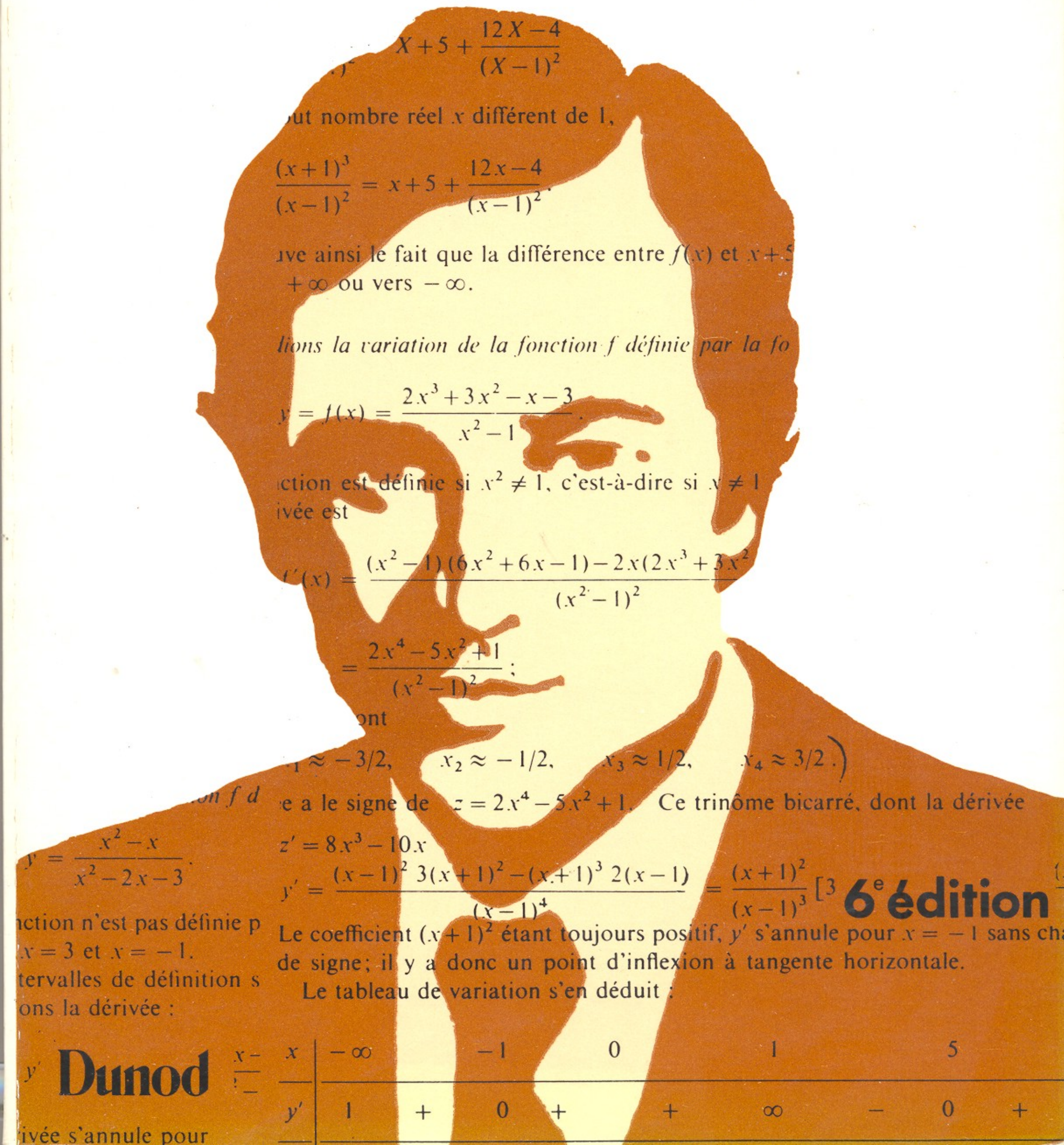
J. QUINET

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

2-Fonctions usuelles



6e édition

Dunod

J. QUINET
Ingénieur de l'École Supérieure d'Électricité

COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

Tome 2
Fonctions usuelles

6e édition corrigée
par une équipe de professeurs
Avec la participation de
J. FAZEKAS
Professeur à l'École Centrale d'Électronique de Paris

Dunod

ISBN 2-04-005633-5

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 4. **Applications des dérivées à l'étude de la variation des fonctions**

CHAPITRE 5. **Recherche des maximums et des minimums pour des applications pratiques**

CHAPITRE 6. **Étude pratique de la variation des fonctions**

CHAPITRE 7. **Les intégrales**

Solutions des exercices

CHAPITRE 1

FONCTIONS NUMÉRIQUES

1.1 Définition. Nous avons vu au tome 1 le concept fondamental d'*application*. Rappelons qu'une application f d'un ensemble E dans un ensemble F fait correspondre à tout élément x de E un élément y de F et un seul, noté $f(x)$, ce qu'on représente souvent par :

$$f : x \mapsto f(x) .$$

En analyse, on utilise essentiellement des *fonctions numériques* d'une variable, c'est-à-dire des applications définies sur une partie du corps $\mathbf{R}$ des nombres réels (cette partie pouvant être égale à $\mathbf{R}$ tout entier), à valeurs dans $\mathbf{R}$.

(Nous rencontrerons plus généralement des fonctions numériques de plusieurs variables, l'ensemble de définition étant une partie de $\mathbf{R}^p$, où p est un entier naturel non nul. Nous rencontrerons aussi des fonctions à valeurs complexes, l'ensemble d'arrivée étant cette fois le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes.)

Exemples. Le lecteur est familiarisé avec les fonctions suivantes :

— la fonction *linéaire* $x \mapsto ax$, où $a \in \mathbf{R}$;
— la fonction *affine* $x \mapsto ax+b$, où $a, b \in \mathbf{R}$;
— la fonction *trinomiale du second degré* $x \mapsto ax^2+bx+c$, où $a, b, c \in \mathbf{R}$;
— la fonction sinus $x \mapsto \sin x$.

La dépense W en énergie électrique consommée par une lampe dépend de la durée t d'éclairage, et se traduit par une fonction linéaire :

$$W = RI^2 t .$$

L'intensité I d'un courant alternatif est une fonction sinusoïdale du temps :

$$I = I_0 \sin \omega t .$$

Ensemble de définition. La première étape de l'étude d'une fonction consiste à déterminer l'ensemble de définition; celui-ci est généralement un intervalle de $\mathbf{R}$, ou la réunion d'un ensemble fini d'intervalles.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \sin x$ est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

La fonction $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ est définie sur l'intervalle fermé borné $[-2, 2]$; la fonction $x \mapsto 1/(\sqrt{x^2-4})$ est définie sur $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{-x^2-1}$ a un ensemble de définition vide.

1.2 Limite d'une fonction en un point. Nous avons déjà rencontré au tome 1 la notion de limite d'une suite. La notion de limite d'une fonction en un point, assez voisine de la précédente, est *fondamentale en Analyse*.

Considérons une fonction f définie sur une partie P de $\mathbf{R}$ et un nombre réel x_0. Supposons que x_0 appartienne à P ou, plus généralement, que x_0 soit une extrémité d'un intervalle ouvert contenu dans P. De manière intuitive, on dit que

$f(x)$ admet pour limite un nombre réel l lorsque x tend vers x_0 si, lorsqu'on donne à x des valeurs de plus en plus voisines de x_0, $f(x)$ prend des valeurs aussi voisines que l'on veut de l.

En toute rigueur, cela se traduit de la manière suivante : pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un nombre réel strictement positif η tel que la relation

$$x \in [x_0-\eta,\ x_0+\eta] \cap (P-\{x_0\})$$

implique la relation

$$f(x) \in [l-\varepsilon,\ l+\varepsilon]\,.$$

En abrégé, $|x-x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$, étant bien entendu que x appartient à l'ensemble de définition P, sans être égal à x_0.

(On remarquera que s'il existe un tel nombre η pour de « petites » valeurs de ε, ce nombre η convient encore pour de « grandes » valeurs de ε. C'est pourquoi on précise souvent que le nombre ε est arbitrairement petit, au lieu de dire tout simplement qu'il est arbitraire!)

Nous allons démontrer le résultat essentiel que voici : *un tel nombre l* (s'il existe) *est unique*.

Supposons en effet qu'il existe un nombre l' différent de l satisfaisant à la propriété précédente. Alors $l'-l$ est non nul, et nous pouvons prendre pour ε un nombre réel strictement positif et strictement inférieur à $|l'-l|/2$. Il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que, pour tout point x de $[x_0-\eta,\ x_0+\eta] \cap P$ différent de x_0,

$$|f(x)-l| < |l'-l|/2\,, \tag{1}$$

et un nombre réel $\eta' > 0$ tel que, pour tout point x de

$$[x_0-\eta',\ x_0+\eta'] \cap P$$

différent de x_0,

$$|f(x)-l'| < |l'-l|/2\,. \tag{1'}$$

Posons $\eta_1 = \inf(\eta, \eta')$; alors, pour tout point x de $[x_0-\eta_1,\ x_0+\eta_1] \cap P$ différent de x_0, les inégalités (1) et (1') sont vérifiées. L'inégalité du triangle conduit à la relation contradictoire

$$|l'-l| < \frac{|l'-l|}{2} + \frac{|l'-l|}{2} = |l'-l|\,.$$

Le nombre réel l s'appelle la *limite* de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0, ou encore la limite de f au point x_0; on le note :

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x)\,.$$

Voici les principaux résultats sur les fonctions admettant une limite :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur des parties P et Q de $\mathbf{R}$. On suppose que $f(P)$ est contenu dans Q, ce qui permet de définir la fonction composée $g \circ f$. (Rappelons que c'est la fonction qui à tout élément x de P associe le nombre $g[f(x)]$.) *Si f admet une limite l au point x_0 et si g admet une limite m au point l, alors $g \circ f$ admet la limite m au point x_0.*

Soient f et g deux fonctions définies sur une partie P, admettant des limites l et m au point x_0. Alors $f+g$ admet pour limite $l+m$, et fg admet pour limite lm.

(Il en découle que l'ensemble des fonctions définies sur P et admettant une limite au point x_0 est une sous-algèbre unitaire de l'algèbre des fonctions définies sur P. De plus, l'application qui à toute fonction f associe sa limite au point x_0 est un morphisme d'algèbres.)

Enfin, si la fonction g ne s'annule pas sur P et si $m \neq 0$, f/g a pour limite l/m.

Ces résultats intuitifs sont *très importants*; leurs démonstrations sont délicates. Montrons par exemple que $f+g$ a pour limite $l+m$. En effet, considérons un nombre réel strictement positif ε. Puisque f admet pour limite l, il existe un nombre réel strictement positif η_1 tel que $|x-x_0| \leqslant \eta_1$ implique $|f(x)-l| \leqslant \varepsilon/2$. De même, puisque g admet pour limite m, il existe un nombre réel strictement positif η_2 tel que $|x-x_0| \leqslant \eta_2$ implique $|g(x)-m| \leqslant \varepsilon/2$. Posons $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$; le nombre η, étant le plus petit des deux nombres réels strictement positifs η_1 et η_2, est lui-même strictement positif. Pour tout élément x de $[x_0-\eta, x_0+\eta]$,

$$|f(x)+g(x)-(l+m)| \leqslant |f(x)-l| + |g(x)-m| \leqslant \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon ,$$

ce qui montre que $f+g$ admet pour limite $l+m$.

(Ce résultat est double : il montre à la fois que la somme de deux fonctions admet une limite, et que cette limite est la somme des deux limites.)

1.3 Fonction continue en un point. Voici une notion étroitement liée à celle de limite :

Considérons une fonction f définie sur une partie P de $\mathbf{R}$. On dit que f est *continue* en un point x_0 si

a) la fonction f est définie en ce point, c'est-à-dire si $x_0 \in P$;

b) la fonction f admet pour limite $f(x_0)$ au point x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Les résultats sur les fonctions admettant une limite se particularisent aisément au cas des fonctions continues en un point :

Soient f et g deux fonctions définies sur des parties P et Q. On suppose que $f(P)$ est contenu dans Q, que f est continue en un point x_0 de P et que g est continue au point $f(x_0)$. Alors la fonction composée $g \circ f$ est continue au point x_0.

Soient f et g deux fonctions définies sur une partie P, continues en un point x_0 de P. Alors $f+g$ et fg sont continues en x_0. Si g ne s'annule pas, f/g est continue en x_0.

EXEMPLES

1. Montrons que la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par la relation

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

est continue au point $x_0 = 3$. Or,

$$f(x_0) = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

et

$$|f(x)-2| = |\sqrt{x+1}-2| = \frac{|x-3|}{\sqrt{x+1}+2} \leqslant \frac{|x-3|}{2}.$$

L'inégalité $|f(x)-2| \leqslant \varepsilon$ est donc réalisée pour $|x-3| \leqslant 2\varepsilon$. Il suffit donc de prendre $\eta = 2\varepsilon$. Ainsi, pour obtenir $|f(x)-2| \leqslant 0{,}01$, il suffit de prendre $|x-3| \leqslant 0{,}02$, c'est-à-dire x dans l'intervalle $[2{,}98 ; 3{,}02]$.

2. La fonction f définie sur **R** par

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \qquad \text{si } x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

n'est pas continue au point 0. En effet, pour $x>0, f(x)=1$ et pour $x<0, f(x)=-1$. Donc $f(x)$ a pour limite 1 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives et -1 lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives. La fonction f, n'ayant pas de limite au point 0, ne peut être continue en ce point.

On dit que la fonction f présente une *discontinuité*. Cela se traduit par un « saut » dans le graphe de la fonction f (Fig. 1.1).

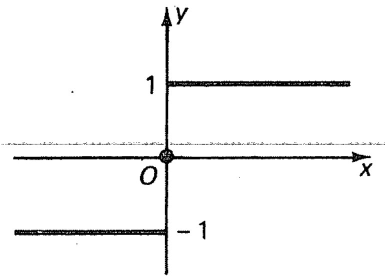


FIG. 1.1

On rencontre de telles fonctions en électricité dans un circuit comprenant un interrupteur (en négligeant les courants de rupture).

1.4 Continuité sur un intervalle. La plupart des fonctions que l'on rencontre en pratique ne présentent pas de discontinuité.

On dit qu'une fonction f définie sur une partie P de **R** est continue sur P si elle est continue en chaque point de P.

EXEMPLES

Toute fonction affine est continue sur **R**. En particulier, les fonctions constantes et les fonctions linéaires sont continues sur **R**.

La fonction sinus est continue sur **R**.

Les résultats sur les fonctions continues en un point s'appliquent bien entendu aux fonctions continues en tout point :

Soient f et g deux fonctions définies sur des parties P et Q. On suppose que $f(P)$ est contenu dans Q, que f est continue sur P et que g est continue sur Q. Alors $g \circ f$ est continue sur P.

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur une partie P. Alors $f+g$ et fg sont continues sur P. Si g ne s'annule pas, f/g est continue sur P.

(Comme d'habitude, on peut traduire de manière algébrique les propriétés de l'ensemble des fonctions considérées : l'ensemble des fonctions continues sur P est une sous-algèbre unitaire de l'algèbre des fonctions définies sur P.)

Par récurrence sur l'entier naturel m, on démontre que le produit de m fonctions continues sur P est encore une fonction continue sur P. En particulier, la fonction puissance m-ième, c'est-à-dire la fonction $x \mapsto x^m$ est continue sur $\mathbf{R}$; c'est en effet le produit de m fonctions égales à l'application identique $x \mapsto x$.

L'étude des fonctions continues sur un *intervalle* de $\mathbf{R}$ conduit à deux théorèmes fondamentaux, que nous admettrons :

Théorème des valeurs intermédiaires. *Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de* $\mathbf{R}$. *Alors l'image $f(I)$ de l'intervalle I par f est encore un intervalle de* $\mathbf{R}$.

D'après la définition des intervalles, cet énoncé équivaut au suivant :

Soient c et d deux points quelconques de l'intervalle I, et k un point de l'intervalle fermé $[f(c), f(d)]$ (Fig. 1.2). *Il existe alors un point x_0 de l'intervalle* $[c, d]$ *tel que*

$$f(x_0) = k\,.$$

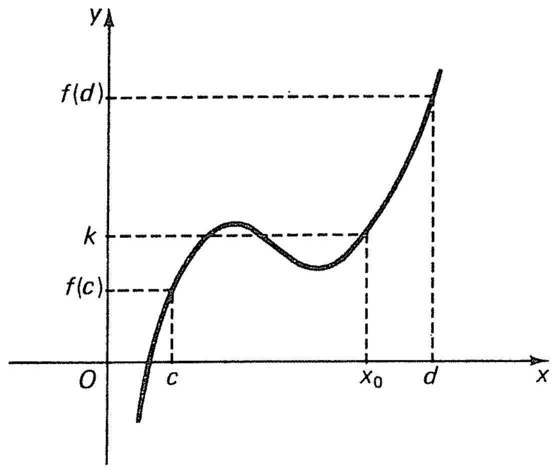


FIG. 1.2

Image continue d'un intervalle fermé borné. *Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de* $\mathbf{R}$. *Si I est fermé borné, alors l'image $f(I)$ de I par f est encore un intervalle fermé borné.*

L'image de f, étant bornée, admet une borne inférieure m et une borne supérieure M; de plus, m et M ne sont autres que l'origine et l'extrémité de l'intervalle $f(I)$. Il existe donc au moins un point x_1 de I tel que $f(x_1) = m$, et au moins un point x_2 de I tel que $f(x_2) = M$. On dit encore f atteint ses bornes.

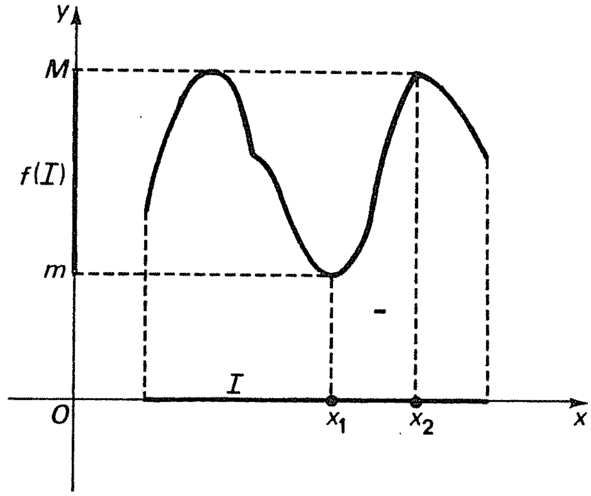


FIG. 1.3

1.5 Croissance d'une fonction. On dit qu'une fonction f est *croissante* sur une partie P de $\mathbf{R}$ si, pour tout couple (x, x') d'éléments de P, la relation $x \leqslant x'$ implique la relation $f(x) \leqslant f(x')$. Autrement dit, la variable et la fonction varient dans le

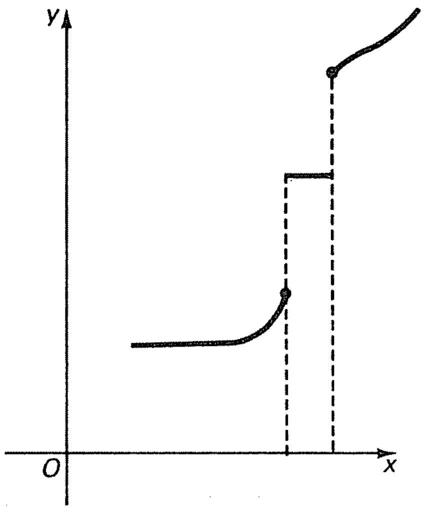


FIG. 1.4

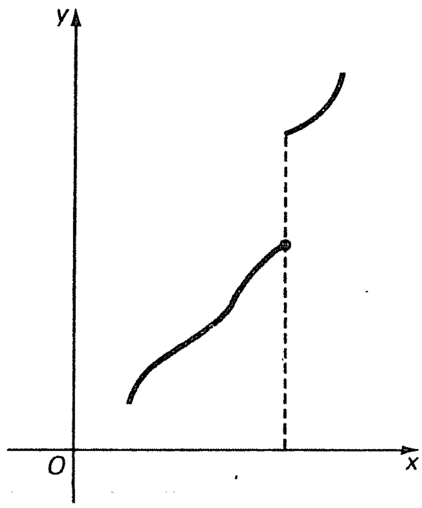


FIG. 1.5

même sens (Fig. 1.3). Si la relation $x<x'$ implique $f(x)<f(x')$, la fonction f est dite *strictement croissante* (Fig. 1.4).

On dit de même que f est *décroissante* sur P si, pour tout couple (x, x') d'éléments de P, la relation $x \leqslant x'$ implique la relation $f(x) \geqslant f(x')$. Dans ce cas, la variable et la fonction varient en sens contraires (Fig. 1.5). Si la relation $x < x'$ implique $f(x)>f(x')$, on dit que f est *strictement décroissante* (Fig. 1.6).

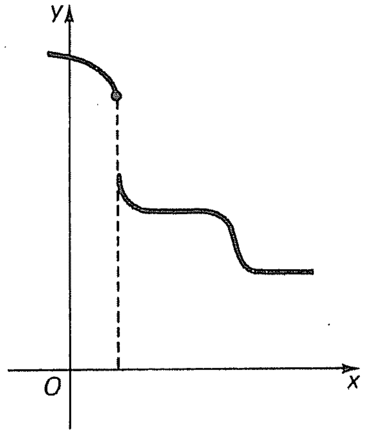


FIG. 1.6

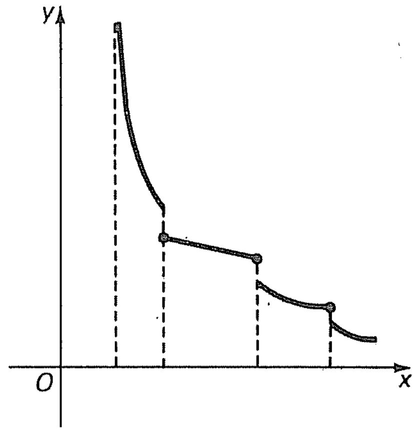


FIG. 1.7

Enfin, une fonction est *monotone* si elle est ou bien croissante, ou bien décroissante, *strictement monotone* si elle est ou bien strictement croissante, ou bien strictement décroissante.

EXEMPLES

Une fonction linéaire $x \mapsto ax$ ou, plus généralement, une fonction affine $x \mapsto ax+b$, est monotone sur $\mathbf{R}$; plus précisément, elle est constante si $a=0$, strictement croissante si $a>0$ et strictement décroissante si $a<0$. En effet, la relation $x<x'$ implique

$$ax<ax' \text{ et, par suite, } ax+b<ax'+b \qquad \text{si } a>0\,;$$
$$ax>ax' \text{ et, par suite, } ax+b>ax'+b \qquad \text{si } a<0\,.$$

La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$. Cela découle aussitôt de la relation $x'^2-x^2=(x'-x)(x'+x)$ et de la règle des signes. On remarquera que cette fonction n'est pas monotone sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Examinons la monotonie de la composée de deux fonctions monotones :

Soient f une fonction numérique définie sur une partie P de $\mathbf{R}$, et g une fonction numérique définie sur une partie Q de $\mathbf{R}$ contenant $f(P)$.

Si f et g sont toutes deux croissantes, ou toutes deux décroissantes, $g \circ f$ est croissante.

Si f et g sont toutes deux strictement croissantes, ou toutes deux strictement décroissantes, $g \circ f$ est strictement croissante.

Si l'une des fonctions f et g est croissante, tandis que l'autre est décroissante, $g \circ f$ est décroissante.

Si l'une des fonctions f et g est strictement croissante, tandis que l'autre est strictement décroissante, $g \circ f$ est strictement décroissante.

Supposons par exemple f croissante et g décroissante. Pour tout couple (x, x') d'éléments de P tel que $x \leqslant x'$,

$$f(x) \leqslant f(x'),$$

et

$$g[f(x)] \geqslant g[f(x')],$$

soit

$$(g \circ f)(x) \geqslant (g \circ f)(x').$$

La fonction $g \circ f$ est donc décroissante.

Si de plus f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective; $g \circ f$ est donc strictement décroissante.

(Les résultats précédents se retiennent fort bien, car ils rappellent la règle des signes : + par + donne +, − par − donne +, + par − et − par + donnent −.)

Passons aux opérations algébriques sur les fonctions monotones : somme et produit.

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur une partie P de **R**.

Si f et g sont croissantes, $f+g$ est croissante; si f et g sont décroissantes, $f+g$ est décroissante.

Si f et g sont positives et croissantes, fg est croissante.

Si f est croissante, $-f$ est décroissante.

Si f est à valeurs strictement positives et croissante, $1/f$ est décroissante.

Soient x et x' deux éléments de P tels que $x \leqslant x'$. Supposons par exemple f et g croissantes. Alors

$$f(x) \leqslant f(x')$$
$$g(x) \leqslant g(x'),$$

et

$$f(x)+g(x) \leqslant f(x')+g(x'),$$

soit

$$(f+g)(x) \leqslant (f+g)(x').$$

Si de plus $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$,

$$f(x)g(x) \leqslant f(x')g(x'),$$

soit

$$(fg)(x) \leqslant (fg)(x').$$

Si $f(x) \leqslant f(x')$, il est clair que $-f(x) \geqslant -f(x')$.
Enfin, si $f(x) > 0$,

$$\frac{1}{f(x)} \geqslant \frac{1}{f(x')}.$$

1.6 Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone. Conformément au tome 1, on dit qu'une fonction numérique f définie sur une partie P de $\mathbf{R}$ est inversible s'il existe une fonction numérique g définie sur $Q = f(P)$ telle que

$$g \circ f = I_P \qquad \text{et} \qquad f \circ g = I_Q .$$

Une telle fonction g est unique; on l'appelle fonction réciproque de f, et on la note f^{-1}. La fonction f^{-1} est inversible, et sa fonction réciproque n'est autre que f.

Soit $(x, f(x))$ un point du graphe de f. Le point $(f(x), x)$ appartient au graphe de f^{-1}. Il s'ensuit que les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (Fig. 1.8).

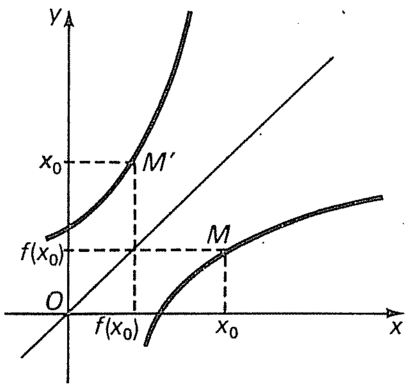


FIG. 1.8

Si f est monotone, il en est de même de f^{-1}. Plus précisément :

Soit f une fonction numérique définie sur une partie P de $\mathbf{R}$. Si f est strictement monotone, l'application de P dans $f(P)$ définie par la formule

$$x \mapsto f(x)$$

est bijective.

Alors l'application réciproque f^{-1}, définie sur $f(P)$, est strictement monotone. Plus précisément, si f est strictement croissante, f^{-1} est strictement croissante; si f est strictement décroissante, f^{-1} est strictement décroissante.

Nous savons déjà que l'application f^{-1} de $f(P)$ dans $\mathbf{R}$ est injective.

Supposons par exemple f strictement décroissante. Soient y et y' deux éléments de $f(P)$ tels que $y < y'$. Il suffit de montrer que la relation $f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y')$ est contradictoire. Posons à cet effet $x=f^{-1}(y)$ et $x'=f^{-1}(y')$. Puisque f est décroissante, $f(x) \geqslant f(x')$, soit $y \geqslant y'$, ce qui contredit l'hypothèse.

Lorsque la fonction f est continue sur un intervalle I, il est *essentiel* de supposer que f est strictement monotone : *pour qu'une fonction f continue sur un intervalle I admette une fonction réciproque, il faut et il suffit que f soit strictement monotone.* Dans ces conditions, la fonction f^{-1} est strictement monotone, de même sens que f, et continue sur l'intervalle $f(I)$.

Nous allons appliquer ce théorème à des fonctions monotones particulièrement importantes : fonction puissance m-ième, fonctions trigonométriques.

1.7 Fonction puissance m-ième, m entier naturel non nul. Cette fonction est définie sur **R** par la relation

$$f(x)=x^m .$$

Nous avons vu qu'elle est continue sur **R**.

Si m est pair :

$$(-x)^m=(x)^m ;$$

son graphe est symétrique par rapport à l'axe Oy.

Si m est impair :

$$(-x)^m=-(x)^m ;$$

son graphe est symétrique par rapport à l'origine des axes.

Il suffit donc d'étudier cette fonction sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto x$ étant strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, il en est de même de la fonction f, produit de m fonctions strictement croissantes. Indiquons le tableau de variation de cette fonction :

x	0		$+\infty$
x^m	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le coefficient angulaire de la tangente au graphe à l'origine s'obtient en cherchant la limite du rapport y/x quand $x \to 0$.

$$\frac{y}{x}=x^{m-1}, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 0} x^{m-1}=0 \qquad \text{si } m \neq 1 .$$

L'axe Ox est tangent au graphe. On a tracé sur la figure 1.9 les graphes des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$.

