

UNE INTRODUCTION AUX ALGÈBRES DE HOPF COMBINATOIRES ET À LA RENORMALISATION

DOMINIQUE MANCHON

RÉSUMÉ. Nous développons quelques exemples d'algèbres de Hopf combinatoires. Celles-ci sont graduées et connexes pour la plupart, ce qui permet d'implanter la décomposition de Birkhoff-Connes-Kreimer sur le groupe de leurs caractères. La notion de comodule-bigèbre est également abordée, avec l'exemple des forêts enracinées traité en détail.

Classification MSC : 05C05, 16T05, 16T10, 16T15, 16T30.

Mots-clé : Bigèbres, algèbres de Hopf, comodules, arbres enracinés, renormalisation, battages, quasi-battages.

INTRODUCTION

Remerciements. Je tiens à remercier en premier lieu Darij Grinberg pour l'erratum très détaillé¹ qu'il m'a envoyé il y a quelques années concernant les notes de cours [22] sur les algèbres de Hopf combinatoires et la renormalisation. Le présent texte en a grandement profité. Ces notes voient le jour à la suite de deux cours, l'un à Madrid (ICMAT, Juillet 2016), et l'autre à Gabès en Tunisie (Faculté des Sciences, Décembre 2016). Un grand merci à Kurusch Ebrahimi-Fard et à Hedi Rejaiba pour leurs invitations, ainsi qu'à tous les participants pour leurs questions et remarques.

1. QUELQUES RAPPELS D'ALGÈBRE ET D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans ce chapitre préliminaire, nous passons en revue quelques structures algébriques de base : semi-groupes, monoïdes, groupes, anneaux, corps. Des propriétés telles que l'associativité du produit ou l'existence de l'élément neutre et de l'inverse sont reformulées à l'aide de diagrammes, pour habituer le lecteur à leur utilisation systématique. Puis l'algèbre linéaire est abordée, avec une description détaillée du produit tensoriel dans la catégorie des espaces vectoriels sur un corps. Enfin nous abordons les notions de filtration et de graduation, pour terminer par la description du foncteur covariant Gr des espaces filtrés vers les espaces gradués.

Date: Décembre 2016.

1. Disponible sur sa page personnelle : <http://web.mit.edu/~darij/www/algebra/manchon-errata-update.pdf>

1.1. Semigroupes, monoides et groupes.

Définition 1.1.1. Un *semigroupe* est un ensemble E muni d'un produit

$$\begin{aligned} m : E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

tel que, pour tout $x, y, z \in E$, on ait la **propriété d'associativité** suivante :

$$(1.1.1) \quad (xy)z = x(yz).$$

Le semigroupe est de plus **commutatif** si on a la relation de commutativité $xy = yx$ pour tout $x, y \in E$.

Il est important de noter que l'associativité du produit équivaut à la commutativité du diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} E \times E \times E & \xrightarrow{\text{Id}_E \times m} & E \times E \\ m \times \text{Id}_E \downarrow & & \downarrow m \\ E \times E & \xrightarrow{m} & E \end{array}$$

Autrement dit :

$$(1.1.2) \quad m \circ (\text{Id}_E \times m) = m \circ (m \times \text{Id}_E).$$

Dans le même esprit, le semigroupe E est commutatif si et seulement si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{\tau} & E \times E \\ & \searrow m & \swarrow m \\ & E & \end{array}$$

où τ est la *volte*, définie par $\tau(x, y) = (y, x)$.

Définition 1.1.2. Un *monoïde* est un semigroupe M admettant un **élément neutre**, c'est-à-dire un élément $e \in M$ tel que $ex = xe$ pour tout $x \in M$.

Soit $\{*\}$ un ensemble formé d'un seul élément noté $*$, et soit $u : \{*\} \rightarrow E$ l'application donnée par $u(*) = e$. La propriété d'élément neutre pour e équivaut à la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \{*\} \times M & \xrightarrow{u \times \text{Id}_M} & M \times M & \xleftarrow{\text{Id}_M \times u} & M \times \{*\} \\ & \searrow \sim & \downarrow m & \swarrow \sim & \\ & & M & & \end{array}$$

Proposition 1.1.1. *L'élément neutre dans un monoïde est unique.*

Démonstration. Soient e, e' deux éléments neutres dans un monoïde M . Alors $ee' = e = e'$. \square

Définition 1.1.3. *Un **groupe** est un monoïde G muni d'une application*

$$\begin{aligned} \iota : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

telle que $x^{-1}x = xx^{-1} = e$ pour tout $x \in G$.

Soit $\varepsilon : G \rightarrow \{*\}$ la seule application possible, qui envoie tout élément de G sur l'unique élément $*$. Le fait que ι est l'application inverse équivaut à la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & G \times G & \xrightarrow{\text{Id}_G \times \iota} & G \times G & & \\ & \nearrow \Delta & & & & \searrow m & \\ G & \xrightarrow{\varepsilon} & \{*\} & \xrightarrow{u} & G & & \\ & \searrow \Delta & & & & \nearrow m & \\ & & G \times G & \xrightarrow{\iota \times \text{Id}_G} & G \times G & & \end{array}$$

où $\Delta : G \rightarrow G \times G$ est le *plongement diagonal* défini par $\Delta(g) := (g, g)$ pour tout $g \in G$.

Proposition 1.1.2. *Soit G un groupe. Tout $g \in G$ admet un unique inverse.*

Démonstration. Supposons que x' et x'' sont deux inverses pour $x \in G$. Alors on a :

$$x' = x'e = x'(xx'') = (x'x)x'' = ex'' = x''.$$

\square

1.2. Anneaux et corps.

Définition 1.2.1. *Un **anneau** est un triplet $(R, +, \cdot)$ où :*

- (1) $(R, +)$ est un groupe abélien (c'est-à-dire commutatif) avec un élément neutre 0.
- (2) (R, \cdot) est un monoïde, avec un élément neutre 1.
- (3) Pour tout $x, y, z \in R$, on a les **propriétés de distributivité** à gauche et à droite respectivement :

$$\begin{aligned} x(y + z) &= xy + xz \text{ (distributivité à gauche),} \\ (x + y)z &= xz + yz \text{ (distributivité à droite).} \end{aligned}$$

Ces propriétés sont respectivement équivalentes à la commutativité des deux diagrammes suivants, avec les notations $s(x, y) := x + y$, $m(x, y) := xy$ et $\tau_{23}(x, y, z, t) := (x, z, y, t)$, autrement dit $\tau_{23} := \text{Id}_R \times \tau \times \text{Id}_R$.

$$\begin{array}{ccc}
 R^3 & \xrightarrow{\Delta \times \text{Id}_R \times \text{Id}_R} & R^4 \\
 \text{Id}_R \times s \downarrow & & \downarrow \tau_{23} \\
 R \times R & & R^4 \\
 m \downarrow & & \downarrow m \times m \\
 R & \xleftarrow{s} & R \times R
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 R^3 & \xrightarrow{\text{Id}_R \times \text{Id}_R \times \Delta} & R^4 \\
 s \times \text{Id}_R \downarrow & & \downarrow \tau_{23} \\
 R \times R & & R^4 \\
 m \downarrow & & \downarrow m \times m \\
 R & \xleftarrow{s} & R \times R
 \end{array}$$

En particulier, dans un anneau, 0 est un élément absorbant : pour tout $x \in R$ on a

$$x \cdot 0 = x \cdot (1 - 1) = x \cdot 1 - x \cdot 1 = x - x = 0,$$

et de même $0 \cdot x = 0$.

Un *anneau commutatif* est défini de la même manière, en ajoutant la propriété de commutativité pour le produit. Dans ce cas les propriétés de distributivité à gauche et à droite coïncident.

Remarque 1.2.1. Sauf mention contraire, nous considérerons toujours des anneaux *unitaires*. Des anneaux non-unitaires R sont toutefois considérés au Paragraphe 2.1.

Soit R un anneau, qu'on supposera commutatif ici. Un *diviseur de zéro* dans R est un élément $x \neq 0$ tel qu'il existe $y \neq 0$ avec $xy = 0$. Un anneau commutatif est dit *intègre* s'il ne contient pas de diviseurs de zéro.

Exemple 1.2.1. L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ des entiers, muni de l'addition et de la multiplication usuelle, est un anneau intègre.

Exemple 1.2.2. Soit R un anneau commutatif. L'anneau $R[X]$ des *polynômes à une indéterminée à coefficients dans R* est défini par :

$$R[X] := \left\{ \sum_{j=0}^{+\infty} r_j X^j, r_j \in R, r_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand} \right\}.$$

L'addition est effectuée terme à terme : pour tout $P = \sum_{j \geq 0} r_j X^j$ et $Q = \sum_{j \geq 0} s_j X^j$ dans $R[X]$, on a :

$$P + Q := \sum_{j \geq 0} (r_j + s_j) X^j.$$

Le produit est entièrement déterminé par la règle $X^i X^j = X^{i+j}$ étendue par distributivité. Explicitement :

$$PQ = \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{a, b \geq 0, a+b=j} r_a s_b \right) X^j.$$

Le degré du polynôme P est donné par

$$\deg P := \sup\{j \geq 0, r_j \neq 0\},$$

et la *valuation* du polynôme P est donnée par

$$\text{val } P := \inf\{j \geq 0, r_j \neq 0\}.$$

Un *monôme* est un polynôme P tel que $\deg P = \text{val } P$, et s'écrit donc $P = rX^j$ avec $r \in R - \{0\}$ et $j \geq 0$.

Exemple 1.2.3. Soit R un anneau commutatif. L'anneau $R[[X]]$ des *séries formelles en une indéterminée à coefficients dans R* est défini par :

$$R[[X]] := \left\{ \sum_{j=0}^{+\infty} r_j X^j, r_j \in R \right\},$$

sans autre condition sur les coefficients. La somme et le produit sont définis de la même manière que pour les polynômes. La notion de degré n'a pas de sens ici, mais on peut encore considérer la valuation.

Définition 1.2.2. Un *idéal* dans un anneau commutatif R est une partie non vide $J \subseteq R$ telle que $xy \in J$ pour tout $x \in R$ et $y \in J$. Autrement dit,

$$RJ \subseteq J.$$

Si l'anneau R n'est pas commutatif, on doit faire la distinction entre les idéaux **à gauche**, les idéaux **à droite** et les idéaux **bilatères**, caractérisés respectivement par les propriétés

$$RJ \subseteq J, \quad JR \subseteq J, \quad RJ \cup JR \subseteq J.$$

L'intersection de deux idéaux à gauche (resp. à droite ou bilatère) est un idéal à gauche (resp. à droite ou bilatère).

Définition 1.2.3. Un *corps* est un anneau commutatif \mathbf{k} qui n'admet aucun idéal excepté $\{0\}$ et \mathbf{k} .

Proposition 1.2.1. Tout élément non nul d'un corps \mathbf{k} est inversible.

Démonstration. Soit $a \in \mathbf{k} - \{0\}$, et soit J le plus petit idéal (pour l'inclusion) contenant a . On a $J = \mathbf{k}$ par définition d'un corps. En particulier $1 \in J$, donc il existe $b \in \mathbf{k}$ tel que $ab = 1$. \square

Exemples de corps :

- le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels,
- les *corps de nombres*, c'est-à-dire les extensions finies de \mathbb{Q} ,
- le corps \mathbb{R} des nombres réels,
- le corps \mathbb{C} des nombres complexes,
- le corps $\mathbf{k}(X)$ des fractions rationnelles sur un corps \mathbf{k} ,

— le corps $\mathbf{k}[X^{-1}, X]$ des séries de Laurent sur un corps \mathbf{k} , c'est-à-dire

$$\mathbf{k}[X^{-1}, X] = \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j X^j, a_j \in \mathbf{k}, a_j = 0 \text{ for } j \ll \right\},$$

— le corps \mathbb{Q}_p des nombres p -adiques, où p est un nombre premier,

— Le corps fini $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est un nombre premier.

Définition 1.2.4. Soit \mathbf{k} un corps. Sa **caractéristique** est le plus petit nombre $p \neq 0$ tel que, pour tout $a \in \mathbf{k}$, on a $pa := \underbrace{a + \dots + a}_{p \text{ times}} = 0$. S'il n'existe pas de tel nombre p , on convient que \mathbf{k} est de **caractéristique zéro**.

La caractéristique d'un corps est toujours égale à zéro ou un nombre premier.

1.3. Modules sur un anneau.

Définition 1.3.1. Un module sur un anneau commutatif R est un groupe abélien $(M, +)$ muni d'une loi binaire

$$\begin{aligned} m : R \times M &\longrightarrow M \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

telle que :

- $0x = 0_M$ for any $x \in M$,
- $1x = x$ for any $x \in M$,
- $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ for any $x \in M$ and $\lambda, \mu \in R$,
- $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$ for any $\lambda \in R$ and $x, y \in X$.

Le terme *espace vectoriel* est utilisé pour désigner un module sur un corps. Lorsque l'anneau de base R n'est pas commutatif, on doit distinguer entre les R -modules à gauche et les R -modules à droite.

1.4. Rappels d'algèbre linéaire. Soit \mathbf{k} un corps, et soit V un \mathbf{k} -espace vectoriel. On rappelle qu'une partie $F \subset V$ est *libre* si, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in F^p$ et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{k}^p$, si $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$ alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Par ailleurs, une partie $F \subset V$ est *génératrice* si tout élément de V peut s'écrire comme une combinaison linéaire $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ d'éléments $x_j \in F$, avec des coefficients $\lambda_j \in \mathbf{k}$. Une *base* est une partie à la fois libre et génératrice. Dans ce cas, tout élément de V s'écrit comme une unique combinaison linéaire d'éléments de F . Rappelons que toutes les bases ont le même cardinal : la *dimension* de l'espace vectoriel V .

Proposition 1.4.1. *Tout espace vectoriel admet une base.*

Démonstration. (esquisse) C'est une conséquence de l'axiome du choix : toute partie libre peut être complétée de manière à former une base. \square

Définition 1.4.1. Soient V et W deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbf{k} . Un morphisme de \mathbf{k} -espaces vectoriels

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

est appelé **application linéaire**. Autrement dit, une application linéaire φ est un morphisme de groupes abéliens qui de plus commute avec la multiplication par tout scalaire, c'est-à-dire

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$ et tout $x, y \in V$.

L'ensemble des applications linéaires de V vers W est noté $\mathcal{L}(V, W)$. C'est naturellement un \mathbf{k} -espace vectoriel.

Définition 1.4.2. Soit V un \mathbf{k} -espace vectoriel, et soit $W \subseteq V$ un **sous-espace vectoriel**, c'est-à-dire une partie de V stable par l'addition et par la multiplication par tout scalaire. Le **quotient** V/W est l'ensemble des classes dans V sous la relation d'équivalence définie par :

$$x \sim y \iff x - y \in W.$$

Le quotient V/W est un espace vectoriel : en notant \tilde{x} la classe de $x \in V/W$, les opérations d'espace vectoriel sur V/W sont définies par $\tilde{x} + \tilde{y} := \widetilde{x + y}$ et $\lambda\tilde{x} := \widetilde{\lambda x}$. La projection canonique $V \twoheadrightarrow V/W$ est une application linéaire.

Définition 1.4.3. Soient V_1, V_2 et W trois \mathbf{k} -espaces vectoriels. Une application $\varphi : V_1 \times V_2 \rightarrow W$ est **bilinéaire** si elle est linéaire en chacun de ses arguments lorsque l'autre est fixé, c'est-à-dire,

$$(1.4.1) \quad f(ax + by, a'x' + b'y') = aa'f(x, x') + ab'f(x, y') + ba'f(y, x') + bb'f(y, y')$$

pour tout $x, y \in V_1$, pour tout $x, y \in V_2$ et pour tout $a, b, a', b' \in \mathbf{k}$.

1.5. Le produit tensoriel. Soient A et B deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbf{k} . Le **produit tensoriel** $A \otimes B$ est un \mathbf{k} -espace vectoriel qui satisfait la **propriété universelle** suivante : il existe une application bilinéaire

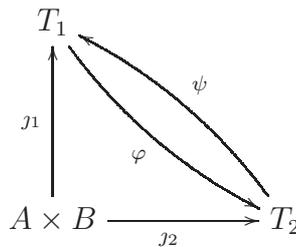
$$\begin{aligned} j : A \times B &\longrightarrow A \otimes B \\ (a, b) &\longmapsto a \otimes b \end{aligned}$$

telle que, pour tout \mathbf{k} -espace vectoriel C et pour toute application bilinéaire $f : A \times B \rightarrow C$ il existe une unique application **linéaire** $\tilde{f} : A \otimes B \rightarrow C$ telle que $f = \tilde{f} \circ j$, c'est-à-dire telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & & \\ \uparrow j & \searrow \tilde{f} & \\ A \times B & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Proposition 1.5.1. *Le produit tensoriel $A \otimes B$ existe et est unique à unique isomorphisme près.*

Démonstration. On démontre d'abord l'unicité : si (T_1, j_1) et (T_2, j_2) sont deux candidats au rôle de produit tensoriel, la propriété universelle appliquée aux deux implique l'existence et l'unicité de deux applications linéaires $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$ et $\psi : T_2 \rightarrow T_1$ telles que $j_2 = \varphi \circ j_1$ et $j_1 = \psi \circ j_2$:



En appliquant deux fois encore la propriété universelle, on a $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{T_1}$ and $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{T_2}$, et donc le produit tensoriel est unique à unique isomorphisme près.

On prouve maintenant l'existence du produit tensoriel, ce qui nécessite l'axiome du choix dans les cas de dimension infinie : on choisit une base $(e_i)_{i \in I}$ de A et une base $(f_j)_{j \in J}$ de B . L'espace vectoriel $A \otimes B$ est alors défini comme l'espace librement engendré par les symboles c_{ij} , $i \in I$, $j \in J$. Plus précisément,

$$A \otimes B := \left\{ \sum_{i \in I, j \in J} \lambda_{ij} c_{ij}, \lambda_{ij} \in \mathbf{k}, \lambda_{ij} = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de couples } (i, j) \right\},$$

et on définit l'application bilinéaire j par $j(e_i, e_j) = c_{ij}$, soit encore $c_{ij} = e_i \otimes e_j$. Pour toute application bilinéaire $f : A \times B \rightarrow C$ (où C est un autre \mathbf{k} -espace vectoriel), l'application linéaire $\tilde{f} : A \otimes B \rightarrow C$ uniquement déterminée par $\tilde{f}(c_{ij}) = f(e_i, e_j)$ est la seule telle que $\tilde{f} \circ j = f$. L'espace $A \otimes B$ construit de cette manière vérifie donc la propriété universelle. \square

Les éléments $a \otimes b \in A \otimes B$, avec $a \in A$ et $b \in B$, engendrent $A \otimes B$. Les produits tensoriels $\mathbf{k} \otimes A$ et $A \otimes \mathbf{k}$ sont canoniquement identifiés avec A via $1 \otimes a \simeq a \otimes 1 \simeq a$ pour tout $a \in A$. Considérant trois espaces vectoriels A , B et C , l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} \alpha : (A \otimes B) \otimes C &\xrightarrow{\sim} A \otimes (B \otimes C) \\ (a \otimes b) \otimes c &\longmapsto a \otimes (b \otimes c). \end{aligned}$$

est un isomorphisme. On notera $A \otimes B \otimes C$ l'une ou l'autre de ces deux versions du produit tensoriel itéré.

Soient A et B deux \mathbf{k} -espaces vectoriels. La volte $\tau : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$ définie par $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ est un isomorphisme linéaire. Ceci se généralise à une collection finie (A_1, \dots, A_n) d'espaces

vectoriels : toute permutation $\sigma \in S_n$ induit un isomorphisme linéaire

$$\begin{aligned} \tau_\sigma : A_1 \otimes \cdots \otimes A_n &\xrightarrow{\sim} A_{\sigma_1^{-1}} \otimes \cdots \otimes A_{\sigma_n^{-1}} \\ a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\longmapsto a_{\sigma_1^{-1}} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma_n^{-1}}, \end{aligned}$$

et on a $\tau_{\omega\sigma} = \tau_\omega\tau_\sigma$ for any $\omega, \sigma \in S_n$. Ceci induit une action du groupe symétrique S_n sur la somme directe $\bigoplus_{\sigma \in S_n} A_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes A_{\sigma_n}$. Le quotient sous l'action de S_n est appelé *produit tensoriel non-ordonné* de A_1, \dots, A_n , que l'on note

$$\bigotimes_{j \in \{1, \dots, n\}} A_j.$$

Proposition 1.5.2. *Soient A_1, B_1, A_2, B_2 des \mathbf{k} -espaces vectoriels. Il existe une application linéaire injective naturelle :*

$$\tilde{j} : \mathcal{L}(A_1, A_2) \otimes \mathcal{L}(B_1, B_2) \longrightarrow \mathcal{L}(A_1 \otimes B_1, A_2 \otimes B_2)$$

donnée par

$$(\tilde{j}(f \otimes g))(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b).$$

Lorsque les espaces vectoriels sont de dimension finie, ce plongement est un isomorphisme.

Démonstration. L'espace $\mathcal{L}(A_1 \otimes B_1, A_2 \otimes B_2)$ muni de l'application bilinéaire :

$$\begin{aligned} j : \mathcal{L}(A_1, A_2) \times \mathcal{L}(B_1, B_2) &\longrightarrow \mathcal{L}(A_1 \otimes B_1, A_2 \otimes B_2) \\ (f, g) &\longrightarrow (a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)) \end{aligned}$$

induit \tilde{j} par propriété universelle. Cette application \tilde{j} est manifestement injective. En effet si $\tilde{j}(\sum_i f_i \otimes g_i) = 0$ on a $\sum_i f_i(a) \otimes g_i(b) = 0$ pour tout $a \in A_1$ et $b \in B_1$, et ce pour tout i . On peut supposer pour a fixé, quitte à réduire le nombre d'indices i , que les $f_i(a)$ forment une partie libre de A_2 . On obtient alors $f_i(a) \otimes g_i(b) = 0$ pour tout $b \in B_1$, et donc $g_i = 0$.

