mathbf{p_1 + \rho g z_1 + 1/2\ \rho V_1^2 \ = p_2 + \rho g z_2 + 1/2\, \rho V_2^2 \ + J_{12}\ \pm\ E}$$

E en (Pa), c'est une quantité positive. C'est l'énergie par unité de volume fournie par une machine génératrice ou absorbée par une machine réceptrice.
On écrira :

+ E pour une machine réceptrice (Turbine)
- E pour une machine génératrice (Pompe)

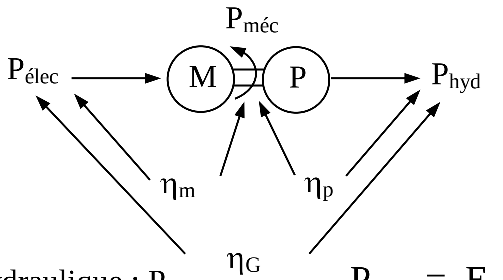
$\mathbf{J_{12}}$ est la perte de charge dans les portions de circuit avant la machine et après la machine.

$$\mathbf{J_{12} = J_{13} + J_{42}}$$

$\mathbf{J_{34} = 0}$ on suppose qu'il n'y a pas de perte de charge dans la machine.

b- Puissances mises en jeu

Considérons le cas d'une pompe entraînée par un moteur électrique.



η_m : rendement du moteur électrique
η_p : rendement de la pompe
η_G : rendement du groupe motopompe

Puissance hydraulique : P_{hyd} $\quad P_{hyd} = E\ .\ Q \quad$ P_{hyd} en (W) si E en (Pa) et Q en (m^3/s)

Puissance mécanique : $\mathbf{P_{méc}}$ $\quad \mathbf{P_{méc} = \dfrac{P_{hyd}}{\eta_p}}$

Puissance électrique : $\mathbf{P_{élec}}$ $\quad \mathbf{P_{élec} = \dfrac{P_{méc}}{\eta_m} = \dfrac{P_{hyd}}{\eta_m\ \eta_p} = \dfrac{E\,Q}{\eta_m\ \eta_p} = \dfrac{E\,Q}{\eta_G}}$

Remarque

Pour les applications numériques, on doit utiliser les unités du S.I., mais le résultat final peut être donné dans un autre système.
Quand on applique la conservation de l'énergie :

- on doit respecter le sens de l'écoulement
- on peut travailler avec les pressions effectives ou absolues (si p_1 est eff alors p_2 doit être eff et si p_1 est abs alors p_2 doit être abs)

La conservation de l'énergie peut s'écrire en terme de hauteur. On a alors :

$$\frac{\mathbf{p_1}}{\mathbf{\rho g}} + \mathbf{z_1} + \frac{\mathbf{V_1^2}}{\mathbf{2g}} = \frac{\mathbf{p_2}}{\mathbf{\rho g}} + \mathbf{z_2} + \frac{\mathbf{V_2^2}}{\mathbf{2g}} + \Delta\mathbf{H_{12}}$$

$\Delta\mathbf{H_{12}} = \frac{\mathbf{J_{12}}}{\mathbf{\rho g}} = \Delta H_L + \Delta H_S$: Perte de charge exprimée en terme de hauteur unité le (m)

$$\Delta H_L = \lambda \frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} \qquad \text{et} \qquad \Delta\mathbf{H_S} = \mathbf{K}\,\frac{\mathbf{V^2}}{\mathbf{2g}}$$

Exemple

On considère le circuit de la figure ci-dessous, dans lequel une pompe entrainée par un moteur électrique assure le transport du pétrole d'un navire à un réservoir de stockage.

Le débit de la pompe est Q = 8 l/s.

Le diamètre de la conduite d'aspiration est Da = 120 mm et celui du refoulement Dr = 80 mm.

La perte de charge à l'aspiration est Jasp = 0,2 bar et celui du refoulement est Jref = 1,3 bar.

Le rendement de la pompe est ηp = 0,65 et celui du moteur électrique est ηm = 0,85.

On donne en plus, g = 10 m/s^2, ρ = 850 kg/m^3, H = 25 m, h = 4 m et patm = 1 bar.

Calculer :

1/ L'énergie par unité de volume fournie par la pompe au liquide

2/ La puissance électrique consommée

3/ Les pressions absolues à l'entrée et à la sortie de la pompe