Par extension, on dit qu'une fonction f est *paire* si, pour tout point x,

$$f(-x)=f(x) .$$

On dit que f est *impaire* si, pour tout point x,

$$f(-x)=-f(x) .$$

(Ainsi, la fonction f définie par $f(x)=x^m$ est paire si m est pair, impaire si m est impair.)

Le graphe d'une fonction paire admet Oy pour axe de symétrie. Le graphe d'une fonction impaire admet le point O pour centre de symétrie. Dans les deux cas, on peut ramener l'étude de f au cas où x est positif.

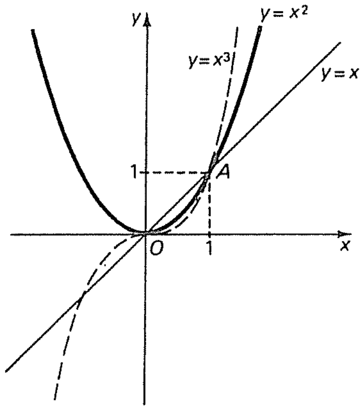


FIG. 1.9

1.8 Fonction racine *m*-ième, *m* entier naturel non nul. La fonction puissance m-ième étudiée au n° 1.7 est définie et continue sur $\mathbf{R}$; cependant, elle est strictement monotone sur $\mathbf{R}$ si m est impair, et seulement sur les intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$ si m est pair.

Il faut donc distinguer deux cas.

Si m est *impair*, la fonction puissance m-ième admet une fonction réciproque strictement croissante, définie et continue sur $\mathbf{R}$ et dont l'ensemble des valeurs est $\mathbf{R}$. Cette fonction est appelée fonction racine m-ième, et notée $x \mapsto \sqrt[m]{x}$. Par définition,

$$y = \sqrt[m]{x} \text{ est équivalent à } x = y^m.$$

Le tableau de variation sur l'intervalle $[0, +\infty[$ est le suivant :

x	0		$+\infty$
$\sqrt[m]{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées (Fig. 1.10).

Si m est *pair*, la fonction racine m-ième n'admet une fonction réciproque que sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Par définition,

$$y = \sqrt[m]{x} \quad \text{est équivalent a} \quad x = y^m \quad \text{et} \quad y \geqslant 0\,.$$

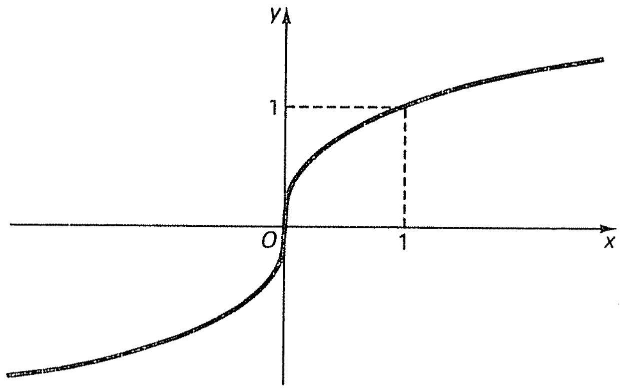


FIG. 1.10

(Lorsque $m = 2$, la fonction racine m-ième s'appelle fonction *racine carrée* et se note $x \mapsto \sqrt{x}$.)

Le tableau de variation est le même que le précédent. Le graphe ne présente pas de symétrie (Fig. 1.11).

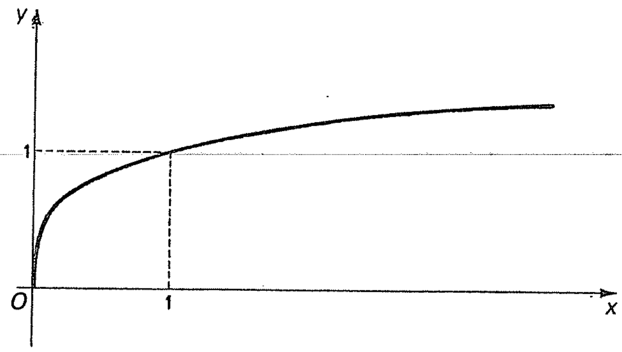


FIG. 1.11

1.9 Fonctions circulaires réciproques. On appelle ainsi les fonctions réciproques des fonctions sinus, cosinus et tangente. Toutefois, pour qu'il existe une fonction réciproque, il faut d'abord restreindre l'intervalle de définition de la fonction donnée, afin de la rendre injective.

Fonction Arc sinus. La fonction sinus est définie, continue, *strictement croissante* sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ et prend ses valeurs sur l'intervalle $[-1, 1]$. On peut donc définir une fonction réciproque, continue, *strictement croissante* sur l'intervalle $[-1, 1]$ et prenant ses valeurs sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. On la nomme « *fonction Arc sinus* ».

Par définition :

$$\boxed{y = \text{Arc}\sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ -\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2 \end{cases}}.$$

Le graphe de la fonction $x \mapsto \text{Arc}\sin x$ est obtenu sur la figure 1.12 en prenant le symétrique du graphe de la restriction à $[-\pi/2, \pi/2]$ de la fonction $x \mapsto \sin x$ par rapport à la première bissectrice.

(La relation fonctionnelle $y = \text{Arc}\sin x$ signifie que y est la mesure comprise entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ de l'arc dont le sinus est x.

Ainsi $\text{Arc}\sin 1/2 = \pi/6$, car $\pi/6$ est la mesure comprise entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ de l'arc dont le sinus est $1/2$.)

Des valeurs des sinus de nombres remarquables, nous déduisons le tableau :

x	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\text{Arc}\sin x$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$

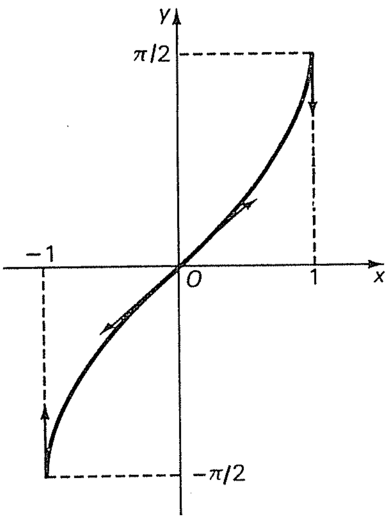


FIG. 1.12

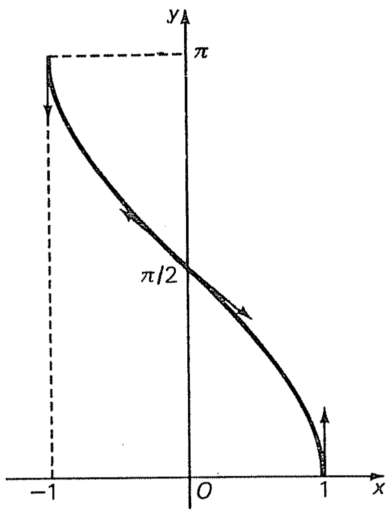


FIG. 1.13

Remarque. Soit x un élément de l'intervalle $[-1, 1]$; considérons la relation :

$$\sin y = x .$$

Si φ est la mesure comprise entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ d'un arc tel que :

$$\sin \varphi = x ,$$

d'après ce qui précède :

$$\varphi = \text{Arc}\sin x\,.$$

Les solutions de l'équation trigonométrique

$$\sin y = x \quad \text{ou} \quad \sin y = \sin \varphi$$

sont :

$$\begin{array}{l} y = \varphi + 2k\pi \\ y = \pi - \varphi + 2k\pi \end{array} \quad \text{soit} \quad \begin{array}{l} y = \text{Arc}\sin x + 2k\pi \\ y = \pi - \text{Arc}\sin x + 2k\pi\,, \end{array}$$

où k est un entier rationnel.

Fonction Arc cosinus. La fonction *cosinus* est définie, continue, strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$ et prend ses valeurs sur l'intervalle $[-1, 1]$. On peut donc définir une fonction réciproque, continue, strictement décroissante sur l'intervalle $[-1, 1]$ et prenant ses valeurs sur l'intervalle $[0, \pi]$. On la nomme *fonction Arc cosinus.*

Par définition :

$$\boxed{y = \text{Arc}\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{cases}}$$

Le graphe de la fonction $x \mapsto \text{Arc}\cos x$ est symétrique du graphe de la restriction à $[0, \pi]$ de la fonction $x \mapsto \cos x$ (Fig. 1.13).

(La relation fonctionnelle $y = \text{Arc}\cos x$ signifie que y est la mesure comprise entre 0 et π de l'arc dont le cosinus est x.

Ainsi $\text{Arc}\cos 1/2 = \pi/3$, car $\pi/3$ est la mesure comprise entre 0 et π de l'arc dont le cosinus est $1/2$.)

Des valeurs des cosinus de nombres remarquables, nous déduisons le tableau :

x	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\text{Arc}\cos x$	π	$5\pi/6$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$	0

Remarque. Soit x un élément de l'intervalle $[-1, 1]$; considérons la relation :

$$\cos y = x\,.$$

Si φ est la mesure comprise entre 0 et π d'un arc tel que

$$\cos \varphi = x,$$

d'après ce qui précède :

$$\varphi = \text{Arc}\cos x\,.$$

Les solutions de l'équation trigonométrique

$$\cos y = x \qquad \text{ou} \qquad \cos y = \cos \varphi$$

sont

$$y = \pm\varphi + 2k\pi \quad \text{soit} \quad y = \pm\text{Arc}\cos x + 2k\pi\,,$$

où k est un entier rationnel.

Fonction Arc tangente. La fonction *tangente* est définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ et prend ses valeurs sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. On peut donc définir une fonction réciproque, continue, strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ et prenant ses valeurs sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. On la nomme « *fonction Arc tangente* ».

Par définition :

$$\boxed{y = \text{Arc tg}\, x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{tg}\, y \\ -\pi/2 < y < \pi/2 \end{cases}}.$$

Le graphe de la fonction $x \mapsto \text{Arc tg}\, x$ est symétrique du graphe de la restriction à $]-\pi/2, \pi/2[$ de la fonction $x \mapsto \text{tg}\, x$ (Fig. 1.14).

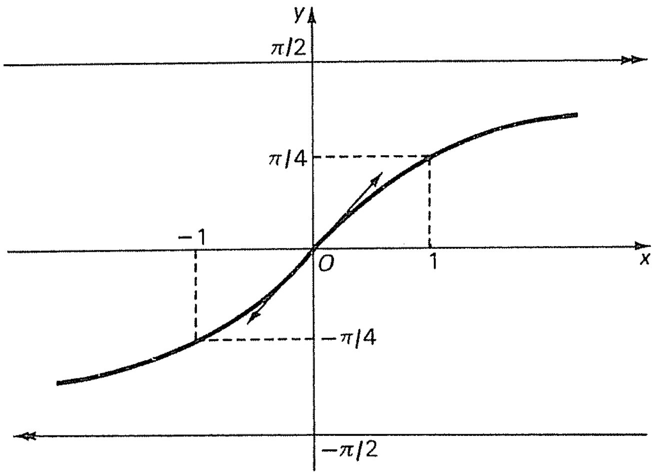


FIG. 1.14

(La relation fonctionnelle $y = \text{Arc tg}\, x$ signifie que y est la mesure comprise entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ de l'arc dont la tangente est x.

Ainsi $\text{Arc tg}\, 1 = \pi/4$, car $\pi/4$ est la mesure comprise entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ de l'arc dont la tangente est 1.)

Des valeurs des tangentes de nombres remarquables, nous déduisons le tableau :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\text{Arc tg}\, x$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

Remarque. Soit x un nombre réel; considérons la relation :

$$\text{tg}\, y = x .$$

Si φ est la mesure comprise entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ d'un arc tel que

$$\operatorname{tg} \varphi = x ,$$

on en déduit que

$$\varphi = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x .$$

Les solutions de l'équation trigonométrique

$$\operatorname{tg} y = x \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} \varphi$$

sont

$$y = \varphi + k\pi \qquad \text{soit} \qquad y = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x + k\pi ,$$

où k est un entier rationnel.

1.10 Fonctions à valeurs complexes. Dans de nombreux problèmes (dérivation, intégration, calcul des primitives, calcul des développements limités, équations différentielles), il est commode de considérer des fonctions d'une variable réelle *à valeurs complexes*, c'est-à-dire des applications définies sur une partie du corps des nombres réels à valeurs dans le corps des nombres complexes. Une telle fonction f est de la forme

$$f = P + \mathrm{j}Q ,$$

où P et Q sont des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

Plus précisément, P associe à la valeur de la variable x la partie réelle du nombre complexe $f(x)$; de même, Q associe à la valeur de la variable x la partie imaginaire de $f(x)$ (laquelle est un nombre réel).

Par exemple, si f est définie par la formule

$$f(x) = 3x + \mathrm{j}(x^2 - 1) ,$$

les fonctions P et Q sont définies par

$$P(x) = 3x \qquad \text{et} \qquad Q(x) = x^2 - 1 .$$

Nous avons déjà introduit au tome 1 la fonction $x \mapsto e^{jx}$. L'ensemble de définition est $\mathbf{R}$ tout entier; les fonctions P et Q ne sont autres que les fonctions cosinus et sinus, puisque

$$f(x) = e^{jx} = \cos x + \mathrm{j} \sin x .$$

La définition des limites s'étend au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes; cette fois, la limite l est *un nombre complexe*, et le symbole $|f(x) - l|$ doit être lu « module » de $f(x) - l$, et non plus « valeur absolue ».

On démontre aisément que f admet une limite si et seulement si P et Q admettent des limites. Dans ces conditions,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} P(x) + \mathrm{j} \lim_{x \to x_0} Q(x) .$$

On se ramène donc aussitôt au cas des fonctions à valeurs réelles.

De même, pour que f soit continue, il faut et il suffit que P et Q le soient.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto e^{jx}$ est continue sur $\mathbf{R}$, car il en est ainsi des fonctions cosinus et sinus.

EXERCICES

Ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1.1 $y = \dfrac{x}{x^2-1}$. **1.2** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2}}$.

1.3 $y = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$. **1.4** $y = \dfrac{1}{\sin x - \cos x}$.

1.5 $y = \sqrt{(x-1)(x-5)(x-7)}$. **1.6** $y = \sqrt{x^2-6x+8}$.

1.7 $y = \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}$. **1.8** $y = \sqrt{\sin^3 x}$.

Parties entière et fractionnaire d'un nombre réel

On appelle *partie entière* d'un nombre réel x, et on note $E(x)$, le plus grand des entiers rationnels inférieurs à x; on appelle *partie fractionnaire* de x, et on note $F(x)$, le nombre $x - E(x)$.

Étudier et représenter graphiquement sur l'intervalle $[-3, 3]$ les fonctions suivantes :

1.9 $y = E(x)$. **1.10** $y = F(x)$.

1.11 $y = F(x) - [F(x)]^2$. **1.12** $y = E(x) + [F(x)]^2$.

1.13 $y = xE(x)$.

1.14 Étudier la continuité de la fonction J définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par la formule

$$x \mapsto xE\left(\frac{1}{x}\right);$$

construire le graphe de sa restriction à $]-\infty, -1/4] \cup [1/4, +\infty[$.

1.15 Étudier la continuité de la fonction K définie sur $[1, +\infty[$ par la formule

$$x \mapsto \frac{x \sin \pi x}{E(x)};$$

construire son graphe.

Fonctions continues

1.16 Montrer directement que l'ensemble des solutions de l'inéquation

$$\left| \frac{x^2+3x-1}{x^2-x+1} - 3 \right| \leqslant \frac{1}{100}$$

contient un intervalle fermé de centre 1 non réduit à un point.

1.17 Étudier l'existence d'une limite, d'une limite à gauche, d'une limite à droite, au point 0, pour chacune des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{|x|}{x}, \qquad x \mapsto \frac{1}{1+x+|x|/x}, \qquad x \mapsto \sin \frac{1}{1+x+|x|/x}.$$

Peut-on prolonger ces fonctions par continuité ?

1.18 Montrer directement que la fonction $x \mapsto \sin(\cos x)$ est continue sur $\mathbf{R}$.

1.19 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $[0, 1]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

Fonctions réciproques

1.20 Soit f la fonction numérique définie sur les intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$ par la formule

$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}.$$

Montrer que f est continue sur son ensemble de définition, et strictement croissante sur chacun des intervalles I_1, I_2 et I_3.
Montrer que f possède sur chacun de ces intervalles une fonction réciproque, que l'on déterminera.
Déterminer les nombres réels θ tels que

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Arc\,sin}[f(\operatorname{tg}\theta)].$$

1.21 Résoudre l'équation $\sin(\operatorname{Arc\,tg} x) = \operatorname{tg}(2 \operatorname{Arc\,tg} x)$.

CHAPITRE 2

LES DÉRIVÉES

2.1 Introduction. Ce chapitre traite de la notion de dérivée d'une fonction, outil mathématique très puissant qui sert d'introduction à l'étude du calcul différentiel et intégral.

Les dérivées sont apparues, un peu obscurément d'ailleurs, au XVII^e siècle (le « grand » siècle), à la suite de l'étude des tangentes aux courbes, faite par le mathématicien et physicien anglais Newton et par le mathématicien et philosophe allemand Leibniz.

Le présent chapitre est consacré au calcul des dérivées de fonctions simples. Les chapitres suivants traitent des applications des dérivées à l'étude du sens de variation des fonctions, et en particulier à la recherche des maximums et minimums.

2.2 Préliminaire au calcul des dérivées. Avant d'aborder la définition de la dérivée d'une fonction, situons le problème en prenant un exemple.

Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$, dont le graphe est une parabole d'axe Oy et de tangente au sommet Ox. Soit P un point de cette parabole, de coordonnées x_0 et $y_0 = x_0^2$ (Fig. 2.1).

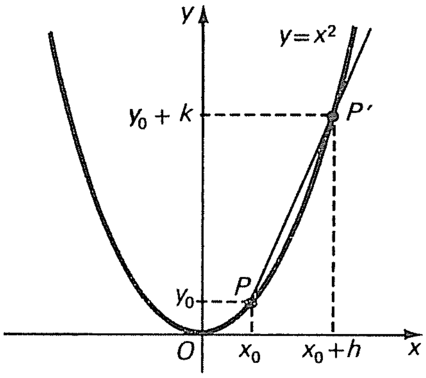


FIG. 2.1

Donnons à x_0 un accroissement que l'on représente généralement par le symbole Δx ou la lettre h. Il lui correspond sur la courbe un point P' d'abscisse $x_0 + h$ et d'ordonnée

$$y = (x_0 + h)^2 = x_0^2 + 2hx_0 + h^2.$$

L'accroissement subi par l'ordonnée y_0 du point P est désigné par le symbole Δy ou la lettre k. Évaluons-le :

$$k = y - y_0 = x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2 = 2hx_0 + h^2.$$

Évaluons le rapport k/h qui représente le coefficient angulaire de la droite PP' :

$$\frac{k}{h} = 2x_0 + h.$$

Si on fait tendre h vers zéro, c'est-à-dire si P' tend vers le point P sur la courbe, k tend vers zéro et le rapport k/h tend vers $2x_0$.

Donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = 2x_0.$$

Ce nombre $2x_0$ est par définition le nombre dérivé de la fonction $y = x^2$ pour la valeur x_0 de la variable.

Nous verrons au n° 2.10 que ce nombre dérivé représente le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point P.

Cet exemple nous permet de définir plus généralement la notion de nombre dérivé.

2.3 Définition de la dérivée d'une fonction. Soit f une fonction définie dans un intervalle contenant x_0. Désignons par $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$ les valeurs prises par la fonction pour $x = x_0$ et $x = x_0 + h$.

$\Delta x = h$ représente l'accroissement de la variable à partir de x_0,

$\Delta y = k$ représente l'accroissement de la fonction à partir de $f(x_0)$.

Lorsque le rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable tend vers une limite finie quand h tend vers zéro, cette limite est le nombre dérivé de la fonction f au point x_0.

On symbolise cette dérivée par y'_0 ou $f'(x_0)$. Donc :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

2.4 Importance de la notion de dérivée. La notion de dérivée intervient dans un grand nombre de phénomènes; par exemple si nous prenons le temps t comme variable :

une vitesse $\quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad$ est la dérivée de l'espace par rapport au temps,

une accélération $\quad \gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad$ est la dérivée d'une vitesse par rapport au temps, une intensité de courant $I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$ est la dérivée de la quantité d'électricité par rapport au temps,

une force électromotrice induite $E = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ est la dérivée du flux par rapport au temps, etc.

2.5 Procédé général de calcul des dérivées. Par définition même, on opère de la manière suivante :

1° On donne à la variable x un accroissement $\Delta x = h$.

2° On calcule l'accroissement correspondant de la fonction :

$$\Delta y = k = f(x_0 + h) - f(x_0)\,.$$

3° On forme le quotient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

4° On cherche la limite de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quand $\Delta x \to 0$. Cette limite est le nombre dérivé $f'(x_0)$.

EXEMPLE. *Calculer la dérivée de $y = 1/x$ pour $x_0 = 2$.*

Posons $x_1 = x_0 + h = 2 + h$; on obtient $y_0 = 1/2$ et $y_1 = 1/(2+h)$.

D'où

$$\Delta y = k = \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} = \frac{-h}{2(2+h)}.$$

Soit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k}{h} = -\frac{1}{2(2+h)}.$$

Lorsque $h \to 0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to -\frac{1}{4}$$

et le nombre dérivé est $-1/4$.

2.6 Fonction dérivée d'une fonction. Lorsque la fonction f admet un nombre dérivé pour toute valeur x_0 de x dans un intervalle I, on dit que f est *dérivable* sur I. Sa dérivée qui est fonction de la valeur x_0 attribuée à x est une nouvelle fonction de x que l'on appelle *fonction dérivée de f* ou plus simplement *dérivée de f*.

On la désigne par y' ou f'.

Donc

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Dans cette dernière expression, le calcul de la fonction dérivée s'effectue en supposant x constant.

— Par exemple, soit f une fonction constante et égale à a. La fonction f est dérivable, et sa dérivée est nulle.

En effet, pour toute valeur x_0 de x, et pour tout accroissement h de la variable, l'accroissement k de la fonction f est nul. Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Ainsi, la dérivée f' de f s'annule en tout point x_0.

— Prenons maintenant pour f la fonction $x \mapsto x$. Si on donne à x l'accroissement h, la fonction prend l'accroissement

$$k = (x+h) - x = h.$$

Le rapport de ces accroissements est $k/h = 1$. Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{k}{h} = 1.$$

Ainsi, la fonction f est dérivable, et sa dérivée est la fonction constante et égale à 1.

2.7 Dérivées des fonctions circulaires. Avant de calculer les dérivées des fonctions sinus, cosinus et tangente, démontrons le théorème suivant qui sera utilisé dans les démonstrations ultérieures.

Si x est la mesure en radians d'un arc, le rapport $(\sin x)/x$ *tend vers* 1 *quand x tend vers zéro.*

Supposons x positif et considérons sur le cercle trigonométrique de centre O, de rayon 1, le point M tel que $(OA, OM) = x$.

La droite OM (Fig. 2.2) coupe au point T la tangente en A au cercle. Par définition

$$\overline{PM} = \sin x, \qquad \overline{AT} = \operatorname{tg} x.$$

L'aire du secteur circulaire OAM est comprise entre celle du triangle OAM et celle du triangle OAT; donc

$$\tfrac{1}{2} MP . OA < \tfrac{1}{2} OA^2 . x < \tfrac{1}{2} OA . AT,$$

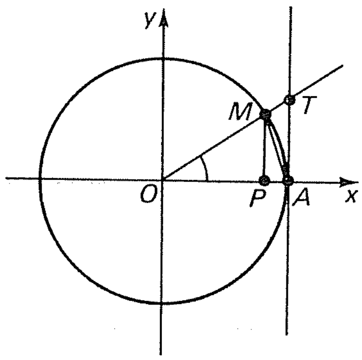


Fig. 2.2

c'est-à-dire, puisque $OA = 1$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x .$$

En divisant par $\sin x$ qui est positif, on obtient

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

ou

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Quand $x \to 0$, la fonction $\cos x$ qui est continue tend vers 1 et $1/(\cos x) \to 1$. Comme le rapport $x/(\sin x)$ est constamment compris entre 1 et un nombre qui tend vers 1, ce rapport tend vers 1 quand $x \to 0$.

Il en est de même pour $(\sin x)/x$. Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Si x est négatif, posons $x = -x'$, ce qui entraîne :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x')}{-x'} = \frac{\sin x'}{x'}.$$

Si $x \to 0$, il en est de même de x' et comme le rapport $(\sin x')/x'$ tend vers 1, il en est de même du rapport $(\sin x)/x$.

1. Dérivée de $\boxed{y = \sin x}$**.** Donnons à x un accroissement Δx, y devient

$$y_1 = y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) ,$$

l'accroissement de y est donc

$$\Delta y = y_1 - y = \sin(x + \Delta x) - \sin x .$$

Transformons cette différence de deux sinus en produit, au moyen de formules de transformation. On sait que

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a$$

avec

$$a + b = x + \Delta x ,$$
$$a - b = x ,$$

d'où l'on tire

$$a = x + \Delta x/2 \qquad \text{et} \qquad b = \Delta x/2 .$$

Donc

$$\Delta y = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \Delta x/2)$$

et on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \Delta x/2 \cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x}.$$

Divisons numérateur et dénominateur par 2 :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} \cos(x+\Delta x/2).$$

Par passage à la limite quand $\Delta x \to 0$, on obtient :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x+\Delta x/2).$$

Or, la limite du premier facteur est 1, d'après le théorème démontré précédemment; la limite du second facteur est $\cos x$, car la fonction cosinus est continue. Donc :

$$\boxed{y' = \cos x}.$$

2. Dérivée de $\boxed{\mathbf{y = \cos x}}$. Donnons à x un accroissement Δx, y devient

$$y_1 = y + \Delta y = \cos(x+\Delta x),$$

l'accroissement de y est donc

$$\Delta y = y_1 - y = \cos(x+\Delta x) - \cos x.$$

Transformons cette différence en produit. On sait que

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a . \sin b.$$

Posons

$$a+b = x+\Delta x$$

$$a-b = x$$

d'où l'on tire

$$a = x+\Delta x/2 \qquad \text{et} \qquad b = \Delta x/2.$$

Donc

$$\Delta y = -2 \sin(x+\Delta x/2) . \sin \Delta x/2,$$

et on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \sin(x+\Delta x/2) . \sin \Delta x/2}{\Delta x};$$

et en divisant numérateur et dénominateur par 2 :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin(x+\Delta x/2) . \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2}.$$

Par passage à la limite quand $\Delta x \to 0$, on obtient :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [-\sin(x+\Delta x/2)] \, . \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2}\right).$$

La fonction sinus étant continue,

$$y' = -\sin x \, . \, 1$$

$$\boxed{y' = -\sin x}\, .$$

2.8 Propriétés des fonctions dérivables. Voici les principaux résultats sur les fonctions dérivables :

Dérivée d'une fonction composée. *Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur des intervalles I et J de* **R**. *On suppose que $f(I)$ est contenu dans J. Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur I. De plus,*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) . f' \, .$$

La dérivée de la fonction composée est donc le produit des dérivées.

Considérons en effet un point x_0 de I, et donnons à la variable un accroissement h. En supposant que $f(x_0+h)-f(x_0)$ ne s'annule pas, nous pouvons écrire :

$$\frac{(g \circ f)(x_0+h)-(g \circ f)(x_0)}{h}$$

$$= \frac{(g \circ f)(x_0+h)-(g \circ f)(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Lorsque h tend vers 0, le premier facteur du second membre tend vers la dérivée de g au point $f(x_0)$, tandis que le second facteur tend vers la dérivée de f au point x_0. Le produit de ces deux facteurs tend vers le produit des deux limites; c'est le résultat que nous avons annoncé.

Dérivée d'une somme, d'un produit. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de* **R**. *Alors $f+g$ et fg sont dérivables, et*

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(fg)' = f'g + fg' \, .$$

En particulier, si g est constante et égale à a,

$$(af)' = af' \, .$$

(Il en découle que l'ensemble des fonctions dérivables sur I est une sous-algèbre unitaire de l'algèbre unitaire des fonctions définies sur I. De plus, l'application qui à toute fonction f dérivable sur I associe sa dérivée f' est linéaire.)

Considérons en effet un point x_0 de I, et donnons à la variable un accroissement $\Delta x = h$. Alors

$$f(x) \text{ prend la valeur } f(x_0+h) = f(x_0)+\Delta f,$$
$$g(x) \text{ prend la valeur } g(x_0+h) = g(x_0)+\Delta g\,.$$

L'accroissement correspondant de $f+g$ est

$$k = f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0) = \Delta f+\Delta g\,.$$

Le rapport des accroissements est

$$\frac{k}{h} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Si h tend vers 0, $\Delta f/\Delta x$ tend vers la dérivée de f au point x_0, et $\Delta g/\Delta x$ tend vers la dérivée de g au point x_0.