Dans le cas de la dimension finie, la bijectivité peut être montrée soit par comptage des dimensions, soit en prouvant que $\mathcal{L}(A_1 \otimes B_1, A_2 \otimes B_2)$ muni de l'application linéaire j vérifie la propriété universelle. Les détails sont laissés au lecteur. \square

1.6. Dualité.

Définition 1.6.1. *Pour tout \mathbf{k} -espace vectoriel V , le **dual** V^* est défini comme*

$$V^* := \mathcal{L}(V, \mathbf{k}).$$

Pour toute application linéaire $\varphi : V \rightarrow W$ où W est un autre espace vectoriel, la **transposée** ${}^t\varphi : W^* \rightarrow V^*$ de φ est définie par ${}^t\varphi(\alpha) := \alpha \circ \varphi$, c'est-à-dire que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{\varphi} & W \\
& \searrow & \downarrow \alpha \\
& & \mathbf{k}
\end{array}$$

${}^t\varphi(\alpha)$

Proposition 1.6.1. *Il y a un plongement canonique $\Lambda : V \rightarrow V^{**}$, qui est un isomorphisme si et seulement si V est de dimension finie.*

Démonstration. Tout $v \in V$ induit $\Lambda(v) = \tilde{v} \in V^{**}$ défini par $\tilde{v}(\xi) := \xi(v)$ pour tout $\xi \in V^*$. L'application linéaire $\Lambda : V \rightarrow V^{**}$ ainsi définie est clairement injective. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de V . Toute combinaison linéaire finie $\sum_i \lambda_i \tilde{e}_i$ appartient à V^{**} . Pour tout $i \in I$, soit $\varepsilon_i \in V^*$ définie par $\varepsilon_i(e_j) = \delta_i^j$. Si V est de dimension finie, alors I est fini, et tout $\mathbf{v} \in V^{**}$ peut s'écrire comme :

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in I} \mathbf{v}(\varepsilon_i) \tilde{e}_i,$$

d'où $\mathbf{v} = \tilde{v} = \Lambda(v)$ avec $v := \sum_{i \in I} \mathbf{v}(\varepsilon_i) e_i$. Si I est infini, la famille

$$F := \{(\varepsilon_i)_{i \in I}, \xi\}$$

est libre dans V^* , où $\xi \in V^*$ est défini par $\xi(e_i) = 1$ pour tout $i \in I$. On peut compléter F en une base de V^* . Soit $\beta \in V^{**}$ défini par $\beta(\xi) = 1$ et $\beta(\eta) = 0$ pour tout autre η dans cette base. En particulier, $\beta(\varepsilon_i) = 0$ pour tout $i \in I$, donc β ne peut pas s'écrire sous la forme $\Lambda(v)$ avec $v \in V$. \square

Remarque 1.6.1. Lorsque V est de dimension finie avec un choix de base $(e_i)_{i \in I}$, la famille $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ définie ci-dessus est une base de V^* , la *base duale*, caractérisée par $\varepsilon_i(e_j) = \delta_i^j$.

1.7. Espaces vectoriels gradués. Un espace vectoriel est \mathbb{N}_0 -gradués si :

$$(1.7.1) \quad V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n.$$

Le \mathbf{k} -espace vectoriel V_n est la $n^{\text{ième}}$ composante homogène de V . On s'intéresse particulièrement au cas où les composantes homogènes sont de dimension finie. La *série de Poincaré-Hilbert* de V est donnée par :

$$(1.7.2) \quad f_V(x) := \sum_{n \geq 0} (\dim V_n) x^n.$$

Le *dual gradué* de V est défini par :

$$(1.7.3) \quad V^\circ := \bigoplus_{n \geq 0} (V_n)^*.$$

Proposition 1.7.1. *Le dual gradué V° est un sous-espace du dual V^* , et le bidual gradué $V^{\circ\circ}$ est canoniquement isomorphe à V comme espace vectoriel gradué si et seulement si toutes les composantes homogènes sont de dimension finie.*

Démonstration. Facile et laissé au lecteur à titre d'exercice. \square

Définition 1.7.1. *Un espace vectoriel \mathbb{N}_0 -gradu e V est **connexe** si $\dim V_0 = 1$.*

1.8. Filtrations et gradu e associ e.

Définition 1.8.1. *Soit V un espace vectoriel sur un corps \mathbf{k} . Une \mathbb{N}_0 -filtration croissante est une collection $(V^n)_{n \geq 0}$ de \mathbf{k} -espaces vectoriels, avec $V^j \subset V^{j+1}$ pour tout $j \geq 0$ et*

$$\bigcup_{j \geq 0} V^j = V.$$

On conviendra de poser $V_k = \{0\}$ pour tout entier $k \leq -1$.

Définition 1.8.2. *Soit V un espace \mathbb{N}_0 -filtr e. Le **gradu e associ e de V** est donn e par*

$$\text{Gr } V := \bigoplus_{j \geq 0} V^j / V^{j-1}.$$

Il existe un isomorphisme linéaire canonique $\pi_V : V \rightarrow \text{Gr } V$ défini comme suit : $\pi(x)$ est l'image de x par la projection $\pi_n : V^n \twoheadrightarrow V^n / V^{n-1}$, où n est ici le degré de x , c'est-à-dire :

$$(1.8.1) \quad n = |x| = \inf \{j \in \mathbb{N}_0, x \in V^j\}.$$

Proposition 1.8.1. *Soient V et W deux espaces vectoriels munis d'une filtration croissante. Toute application linéaire $\varphi : V \rightarrow W$ telle que $\varphi(V^n) \subset W^n$ pour tout $n \geq 0$ induit une unique application linéaire $\text{Gr } \varphi : \text{Gr } V \rightarrow \text{Gr } W$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{Gr } V & \xrightarrow{\text{Gr } \varphi} & \text{Gr } W \end{array}$$

De plus, la correspondance Gr ainsi définie est un foncteur covariant : pour trois espaces vectoriels filtr es V, W, X et deux applications linéaires $\varphi : V \rightarrow W$ et $\psi : W \rightarrow X$, on a

$$(1.8.2) \quad \text{Gr}(\psi \circ \varphi) = \text{Gr } \psi \circ \text{Gr } \varphi.$$

Exercices pour le Chapitre 1.

Exercice 1.1. Soit M un monoïde. On suppose que tout élément $x \in M$ admet un inverse à droite x'' , c'est-à-dire tel que $xx'' = e$, et un inverse à gauche x' , c'est-à-dire tel que $x'x = e$. Montrer que l'inverse à gauche et l'inverse à droite coïncident, et donc que M est un groupe.

Exercice 1.2. Soient A et B deux ensembles. Décrire une bijection naturelle de $A \times B$ sur $B \times A$. En déduire que la multiplication des nombres naturels est commutative.

Exercice 1.3. Soient A, B et C trois ensembles. Décrire une bijection naturelle de $(A \times B) \times C$ sur $A \times (B \times C)$. En déduire que la multiplication des nombres naturels est associative.

Exercice 1.4. Imaginez deux exercices dans l'esprit des exercices 1.2 et 1.3, pour montrer la commutativité et l'associativité de l'addition des nombres naturels.

Exercice 1.5. Soit R un anneau intègre. Montrer que $R[X]$ est aussi un anneau intègre. Même question pour l'anneau $R[[X]]$ des séries formelles.

Exercice 1.6. Soit R un anneau (non nécessairement commutatif), et soit $R[[X]]$ son anneau de séries formelles. Définir une distance sur $R[[X]]$ par la formule :

$$(1.8.3) \quad d(f, g) := 2^{-\text{val}(f-g)}.$$

Montrer que d est une distance, faisant de $R[[X]]$ un espace métrique, et montrer que cet espace métrique est complet.

Exercice 1.7. Soit k un corps. Montrer que l'anneau $k[X^{-1}, X]$ des séries de Laurent à coefficients dans k est un corps.

Exercice 1.8. Montrer que la caractéristique d'un corps est soit nulle, soit égale à un nombre premier (*Indication* : considérer le noyau de la multiplication par un nombre premier p : que peut-on en dire ?).

Exercice 1.9. Montrer que les opérations décrites à la Définition 1.4.2 sont bien définies et munissent le quotient V/W d'une structure de k -espace vectoriel.

Exercice 1.10. Soit $(V_i)_{i \in I}$ une collection de k -espaces vectoriels, indexée par un ensemble I . La *somme directe* :

$$S := \bigoplus_{i \in I} V_i$$

est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles *finies* $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \in k$ et $v_i \in V_i$. Ici, *finies* signifie que les λ_i sont tous nuls sauf un nombre fini.

- Montrer que S est un k -espace vectoriel, et montrer que la somme directe résout la propriété universelle suivante : pour tout espace vectoriel W et pour toute collection $(f_i)_{i \in I}$ d'applications linéaires $f_i : V_i \rightarrow W$, il existe une unique application linéaire $f : S \rightarrow W$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{f_i} & W \\ j_i \downarrow & \nearrow f & \\ S & & \end{array}$$

Décrire les applications j_i et montrer qu'elles sont injectives.

- Montrer que la somme directe, abstraitement définie par la propriété universelle ci-dessus, est unique à unique isomorphisme près.

Exercice 1.11. Soit $(V_i)_{i \in I}$ une collection de k -espaces vectoriels indexée par un ensemble I . Le *produit direct* :

$$P := \prod_{i \in I} V_i$$

est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \in k$ and $v_i \in V_i$. Contrairement à la somme directe, aucune condition de finitude n'est requise ici.

- Montrer que P est un \mathbf{k} -espace vectoriel, et montrer que le produit direct résout la propriété universelle suivante : pour tout espace vectoriel W et pour toute collection $(g_i)_{i \in I}$ d'applications linéaires $g_i : W \rightarrow V_i$, il existe une unique application linéaire $g : W \rightarrow P$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xleftarrow{g_i} & W \\ \pi_i \uparrow & & \swarrow \pi_i \\ P & & \end{array}$$

Décrire les applications π_i et montrer qu'elles sont surjectives.

- Montrer que le produit direct, abstraitement défini par la propriété universelle ci-dessus, est unique à unique isomorphisme près.

Exercice 1.12. montrer la Proposition 1.7.1.

Exercice 1.13. Soit $(V_i)_{i \in I}$ une collection de \mathbf{k} -espaces vectoriels, avec I fini. Définir le produit tensoriel non-ordonné :

$$T := \bigotimes_{i \in I} V_i$$

au moyen d'une propriété universelle (*Indication* : utiliser le produit $P := \prod_{i \in I} V_i$ et des applications multilinéaires). Montrer l'unicité à unique isomorphisme près, et montrer que cette définition concrète est cohérente avec la définition donnée au Paragraphe 1.5.

2. UNE INTRODUCTION AUX ALGÈBRES DE HOPF

2.1. Algèbres et modules.

Définition 2.1.1. Soit R un anneau commutatif. Une R -algèbre est un anneau \mathcal{A} , pas nécessairement commutatif ni unitaire, muni d'une structure de R -module compatible, en ce sens que l'on a :

$$(2.1.1) \quad \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

pour tout $\lambda \in R$ et $x, y \in \mathcal{A}$.

Si \mathcal{A} est unitaire, on note $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ l'unité, ou simplement $\mathbf{1}$, à ne pas confondre avec l'unité 1 de l'anneau de base R .

Proposition 2.1.1. Soit \mathbf{k} un corps, et soit \mathcal{A} une \mathbf{k} -algèbre. Alors

- (1) \mathcal{A} est un \mathbf{k} -espace vectoriel.
- (2) Le produit induit naturellement une application linéaire $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ via $m(a \otimes b) := ab$.
- (3) Lorsque \mathcal{A} est unitaire, l'application $u : \mathbf{k} \rightarrow \mathcal{A}$ définie par $u(\lambda) := \lambda \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ est linéaire.

(4) L'associativité du produit et la propriété d'unité pour $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ sont respectivement équivalentes à la commutativité des deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{m \otimes \text{Id}_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\
 \text{Id}_{\mathcal{A}} \otimes m \downarrow & & \downarrow m \\
 \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{m} & \mathcal{A}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 \mathbf{k} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{u \otimes \text{Id}_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{\text{Id}_{\mathcal{A}} \otimes u} & \mathcal{A} \otimes \mathbf{k} \\
 & \searrow \sim & \downarrow m & \swarrow \sim & \\
 & & \mathcal{A} & &
 \end{array}$$

Démonstration. Immédiat et laissé au lecteur. \square

Lest idéaux à gauche, à droite et bilatères sont définis de la même manière pour une R -algèbre \mathcal{A} que pour un anneau, avec la propriété supplémentaire d'être des R -sous-modules de \mathcal{A} . Une sous-algèbre de \mathcal{A} est un sous-anneau qui est aussi un R -sous-module.

Exemple 2.1.1. Soit V un \mathbf{k} -espace vectoriel. L'algèbre tensorielle de V est définie par :

$$(2.1.2) \qquad T(V) := \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n},$$

with $V^{\otimes 0} = \mathbf{k}$, $V^{\otimes 1} = V$, $V^{\otimes 2} = V \otimes V$, etc. Le produit est donné par la concaténation :

$$(2.1.3) \qquad m(v_1 \cdot v_2 \cdots v_p \otimes v_{p+1} \cdot v_{p+2} \cdots v_{p+q}) := v_1 \cdot v_2 \cdots v_{p+q}.$$

Nous notons ici avec un point \cdot le produit interne à $T(V)$, à ne pas confondre avec le produit tensoriel "externe" \otimes dans $T(V) \otimes T(V)$. L'unité est le mot vide $\mathbf{1} \in \mathbf{k} \simeq V^{\otimes 0}$.

Proposition 2.1.2. Soit V un \mathbf{k} -espace vectoriel. L'algèbre tensorielle $T(V)$ est l'algèbre associative unitaire libre engendrée par V .

Démonstration. On doit montrer la propriété universelle suivante : pour toute \mathbf{k} -algèbre unitaire \mathcal{A} et pour toute application linéaire $f : V \rightarrow \mathcal{A}$, il existe un unique morphisme d'algèbres unitaires $\tilde{f} : T(V) \rightarrow \mathcal{A}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 T(V) & & \\
 \uparrow j & \searrow \tilde{f} & \\
 V & \xrightarrow{f} & \mathcal{A}
 \end{array}$$

où j est le plongement canonique de V dans $T(V)$. L'application \tilde{f} est alors manifestement définie par :

$$\tilde{f}(v_1 \cdots v_p) := f(v_1) \cdots f(v_p),$$

où le produit est le produit de \mathcal{A} dans le membre de droite. Pour $p = 0$ ceci se réduit bien évidemment à $\tilde{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$. \square

Exemple 2.1.2. Soit V un \mathbf{k} -espace vectoriel. Soit J l'idéal bilatère engendré par l'ensemble $\{x \cdot y - y \cdot x, x, y \in V\}$, c'est-à-dire l'intersection de tous les idéaux bilatères contenant cet ensemble. L'algèbre symétrique de V est définie comme le quotient $S(V) = T(V)/J$.

Proposition 2.1.3. $S(V)$ est l'algèbre commutative unitaire libre engendrée par V .

Démonstration. Montrons d'abord que $S(V)$ est une algèbre commutative. Soient $v = x_1 \cdots x_p$ et $w = y_1 \cdots y_q$. Il faut montrer que $[v, w] = v \cdot w - w \cdot v$ appartient à J . On le voit facilement par récurrence sur $p + q$: les cas initiaux $p + q = 1$ et $p + q = 2$ sont évidents. Si $p + q \geq 3$, alors $p \geq 2$ ou $q \geq 2$. Supposons ici $p \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned} [v, w] &= x_1 \cdots x_p \cdot y_1 \cdots y_q - y_1 \cdots y_q \cdot x_1 \cdots x_p \\ &= x_1 \cdots x_p \cdot y_1 \cdots y_q - x_1 \cdot y_1 \cdots y_q \cdot x_2 \cdots x_p \\ &\quad + x_1 \cdot y_1 \cdots y_q \cdot x_2 \cdots x_p - y_1 \cdots y_q \cdot x_1 \cdots x_p \\ &= x_1 \cdot [x_2 \cdots x_p, y_1 \cdots y_q] + [x_1, y_1 \cdots y_q] \cdot x_2 \cdots x_p \end{aligned}$$

appartient à J par hypothèse de récurrence. Le cas $q \geq 2$ est traité de manière analogue.

Montrons maintenant la propriété universelle : soit $f : V \rightarrow \mathcal{A}$ une application linéaire, et soit $\tilde{f} : T(V) \rightarrow \mathcal{A}$ l'unique prolongement de f en un morphisme d'algèbres unitaires. Comme \mathcal{A} est commutative, on a de manière évidente $\tilde{f}|_J = 0$. Donc \tilde{f} se factorise à travers $S(V) = T(V)/J$, induisant un morphisme d'algèbres commutatives unitaires $\bar{f} : S(V) \rightarrow \mathcal{A}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S(V) & & \\ \bar{j} \uparrow & \searrow \bar{f} & \\ V & \xrightarrow{f} & \mathcal{A} \end{array}$$

Ici $\bar{j} = \pi \circ j$, et $\pi : T(V) \twoheadrightarrow V$ est la projection canonique. L'application \bar{f} ainsi construite est unique car $\bar{j}(V)$ engendre l'algèbre $S(V)$. \square

Définition 2.1.2. Soit \mathcal{A} une algèbre unitaire sur le corps \mathbf{k} . Un **module à gauche** sur \mathcal{A} est un \mathbf{k} -espace vectoriel M muni d'une application linéaire

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{A} \otimes M &\longrightarrow M \\ a \otimes x &\longmapsto ax, \end{aligned}$$

telle que $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}x = x$ pour tout $x \in M$, et $a(by) = (ab)y$ pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et $y \in M$. Cela revient à la commutativité des deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes M & \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{A}} \otimes \alpha} & \mathcal{A} \otimes M \\
m_{\mathcal{A}} \otimes \text{Id}_M \downarrow & & \downarrow \alpha \\
\mathcal{A} \otimes M & \xrightarrow{\alpha} & M
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbf{k} \otimes M & \xrightarrow{u \otimes \text{Id}_M} & \mathcal{A} \otimes M \\
& \searrow \sim & \downarrow \alpha \\
& & M
\end{array}$$

Les \mathcal{A} -modules à droite sont définis de la même manière, en remplaçant $\mathcal{A} \otimes M$ par $M \otimes \mathcal{A}$.

Un \mathcal{A} -module à gauche M est *simple* s'il ne contient aucun sous-module à part $\{0\}$ et M . Un module à gauche est dit *semi-simple* s'il peut s'écrire comme somme directe de modules simples.

2.2. Cogèbres et comodules.

Définition 2.2.1. Soit \mathbf{k} un corps. Une \mathbf{k} -cogèbre est un \mathbf{k} -espace vectoriel \mathcal{C} muni d'une application linéaire $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ **co-associative**, c'est-à-dire telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{\Delta \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}}} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \\
\text{Id}_{\mathcal{C}} \otimes \Delta \uparrow & & \uparrow \Delta \\
\mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{\Delta} & \mathcal{C}
\end{array}$$

La cogèbre est **co-unitaire** si de plus il existe une **co-unité** $\varepsilon : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{k}$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{k} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{\varepsilon \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}}} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{C}} \otimes \varepsilon} & \mathcal{C} \otimes \mathbf{k} \\
& \searrow \sim & \uparrow \Delta & \swarrow \sim & \\
& & \mathcal{C} & &
\end{array}$$

Une cogèbre est **co-commutative** si de plus $\tau \circ \Delta = \Delta$, où $\tau : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ est la *volte*, définie par $\tau(x \otimes y) := y \otimes x$.

Définition 2.2.2. Soit \mathcal{C} une \mathbf{k} -cogèbre. Un sous-espace vectoriel $J \subseteq \mathcal{C}$ est appelé :

- une **sous-cogèbre** si $\Delta(J) \subseteq J \otimes J$,
- un **co-idéal à gauche** si $\Delta(J) \subseteq \mathcal{C} \otimes J$,
- un **co-idéal à droite** si $\Delta(J) \subseteq J \otimes \mathcal{C}$,
- **co-idéal bilatère** si $\Delta(J) \subseteq \mathcal{C} \otimes J + J \otimes \mathcal{C}$.

Proposition 2.2.1. Soit \mathbf{k} un corps. Le dual \mathcal{C}^* d'une \mathbf{k} -cogèbre est co-unitaire est une \mathbf{k} -algèbre unitaire. le produit (resp. l'unité) est donné par la transposée du coproduit (resp. de la co-unité).

Démonstration. On a $\tilde{m} = {}^t \Delta = (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C})^* \rightarrow \mathcal{C}^*$. le produit m est donné par la restriction de \tilde{m} à $\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{C}^*$ (qui est contenu in $(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C})^*$, et ceci strictement si \mathcal{C} est de dimension infinie).

La preuve de l'associativité est facile et laissée au lecteur, de même que les axiomes de l'unité pour la transposée de la co-unité $u = {}^t\varepsilon : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathbf{k}$. \square

Pour tout élément x d'une cogèbre \mathcal{C} , le coproduit $\Delta x \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ est une somme finie d'éléments indécomposables. Ceci permet l'emploi de la *notation de Sweedler* :

$$(2.2.1) \quad \Delta x = \sum_{(x)} x_1 \otimes x_2.$$

L'équation (2.2.1) doit être maniée avec précaution, car la décomposition en indécomposables n'est pas unique. Elle peut toutefois être fort utile dans certains calculs. Par exemple, le coproduit itéré s'écrit avec la notation de Sweedler :

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{Id})\Delta x &= \sum_{(x)} x_{1:1} \otimes x_{1:2} \otimes x_2, \\ (\text{Id} \otimes \Delta)\Delta x &= \sum_{(x)} x_1 \otimes x_{2:1} \otimes x_{2:2}. \end{aligned}$$

Les deux expressions sont égales par co-associativité, et s'écrivent alors plus simplement :

$$(2.2.2) \quad (\Delta \otimes \text{Id})\Delta x = (\text{Id} \otimes \Delta)\Delta x = \sum_{(x)} x_1 \otimes x_2 \otimes x_3.$$

La propriété de co-commutativité $\tau \circ \Delta = \Delta$ se traduit dans la notation de Sweedler par :

$$(2.2.3) \quad \sum_{(x)} x_1 \otimes x_2 = \sum_{(x)} x_2 \otimes x_1.$$

Exemple 2.2.1 (cogèbre d'un ensemble). Soit E un ensemble, et soit \mathcal{C} l'espace vectoriel librement engendré par E :

$$\mathcal{C} := \left\{ \sum_{a \in E} \lambda_a a, \lambda_a = 0 \text{ sauf un nombre fini d'entre eux} \right\}$$

La comultiplication est définie par

$$(2.2.4) \quad \Delta \left(\sum_{a \in E} \lambda_a a \right) := \sum_{a \in E} \lambda_a a \otimes a.$$

la co-unité est donnée par $\varepsilon(a) = 1$ pour tout $a \in E$ et étendue linéairement. On peut noter qu'on a $\Delta a = a \otimes a$ pour tout $a \in E$.

Exemple 2.2.2 (cogèbre tensorielle). Soit V un espace vectoriel sur un corps \mathbf{k} . La cogèbre tensorielle est définie par :

$$(2.2.5) \quad T^c(V) := \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$$

Elle est isomorphe à l'algèbre tensorielle $T(V)$ comme espace vectoriel gradué. La comultiplication est donnée par la **déconcaténation** :

$$(2.2.6) \quad \Delta(v_1 \cdots v_n) := \sum_{p=0}^n v_1 \cdots v_p \otimes v_{p+1} \cdots v_n.$$

Définition 2.2.3. Soit \mathbf{k} un corps. Un **comodule à gauche** sur la \mathbf{k} -cogèbre co-unitaire \mathcal{C} est un \mathbf{k} -espace vectoriel M muni d'une **coaction** $\Phi : M \rightarrow \mathcal{C} \otimes M$ telle que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes M & \xleftarrow{\Delta \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}}} & \mathcal{C} \otimes M \\ \text{Id}_{\mathcal{C}} \otimes \Phi \uparrow & & \uparrow \Phi \\ \mathcal{C} \otimes M & \xleftarrow{\Phi} & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{k} \otimes M & \xleftarrow{\varepsilon \otimes \text{Id}_M} & \mathcal{C} \otimes M \\ & \searrow \sim & \uparrow \Phi \\ & & M \end{array}$$

La notion de **comodule à droite** est définie de manière semblable, avec $M \otimes \mathcal{C}$ à la place de $\mathcal{C} \otimes M$.

La notation de Sweedler pour une coaction est :

$$(2.2.7) \quad \Phi(m) = \sum_{(m)} m_1 \otimes m_0.$$

On a alors :

$$(2.2.8) \quad (\Delta \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}})\Phi(m) = (\text{Id}_{\mathcal{C}} \otimes \Phi)\Phi(m) = \sum_{(m)} m_1 \otimes m_2 \otimes m_0.$$

Théorème 2.2.1 (Théorème fondamental de structure pour les comodules). Soit M un comodule à gauche sur une cogèbre co-unitaire \mathcal{C} . Pour tout $m \in M$, le sous-comodule engendré par m est de dimension finie.

Démonstration. On peut trouver une collection finie c_1, \dots, c_s d'éléments linéairement indépendants de \mathcal{C} et une collection m_1, \dots, m_s d'éléments de M tels que :

$$\Phi(m) = \sum_{i=1}^s c_i \otimes m_i.$$

Soit N le sous-espace vectoriel de M engendré par m_1, \dots, m_s . En utilisant l'axiome de la co-unité on voit que m appartient à N . En effet,

$$m = (\varepsilon \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}}) \circ \Phi(m) = \sum_{i=1}^s \varepsilon(c_i) m_i.$$

Montrons maintenant que N est un sous-comodule de M . On choisit des formes linéaires f_1, \dots, f_s de \mathcal{C} telles que $f_i(c_j) = \delta_i^j$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 \Phi(m_i) &= (f_i \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}} \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}})(c_i \otimes \Phi(m_i)) \\
 &= (f_i \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}} \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}}) \left(\sum_{j=1}^s c_j \otimes \Phi(m_j) \right) \\
 &= (f_i \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}} \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}}) \circ (\text{Id}_{\mathcal{C}} \otimes \Phi) \circ \Phi(m) \\
 &= (f_i \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}} \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}}) \circ (\Delta \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}}) \circ \Phi(m) \\
 &= (f_i \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}} \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}}) \circ (\Delta \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}}) \left(\sum_{j=1}^s c_j \otimes m_j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^s (f_i \otimes \text{Id}_{\mathcal{C}})(\Delta c_j) \otimes m_j.
 \end{aligned}$$

Donc $\Phi(m_i) \in \mathcal{C} \otimes N$, ce qui montre le Théorème 2.2.1. \square

Corollaire 2.2.1. *Soit M un comodule à gauche sur une cogèbre co-unitaire \mathcal{C} . Tout sous-comodule à gauche engendré par un ensemble fini est de dimension finie.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que si $P = \{m_1, \dots, m_n\}$, le sous-comodule à gauche engendré par P est la somme des sous-comodules à gauche engendrés par m_j , et ensuite d'appliquer le théorème 2.2.1. \square

Théorème 2.2.2 (Théorème fondamental de structure pour les cogèbres). *Soit \mathbf{k} un corps, et soit \mathcal{C} une \mathbf{k} -cogèbre. La sous-cogèbre engendrée par un élément x est de dimension finie.*

Démonstration. La cogèbre \mathcal{C} est un comodule à gauche sur elle-même. Soit N le sous-comodule à gauche, c'est-à-dire ici le co-idéal à gauche, engendré par x . D'après le théorème 2.2.1, N est de dimension finie. L'orthogonal N^\perp est donc de codimension finie dans \mathcal{C}^* , égale à $\dim N$. Le dual \mathcal{C}^* est une algèbre (voir l'exercice 2.3), et N^\perp en est un idéal à gauche, voir l'exercice 2.4. L'espace quotient $E = \mathcal{C}^*/N^\perp$ est un module à gauche de dimension finie sur \mathcal{C}^* . Soit K l'annulateur de ce module à gauche. Comme noyau de la représentation associée $\rho : \mathcal{C}^* \rightarrow \text{End } E$, c'est un idéal bilatère de codimension finie.

Maintenant, l'orthogonal K^\top de K dans \mathcal{C} est une sous-cogèbre de \mathcal{C} , voir l'exercice 2.5. Elle est de plus de dimension finie, car $\dim K^\top = \text{codim } K^{\top\perp} \leq \text{codim } K$. Finalement $K \subset N^\perp$ entraîne $N^{\perp\top} \subset K^\top$, donc x appartient à K^\top . La sous-cogèbre engendrée par x est donc contenue dans la sous-cogèbre de dimension finie K^\top , ce qui prouve le théorème. \square

Définition 2.2.4. *Une cogèbre \mathcal{C} est dite **irréductible** si deux sous-cogèbres non nulles de \mathcal{C} ont toujours une intersection non nulle. une cogèbre **simple** est une cogèbre qui ne contient aucune sous-cogèbre différente de $\{0\}$ et d'elle-même. Une cogèbre \mathcal{C} est dite **pointée** si toute sous-cogèbre de \mathcal{C} est de dimension 1.*

Lemme 2.2.1. *Toute cogèbre \mathcal{C} contient une sous-cogèbre simple.*

Démonstration. D'après le théorème 2.2.2, on peut supposer que \mathcal{C} est de dimension finie, et le lemme est immédiat dans ce cas. \square

Proposition 2.2.2. *Une cogèbre \mathcal{C} est irréductible si et seulement si elle contient une unique sous-cogèbre simple.*

Démonstration. Supposons \mathcal{C} irréductible, et supposons que \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont deux sous-cogèbres simples. Leur intersection $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ n'est pas nulle et donc, par simplicité, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$. Inversement, supposons que \mathcal{E} est la seule sous-cogèbre simple de \mathcal{C} , et soit \mathcal{D} une sous-cogèbre. D'après le lemme 2.2.1 on a $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$, donc \mathcal{E} est incluse dans toute intersection de sous-cogèbres, ce qui montre que \mathcal{C} est irréductible. \square

2.3. Produit de convolution. Soit \mathcal{A} une algèbre et \mathcal{C} une cogèbre (sur le même corps \mathbf{k}). Alors il existe un produit associatif sur l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ des applications linéaires de \mathcal{C} to \mathcal{A} , appelé le *produit de convolution*. Il est donné par :

$$\varphi * \psi = m_{\mathcal{A}} \circ (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta_{\mathcal{C}}.$$

Le produit de convolution s'écrit en notation de Sweedler :

$$\varphi * \psi(x) = \sum_{(x)} \varphi(x_1) \psi(x_2).$$

L'associativité est une conséquence directe de l'associativité de \mathcal{A} et de la co-associativité de \mathcal{C} .

2.4. Intermezzo : algèbres de Lie. Soit \mathbf{k} un corps de caractéristique différente de 2. Une *algèbre de Lie* sur \mathbf{k} est un \mathbf{k} -espace vectoriel \mathfrak{g} muni d'une application bilinéaire $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ telle que :

- (1) Pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$ on a $[Y, X] = -[X, Y]$ (antisymétrie).
- (2) Pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ on a $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identité de Jacobi).

L'axiome (1) est équivalent à $[X, X] = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. En notant $\text{ad } X$ l'endomorphisme linéaire $Y \mapsto [X, Y] : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, l'identité de Jacobi est équivalente au fait que $\text{ad } X$ est une dérivation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , c'est-à-dire :

$$(2.4.1) \quad \text{ad } X.[Y, Z] = [\text{ad } X.Y, Z] + [Y, \text{ad } X.Z]$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

2.5. Bigèbres et algèbres de Hopf.

Définition 2.5.1. Une **bigèbre** (unitaire et co-unitaire) est un espace vectoriel \mathcal{H} muni d'une structure d'algèbre unitaire (m, u) et d'une structure de cogèbre co-unitaire (Δ, ε) compatibles entre elles. La condition de compatibilité s'exprime par le fait que Δ et ε sont des morphismes d'algèbres unitaires (ou, de manière équivalente, que m et u sont des morphismes de cogèbres co-unitaires). Ceci s'exprime par la commutativité des trois diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{\tau_{23}} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \\ \uparrow \Delta \otimes \Delta & & \downarrow m \otimes m \\ \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{m} & \mathcal{H} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} & k \otimes k \\ \downarrow m & & \downarrow \sim \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\varepsilon} & k \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \xleftarrow{u \otimes u} & k \otimes k \\ \uparrow \Delta & & \uparrow \sim \\ \mathcal{H} & \xleftarrow{u} & k \end{array}$$

Définition 2.5.2. Une algèbre de Hopf est une bigèbre \mathcal{H} munie d'une application linéaire $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ appelée **antipode**, telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{S \otimes I} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \\ & \nearrow \Delta & & & \searrow m \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\varepsilon} & k & \xrightarrow{u} & \mathcal{H} \\ & \searrow \Delta & & & \nearrow m \\ & & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{I \otimes S} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \end{array}$$

En notation de Sweedler, ceci se traduit par :

$$\sum_{(x)} S(x_1)x_2 = \sum_{(x)} x_1S(x_2) = (u \circ \varepsilon)(x).$$

Autrement dit l'antipode est l'inverse de l'identité $\text{Id}_{\mathcal{H}}$ pour le produit de convolution sur $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. L'unité pour la convolution est l'application $u \circ \varepsilon$.

Définition 2.5.3. Un **élément primitif** dans une bigèbre \mathcal{H} est un élément x tel que $\Delta x = x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x$. Un **élément de type groupe** est un élément x non nul tel que $\Delta x = x \otimes x$. On remarque que la notion d'élément de type groupe a un sens dans une cogèbre en général.

Un **bi-idéal** dans une bigèbre \mathcal{H} est un idéal bilatère qui est aussi un co-idéal bilatère. Un **idéal de Hopf** dans une algèbre de Hopf \mathcal{H} est un bi-idéal J tel que $S(J) \subset J$.

Exemple 2.5.1 (l'algèbre de Hopf d'un groupe). Soit G un groupe, et soit $\mathbf{k}G$ l'algèbre du groupe G (sur le corps \mathbf{k}). C'est par définition l'espace vectoriel librement engendré par les éléments de G : le produit de G s'étend de manière unique en une application bilinéaire de $\mathbf{k}G \times \mathbf{k}G$ dans $\mathbf{k}G$, ce qui donne une multiplication $m : \mathbf{k}G \otimes \mathbf{k}G \rightarrow \mathbf{k}G$, qui est associative. L'élément neutre de G fournit l'unité de m . L'espace $\mathbf{k}G$ est aussi muni de la structure de cogèbre de l'ensemble G définie dans l'exemple 2.2.1.

Proposition 2.5.1. *L'espace vectoriel $\mathbf{k}G$ muni des structures d'algèbre et de cogèbre définies ci-dessus est une algèbre de Hopf. L'antipode est donné par :*

$$S(g) = g^{-1}, g \in G.$$

Démonstration. La compatibilité du produit avec le coproduit est une conséquence immédiate du calcul suivant : pour tout $g, h \in G$ on a

$$\Delta(gh) = gh \otimes gh = (g \otimes g)(h \otimes h) = \Delta g \Delta h.$$

Maintenant $m(S \otimes I)\Delta(g) = g^{-1}g = e$ et de même pour $m(I \otimes S)\Delta(g)$. Mais $e = u \circ \varepsilon(g)$ pour tout $g \in G$, ainsi S est bien l'antipode. \square

Remarque 2.5.1. Si G est seulement un monoïde, la même construction aboutit à une structure de bigèbre sur $\mathbf{k}G$: la structure de Hopf (i.e. l'existence de l'antipode) reflète la structure de groupe (l'existence de l'inverse). On a $S^2 = I$ dans ce cas, mais l'involutivité de l'antipode n'est pas vraie en général pour une algèbre de Hopf.

Exemple 2.5.2 (Algèbres tensorielles). Nous décrivons ici une structure naturelle d'algèbre de Hopf cocommutative sur l'algèbre tensorielle $T(V)$ de tout espace vectoriel V . Le coproduit Δ est l'unique morphisme d'algèbres de $T(V)$ dans $T(V) \otimes T(V)$ tel que :

$$\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad \Delta(x) = x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x, \quad x \in V.$$

On définit la co-unité comme l'unique morphisme d'algèbres tel que $\varepsilon(\mathbf{1}) = 1$ and $\varepsilon|_V = 0$. On munit ainsi $T(V)$ d'une structure de bigèbre cocommutative. L'anti-automorphisme principal :

$$S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (-1)^n x_n \otimes \cdots \otimes x_1$$

vérifie les axiomes de l'antipode, donc $T(V)$ est une algèbre de Hopf. On a $S(x) = -x$ pour tout $x \in V$, donc $S * I(x) = I * S(x) = 0$. On conclut grâce au fait que V engendre $T(V)$ comme algèbre.

Exemple 2.5.3 (Algèbres enveloppantes). Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. Son algèbre enveloppante universelle est le quotient de $T(\mathfrak{g})$ par l'idéal J engendré par $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, $x, y \in \mathfrak{g}$.

Lemme 2.5.1. *J is a Hopf ideal, c'est-à-dire $\Delta(J) \subset \mathcal{H} \otimes J + J \otimes \mathcal{H}$ et $S(J) \subset J$.*

Démonstration. L'idéal J est engendré par des éléments primitifs (d'après la proposition 2.5.3 ci-dessous), et tout idéal engendré par des éléments primitifs est un idéal de Hopf (très facile et laissé au lecteur). \square

Le quotient d'une algèbre de Hopf par un idéal de Hopf est une algèbre de Hopf. Donc l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf cocommutative.

Nous résumons dans la proposition ci-dessous les propriétés essentielles de l'antipode :

Proposition 2.5.2. (cf. [31, Proposition 4.0.1]) *Soit \mathcal{H} une algèbre de Hopf avec multiplication m , comultiplication Δ , unité $u : 1 \mapsto \mathbf{1}$, co-unité ε and antipode S . Alors :*

$$(1) \quad S \circ u = u \text{ et } \varepsilon \circ S = \varepsilon.$$

(2) S est un antimorphisme d'algèbres et de cogèbres, c'est-à-dire que si τ désigne la volte on a :

$$m \circ (S \otimes S) \circ \tau = S \circ m, \quad \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta = \Delta \circ S.$$

(3) Si \mathcal{H} est commutative ou cocommutative, alors $S^2 = I$.

Pour une preuve détaillée, voir Chr. Kassel [20].

Proposition 2.5.3. (1) Si x est un élément primitif, alors $S(x) = -x$.

(2) Le sous-espace vectoriel $\text{Prim } \mathcal{H}$ des éléments primitifs de \mathcal{H} est une algèbre de Lie.

Démonstration. Si x est primitif, alors $(\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ \Delta(x) = 2\varepsilon(x)$. Par ailleurs, $(\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ \Delta(x) = \varepsilon(x)$, ce qui donne $\varepsilon(x) = 0$. Donc :

$$0 = (u \circ \varepsilon)(x) = m(S \otimes I)\Delta(x) = S(x) - x.$$

Soient maintenant x et y deux éléments primitifs de \mathcal{H} . On a alors

$$\begin{aligned} \Delta(xy - yx) &= (x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x)(y \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes y) - (y \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes y)(x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x) \\ &= (xy - yx) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (xy + yx) + x \otimes y + y \otimes x - y \otimes x - x \otimes y \\ &= (xy - yx) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (xy - yx). \end{aligned}$$

□

Exercices pour le chapitre 2.

Exercice 2.1. Soit \mathcal{A} une \mathbf{k} -algèbre, où \mathbf{k} est un corps. Un \mathcal{A} -module à gauche M est *simple* s'il ne contient aucun sous-module à part $\{0\}$ et M . Un \mathcal{A} -module à gauche M est *semi-simple* s'il est isomorphe à une somme directe finie de \mathcal{A} -modules à gauche simples. Montrer que, pour tout idéal à gauche maximal de \mathcal{A} , le quotient \mathcal{A}/J est un \mathcal{A} -module à gauche simple. Réciproquement, montrer que tout \mathcal{A} -module à gauche simple s'écrit \mathcal{A}/J où J est un idéal à gauche maximal.

Exercice 2.2. [Théorème de densité de Jacobson] Soit \mathcal{A} une \mathbf{k} -algèbre, où \mathbf{k} est un corps. Pour tout \mathcal{A} -module à gauche M on note \mathcal{A}'_M l'algèbre des endomorphismes de M en tant que \mathcal{A} -module, et on note \mathcal{A}''_M l'algèbre des endomorphismes de M en tant que \mathcal{A}'_M -module.

(1) Mettre en évidence une application linéaire naturelle $\iota : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}''_M$.

- (2) Soit M un \mathcal{A} -module à gauche semi-simple, et soit x_1, \dots, x_n une collection finie d'éléments de M . Montrer que pour tout $a'' \in \mathcal{A}''_M$, il existe un élément $a \in \mathcal{A}$ tel que $a''x_j = ax_j$ pour tout $j = 1, \dots, n$. (*Indication* : utiliser la semi-simplicité pour montrer que tout \mathcal{A} -sous-module de M est un \mathcal{A}''_M -sous-module.)

Exercice 2.3. Montrer que le dual \mathcal{C}^* d'une cogèbre co-unitaire \mathcal{C} est une algèbre unitaire, dont le produit (resp. l'unité) est la transposée du coproduit (resp. de la co-unité). Le dual \mathcal{A}^* d'une algèbre unitaire \mathcal{A} est-il une cogèbre co-unitaire ?

Exercice 2.4. Soit \mathcal{C} une cogèbre co-unitaire, et soit J un sous-espace vectoriel de \mathcal{C} . On note J^\perp l'orthogonal de J dans \mathcal{C}^* . Montrer que :

- J est un co-idéal bilatère si et seulement si J^\perp est une sous-algèbre de \mathcal{C}^* .
- J est un co-idéal à gauche si et seulement si J^\perp est un idéal à gauche de \mathcal{C}^* .
- J est un co-idéal à droite si et seulement si J^\perp est un idéal à droite de \mathcal{C}^* .
- J est une sous-cogèbre si et seulement si J^\perp est un idéal bilatère de \mathcal{C}^* .

Exercice 2.5. Soit \mathcal{C} une cogèbre co-unitaire, et soit K un sous-espace vectoriel de \mathcal{C}^* . On note K^\top l'orthogonal de K dans \mathcal{C} . Montrer que $K^\top = K^\perp \cap \mathcal{C}$ où K^\perp est l'orthogonal de K dans le bidual \mathcal{C}^{**} . Montrer que :

- K^\top est un co-idéal bilatère si et seulement si K est une sous-algèbre de \mathcal{C}^* .
- K^\top est un co-idéal à gauche si et seulement si K est un idéal à gauche de \mathcal{C}^* .
- K^\top est un co-idéal à droite si et seulement si K est un idéal à droite de \mathcal{C}^* .
- K^\top est une sous-cogèbre si et seulement si K est un idéal bilatère de \mathcal{C}^* .