D'après le théorème concernant la limite d'une somme, on obtient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{k}{h} = f'(x_0)+g'(x_0),$$

soit

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)\,.$$

Calculons maintenant l'accroissement de fg :

$$k = f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)\,.$$

Nous pouvons écrire cette expression sous la forme :

$$k = f(x)[g(x)-g(x_0)]+[f(x)-f(x_0)]g(x_0)\,.$$

Le rapport des accroissements est cette fois :

$$\frac{k}{h} = f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}\,g(x_0).$$

Lorsque Δx tend vers 0, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$; les théorèmes sur la limite d'une somme et sur la limite d'un produit montrent que

$$\lim_{h\to 0} \frac{k}{h} = f(x_0)\,g'(x_0)+f'(x_0)\,g(x_0)\,.$$

La formule relative à la dérivée d'un produit de deux fonctions s'étend par récurrence au cas du produit de n fonctions dérivables :

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions numériques définies et dérivables sur un intervalle I de **R**. *Alors $f_1 f_2 \ldots f_n$ est dérivable sur I, et*

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 f_2 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n\,.$$

Par exemple, si les fonctions $f_1, f_2, ..., f_n$ sont toutes égales à une même fonction f,

$$(f^n)' = nf^{n-1}f'.$$

En particulier, si f est la fonction $x \mapsto x$, nous trouvons que

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Combinons ce dernier résultat avec la règle de dérivation d'une somme; nous voyons ainsi que la dérivée de la fonction f définie par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

est

$$f'(x) = 2ax + b.$$

(En effet, la dérivée de ax^2 est $2ax$, celle de bx est b, et celle de la fonction constante c est nulle.)

Dérivée d'un quotient. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de* **R**. *Si g ne s'annule pas sur I, la fonction f/g est dérivable, et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} - f\frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Nous reconnaissons tout simplement la formule de la dérivée d'un produit appliquée aux fonctions f et $1/g$. Il suffit donc de montrer que la fonction $1/g$ est dérivable et que

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Considérons d'abord le cas où g est la fonction $x \mapsto 1/x$. Alors

$$k = \Delta g = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{x - x_0}{xx_0} = -\frac{h}{xx_0}.$$

Ainsi,

$$\frac{k}{h} = \frac{\Delta g}{\Delta x} = -\frac{1}{xx_0}$$

et

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Le cas général se ramène aussitôt à celui-ci, d'après le théorème sur la dérivée d'une fonction composée.

Exemples

1. la fonction f définie sur $\mathbf{R} - \{-d/c\}$ par la formule

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

est dérivable en tout point x_0 de son ensemble de définition, et

$$f'(x_0) = \frac{ad-bc}{(cx_0+d)^2}.$$

2. La fonction f définie par la formule

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{cx^2+d}$$

est la composée de la fonction

$$x \mapsto x^2$$

et de la fonction

$$y \mapsto \frac{ay+b}{cy+d}\,;$$

elle est donc dérivable en tout point x_0 de $\mathbf{R}$ si c et d sont de même signe, en tout point x_0 différent de $\pm\sqrt{-d/c}$ si c et d sont de signes contraires. Sa dérivée au point x_0 est

$$\frac{ad-bc}{(cx_0^2+d)^2}\,.\,2x_0\,.$$

3. Dérivées des fonctions circulaires. Rappelons que les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont dérivables sur $\mathbf{R}$, et que leurs dérivées sont respectivement $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto -\sin x$.

Il s'ensuit que la fonction

$$x \mapsto \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

est dérivable en tout point où elle est définie, et que

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x\,.$$

De même, la fonction

$$x \mapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

est dérivable en tout point où elle est définie, et

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1-\cot^2 x\,.$$

Dérivée d'une fonction réciproque. *Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I de* $\mathbf{R}$. *La fonction f admet donc une fonction réciproque* *continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$. Si f' ne s'annule pas sur I, f^{-1} est dérivable sur $f(I)$, et*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Considérons en effet un point y_0 de $f(I)$. Nous savons qu'il existe un point x_0 de I et un seul tel que $f(x_0) = y_0$. Alors

$$\frac{\Delta f^{-1}}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Comme f^{-1} est continue au point $y_0 = f(x_0)$, x tend vers x_0 lorsque y tend vers y_0. Le dénominateur tend donc vers $f'(x_0) = f'[f^{-1}(y_0)]$. Enfin, l'inverse d'une quantité ayant une limite l a lui-même une limite si et seulement si $l \neq 0$.

EXEMPLES

1. *Dérivée de la fonction racine m-ième.* Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par la formule

$$f(x) = x^2 .$$

Alors f est dérivable en tout point $x_0 \geqslant 0$, et

$$f'(x_0) = 2x_0 .$$

Il s'ensuit que la fonction réciproque

$$g : y \mapsto \sqrt{y}$$

est dérivable en tout point $y_0 > 0$, et que

$$g'(y_0) = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}.$$

Mais g n'est pas dérivable au point 0.

On montre de même que la dérivée de la fonction $y \mapsto \sqrt[m]{y}$ est

$$y \mapsto \frac{1}{m(\sqrt[m]{y})^{m-1}}.$$

2. *Dérivées des fonctions circulaires réciproques.* Le résultat précédent montre l'existence des dérivées des fonctions $x \mapsto \operatorname{Arc} \sin x$ et $x \mapsto \operatorname{Arc} \cos x$ sur l'intervalle $]-1, 1[$, et de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$ sur $\mathbf{R}$. Plus précisément,

$$(\operatorname{Arc} \sin x)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arc} \sin x)}.$$

Comme $\operatorname{Arc} \sin x$ appartient à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\cos(\operatorname{Arc} \sin x) > 0 ,$$

et

$$\cos(\text{Arc}\sin x) = \sqrt{1-[\sin(\text{Arc}\sin x)]^2} = \sqrt{1-x^2}.$$

D'où .

$$(\text{Arc}\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nous pouvons calculer de même la dérivée de $x \mapsto \text{Arc}\cos x$, ou remarquer que

$$\sin(\pi/2 - \text{Arc}\cos x) = \cos(\text{Arc}\cos x) = x\,;$$

d'où

$$\text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x = \pi/2\,,$$

et

$$(\text{Arc}\cos x)' = -(\text{Arc}\sin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Enfin,

$$(\text{Arc tg}\, x)' = \frac{1}{1+[\text{tg}(\text{Arc tg}\, x)]^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

2.9 Exemples de calculs de dérivées. Nous allons donner un certain nombre d'exemples faisant intervenir les fonctions précédemment rencontrées.

1. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$ est définie sur la réunion des intervalles $]-\infty, -2[$ et $[1, +\infty[$. Nous pouvons la considérer comme la composée des fonctions $g : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+2}$ et $h : y \mapsto \sqrt{y}$. Or,

$$g'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} \quad \text{et} \quad h'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Donc f est dérivable sur $]-\infty, -2[$ et sur $]1, +\infty[$, et

$$f'(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} = \frac{3}{2}\frac{1}{|x+2|}\frac{1}{\sqrt{(x+2)(x-1)}}.$$

Ainsi, lorsque x appartient à l'intervalle $]-\infty, -2[$, $|x+2| = -(x+2)$, et

$$f'(x) = \frac{-3}{2(x+2)\sqrt{(x+2)(x-1)}}.$$

Lorsque x appartient à l'intervalle $]1, +\infty[$, $|x+2| = x+2$ et

$$f'(x) = \frac{3}{2(x+2)\sqrt{(x+2)(x-1)}}.$$

2. La fonction $f: x \mapsto \operatorname{tg}^2(1/x)$ est définie pour tout nombre réel x non nul et tel que

$$\frac{1}{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \text{soit} \quad x \neq \frac{2}{\pi(1+2k)},$$

où $k \in \mathbf{Z}$. La formule donnant la dérivée du carré d'une fonction composée montre que

$$(\operatorname{tg}^2 y)' = \frac{2 \operatorname{tg} y}{\cos^2 y}\, y'.$$

D'autre part, la dérivée de $y = 1/x$ est $y' = -1/x^2$. Il en découle que

$$f'(x) = \frac{2 \operatorname{tg} 1/x}{\cos^2 1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}\,\frac{\sin 1/x}{\cos^3 1/x}.$$

3. La fonction $f: x \mapsto \sqrt{(1-\sin^3 x)^3}$ est définie sur l'ensemble $\mathbf{R}$ tout entier. C'est la composée de la fonction $g: x \mapsto 1-\sin^3 x$ et de la fonction $h: y \mapsto \sqrt{y^3} = y^{3/2}$. Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'[g(x)]\,.\,g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{y}\,(-3\sin^2 x \cos x) \\ &= -\frac{9}{2}\sin^2 x \cos x \sqrt{1-\sin^3 x}. \end{aligned}$$

4. La fonction $f: x \mapsto \operatorname{Arc\,tg} 1/(1-4x^2)$ est définie pour tout nombre réel x différent de $-1/2$ et de $1/2$. Nous pouvons la considérer comme la composée des fonctions $g: x \mapsto 1/(1-4x^2)$ et $h: y \mapsto \operatorname{Arc\,tg} y$. Or,

$$g'(x) = \frac{8x}{(1-4x^2)^2} \qquad \text{et} \qquad h'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{8x}{(1-4x^2)^2\left[1+\left(\dfrac{1}{1-4x^2}\right)^2\right]} = \frac{8x(1-4x^2)^2}{(1-4x^2)^2+1}\cdot\frac{1}{(1-4x^2)^2} \\ &= \frac{8x}{1+(1-4x^2)^2}. \end{aligned}$$

5. Les deux derniers exemples sont empruntés à la théorie des circuits électriques. Soient L et R deux nombres réels strictement positifs.

La fonction $f: \omega \mapsto \sqrt{R^2+L^2\omega^2}$ est définie sur $\mathbf{R}$; c'est la composée de $\omega \mapsto R^2+L^2\omega^2$ et de $y \mapsto \sqrt{y}$. Donc

$$f'(\omega) = \frac{2L^2\omega}{2\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} = \frac{L^2\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}.$$

Soit maintenant ω un nombre réel strictement positif. La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{R^2+(L\omega-1/x\omega)^2}}$$

est définie pour tout nombre réel non nul x; c'est la composée des fonctions $g : x \mapsto R^2+(L\omega-1/x\omega)^2$ et $h : y \mapsto 1/\sqrt{y}=y^{-1/2}$. Or,

$$g'(x) = 2(L\omega-1/x\omega)\,.\,\frac{1}{\omega x^2} \quad \text{et} \quad h'(y) = -\frac{1}{2}\,y^{-3/2}.$$

Donc

$$f'(x) = -\frac{(L\omega-1/x\omega)}{\omega x^2[R^2+(L\omega-1/x\omega)]^{3/2}}.$$

2.10 Interprétation géométrique de la dérivée. Soit f une fonction représentée graphiquement par une courbe C (Fig. 2.3). Désignons par M_0 le point fixe de la courbe, de coordonnées x_0 et $y_0=f(x_0)$ et par M_1 le point de la courbe de coordonnées

$$x_1 = x_0+\Delta x\,,$$
$$y_1 = f(x_0+\Delta x) = y_0+\Delta y\,.$$

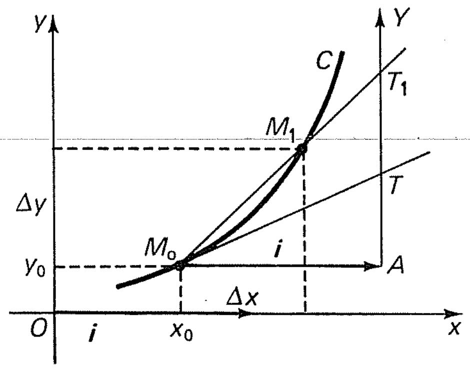


FIG. 2.3

Traçons le vecteur M_0A équipollent au vecteur unitaire $\boldsymbol{i}$ porté par Ox et la parallèle AY à Oy. La droite M_0M_1 coupe AY au point T_1. La sécante M_0M_1 a pour coefficient angulaire

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

1° Supposons que la fonction f admette pour x_0 un nombre dérivé $f'(x_0)$. Lorsque $\Delta x \to 0$, le point M_1 se déplace sur la courbe C et vient se confondre avec M_0. Si le point T_1 tend vers un point T fixe sur AY, on dit que la droite M_0M_1 admet une position limite M_0T qui représente par définition la *tangente* à la courbe C au point M_0. Le coefficient angulaire a de cette tangente est la limite du coefficient angulaire de la droite M_0M_1 ; c'est-à-dire :

$$a = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

La dérivée de $y = f(x)$ pour $x = x_0$ est le coefficient angulaire de la tangente au point M_0 d'abscisse x_0 du graphe de la fonction f.

2° Réciproquement, si la courbe C admet au point M_0 une tangente M_0T non parallèle à Oy, la droite M_0M_1 tend vers la droite M_0T quand M_1 tend vers M_0 sur la courbe. Le coefficient angulaire de la droite M_0M_1 est $\Delta y/\Delta x$. Il tend donc vers une limite quand $\Delta x \to 0$. Donc, l'existence de la tangente en un point d'une courbe entraîne l'existence d'un nombre dérivé de la fonction f au point x_0.

Remarque. Si on choisit des vecteurs unitaires $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ de même longueur sur les axes perpendiculaires Ox et Oy (c'est-à-dire au point de vue graphique, les mêmes échelles sur les axes), le nombre dérivé $f'(x_0)$ mesure la tangente de l'angle α que fait la tangente M_0T avec M_0X. Donc

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0).$$

Il est bien évident que :

si $f'(x_0)$ est positif, l'angle α est aigu;
si $f'(x_0)$ est négatif, l'angle α est obtus.

Les figures 2.4 et 2.5 illustrent ces explications.

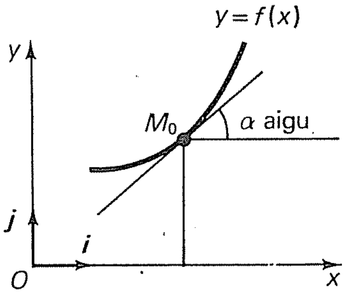


FIG. 2.4

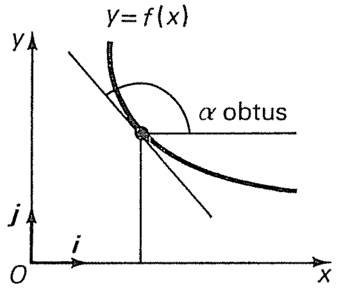


FIG. 2.5

EXEMPLE. Prenons pour f la fonction $x \mapsto x^2$ (Fig. 2.6); alors $f'(x) = 2x$. Supposons que l'échelle des x soit la même que l'échelle des y :

pour	$x = 0$	$y' = \operatorname{tg} \alpha = 0$	d'où	$\alpha = 0$
»	$x = 1$	$y' = 2 = \operatorname{tg} \alpha$	»	$\alpha \approx 63°$
»	$x = 2$	$y' = 4$	»	$\alpha \approx 76°$
»	$x = 3$	$y' = 6$	»	$\alpha \approx 81°$
»	$x = -1$	$y' = -2$	»	$\alpha \approx 117°$
»	$x = -2$	$y' = -4$	»	$\alpha \approx 104°$.

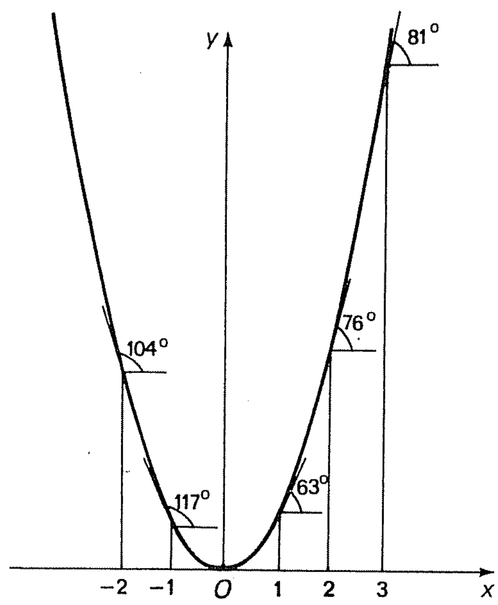


FIG. 2.6

2.11 Équation de la tangente en un point. Nous venons de voir que la dérivée en un point x_0 d'une fonction f représente le coefficient angulaire de la tangente au point M_0 de coordonnées x_0 et $f(x_0)$. Il en découle aussitôt qu'un point M appartient à la tangente MT si et seulement si ses coordonnées x et y vérifient la relation

$$\frac{y-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Ainsi, l'équation de la tangente en M_0 est

$$y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0).$$

EXEMPLES

1. Déterminons l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f: x \mapsto 1/x$ au point M_0 d'abscisse 2. La dérivée de f est définie par

$$f'(x) = -1/x^2.$$

Donc $f'(2) = -1/4$. Le coefficient angulaire de la tangente est $-1/4$, et l'équation de cette tangente s'écrit

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2),$$

soit encore

$$y = -\frac{x}{4} + 1.$$

2. Déterminons l'angle sous lequel le graphe de la fonction $f: x \mapsto (x-1)/(1+x^2)$ coupe l'axe Ox. La dérivée de f est définie par

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x(x-1)}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(1+x^2)^2}.$$

L'abscisse du point d'intersection de la courbe avec Ox est 1, et

$$f'(1) = \frac{-1+2+1}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

L'angle α demandé est tel que

$$\operatorname{tg} \alpha = 1/2 \quad \text{soit} \quad \alpha \approx 26° 34'.$$

L'équation de la tangente est

$$y-0 = \frac{1}{2}(x-1),$$

ou encore

$$x-2y-1 = 0.$$

3. L'impédance d'un circuit électrique comprenant une bobine d'inductance (sans résistance) en série avec un condensateur est

$$Z = L\omega - 1/C\omega$$

où $\omega = 2\pi f$, f étant la fréquence.

Nous verrons plus loin que le graphe de la fonction $\omega \mapsto Z$ a la forme de la figure 2.7. Il y a un point P où l'impédance est nulle :

$$L\omega - 1/C\omega = 0, \quad \text{d'où} \quad LC\omega^2 = 1 \quad \text{et} \quad \omega = 1/\sqrt{LC},$$

c'est-à-dire à la résonance.

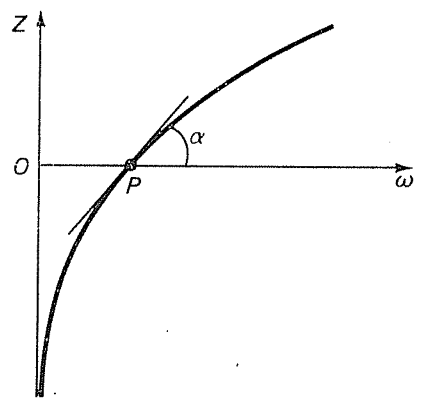


FIG. 2.7

Calculons tg α en ce point :

$$\operatorname{tg}\alpha = Z' = L - \left(-\frac{1}{C^2\omega^2}\cdot C\right) = L + \frac{1}{C\omega^2}\,;$$

remplaçons ω^2 par sa valeur :

$$Z' = \operatorname{tg}\alpha = L + \frac{1}{C(1/LC)} = 2L.$$

Ainsi, plus la valeur de l'inductance est grande, plus l'angle α est grand. Or, si α est grand, c'est que l'impédance Z varie *très rapidement* de part et d'autre de la résonance, ce qui fait que le circuit est *très sélectif.*

On en déduit ainsi, par des considérations mathématiques simples, que la sélectivité du circuit est d'autant plus grande que la valeur L de l'inductance est plus grande (il faut donc une faible valeur du condensateur).

2.12 Extension de la notion de dérivée. Considérons la fonction f et supposons que pour $x = x_0$, le rapport

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

admette une limite l quand $h \to 0$ par valeurs positives et une limite différente l' quand $h \to 0$ par valeurs négatives. On dit que la fonction f admet une dérivée à droite l et une dérivée à gauche distincte l'. On dit, dans ce cas, que f n'est pas dérivable au point x_0.

En ce point, le graphe de la fonction présente *un point anguleux* avec deux tangentes distinctes.

EXEMPLE. Montrons que la courbe d'équation

$$y = x^2 + \sqrt{x^2}$$

présente un point anguleux à l'origine.

On peut écrire

$$y = x^2 + |x| \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y_1 = x^2 + x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ y_2 = x^2 - x & \text{si} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Or,

$$\begin{aligned} y_1' &= 2x+1 \quad \text{soit} \quad 1 \text{ pour } x = 0 \\ y_2' &= 2x-1 \quad \text{soit} \quad -1 \text{ pour } x = 0. \end{aligned}$$

La courbe admet au point O deux demi-tangentes distinctes de coefficients angulaires 1 et -1 (Fig. 2.8).

2.13 Dérivation des fonctions à valeurs complexes. Nous avons remarqué que la notion de limite s'étend au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs

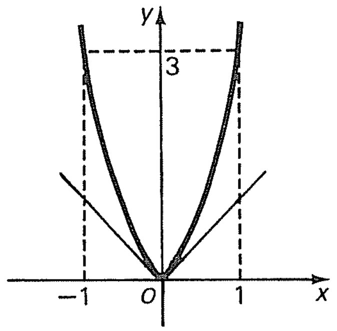


FIG. 2.8

complexes, à condition de remplacer « valeur absolue » par « module ». En particulier, les définitions des fonctions dérivables et des dérivées restent valables; cette fois, *la dérivée en un point est un nombre complexe, et la fonction dérivée est une fonction à valeurs complexes.*

Soit $f = P + jQ$ une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle I de **R**. On montre facilement que f est dérivable en un point x_0 de I si et seulement si les fonctions P et Q sont dérivables en ce point; dans ces conditions,

$$f'(x_0) = P'(x_0) + jQ'(x_0) .$$

De même, pour que f soit dérivable sur I, il faut et il suffit que les fonctions P et Q le soient; dans ces conditions,

$$f' = P' + jQ' .$$

Par exemple, si $f(x) = 3x + j(x^2 - 1)$, f est dérivable, et

$$f'(x) = 3 + 2jx .$$

Si $f(x) = e^{jx} = \cos x + j \sin x$, f est dérivable, et

$$f'(x) = -\sin x + j \cos x = j(\cos x + j \sin x) = j\, e^{jx} .$$

DÉRIVÉES SUCCESSIVES

2.14 Dérivées successives. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de **R**. On montre aisément que si f est dérivable en un point x_0 de I, f est continue en ce point. (En revanche, f peut être continue au point x_0 sans être dérivable en ce point. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue au point 0, mais nous avons vu qu'elle n'est pas dérivable à l'origine.)

Si f est dérivable sur I et si, de plus, f' est continue sur I, on dit que la fonction f est *continûment dérivable*. Si f' est aussi dérivable sur I, on dit que f est *deux fois dérivable* sur I. La dérivée de f' s'appelle *dérivée seconde* de f et se note f''.

On définit de même la dérivée troisième de f, notée f'''. On peut aussi définir par récurrence les fonctions n fois dérivables et les fonctions n fois continûment dérivables, n étant un entier naturel non nul. La dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$, est par définition la dérivée de $f^{(n-1)}$; c'est encore la dérivée $(n-1)$-ième de f'.

Si, pour tout entier naturel non nul n, f est n fois dérivable sur I, on dit que f est *indéfiniment dérivable* sur I.

EXEMPLES

1. Une fonction constante sur $\mathbf{R}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$, et toutes ses dérivées successives sont nulles.

2. La fonction $f: x \mapsto x^5$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$; ses dérivées successives sont :

$$f'(x)=5x^4, \quad f''(x)=20x^3, \quad f'''(x)=60x^2, \quad f^{(4)}(x)=120x, \quad f^{(5)}(x)=120,$$

les dérivées suivantes étant toutes nulles.

3. Plus généralement, soit m un entier naturel non nul. La fonction $f: x \mapsto x^m$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$, et

$$f'(x) = mx^{m-1}, \quad f''(x) = m(m-1)x^{m-2}, \quad f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3},$$
$$\ldots, f^{(p)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)x^{m-p}, \ldots, f^{(m)}(x) = m!,$$

les dérivées suivantes étant toutes nulles.

4. La fonction $f: x \mapsto 5x^{-4}$ est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition $\mathbf{R}^*$; ses dérivées successives sont

$$f'(x) = -20x^{-5}, \quad f''(x) = 100x^{-6}, \quad f'''(x) = -600x^{-7}, \ldots,$$
$$\ldots, f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{5}{6}(n+3)!\, x^{-n-4}, \ldots$$

5. De même, les dérivées successives de $f: x \mapsto 1/(1-x)$ sont définies sur $\mathbf{R}-\{1\}$ par

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3},$$
$$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \ldots$$

6. Déterminons les dérivées successives de $f: x \mapsto \sin x$. La dérivée première peut s'écrire sous la forme

$$f'(x) = \cos x = \sin(x+\pi/2).$$

De même,

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x+\pi),$$
$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x+3\pi/2),$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin(x+2\pi).$$

On démontre par récurrence que la dérivée n-ième est

$$f^{(n)}(x) = \sin(x+n\pi/2).$$

De même, la dérivée n-ième de la fonction cosinus est

$$f^{(n)}(x) = \cos(x+n\pi/2).$$

7. Calculons les quatre premières dérivées de $f: x \mapsto \operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1+\operatorname{tg}^2 x, \\
f''(x) &= 2 \operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x) = 2 \operatorname{tg} x+2 \operatorname{tg}^3 x, \\
f'''(x) &= 2(1+\operatorname{tg}^2 x)+6 \operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x), \\
&= 2+8 \operatorname{tg}^2 x+6 \operatorname{tg}^4 x, \\
f^{(4)}(x) &= 16 \operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)+24 \operatorname{tg}^3 x(1+\operatorname{tg}^2 x), \\
&= 16 \operatorname{tg} x+40 \operatorname{tg}^3 x+24 \operatorname{tg}^5 x.
\end{aligned}$$

2.15 Propriétés des fonctions n fois dérivables. *Soient n un entier naturel non nul, f et g deux fonctions numériques définies et n fois dérivables sur un intervalle I de* $\mathbf{R}$.

Pour tout couple (a, b) de nombres réels, la fonction $af+bg$ est n fois dérivable sur I, et

$$(af+bg)^{(n)} = af^{(n)}+bg^{(n)}. \tag{1}$$

Il s'ensuit que les fonctions numériques définies et n fois dérivables sur I constituent un sous-espace vectoriel E'_n de l'espace vectoriel E des fonctions numériques définies sur I, et que l'application

$$f \mapsto f^{(n)}$$

est une application linéaire de E'_n dans E.

En particulier, les fonctions indéfiniment dérivables sur I constituent un espace vectoriel, et l'application qui à toute fonction indéfiniment dérivable sur I associe sa dérivée d'ordre n est un endomorphisme de cet espace vectoriel.

La fonction fg est n fois dérivable sur I, et sa dérivée n-ième est donnée par la formule suivante, dite formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + \dots + C_n^p f^{(n-p)} g^{(p)} + \dots + C_n^n f g^{(n)}, \tag{2}$$

où les coefficients C_n^p sont les coefficients binomiaux (voir tome 1).

(Il en résulte que les fonctions n fois dérivables sur I constituent une sous-algèbre unitaire de l'algèbre unitaire des fonctions numériques définies sur I; il en est de même des fonctions indéfiniment dérivables.)

La formule (1) se déduit aussitôt de la linéarité de la dérivation, par récurrence sur l'entier n. Il apparaît ainsi que les fonctions n fois dérivables sur I constituent un sous-espace vectoriel, que nous noterons E'_n de l'espace vectoriel E des fonctions numériques définies sur I.

L'ensemble des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur I n'est autre que l'intersection

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} E'_n$$

des sous-espaces vectoriels E'_n; c'est donc un sous-espace vectoriel de E.

Établissons la formule (2) par récurrence sur n. Lorsque $n = 1$, nous retrouvons la formule (2) de la proposition 4. Soit donc n un entier supérieur à 2; supposons la relation (2) établie pour l'entier $n-1$:

$$(fg)^{(n-1)} = C^0_{n-1} f^{(n-1)} g + \dots + C^{p-1}_{n-1} f^{(n-p)} g^{(p-1)} + \\ + C^p_{n-1} f^{(n-p-1)} g^{(p)} + \dots + C^{n-1}_{n-1} f g^{(n-1)}.$$

Le second membre est dérivable, puisque c'est la somme de produits de fonctions dérivables; il en est donc de même du premier membre, ce qui montre que fg est n fois dérivable sur I. Dérivons alors les deux membres, et regroupons les termes en $f^{(n-p)}g^{(p)}$; nous obtenons la relation (2), compte tenu des relations

$$C^0_n = C^n_n = 1,$$

$$C^p_n = C^p_{n-1} + C^{p-1}_{n-1}, \qquad \text{où } p \in [1, n-1].$$

EXEMPLE. Calculons les dérivées successives de la fonction

$$f : x \mapsto (x^2+x+1) \sin x .$$

La dérivée première est

$$f'(x) = (2x+1) \sin x + (x^2+x+1) \cos x .$$

La dérivée seconde est

$$f''(x) = 2 \sin x + 2(2x+1) \cos x - (x^2+x+1) \sin x \\ = -(x^2+x-1) \sin x + 2(2x+1) \cos x .$$

Compte tenu du fait que la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \sin x$ est la fonction

$$x \mapsto \sin (x + n\pi/2) ,$$

la formule de Leibniz se traduit par

$$f^{(n)}(x) = \frac{n(n-1)}{2} . 2 \sin(x+(n-2)\pi/2) + n(2x+1) \sin(x+(n-1)\pi/2) + \\ + (x^2+x+1) \sin(x+n\pi/2) \\ = [x^2+x+1-n(n-1)] \sin(x+n\pi/2) + \\ + n(2x+1) \sin(x+(n-1)\pi/2).$$

EXERCICES

Calcul des dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

2.1 $y = (3x^2+5x-1)^4$.