Exercice 2.6. Soit \mathcal{A} une algèbre associative sur un corps \mathbf{k} , et soit $[a, b] := ab - ba$ pour tout $a, b \in \mathcal{A}$. Montrer que $(\mathcal{A}, [,])$ est une algèbre de Lie sur \mathbf{k} .

Exercice 2.7. [Algèbres pré-Lie] Un algèbre pré-Lie à gauche sur un corps \mathbf{k} est un \mathbf{k} -espace vectoriel \mathcal{A} muni d'une application bilinéaire $\triangleright : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ telle que :

$$(2.5.1) \quad a \triangleright (b \triangleright c) - (a \triangleright b) \triangleright c = b \triangleright (a \triangleright c) - (b \triangleright a) \triangleright c$$

pour tout $a, b, c \in \mathcal{A}$.

- Montrer que toute algèbre associative est une algèbre pre-Lie à gauche.
- Soit $(\mathcal{A}, \triangleright)$ une algèbre pré-Lie à gauche. Montrer que $[a, b] := a \triangleright b - b \triangleright a$ définit un crochet de Lie sur \mathcal{A} .

Exercice 2.8. [Algèbre de Hopf quadri-dimensionnelle de Sweedler] Soit $\tilde{\mathcal{H}}$ l'algèbre unitaire engendrée par les trois éléments g, g^{-1}, x avec la relation $gg^{-1} = g^{-1}g = \mathbf{1}$.

- (1) Montrer qu'il existe un unique coproduit $\Delta : \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ such that :

$$\Delta g = g \otimes g, \quad \Delta x = \mathbf{1} \otimes x + x \otimes g.$$

Montrer que l'algèbre unitaire $\tilde{\mathcal{H}}$ munie du coproduit Δ , de la co-unité donnée par

$$\varepsilon(g) = 1, \quad \varepsilon(x) = 0$$

et de l'antipode donné par

$$S(g) = g^{-1}, \quad S(x) = -xg^{-1}$$

est une algèbre de Hopf.

- (2) Montrer que l'idéal J engendré par x^2 , $g^2 - 1$ et $xg + gx$ est un idéal de Hopf. Montrer que le quotient $\mathcal{H} := \widetilde{\mathcal{H}}/J$ est de dimension quatre, de bases $(\mathbf{1}, x, g, gx)$, où l'on désigne toujours par g and x leurs images respectives dans le quotient.
- (3) Calculer le carré S^2 de l'antipode dans \mathcal{H} .

3. GRADUATIONS, FILTRATIONS, CONNEXITÉ

Nous introduisons la propriété cruciale de connexité pour les bigèbres. L'intérêt principal de cette notion réside dans la possibilité de mettre en place des procédures récursives dans les bigèbres connexes, la récurrence ayant lieu par rapport à une filtration (par exemple la filtration coradicale) ou une graduation. Un exemple important d'application de ces techniques est la construction récursive de l'antipode, qui "vient gratuitement", montrant que toute bigèbre connexe est aussi une algèbre de Hopf.

3.1. Bigèbres graduées connexes. Soit \mathbf{k} un corps de caractéristique zéro. On note $\mathbf{k}[[t]]$ l'anneau des séries formelles sur \mathbf{k} , et par $\mathbf{k}[t^{-1}, t]$ le corps des séries de Laurent sur \mathbf{k} . Un *algèbre de Hopf graduée* sur \mathbf{k} est un k -espace vectoriel gradué :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n$$

muni d'un produit $m : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, un coproduit $\Delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, une unité $u : k \rightarrow \mathcal{H}$, une co-unité $\varepsilon : \mathcal{H} \rightarrow k$ et un antipode $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ vérifiant les axiomes d'une algèbre de Hopf, et tel que :

$$(3.1.1) \quad \mathcal{H}_p \cdot \mathcal{H}_q \subset \mathcal{H}_{p+q}$$

$$(3.1.2) \quad \Delta(\mathcal{H}_n) \subset \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_q.$$

$$(3.1.3) \quad S(\mathcal{H}_n) \subset \mathcal{H}_n$$

Lemme 3.1.1. *L'unité $\mathbf{1}$ appartient à \mathcal{H}_0 , et $\varepsilon(\mathcal{H}_n) = \{0\}$ pour tout $n \geq 1$.*

*Démonstration.*² Supposons $\mathbf{1} = \sum_{j \geq 0} a_j$ avec $a_j \in \mathcal{H}_j$. L'égalité $\mathbf{1}a_0 = a_0\mathbf{1} = a_0$ entraîne

$$(3.1.4) \quad a_0 a_j = a_j a_0 = 0$$

2. D'après une note Mathoverflow par E. Wofsey.

pour tout $j \geq 1$. Maintenant $\mathbf{1.1} = \mathbf{1}$ implique :

$$\begin{aligned} a_0^2 &= a_0, \\ a_1 &= a_1 a_0 + a_0 a_1, \\ a_2 &= a_2 a_0 + a_1^2 + a_2 a_0, \\ &\vdots \\ a_n &= a_n a_0 + a_0 a_n + \sum_{i+j=n, i \neq 0, j \neq 0} a_i a_j, \end{aligned}$$

ce qui, au vu de (3.1.4), implique récursivement $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Donc $\mathbf{1} = a_0 \in \mathcal{H}_0$. La seconde assertion s'obtient de manière analogue par un argument de dualité. En effet, la transposée ${}^t\varepsilon$ de la co-unité est l'unité dans l'algèbre $\mathcal{H}^* = \prod_{j \geq 0} (\mathcal{H}_j)^*$. L'élément unité correspondant $e \in \mathcal{H}^*$ s'écrit comme une somme possiblement infinie :

$$e = \sum_{j \geq 0} e_j$$

avec $e_j \in (\mathcal{H}_j)^*$. Il faut maintenant prouver que e appartient à $(\mathcal{H}_0)^*$, c'est-à-dire $e_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. La fin de la preuve est semblable à celle de la première assertion, grâce à l'inclusion

$${}^t\Delta((\mathcal{H}_p)^* \otimes (\mathcal{H}_q)^*) \subset (\mathcal{H}_{p+q})^*.$$

□

Si on ne demande pas l'existence de l'antipode dans \mathcal{H} , on a la définition d'une *bigèbre graduée*. Dans une bigèbre graduée \mathcal{H} on considèrera la filtration croissante :

$$\mathcal{H}^n = \bigoplus_{p=0}^n \mathcal{H}_p.$$

Supposons de plus que \mathcal{H} est *connexe*, c'est-à-dire que \mathcal{H}_0 est de dimension un (voir la définition 1.7.1). Alors on a :

$$\text{Ker } \varepsilon = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{H}_n.$$

Proposition 3.1.1. *Pour tout $x \in \mathcal{H}^n, n \geq 1$,*

$$\Delta x = x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x + \tilde{\Delta} x, \quad \tilde{\Delta} x \in \bigoplus_{p+q=n, p \neq 0, q \neq 0} \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_q.$$

L'application $\tilde{\Delta}$ est coassociative sur $\text{Ker } \varepsilon$ et $\tilde{\Delta}_k = (I^{\otimes k-1} \otimes \tilde{\Delta})(I^{\otimes k-2} \otimes \tilde{\Delta}) \dots \tilde{\Delta}$ envoie \mathcal{H}^n dans $(\mathcal{H}^{n-k})^{\otimes k+1}$.

Démonstration. Grâce à la connexité on peut écrire :

$$\Delta x = u \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes v + \tilde{\Delta} x$$

avec $u, v \in \mathcal{H}$ et $\tilde{\Delta}x \in \text{Ker } \varepsilon \otimes \text{Ker } \varepsilon$. La propriété de co-unité nous dit alors que, avec $k \otimes \mathcal{H}$ et $\mathcal{H} \otimes k$ identifiés canoniquement à \mathcal{H} :

$$(3.1.5) \quad x = (\varepsilon \otimes I)(\Delta x) = v, \quad x = (I \otimes \varepsilon)(\Delta x) = u,$$

d'où $u = v = x$. On utilisera les deux variantes de la notation de Sweedler :

$$(3.1.6) \quad \Delta x = \sum_{(x)} x_1 \otimes x_2,$$

$$(3.1.7) \quad \tilde{\Delta}x = \sum_{(x)} x' \otimes x'',$$

la seconde étant valable uniquement sur $x \in \text{Ker } \varepsilon$. Si x est homogène de degré n on peut supposer que les composantes x_1, x_2, x', x'' dans les expressions ci-dessus sont aussi homogènes, et on a alors $|x_1| + |x_2| = n$ and $|x'| + |x''| = n$. On vérifie facilement :

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes I)\Delta(x) &= x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x \\ &+ \sum_{(x)} x' \otimes x'' \otimes 1 + x' \otimes 1 \otimes x'' + 1 \otimes x' \otimes x'' \\ &+ (\tilde{\Delta} \otimes I)\tilde{\Delta}(x) \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} (I \otimes \Delta)\Delta(x) &= x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x \\ &+ \sum_{(x)} x' \otimes x'' \otimes 1 + x' \otimes 1 \otimes x'' + 1 \otimes x' \otimes x'' \\ &+ (I \otimes \tilde{\Delta})\tilde{\Delta}(x), \end{aligned}$$

donc la co-associativité de $\tilde{\Delta}$ provient de celle de Δ . Enfin on voit facilement par récurrence sur k , que pour tout $x \in \mathcal{H}^n$ on peut écrire :

$$(3.1.8) \quad \tilde{\Delta}_k(x) = \sum_x x^{(1)} \otimes \dots \otimes x^{(k+1)},$$

avec $|x^{(j)}| \geq 1$. La graduation impose :

$$\sum_{j=1}^{k+1} |x^{(j)}| = n,$$

ainsi chaque $|x^{(j)}|$ est de degré au plus $n - k$. □

3.2. Bigèbres filtrées connexes. Une algèbre de Hopf filtrée sur un corps k est un k -espace vectoriel munie d'une filtration indexée par \mathbb{N} :

$$\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}^1 \subset \dots \subset \mathcal{H}^n \subset \dots, \quad \bigcup_n \mathcal{H}^n = \mathcal{H}$$

ainsi que d'un produit $m : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, un coproduit $\Delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, une unité $u : \mathbf{k} \rightarrow \mathcal{H}$, une co-unité $\varepsilon : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{k}$ et un antipode $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, le tout vérifiant les axiomes d'une algèbre de Hopf, et tel que :

$$(3.2.1) \quad \mathcal{H}^p \cdot \mathcal{H}^q \subset \mathcal{H}^{p+q}$$

$$(3.2.2) \quad \Delta(\mathcal{H}^n) \subset \sum_{p+q=n} \mathcal{H}^p \otimes \mathcal{H}^q$$

$$(3.2.3) \quad S(\mathcal{H}^n) \subset \mathcal{H}^n.$$

Sans l'existence de l'antipode on a une *bigèbre filtrée*. Pour tout $x \in \mathcal{H}$ on pose :

$$(3.2.4) \quad |x| := \min\{n \in \mathbb{N}, x \in \mathcal{H}^n\}.$$

Toute bigèbre ou algèbre de Hopf graduée est filtrée par la filtration canonique associée à la graduation :

$$(3.2.5) \quad \mathcal{H}^n := \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{H}_i,$$

et dans ce cas, si x est un élément homogène non nul, x est de degré n si et seulement si $|x| = n$.

Lemme 3.2.1. *L'unité d'une algèbre filtrée \mathcal{H} appartient à \mathcal{H}^0 .*

Démonstration. Considérons l'algèbre graduée associée $\text{Gr } \mathcal{H}$. En appliquant le foncteur Gr (voir le paragraphe 1.8 et aussi l'exercice 3.5 ci-dessous) au produit et à l'unité, on obtient le produit $\bar{m} = \text{Gr } m : \text{Gr } \mathcal{H} \otimes \text{Gr } \mathcal{H} \rightarrow \text{Gr } \mathcal{H}$ ainsi que l'unité $\bar{u} = \text{Gr } u : \mathbf{k} \rightarrow \text{Gr } \mathcal{H}$. Ici \mathbf{k} est concentré en degré zéro et coïncide avec $\text{Gr } \mathbf{k}$. Si l'unité u ne prend pas ses valeurs dans \mathcal{H}^0 , sa graduée associée \bar{u} ne prend pas ses valeurs dans $(\text{Gr } \mathcal{H})_0$, ce qui contredit le lemme 3.1.1. La conclusion découle alors de $\mathcal{H}^0 = (\text{Gr } \mathcal{H})_0$. \square

On dit que la bigèbre filtrée \mathcal{H} est connexe si \mathcal{H}^0 est de dimension un. Voici maintenant un analogue de la proposition 3.1.1 dans le cas filtré connexe, dont la preuve est assez similaire³ :

Proposition 3.2.1. *For any $x \in \mathcal{H}^n \cap \text{Ker } \varepsilon$, $n \geq 1$, we can write :*

$$(3.2.6) \quad \Delta x = x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x + \tilde{\Delta} x, \quad \tilde{\Delta} x \in \sum_{p+q=n, p \neq 0, q \neq 0} \mathcal{H}^p \otimes \mathcal{H}^q.$$

The map $\tilde{\Delta}$ is coassociative on $\text{Ker } \varepsilon$ and $\tilde{\Delta}_k = (I^{\otimes k-1} \otimes \tilde{\Delta})(I^{\otimes k-2} \otimes \tilde{\Delta}) \cdots \tilde{\Delta}$ sends \mathcal{H}^n into $(\mathcal{H}^{n-k})^{\otimes k+1}$.

Démonstration. On montre d'abord $\mathbf{1} \in \mathcal{H}^0$: supposons $|\mathbf{1}| = d > 0$. Alors

$$\Delta \mathbf{1} \in \sum_{k=0}^d \mathcal{H}^k \otimes \mathcal{H}^{d-k} \subset \mathcal{H}^d \otimes \mathcal{H}^{d-1} + \mathcal{H}^{d-1} \otimes \mathcal{H}^d,$$

3. La preuve ci-dessous m'a été suggérée par Darij Grinberg.

d'où $\pi \otimes \pi(\Delta \mathbf{1}) = 0$, où π est projection de \mathcal{H}^d sur $\mathcal{H}^d/\mathcal{H}^{d-1}$. De $\Delta \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ on déduit $\pi \otimes \pi(\Delta \mathbf{1}) = \pi(d) \otimes \pi(d) \neq 0$, ce qui aboutit à une contradiction. Ensuite, pour tout $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{H}^n) &\subset \mathcal{H}^0 \otimes \mathcal{H}^n + \mathcal{H}^n \otimes \mathcal{H}^0 + \sum_{p+q=n, p \neq 0, q \neq 0} \mathcal{H}^p \otimes \mathcal{H}^q \\ &\subset \mathcal{H}^0 \otimes \mathcal{H}^n + \mathcal{H}^n \otimes \mathcal{H}^0 + \sum_{p+q=n, p \neq 0, q \neq 0} \mathcal{H}_+^p \otimes \mathcal{H}_+^q, \end{aligned}$$

avec $\mathcal{H}_+^p := \mathcal{H}_p \cap \text{Ker } \varepsilon$, et de même pour \mathcal{H}_+^q . C'est une conséquence immédiate du fait que $\mathcal{H}^p = \mathcal{H}^0 + \mathcal{H}_+^p$ pour tout $p \geq 1$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathcal{H}_+^n$ on a (utilisant ici la connexité pour la première fois) :

$$(3.2.7) \quad \Delta x = u \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes v + \tilde{\Delta} x$$

avec $u, v \in \mathcal{H}^n$ et $\tilde{\Delta} x \in \mathcal{H}_+^1 \otimes \mathcal{H}_+^{n-1} + \dots + \mathcal{H}_+^{n-1} \otimes \mathcal{H}_+^1$. Utilisant la propriété de co-unité on obtient alors

$$x = (\varepsilon \otimes \text{Id})(\Delta x) = v + \varepsilon(u)\mathbf{1} = (\text{Id} \otimes \varepsilon)(\Delta x) = u + \varepsilon(v)\mathbf{1}.$$

d'où

$$(3.2.8) \quad \Delta x = u \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes v + \tilde{\Delta} x = x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x + (\varepsilon(u) + \varepsilon(v))\mathbf{1} + \tilde{\Delta} x.$$

Appliquant $\varepsilon \otimes \text{Id}$ à (3.2.8), et compte tenu de $\varepsilon(x) = 0$, on obtient $\varepsilon(u) + \varepsilon(v) = 0$, d'où

$$(3.2.9) \quad \Delta x = x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x + \tilde{\Delta} x.$$

La fin de la preuve est analogue au cas gradué (Proposition 3.1.1). \square

L'exemple principal de filtration est donné par la *filtration coradicale*, définie sur toute cogèbre co-unitaire \mathcal{C} de la manière suivante :

- $\mathcal{C}^0 = 0$ et \mathcal{C}^1 est le *coradical* de \mathcal{C} , c'est-à-dire la somme de ses sous-cogèbres simples (voir la définition 2.2.4). Cette notion est duale de la notion de *radical de Jacobson* d'une algèbre unitaire \mathcal{A} , qui est l'intersection de tous ses idéaux à gauche maximaux non triviaux.
- Les \mathcal{C}^n sont récursivement définis par :

$$(3.2.10) \quad \mathcal{C}^n := \{x \in \mathcal{C}, \Delta x \in \mathcal{C}^{n-1} \otimes \mathcal{C} + \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^0\}.$$

On peut montrer que la filtration coradicale est compatible avec la structure de cogèbre, c'est-à-dire $\Delta \mathcal{C}^n \subset \sum_{p+q=n} \mathcal{C}_p \otimes \mathcal{C}_q$. Le théorème suivant est dû à S. Montgomery [26, Lemma 1.1].

Théorème 3.2.1. *Soit \mathcal{H} une algèbre de Hopf pointée (voir la définition 2.2.4). Alors la filtration coradicale munit \mathcal{H} d'une structure d'algèbre de Hopf filtrée.*

Remarque 3.2.1. L'image de \mathbf{k} par l'unité u est une sous-cogèbre simple de dimension un de \mathcal{H} . Si \mathcal{H} est une cogèbre irréductible, il n'y a que celle-ci d'après la proposition 2.2.2, et donc le coradical est $\mathcal{H}^0 = \mathbf{k}\mathbf{1}$. Toute algèbre de Hopf irréductible est donc pointée, et connexe par rapport à la filtration coradicale.

3.3. Caractères et caractères infinitésimaux.

Définition 3.3.1. Soient \mathcal{H} et \mathcal{A} deux \mathbf{k} -algèbres unitaires. Un **caractère de \mathcal{H} à valeurs dans \mathcal{A}** est un morphisme d'algèbres unitaires de \mathcal{H} dans \mathcal{A} .

Définition 3.3.2. Soient \mathcal{H} et \mathcal{A} deux \mathbf{k} -algèbres unitaires, et supposons qu'il existe un morphisme d'algèbres unitaires $\varepsilon : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{k}$ (l'**augmentation**). Soit $e = u_{\mathcal{A}} \circ \varepsilon : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}$. Un **caractère infinitésimal de \mathcal{H} à valeurs dans \mathcal{A}** est une application linéaire $\alpha : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}$ telle que :

$$(3.3.1) \quad \alpha(xy) = \alpha(x)e(y) + e(x)\alpha(y) \text{ for any } x, y \in \mathcal{H}.$$

L'algèbre-cible \mathcal{A} sera commutative en général, et \mathcal{H} sera une bigèbre ou une algèbre de Hopf, l'augmentation étant alors la co-unité.

Proposition 3.3.1. Soit \mathcal{H} une \mathbf{k} -bigèbre, et soit \mathcal{A} une \mathbf{k} -algèbre commutative unitaire. L'ensemble $G_{\mathcal{A}}$ des caractères de \mathcal{H} à valeurs dans \mathcal{A} est un groupe avec unité e , l'inverse étant donné par $\varphi \mapsto \varphi \circ S$, où S est l'antipode. L'ensemble $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$ des caractères infinitésimaux à valeurs dans \mathcal{A} est une algèbre de Lie.