2.2 $y = \sqrt{5x^2-3x}$.

2.3 $y = \dfrac{1}{3x^4-2x^2+1}$.

2.4 $y = \sin \dfrac{1}{x^2}$.

2.5 $y = \sin^2 x^2$.

2.6 $y = \operatorname{tg} \sqrt{1-4x^2}$.

2.7 $y = \dfrac{1}{\cos \sqrt{x}}$.

2.8 $y = \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{1-\operatorname{tg} x}$.

2.9 $y = \operatorname{Arc\,sin} x \operatorname{Arc\,sin} 2x$.

2.10 $y = \left(\operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{x}$.

2.11 $y = \dfrac{\operatorname{Arc\,tg} 2x}{\operatorname{Arc\,tg} 3x}$.

2.12 $y = \dfrac{\sin 2x \sin x}{x}$.

2.13 $y = (x+1)\sqrt{x+2}$.

2.14 $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1}$.

2.15 $y = \sqrt{1+x}\,\sqrt{1-x}$.

2.16 $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

2.17 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+4x^2}}$.

2.18 $y = \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

2.19 $y = \sin^4 \dfrac{1}{x}$.

2.20 $y = \cos^3 \sqrt{x}$.

2.21 $y = \operatorname{tg}^5 \dfrac{1}{2x}$.

2.22 $y = \sin^3 x^4$.

2.23 $y = \cos^4\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

2.24 $y = \sin^2 x \operatorname{tg}^2 2x$.

2.25 $y = \operatorname{Arc\,tg}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\right)$.

2.26 $y = \operatorname{Arc\,sin} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2.27 $y = \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2.28 $y = \operatorname{Arc\,tg} (\sin x)$.

2.29 $y = \operatorname{Arc\,tg} (\operatorname{tg} x)$.

2.30 $y = \operatorname{Arc\,sin} (\sin x)$.

2.31 $y = \sin^2 [(x-1)\sqrt{x}]$.

2.32 $y = 4 \sin x + 2 \cos x$.

2.33 $y = \cos^4 1/x$.

2.34 $y = \sin 2x + 2 \cos x$.

2.35 $y = (\sqrt{x}+2x)^2$.

2.36 $y = \sin^4 4x$.

2.37 $y = 2\sin^2 x + \sin 2x$.

2.38 $y = \dfrac{x\sqrt{4x+1}}{(2x+1)^2}$.

2.39 $y = 6\sin^2 x \cos 2x$.

2.40 $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 \sqrt{1-x^2}}$.

2.41 $y = \dfrac{1}{\sin^4 (x^2-1)}$.

2.42 $y = \sin 2x \operatorname{tg} 1/x$.

2.43 $y = \operatorname{Arc} \sin 2x$.

2.44 $y = (\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{x})^4$.

Calcul des dérivées successives

Calculer les dérivées secondes des expressions suivantes :

2.45 $y = \sin 2x \sin 3x$.

2.46 $y = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{x}$

2.47 $y = x^4 + 4\sqrt{x}$.

2.48 $y = \dfrac{x}{x-1}$.

2.49 $y = \sin^2 x$.

2.50 $y = \operatorname{tg}^2 x$.

2.51 $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

2.52 $y = \dfrac{4x}{1+x^2}$.

2.53 $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

2.54 $y = \sin^2 x/2$.

2.55 $y = x \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$.

Calculer les dérivées troisièmes des expressions suivantes :

2.56 $y = x \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$.

2.57 $y = \sqrt[3]{x^2}$.

2.58 $y = \sin 2x \cos 3x$.

2.59 $y = \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

2.60 $y = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x$.

2.61 $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

2.62 $y = \operatorname{tg}^3 x^2$.

Calculer les dérivées n-ièmes des expressions suivantes :

2.63 $y = \sin x + \cos x$.

2.64 $y = 1/x$.

2.65 $y = \cos 2x$.

2.66 $y = 4/x^2$.

2.67 Calculer la dérivée n-ième de la fonction f définie par la formule

$$f(x) = \frac{3x^2-6x+2}{x^2-3x+2},$$

en décomposant la fraction rationnelle

$$\frac{3X^2-6X+2}{X^2-3X+2}$$

sous la forme

$$\frac{A}{X-1}+\frac{B}{X-2}+C.$$

2.68 Calculer les dérivées successives au point 0 de la fonction f définie par la formule

$$f(x)=\frac{\operatorname{Arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pente de la tangente à une courbe

2.69 On considère la courbe d'équation $y=x^2-12x+4$. Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la pente de la tangente est égale à 15.

2.70 Trouver la pente des tangentes à la courbe d'équation

$$y=x(x-1)(x+2)$$

aux points où elle coupe l'axe des x.

2.71 Déterminer les points de la courbe d'équation $y=x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=10x-5$.

2.72 Calculer la pente de la tangente à la courbe d'équation $y=\frac{4x}{x^2+4}$ au point d'abscisse $x=0$.

2.73 Déterminer les points de la courbe d'équation $y=2\sin x+3\cos 2x$ en lesquels la tangente est parallèle à Ox.

2.74 Calculer l'angle sous lequel la courbe d'équation $y=x^2-2x$ coupe la droite d'équation $y=5$.

CHAPITRE 3

LES DIFFÉRENTIELLES

3.1 Fonctions différentiables. La notion de fonction différentiable, que nous introduisons maintenant, est très voisine de celle de fonction dérivable; elle présente sur cette dernière l'avantage de pouvoir se généraliser au cas des fonctions de plusieurs variables (voir tome 4).

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et x_0 un point de I. Rappelons que la dérivée de f au point x_0 est par définition la limite, si elle existe, du rapport

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

quand h tend vers zéro :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Considérons la fonction φ définie par

$$\varphi(x_0+h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \qquad \text{si } h \neq 0$$

$$\varphi(x_0) = 0.$$

La fonction φ est continue au point x_0, puisque

$$\lim_{h\to 0} \varphi(x_0+h) = 0.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe un nombre réel l et une fonction φ tels que

$$f(x_0+h) = f(x_0)+h[l+\varphi(x_0+h)],$$

où

$$\varphi(x_0) = \lim_{h\to 0} \varphi(x_0+h) = 0.$$

On dit alors que la fonction f est *différentiable* au point x_0. Il est évident que f est dérivable au point x_0 et que sa dérivée en ce point n'est autre que l :

$$f'(x_0) = l.$$

En effet,

$$\varphi(x_0+h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - l$$

a pour limite 0 lorsque h tend vers 0.

Ainsi, pour que f soit dérivable au point x_0, il faut et il suffit que f soit différentiable en ce point.

3.2 Différentielle d'une fonction. Soit f une fonction définie sur I, différentiable (ou dérivable) en un point x_0 de I. La fonction linéaire

$$h \mapsto f'(x_0)h$$

s'appelle *différentielle* de f au point x_0, et se note $d_{x_0}f$.

(La valeur de la différentielle de f pour un accroissement h de la variable est donc le produit de cet accroissement par la dérivée de f au point x_0:

$$d_{x_0}f(h) = f'(x_0)h.$$

On se gardera de confondre $d_{x_0}f(h)$ avec la fonction $d_{x_0}f$. Il y a là autant de différence qu'entre la fonction f et sa valeur $f(x)$ en un point x de I.)

La différentielle reçoit une interprétation géométrique très suggestive. Considérons le graphe C de la fonction f. Soient M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et M_0T la tangente en M_0 à C (Fig. 3.1).

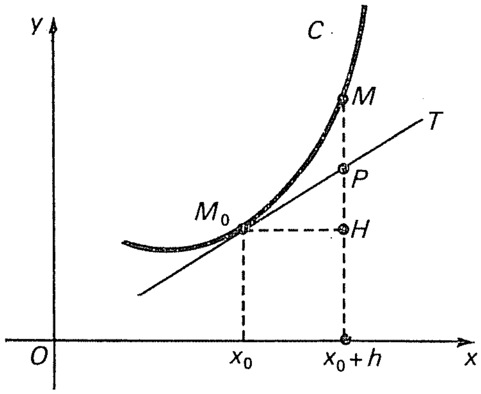


FIG. 3.1

L'équation de la tangente est :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Soient h un nombre réel tel que $x_0 + h$ appartienne à I et M le point de C de coordonnées $(x_0+h, f(x_0+h))$. La parallèle à Oy issue de M rencontre M_0T au point P de coordonnées x_0+h et $f(x_0)+f'(x_0)h$.

La mesure algébrique du vecteur $\boldsymbol{HP}$ est

$$f(x_0) + f'(x_0)h - f(x_0) = hf'(x_0).$$

Ainsi, remplacer l'accroissement de la fonction f par la valeur de sa différentielle revient à remplacer le graphe de f par la tangente en M_0. La différentielle réalise une première approximation de la fonction

$$h \mapsto f(x_0+h) - f(x_0).$$

(Pour obtenir une meilleure approximation de cette fonction, nous serons amenés à introduire la notion de développement limité; voir tome 3.)

EXEMPLE. Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$ et étudions l'accroissement de la fonction pour $x_0 = 100$. Soit h un accroissement de la variable; alors, si $h = 0{,}1$,

$$\Delta y = (x_0+h)^2 - x_0^2 = 2hx_0 + h_0^2 = 20{,}01,$$

tandis que

$$\mathrm{d}_{x_0} f(h) = f'(x_0)h = 2x_0 h = 20.$$

Pour $h = 0{,}01$, on trouve

$$\Delta y = 2 \times 0{,}01 \times 100 + (0{,}01)^2 = 2{,}0001$$

et

$$\mathrm{d}_{x_0} f(h) = f'(x_0)h = 2x_0 h = 2.$$

Cet exemple montre bien que l'accroissement Δy de la fonction f diffère de celui de la différentielle de f d'une quantité d'autant plus petite que h est petit. Dans les calculs numériques, h étant fixé, la valeur de Δy est peu différente de celle de $\mathrm{d}_{x_0} f(h)$. La différentielle représente bien une approximation de $f - f(x_0)$.

3.3 Différentielle d'une somme, d'un produit, d'un quotient. Les théorèmes sur la dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient permettent d'obtenir des résultats relatifs aux différentielles.

Rappelons que la dérivée de la somme $f+g$ de deux fonctions dérivables f et g est la somme de leurs dérivées. Il en résulte immédiatement que

$$\mathrm{d}_{x_0}(f+g) = \mathrm{d}_{x_0} f + \mathrm{d}_{x_0} g.$$

De même, les formules relatives à la dérivée d'un produit et à la dérivée d'un quotient se transcrivent de la manière suivante :

$$\mathrm{d}_{x_0}(fg) = g(x_0)\,\mathrm{d}_{x_0} f + f(x_0)\,\mathrm{d}_{x_0} g$$

$$\mathrm{d}_{x_0} \frac{f}{g} = \frac{1}{g(x_0)}\mathrm{d}_{x_0} f - \frac{f(x_0)}{[g(x_0)]^2}\mathrm{d}_{x_0} g.$$

En omettant l'indice x_0, on écrit ces formules sous la forme plus simple que voici :

$$\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$$

$$\mathrm{d}(fg) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g$$

$$\mathrm{d}\frac{f}{g} = \frac{g\,\mathrm{d}f - f\,\mathrm{d}g}{g^2}.$$

3.4 Différentielle d'une fonction composée. Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et g une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbf{R}$ contenant $f(I)$. Nous savons que si f est dérivable en un point x_0 de I et si g est dérivable au point $f(x_0)$, la fonction composée $g \circ f$ est dérivable au point x_0. Cette fonction composée est donc différentiable au point x_0; de plus, sa différentielle n'est autre que la composée des différentielles de g et de f :

$$\mathrm{d}_{x_0}(g \circ f) = (\mathrm{d}_{f(x_0)} g) \circ (\mathrm{d}_{x_0} f).$$

En effet, la différentielle de $g \circ f$ au point x_0 est la composée des deux fonctions linéaires

$$h \mapsto f'(x_0)\, h$$

et

$$k \mapsto g'[f(x_0)]\, k,$$

c'est-à-dire la fonction linéaire

$$h \mapsto g'[f(x_0)]\, f'(x_0)\, h.$$

3.5 Notation différentielle de la dérivée. L'application identique $g : x \mapsto x$ est différentiable en tout point x_0 de $\mathbf{R}$, et $\mathrm{d}_{x_0} g$ est la fonction $h \mapsto h$ (c'est-à-dire la fonction g elle-même).

Considérons encore une fonction f différentiable en un point x_0 de $\mathbf{R}$. La relation

$$\mathrm{d}_{x_0} f(h) = f'(x_0)\, h$$

montre que

$$\mathrm{d}_{x_0} f = f'(x_0)\, \mathrm{d}_{x_0} g.$$

Il est d'usage de noter $\mathrm{d}_{x_0} x$ la différentielle de la fonction g au point x_0. Alors

$$\mathrm{d}_{x_0} f = f'(x_0)\, \mathrm{d}_{x_0} x. \qquad (1)$$

La relation (1) conduit à une autre notation, dite *notation différentielle*, pour la dérivée de f au point x_0 :

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}_{x_0} f}{\mathrm{d}_{x_0} x}.$$

On omet souvent l'indice x_0. La notation différentielle devient :

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

La dérivée d'une somme se note alors

$$\frac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}.$$

La dérivée d'un produit se note de même

$$\frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}x} = g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}.$$

Enfin, la dérivée d'une fonction composée se note

$$\frac{\mathrm{d}(g \circ f)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

Dans ces conditions, la dérivée seconde de f, égale à $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)$, se note plus simplement $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ (ce qu'on lit « d deux f sur dx deux »). Plus généralement, la dérivée n-ième de f se note $\frac{\mathrm{d}f^n}{\mathrm{d}x^n}$. On remarquera la position décalée des deux exposants, rappelant qu'il s'agit de l'effet de l'application $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ agissant n fois de suite.

3.6 Exemples de calculs de différentielles

1. Dans de nombreux cas, il suffit d'écrire $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Ainsi :

$$f(x) = \sin x \qquad \mathrm{d}f = \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \mathrm{d}f = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \operatorname{Arc\,sin} x \qquad \mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \qquad \mathrm{d}f = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \operatorname{Arc\,tg} x \qquad \mathrm{d}f = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Considérons la fonction $f : x \mapsto \cos x\sqrt{\sin x}$. Nous pouvons appliquer la règle de calcul de la différentielle d'un produit :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f &= \sqrt{\sin x}\,(-\sin x)\,\mathrm{d}x + \cos x\,\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\sin x\sqrt{\sin x} + \frac{\cos^2 x}{2\sqrt{\sin x}}\right)\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

3. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1-3x}{1-2x}\,.$$

Nous avons vu que

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}\,.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{-1}{(1-2x)^2}$$

et

$$\mathrm{d}f = \frac{-\mathrm{d}x}{(1-2x)^2}.$$

4. Prenons pour f la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. C'est la composée des fonctions $u \mapsto \sqrt{u}$ et $x \mapsto 1-x^2$. Donc

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x\,\mathrm{d}x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\,.$$

3.7 La notation différentielle en physique. En physique, on étudie généralement la variation d'une fonction f pour de petites valeurs de l'accroissement Δx de la variable. Le rapport $\Delta f/\Delta x$ est sensiblement égal à la dérivée $f'(x)$; soit

$$\Delta f \approx f'(x)\Delta x\,.$$

On remplace cette relation approchée par la relation rigoureuse :

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

EXEMPLES

1. Dans un ressort élastique, la force $\boldsymbol{F}$ qui agit à son extrémité est proportionnelle à l'allongement x du ressort :

$$F = kx\,.$$

On se propose de calculer le travail de la force quand on allonge le ressort d'une longueur l (Fig. 3.2). Remarquons que ce travail n'est pas égal à Fl puisque la force n'est pas constante et qu'elle varie le long du déplacement.

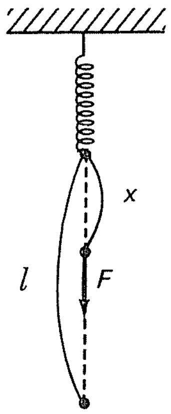


FIG. 3.2

Le travail élémentaire ΔW de la force $\boldsymbol{F}$ pour un allongement élémentaire Δx est

$$\Delta W = F\Delta x .$$

Donc

$$\Delta W = kx\Delta x$$

et

$$\mathrm{d}W = kx\mathrm{d}x .$$

2. Considérons la décharge d'un condensateur électrique de capacité C. A l'instant t, la charge Q du condensateur est liée à la différence de potentiel V entre les bornes par la relation

$$Q = CV .$$

Pendant le temps Δt, la quantité élémentaire d'électricité transportée par le courant est

$$\Delta Q = C\Delta V ,$$

et le travail élémentaire correspondant est

$$\Delta W = V\Delta Q = \frac{Q}{C}\Delta Q .$$

Autrement dit,

$$\mathrm{d}W = V\mathrm{d}Q = \frac{Q}{C}\mathrm{d}Q .$$

3. Calculons la quantité élémentaire de chaleur dégagée par un courant sinusoïdal d'intensité $I = I_0 \sin \omega t$ à travers une résistance R. Pendant le temps Δt, la quantité de chaleur dégagée est

$$\Delta W = RI^2 \Delta t ,$$

soit

$$\Delta W = RI_0^2 \sin^2 \omega t \, \Delta t ,$$

ou, en toute rigueur,

$$\mathrm{d}W = RI_0^2 \sin^2 \omega t \, \mathrm{d}t .$$

3.8 Applications des différentielles au calcul numérique

1. Une résistance R soumise à ses bornes à une différence de potentiel V est traversée par un courant continu d'intensité

$$I = V/R .$$

A une faible variation de V correspond une variation de l'intensité définie par

$$\Delta I = \frac{1}{R}\Delta V.$$

Pour une tension de 100 volts et une variation de 1 volt, on obtient, si $R = 100$ ohms,

$$\Delta I = 1/100 = 0{,}01 \text{ A} .$$

Si maintenant la tension est constante et égale à 100 volts, la variation d'intensité correspondant à une variation de résistance est

$$\Delta I = -\frac{V}{R^2}\Delta R .$$

La tension étant toujours égale à 100 volts, si $\Delta R = 1$ ohm,

$$\Delta I = -100/(100)^2 = -1/100 \text{ A} .$$

Le signe moins indique que si R augmente, I diminue.

2. Rappelons que la capacité d'un condensateur électrique est

$$C = kS/e ,$$

où S est l'aire en regard des plaques, e la distance des plaques et k une constante. En supposant que e varie de Δe, déterminons la variation de C. La relation

$$\mathrm{d}C/\mathrm{d}e = -kS/e^2$$

conduit à

$$\Delta C = -k\frac{S}{e^2}\Delta e .$$

Ainsi, la variation de C est proportionnelle à l'inverse du carré de e. Si l'on veut que, pour une variation donnée Δe, la capacité varie beaucoup, il faut que la distance e soit très petite. C'est sur cette propriété qu'est fondé le microphone électrostatique, où la vibration sonore agissant sur l'une des plaques, très mince et très souple, fait varier l'épaisseur e.

3. La résistance électrique d'un fil métallique augmente avec la température suivant la loi

$$R = R_0(1 + \alpha t) ,$$

où R_0 est la résistance à 0 °C, t la température en °C et α un coefficient dépendant du métal (0,0038 pour le cuivre). En supposant que t varie de Δt, déterminons la variation de R. La relation

$$\mathrm{d}R/\mathrm{d}t = \alpha R_0$$

montre que

$$\Delta R = \alpha R_0 \Delta t .$$

Par exemple, si $R_0 = 100\ \Omega$ et $\Delta t = 1$ °C,

$$\Delta R = 100 \times (38/10\,000) = 0{,}38 .$$

4. En radio, la longueur d'onde d'un circuit oscillant est donnée par la formule :

$$\lambda = k\sqrt{L(C+C_0)}\,,$$

où L est l'inductance de la bobine,

C la capacité du condensateur,

C_0 la capacité propre du bobinage,

k une constante dépendant du système d'unités choisi.

Si C varie de ΔC, de combien varie λ?
En différentiant l'expression de λ, on obtient :

$$\mathrm{d}\lambda = \lambda'_c\,\mathrm{d}C = k\frac{1}{2\sqrt{L(C+C_0)}}\,L\,\mathrm{d}C = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{L}{C+C_0}}\,\mathrm{d}C\,.$$

D'où

$$\Delta\lambda = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{L}{C+C_0}}\,\Delta C\,.$$

3.9 Applications des différentielles à l'étude de la sensibilité

1. Étudions la sensibilité du thermomètre à gaz, à volume constant.

Soit P_0 la pression du gaz à 0 °C, contenu dans un certain volume. Si on porte la température à t °C, la pression devient

$$P = P_0(1+\alpha t) \qquad \text{avec} \qquad \alpha = 1/273\,.$$

D'où

$$\mathrm{d}P = P_0\alpha\,\mathrm{d}t\,,$$

expression indépendante de la température t; la sensibilité $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = P_0\alpha$ est donc constante, et elle est proportionnelle à P_0.

Pour le thermomètre à hydrogène, on peut mesurer une variation de pression de 0,01 mm, et si on prend $P_0 = 1000$ mm de mercure, on en déduit

$$\Delta t = \frac{0{,}01}{1\,000\times(1/273)} = 0{,}0027\,°\mathrm{C}\,.$$

On peut ainsi apprécier une variation de température de 3 *millièmes de degré*!

2. Examinons l'influence de la longueur du fléau d'une balance sur la sensibilité. On démontre en physique que si l est la longueur des bras du fléau, p le poids de ce fléau, D la distance du centre de gravité du fléau à l'arête du couteau central, l'angle α d'inclinaison du fléau sous l'action d'une charge m introduite dans l'un des plateaux est donné par la formule

$$\operatorname{tg}\alpha = ml/Dp\,.$$

D'où, en différentiant,

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{l}{Dp}\, dm\,.$$

Or, la sensibilité de la balance est évidemment donnée par le quotient $d\alpha/dm$, qui doit être le plus grand possible.

La formule précédente nous donne

$$\frac{d\alpha}{dm} = \frac{l \cos^2 \alpha}{Dp}.$$

A l'état normal d'équilibre, $\alpha = 0$, et il vient

$$d\alpha/dm = l/Dp\,.$$

Cette formule montre que l'on accroît la sensibilité en diminuant D.

Remarquons que l et p ne sont pas indépendants. En effet,

$$p = \rho g v$$

(ρ : masse volumique, g : accélération due à la pesanteur, v : volume du fléau).

Si on admet que les fléaux restent géométriquement semblables entre eux, on a : $v = kl^3$, et par suite :

$$s = \frac{d\alpha}{dm} = \frac{1}{D\rho\, g\, kl^2}.$$

Il en résulte que l'on améliore la sensibilité en utilisant des fléaux *courts* et un métal de faible masse volumique (alliage léger et présentant des évidements).

EXERCICES

Calcul des différentielles

Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

3.1 $y = \sqrt{x} - \sqrt{\sin x}$.

3.2 $y = \sqrt{1+x} - 1$.

3.3 $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\sin x}$.

3.4 $y = \operatorname{tg} x - \sqrt{x}$.

3.5 $y = x - \dfrac{4}{15}\sin x + \dfrac{1}{15}\operatorname{tg} x - \dfrac{8}{5}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

3.6 $y = \dfrac{a+x}{(b+x)^n}$.

3.7 $y = \sqrt{\dfrac{x-a}{x-b}}$.

3.8 $y = \cos x\,(\sin^2 x + 2)$.

3.9 $y = \sqrt[3]{x^2+a}$.

3.10 $y = \dfrac{2x^3(x-1)^2}{\sqrt{x+1}}$.

3.11 $y = \operatorname{Arc\,cos}\left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right)$.

3.12 $y = \sin\sqrt{a^2 - x^2}$.

3.13 $y = \operatorname{Arc\,tg}\dfrac{x\sqrt{3}}{x+2}$.

3.14 $y = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

3.15 $y = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.

3.16 $y = \sqrt{a\sin^2 x + b\cos^2 x}$.

3.17 $y = \sqrt{\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}$.

3.18 $y = \sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x$.

3.19 $y = x\operatorname{Arc\,sin} x$.

3.20 $y = \operatorname{Arc\,tg}\dfrac{x}{1-x^2}$.

3.21 $y = \operatorname{Arc\,sin}(\cos x)$.

3.22 $y = \dfrac{5}{\sqrt[3]{3x^2 - 2x}}$.

3.23 $y = \sqrt{1+2x}\,\sqrt[3]{1+3x}$.

3.24 $y = (2x-1)\sqrt{2x - x^2}$.

3.25 $y = \operatorname{Arc\,cos}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

3.26 $y = \sin(x^2 + 1/x)$.

3.27 $y = \sin^2\dfrac{2}{x}\operatorname{tg}^3\dfrac{x}{2}$.

3.28 $y = x\operatorname{Arc\,sin}(\cos 2x)$.

3.29 $y = \sqrt{1-x}\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{x}$.

Problèmes sur les différentielles

3.30 Une tige de métal de 10 m de long est repliée en forme de rectangle dont un côté est égal à x. Quand un accroissement de x donnera-t-il un accroissement de l'aire du rectangle ?

3.31 Un rectangle de base x est inscrit dans un triangle isocèle de hauteur 50 cm et de base 100 cm. Calculer la variation de l'aire du rectangle si x augmente de Δx.

3.32 Une pierre jetée dans un lac produit des ondes concentriques. Si le rayon de l'onde croît à la vitesse de 5 m par seconde, à quelle vitesse croît la surface circulaire de cette onde quand $R = 12$ m ?

3.33 La hauteur d'un cylindre variable est constamment égale à son diamètre. Quand $h = 10$ m et qu'elle croît à raison de 2 m par seconde, à quelle vitesse croît le volume à ce moment ?

3.34 Le sommet d'une échelle de longueur l glisse le long d'un mur vertical qui repose sur un sol horizontal. Si la vitesse du sommet de l'échelle est V_0, quelle est la vitesse du pied de l'échelle ?

3.35 Un réservoir conique posé sur sa pointe a 10 cm de diamètre et 10 cm de profondeur ; il reçoit 4 cm^3 d'eau par minute. A quelle vitesse le niveau de l'eau monte-t-il quand la hauteur de l'eau atteint 6 cm ?

3.36 A quelle vitesse croît l'aire d'un triangle équilatéral de 6 cm de côté si chaque côté croît de $\sqrt{3}$ cm par minute ?

3.37 Le rayon d'une sphère est de 10 cm et s'accroît à la vitesse de 1 cm par seconde. A quelle vitesse croît le volume de la sphère à ce moment ?

3.38 La longueur et la largeur d'une plaque métallique chauffée croissent à la vitesse de 0,1 % par degré. Quelle est la variation relative par degré de l'aire ?

3.39 Un train roule à 50 km/h, et un ballon s'élève à la vitesse de 10 km/h. Ils partent tous les deux du même point. A quelle vitesse se séparent-ils ?

3.40 A quelle vitesse croît l'aire d'un carré de 10 m de côté quand ce côté augmente à la vitesse de 1 cm par seconde ?

3.41 En quel point du premier quadrant l'arc croît-il deux fois plus vite que l'ordonnée ?

3.42 Les deux côtés égaux d'un triangle isocèle croissent à raison de 1 cm par seconde et l'angle compris entre eux à raison de 1/10 de radian par seconde. A quelle vitesse varie l'aire au moment où les trois côtés mesurent chacun 20 cm de longueur ?

3.43 Dans la fonction $y = 2x^3 + 6$, quelle est la valeur de x au point où y croît 24 fois plus vite que x ?

3.44 Dans un hexagone régulier de côté égal à 1 m, les côtés s'allongent à la vitesse de 2 cm par seconde. A quelle vitesse croît l'aire ?

3.45 Un cylindre est surmonté d'une demi-sphère. Si le rayon de base croît à raison de 1 m par minute et la hauteur du cylindre à raison de 2 m par minute, à quelle vitesse croît le volume, quand $R = 10$ m et $h = 20$ m ?

3.46 Un cône circulaire doit conserver un volume constant. Si le rayon de base croît de 5 cm par seconde, comment varie la hauteur au moment où celle-ci est égale à 15 cm et où $R = 10$ cm ?

3.47 Une résistance électrique $R = 100$ ohms est parcourue par un courant $I = 1$ A. Si I varie de 10 mA, calculer la variation ΔP de la puissance électrique absorbée.

3.48 Un générateur électrique de f. é. m. $E = 100$ volts et de résistance interne $r = 10$ ohms est branché sur une résistance extérieure $R = 40$ ohms. Si R varie de $\Delta R = 2$ ohms, calculer :

a) la variation ΔI du courant I,
b) la variation ΔV de la d. d. p. aux bornes de R,
c) la variation ΔP de la puissance électrique dans R.