Démonstration. Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$. Utilisant le fait que Δ est un morphisme d'algèbres, on a pour tout $x, y \in \mathcal{H}$:

$$f * g(xy) = \sum_{(x)(y)} f(x_1 y_1) g(x_2 y_2).$$

Si \mathcal{A} est commutative et si f et g sont des caractères à valeurs dans \mathcal{A} on obtient :

$$\begin{aligned} f * g(xy) &= \sum_{(x)(y)} f(x_1) f(y_1) g(x_2) g(y_2) \\ &= \sum_{(x)(y)} f(x_1) g(x_2) f(y_1) g(y_2) \\ &= (f * g)(x) (f * g)(y). \end{aligned}$$

L'unité $e = u_{\mathcal{A}} \circ \varepsilon$ est un morphisme d'algèbres unitaires. La formule pour l'inverse d'un caractère se vérifie facilement : pour tout $x \in \mathcal{H}$ on a

$$\begin{aligned} f * (f \circ S)(x) &= \sum_{(x)} f(x_1) (f \circ S)(x_2) \\ &= \sum_{(x)} f(x_1 S(x_2)) \\ &= f \left(\sum_{(x)} x_1 S(x_2) \right) \\ &= f(u \circ \varepsilon(x)) = e(x). \end{aligned}$$

Enfin si α et β sont deux caractères infinitésimaux on calcule, pour $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
 (\alpha * \beta - \beta * \alpha)(xy) &= \sum_{(xy)} \alpha((xy)_1) \beta((xy)_2) - \beta((xy)_1) \alpha((xy)_2) \\
 &= \sum_{(x)(y)} \alpha(x_1 y_1) \beta(x_2 y_2) - \beta(x_1 y_1) \alpha(x_2 y_2) \\
 &= \sum_{(x)(y)} (\alpha(x_1) e(y_1) + e(x_1) \alpha(y_1)) (\beta(x_2) e(y_2) + e(x_2) \beta(y_2)) \\
 &\quad - (\beta(x_1) e(y_1) + e(x_1) \beta(y_1)) (\alpha(x_2) e(y_2) + e(x_2) \alpha(y_2)) \\
 &= (\alpha * \beta - \beta * \alpha)(x) e(y) + e(x) (\alpha * \beta - \beta * \alpha)(y).
 \end{aligned}$$

□

Le calcul de l'inverse ci-dessus ne fonctionne que si f est un caractère. La relation entre l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$ et le groupe $G_{\mathcal{A}}$ peut être précisée sous des hypothèses supplémentaires :

Proposition 3.3.2. *Si le corps de base \mathbf{k} est de caractéristique zéro, et si \mathcal{H} est filtrée connexe, alors l'exponentielle*

$$\begin{aligned}
 \exp^* : \mathfrak{g}_{\mathcal{A}} &\longrightarrow G_{\mathcal{A}} \\
 \alpha &\longmapsto \exp^* \alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*k}}{k!}
 \end{aligned}$$

est une bijection. Son inverse est donné par :

$$\begin{aligned}
 \log^* : G_{\mathcal{A}} &\longrightarrow \mathfrak{g}_{\mathcal{A}} \\
 \varphi &\longmapsto \log^* \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e - \varphi)^{*k}}{k}
 \end{aligned}$$

Démonstration. Soit m un entier ≥ 0 . Pour tout $x \in \mathcal{H}^m$ on a :

$$\Delta(x) = x \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes x + \sum_{(x)} x' \otimes x'',$$

avec $x', x'' \in \mathcal{H}^{m-1}$. Par conséquent, pour toute application linéaire $\alpha : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}$ telle que $\alpha(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = 0$, on a $\alpha^{*n}(x) = 0$ pour tout $n \geq m + 1$. Cela s'applique en particulier lorsque α est un caractère infinitésimal. Donc l'exponentielle de α est bien définie, par une somme localement finie. Le même argument s'applique au logarithme. Le fait que l'exponentielle d'un caractère infinitésimal est un caractère se vérifie par calcul direct (facile et laissé au lecteur). Considérons enfin un caractère $\varphi \in G_{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$. Les puissances φ^{*m} sont aussi des caractères pour tout entier positif m . Définissons maintenant pour tout $\lambda \in \mathbf{k}$:

$$\varphi^{*\lambda} := \exp^* (\lambda \log^*(\varphi)).$$

Pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, l'expression $\varphi^{*\lambda}(x)\varphi^{*\lambda}(y) - \varphi^{*\lambda}(xy)$ est polynomiale en λ et s'annule en tout entier positif. Elle s'annule donc partout :

$$(3.3.2) \quad \varphi^{*\lambda}(x)\varphi^{*\lambda}(y) = \varphi^{*\lambda}(xy).$$

Il s'ensuit que $\varphi^{*\lambda}$ est un caractère pour tout $\lambda \in \mathbf{k}$. On différencie alors (3.3.2) par rapport à λ en $\lambda = 0$, ce qui donne la propriété de caractère infinitésimal pour $\log^*(\varphi)$. Un calcul direct standard montre alors que le logarithme et l'exponentielle sont mutuellement inverses. \square

Exercices pour le chapitre 3.

Exercice 3.1. Montrer qu'il existe un unique élément de type groupe dans une cogèbre filtrée connexe.

Exercice 3.2. Soit \mathcal{H} une bigèbre filtrée connexe, et soit \mathcal{A} une algèbre unitaire (pas nécessairement commutative). Montrer que

$$\tilde{G}_{\mathcal{A}} := \{\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A}), \varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}\}$$

est un groupe, et que

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathcal{A}} := \{\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A}), \varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = 0\}$$

est une algèbre de Lie. Montrer que, si \mathbf{k} est de caractéristique zéro, l'exponentielle \exp^* est une bijection de $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathcal{A}}$ sur $\tilde{G}_{\mathcal{A}}$ dont l'inverse est donné par \log^* .

Exercice 3.3. Déduire de l'exercice 3.2 que toute bigèbre filtrée connexe est une algèbre de Hopf. Donner une procédure récursive de calcul de l'antipode.

Exercice 3.4. Soit \mathcal{H} une algèbre de Hopf garduée connexe, telle que les composantes homogènes \mathcal{H}_n sont de dimension finie. Montrer que le dual gradué \mathcal{H}° est une algèbre de Hopf garduée connexe.

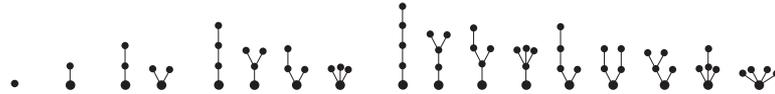
Exercice 3.5. Soit \mathcal{H} une bigèbre filtrée. Montrer que $\text{Gr } \mathcal{H}$ est une bigèbre graduée. *Indication* : appliquer le foncteur Gr au produit, au coproduit, à l'unité et à la co-unité. Même question avec une algèbre de Hopf filtrée.

Exercice 3.6. Soit \mathcal{H} une algèbre de Hopf et soit \mathcal{A} une algèbre unitaire (pas nécessairement commutative). Un élément $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ est un cocycle si $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ pour tout $x, y \in \mathcal{H}$. Montrer que l'ensemble des cocycles φ tels que $\varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ est un sous-groupe $\overline{G}_{\mathcal{A}}$ du groupe $\tilde{G}_{\mathcal{A}}$ défini dans l'exercice 3.2, et que l'ensemble des cocycles φ tels que $\varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = 0$ est une sous-algèbre de Lie $\overline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{A}}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathcal{A}}$. Montrer que, si \mathbf{k} est de caractéristique zéro et si \mathcal{H} est filtrée connexe, l'exponentielle \exp^* est une bijection de $\overline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{A}}$ sur $\overline{G}_{\mathcal{A}}$ dont l'inverse est donné par \log^* .

4. EXEMPLES DE BIGÈBRES GRADUÉES

Nous détaillons quelques exemples importants de bigèbres graduées, connexes ou non. La plupart d'entre elles proviennent de la combinatoire : de manière plus précise, elles sont définies au moyen de bases données par des objets combinatoires : mots, forêts enracinées, graphes, ensembles partiellement ordonnés... De telles bases sont souvent multiplicatives, ce qui veut dire que le produit de deux éléments de la base est encore un élément de la base.

4.1. **L’algèbre de Hopf des forêts enracinées.** Un *arbre enraciné* est une classe de graphes orientés connexes (non planaires) ayant un nombre fini de sommets, dont un distingué appelé la *racine*, tels que tout sommet admet exactement une arête sortante, sauf la racine qui n’a aucune arête sortante. Tout arbre enraciné induit une structure l’ensemble partiellement ordonné (poset) sur l’ensemble de ses sommets : deux sommets x et y vérifient $x \leq y$ isi et seulement s’il existe un chemin de y à une racine passant par x . Deux tels graphes sont équivalents (et définissent ainsi le même arbre enraciné) si et seulement si les duex posets sous-jacents sont isomorphes. Boici la liste des arbres enracinés jusqu’à cinq sommets, avec la racine en bas et les arêtes orientées de haut en bas :



Une *forêt enracinée* est une collection finie d’ardres enracinés. L’ensemble vide est la forêt qui ne contient pas d’arbres, que l’on note $\mathbf{1}$.

Définition 4.1.1. *L’opérateur de greffe* B_+ *associe à toute forêt l’arbre obtenu en greffant tous les arbres qui la composent sur une racine commune. En particulier, $B_+(\mathbf{1}) = \bullet$.*

Soit \mathcal{T} l’ensemble des arbres enracinés (non vides) et soit $\mathcal{H} = \mathbf{k}[\mathcal{T}]$ l’algèbre commutative unitaire libre engendrée par les éléments de \mathcal{T} . On identifie un produit d’arbres avec la forêt constituée par ces arbres. L’espace vectoriel sous-jacent à \mathcal{H} iest donc librement engendré par les forêts enracinées. Cette algèbre est une algèbre de Hopf graduée connexe, appelée *algèbre de Hopf des forêts enracinées*, avec la structure suivante. La graduation est donnée par le nombre de sommets d’une forêt. Le coproduit d’une forêt u se décrit comme suit : l’ensemble $\mathcal{V}(u)$ des sommets d’une forêt u est muni de l’ordre partiel défini par $x \leq y$ si et seulement s’il existe un chemin de y vers une racine passant par x . Toute partie W de l’ensemble $\mathcal{V}(u)$ des sommets de u définit une *sous-forêt* $u|_W$ de u de manière évidente, en gardant les arêtes de u qui relient deux éléments de W . La structure de poset est donnée par restriction de l’ordre partiel à W , et les éléments minimaux sont les racines de la sous-forêt. Le coproduit est alors défini par :

$$(4.1.1) \quad \Delta(u) = \sum_{\substack{V \sqcup W = \mathcal{V}(u) \\ W < V}} u|_V \otimes u|_W.$$

Ici la notation $W < V$ signifie $y \not\leq x$ pour tout sommet x dans V et tout sommet y in W . On a $\emptyset < V$ et $V < \emptyset$. Un tel couple (V, W) est aussi appelé *coupe admissible*, avec *branchage* $u|_V$ et *tronc* $u|_W$. On a par exemple :

$$\begin{aligned} \Delta(\bullet) &= \bullet \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \bullet + \bullet \otimes \bullet \\ \Delta(\mathfrak{V}) &= \mathfrak{V} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathfrak{V} + 2 \bullet \otimes \bullet + \bullet \otimes \bullet \end{aligned}$$

La co-unité est donnée par $\varepsilon(\mathbf{1}) = 1$ et $\varepsilon(u) = 0$ pour toute forêt non vide u . La coassociativité du produit est aisément vérifiée grâce à la formule suivante pour le coproduit réduit :

$$\tilde{\Delta}(u) = \Delta(u) - u \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes u = \sum_{\substack{V \amalg W = \mathcal{V}(u) \\ W < V, V, W \neq \emptyset}} u|_V \otimes u|_W.$$

La restriction " V et W non vides " se traduit par le fait que V and W forment une partition ordonnée de $\mathcal{V}(u)$ en deux blocs. Le coproduit restreint itéré s'écrit alors à l'aide de partitions de $\mathcal{V}(u)$ en n blocs :

$$\tilde{\Delta}^{n-1}(u) = \sum_{\substack{V_1 \amalg \dots \amalg V_n = \mathcal{V}(u) \\ V_n < \dots < V_1, V_j \neq \emptyset}} u|_{V_1} \otimes \dots \otimes u|_{V_n}.$$

On obtient le coproduit itéré non réduit $\Delta^{n-1}(u)$ en autorisant des blocs vides dans la formule ci-dessus. Notons que la relation $<$ n'est pas transitive sur les parties de $\mathcal{V}(u)$. La notation $V_n < \dots < V_1$ doit se comprendre comme $V_i < V_j$ pour tout $i > j$ avec $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Cette algèbre de Hopf apparaît pour la première fois dans un article d'A. Dür en 1986 [12]. Elle a été par la suite redécouverte et étudiée en détail par D. Kreimer in 1998 [21], pour la description de l'algorithme combinatoire BPHZ⁴ de renormalisation en théorie des champs scalaires φ^3 . D. Kreimer and A. Connes ont aussi montré [9] que l'opérateur B_+ vérifie la propriété

$$(4.1.2) \quad \Delta(B_+(t_1 \cdots t_n)) = B_+(t_1 \cdots t_n) \otimes \mathbf{1} + (\text{Id} \otimes B_+) \circ \Delta(t_1 \cdots t_n),$$

pour tout $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$. Autrement dit B_+ est un 1-cocycle pour la cohomologie de Hochschild de \mathcal{H} à valeurs dans \mathcal{H} , et le couple (\mathcal{H}, B_+) est universel parmi les algèbres de Hopf commutatives munies d'un 1-cocycle.

Pour toute algèbre commutative unitaire \mathcal{A} , le groupe $G_{\mathcal{A}}$ de \mathcal{H} peut s'identifier à l'ensemble des *séries formelles en arbres enracinés avec coefficients dans \mathcal{A}* , c'est-à-dire l'ensemble des applications de l'ensemble des arbres enracinés non vides vers \mathcal{A} . Ces *B-séries* sont actuellement largement utilisées pour approximer les solutins d'équations différentielles non linéaires⁵ [17]. Une telle application s'étend multiplicativement de manière unique en un caractère de \mathcal{H} à valeurs dans \mathcal{A} .

4.2. Algèbres de Hopf de battages et de quasi-battages. Soit \mathbf{k} un corps, et soit V une \mathbf{k} -algèbre commutative (pas nécessairement unitaire). Soit $\mathcal{H} = T^c(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$ la cogèbre tensorielle de V (voir l'exemple 2.2.2), où l'on note Δ le coproduit de déconcaténation. Le *produit de quasi-battage* \mathbb{H} est défini récursivement sur $T^c(V)$ comme suit :

$$\text{— } \mathbf{1} \mathbb{H} v = v \mathbb{H} \mathbf{1} = v \text{ for any } v \in T^c(V),$$

4. ainsi nommé d'après N. N. Bogoliubov, O. S. Parasiuk, K. Hepp et W. Zimmermann

5. Une B-série est une application de l'ensemble des arbres enracinés, y compris l'arbre vide, vers le corps de base \mathbb{R} ou \mathbb{C} des nombres réels ou complexes. Une B-série s'identifie à un élément du groupe de Butcher si et seulement si le coefficient de l'arbre vide est égal à 1.

— $av \mathbb{H} bw = a(v \mathbb{H} bw) + b(av \mathbb{H} w) + [ab](v \mathbb{H} w)$ pour tout $a, b \in V$ et $v, w \in T^c(V)$, où $[ab]$ est le produit de a et b dans V , à ne pas confondre avec le mot $ab \in V^{\otimes 2}$.

Par exemple, pour trois lettres $a, b, c \in V$, on a :

$$ab \mathbb{H} c = abc + acb + cab + [ac]b + a[bc].$$

Proposition 4.2.1. $\mathcal{H} = (T^c(V), \mathbb{H}, \Delta)$ est une algèbre de Hopf filtrée connexe commutative.

Démonstration. La filtration est donnée par :

$$(4.2.1) \quad \mathcal{H}^n := \bigoplus_{j=0}^n V^{\otimes j}.$$

La connexité et la compatibilité de Δ et \mathbb{H} par rapport à la filtration sont évidentes. Il reste à montrer que \mathbb{H} est commutatif, compatible avec Δ et associatif. La commutativité se vérifie facilement par récurrence. On vérifie la relation de commutativité $v' \mathbb{H} w' = w' \mathbb{H} v'$ et la condition de compatibilité $\Delta(v' \mathbb{H} w') = \Delta(v') \mathbb{H} \Delta(w')$ pour toute paire de mots v', w' par récurrence sur la somme $|v'| + |w'|$ de leurs longueurs. Écrivant $v' = av$ et $w' = bw$ avec $a, b \in V$ on calcule :

$$\begin{aligned} v' \mathbb{H} w' &= av \mathbb{H} bw \\ &= a(v \mathbb{H} bw) + b(av \mathbb{H} w) + [ab](v \mathbb{H} w) \\ &= a(bw \mathbb{H} v) + b(w \mathbb{H} av) + [ba](w \mathbb{H} v) \\ &= bw \mathbb{H} av \\ &= w' \mathbb{H} v' \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \Delta(v' \mathbb{H} w') &= \Delta(av \mathbb{H} bw) = \Delta(a(v \mathbb{H} bw) + b(av \mathbb{H} w) + [ab](v \mathbb{H} w)) \\ &= \mathbf{1} \otimes a(v \mathbb{H} bw) + (a \otimes \mathbf{1})\Delta(v \mathbb{H} bw) + \mathbf{1} \otimes b(av \mathbb{H} w) + (b \otimes \mathbf{1})\Delta(av \mathbb{H} w) \\ &\quad + \mathbf{1} \otimes [ab](v \mathbb{H} w) + ([ab] \otimes \mathbf{1})\Delta(v \mathbb{H} w) \\ &= \mathbf{1} \otimes (av \mathbb{H} bw) + (a \otimes \mathbf{1})(\Delta v \mathbb{H} \Delta(bw)) + (b \otimes \mathbf{1})(\Delta(av) \mathbb{H} \Delta w) \\ &\quad + ([ab] \otimes \mathbf{1})(\Delta v \mathbb{H} \Delta w) \\ &= \mathbf{1} \otimes (av \mathbb{H} bw) + (a \otimes \mathbf{1})(\Delta v \mathbb{H} (\mathbf{1} \otimes bw)) + (a \otimes \mathbf{1})(\Delta v \mathbb{H} (b \otimes \mathbf{1})\Delta w) \\ &\quad + (b \otimes \mathbf{1})((\mathbf{1} \otimes av) \mathbb{H} \Delta w) + (b \otimes \mathbf{1})((a \otimes \mathbf{1})\Delta v \mathbb{H} \Delta w) + ([ab] \otimes \mathbf{1})(\Delta v \mathbb{H} \Delta w) \\ &= (\mathbf{1} \otimes av) \mathbb{H} (\mathbf{1} \otimes bw) + (\mathbf{1} \otimes av) \mathbb{H} ((b \otimes \mathbf{1})\Delta w) + (\mathbf{1} \otimes bw) \mathbb{H} ((a \otimes \mathbf{1})\Delta v) \\ &\quad + ((a \otimes \mathbf{1})\Delta v) \mathbb{H} ((b \otimes \mathbf{1})\Delta w) \\ &= (\mathbf{1} \otimes av + (a \otimes \mathbf{1})\Delta v) \mathbb{H} (\mathbf{1} \otimes bw + (b \otimes \mathbf{1})\Delta w) \\ &= \Delta(av) \mathbb{H} \Delta(bw) = \Delta v' \mathbb{H} \Delta w'. \end{aligned}$$

La condition d'associativité $(v' \mathbb{H} w') \mathbb{H} x' = v' \mathbb{H} (w' \mathbb{H} x')$ se vérifie de manière analogue, par récurrence sur la somme $|v'| + |w'| + |x'|$. \square

Un cas particulier se produit quand le produit interne de V est identiquement nul, c'est-à-dire quand $[ab] = 0$ pour tout $a, b \in V$. Dans ce cas, le produit de quasi-battage devient le *produit de battage*, que l'on note III . La définition récursive prend alors la forme plus simple :

$$(4.2.2) \quad av \text{ III } bw = a(v \text{ III } bw) + b(av \text{ III } w).$$

4.3. Algèbres de Hopf d'incidence. Les algèbres de Hopf d'incidence sont des algèbres de Hopf construites à partir de familles bien choisies d'ensembles partiellement ordonnés. Elles ont été mises en évidence par W. R. Schmitt en 1994 [29], à la suite des travaux de S. A. Joni et G.-C. Rota sur les algèbres et cogèbres d'incidence ([28, 19], voir aussi [30]). Elles forment une famille importante d'algèbres de Hopf, incluant l'algèbre de Hopf des arbres enracinés ainsi que celle de Faà di Bruno [15]. Nous décrivons rapidement ici la sous-famille des algèbres de Hopf d'incidence "standard réduites", qui sont toujours commutatives.

Définition 4.3.1. Soit P un ensemble partiellement ordonné (souvent abrégé en **poset**), avec ordre partiel noté \leq . Pour tout $x, y \in P$, l'**intervalle** $[x, y]$ est le sous-ensemble de P formé des éléments z tels que $x \leq z \leq y$.

Soit \mathcal{P} une famille de posets finis P tels qu'il existe un unique élément minimal 0_P et un unique élément maximal 1_P dans P (ainsi P s'écrit comme l'intervalle $P = [0_P, 1_P]$). Cette famille est dite *stable par intervalles* si pour tout poset $P \in \mathcal{P}$ et pour tout $x \leq y \in P$, l'intervalle $[x, y]$ est un élément de \mathcal{P} . Soit $\overline{\mathcal{P}}$ le quotient \mathcal{P}/\sim , où $P \sim Q$ si et seulement si P et Q sont isomorphes comme posets⁶. La classe d'équivalence de tout poset $P \in \mathcal{P}$ est notée \overline{P} (notation empruntée à [13]). La *cogèbre d'incidence standard réduite* de la famille de posets \mathcal{P} est le \mathbf{k} -espace vectoriel librement engendré par $\overline{\mathcal{P}}$, le coproduit étant donné par

$$\Delta \overline{P} = \sum_{x \in P} \overline{[0_P, x]} \otimes \overline{[x, 1_P]},$$

et la co-unité par $\varepsilon(\overline{\{\ast\}}) = 1$ et $\varepsilon(\overline{P}) = 0$ si P contient deux éléments ou plus.

Définition 4.3.2. Le **produit direct** $P \times Q$ de deux posets P et Q est le produit cartésien des deux posets, l'ordre partiel étant donné par $(p, q) \leq (p', q')$ si et seulement si $p \leq p'$ et $q \leq q'$. Une famille de posets finis \mathcal{P} est dite **héréditaire** si le produit $P \times Q$ appartient à \mathcal{P} pour $P, Q \in \mathcal{P}$.

Le quotient $\overline{\mathcal{P}}$ d'une famille héréditaire est le semigroupe commutatif engendré par l'ensemble $\overline{\mathcal{P}}_0$ des classes de *posets indécomposables*, c'est-à-dire de posets $R \in \mathcal{P}$ tels que pour tout $P, Q \in \mathcal{P}$ de cardinal ≥ 2 , $P \times Q$ n'est pas isomorphe à R . La commutativité provient de l'isomorphisme évident $P \times Q \sim Q \times P$ pour tout $P, Q \in \mathcal{P}$. L'élément unité $\mathbf{1}$ est la classe de tout poset à un seul élément.

6. W. Schmitt introduit des relations d'équivalence plus générales, appelées *relations compatibles avec l'ordre*.

Proposition 4.3.1. [29, Theorem 4.1] *Si \mathcal{P} est une famille héréditaire de posets finis, la cogèbre standard réduite $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ de \mathcal{P} est une algèbre de Hopf.*

Démonstration. Le produit de semigroupe s'étend bilinéairement en un produit associatif sur $\mathcal{H}(\mathcal{P})$. La compatibilité du coproduit avec ce produit est évidente. L'unité est un morphisme de cogèbres et la co-unité est un morphisme d'algèbres. L'existence de l'antipode vient du fait que pour tout poset $P \in \mathcal{P}$ de cardinal, mettons, n , on a de manière évidente :

$$\Delta \bar{P} = \bar{P} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \bar{P} + \sum_{(\bar{P})} \bar{P}' \otimes \bar{P}'',$$

où P' et P'' contiennent strictement moins de n éléments (le fait que P est l'intervalle $[0_P, 1_P]$ est crucial ici). Considérant le coproduit réduit $\tilde{\Delta}(\bar{P}) = \Delta(\bar{P}) - \bar{P} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes \bar{P}$, le coproduit réduit itéré $\tilde{\Delta}^m(\bar{P})$ s'annule donc pour $m > n$. On a vu que (voir l'exercice 3.2) cette propriété de conilpotence permet de définir l'inverse de l'identité pour la convolution, et même l'inverse de toute application linéaire $\varphi : \mathcal{H}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{P})$ telle que $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. \square

Plusieurs algèbres de Hopf rencontrées jusqu'à présent sont des algèbres de Hopf d'incidence. Nous donnons trois exemples, tous tirés de [29].

Exemple 4.3.1 (L'algèbre de Hopf binomiale et l'algèbre de Hopf des puissances divisées). Soit \mathcal{B} la famille des algèbres booléennes finie. Un élément de \mathcal{B} est un poset isomorphe au poset $\mathcal{P}(A)$ des parties d'un ensemble fini A . L'ordre partiel sur $\mathcal{P}(A)$ est donné par l'inclusion. Si B et C sont deux parties de A avec $B \subset C$, l'intervalle $[B, C]$ dans $\mathcal{P}(A)$ is isomorphe à $\mathcal{P}(C \setminus B)$, donc \mathcal{B} stable par intervalles. De plus, la propriété évidente :

$$(4.3.1) \quad \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \sim \mathcal{P}(A \amalg B)$$

montre que \mathcal{B} est héréditaire. L'algèbre de Hopf d'incidence $\mathcal{H}(\mathcal{B})$ est appelée *algèbre de Hopf binomiale*, à cause de l'expression du coproduit sur les générateurs. En effet, l'espace vectoriel $\mathcal{H}(\mathcal{B})$ est clairement engendré par $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, où x_n désigne la classe d'isomorphisme de $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$. Le produit est alors donné par $x_m x_n = x_{m+n}$, l'unité est $\mathbf{1} = x_0$, la co-unité est donnée par $\varepsilon(x_0) = 1$ et $\varepsilon(x_n) = 0$ for $n \geq 1$, et le coproduit est entièrement déterminé par $\Delta(x_1) = x_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x_1$. On a explicitement :

$$\Delta(x_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k \otimes x_{n-k}.$$

Le dual gradué $\mathcal{H}(\mathcal{B})^\circ$ est connu comme l' *algèbre de Hopf des puissances divisées* : elle se présente comme l'espace vectoriel $\mathbf{k}\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ avec le produit

$$y_m \star y_n = \binom{m+n}{m} y_{m+n}$$

et l'unité $\mathbf{1} = y_0$. La co-unité est donnée par $\varepsilon(y_0) = 1$ et $\varepsilon(y_n) = 0$ si $n > 0$, et le coproduit est donné par

$$\Delta(y_n) = \sum_{p+q=n} y_p \otimes y_q.$$

Exemple 4.3.2 (L'algèbre de Hopf de Faà di Bruno). Soit \mathcal{SP} la famille des posets isomorphes à l'ensemble $\mathcal{SP}(A)$ de toutes les partitions d'un ensemble fini non vide A . L'ordre partiel sur les partitions est donné par le raffinement. On note 0_A ou 0 la partition par singletons, et par 1_A ou 1 la partition n'ayant qu'un seul bloc. Soit \mathcal{Q} la famille de posets isomorphe au produit cartésien d'un nombre fini d'éléments de \mathcal{SP} . Si S et T sont deux partitions d'un ensemble fini A avec $S \leq T$ (c'est-à-dire S plus fine que T), la partition S induit par restriction une partition de tout bloc de T . Notant W/S l'ensemble des blocs de S contenus dans un bloc W de T , toute partition U telle que $S \leq U \leq T$ induit une partition de l'ensemble W/S pour tout bloc W de T . On en déduit l'isomorphisme suivant entre posets :

$$(4.3.2) \quad [S, T] \sim \prod_{W \in A/T} \mathcal{SP}(W/S).$$

Ceci montre que \mathcal{Q} est stable par intervalles (et héréditaire par définition).

Définition 4.3.3. [29, Exemple 14.1] *L'algèbre de Hopf d'incidence $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ est l'algèbre de Hopf de Faà di Bruno.*

On notera X_n la classe d'isomorphisme de $\mathcal{SP}(\{1, \dots, n+1\})$. On note que X_0 est l'unité de l'algèbre de Hopf. D'après (4.3.2), on a :

$$(4.3.3) \quad \begin{aligned} \Delta(X_n) &= \sum_{S \in \mathcal{SP}(\{1, \dots, n+1\})} \overline{[0, S]} \otimes \overline{[S, 1]} \\ &= \sum_{S \in \mathcal{SP}(\{1, \dots, n+1\})} \left(\prod_{W \in \{1, \dots, n+1\}/S} \overline{\mathcal{SP}(W)} \right) \otimes \overline{\mathcal{SP}(\{1, \dots, n+1\}/S)}. \end{aligned}$$

Le coefficient devant $X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} \otimes X_m$ dans (4.3.3) compte le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \dots, n+1\}$ en k_j blocs de taille $j+1$ (pour $j = 1$ à n), formées de $m+1$ blocs en tout, et $k_0 = m+1 - k_1 - \cdots - k_n$ blocs de taille 1. On a alors :

$$(4.3.4) \quad \Delta(X_n) = \sum_{m=0}^n B_{m+1, n+1}(X_0, X_1, X_2, \dots) \otimes X_m,$$

où les $B_{m+1, n+1}$ sont les *polynômes de Bell partiels* [29, Exemple 14.1].

Exemple 4.3.3 (L'algèbre de Hopf des forêts enracinées comme algèbre de Hopf d'incidence). Soit P un poset fini, pas nécessairement isomorphe à un intervalle. Par exemple, P peut être l'ensemble $\mathcal{V}(F)$ des sommets d'une forêt enracinée F , avec $v \leq w$ si et seulement s'il existe un chemin de w à une racine en passant par v . Un idéal (ou *segment initial*) de P est une partie I de P telle que pour tout $w \in I$, si $v \leq w$, alors $v \in I$. Pour une forêt enracinée F , un segment

initial de $\mathcal{V}(F)$ est une sous-forêt dont chaque composante connexe contient une racine de F . Pour tout poset fini P , on note $J(P)$ le poset de tous les segments initiaux de P , ordonnés par l'inclusion [29, Paragraph 16]. L'élément $0_{J(P)}$ est l'ensemble vide, et l'élément maximal $1_{J(P)}$ est P . Pour deux posets finis P et Q on a de manière évidente :

$$(4.3.5) \quad J(P \amalg Q) \sim J(P) \times J(Q).$$

La classe d'isomorphisme d'un poset P est uniquement déterminée par la classe d'isomorphisme du poset $J(P)$. Pour le voir, considérons deux posets P et Q , et supposons qu'il existe un isomorphisme $\Phi : J(P) \rightarrow J(Q)$. Pour tout $x \in P$, considérons le segment initial $P_{\leq x} := \{y \in P, y \leq x\}$, qui a x comme unique élément maximal. Maintenant, $\Phi(P_{\leq x})$ possède un unique élément maximal que l'on note $\varphi(x)$, et il n'est pas difficile de voir que l'application $\varphi : P \rightarrow Q$ ainsi construite est un isomorphisme de posets.

Pour un poset P et deux segments initiaux $I_1 \subset I_2 \subset P$ avec I_1 fixé, la correspondance $I_2 \mapsto I_2 \setminus I_1$ définit un isomorphisme de posets :

$$(4.3.6) \quad [I_1, I_2] \subset J(P) \longrightarrow J(I_2 \setminus I_1).$$

Les différences $Q = I_2 \setminus I_1$ sont des *parties convexes* de P , c'est-à-dire telles que pour tout $x, y \in Q$, on a $[x, y] \subset Q$. Réciproquement, toute partie convexe $Q \subset P$ peut s'écrire comme une différence $P_{\leq Q} \setminus P_{< Q}$ de deux uniques segments initiaux :

$$\begin{aligned} P_{\leq Q} &:= \{x \in P, \exists y \in Q, x \leq y\}, \\ P_{< Q} &:= \{x \in P, \forall y \in Q, x \not\leq y\}. \end{aligned}$$

Soit maintenant \mathcal{F} une famille de posets finis stable par union disjointe et telle que pour tout poset $P \in \mathcal{F}$, les parties convexes of P appartiennent aussi à \mathcal{F} . Alors la famille correspondante :

$$J(\mathcal{F}) := \{J(P), P \in \mathcal{F}\}$$

est héréditaire au vu de (4.3.5) et (4.3.6).

Proposition 4.3.2. *La famille \mathcal{F} des forêts enracinées est stable par union disjointe et parties convexes, et l'algèbre de Hopf d'incidence associée $\mathcal{H}(J(\mathcal{F}))$ est isomorphe à l'algèbre de Hopf des forêts enracinées définie au paragraphe 4.1.*

Démonstration. Via l'isomorphisme Φ défini ci-dessus, l'espace vectoriel $\mathcal{H}(J(\mathcal{F}))$ s'identifie à l'espace vectoriel librement engendré par les forêts enracinées. Par (4.3.5), la produit est donné par l'union disjointe, et le coproduit s'écrit :

$$\Delta(P) = \sum_{I \in J(P)} (P \setminus I) \otimes I,$$

ce qui est bien le coproduit (4.1.1) modulo l'échange des termes (on a noté avec la même lettre une forêt et le poset sous-jacent). La co-unité est donnée par $\varepsilon(\mathbf{1}) = 1$ et $\varepsilon(P) = 0$ pour toute forêt non-triviale P . \square

Cet exemple peut s'étendre, toujours dans le contexte des algèbres de Hopf d'incidence, aux graphes orientés sans cycles [23].

4.4. Le coproduit d'extraction-contraction sur les forêts.

Définition 4.4.1. Une **sous-forêt couvrante** d'une forêt enracinée u est une collection de sous-arbres disjoints de u telle que tout sommet de u appartient à un (unique) arbre de la collection. Pour toute sous-forêt couvrante s de u , la **forêt contractée** u/s est obtenue à partir de u en contractant chaque arbre de s sur un seul sommet.

On adopte la notation $s \subseteq u$ pour "s est une sous-forêt couvrante de u ".

Lemme 4.4.1. Soit u une forêt enracinée, soit t une sous-forêt couvrante de u . Alors

- (1) La correspondance $s \mapsto s/t$ est une bijection de l'ensemble des sous-forêts couvrantes s telles que $t \subseteq s$, sur l'ensemble des sous-forêts couvrantes de u/t .
- (2) $(u/t)/(s/t) = u/s$.

Soit \mathcal{H} l'algèbre de Hopf des forêts enracinées introduite au paragraphe 4.1. On introduit le coproduit suivant sur \mathcal{H} :

$$(4.4.1) \quad \Gamma(u) := \sum_{s \text{ covering subforest of } u} s \otimes u/s.$$

Théorème 4.4.1. $(\mathcal{H}, \cdot, \Gamma)$ est une bigèbre graduée, la graduation étant donnée par le nombre d'arêtes.

Démonstration. La multiplicativité de Γ est évidente, de même que la compatibilité par rapport à la graduation donnée par le nombre d'arêtes. La coassociativité provient de la formule :

$$(\Gamma \otimes \text{Id})\Gamma(u) = (\text{Id} \otimes \Gamma)\Gamma(u) = \sum_{t \subseteq s \subseteq u} t \otimes s/t \otimes u/s,$$

qui est une conséquence directe du lemme 4.4.1. □

On peut remarquer que $(\mathcal{H}, \cdot, \Gamma)$ n'est pas une algèbre de Hopf : en effet, l'arbre à un seul sommet \bullet est de degré zéro, est de type groupe et n'admet pas d'inverse.

Exercices pour le chapitre 4.

Exercice 4.1. Montrer que l'équation (4.1.2) ainsi que $\Delta \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ déterminent entièrement le coproduit Δ (*Indication* : raisonner par récurrence sur le degré).

Exercice 4.2. Soit D un ensemble. Une forêt enracinée D -décorée est une paire (u, φ) où u est une forêt enracinée et φ est une application de $\mathcal{V}(u)$ vers D . Mettre en évidence une structure d'algèbre de Hopf graduée connexe sur l'espace vectoriel \mathcal{H}^D librement engendré par les forêts enracinées D -décorées. Montrer que B_+^d vérifie (4.1.2) pour tout $d \in D$, où B_+^d est l'opérateur de greffe sur une racine commune décorée par d .

Exercice 4.3. Soient p, q, r trois entiers positifs. Un (p, q) -quasi-battage de type r est une application surjective

$$\sigma : \{1, \dots, p+q\} \twoheadrightarrow \{1, \dots, p+q-r\}$$

telle que $\sigma_1 < \dots < \sigma_p$ et $\sigma_{p+1} < \dots < \sigma_{p+q}$. Montrer la formule explicite suivante pour le produit de quasi-battage :

$$(4.4.2) \quad v_1 \cdots v_p \mathbb{H} v_{p+1} \cdots v_{p+q} = \sum_{r \geq 0} \sum_{\sigma \in \text{qsh}(p, q; r)} v_1^\sigma \cdots v_{p+q-r}^\sigma,$$

où $\text{qsh}(p, q; r)$ désigne l'ensemble des (p, q) -quasi-battages de type r , et où $v_j^\sigma = \prod_{k, \sigma_k=j} v_k$. Le produit se comprend comme la multiplication interne à V , et contient un ou deux termes. Donner la formule explicite du produit de battage \mathbb{H} .

Exercice 4.4. Soit J l'idéal de la bigèbre d'extraction-contraction $(\mathcal{H}, \cdot, \Gamma)$ engendré par $\bullet - \mathbf{1}$. Montrer que J est un bi-idéal, et que \mathcal{H}/J est une algèbre de Hopf graduée connexe.

5. DÉCOMPOSITION DE BIRKHOFF ET RENORMALISATION

5.1. Décomposition de Birkhoff. On considère ici la situation où l'algèbre \mathcal{A} admet un schéma de renormalisation, c'est-à-dire une décomposition en deux sous-algèbres :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+$$

avec $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_+$. On note $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ la projection sur \mathcal{A}_- parallèlement à \mathcal{A}_+ .

Théorème 5.1.1.

(1) Soit \mathcal{H} une algèbre de Hopf filtrée connexe, et soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+$ une algèbre commutative unitaire munie d'un schéma de renormalisation. Tout caractère $\varphi \in G_{\mathcal{A}}$ admet une unique **décomposition de Birkhoff** :

$$(5.1.1) \quad \varphi = \varphi_-^{*-1} * \varphi_+,$$

où φ_- envoie $\mathbf{1}$ sur $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ et $\text{Ker } \varepsilon$ dans \mathcal{A}_- , et où φ_+ envoie \mathcal{H} dans \mathcal{A}_+ . Les applications linéaires φ_- et φ_+ sont données sur $\text{Ker } \varepsilon$ par les formules récursives suivantes :

$$(5.1.2) \quad \varphi_-(x) = -\pi\left(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')\right)$$

$$(5.1.3) \quad \varphi_+(x) = (I - \pi)\left(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')\right).$$

(2) Les composantes φ_- et φ_+ de la décomposition de Birkhoff de φ sont aussi des caractères à valeurs dans \mathcal{A} .

Démonstration. Nous suivons la démonstration du théorème 4 dans [10] : pour la première assertion, il est immédiat d'après la définition de π que φ_- envoie $\text{Ker } \varepsilon$ dans \mathcal{A}_- , et que φ_+ envoie $\text{Ker } \varepsilon$ dans \mathcal{A}_+ . Il reste à vérifier l'égalité $\varphi_+ = \varphi_- * \varphi$, ce qui se fait par un calcul facile :

$$\varphi_+(x) = (I - \pi)\left(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')\right).$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi(x) + \varphi_-(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'') \\
&= (\varphi_- * \varphi)(x).
\end{aligned}$$

La preuve de la seconde assertion se fait comme dans [10] et se base sur l'identité de Rota-Baxter suivante dans \mathcal{A} :

$$(5.1.4) \quad \pi(a)\pi(b) = \pi(\pi(a)b + a\pi(b)) - \pi(ab),$$

qui se vérifie aisément en décomposant a et b en leurs \mathcal{A}_\pm -composantes. Soit φ un caractère de \mathcal{H} à valeurs dans \mathcal{A} . Supposons que l'égalité $\varphi_-(xy) = \varphi_-(x)\varphi_-(y)$ soit vraie pour tous $x, y \in \mathcal{H}$ tels que $|x| + |y| \leq d - 1$, et calculons pour x, y tels que $|x| + |y| = d$:

$$\varphi_-(x)\varphi_-(y) = \pi(X)\pi(Y),$$

avec $X = \varphi(x) - \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')$ et $Y = \varphi(y) - \sum_{(y)} \varphi_-(y')\varphi(y'')$. Utilisant la formule :

$$\pi(X) = -\varphi_-(x),$$

on obtient :

$$\varphi_-(x)\varphi_-(y) = -\pi(XY + \varphi_-(x)Y + X\varphi_-(y)),$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\varphi_-(x)\varphi_-(y) &= -\pi\left(\varphi(x)\varphi(y) + \varphi_-(x)\varphi(y) + \varphi(x)\varphi_-(y) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')(\varphi(y) + \varphi_-(y)) + \sum_{(y)} (\varphi(x) + \varphi_-(x))\varphi_-(y')\varphi(y'') \right. \\
&\quad \left. + \sum_{(x)(y)} \varphi_-(x')\varphi(x'')\varphi_-(y')\varphi(y'')\right).
\end{aligned}$$

On doit alors comparer cette expression avec :

$$\begin{aligned}
\varphi_-(xy) &= -\pi\left(\varphi(xy) + \varphi_-(x)\varphi(y) + \varphi_-(y)\varphi(x) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{(x)} (\varphi_-(x'y)\varphi(x'') + \varphi_-(x')\varphi(x''y)) + \sum_{(y)} (\varphi_-(xy')\varphi(y'') + \varphi_-(y')\varphi(xy'')) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{(x)(y)} \varphi_-(x'y')\varphi(x''y'')\right).
\end{aligned}$$

Ces deux expressions coïncident grâce à la commutativité de l'algèbre \mathcal{A} , la multiplicativité de φ et l'hypothèse de récurrence. \square

Remarque 5.1.1. On définit la *préparation de Bogoliubov* comme l'application linéaire $b : G_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ donnée récursivement par :

$$(5.1.5) \quad b(\varphi)(x) = \varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'').$$

Alors les composantes de φ dans la décomposition de Birkhoff s'écrivent :

$$(5.1.6) \quad \varphi_- = -\pi \circ b(\varphi), \quad \varphi_+ = (I - \pi) \circ b(\varphi).$$

La préparation de Bogoliubov s'écrit aussi, de manière plus concise :

$$(5.1.7) \quad b(\varphi) = \varphi_- * (\varphi - e).$$

insérant l'équation (5.1.7) dans (5.1.6) et posant $\alpha := \varphi - e$, on obtient l'expression suivante pour φ_- :

$$(5.1.8) \quad \varphi_- = e - P(\varphi_- * \alpha)$$

$$(5.1.9) \quad = e - P(\alpha) + P(P(\alpha) * \alpha) + \cdots + (-1)^n \underbrace{P(P(\dots P(\alpha) * \alpha) \cdots * \alpha)}_{n \text{ times}} + \cdots$$

où $P : \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ est la projection définie par $P(\alpha) = \pi \circ \alpha$.

5.2. Un petit aperçu de la renormalisation en physique. Les systèmes en interaction sont très répandus en physique. Lorsque l'on considère les paramètres caractéristiques du système (masse, charge électrique, accélération, etc.), il est essentiel de distinguer entre les *paramètres nus*, qui sont les valeurs que ceux-ci prendraient si l'interaction était nulle, et les valeurs effectivement mesurées. La renormalisation peut se voir comme toute procédure transformant les paramètres nus en les paramètres effectivement observés (c'est-à-dire en tenant compte de l'interaction), qui seront donc appelés *paramètres renormalisés*. Considérons (d'après [10]) l'exemple suivant : l'accélération initiale d'un ballon sphérique est donnée par :

$$(5.2.1) \quad g = \frac{m_0 - M}{m_0 + \frac{M}{2}} g_0$$

où $g_0 \simeq 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ est l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre, m_0 est la masse du ballon, et M est la masse du volume d'air qu'il occupe. On note que cette accélération décroît de g_0 à $-2g_0$ lorsque l'interaction (représentée ici par la masse d'air M) croît de 0 à $+\infty$. La force totale $F = mg$ agissant sur le ballon est la somme de la force de gravité $F_0 = m_0 g_0$ et de la poussée d'Archimède $-M g_0$. Les paramètres nus (c'est-à-dire en l'absence d'air) sont donc m_0, F_0, g_0 (masse, force et accélération respectivement), alors que les paramètres renormalisés sont :

$$(5.2.2) \quad m = m_0 + \frac{M}{2}, \quad F = \left(1 - \frac{M}{m_0}\right) F_0, \quad g = \frac{m_0 - M}{m_0 + \frac{M}{2}} g_0.$$

En théorie quantique perturbative des champs, une difficulté supplémentaire apparaît : les paramètres nus sont en général infinis, reflétant le fait que le "système isolé" idéal ne peut pas exister, et encore moins être observé. Les paramètres nus sont typiquement donnés par des

intégrales divergentes⁷ telles que :

$$(5.2.3) \quad \int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{1 + \|p\|^2} dp.$$

On doit alors soustraire une autre quantité infinie au paramètre nu pour retrouver le paramètre renormalisé. En effet ce dernier est fini puisqu'il peut être effectivement mesuré ! Ce procédé requiert deux étapes :

- une *procédure de régularisation*, qui remplace le paramètre nu infini par une fonction d'une variable z qui tend vers l'infini lorsque z tend vers une certaine valeur z_0 .
- la *procédure de renormalisation* proprement dite, de nature combinatoire, qui extrait de manière appropriée une quantité finie de la fonction ci-dessus lorsque z tend vers z_0 . Lorsque cette procédure peut être menée à bien, la théorie est dite *renormalisable*.