3.49 L'inductance d'une bobine étant, en henrys :

$$L = \frac{4\pi N^2 S}{l.10^9} \qquad (S \text{ en cm}^2,\ l \text{ en cm}),$$

calculer la variation ΔL, si l augmente de 1 cm avec les valeurs suivantes :

$N = 1000, \quad S = 1000, \quad l = 50$ cm .

3.50 L'impédance d'une bobine, en courant alternatif est

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}\,. \qquad (\omega = 2\pi f)\,.$$

On a $R = 10\,000$ ohms, $L = 30$ H, $f = 50$ Hz.
Si f varie de $\Delta f = 2$ hertz, calculer en ohms la variation ΔZ de l'impédance.

3.51 L'impédance d'un condensateur, en courant alternatif, est :

$$Z = 1/C\omega\,. \qquad (C \text{ en farads, } Z \text{ en ohms})\,.$$

On a $C = 10$ µF, $f = 50$ Hz, et $\Delta f = 2$ Hz. Calculer la variation ΔZ de l'impédance.

3.52 La période T d'un circuit oscillant en radio est, en secondes :

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad (L \text{ en henrys, } C \text{ en farads})\,.$$

On a

$$L = 1000\ \mu\text{H}\,, \qquad C = \frac{1}{1000}\ \mu\text{F}\,.$$

Si C varie de 10 picofarads, calculer la variation ΔT de la période (1 picofarad = $= 10^{-12}$ F). On exprimera ΔT en microsecondes.

3.53 Dans une bobine, avec résistance, le décalage du courant sur la tension, en alternatif, est donné par tg $\varphi = L\omega/R$. On a $L = 100$ H, $R = 200$ ohms, $f = 50$ Hz.

a) Si f varie de $\Delta f = 2$ Hz, calculer Δ(tg φ).
b) Si R varie de $\Delta R = 5$ ohms, calculer Δ(tg φ).

3.54 Un mobile a une masse de 100 kg, sa vitesse est de 10 m/s. Si sa vitesse varie de $\Delta v = 1/2$ m/s, calculer la variation ΔW de son énergie cinétique.

CHAPITRE 4

APPLICATIONS DES DÉRIVÉES A L'ÉTUDE DE LA VARIATION DES FONCTIONS

Étant donnée une fonction f d'une variable, il est intéressant de tracer le graphe de cette fonction : en effet, au moyen d'une courbe, on voit aussitôt les principales propriétés de f, à savoir

— l'ensemble de définition;
— le signe des valeurs de f;
— le sens de variation;
— les maximums et les minimums;
— le comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, etc.

En un mot, le tracé d'une courbe, qui traduit la variation d'une fonction, est très instructif et donne beaucoup de renseignements, surtout dans les applications pratiques.

Dans ce chapitre, nous montrerons l'importance de l'étude des dérivées pour le tracé des graphes des fonctions. Les dérivées nous permettront en particulier d'étudier la croissance, la position de la courbe par rapport à la tangente en un point, la position des maximums et des minimums, les points d'inflexion et la concavité.

Pour cette étude, nous démontrerons au n° 4.2 un théorème fondamental de l'Analyse : *le théorème de Rolle.*

4.1 Maximums et minimums. Nous devons commencer par définir de manière précise les maximums et les minimums.

Considérons une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. On dit que f admet un *maximum* si l'ensemble $f(I)$ admet un plus grand élément M, un *minimum* si $f(I)$ admet un plus petit élément m. Soit x_0 un point de I; on dit que f atteint son maximum en x_0 si $f(x_0) = M$. On dit que f admet un maximum *local* au point x_0 s'il existe un intervalle ouvert J de centre x_0 tel que la restriction de f à $J \cap I$ admette un maximum. On définit de même les fonctions atteignant un minimum, ou un minimum local, au point x_0.

Remarquons que si f admet un maximum au point x_0, f admet évidemment un maximum local en ce point. La réciproque est fausse : par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x$ admet un maximum local au point $x_0 = -1$, mais elle n'admet pas de maximum sur $I = \mathbf{R}$.

Nous allons établir une condition nécessaire pour qu'une fonction f admette un maximum local ou un minimum local en un point x_0 :

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, et x_0 un point de I distinct des extrémités de I. Si la fonction f admet un maximum ou un minimum local au point x_0, et si f est dérivable en ce point, alors

$$f'(x_0) = 0 .$$

Supposons par exemple que f admette un maximum local au point x_0. Il existe donc un intervalle ouvert J de centre x_0 tel que, pour tout point x de $I' = J \cap I$,

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

Il s'ensuit que, pour tout point x de $I' \cap]-\infty, x_0[$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0. \tag{1}$$

Puisque f est dérivable à gauche au point x_0, nous obtenons par prolongement de l'inégalité (1)

$$f'_g(x_0) \geqslant 0. \tag{2}$$

De même, pour tout point x de $I' \cap]x_0, +\infty[$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0, \tag{3}$$

et

$$f'_d(x_0) \leqslant 0. \tag{4}$$

Enfin, puisque f est dérivable au point x_0,

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0). \tag{5}$$

Il résulte alors des relations (2), (4) et (5) que

$$f'(x_0) = 0,$$

ce qu'il fallait prouver.

Mais si f' s'annule en un point x_0, il ne s'ensuit pas que f admette un maximum ou un minimum local en ce point. On considérera par exemple le cas de la fonction $f : x \mapsto x^3$ lorsque $x_0 = 0$.

4.2 Théorème de Rolle. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de* **R**, *dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, et telle que*

$$f(a) = f(b).$$

Il existe alors au moins un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Écartons le cas trivial où f est constante. La fonction f prend donc des valeurs différentes de $f(a)$. Supposons par exemple que f prenne des valeurs strictement supérieures à $f(a)$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, nous savons qu'il existe au moins un point c de $[a, b]$ où f atteint sa borne supérieure. Un tel point c est différent de a et b, puisque

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) > f(a) = f(b).$$

Le point c appartient donc à l'intervalle $]a, b[$.

Enfin, puisque f admet un maximum au point c, et que f est dérivable en ce point, le théorème s'applique.

Le théorème de Rolle s'interprète graphiquement par le fait qu'il existe au moins un point C du graphe de f où la tangente est parallèle à Ox (Fig. 4.1).

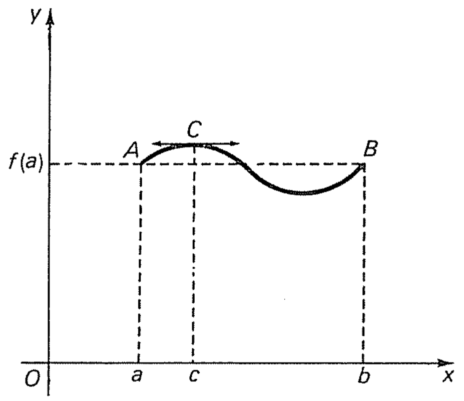


FIG. 4.1

Remarquons que le théorème est en défaut dans le cas de la figure 4.2. L'arc de courbe AB présente au point D un point anguleux. En ce point, f n'est pas dérivable (il y a seulement une dérivée à gauche et une dérivée à droite). Dans ce cas, l'hypothèse «f admet en tout point de $]a, b[$ une dérivée» n'est pas vérifiée.

Le théorème est aussi en défaut si f n'est pas continue sur $[a, b]$; c'est le cas du graphe de la fonction f qui traduit une discontinuité pour $x = \alpha$ (Fig. 4.3). Dans ces deux derniers cas, il n'existe pas de point de la courbe à tangente parallèle à Ox.

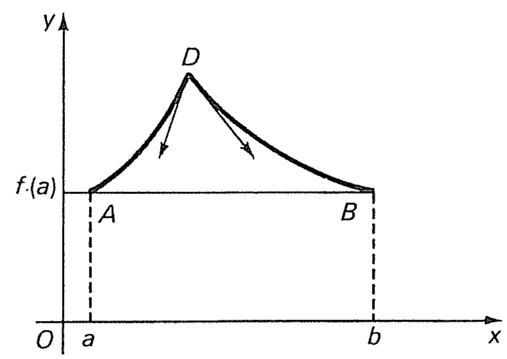


FIG. 4.2

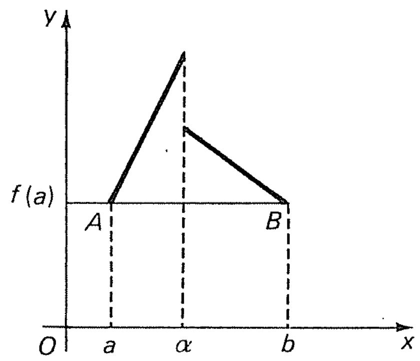


FIG. 4.3

4.3 Formule des accroissements finis. *Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b]$ de* $\mathbf{R}$, $a < b$, *et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Il existe alors* *au moins un point c de l'intervalle* $]a, b[$ *tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

En effet, la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[a, b]$ par la formule

$$g(x) = f(x)-(x-a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc au moins un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$g'(c) = 0\,.$$

Comme la dérivée de g en tout point x de $]a, b[$ est

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

nous en déduisons aussitôt la formule annoncée.

La formule des accroissements finis s'interprète par le fait qu'il existe au moins un point C du graphe de f où la tangente est parallèle au segment $[A, B]$ (Fig. 4.4).

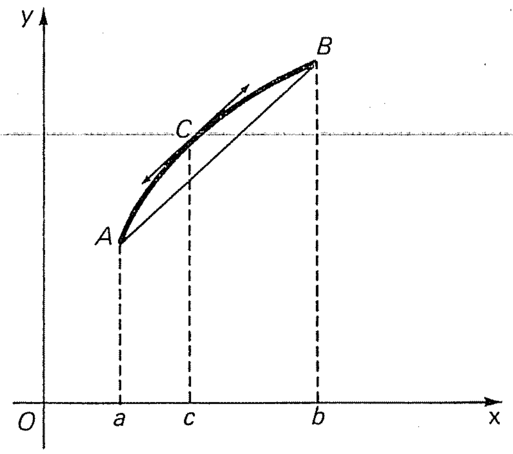


FIG. 4.4

Autre notation. Posons

$$h = b-a\,.$$

Pour tout élément c de $]a, b[$, il existe un élément θ de $]0, 1[$ et un seul tel que

$$c = a+\theta h\,.$$

La formule des accroissements finis peut alors s'écrire sous la forme

$$f(a+h) = f(a)+hf'(a+\theta h)\,, \qquad 0<\theta<1\,.$$

4.4 Application au sens de variation des fonctions. La formule des accroissements finis permet de déterminer le sens de variation des fonctions dérivables.

1. Nous savons que la dérivée d'une fonction constante est nulle. Démontrons le théorème réciproque :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si la dérivée de f est nulle, alors f est constante.

Considérons en effet deux éléments x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$. La formule des accroissements finis s'écrit

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c), \quad \text{où} \quad c \in]x_1, x_2[.$$

Comme $f'(c)=0$, nous voyons que

$$f(x_2)=f(x_1),$$

ce qui montre que la fonction f est constante.

2. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f est croissante, alors f′ est positive.*

En effet, pour tout couple $(x, x+h)$ de points de I, le rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

est positif. Le prolongement des inégalités montre que la limite de ce rapport lorsque h tend vers 0 est positive.

La formule des accroissements finis permet encore d'énoncer une réciproque :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si la dérivée de f est positive, alors f est croissante.

Considérons en effet deux éléments x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$. La formule des accroissements finis, écrite sous la forme (1), montre que

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geqslant 0,$$

puisque $f'(c) \geqslant 0$. La fonction f est donc croissante sur l'intervalle I.

3. On démontre d'une manière analogue les deux résultats suivants :

Si une fonction est décroissante dans un intervalle, sa dérivée est négative.

Réciproquement, si dans un intervalle la dérivée d'une fonction est négative, la fonction est décroissante dans cet intervalle.

Les trois réciproques permettent de déterminer le sens de variation des fonctions. On cherche à cet effet les intervalles où la dérivée de f garde un signe constant.

Si f' est continue, le théorème des valeurs intermédiaires montre que $f'(x)$ garde un signe constant entre deux racines consécutives de l'équation

$$f'(x)=0.$$

On commence donc par résoudre cette équation.

En outre, nous savons que f ne peut atteindre un maximum ou un minimum local en un point x_0 que si $f'(x_0) = 0$.

Étudions la variation de la fonction dans un voisinage de x_0 en considérant les deux tableaux, suivant le signe de $f'(x)$.

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	Minimum	$\nearrow$

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	Maximum	$\searrow$

Les figures 4.5 représentent les courbes correspondantes dans le cas d'un minimum et d'un maximum en un point M_0.

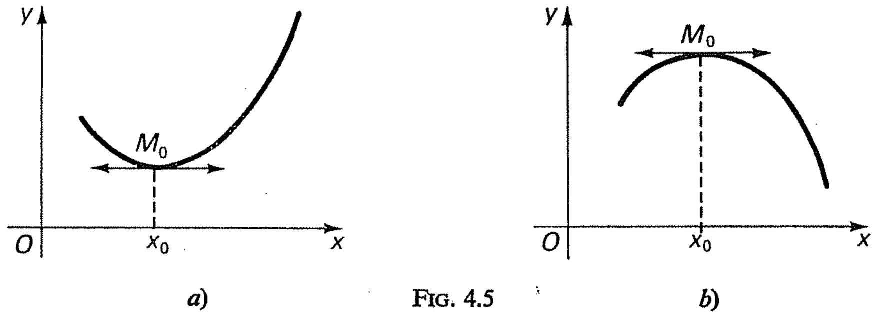


FIG. 4.5

En résumé, dans les cas où f' s'annule en changeant de signe, on peut conclure à l'existence d'un maximum ou d'un minimum local.

Remarque 1. En particulier, si $f'(x_0) = 0$, la formule de Taylor-Lagrange permet de voir si f passe par un maximum ou un minimum.

Remarque 2. Comme nous l'avons constaté au n° 4.2, la fonction f peut atteindre un maximum ou un minimum local en x_0 sans être dérivable en ce point. D'autre part, si $f'(x_0) = 0$, f n'admet pas nécessairement un maximum ou un minimum local; en effet, f' peut s'annuler sans changer de signe. La tangente en M_0 est

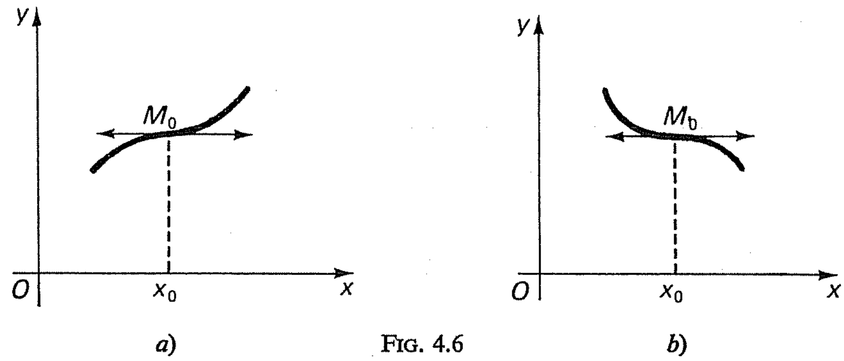


FIG. 4.6

horizontale, et la courbe traverse sa tangente (Fig. 4.6). On dit alors que le point M_0 est un *point d'inflexion à tangente horizontale.*

4.5 Exemples

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par la relation

$$f(x) = 1/x\,.$$

La dérivée est

$$f'(x) = -1/x^2\,.$$

Puisque f' est négative, f est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. (On remarquera que f n'est pas décroissante sur $\mathbf{R}^*$; cela provient du fait que $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle. La formule des accroissements finis ne peut s'appliquer au cas où $x_1 < 0 < x_2$.)

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par la relation

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Nous avons déjà calculé sa dérivée au n° 2.11,

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Le signe de la dérivée est celui du numérateur. Le trinôme

$$-x^2+2x+1$$

s'annule pour

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{-1} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Ce trinôme est positif pour $-\sqrt{2}+1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}+1$.

Ce trinôme est négatif pour $x \leqslant -\sqrt{2}+1$ et $x \geqslant \sqrt{2}+1$.

Donc, la fonction est croissante sur l'intervalle $[-\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1]$ et décroissante sur les intervalles $]-\infty, -\sqrt{2}+1]$ et $[\sqrt{2}+1, +\infty[$.

3. En électricité, l'impédance d'un circuit comprenant une inductance pure en série avec un condensateur est

$$Z = L\omega - 1/C\omega\,.$$

La dérivée de Z par rapport à ω est (voir n° 2.11) :

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\omega} = L + 1/C\omega^2\,,$$

quantité qui est toujours positive; donc *l'impédance Z croît lorsque ω croît de* 0 *à l'infini.*

4. La capacité d'un condensateur électrique est

$$C = 8{,}85 \times 10^{-12} \varepsilon_r S/e\,,$$

où e est l'épaisseur de l'isolant, supposée ici variable.

Calculons la dérivée $C' = \mathrm{d}C/\mathrm{d}e$:

$$C' = 8{,}85 \times 10^{-12} \varepsilon_r S(-1/e^2) = -8{,}85 \times 10^{-12} \varepsilon_r S/e^2\,;$$

cette quantité étant toujours négative, la capacité C décroît (quand la variable e augmente), ce qui était évident.

5. *Soient u et v deux nombres réels strictement positifs dont le produit p est constant. Déterminer si leur somme passe par un maximum ou un minimum.*

Soit f la fonction de la variable u définie par la relation

$$f(u) = u + v = u + p/u\,.$$

La dérivée est

$$f'(u) = 1 - p/u^2\,;$$

elle s'annule si $u^2 = p$, soit $u = \sqrt{p}$, puisque $u > 0$. Dans ce cas,

$$v = p/u = \sqrt{p} = u\,.$$

Le signe de $f'(u)$ est celui de $u^2 - p$. Donc $f'(u)$ est négatif si $u \leqslant \sqrt{p}$, positif si $u \geqslant \sqrt{p}$. Il en découle que la somme passe par un *minimum* lorsque les deux nombres u et v sont égaux à $\sqrt{p}$, ce minimum étant égal à $2\sqrt{p}$.

Une telle étude se rencontre en radio lorsque l'on calcule le gain d'amplification d'un transformateur moyenne fréquence, dont le secondaire est accordé. De même, ce problème intervient dans l'étude de la propagation du courant de haute fréquence le long des lignes ayant inductance et capacité réparties.

Application. Étudions les maximums et minimums de la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par la relation

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})\,.$$

Le produit de $u = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ et de $v = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ est constant et égal à 1/4. Il découle de l'étude précédente que $f(x)$ atteint un minimum lorsque

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2},$$

soit lorsque $x = 1$. Ce minimum vaut 1.

6. Soient u et v deux nombres réels positifs dont la somme s est constante. Déterminer si leur produit passe par un maximum ou un minimum.

Soit f la fonction définie par

$$f(u) = uv = u(s-u)\,.$$

Sa dérivée est

$$f'(u) = s - 2u\,;$$

elle s'annule si $u = s/2$. Dans ce cas,

$$v = s - s/2 = s/2\,.$$

Si $u \leqslant s/2$, $f'(u) \geqslant 0$ et f est croissante. Si $u \geqslant s/2$, $f'(u) \leqslant 0$ et f est décroissante. Donc f atteint un maximum égal à $s^2/4$, lorsque $u = v = s/2$.

7. Rappelons enfin que, dans certains cas, les théorèmes sur les fonctions monotones permettent de déterminer les maximums et les minimums sans passer par l'intermédiaire des dérivées.

Soit par exemple f la fonction définie sur $]-1/2, 1/2[$ par la formule

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Les fonctions $u \mapsto \sqrt{1-u}$ et $v \mapsto 1/v$ sont décroissantes; leur composée est croissante. Le sens de variation de f est donc celui de la fonction $x \mapsto 4x^2$. Comme cette dernière fonction est croissante si $x \geqslant 0$, décroissante si $x \leqslant 0$, f atteint un minimum lorsque $x = 0$, à savoir 1.

4.6 Formule de Taylor-Lagrange. *Soient n un entier naturel et f une fonction numérique n fois continûment dérivable sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, $a < b$, et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Il existe alors au moins un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1\,!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2\,!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(b-a)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}(b-a)^{n+1}.$$

En effet, il existe un nombre réel k et un seul tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1\,!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2\,!}(b-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(b-a)^n + \frac{k}{(n+1)\,!}(b-a)^{n+1}.$$

La fonction numérique g définie sur l'intervalle $[a, b]$ par la formule

$$g(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1\,!}(b-x) - \frac{f''(x)}{2\,!}(b-x)^2 - \ldots -$$

$$- \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!}(b-x)^n - \frac{k}{(n+1)\,!}(b-x)^{n+1}$$

satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc au moins un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$g'(c) = 0 .$$

Or, on vérifie aisément que la dérivée de g en tout point x de $]a, b[$ est

$$g'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{k}{n!}(b-x)^n .$$

La formule annoncée s'en déduit, compte tenu du fait que $(b-c)^n \neq 0$.

Lorsque $n = 0$, la formule de Taylor-Lagrange se réduit évidemment à la formule des accroissements finis.

Lorsque f est une fonction polynomiale de degré inférieur à n, la dérivée $(n+1)$-ième de f est nulle; on retrouve donc la formule de Taylor pour les polynômes (voir tome 1).

Dans le cas général, introduisons le polynôme P_n défini par la formule suivante :

$$P_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) .$$

Supposons que la dérivée $(n+1)$-ième de f soit bornée sur $]a, b[$:

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M .$$

Alors

$$|f(b) - P_n(b)| \leqslant M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} .$$

On peut ainsi majorer l'erreur commise dans le calcul de $f(b)$ lorsqu'on remplace la fonction f par P_n.

Autres notations. Comme dans le cas de la formule des accroissements finis, posons

$$h = b - a .$$

Pour tout élément c de $]a, b[$, il existe un élément θ de $]0, 1[$ et un seul tel que

$$c = a + \theta h .$$

La formule de Taylor-Lagrange peut alors s'écrire sous la forme

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots +$$

$$+ \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \qquad 0 < \theta < 1 .$$

Dans le cas où $a=0$, la formule précédente prend le nom de *formule de Maclaurin-Lagrange*; elle se réduit à

$$f(h) = f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{2!}f''(0)+\ \dots\ +$$

$$+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta h), \qquad 0<\theta<1.$$

4.7 Applications de la formule de Taylor-Lagrange au calcul numérique. La fonction f satisfaisant aux conditions précédentes, on veut calculer $f(a+h)$, connaissant $f(a)$, h étant petit :

$$f(a+h) = f(a)+hf'(a)+\ \dots\ +\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(c)$$

$$a<c<a+h.$$

Dans cette expression, on peut calculer

$$A = f(a)+hf'(a)+\ \dots\ +\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Par contre $f^{(n+1)}(c)$ n'est pas connu (car c est inconnu) mais on peut généralement trouver un majorant M tel que

$$|f^{(n+1)}(c)| \leqslant M.$$

Si on remplace la valeur de $f(a+h)$ par celle de A, on commet une erreur dont l'incertitude absolue est

$$\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}M.$$

Suivant la précision demandée, on limitera le nombre de termes du développement de A à deux ou trois.

EXEMPLES

1. *Calculer* sin 31° *connaissant* sin 30° = 0,5.

$f(a) = \sin 30° = 0{,}5 \qquad h = \pi/180 = 0{,}01745$ radian.

On obtient en prenant 3 termes :

$$\sin 31° = \sin 30° + \frac{\pi}{180}\cos 30° + \left(\frac{\pi}{180}\right)^2\frac{(-\sin 30°)}{2} - \left(\frac{\pi}{180}\right)^3\frac{\cos c}{3!}.$$

$$\sin 31° = 0{,}5+0{,}0174\times 0{,}866+(0{,}017)^2\left(-\frac{0{,}5}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\frac{\cos c}{6}.$$

L'incertitude absolue est inférieure à

$$\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} < 10^{-6}.$$

Donc $\sin 31° = 0{,}515\,039$ avec une erreur inférieure à 10^{-6} par excès.

2. *Calculer* Arc tg (1,001).
Posons

$$f(x) = \text{Arc tg}\, x \qquad f(1) = \pi/4$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f'(1) = 1/2$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad f''(c) = -\frac{2c}{(1+c^2)^2}$$

$$\text{Arc tg}\,(1{,}001) = \frac{\pi}{4} + 0{,}001 \times \frac{1}{2} - \frac{2c}{(1+c^2)^2} \cdot \frac{(0{,}001)^2}{2}.$$

Le nombre $\pi/4 + 0{,}0005$ est donc une valeur approchée par excès de Arc tg (1,001) avec une erreur inférieure à

$$\frac{ch^2}{(1+c^2)^2} < ch^2 < 1{,}001 \times 10^{-6} < 2 \times 10^{-6}.$$

Donc

$$\text{Arc tg}\,(1{,}001) = 0{,}785\,898 \qquad \text{(valeur par excès)}$$

avec une erreur inférieure à 2×10^{-6}.

3. *Calculer* $\sqrt[3]{1{,}2}$.
Posons

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \qquad f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} \qquad f'(1) = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3} \qquad f''(1) = -\frac{2}{9}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27} x^{-8/3} \qquad f'''(c) = \frac{10}{27} c^{-8/3}.$$

On obtient :

$$f(a+h) = \sqrt[3]{1{,}2} = 1+0{,}2\,\frac{1}{3} + \frac{(0{,}2)^2}{2\,!}\left(-\frac{2}{9}\right) + \frac{(0{,}2)^3}{3\,!}\,\frac{10}{27}\,c^{-8/3}$$

$$\sqrt[3]{1{,}2} = 1+0{,}0666-0{,}0044 + \frac{0{,}08}{162}\,c^{-8/3}.$$

Le nombre 1,0622 est donc une valeur approchée par défaut de $\sqrt[3]{1{,}2}$ avec une erreur inférieure à :

$$\frac{0{,}08}{162}\,\frac{1}{c^{8/3}} < \frac{0{,}08}{162} < 5\times 10^{-4}.$$

4.8 Application de la formule de Taylor-Lagrange à l'étude des points d'inflexion. Proposons-nous de préciser la position du graphe Γ d'une fonction f par rapport à la tangente en un de ses points. Les résultats s'expriment simplement à partir de la dérivée seconde de f.

Considérons les points M et M' de Γ d'abscisses respectives a et $a+h$. La tangente au point M a pour équation :

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)\,.$$

Il est clair que

$$\overline{P'M'}=f(a+h) \qquad \overline{P'H}=f(a)+hf'(a)$$

(Fig. 4.7).

Étudions le signe de $\overline{HM'}=\overline{P'M'}-\overline{P'H}$:

$$\overline{HM'}=f(a+h)-f(a)-hf'(a)\,.$$

La formule de Taylor donne :

$$\overline{HM'} = f(a+h)-f(a)\ -hf'(a)= \frac{h^2}{2}\,f''(a+\theta h) \qquad \text{avec } 0<\theta<1\,.$$

Supposons que f'' soit continue au point a.

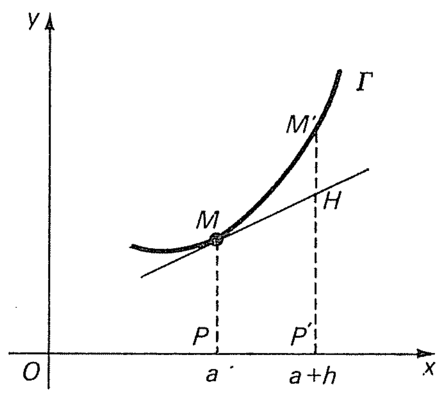


FIG. 4.7

Si $f''(a) > 0, f''$ est positive sur un intervalle de centre a. La courbe Γ est au-dessus de la tangente en M; on dit que la courbe Γ présente sa concavité vers les ordonnées positives (Fig. 4.7).

Si $f''(a) < 0$, on montre de même que la courbe Γ est en-dessous de la tangente en M; on dit que Γ présente sa concavité vers les ordonnées négatives (Fig. 4.8).

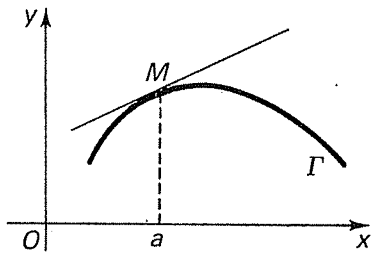


FIG. 4.8

Si f'' s'annule au point a en changeant de signe, la courbe traverse la tangente en M. On dit que M est un *point d'inflexion* de Γ. Plus précisément, si $f'''(a) > 0$, la courbe Γ est d'abord en-dessous de la tangente, puis au-dessus de celle-ci (Fig. 4.9). Si $f'''(a) < 0$, la courbe Γ est d'abord au-dessus de la tangente, puis en-dessous de celle-ci (Fig. 4.10).