Il y a en général beaucoup de liberté possible dans le choix de la procédure de régularisation. On peut mentionner, entre autres, la *régularisation par troncature*, qui revient à considérer des intégrales comme (5.2.3) sur une boule de rayon z (avec $z_0 = +\infty$), et la *régularisation dimensionnelle* qui consiste, en gros, à "intégrer sur un espace de dimension complexe z ", avec $z_0 = d$, la dimension de l'espace-temps considéré (par exemple $d = 4$ pour l'espace-temps de Minkowski). Dans ce cas, la fonction qui apparaît est méromorphe en z avec un pôle en z_0 ([8],[18]).

5.3. Renormalisation à partir de la décomposition de Birkhoff. On regarde ici un exemple particulier : soit \mathcal{H} une algèbre de Hopf graduée connexe sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes. Soit \mathcal{A} l'algèbre des germes de fonctions méromorphes autour d'un certain $z_0 \in \mathbb{C}$. L'algèbre \mathcal{A} admet une décomposition en deux sous-algèbres :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-,$$

où \mathcal{A}_+ est l'algèbre de germes de fonctions holomorphes en $z = 0$, et où $\mathcal{A}_- = z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ est l'algèbre des polynômes sans terme constant en la variable z^{-1} . Cette décomposition est connue sous le nom de *schéma minimal de soustraction*.

Définition 5.3.1. Soit $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}$ un caractère à valeurs dans \mathcal{A} . En physique, un tel caractère est typiquement obtenu à partir d'intégrales divergentes par une procédure de régularisation, par exemple la régularisation dimensionnelle. Le **caractère renormalisé** de \mathcal{A} est le caractère à valeurs dans \mathbb{C} défini par :

$$(5.3.1) \quad \varphi^R(x) := \varphi_+(x)(z)|_{z=0}.$$

7. Pour préciser, les paramètres physiques intéressants sont donnés par une série dont chaque terme est une intégrale divergente. Nous ne traiterons pas ici la question de la convergence de cette série une fois que chaque terme a été renormalisé.

Notons que φ_+ prend ses valeurs dans les fonctions méromorphes qui n'ont pas de pôles en $z = 0$, donc la définition a un sens. Le caractère φ_- à valeurs dans \mathcal{A} est appelé le **caractère des contre-termes**.

exercices for Section 5.

6. COMODULES-BIGÈBRES

La notion of comodule-bigèbre a été étudiée par R. K. Molnar [25, Definition 2.1.(e)].

6.1. Définition.

Définition 6.1.1. Soit \mathcal{B} une bigèbre (unitaire et co-unitaire) sur un corps k . Un **comodule-bigèbre sur \mathcal{B}** est une bigèbre dans la catégorie des \mathcal{B} -comodules.

Plus précisément, un comodule-bigèbre sur \mathcal{B} est une bigèbre unitaire et co-unitaire \mathcal{H} munie d'une application linéaire

$$\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{H}$$

telle que :

- Φ est une coaction à gauche, c'est-à-dire que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Delta_{\mathcal{B}} \otimes \text{Id} \\ \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \Phi} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} \\ & \searrow \sim & \downarrow \varepsilon_{\mathcal{B}} \otimes \text{Id} \\ & & k \otimes \mathcal{H} \end{array}$$

- Le coproduit $\Delta_{\mathcal{H}}$ et la co-unité $\varepsilon_{\mathcal{H}}$ sont des morphismes de \mathcal{B} -comodules à gauche, la structure de comodule sur k étant donnée par l'application unité $u_{\mathcal{B}}$, et la structure de comodule sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ étant donnée par $\tilde{\Phi} = (m_{\mathcal{B}} \otimes \text{Id} \otimes \text{Id}) \circ \tau_{23} \circ (\Phi \otimes \Phi)$. Ceci équivaut à la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} \\ \downarrow \Delta_{\mathcal{H}} & & \downarrow \text{Id} \otimes \Delta_{\mathcal{H}} \\ \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \\ \downarrow \Phi \otimes \Phi & & \uparrow m_{\mathcal{B}} \otimes \text{Id} \otimes \text{Id} \\ \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{\tau_{23}} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} \\ \downarrow \varepsilon_{\mathcal{H}} & & \downarrow \text{Id} \otimes \varepsilon_{\mathcal{H}} \\ k & \xrightarrow{u_{\mathcal{B}}} & \mathcal{B} \end{array}$$

où τ_{23} est l'échange des deux facteurs du milieu.

- $m_{\mathcal{H}}$ et $u_{\mathcal{H}}$ sont des morphismes de \mathcal{B} -comodules à gauche. Ceci équivaut à dire que Φ est un morphisme d'algèbres unitaires. Autrement dit, les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} \\
\uparrow m_{\mathcal{H}} & & \uparrow \text{Id} \otimes m_{\mathcal{H}} \\
\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \\
\downarrow \Phi \otimes \Phi & & \downarrow m_{\mathcal{B}} \otimes \text{Id} \otimes \text{Id} \\
\mathcal{B} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{\tau_{23}} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
\mathcal{H} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} \\
\uparrow u_{\mathcal{H}} & & \uparrow \text{Id} \otimes u_{\mathcal{H}} \\
k & \xrightarrow{u_{\mathcal{B}}} & \mathcal{B}
\end{array}$$

Le comodule-bigèbre \mathcal{H} est un *comodule-algèbre de Hopf* si de plus \mathcal{H} est une algèbre de Hopf avec antipode S tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{H} \\
\downarrow S & & \downarrow I \otimes S \\
\mathcal{H} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{H}
\end{array}$$

6.2. La structure de comodule-algèbre de Hopf sur les forêts enracinées.

Théorème 6.2.1. *L'algèbre de Hopf $(\mathcal{H}, \cdot, \Delta)$ des forêts enracinées définie au paragraphe 4.1 est un comodule-algèbre de Hopf sur la bigèbre d'extraction-contraction $(\mathcal{H}, \cdot, \Gamma)$ définie au paragraphe 4.4. La coaction Φ est simplement donnée par le coproduit Γ .*

Démonstration. On doit vérifier que l'égalité suivante entre applications linéaires de \mathcal{H} dans $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ est vérifiée :

$$(6.2.1) \quad (\text{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \Delta) \circ \Phi = m^{1,3} \circ (\Gamma \otimes \Gamma) \circ \Delta,$$

où $m^{1,3} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ est définie par :

$$(6.2.2) \quad m^{1,3}(a \otimes b \otimes c \otimes d) = ac \otimes b \otimes d.$$

La vérification est immédiate pour la forêt vide. Pour toute forêt non vide on a :

$$\begin{aligned}
(\text{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \Delta) \circ \Gamma(t) &= (\text{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \Delta) \sum_{\substack{s \text{ sous-forêt} \\ \text{de } t}} s \otimes t/s \\
&= \sum_{\substack{s \text{ sous-forêt} \\ \text{de } t}} \sum_{A \sqcup B = \mathcal{V}(t/s), A \cap B = \emptyset, B < A} s \otimes (t/s)|_A \otimes (t/s)|_B.
\end{aligned}$$

Par ailleurs on calcule :

$$\begin{aligned}
m^{1,3} \circ (\Gamma \otimes \Gamma) \circ \Delta(t) &= m^{1,3} \circ (\Gamma \otimes \Gamma) \left(\sum_{A' \sqcup B' = \mathcal{V}(t), A' \cap B' = \emptyset, B' < A'} t|_{A'} \otimes t|_{B'} \right) \\
&= m^{1,3} \left(\sum_{A' \sqcup B' = \mathcal{V}(t), A' \cap B' = \emptyset, B' < A'} \sum_{\substack{s' \text{ sous-forêt} \\ \text{de } A'}} \sum_{\substack{s'' \text{ sous-forêt} \\ \text{de } B'}} s' \otimes A'/s' \otimes s'' \otimes B'/s'' \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{A' \sqcup B' = \mathcal{V}(t), A' \cap B' = \emptyset, B' < A'} \sum_{\substack{s' \text{ sous-forêt} \\ \text{de } A'}} \sum_{\substack{s'' \text{ sous-forêt} \\ \text{de } B'}} s' s'' \otimes A'/s' \otimes B'/s'' \\
 &= \sum_{A' \sqcup B' = \mathcal{V}(t), A' \cap B' = \emptyset, B' < A'} \sum_{\substack{s \text{ sous-forêt de } t \text{ avec} \\ \text{composantes connexes contenues dans } A' \text{ ou } B'}} s \otimes A'/s \cap A' \otimes B'/s \cap B' \\
 &= \sum_{\substack{s \text{ sous-forêt} \\ \text{de } t}} \sum_{A \sqcup B = \mathcal{V}(t/s), A \cap B = \emptyset, B < A} s \otimes (t/s)|_A \otimes (t/s)|_B,
 \end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème. \square

Exercices pour le chapitre 6.

7. STRUCTURES DE RÉGULARITÉ

Les structures de régularité sont un outil très puissant récemment mis au point par Martin Hairer pour donner un sens à certaines équations aux dérivées partielles très singulières, et pour les résoudre. Nous donnons ici un petit aperçu des algèbres de Hopf en jeu : ce sont des algèbres de Hopf d'arbres dont les sommets et les arêtes sont décorés, avec un jeu subtil des décorations dans la définition du coproduit.

7.1. Forêts colorées. Soit (F, \widehat{F}) une forêt colorée, c'est-à-dire :

- F est une forêt enracinée. On note $N(F)$ l'ensemble de ses sommets et $E(F)$ l'ensemble de ses arêtes.
- $\widehat{F} : N(F) \sqcup E(F) \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ est une application telle que $\widehat{F}_i := \widehat{F}^{-1}(\{i\})$ est une sous-forêt de F pour tout $i \geq 1$.

L'indice i doit être vu comme une couleur, $i = 0$ correspondant au noir. La seconde condition revient à dire que pour tous $x, y \in N(F)$ tels que $\widehat{F}(x) = \widehat{F}(y) \geq 1$, on a $\widehat{F}([x, y]) = \widehat{F}(x) = \widehat{F}(y)$, où $[x, y]$ désigne l'arête joignant x à y dans F . Pour tout $i \geq 1$, soit $\mathcal{U}_i : (F, \widehat{F}) \mapsto \mathcal{U}_i(F, \widehat{F})$ une collection de sous-forêts de l'argument (F, \widehat{F}) telle que :

Hypothèse 7.1. Pour tout $i \geq 1$, pour toute forêt colorée (F, \widehat{F}) et pour toute sous-forêt $A \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F})$,

- (1) $\widehat{F}_j \cap A = \emptyset$ pour tout $j > i$,
- (2) $\widehat{F}_i \subset A$,
- (3) si $0 < j < i$, alors soit $T \subset A$, soit $T \cap A = \emptyset$ pour toute composante connexe T de \widehat{F}_j .

Pour toute forêt colorée (F, \widehat{F}) et pour toute sous-forêt A de F , on note $\widehat{F}|_A$ la restriction de l'application couleur \widehat{F} à A , et on note $\widehat{F} \cup_i A : N(F) \sqcup E(F) \rightarrow \mathbb{N}$ l'application couleur

définie par $\widehat{F} \cup_i A(x) := i$ si $x \in N(A) \sqcup E(A)$ et $\widehat{F} \cup_i A(x) = \widehat{F}(x)$ sinon.

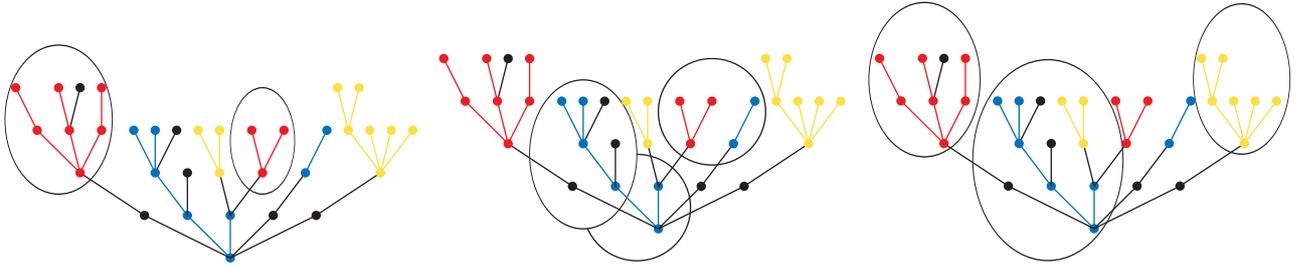


FIGURE 1: La figure ci-dessus montre trois fois la même forêt F (qui est ici un arbre) avec trois couleurs : le rouge représente 1, le bleu 2 et le jaune 3. Le noir, qui n'est pas considéré comme une couleur, représente 0. Les bulles désignent une sous-forêt A_i vérifiant l'hypothèse 7.1, pour $i = 1, 2, 3$ de gauche à droite. Ainsi A_i pourrait être un exemple d'élément de $\mathcal{U}_i(F, \widehat{F})$ pour tout $i = 1, 2$ ou 3 .

Lemme 7.1.1. *Supposons que la correspondance \mathcal{U}_i vérifie l'hypothèse 7.1. Alors pour toute forêt colorée (F, \widehat{F}) et pour tout $A \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F})$, les deux couples $(A, \widehat{F}|_A)$ et $(F, \widehat{F} \cup_i A)$ sont des forêts colorées.*

Démonstration. C'est évident pour $(A, \widehat{F}|_A)$. Posant $\widehat{G} := \widehat{F} \cup_i A$, il faut vérifier que $\widehat{G}_i = \widehat{G}^{-1}(\{i\})$ est une sous-forêt de F pour tout $i \geq 1$. C'est une simple conséquence de l'hypothèse 7.1. \square

pour résumer, la forêt colorée $(F, \widehat{F} \cup_i A)$ est obtenue à partir de (F, \widehat{F}) en repeignant toutes les arêtes et tous les sommets de $A \setminus \widehat{F}_i$ avec la couleur numéro i , étendant ainsi cette couleur à A tout entier. Il est maintenant naturel de considérer la comultiplication :

$$(7.1.1) \quad \Delta_i(F, \widehat{F}) := \sum_{A \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F})} (A, \widehat{F}|_A) \otimes (F, \widehat{F} \cup_i A),$$

et de rechercher des propriétés de \mathcal{U}_i telles que le Δ_i correspondant soit is coassociatif. Cette procédure sera en fait valide dans une situation plus compliquée, impliquant des forêts *typées et décorées*.

7.2. Contractions. Soit (F, \widehat{F}) une forêt colorée. La contraction $\mathcal{K}(F, \widehat{F})$ se définit en contractant chaque composante connexe de \widehat{F}_i , pour $i \geq 1$, sur un sommet auquel on donne la couleur i . L'application \mathcal{K} ainsi définie est idempotente (c'est-à-dire $\mathcal{K} \circ \mathcal{K} = \mathcal{K}$), et $(F, \widehat{F}) = \mathcal{K}(F, \widehat{F})$ si et seulement si les sous-forêts \widehat{F}_i sont constituées de sommets isolés pour tout $i \geq 1$.

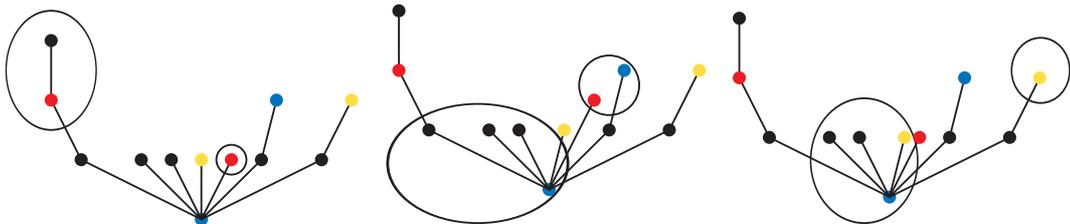


FIGURE 2: La contraction de la Figure 1. Les bulles délimitent les sous-forêts $\mathcal{K}(A_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ de gauche à droite. Les sous-forêts $\mathcal{K}(A_i)$ vérifient aussi l'hypothèse 7.1.

Soit (F, \widehat{F}) une forêt colorée. Une sous-forêt $A \subset F$ est *admissible* si pour tout $i \geq 1$ et pour toute composante connexe C de \widehat{F}_i , soit $C \subset A$ soit $C \cap A = \emptyset$. L'application de contraction \mathcal{K} induit une bijection de l'ensemble des sous-forêts admissibles de (F, \widehat{F}) sur l'ensemble des sous-forêts de $\mathcal{K}(F, \widehat{F})$, ces dernières étant nécessairement admissibles. Considérant ce fait, il est naturel de faire l'hypothèse supplémentaire suivante sur les \mathcal{U}_i :

Hypothèse 7.2. *Pour tout $i \geq 1$ et pour toute forêt colorée (F, \widehat{F}) , l'application de contraction \mathcal{K} induit une bijection de $\mathcal{U}_i(F, \widehat{F})$ sur $\mathcal{U}_i(\mathcal{K}(F, \widehat{F}))$.*

Notons que les éléments de $\mathcal{U}_i(F, \widehat{F})$ sont admissibles d'après l'hypothèse 7.1.

7.3. L'identité de Chu-Vandermonde. Soit S un ensemble fini, et soit $k, \ell : S \rightarrow \mathbb{N}$ avec $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$. Les factorielles et les coefficients binomiaux sont définis par :

$$(7.3.1) \quad \ell! := \prod_{x \in S} \ell(x)!, \quad \binom{k}{\ell} := \prod_{x \in S} \binom{k(x)}{\ell(x)},$$

où $\binom{a}{b} := \frac{a!}{b!(a-b)!}$ si $a, b \in \mathbb{N}$ et $a \geq b$, avec la convention $\binom{a}{b} = 0$ si $a, b \in \mathbb{N}$ et $a < b$. Soit maintenant \widetilde{S} un autre ensemble fini, et soit $\pi : S \rightarrow \widetilde{S}$ une application (pas nécessairement surjective ni injective). Pour toute application $\ell : S \rightarrow \mathbb{N}$ on définit $\pi_*\ell : \widetilde{S} \rightarrow \mathbb{N}$ par :

$$(7.3.2) \quad \pi_*\ell(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ n'est pas dans l'image de } \pi, \\ \sum_{y \in S, \pi(y)=x} \ell(y) & \text{si } x \text{ est dans l'image de } \pi. \end{cases}$$

Proposition 7.3.1. *Pour tout $\widetilde{\ell} : \widetilde{S} \rightarrow \mathbb{N}$ et pour tout $k : S \rightarrow \mathbb{N}$ l'identité ci-dessous est vérifiée :*

$$(7.3.3) \quad \binom{\pi_*k}{\widetilde{\ell}} = \sum_{\ell, \pi_*\ell=\widetilde{\ell}} \binom{k}{\ell}.$$

Démonstration. Considérons l'égalité immédiate suivante entre polynômes à variables indexées par \widetilde{S} :

$$(7.3.4) \quad \prod_{s \in S} (1 + X_{\pi(s)})^{k(s)} = \prod_{\widetilde{s} \in \widetilde{S}} (1 + X_{\widetilde{s}})^{\pi_*k(\widetilde{s})}.$$

Il suffit alors de considérer le coefficient de monôme $\prod_{\widetilde{s} \in \widetilde{S}} X_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\ell}(\widetilde{s})}$ des deux côtés de l'équation. \square

7.4. Un jeu avec les décorations. On supposera ici que les arêtes de nos forêts colorées sont de différents types, ce que l'on visualise par une application $\mathfrak{t} : E(F) \rightarrow \mathcal{L}$, où \mathcal{L} est un ensemble fini. On notera $\mathbb{Z}(\mathcal{L})$ le groupe abélien libre engendré par les types. L'application type est sous-entendue et donnée une fois pour toutes : elle ne doit pas être confondue avec l'application couleur. Soit d un entier positif fixé, la *dimension*.

Définition 7.4.1. Une *forêt décorée* est un 5-uplet $(F, \widehat{F})_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{n}, \mathfrak{o}}$, où

$$(7.4.1) \quad \mathfrak{n} : N(F) \rightarrow \mathbb{N}^d, \quad \mathfrak{o} : N(F) \rightarrow \mathbb{Z}^d \oplus \mathbb{Z}(\mathcal{L}), \quad \mathfrak{e} : E(F) \rightarrow \mathbb{N}^d.$$

Le produit de deux forêts décorées est donné par leur concaténation munie de la somme de leurs décorations correspondantes, c'est-à-dire :

$$(F, \widehat{F})_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{n}, \mathfrak{o}} \cdot (G, \widehat{G})_{\mathfrak{e}' }^{\mathfrak{n}', \mathfrak{o}'} := (F \sqcup G, \widehat{F} + \widehat{G})_{\mathfrak{e} + \mathfrak{e}' }^{\mathfrak{n} + \mathfrak{n}', \mathfrak{o} + \mathfrak{o}' }.$$

On introduit quelques notations supplémentaires : pour toute sous-forêt A d'une forêt F , le bord de A dans F est défini par :

$$(7.4.2) \quad \partial(A, F) := \{[v, w] \in E(F) \setminus E(A), v \in N(A)\}.$$

Soit $\pi : E(F) \rightarrow N(F)$ l'application "sommet d'en bas", définie par $\pi([v, w]) = v$. Pour tout $\varepsilon : E(F) \rightarrow \mathbb{Z}^d$, l'application $\pi_*\varepsilon : N(F) \rightarrow \mathbb{Z}^d$ est définie par :

$$(7.4.3) \quad \pi_*\varepsilon(v) := \sum_{a=[v,w] \in E(F)} \varepsilon(a).$$

On utilisera aussi la notation abrégée ε_A^B à la place de $\mathbf{1}_{E(B) \setminus E(A)}\varepsilon$ pour tout $A \subset B \subset F$. Voici maintenant la définition de notre famille de coproduits :

$$(7.4.4) \quad \Delta_i(F, \widehat{F})_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{n}, \mathfrak{o}} := \sum_{A \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F})} \sum_{\varepsilon, \mathfrak{n}'} \frac{1}{\varepsilon!} \binom{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}'} \left(A, \widehat{F} \Big|_A \right)_{\mathfrak{e}|_{E(A)}}^{\mathfrak{n}' + \pi_*\varepsilon, \mathfrak{o}|_{N(A)}} \otimes \left(F, \widehat{F} \cup_i A \right)_{\mathfrak{e}_A^F + \varepsilon}^{\mathfrak{n} - \mathfrak{n}', \mathfrak{o} + \mathfrak{n}' + \pi_*(\varepsilon - \mathfrak{e}_0^A)}.$$

La somme interne court sur toutes les applications $\mathfrak{n}' : N(F) \rightarrow \mathbb{N}^d$ avec $\mathfrak{n}'(v) = 0$ if $v \notin A$, et sur toutes les applications $\varepsilon : E(F) \rightarrow \mathbb{N}^d$ telles que $\varepsilon(a) = 0$ pour $a \notin \partial(A, F)$. Cette somme est *infinie*, et doit donc être comprise comme un élément d'une complétion adéquate du produit tensoriel. Ceci peut être précisé en termes d'espaces bigradués, voir [4, Section 2]. Voici maintenant une autre hypothèse sur la collection \mathcal{U}_i :

Hypothèse 7.3. Les correspondances $\mathcal{U}_i : (F, \widehat{F}) \mapsto \mathcal{U}_i(F, \widehat{F})$ vérifient (pour $i \geq 1$) :

$$(1) \mathcal{U}_i(F \sqcup G, \widehat{F} + \widehat{G}) = \{C \sqcup D, C \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F}) \text{ and } D \in \mathcal{U}_i(G, \widehat{G})\}.$$

(2) On a l'équivalence suivante :

$$\left(A \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F}) \text{ et } B \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F} \cup_i A) \right) \iff \left(B \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F}) \text{ et } A \in \mathcal{U}_i(B, \widehat{F}|_B) \right).$$

Théorème 7.4.1. Sous les hypothèses 7.1 et 7.3, les coproduits Δ_i sont multiplicatifs and coassociatifs.

Démonstration. La multiplicativité est une conséquence directe du point (1) de l'hypothèse 7.3, et de la définition du produit de deux forêts décorées, grâce au fait que les factorielles (resp. les coefficients binomiaux) vérifient $(f + g)! = f!g!$, resp. $\binom{f + g}{f' + g'} = \binom{f}{f'} \binom{g}{g'}$ si

f and g ont leurs supports disjoints. La coassociativité se prouve par un calcul direct. Tout d'abord on a :

$$\begin{aligned}
 & (\Delta_i \otimes I) \Delta_i(F, \widehat{F})_{\mathfrak{e}}^{n, \mathfrak{o}} \\
 = & (\Delta_i \otimes I) \left(\sum_{B \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F})} \sum_{\varepsilon, n''} \frac{1}{\varepsilon!} \binom{\mathfrak{n}}{n''} \left(B, \widehat{F} \Big|_B \right)_{\mathfrak{e}|_{E(B)}}^{n'' + \pi_* \varepsilon, \mathfrak{o}|_{N(B)}} \otimes \left(F, \widehat{F} \cup_i B \right)_{\mathfrak{e}_B^F + \varepsilon}^{n - n'', \mathfrak{o} + n'' + \pi_*(\varepsilon - \mathfrak{e}_\emptyset^B)} \right) \\
 = & \sum_{B \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F})} \sum_{\substack{\varepsilon: E(F) \rightarrow \mathbb{N}^d, \text{supp } \varepsilon \subset \partial(B, F) \\ n'': N(F) \rightarrow \mathbb{N}^d, \text{supp } n'' \subset N(B)}} \sum_{A \in \mathcal{U}_i(B, \widehat{F} \Big|_B)} \sum_{\substack{\eta: E(B) \rightarrow \mathbb{N}^d, \text{supp } \eta \subset \partial(A, B) \\ n': N(B) \rightarrow \mathbb{N}^d, \text{supp } n' \subset N(A)}} \frac{1}{\varepsilon! \eta!} \binom{\mathfrak{n}}{n''} \binom{n'' + \pi_* \varepsilon}{n'} \\
 & \left(A, \widehat{F} \Big|_A \right)_{\mathfrak{e}|_{E(A)}}^{n' + \pi_* \eta, \mathfrak{o}|_{N(A)}} \otimes \left(B, \widehat{F} \Big|_B \cup_i A \right)_{\mathfrak{e}_A^B + \eta}^{n'' - n' + \pi_* \varepsilon, \mathfrak{o}|_{N(B)} + n' + \pi_*(\eta - \mathfrak{e}_\emptyset^A)} \otimes \left(F, \widehat{F} \cup_i B \right)_{\mathfrak{e}_B^F + \varepsilon}^{n - n'', \pi_*(\varepsilon - \mathfrak{e}_\emptyset^B) + \mathfrak{o} + n''}
 \end{aligned} \tag{7.4.5}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 & (I \otimes \Delta_i) \Delta_i(F, \widehat{F})_{\mathfrak{e}}^{n, \mathfrak{o}} \\
 = & (I \otimes \Delta_i) \left(\sum_{A \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F})} \sum_{\tilde{\varepsilon}, \tilde{n}'} \frac{1}{\tilde{\varepsilon}!} \binom{\mathfrak{n}}{\tilde{n}'} \left(A, \widehat{F} \Big|_A \right)_{\mathfrak{e}|_{E(A)}}^{\tilde{n}' + \pi_* \tilde{\varepsilon}, \mathfrak{o}|_{N(A)}} \otimes \left(F, \widehat{F} \cup_i A \right)_{\mathfrak{e}_A^F + \tilde{\varepsilon}}^{n - \tilde{n}', \mathfrak{o} + \tilde{n}' + \pi_*(\tilde{\varepsilon} - \mathfrak{e}_\emptyset^A)} \right) \\
 = & \sum_{A \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F})} \sum_{\substack{\tilde{\varepsilon}: E(F) \rightarrow \mathbb{N}^d, \text{supp } \tilde{\varepsilon} \subset \partial(A, F) \\ \tilde{n}': N(F) \rightarrow \mathbb{N}^d, \text{supp } \tilde{n}' \subset N(A)}} \sum_{B \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F} \cup_i A)} \sum_{\substack{\tilde{\eta}: E(A) \rightarrow \mathbb{N}^d, \text{supp } \tilde{\eta} \subset \partial(B, F) \\ \tilde{n}'': N(F) \rightarrow \mathbb{N}^d, \text{supp } \tilde{n}'' \subset N(B)}} \frac{1}{\tilde{\varepsilon}! \tilde{\eta}!} \binom{\mathfrak{n}}{\tilde{n}'} \binom{n - \tilde{n}'}{\tilde{n}''} \\
 & \left(A, \widehat{F} \Big|_A \right)_{\mathfrak{e}|_{E(A)}}^{\tilde{n}' + \pi_* \tilde{\varepsilon}, \mathfrak{o}|_{N(A)}} \otimes \left(B, (\widehat{F} \cup_i A) \Big|_B \right)_{\mathfrak{e}_A^B + \tilde{\varepsilon}_A^B}^{\tilde{n}'' + \pi_* \tilde{\eta}, [\mathfrak{o} + \tilde{n}' + \pi_*(\tilde{\varepsilon} - \mathfrak{e}_\emptyset^A)]|_{N(B)}} \otimes \left(F, \widehat{F} \cup_i B \right)_{\mathfrak{e}_B^F + \tilde{\varepsilon}_B^F + \tilde{\eta}}^{n - \tilde{n}' - \tilde{n}'', \mathfrak{o} + \tilde{n}' + \tilde{n}'' + \pi_*(\tilde{\varepsilon}_B^F + \tilde{\eta} + \mathfrak{e}_\emptyset^B)}
 \end{aligned} \tag{7.4.6}$$

Ici on a utilisé l'égalité $(\widehat{F} \cup_i A) \cup_i B = \widehat{F} \cup_i B$, qui est vérifiée parce que $A \subset B$ ici. De plus on a $\tilde{\varepsilon}_A^F = \tilde{\varepsilon}_A^B + \tilde{\varepsilon}_B^F$, et les supports des deux composantes sont disjoints. On effectue le changement d'indices suivant :

$$\varepsilon := \tilde{\varepsilon}_B^F + \tilde{\eta}, \quad \eta := \tilde{\varepsilon}_A^B, \quad \eta' := \tilde{\varepsilon}_B^F = \varepsilon - \tilde{\eta}.$$

Cette transformation est injective, et son image est caractérisée par la contrainte $\varepsilon - \eta' \geq 0$. Son inverse, défini sur cette image, est donné par :

$$\tilde{\varepsilon} = \eta + \eta', \quad \tilde{\eta} = \varepsilon - \eta'.$$

Le pré-facteur combinatoire dans (7.4.6) peut donc se ré-écrire ainsi :

$$\frac{1}{\tilde{\eta}! \tilde{\eta}'!} = \frac{1}{\eta! \eta'!} \frac{1}{(\varepsilon - \eta')!} = \frac{1}{\eta! \varepsilon!} \binom{\varepsilon}{\eta'}.$$

On obtient donc :

$$(I \otimes \Delta_i) \Delta_i(F, \widehat{F})_{\mathfrak{e}}^{n, \mathfrak{o}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{A \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F})} \sum_{B \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F} \cup_i A)} \sum_{\varepsilon, \eta, \eta'} \sum_{\tilde{\mathbf{n}}', \tilde{\mathbf{n}}''} \frac{1}{\eta!} \frac{1}{\varepsilon!} \binom{\varepsilon}{\eta'} \binom{\mathbf{n}}{\tilde{\mathbf{n}}'} \binom{\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}'}{\tilde{\mathbf{n}}''} \\
&\left(A, \widehat{F} \Big|_A \right)_{\mathfrak{e}_{|E(A)}}^{\tilde{\mathbf{n}}' + \pi_*(\eta + \eta'), \mathbf{o}_{|N(A)}} \otimes \left(B, (\widehat{F} \cup_i A) \Big|_B \right)_{\mathfrak{e}_{A^B + \eta}}^{\tilde{\mathbf{n}}'' + \pi_*(\varepsilon - \eta'), [\mathbf{o} + \tilde{\mathbf{n}}' + \pi_*(\eta + \eta' - \mathfrak{e}_\emptyset^A)]_{|N(B)}} \otimes \left(F, \widehat{F} \cup_i B \right)_{\mathfrak{e}_{B^F + \varepsilon}}^{\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}' - \tilde{\mathbf{n}}'', \mathbf{o} + \tilde{\mathbf{n}}' + \tilde{\mathbf{n}}'' + \pi_*(\varepsilon + \mathfrak{e}_\emptyset^B)}.
\end{aligned} \tag{7.4.7}$$

ce qui fait que la contrainte $\varepsilon - \eta' \geq 0$ est maintenant encodée dans le pré-facteur combinatoire. On effectue maintenant un deuxième changement d'indices :

$$\mathbf{n}'' := \tilde{\mathbf{n}}' + \tilde{\mathbf{n}}'', \quad \mathbf{n}' := \tilde{\mathbf{n}}' + \pi_* \eta',$$

qui est encore injectif. L'inverse (défini sur l'image) est donné par :

$$\tilde{\mathbf{n}}' = \mathbf{n}' - \pi_* \eta', \quad \tilde{\mathbf{n}}'' = \mathbf{n}'' + \pi_* \eta'.$$

On a donc les identités suivantes entre coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}
\binom{\mathbf{n}}{\tilde{\mathbf{n}}'} \binom{\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}'}{\tilde{\mathbf{n}}''} &= \frac{\mathbf{n}! (\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}})!}{\tilde{\mathbf{n}}'! (\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}})! \tilde{\mathbf{n}}''! (\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}' - \tilde{\mathbf{n}}'')!} = \frac{\mathbf{n}! (\tilde{\mathbf{n}}' + \tilde{\mathbf{n}}'')!}{\tilde{\mathbf{n}}'! (\tilde{\mathbf{n}}' + \tilde{\mathbf{n}}'')! \tilde{\mathbf{n}}''! (\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}' - \tilde{\mathbf{n}}'')!} = \binom{\mathbf{n}}{\tilde{\mathbf{n}}' + \tilde{\mathbf{n}}''} \binom{\tilde{\mathbf{n}}' + \tilde{\mathbf{n}}''}{\tilde{\mathbf{n}}'} \\
&= \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n}''} \binom{\mathbf{n}''}{\mathbf{n}' - \pi_* \eta'}.
\end{aligned}$$

Insérant ceci dans (7.4.7) on obtient :

$$\begin{aligned}
&(I \otimes \Delta_i) \Delta_i(F, \widehat{F})_{\mathfrak{e}}^{\mathbf{n}, \mathbf{o}} \\
&= \sum_{A \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F})} \sum_{B \in \mathcal{U}_i(F, \widehat{F} \cup_i A)} \sum_{\varepsilon, \eta, \eta'} \sum_{\mathbf{n}', \mathbf{n}''} \frac{1}{\eta!} \frac{1}{\varepsilon!} \binom{\varepsilon}{\eta'} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n}''} \binom{\mathbf{n}''}{\mathbf{n}' - \pi_* \eta'} \\
&\left(A, \widehat{F} \Big|_A \right)_{\mathfrak{e}_{|E(A)}}^{\mathbf{n}' + \pi_* \eta, \mathbf{o}_{|N(A)}} \otimes \left(B, (\widehat{F} \cup_i A) \Big|_B \right)_{\mathfrak{e}_{A^B + \eta}}^{\mathbf{n}'' - \mathbf{n}' + \pi_* \varepsilon, [\mathbf{o} + \mathbf{n}' + \pi_*(\eta - \mathfrak{e}_\emptyset^A)]_{|N(B)}} \otimes \left(F, \widehat{F} \cup_i B \right)_{\mathfrak{e}_{B^F + \varepsilon}}^{\mathbf{n} - \mathbf{n}'', \mathbf{o} + \mathbf{n}'' + \pi_*(\varepsilon + \mathfrak{e}_\emptyset^B)}.
\end{aligned} \tag{7.4.8}$$

Le terme générique dans le membre de droite de (7.4.8) dépend de η' seulement par l'intermédiaire du coefficient binomial. Grâce à l'identité de Chu-Vandermonde (7.3.3) on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\eta'} \binom{\varepsilon}{\eta'} \binom{\mathbf{n}''}{\mathbf{n}' - \pi_* \eta'} &= \sum_{\alpha} \sum_{\eta', \pi_* \eta' = \alpha} \binom{\varepsilon}{\eta'} \binom{\mathbf{n}''}{\mathbf{n}' - \alpha} \\
&= \sum_{\alpha} \binom{\pi_* \varepsilon}{\alpha} \binom{\mathbf{n}''}{\mathbf{n}' - \alpha} \\
&= \binom{\mathbf{n}'' + \pi_* \varepsilon}{\mathbf{n}'}.
\end{aligned} \tag{7.4.9}$$

En tenant compte de l'hypothèse 7.3, il suffit d'insérer (7.4.9) dans (7.4.8) et de comparer avec (7.4.5) pour prouver la coassociativité des coproduits Δ_i . \square

7.5. **Décorations et contractions.** On étend l'opérateur de contraction \mathcal{K} défini au paragraphe 7.2 aux forêts décorées comme suit :

$$(7.5.1) \quad \mathcal{K} \left((F, \widehat{F})_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{n}, \mathfrak{o}} \right) := \mathcal{K}(F, \widehat{F})_{[\mathfrak{c}]}^{[\mathfrak{n}], [\mathfrak{o}]}$$

avec :

$$[\mathfrak{n}](x) := \sum_{v \in x} \mathfrak{n}(v), \quad [\mathfrak{o}](x) := \sum_{v \in x} \mathfrak{o}(v) + \sum_{a \in x^2} \mathfrak{t}(a), \quad [\mathfrak{c}] := \mathfrak{c}|_{E(F) \setminus \widehat{E}}$$

RÉFÉRENCES

- [1] M. Belhaj Mohamed, *Renormalisation dans les algèbres de Hopf graduées connexes*, PhD thesis, Univ. Blaise Pascal and Fac. Sci. Monastir (2014).
- [2] M. Belhaj Mohamed, *Doubling bialgebras of graphs and Feynman rules*, *Confluentes Mathematici*, to appear (2016).
- [3] M. Belhaj Mohamed, D. Manchon, *Bialgebra of specified graphs and external structures*, *Ann. Inst. Henri Poincaré, D*, Volume 1, Issue 3, pp. 307-335 (2014).
- [4] Y. Bruned, M. Hairer, L. Zambotti, *Algebraic renormalisation of regularity structures*, [arXiv:1610.08468](https://arxiv.org/abs/1610.08468).
- [5] J. C. Butcher, *An algebraic theory of integration methods*, *Math. Comp.* 26 (1972) 79106.
- [6] D. Calaque, K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, *Two interacting Hopf algebras of trees : a Hopf-algebraic approach to composition and substitution of B-series*, *Advances in Applied Mathematics*, 47, n°2, 282-308 (2011).
- [7] A. Cayley, *A theorem on trees*, *Quart. J. Math.* 23 (1889) 376-378.
- [8] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge monographs in math. physics, Cambridge (1984).
- [9] A. Connes, D. Kreimer, *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry*, *Comm. in Math. Phys.* 199, 203-242 (1998).
- [10] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, *Comm. Math. Phys.* 210, n°1, 249-273 (2000).
- [11] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. II. The β -function, diffeomorphisms and the renormalization group*, *Comm. Math. Phys.* 216, n°1, 215-241 (2001).
- [12] A. Dür, *Möbius functions, incidence algebras and power series representations*, *Lect. Notes math.* **1202**, Springer (1986).
- [13] R. Ehrenborg, *On posets and Hopf algebras*, *Adv. Math.* **119** (1996), 1–25.
- [14] L. Foissy, *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés I + II*, thèse, Univ. de Reims (2002), et *Bull. Sci. Math.* **126**, n°3, 193–239 et n°4, 249–288 (2002).
- [15] A. Frabetti, D. Manchon, *Five interpretations of Faà di Bruno's formula*, IRMA Lect. In Math. And Theor. Phys. **21**, K. Ebrahimi-Fard and F. Fauvet eds, 91-148, Europ. Math. Soc. (2015).

- [16] R. Grossman, R. G. Larson, *Hopf-algebraic structure of families of trees*, J. Algebra **126** (1989) 184-210.
- [17] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric numerical integration* Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations, vol. **31**, Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [18] G. 'tHooft, M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. **B44** 189-213 (1972).
- [19] S. A. Joni, G.-C. Rota, *Coalgebras and bialgebras in combinatorics*, Stud. Appl. Math. **61** No2 (1979), 145–163.
- [20] C. Kassel, *Quantum groups*, Springer Verlag (1995).
- [21] D. Kreimer, *On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998).
- [22] D. Manchon, *Hopf algebras and renormalisation*, for Handbook of Algebra, Vol. 5 (M. Hazewinkel ed. 365-427,(2008).
- [23] D. Manchon, *On bialgebra and Hopf algebra of oriented graphs*, Confluentes Math. Volume 04, n°1 (2012).
- [24] D. Manchon, A. Saïdi, *Lois pré-Lie en interaction*, Comm. Alg. vol 39, n°10, 3662-3680 (2011).
- [25] R. K. Molnar, *Semi-direct products of Hopf algebras*, J. Algebra **45**, 29–51 (1977).
- [26] S. Montgomery, *Some remarks on filtrations of Hopf algebras*, Comm. Algebra **21** No 3, 999-1007 (1993).
- [27] H. Munthe-Kaas, W. Wright, *On the Hopf Algebraic Structure of Lie Group Integrators*, Found. Comput. Math. **8** (2008) 227-257.
- [28] G.-C. Rota, *On the foundations of combinatorial theory I : theory of Möbius functions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie and Verw. Gebiete **2** (1964), 340–368.
- [29] W. R. Schmitt, *Incidence Hopf algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra **96** (1994), 299–330.
- [30] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics*, 2nd. edition, Cambridge University Press (1997).
- [31] M.E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New-York (1969).

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL, C.N.R.S.-UMR 6620, 3 PLACE VASARÉLY, CS 60026, 63178 AUBIÈRE, FRANCE.

E-mail address: manchon@math.univ-bpclermont.fr

URL: <http://math.univ-bpclermont.fr/~manchon/>