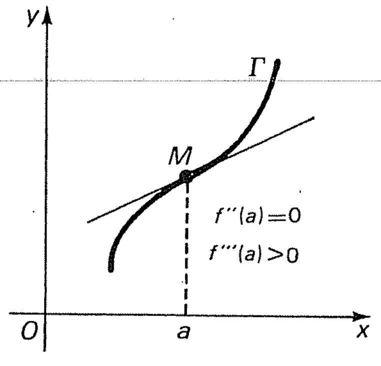


FIG. 4.9

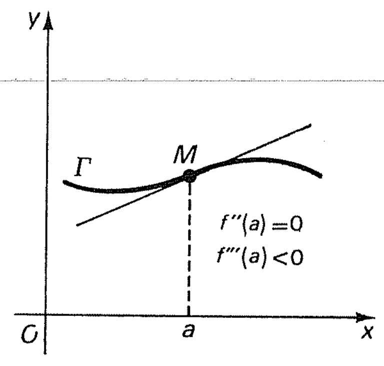


FIG. 4.10

On montrerait aisément que la courbe Γ présente l'allure de la figure si

$$f''(a) = f'''(a) = 0\,, \quad \text{mais} \quad f^{(4)}(a) \neq 0\,.$$

Remarque. En un point d'inflexion d'abscisse x_0, $f''(x_0) = 0$. Donc en ce point, la fonction f' passe par un maximum ou un minimum, puisque sa dérivée f'' est nulle pour $x = x_0$. Donc en un point d'inflexion, le coefficient angulaire de la tangente à la courbe est minimal ou maximal. On le vérifie géométriquement sur les figures 4.11 et 4.12.

La figure 4.11 montre une courbe ayant un point d'inflexion en C. Traçons la tangente à la courbe en différents points A, B, C, D, E; de A à C, on voit que la pente de la tangente diminue, tandis que de C à E, la pente croît à nouveau.

La pente passe donc par un *minimum* en C.

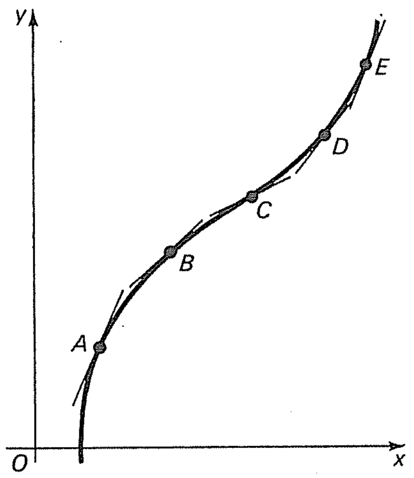


FIG. 4.11

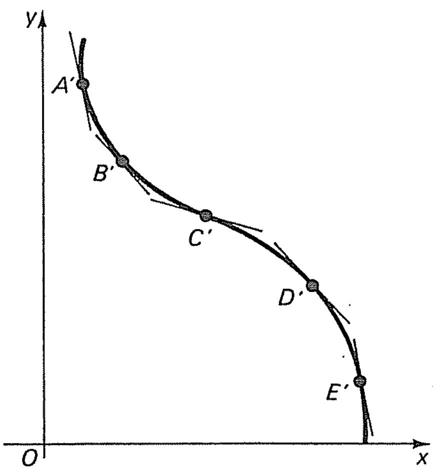


FIG. 4.12

De même, dans la figure 4.12 où C' est un point d'inflexion, on voit que, en allant de A' en C', l'inclinaison de la tangente à la courbe *croît* (en effet, l'angle de cette tangente avec Ox est obtus, et la pente est *de moins en moins négative*, elle croît donc), tandis qu'en allant de C' en E' l'inclinaison de la tangente à la courbe *décroit* (en effet, l'angle de cette tangente avec Ox est obtus, et la pente est *de plus en plus négative*, elle décroît donc). Le pente passe ainsi par un *maximum en* C'.

EXEMPLES

1. Soit f la fonction définie par la relation

$$f(x) = x^3 .$$

Alors

$$f'(x) = 3x^2 , \qquad f''(x) = 6x .$$

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe lorsque $x = 0$. L'origine est un point d'inflexion à tangente horizontale.

2. Considérons la fonction sinus :

$$f(x) = \sin x .$$

Alors

$$f'(x) = \cos x , \qquad f''(x) = -\sin x .$$

La dérivée seconde s'annule lorsque $x = k\pi$, où $k \in \mathbf{Z}$; elle passe du signe + au signe $-$ lorsque k est pair, du signe $-$ au signe $+$ lorsque k est impair. Les points d'intersection du graphe avec l'axe Ox sont des points d'inflexion.

3. Étudions la fonction f définie par

$$f(x) = \sin x - \operatorname{tg} x$$

au voisinage de l'origine. Écrivons à cet effet la formule de Maclaurin-Lagrange jusqu'au premier terme non nul :

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\sin x - \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x - 2\,\frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x \sin^2 x}{\cos^6 x}$$

$$f'''(x) = -\cos x - 2\,\frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} \qquad f'''(0) = -3\,.$$

Donc

$$f(h) = \frac{x^3}{3\,!} f'''(\theta h) \qquad 0 < \theta < 1\,.$$

Comme f''' est négatif au voisinage de l'origine, $f(h)$ a le signe opposé à celui de h. La courbe admet un point d'inflexion en O, la tangente étant horizontale (Fig. 4.13).

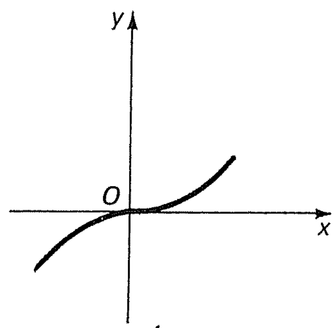


FIG. 4.13

4. Soit enfin f la fonction $x \mapsto x^4$. Alors

$$f''(x) = 12x^2\,.$$

On est tenté de dire que 0 est un point d'inflexion, car $f''(0) = 0$. En fait, f'' s'annule sans changer de signe; il s'agit simplement d'un minimum de f.

EXERCICES

Sens de variation des fonctions

Déterminer les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont croissantes et les intervalles sur lesquels ces fonctions sont décroissantes :

4.1 $y = x^2 - 6x + 1$.

4.2 $y = x^3 + 3x^2 + 2x - 1$.

4.3 $y = x^4 + 4x + 6$.

4.4 $y = (x+1)^3(2x-1)^2$.

4.5 $y = \dfrac{4x+5}{2x-3}$.

4.6 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$.

4.7 $y = \dfrac{2x}{2x^2+1}$.

4.8 $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

Points d'inflexion

Déterminer les points d'inflexion des graphes des fonctions suivantes :

4.9 $y = x^3 - 6x^2 - 36x + 30$.

4.10 $y = (x+2)^2(x-1)$.

4.11 $y = x(x-1)(x+2)$.

4.12 $y = x^4 - 4x^3 + 10$.

4.13 $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

4.14 $y = x + \dfrac{4}{x}$.

4.15 $y = x - \dfrac{108}{x^2}$.

4.16 $y = x^3 + \dfrac{48}{x}$.

4.17 $y = x(x-1)^3$.

4.18 $y = \dfrac{x^3-16}{x}$.

4.19 $y = \dfrac{x^2-3x-19}{x+4}$.

4.20 $y = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

4.21 $y = (x-2)^2(x+1)$.

4.22 $y = x \operatorname{Arc\,tg} x$.

4.23 $y = (x+2) \operatorname{Arc\,tg} x$.

4.24 $y = 2 \sin x + \dfrac{\sin 2x}{2}$.

Recherche des maximums et des minimums

Trouver les valeurs de x qui rendent minimales ou maximales les fonctions suivantes, en précisant si l'on a un maximum ou un minimum :

4.25 $y = x + \dfrac{1}{x}$.

4.26 $y = \dfrac{3x}{1+x^2}$.

4.27 $y = 3x^2 + \dfrac{10}{x}$.

4.28 $y = \dfrac{3x}{x^3+1}$.

4.29 $y = x^3 + \dfrac{48}{x}$.

4.30 $y = \dfrac{x}{x^2-5x+6}$.

4.31 $y = x(x-1)(x+2)$.

4.32 $y = \sin^3 x$.

4.33 $y = \sin^2 x + \sin 2x$.

4.34 $y = (x^2-4x)^2$.

4.35 $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

4.36 $y = \dfrac{x^2-7x+16}{x-4}$.

4.37 $y = x\sqrt{16-x^2}$.

4.38 $y = \dfrac{x^3}{x^2-12}$.

4.39 $y = x^2\sqrt{24-x^2}$.

4.40 $y = \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{1-x}$.

4.41 $y = \dfrac{8x-1}{(x-2)^2}$.

4.42 $y = \sqrt{1 + \left(\dfrac{ax}{1+bx^2}\right)^2}$, $\qquad b > 0$.

CHAPITRE 5

RECHERCHE DES MAXIMUMS ET DES MINIMUMS POUR DES APPLICATIONS PRATIQUES

5.1 Problème de la boîte. *Pour fabriquer une boîte sans couvercle, on prend une feuille carrée en carton ou en métal dont le côté a une longueur donnée a. A chacun des quatre angles, on découpe un carré dont le côté a une longueur égale à x; on rabat perpendiculairement les quatre bandes qui restent* (Fig. 5.1). *Déterminer x pour que le volume de la boîte soit maximal.*

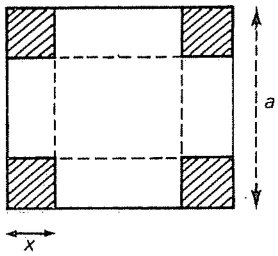


FIG. 5.1

L'aire du fond de la boîte est

$$A = (a-2x)^2 .$$

Le volume de la boîte est donc

$$V = xA = x(a-2x)^2 = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x .$$

Pour que le volume soit maximal, il faut que la dérivée de V soit nulle :

$$V' = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0 ,$$

équation dont les racines sont

$$x = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{12} = \frac{4a \pm 2a}{12},$$

soit

$$x' = a/2 \qquad \text{et} \qquad x'' = a/6 .$$

La dérivée V' est positive pour $x < a/6$ et $x > a/2$.
La dérivée V' est négative pour $a/6 < x < a/2$.
On déduit le tableau de variation de V :

x		$a/6$		$a/2$
V'	$+$	0	$-$	0
V	$\nearrow$	M	$\searrow$	m

Le maximum de V est atteint pour $x = a/6$; ce maximum est égal à $2a^3/27$. (Pour $x = a/2$, V prend la valeur 0; la boîte est alors réduite à un point.)

5.2 Problème de la casserole. *On veut fabriquer une casserole en aluminium embouti au moyen d'une feuille de métal d'aire donnée A. Déterminer le rapport de la hauteur h et du rayon r pour que le volume soit maximal. On suppose qu'il n'y a aucun déchet de métal, que l'épaisseur reste constante et qu'il n'y a pas de couvercle* (Fig. 5.2).

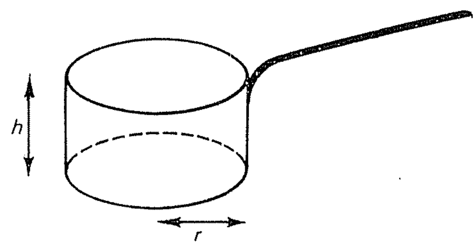


FIG. 5.2

Le volume est

$$V = \pi r^2 h .$$

Il y a deux variables, r et h, mais il existe une relation entre ces variables : en effet, l'aire totale est constante, soit

$$\pi r^2 + 2\pi r h = A . \tag{1}$$

D'où

$$h = (A - \pi r^2)/2\pi r .$$

Portons dans V :

$$V = \pi r^2 \frac{A - \pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}(A - \pi r^2) = \frac{rA}{2} - \frac{\pi r^3}{2} .$$

Le volume est ainsi exprimé en fonction de la seule variable r; pour déterminer le maximum, annulons la dérivée de V :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{A}{2} - \frac{3\pi r^2}{2} = 0 .$$

On en tire :

$$3\pi r^2 = A \qquad \text{et} \qquad r = \sqrt{A/3\pi} .$$

Compte tenu de la relation (1), nous voyons que

$$\pi r^2 + 2\pi r h = 3\pi r^2 ,$$

d'où

$$2\pi r^2 = 2\pi rh$$

et

$$r = h\,.$$

Remarquons que pour $r < \sqrt{A/3\pi}$ la dérivée est positive, et que pour $r > \sqrt{A/3\pi}$ elle est négative. Il s'agit donc bien d'un maximum de volume.

5.3 Problème de la boîte de conserve. *On veut fabriquer une boîte de conserve cylindrique (avec couvercle) avec le minimum de métal pour un volume donné V. Déterminer le rapport de la hauteur h et du rayon r. (On obtient ainsi la boîte la plus économique à fabriquer.)*

C'est en somme le problème de la casserole, avec un couvercle, ayant un volume donné. Calculons donc l'aire totale, afin d'en annuler la dérivée. Le volume est

$$V = \pi r^2 h \tag{1}$$

et l'aire totale

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh\,. \tag{2}$$

On tire de la relation (1) :

$$h = V/\pi r^2\,.$$

Reportons dans (2) :

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\,\frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}\,.$$

D'où

$$A' = \mathrm{d}A/\mathrm{d}r = 4\pi r - 2V/r^2\,.$$

Annulons cette dérivée; il vient :

$$4\pi r = 2V/r^2 \qquad \text{et} \qquad r = \sqrt[3]{V/2\pi}\,.$$

En reportant dans (1), nous obtenons

$$h = 2r\,.$$

Le signe de A' est celui de $4\pi r^3 - 2V$, qui est positif pour $r > \sqrt[3]{V/2\pi}$ et négatif pour $r < \sqrt{V/2\pi}$. La fonction A passe donc bien par un minimum pour $r = \sqrt[3]{V/2\pi}$.

5.4 Problème de la réflexion de la lumière (Descartes). *Soient un miroir plan, S une source lumineuse et O un œil qui regarde dans le miroir. Trouver la position du point M où un rayon issu de S frappe le miroir pour aller ensuite dans l'œil, sachant que la lumière suit le chemin le plus court.*

C'est en effet cette hypothèse qui régnait au XVII^e^ siècle, et qui a été reconnue exacte par la suite. Et c'est grâce aux dérivées que, dès cette époque, on a pu énoncer la loi de la réflexion de la lumière.

On se donne a, b et l (Fig. 5.3) et on déterminera la position du point M par la distance x. Ensuite, nous chercherons une relation trigonométrique au sujet des angles situés autour du point M.

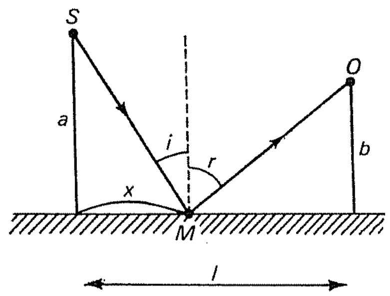


FIG. 5.3

La distance totale est

$$d = SM+MO = \sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(l-x)^2}.$$

D'où

$$d' = 2x\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}+2(-1)(l-x)\frac{1}{2\sqrt{b^2+(l-x)^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{l-x}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}.$$

La dérivée s'annule pour

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{l-x}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}. \tag{1}$$

Élevons les deux membres au carré pour supprimer les racines carrées :

$$\frac{x^2}{a^2+x^2} = \frac{(l-x)^2}{b^2+(l-x)^2}.$$

Égalons les produits des extrêmes et des moyens, et simplifions; il reste :

$$b^2x^2 = a^2(l-x)^2 .$$

Puisque x et $l-x$ sont positifs,

$$bx = a(l-x)$$

et finalement

$$x = al/(a+b).$$

La relation (1) a une interprétation trigonométrique fort simple : elle signifie que les angles i et r ont le même sinus, et donc qu'ils sont égaux :

$$\boxed{i = r}\,.$$

L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, *c'est la loi de la réflexion de la lumière*, trouvée par Descartes.

On a bien un minimum de parcours, car si, dans la dérivée, on remplace x par une valeur *inférieure* à $al/(a+b)$, par exemple par zéro, on constate que cette dérivée est négative, donc d décroît, on aura donc bien un minimum de la distance d.

5.5 Problème de la réfraction de la lumière (Descartes). *Soient une cuve remplie d'eau* (Fig. 5.4), *S une source lumineuse à la distance a de la surface, O un œil à la profondeur b recevant un rayon lumineux venant de S. Trouver la position du point M où le rayon frappe la surface de l'eau, sachant que la lumière met le temps minimal pour aller de S en O; la vitesse de la lumière étant V dans l'air et V' dans l'eau, avec* $V > V'$. *En déduire la loi de la réfraction de la lumière.*

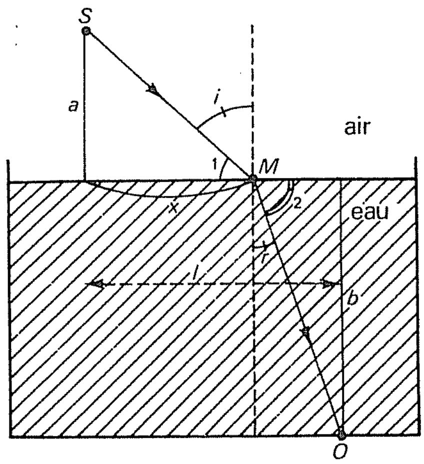


FIG. 5.4

Cette dernière hypothèse, $V > V'$, était connue au XVII[e] siècle, du temps de Descartes.

L'expérience montre que la lumière, pour aller de S en O, suit une ligne brisée SMO. La position du point M sera déterminée par la distance x, nous en déduirons ensuite une relation trigonométrique au sujet des angles autour du point M (Fig. 5.4).

Calculons la durée totale t du parcours, puis nous annulerons la dérivée $t' = dt/dx$.

Le temps pour aller de S en M est SM/V, et le temps pour aller de M en O est MO/V'.

La durée totale est donc

$$t = \frac{SM}{V} + \frac{MO}{V'} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{V} + \frac{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{V'};$$

d'où la dérivée

$$t' = \frac{2x}{V}\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{2}{V'}(-1)(l-x)\frac{1}{2\sqrt{b^2+(l-x)^2}}.$$

La dérivée t' s'annule pour

$$\frac{x}{V\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{l-x}{V'\sqrt{b^2+(l-x)^2}} \tag{1}$$

d'où

$$\frac{x^2}{V^2(a^2+x^2)} = \frac{(l-x)^2}{V'^2[b^2+(l-x)^2]}$$

mais en faisant les produits en croix, et en développant, on constate qu'on obtient une équation complète du 4e degré, qu'on ne peut résoudre.

Cependant, la relation (1) reçoit une interprétation trigonométrique très simple : elle peut s'écrire

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{V}{V'}\cdot\frac{(l-x)}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}.$$

Or,

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{SM} \quad \text{est le sinus de l'angle } i\,;$$

$$\frac{l-x}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}} = \frac{l-x}{MO} \quad \text{est le sinus de l'angle } r\,.$$

Ainsi,

$$\sin i = \frac{V}{V'}\,.\,\sin r\,.$$

Le nombre V/V' s'appelle indice de réfraction de l'eau par rapport à l'air, et se note n; d'où la loi de la réfraction de la lumière, trouvée par Descartes au XVIIe siècle :

$$\boxed{\sin i = n \sin r}$$

et comme $V > V'$, on a $n > 1$, donc $\sin i > \sin r$, et $i > r$.

Le chemin le plus court n'est donc pas la ligne droite!

On peut voir que c'est bien un minimum de parcours, car si on fait $x=0$ dans la dérivée t', on voit que celle-ci est négative, donc t décroît, il doit donc passer par un minimum.

5.6 Problème du navire. *Soit un navire qui doit parcourir une distance d (en kilomètres). Parmi toutes les dépenses, il y a celles du combustible et celles du personnel. La dépense horaire du combustible est proportionnelle au carré de la vitesse, elle est de la forme Kv^2, et la paie horaire du personnel est évidemment indépendante de la vitesse, soit K'. Calculer la vitesse v du navire en km/h pour que la dépense totale soit minimale.*

Il y aura en effet un minimum de dépense pour une vitesse bien déterminée : si le navire va très vite, il dépense beaucoup de combustible, mais comme il reste moins longtemps en mer, la paie du personnel sera faible. Par contre, si le navire va lentement, il dépense moins de combustible par heure, mais comme il reste plus longtemps en mer, la paie du personnel sera plus grande.

Soient v la vitesse en km/h et n le nombre d'heures de traversée. La distance d est, en kilomètres :

$$d = nv\,.$$

La dépense horaire est Kv^2+K'; la dépense totale est donc

$$\begin{aligned} y &= n(Kv^2+K') \\ &= d/v(Kv^2+K') = Kdv + K'\,d/v\,. \end{aligned}$$

Calculons la dérivée de y par rapport à la variable v :

$$y' = Kd - K'\,d/v^2\,;$$

elle s'annule pour

$$Kv^2 = K'\,;$$

la dépense horaire de combustible doit être égale à la paie horaire du personnel. La vitesse du navire est donc $v=\sqrt{K'/K}$.

Mais est-ce un minimum de dépense? — La dérivée est positive pour $v>\sqrt{K'/K}$ et négative pour $v<\sqrt{K'/K}$.
On a donc bien un *minimum* de dépense.

Ce problème, ainsi que son résultat, sont d'ailleurs bien connus des compagnies de navigation sur mer ou dans les airs, et de transport en général.

5.7 Problème de la statue. *Soit un piédestal de hauteur h sur lequel est posée une statue de hauteur a. A quelle distance du pied du piédestal faut-il se placer pour voir la statue sous l'angle maximal* (Fig. 5.5) *?*

On conçoit que, si l'on est très loin, l'angle α est très petit et, si l'on est trop près du pied, l'angle α sera aussi très petit. Il y a donc une distance $AP=x$ pour laquelle l'angle α sera maximal. Et tg α sera aussi maximal.

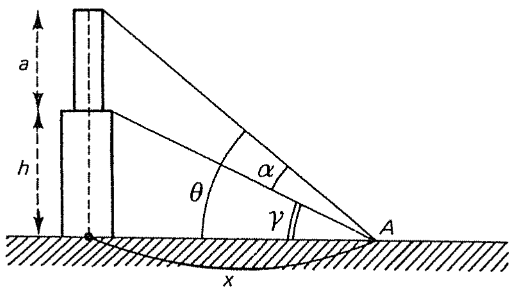


FIG. 5.5

Calculons tg α :

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\theta-\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\gamma}{1+\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\gamma}.$$

Or,

$$\operatorname{tg}\theta = (a+h)/x \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg}\gamma = h/x \,;$$

donc

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{a+h}{x} - \dfrac{h}{x}}{1+\dfrac{a+h}{x}\dfrac{h}{x}} = \frac{x(a+h)-xh}{x^2+h(a+h)}.$$

Appelons y cette fonction dont nous cherchons le maximum :

$$y = \frac{ax}{x^2+ah+h^2}.$$

Calculons la dérivée de ce quotient :

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x^2+ah+h^2)\,a - ax\,.\,2x}{v^2} = \frac{a(-x^2+ah+h^2)}{v^2}$$

où $v = x^2+ah+h^2$.

La dérivée s'annule pour

$$ah+h^2 = x^2, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x = \sqrt{h(a+h)}\,;$$

donc x est moyenne géométrique entre la hauteur du piédestal et la hauteur totale.

— Est-ce bien un maximum? — Étudions pour cela le signe de la dérivée, de part et d'autre de la valeur critique :

Pour $x < \sqrt{h(a+h)}$, par exemple $x = 0$, y' est positive, donc y commence par croître, et l'on a bien un *maximum de* tg α, donc de l'angle α.

5.8 Problème de l'autobus. *Un piéton qui est en B veut aller en A, en prenant au passage un autobus le long d'une route. Chercher la position du point C où ce piéton doit prendre l'autobus pour qu'il arrive en A dans le temps minimal. La vitesse de l'autobus est V, celle du piéton est V', avec* $V' < V$ (Fig. 5.6).

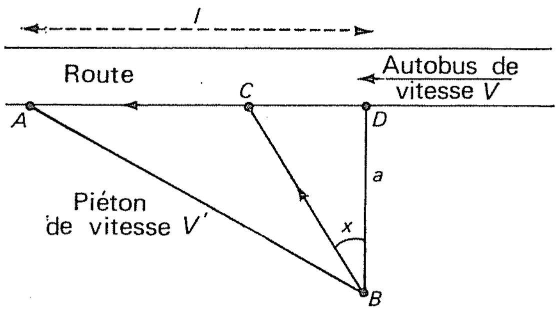


FIG. 5.6

Il est évident que, si $V' > V$, le piéton n'a pas avantage à aller prendre l'autobus, et il n'a qu'à aller à pied de B à A.

On se donne évidemment les distances a et l.

Prenons l'angle x comme variable.

On a

$$a = BC.\cos x\,, \qquad \text{d'où} \qquad BC = a/\cos x$$

et

$$CA = DA - DC = l - a\,\mathrm{tg}\,x\,.$$

La durée totale t du parcours sera

$$t = \frac{BC}{V'} + \frac{CA}{V} = \frac{a}{V'\cos x} + \frac{(l - a\,\mathrm{tg}\,x)}{V}$$

$$= \frac{a}{V'\cos x} + \frac{l}{V} - \frac{a\,\mathrm{tg}\,x}{V}.$$

Calculons la dérivée de t :

$$t' = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{V'\cos^2 x}(-\sin x) - \frac{a}{V}\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Cette dérivée s'annule pour

$$\frac{\sin x}{V'} - \frac{1}{V} = 0$$

ou

$$\sin x = V'/V \quad (< 1)\,.$$

On voit d'ailleurs que le problème n'est possible que si $V' < V$.

Est-ce un minimum? — Étudions le signe de t' en donnant à $\sin x$ une valeur *inférieure* à la valeur critique, par exemple $\sin x = 0$, ce qui donne (en faisant $\cos x = 1$) $t' < 0$, donc t décroît, et comme t' s'annule ensuite, c'est bien un *minimum* de t que l'on aura.

5.9 Problème du transformateur électrique. *Soit un générateur alternatif, de force électromotrice E et de résistance interne ρ que l'on relie à une résistance fixe R au moyen d'un transformateur, supposé parfait, c'est-à-dire dont le rendement est de 100% (sans pertes et sans fuites). Calculer le rapport de transformation n pour que le courant dans R soit maximal* (Fig. 5.7).

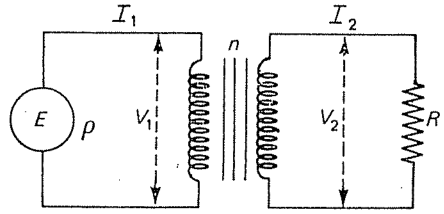


FIG. 5.7

On remarquera que, si le courant est maximal, il en sera de même de la différence de potentiel V_2 aux bornes de R, ainsi que de la puissance électrique dépensée dans R, puissance qui est RI^2.

On sait que le rapport de transformation est

$$n = V_2/V_1 \qquad \text{ou} \qquad I_1/I_2\,.$$

Calculons donc V_2 en fonction de n. Or,

$$V_1 = E - \rho I_1\,, \qquad \text{d'où} \qquad I_1 = (E - V_1)/\rho\,.$$

D'autre part,

$$V_2 = R\,I_2 = R\frac{I_1}{n} = \frac{R}{n}\cdot\left(\frac{E-V_1}{\rho}\right)$$

$$V_2 = \frac{RE}{n\rho} - \frac{RV_1}{n\rho} = \frac{RE}{n\rho} - \frac{R}{n\rho}\left(\frac{V_2}{n}\right)$$

ou

$$V_2 + \frac{RV_2}{n^2\rho} = \frac{RE}{n\rho},$$

$$V_2\left(1 + \frac{R}{n^2\rho}\right) = \frac{RE}{n\rho},$$

$$V_2\left(\frac{n^2\rho+R}{n^2\rho}\right)=\frac{RE}{n\rho},$$

$$V_2=\frac{n^2\rho}{n^2\rho+R}\cdot\frac{RE}{n\rho}=\frac{nRE}{n^2\rho+R}=f(n),$$

n étant la seule variable; annulons donc la dérivée de ce quotient par rapport à n :

$$V_2'=\frac{(n^2\rho+R)RE-nRE\,.\,2n\rho}{(n^2\rho+R)^2}=0$$

ou

$$(n^2\rho+R)-2n^2\rho=0\,,$$
$$R-n^2\rho=0\,,$$
$$R=n^2\rho\,;$$

d'où

$$\boxed{n=\sqrt{R/\rho}}\,.$$

Si $R=\rho$, $n=1$ et le transformateur est théoriquement inutile;
si $R<\rho$, $n<1$, le transformateur est abaisseur de tension;
si $R>\rho$, $n>1$, le transformateur est élévateur de tension.

Est-ce bien un maximum de V_2? — Étudions le signe de la dérivée un peu *avant* la valeur critique de n :

pour $n<\sqrt{R/\rho}$, par exemple $n=0$, $V_2'>0$, donc V_2 croît.

Comme la dérivée s'annule ensuite, on aura bien un *maximum de* V_2 ainsi que du courant I, dans R, ainsi que de la puissance dans R.

Si par hasard $R=\rho$, $n=1$ et il n'y a aucun avantage à utiliser un transformateur, où il y a toujours des pertes d'énergie.

Cependant, même si $n=1$, un transformateur est souvent utile car il isole le primaire du secondaire, dans le cas où l'on aurait accidentellement de la haute tension dans le primaire.

5.10 Problème du projectile. *On lance obliquement, sous un angle α, un projectile avec une vitesse initiale V. Trouver la valeur de l'angle α pour que la portée du tir soit maximale, et trouver la hauteur maximale de la trajectoire. On néglige la résistance de l'air* (Fig. 5.8).

On démontre, en mécanique, que l'abscisse x et l'ordonnée y du projectile sont reliées entre elles par

$$y=\frac{-g}{2V^2\cos^2\alpha}x^2+x\operatorname{tg}\alpha\,;$$

c'est un trinôme du second degré, représenté par une parabole d'axe vertical (a est négatif), et passant par un maximum.

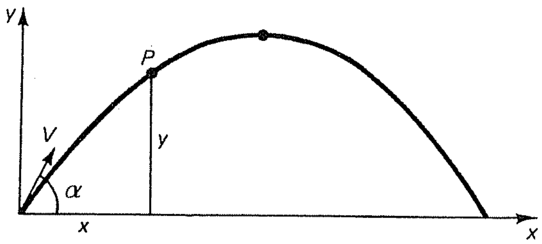


FIG. 5.8

La portée, c'est-à-dire la valeur maximale de x, est obtenue en faisant $y=0$, d'où :

$$x \operatorname{tg} \alpha = \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2 \alpha}$$

et

$$x = \operatorname{tg} \alpha \frac{2V^2 \cos^2 \alpha}{g} = \sin \alpha \frac{2V^2 \cos \alpha}{g}$$

$$x = \sin 2\alpha \frac{V^2}{g} = f(\alpha).$$

Si α varie, la portée maximale sera obtenue en annulant la dérivée de x par rapport à α :

$$x' = \frac{V^2}{g} 2 \cos 2\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \cos 2\alpha = 0,$$

d'où $2\alpha = \pi/2$ et $\alpha = \pi/4$ ou $45°$.

Est-ce bien un maximum? x' est positif pour $\alpha < \pi/4$ et $x' < 0$ pour $\alpha > \pi/4$.

Donc x croît pour décroître ensuite. On a donc bien un *maximum*, si l'angle de tir est de 45°.

Quant au maximum de hauteur atteinte par le projectile, annulons y', ce qui nous donnera la valeur de x :

$$y' = \frac{-2gx}{2V^2 \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{gx}{V^2 \cos^2 \alpha},$$

et

$$x = \frac{\operatorname{tg}\alpha \, V^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

$$x = \frac{V^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{1}{2} \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

On remarque que c'est la moitié de la portée maximale. On en déduit facilement la valeur de y à ce moment :

$$y = \frac{-g}{2V^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{V^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2} + \operatorname{tg}\alpha \frac{V^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

$$= \frac{-V^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{g},$$

et, pour $\alpha = \pi/4$, il vient :

$$y = V^2/4g.$$

On verrait ainsi que, si $V = 1000$ m/s, on trouve une hauteur maximale de 25 km, l'abscisse x étant à ce moment de 100 km (ceci en négligeant naturellement la résistance de l'air).

5.11 Problème de la résonance électrique. *Mettons en série un condensateur de capacité C et une bobine de résistance R et dont l'inductance est L. Branchons le tout sur une d.d.p. alternative V. On sait que le courant I a pour valeur :*

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}}.$$

En supposant la capacité C variable, chercher dans quelles conditions le courant I peut devenir maximal.

Le courant I peut s'écrire :

$$I = V[R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2]^{-1/2}. = f(C).$$

Annulons donc la dérivée par rapport à C :

$$I' = V(-1/2)\,[R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2]^{-3/2}.\ 2(L\omega - 1/C\omega)\,(\omega/C^2\omega^2)$$

$$I' = -\frac{V(L\omega - 1/C\omega)}{C^2\omega[\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}]^3} = 0$$

d'où

$$L\omega - 1/C\omega = 0$$

$$L\omega = 1/C\omega \qquad \text{et} \qquad \boxed{LC\omega^2 = 1}.$$

On en tire $C = 1/L\omega^2$ et $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Or, $1/\sqrt{CL}$ est la pulsation propre Ω du circuit oscillant LC (s'il était le siège d'une décharge oscillante), on a donc

$$\omega = \Omega$$

et si f est la fréquence de la source (et du courant) et F la fréquence propre du circuit oscillant :

$$2\pi f = 2\pi F$$

ou

$$\boxed{f = F}\,.$$

La fréquence f de la source et la fréquence F du circuit oscillant sont égales : on dit qu'il y a résonance.

— Est-ce un maximum de I?

— Faisons $C < 1/L\omega^2$, par exemple; le dénominateur de I' est positif, la parenthèse du numérateur est négative, donc I' est positive, le courant I croît, et comme la dérivée s'annule ensuite, c'est que l'on a un *maximum* de courant. On voit ainsi que, en donnant à C une valeur convenable, le courant I est maximal; il en résulte que la différence de potentiel aux bornes du condensateur est aussi maximale (il y a surtension). Cette propriété est utilisée dans tous les montages de radio.

5.12 Problème de l'induction magnétique. *Soit une spire métallique de rayon R parcourue par un courant d'intensité I; l'induction B du champ magnétique produit en un point P à la distance a du centre de cette spire, et sur l'axe de la spire, est donnée par la formule :*

$$B = \frac{2\pi I R^2 \times 10^{-7}}{(R^2 + a^2)^{3/2}} = f(R)\,.$$

Si R est variable, chercher sa valeur pour que l'intensité B soit maximale.

En effet, si R est faible, tous les points du cercle sont à une petite distance du point P, mais, si R est grand, le cercle est beaucoup plus loin du point P, et, comme la longueur du fil est plus grande, le champ créé en P a tendance à être plus grand. On conçoit donc qu'il y ait une valeur critique de R pour laquelle l'induction magnétique en P sera maximale.

Calculons donc la dérivée de B par rapport à R, en remarquant que R n'intervient que par son carré :

$$B' = 2R\,.\,2\pi I \times 10^{-7}\,\frac{(R^2+a^2)^{3/2} - (3/2)\,(R^2+a^2)^{1/2}\,R^2}{(R^2+a^2)^3}\,.$$

Cette dérivée s'annule si

$$R^2 + a^2 = 3R^2/2\,,$$

soit

$$R^2 = 2a^2 \qquad \text{et} \qquad R = a\sqrt{2}\,.$$

Est-ce bien un maximum? — Étudions le signe de B'.

— Si $R < a\sqrt{2}$, par exemple $R = a$, on voit facilement que le numérateur de B' est positif, donc $B' > 0$ et le champ croît.

Si $R > a\sqrt{2}$, par exemple $R = 2a$, on voit facilement que B' est négative, donc l'induction B décroît.

— L'induction magnétique B passe donc bien par un *maximum*, pour $R = a\sqrt{2}$.

5.13 Problème de la puissance électrique maximale. C'est un problème très important en électricité, on le rencontre aussi en radio, dans l'étude de la réception et de l'émission.

Soit un générateur de force électromotrice E et de résistance interne r qui débite sur une résistance extérieure R variable. Trouver la valeur de R pour que la puissance dégagée dans R soit maximale (Fig. 5.9).

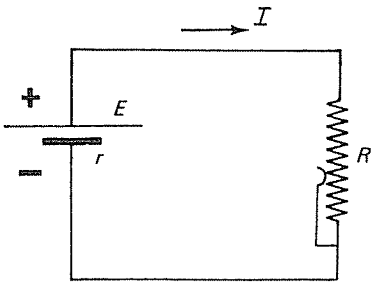


FIG. 5.9

La puissance est donnée par la loi de Joule :

$$P = RI^2\,.$$

Or,

$$I = E/(R+r);$$

donc

$$P = R\left(\frac{E}{R+r}\right)^2 = \frac{RE^2}{(R+r)^2}.$$

Annulons la dérivée par rapport à R :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = \frac{E^2}{(R+r)^2} - 2\,\frac{RE^2}{(R+r)^3} = \frac{E^2(r-R)}{(R+r)^3}.$$

Il en découle que $P' = 0$ pour

$$R = r\,.$$

La résistance externe doit être égale à la résistance interne.

Est-ce un maximum de P ou bien un minimum?

Étudions le signe de P' : la dérivée a le signe du numérateur, c'est-à-dire de $E^2(r-R)$.

Si $R<r$, P' est positive, et P croît,
et si $R>r$, P' est négative, et P décroît.

On a donc bien un *maximum* de puissance.

5.14 Problème du meilleur groupement de générateurs électriques. *On possède n générateurs électriques de f.é.m. E et de résistance interne r chacun, que l'on doit brancher sur une résistance extérieure R donnée. Comment faut-il les grouper, en série, en parallèle, ou en série-parallèle pour que la puissance utile dans R soit maximale?*

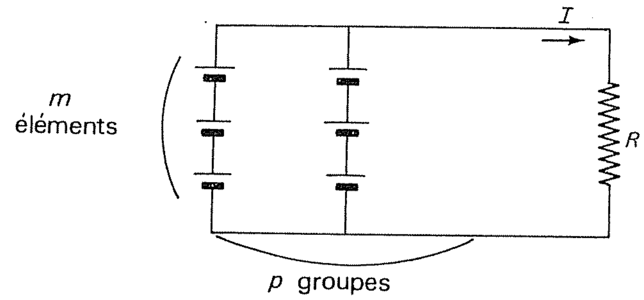


FIG. 5.10

Appelons m le nombre d'éléments en série dans chaque branche, et p le nombre de branches en parallèle (Fig. 5.10).

La f.é.m. de l'ensemble est évidemment celle d'une seule branche, soit mE. La résistance d'une branche étant mr, la résistance interne totale sera donc p fois plus petite, puisqu'il y a p branches en parallèle.

Pour que la puissance dans R soit maximale, il faut que le courant I soit maximum, puisque $P=RI^2$.

La loi de Kirchhoff nous donne :

$$I=\frac{mE}{(mr/p)+R}=\frac{pmE}{mr+Rp};$$

or $pm=n$, d'où :

$$I=\frac{nE}{mr+Rp}=\frac{nE}{mr+Rn/m},$$

où m est la seule variable.

Le courant I sera maximal si le dénominateur est minimal. Annulons donc la dérivée de ce dernier en l'appelant y :

$$y = mr + Rn/m\,,$$

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}m} = r - Rn/m^2 = 0\,;$$

d'où :

$$r = Rn/m^2$$

et

$$m = \sqrt{Rn/r}\,.$$

On en tire p :

$$p = n/m = n\sqrt{r/Rn} = \sqrt{rn/R}\,.$$

On a bien un minimum puisque la dérivée est négative pour $m < \sqrt{Rn/r}$.

Il faut évidemment que m et p soient des nombres entiers, et, comme ce sera peu probable, on prendra les nombres entiers *les plus voisins* des valeurs calculées, sous réserve que $mp \leqslant n$.

On remarque, à ce moment, que la résistance totale de la batterie, et qui est mr/p, peut aussi s'écrire :

$$\frac{mr}{p} = \frac{r\sqrt{Rn/r}}{\sqrt{rn/R}} = R\,;$$

elle est ainsi égale à la résistance extérieure R.

On retrouve ainsi la condition de la puissance maximale qu'on avait déjà trouvée dans le problème précédent.

D'ailleurs, cette conclusion est *très générale*, elle s'applique en continu, en alternatif, en basse fréquence, en haute fréquence. Par exemple, dans un amplificateur, l'étage de sortie qui alimente un haut-parleur est un générateur de puissance BF pour ce dernier, et on trouvera les mêmes conclusions.

5.15 Problème du pont de Wheatstone. Tout lecteur de ce livre connaît le pont de Wheatstone utilisé en électricité pour la mesure précise des résistances (Fig. 5.11).

On sait que, lorsque le pont est équilibré, c'est-à-dire lorsque le galvanomètre est au zéro, on a la formule suivante qui est d'ailleurs obtenue immédiatement d'après la configuration du schéma (et facile à retenir par cœur) :

$$R_1/R_2 = R_3/R_4\,.$$

Le problème qui se pose est celui-ci : *quelle est la condition à réaliser pour que la sensibilité soit maximale?*

Il faut d'abord définir ce que l'on peut appeler la *sensibilité* du pont.

Supposons que R_1 soit la résistance à mesurer; appelons-la x.

Soit U_G la d.d.p. entre A et B; cette d.d.p. est nulle à l'équilibre, lorsque $x = x_0$. La sensibilité du pont est la dérivée de U_G par rapport à x au point x_0.

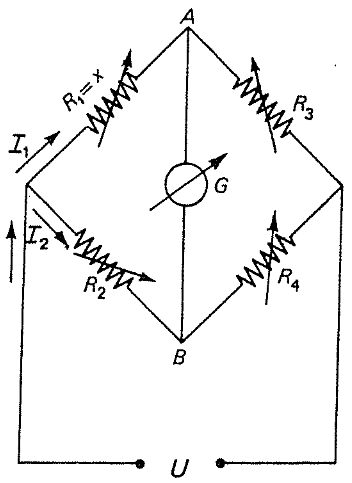


FIG. 5.11

D'après la loi d'Ohm, le galvanomètre n'étant pas branché,

$$U_G = I_1 x - I_2 R_2 .$$

Or,

$$I_1 = \frac{U}{x+R_3} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \frac{U}{R_2+R_4};$$

donc

$$U_G = U\left(\frac{x}{x+R_3} - \frac{R_2}{R_2+R_4}\right).$$

La dérivée par rapport à x est

$$\frac{\mathrm{d}U_G}{\mathrm{d}x} = U\frac{R_3}{(x+R_3)^2}.$$

Posons $t = x_0/R_3$; la sensibilité s'exprime en fonction de t par la formule :

$$s = \frac{U}{R_3}\frac{t}{(1+t)^2}.$$

Pour que la sensibilité soit maximale, il faut que sa dérivée par rapport à t soit nulle, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{2t}{(1+t)^3} = 0.$$

On en déduit aussitôt que $1+t = 2t$, et donc que $t = 1$; finalement,

$$\boxed{R_1 = R_3 \qquad \text{et} \qquad R_2 = R_4}.$$

Mais a-t-on un maximum? Le signe de s' dépend de $1-t$; donc :

— si $t<1$, $s'>0$ et s croît;

— si $t>1$, $s'<0$ et s décroît;

on a donc bien un maximum de sensibilité.

5.16 Problème du rendement d'un transformateur électrique. *Dans quelles conditions le rendement d'un transformateur électrique peut-il être maximal?*

Considérons un transformateur électrique qui fournit à la sortie de l'enroulement secondaire une certaine puissance utile :

$$P_u = U_2 I_2 \cos \varphi_2$$

en prenant les valeurs efficaces de la tension et du courant (Fig. 5.12).

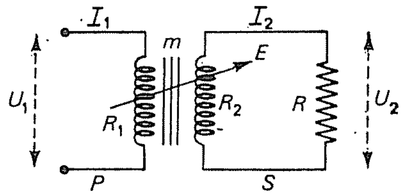


FIG. 5.12

Mais dans un tel transformateur il y a des pertes d'énergie :

1° Les pertes Joule dans le primaire et dans le secondaire :

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2;$$

2° Les pertes dans le fer, qui comprennent les pertes dues aux courants de Foucault et les pertes dues à l'hystérésis, et qui échauffent le fer.

On constate en effet que plus un noyau de fer a de l'hystérésis, plus il s'échauffe; on démontre même mathématiquement en électricité que les pertes en watts dues à l'hystérésis sont proportionnelles à la surface interne de la courbe d'hystérésis, pendant une période.

Le rendement d'un tel transformateur, qui est le quotient de la puissance utile RI_2^2 recueillie à l'extérieur par la puissance totale fournie par la source $U_1 I_1 \cos \varphi_1$ (en prenant les valeurs efficaces), peut donc s'écrire :

$$\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{totale}}} = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{utile+pertes}}}$$

$$\eta = \frac{P_u}{P_{u+\text{pertes cuivre}+\text{pertes fer}}}.$$

Comme, d'autre part, I_1 est proportionnel à I_2, on peut dire que l'ensemble des pertes dans le cuivre est proportionnel à I_2^2, donc à P_u^2, et on peut écrire η sous la forme suivante, en divisant haut et bas par P_u, et en désignant par K un coefficient de proportionnalité :

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + KP_u^2 + P_{\text{fer}}} = \frac{1}{1 + KP_u + P_{\text{fer}}/P_u}.$$

On peut alors chercher à rendre ce rendement maximal.

Il faut rendre minimal le dénominateur; et il suffit de rendre minimale l'expression :

$$y = KP_u + P_{\text{fer}}/P_u = f(P_u)\,,$$

les pertes dans le fer étant constantes, puisqu'elles ne dépendent que de l'induction B dans le fer et que celle-ci ne dépend que de la tension primaire U_1, elle-même constante.

Annulons donc la dérivée par rapport à P_u :

$$y' = K - P_{\text{fer}}/P_u^2 = 0$$

d'où :

$$K = P_{\text{fer}}/P_u^2$$

et

$$KP_u^2 = P_{\text{fer}}.$$

Mais KP_u^2 représente justement les pertes dans le cuivre, d'où ce résultat simple, bien connu de tous les techniciens et ingénieurs en électricité :

$$\boxed{\text{Pertes dans le cuivre} = \text{Pertes dans le fer}}\,.$$

Mais a-t-on bien un maximum?

On vérifie que la dérivée y' est négative pour $P_u < \sqrt{P_{\text{fer}}/K}$ et positive ensuite; on aura bien un minimum de y, *donc un maximum de rendement.*

C'est en partant de la condition trouvée plus haut que l'on calcule les gros transformateurs industriels, dans lesquels la valeur du rendement est primordiale : en effet, si, dans un gros transformateur de 30 000 kW d'une ligne de transport de force, on arrive à améliorer le rendement de 1 %, on gagne ainsi une puissance de 300 kW, ce qui à la fin de l'année (qui compte plus de 8000 heures) fera un gain d'énergie de plusieurs centaines de milliers de kilowatt heures..., se chiffrant par un imposant bénéfice.

5.17 Problème du condensateur shunté par une résistance. En électricité industrielle, en radio et en électronique, on utilise constamment un circuit formé par un condensateur de capacité C shunté par une résistance R, et *ce circuit a d'innombrables applications* (Fig. 5.13).

Il peut d'ailleurs représenter une capacité C qui aurait des fuites internes dans l'isolant (ou bien dont les deux bornes seraient mal isolées), R représentant la résistance interne de fuite de l'isolant ou bien la résistance d'isolement des deux bornes.

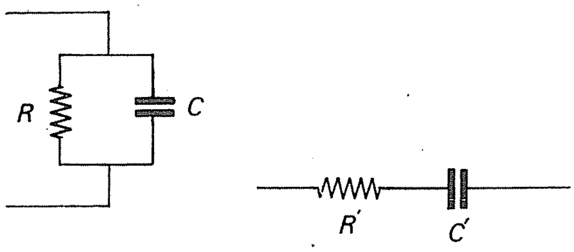


FIG. 5.13

Pour certaines raisons, qu'il est impossible d'exposer ici, on peut transformer ce circuit en le mettant sous forme d'une résistance R' *en série* avec une capacité C', à condition que l'impédance totale soit la même; et cette transformation est souvent très utile.

Le calcul de R' ne peut être donné ici, nous ne donnons que le résultat. On trouve :

$$R' = \frac{R}{R^2 C^2 \omega^2 + 1}, \qquad (\omega = 2\pi f)$$

et il est assez curieux de constater que cette résistance dépend de la fréquence et de la capacité!

— Le problème qui se pose est celui-ci :

R étant variable de 0 à l'infini, est-ce que R' passe par un maximum ou par un minimum, ce qu'il est intéressant de connaître parce que les pertes d'énergie dans le circuit, qui sont $R' I^2$, seraient maximales ou minimales.

Annulons donc la dérivée de R' par rapport à R, dérivée d'un quotient mis sous la forme :

$$y = \frac{x}{x^2 C^2 \omega^2 + 1}.$$

On aura :

$$y' = \frac{(x^2 C^2 \omega^2 + 1) \,.\, 1 - x \,.\, 2xC^2 \omega^2}{v^2} = \frac{-x^2 C^2 \omega^2 + 1}{v^2}, \text{où } v = x^2 C^2 \omega^2 + 1;$$

y' s'annule pour

$$1 - x^2 C^2 \omega^2 = 0\,, \qquad x^2 C^2 \omega^2 = 1$$

et

$$R = x = 1/C\omega\,;$$

or, $1/C\omega$ est l'impédance du condensateur seul.

Mais a-t-on un maximum ou un minimum?
Étudions le signe du numérateur de y' :

$$y' = \frac{1 - x^2 C^2 \omega^2}{v^2}.$$

On voit tout de suite que si x est très petit, voisin de zéro par exemple ($x < 1/C\omega$) y' est positive, mais si x est très grand, ($x > 1/C\omega$), y' est négative; donc y croît d'abord, et décroît ensuite : *on a bien un maximum de R'*.

Ainsi, les pertes d'énergie dans R seront maximales si $R = 1/C\omega$; à ce moment :

$$R' = \frac{R}{R^2 \dfrac{1}{R^2} + 1} = \frac{R}{2}.$$

5.18 Problème de la ligne téléphonique. Dans une ligne téléphonique (à 2 fils), très longue, il y a une capacité répartie tout le long de la ligne, et qui est due à la proximité des deux fils; il y a aussi une inductance uniformément répartie. Mais la ligne possède une résistance ohmique et elle n'est pas parfaitement isolée, il y a des fuites dans les isolateurs et entre les deux fils (s'ils se touchent tout en étant isolés).

Le courant, le long de la ligne, s'affaiblit donc et c'est pourquoi, sans précautions spéciales et sans amplificateurs, il n'est pas possible de téléphoner à de longues distances.

Considérons une ligne de 1 km de longueur, et désignons par :

R la résistance ohmique,
C la capacité entre les deux fils,
L l'inductance,
G la conductance (c'est l'inverse de la résistance de fuite due au mauvais isolement).

L'étude mathématique montre que l'affaiblissement du courant, ou amortissement, est donné par la quantité suivante, qu'on appelle *coefficient d'amortissement* :

$$\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Si on prend L comme seule variable, on peut chercher à rendre α minimal, en annulant la dérivée de α par rapport à L. Or,

$$\frac{d\alpha}{dL} = -\frac{R\sqrt{C}}{4L^{3/2}} + \frac{G}{4\sqrt{LC}}.$$

Cette dérivée s'annule évidemment si

$$\boxed{GL = RC}.$$

C'est la *condition d'Heaviside.*

On pourrait voir que l'on a bien un minimum.

On remarque que α est indépendant de la fréquence, *c'est la condition de non-distorsion, et toutes les fréquences se propagent également bien.*

On aura ainsi le minimum d'affaiblissement.

CHAPITRE 6

ÉTUDE PRATIQUE DE LA VARIATION DES FONCTIONS

6.1 Marche à suivre. Voici la marche à suivre pour étudier la variation d'une fonction f :

1. On détermine l'ensemble de définition A, c'est-à-dire la partie A de l'ensemble $\mathbf{R}$ sur laquelle f est définie.

Par exemple s'il figure une racine carrée, la quantité sous le radical doit être positive. S'il figure un arc sinus ou un arc cosinus, la quantité sur laquelle porte cet arc sinus ou cet arc cosinus doit être comprise entre -1 et 1.

2. On étudie la parité de la fonction. Supposons que A soit symétrique par rapport à l'origine, c'est-à-dire invariant dans le changement de x en $-x$.

— Si, pour tout élément x de A,

$$f(-x)=f(x),$$

on dit que la fonction f est *paire*. Le graphe de f est symétrique par rapport à Oy.

— Si, pour tout élément x de A,

$$f(-x)=-f(x),$$

on dit que la fonction f est *impaire*. Le graphe de f est symétrique par rapport à O.

Dans les deux cas, on peut réduire l'ensemble d'étude à $A'=A\cap[0,+\infty[$. Le graphe de f se déduit de celui de la restriction de f à A' par une symétrie.

Par exemple, la fonction $f: x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ est paire; on prendra pour ensemble d'étude l'intervalle $[0,+\infty[$.

3. On étudie la périodicité de la fonction f. Soit t un nombre réel strictement positif. Supposons que A soit stable par l'application $x\mapsto x+t$. Si, pour tout élément x de A,

$$f(x+t)=f(x),$$

on dit que t est une *période* de f. On dit aussi que f est *périodique*. On peut réduire l'ensemble d'étude à son intersection A' avec l'intervalle $[0, t]$. Le graphe de f se déduit de celui de la restriction de f à A' par des translations parallèlement à Ox.

4. On détermine les valeurs de $f(x)$, ou leurs limites, aux extrémités des intervalles contenus dans l'ensemble d'étude.

5. On étudie la dérivabilité de f, et on calcule la dérivée f'. On détermine les valeurs de x qui annulent f', et on cherche le signe de la dérivée. On en déduit les maximums et les minimums de f, ainsi que le sens de variation.

6. On dresse un *tableau de variation* en trois lignes.

— La première ligne comporte les valeurs remarquables de la variable x (bornes des intervalles où f est définie, valeurs annulant f', etc.).

— La deuxième ligne comporte le signe de $y' = f'(x)$ et les valeurs remarquables de la dérivée.

— La troisième ligne comporte les valeurs remarquables de $y = f(x)$, ainsi que des flèches $\nearrow$ et $\searrow$ suivant que f est croissante ou décroissante. Un double trait vertical indique une discontinuité de y. On porte alors à gauche et à droite de ce double trait les limites à gauche et à droite de f (éventuellement infinies).

7. On calcule souvent la dérivée seconde, pour déterminer la concavité et les points d'inflexion.

8. *Branches infinies.* Soit x_0 un nombre réel n'appartenant pas à A. Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_0, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est *asymptote* au graphe de f. On dit aussi que le graphe de f admet une asymptote verticale.

De même, si $f(x)$ tend vers une limite finie l lorsque x tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote au graphe de f. On dit aussi que le graphe de f admet une asymptote horizontale.

Considérons enfin le cas où x tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, et où $f(x)$ tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$. On forme alors le rapport $f(x)/x$. Si ce rapport tend vers 0, on dit que le graphe de f présente une *branche parabolique* dans la direction de Ox; si ce rapport tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, on dit que le graphe de f présente une branche parabolique dans la direction de Oy; si ce rapport tend vers une limite finie non nulle a, on dit que le graphe de f présente une branche infinie dans la direction de pente a. Dans ces conditions, on étudie la fonction

$$g : x \mapsto f(x) - ax\,.$$

Si $g(x)$ tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, on dit que le graphe de f présente une branche parabolique dans la direction de pente a.

Si $g(x)$ tend vers une limite finie b, on dit que le graphe de f admet pour asymptote oblique la droite affine d'équation

$$y = ax + b\,.$$

La distance du point $(x, f(x))$ à cette droite affine, à savoir

$$\frac{|f(x) - ax - b|}{\sqrt{1+a^2}},$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$).

Pour distinguer les asymptotes des axes de coordonnées, on affecte les premières d'une double flèche $\gg$.

9. On construit le graphe de f à l'aide des résultats trouvés dans les études précédentes. On détermine en outre autant de points qu'il est nécessaire pour faire un tracé précis. On calculera en particulier les coordonnées des points d'intersection du graphe avec les axes de coordonnées.

6.2 Trinôme du second degré. *Considérons la fonction f définie par la relation*

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c\,,$$

où a, b et c sont des nombres réels. Cette fonction est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier. Lorsque $a = 0$, il s'agit d'une fonction affine.

Supposons désormais $a \neq 0$. Nous pouvons alors écrire $f(x)$ sous la forme, dite *canonique* :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Remarquons que f ne change pas de valeur si l'on remplace $x + b/2a$ par $-(x + b/2a)$. Ainsi, le graphe de f est symétrique par rapport à la parallèle à Oy d'équation $x = -b/2a$. En particulier, si $b = 0$, la fonction f est paire.

La dérivée,

$$y' = f'(x) = 2ax + b\,,$$

s'annule lorsque

$$x = -b/2a\,.$$

La valeur correspondante de f est

$$\mu = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Lorsque $x < -b/2a$, $\begin{cases} y' > 0 & \text{si} \quad a < 0 \\ y' < 0 & \text{si} \quad a > 0. \end{cases}$

Lorsque $x > -b/2a$, $\begin{cases} y' > 0 & \text{si} \quad a > 0 \\ y' < 0 & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$

Dressons deux tableaux de variation suivant le signe de a :

$a > 0$

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	μ	$\nearrow$	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	μ	$\searrow$	$-\infty$

Pour étudier $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, écrivons $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = ax^2\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right).$$

Comme l'expression entre parenthèses tend vers 1, $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers

$-\infty$ suivant le signe de a. Le rapport y/x n'ayant pas de limite finie, le graphe de f n'admet pas d'asymptote.

(Le graphe est une parabole. La terminologie générale de branche parabolique provient bien entendu du présent cas.)

Application numérique. Examinons le cas où $a = 1$, $b = -5$ et $c = 6$. La dérivée $y' = 2x-5$ s'annule pour $x = 5/2$.

On obtient le tableau de variation

x	$-\infty$		$5/2$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe est une parabole (Fig. 6.1), dont le sommet a pour coordonnées $(5/2, -1/4)$ et dont l'axe est la parallèle à Oy issue de ce point. Les intersections avec Ox ont pour abscisses 2 et 3; l'intersection avec Oy a pour ordonnée 6.

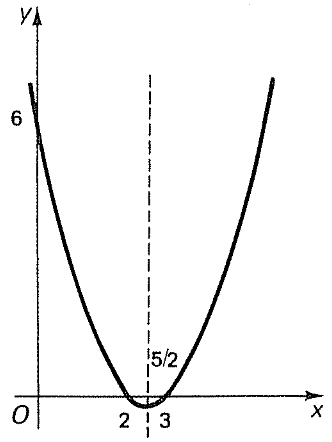


FIG. 6.1

6.3 Fonction bicarrée. *Étudions la variation de la fonction f définie par la relation*

$$y = f(x) = -2x^4+3x^2-5 .$$

L'ensemble de définition est $\mathbf{R}$ tout entier. Le changement de x en $-x$ laisse $f(x)$ invariant; autrement dit, la fonction f est paire, et l'axe Oy est un axe de symétrie du graphe de f.

La dérivée est

$$y' = -8x^3+6x = 2x(3-4x^2) .$$

La dérivée s'annule pour

1° $x=0$

2° $3-4x^2=0$ ou $x=\pm\sqrt{3}/2$.

$-4x^2+3$ est un trinôme qui passe par un maximum, et qui s'annule deux fois, il est donc positif entre les racines. Et pour avoir le signe de y' il suffit de multiplier $3-4x^2$ par x, donc

$$y'>0 \quad \text{pour} \quad x<-\sqrt{3}/2$$
$$y'<0 \quad \text{pour} \quad -\sqrt{3}/2<x<0$$
$$y'>0 \quad \text{pour} \quad 0<x<+\sqrt{3}/2$$

et

$$y'<0 \quad \text{pour} \quad x>+\sqrt{3}/2.$$

Pour

$$x=\pm\sqrt{3}/2 \qquad y=-31/8.$$

Pour étudier la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, écrivons $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = -2x^4\left(1-\frac{3}{2x^2}+\frac{5}{2x^4}\right).$$

Il est clair que la quantité entre parenthèses tend vers 1, et donc que y tend vers $+\infty$.

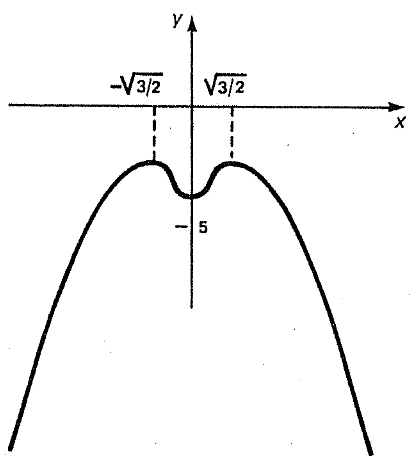


FIG. 6.2

On a ainsi le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}/2$		0		$\sqrt{3}/2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-31/8$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$-31/8$	$\searrow$	$-\infty$

Comme $f(x)/x$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, le graphe (Fig. 6.2) n'a pas d'asymptote, mais seulement des branches paraboliques dans la direction de Oy.

6.4 Fonction homographique. *Considérons la fonction f définie par la relation*

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

où a, b, c et d sont des nombres réels, c et d étant non tous deux nuls. Le cas où $c = 0$ est celui des fonctions affines.

Supposons désormais $c \neq 0$. L'ensemble de définition de f est $\mathbf{R} - \{-d/c\}$. Ecrivons $f(x)$ sous la forme, dite canonique :

$$f(x) = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cx+d)}.$$

D'où :

$$f(x) - \frac{a}{c} = -\frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{x+d/c}.$$

Si l'on change $x + d/c$ en son opposé, $f(x) - a/c$ est également changé en son opposé. Ainsi, le point de coordonnées $(-d/c, a/c)$ est centre de symétrie du graphe.

La dérivée est :

$$f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

La fonction f est :

— constante et égale à a/c si $ad-bc=0$;
— strictement croissante sur $]-\infty, -d/c[$ et sur $]-d/c, +\infty[$ si $ad-bc > 0$;
— strictement décroissante sur $]-\infty, -d/c[$ et sur $]-d/c, +\infty[$ si $ad-bc < 0$.

Dressons deux tableaux de variation, en écartant le cas où f est constante :

$ad-bc > 0$

x	$-\infty$		$-d/c$			$+\infty$
y'		$+$	‖		$+$	
y	a/c	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$		$\nearrow$	a/c

$ad-bc < 0$

x	$-\infty$		$-d/c$			$+\infty$
y'		$-$	‖		$-$	
y	a/c	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$		$\searrow$	a/c

Lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers a/c. Lorsque x tend vers $-d/c$, $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Le graphe comporte donc une asymptote horizontale d'équation $y = a/c$ et une asymptote verticale d'équation $x = -d/c$. L'intersection de ces asymptotes n'est autre que le centre de symétrie.

Application numérique. Examinons le cas où $a = 2$, $b = -1$, $c = 4$ et $d = 2$. La dérivée est

$$y' = \frac{8}{(4x+2)^2}.$$

La fonction est strictement croissante. On obtient le tableau de variation

x	$-\infty$		$-1/2$			$+\infty$
y'		$+$	‖		$+$	
y	$1/2$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$		$\nearrow$	$1/2$

Le graphe est une hyperbole équilatère (Fig. 6.3). Les points d'intersection avec les axes de coordonnées sont

$$x = 1/2,\ y = 0 \qquad \text{et} \qquad x = 0,\ y = -1/2\,.$$

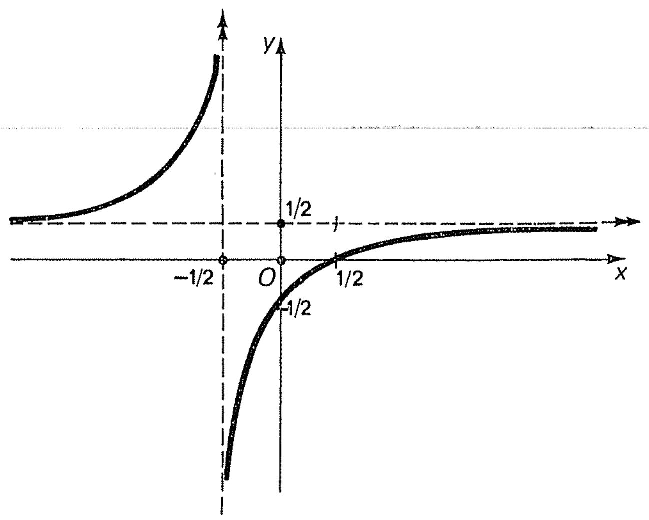


FIG. 6.3

6.5 Quinze exemples

1. *Considérons la fonction polynomiale f définie par la relation*

$$y = f(x) = \tfrac{1}{3}(x+1)^3(3x-2)^2\,.$$

L'ensemble de définition est **R** tout entier. La dérivée est :

$$\begin{aligned} y' &= (x+1)^2(3x-2)^2+2(x+1)^3(3x-2) \\ &= (x+1)^2(3x-2)[(3x-2)+2(x+1)] \\ &= 5x(3x-2)(x+1)^2 . \end{aligned}$$

Elle est nulle pour :

$$x=0, \qquad x=2/3, \qquad x=-1 .$$

Mais, $(x+1)^2$ étant toujours positif, la dérivée a le signe du produit des deux autres facteurs :

$$5x(3x-2) = 15x^2-10x .$$

Ce trinôme qui s'annule pour $x=0$ et $x=2/3$ est négatif *entre les racines* et positif à l'extérieur.

Dans le tableau de variation, on voit que, pour $x=-1$, y' s'annule *sans changer de signe*; on aura un *point d'inflexion* à tangente horizontale.

En outre, $f''(x) = 5(x+1)(12x^2-2)$.

Il y a donc deux autres points d'inflexion, d'abscisses $1/\sqrt{6}$ et $-1/\sqrt{6}$.

En mettant x^5 en facteur dans $f(x)$, nous voyons que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, et vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. De plus, $f(x)/x$ tend vers $+\infty$ dans les deux cas. Le graphe (Fig. 6.4) présente donc deux branches paraboliques dans la direction Oy.

Le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$2/3$		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$4/3$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

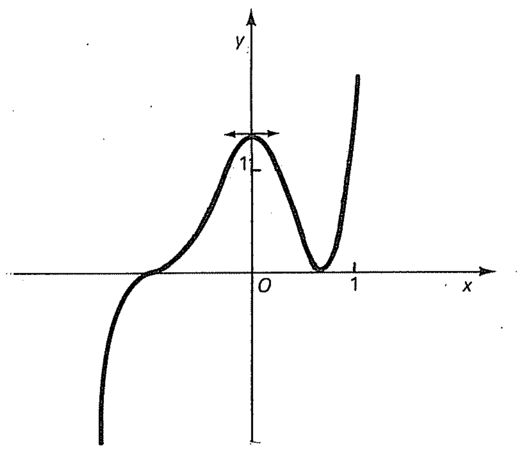


FIG. 6.4

2. *Considérons la fonction f définie par la relation*

$$y = f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Cette fonction est définie sur **R** tout entier; elle est impaire, c'est-à-dire que $f(-x) = -f(x)$. L'origine des cordonnées est donc centre de symétrie du graphe.

La dérivée est

$$y' = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

La dérivée s'annule pour $x = \pm 1$. Elle est positive pour $-1 < x < 1$ et négative pour $x < -1$ et $x > 1$. On en déduit l'existence d'un minimum pour $x = -1$ et d'un maximum pour $x = 1$. On obtient le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
y'	2	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Il est immédiat que y tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$. Ainsi, l'axe Ox est asymptote au graphe de f (Fig. 6.5).

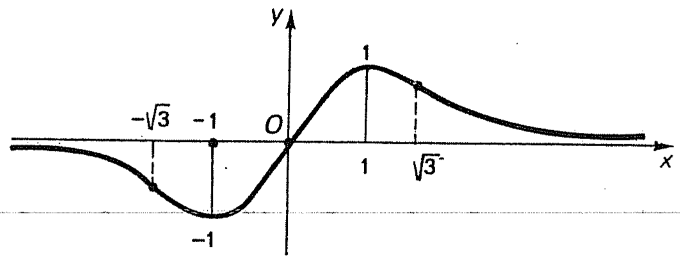


FIG. 6.5

Déterminons les points d'inflexion en annulant la dérivée seconde de f :

$$y'' = \frac{(-4x)(1+x^2)^2 - 4x(2-2x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$= -4x\frac{1+x^2+2-2x^2}{(1+x^2)^3} = 4x\frac{x^2-3}{(1+x^2)^3};$$

d'où trois valeurs de x :

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

La nature de la courbe montre bien qu'il doit y avoir trois points d'inflexion.

Remarque. On trouve cette courbe en électronique lorsque l'on calcule la sélectivité d'un étage haute fréquence dont la liaison se fait par un circuit oscillant accordé, placé dans le circuit de sortie d'un étage amplificateur.

3. *Considérons la fonction f définie par la relation*

$$y = \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x - 3}.$$

Cette fonction n'est pas définie pour les valeurs de x qui annulent le dénominateur, à savoir $x = 3$ et $x = -1$.

Les intervalles de définition sont : $]-\infty, -1[$, $]-1, 3[$ et $]3, +\infty[$.

Calculons la dérivée :

$$y' = \frac{(x^2-2x-3)(2x-1)-(x^2-x)(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{-x^2-6x+3}{(x^2-2x-3)^2}.$$

La dérivée s'annule pour

$$-x^2 - 6x + 3 = 0,$$

d'où

$$x_1 = -3-2\sqrt{3} \approx -6{,}4 \qquad \text{et} \qquad x_2 = -3+2\sqrt{3} \approx 0{,}4\,.$$

Le signe de y' est celui du trinôme $-x^2-6x+3$; ainsi, y' est strictement positif lorsque $x_1 < x < x_2$, et strictement négatif lorsque $x < x_1$ ou $x > x_2$.

Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, y tend vers 1 (c'est-à-dire vers le rapport des coefficients dominants du numérateur et du dénominateur).

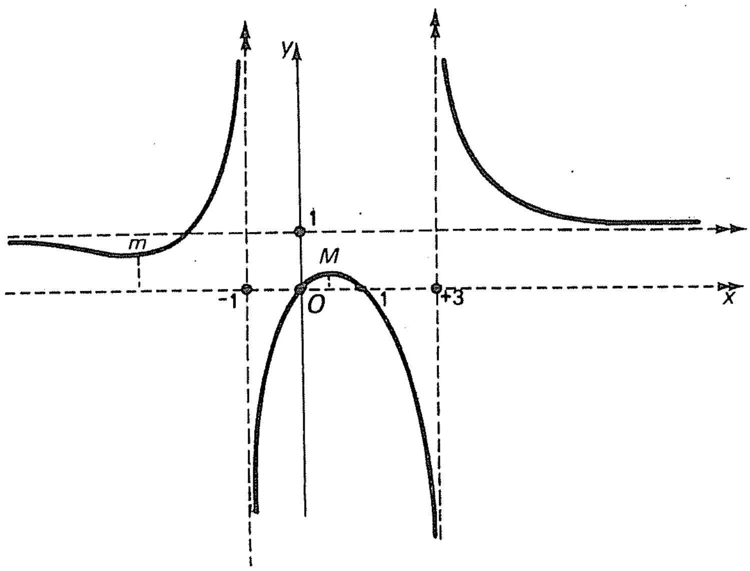


Fig. 6.6

Le tableau de variation s'en déduit :

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
y	1	↘	m	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	M	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

4. *Soit f la fonction définie par la relation*

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$$

Cette fonction est définie pour toute valeur de x autre que 1.

Calculons la dérivée :

$$y' = \frac{(x-1)^2\, 3(x+1)^2 - (x+1)^3\, 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}[3(x-1)-2(x+1)] = \frac{(x+1)^2\,(x-5)}{(x-1)^3}.$$

La dérivée s'annule pour $x = -1$ et $x = 5$.

De plus, y' a le même signe que $(x-5)/(x-1)^3$. Dressons un tableau auxiliaire pour déterminer ce signe, car un cube peut être négatif :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Le coefficient $(x+1)^2$ étant toujours positif, y' s'annule pour $x = -1$ sans changer de signe; il y a donc un point d'inflexion à tangente horizontale.

Le tableau de variation s'en déduit :

x	$-\infty$		-1		1		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$27/2$	↗	$+\infty$

Lorsque x tend vers 1, y tend vers $+\infty$. Étudions maintenant le comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Écrivons à cet effet $f(x)$ sous la forme

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \frac{(x-1+2)^3}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^3+3\times 2(x-1)^2+3\times 2^2(x-1)+2^3}{(x-1)^2}$$

$$= x-1+6+\frac{12}{x-1}+\frac{8}{(x-1)^2}.$$

Ainsi, $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ suivant que x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$; de plus, $f(x)-(x+5)$ tend vers 0. La droite d'équation

$$y = x+5$$

est donc asymptote au graphe de f (Fig. 6.7).

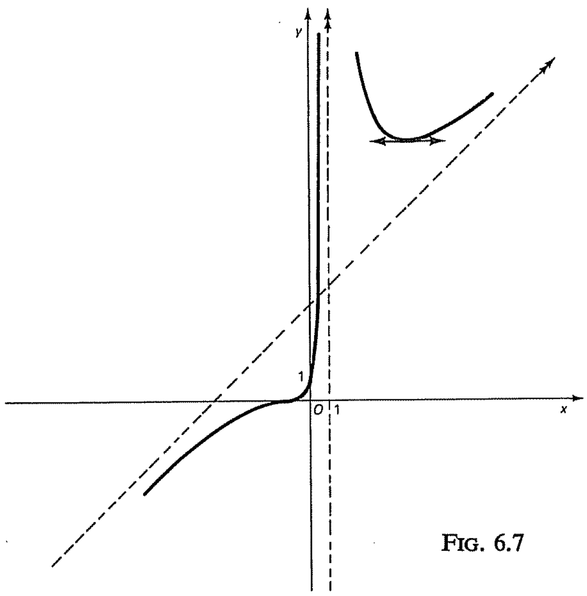


FIG. 6.7

Remarque. Une méthode systématique pour obtenir les asymptotes obliques des graphes des fonctions rationnelles consiste à effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. Ainsi,

$$\begin{array}{r|l}
X^3+3X^2+\ 3X+1 & X^2-2X+1 \\ \cline{2-2}
X^3-2X^2+\ \ X\ \ \ \ & X+5 \\ \cline{1-1}
5X^2+\ 2X+1 & \\
5X^2-10X+5 & \\ \cline{1-1}
12X-4 &
\end{array}$$

Donc

$$\frac{(X+1)^3}{(X-1)^2} = X+5+\frac{12X-4}{(X-1)^2}$$

et, pour tout nombre réel x différent de 1,

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = x+5+\frac{12x-4}{(x-1)^2}.$$

On retrouve ainsi le fait que la différence entre $f(x)$ et $x+5$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

5. *Étudions la variation de la fonction f définie par la formule*

$$y = f(x) = \frac{2x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}.$$

Cette fonction est définie si $x^2 \neq 1$, c'est-à-dire si $x \neq 1$ et $x \neq -1$.

La dérivée est

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)(6x^2+6x-1)-2x(2x^3+3x^2-x-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x^4-5x^2+1}{(x^2-1)^2};$$

elle s'annule pour

$$x^2 = \frac{5\pm\sqrt{17}}{4}.$$

Les zéros de f' sont

$$x_1 \approx -3/2, \qquad x_2 \approx -1/2, \qquad x_3 \approx 1/2, \qquad x_4 \approx 3/2.$$

La dérivée a le signe de $z = 2x^4-5x^2+1$. Ce trinôme bicarré, dont la dérivée

$$z' = 8x^3-10x$$

s'annule pour $x=0$ et $x = \pm\sqrt{5}/2$, a un maximum et deux minimums (Fig. 6.8).

On en déduit aussitôt le signe de y', et on obtient le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		0		x_3		1		x_4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	3	$\nearrow$	M'	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	m'	$\nearrow$	$+\infty$

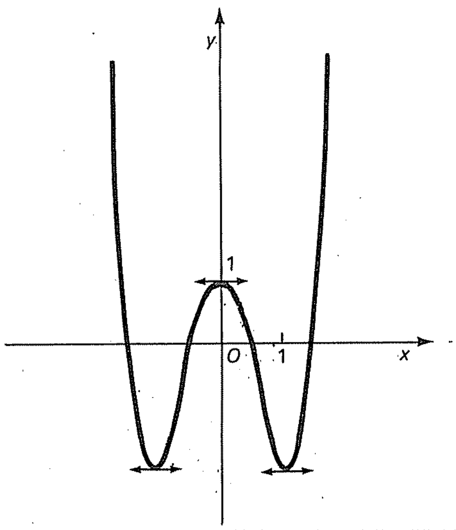


FIG. 6.8

Le graphe admet évidemment pour asymptotes verticales les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$. Pour étudier le comportement de y lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, effectuons la division euclidienne de $2X^3+3X^2-X-3$ par X^2-1 :

$$\begin{array}{r|l} 2X^3+3X^2-\ X-3 & X^2-1 \\ \cline{2-2} 2X^3 \qquad -2X \quad & 2X+3 \\ \cline{1-1} 3X^2+\ X-3 & \\ 3X^2 \qquad -3 & \\ \cline{1-1} X \quad & \end{array}$$

Ainsi,

$$\frac{2X^3+3X^2-X-3}{X^2-1} = 2X+3+\frac{X}{X^2-1}$$

et, pour tout nombre réel x différent de 1 et de -1,

$$f(x) = 2x+3+\frac{x}{x^2-1}.$$

Le graphe de f (Fig. 6.9) admet donc pour asymptote oblique la droite d'équation

$$y = 2x+3.$$

6. *Étudions la variation de la fonction f définie par*

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Pour que la quantité sous le radical soit positive, il faut et il suffit que $x^2 \leqslant 1/4$;

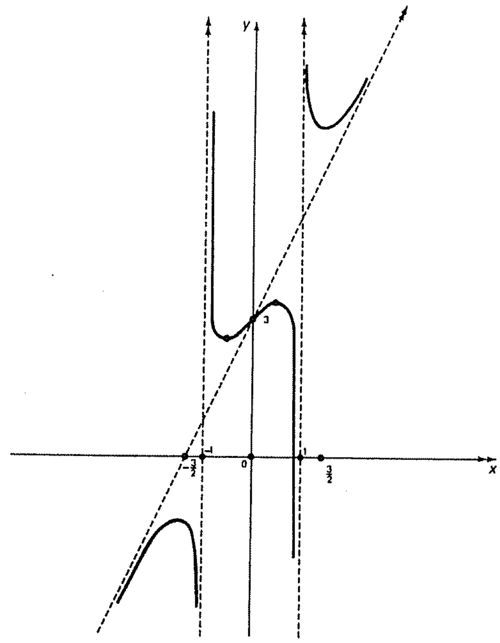


FIG. 6.9

les valeurs $-1/2$ et $1/2$ sont à exclure, car le dénominateur ne doit pas être nul. Ainsi, l'ensemble de définition est l'intervalle ouvert $]-1/2, 1/2[$.

La fonction f est paire; autrement dit, pour tout élément x de l'ensemble de définition, $f(-x)=f(x)$. Le graphe de f est donc symétrique par rapport à l'axe Oy.

Pour calculer la dérivée de f, considérons cette fonction comme la composée des fonctions $x \mapsto 1-4x^2$ et $u \mapsto 1/\sqrt{u}$. Alors

$$f'(x) = -\frac{u'}{2u^{3/2}} = -(-8x)\frac{1}{2u^{3/2}} = \frac{4x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}.$$

La dérivée s'annule pour $x=0$, en passant du signe $-$ au signe $+$. La fonction f passe donc par un minimum. D'autre part, lorsque x tend vers $1/2$ ou vers $-1/2$, le dénominateur tend vers 0; donc $f(x)$ tend vers $+\infty$. Nous pouvons maintenant dresser le tableau de variation :

x	0		1/2
y'	0	+	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe admet deux asymptotes parallèles à Oy (Fig. 6.10).

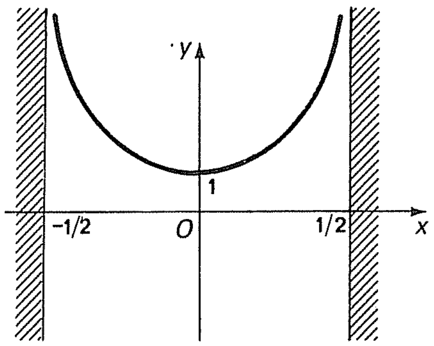


FIG. 6.10

7. *Étudions la variation de la fonction f définie par la relation*

$$f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}.$$

Puisque l'on peut calculer la racine cubique d'un nombre négatif, l'ensemble de définition est **R** tout entier.

Pour déterminer la dérivée de f, considérons cette fonction comme la composée de $x \mapsto 1-x^3$ et de $u \mapsto u^{1/3}$. Nous trouvons ainsi

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{u^{2/3}}(-3x^2) = -\frac{x^2}{(1-x^3)^{2/3}}.$$

La dérivée est toujours négative; elle s'annule sans changer de signe lorsque $x=0$. Le graphe admet donc un point d'inflexion à tangente horizontale.

La dérivée n'est pas définie lorsque $x=1$. Cependant,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{y}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{(1-x)(1+x+x^2)}}{x-1} = -\sqrt[3]{\frac{1+x+x^2}{(x-1)^2}};$$

cette quantité tendant vers $-\infty$ lorsque x tend vers 1, la courbe a une tangente verticale.

Pour étudier le comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, écrivons $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = -x\sqrt[3]{1-1/x^3}.$$

Il apparaît ainsi que $f(x)/x$ tend vers -1.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Remarquons que les coordonnées x et y d'un point du graphe de f vérifient la relation

$$x^3+y^3=1\,.$$

Si un couple (x, y) vérifie cette relation, il en est de même du couple (y, x). Autrement dit, le graphe de f (Fig. 6.11) est symétrique par rapport à la première bissectrice.

Cherchons s'il existe une asymptote oblique, en étudiant la limite de $y+x$:

$$y+x=\frac{y^3+x^3}{y^2-xy+x^2}=\frac{1}{y^2-xy+x^2}\,.$$

Comme le dénominateur tend vers $+\infty$, $y+x$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. La deuxième bissectrice est donc asymptote au graphe de f.

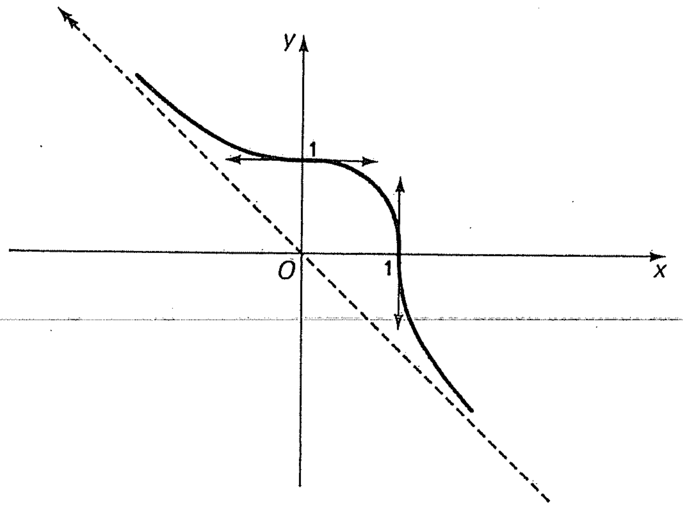


FIG. 6.11

8. *Étudier la variation de la fonction f définie par la formule*

$$y=f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2\,(x+1)}\,.$$

L'ensemble de définition est $\mathbf{R}$ tout entier. La fonction f est dérivable en tout point où elle ne s'annule pas; pour calculer sa dérivée, remarquons que

$$y^3=(x-1)^2(x+1)\,,$$

d'où

$$3y^2y'=(x-1)^2+2(x-1)(x+1)=(x-1)(3x+1)\,,$$

et

$$y' = \frac{(x-1)(3x+1)}{3y^2}.$$

Puisque y est équivalent à x au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$, nous pouvons remplir le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$-1/3$		1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour déterminer la tangente au point d'abscisse 1, formons le rapport

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

La limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures est $-\infty$.
La limite lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures est $+\infty$.
Le graphe a donc une demi-tangente de rebroussement.

De même, pour déterminer la tangente au point d'abscisse -1, formons le rapport

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}}.$$

La limite est $+\infty$. Le graphe a donc une tangente d'inflexion verticale.

Puisque y est équivalent à x au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$, le graphe admet pour direction asymptotique celle de la droite d'équation $y = x$. Formons alors

$$y - x = \frac{y^3 - x^3}{y^2 + xy + x^2} = \frac{-x^2 - x + 1}{y^2 + xy + x^2}.$$

Cette expression ayant pour limite $-1/3$, la droite d'équation

$$y = x - 1/3$$

est asymptote au graphe de f (Fig. 6.12).

Nous pouvons déterminer l'intersection du graphe de f et de son asymptote : il suffit de résoudre l'équation

$$(x-1)^2(x+1) = (x-1/3)^3,$$

soit

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^3 - x^2 + \frac{x}{3} - \frac{1}{27};$$

d'où

$$x = 7/9.$$

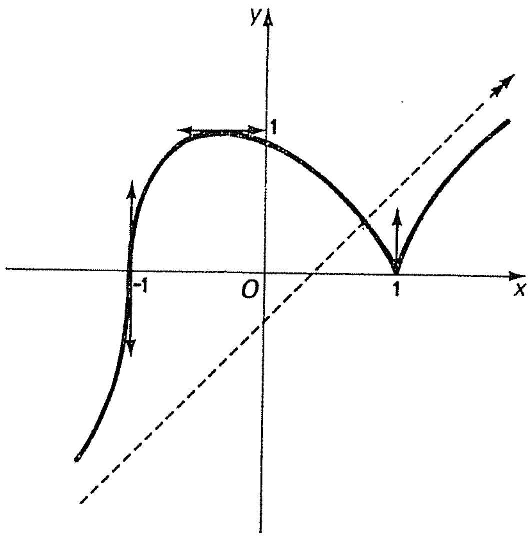


FIG. 6.12

9. *Étudier la variation de la fonction f définie par la formule*

$$y = f(x) = \cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{7}\cos 7x\,.$$

L'ensemble de définition est $\mathbf{R}$ tout entier. La fonction f est périodique, et sa plus petite période est 2π; de plus, cette fonction est paire; enfin, si on change x en $\pi - x$, y est changé en $-y$. Il suffit donc d'étudier la variation de f sur $[0, \pi/2]$. Le graphe de f (Fig. 6.13) se déduit du graphe de sa restriction à $[0, \pi/2]$ par les opérations suivantes :

— une symétrie par rapport au point $(\pi/2, 0)$;
— une symétrie par rapport à Oy;
— des translations de vecteur $(2n\pi, 0)$, où $n \in \mathbf{Z}$.

La dérivée de f est donnée par la formule

$$f'(x) = -\sin x - \sin 3x - \sin 5x - \sin 7x = -\frac{\sin^2 4x}{\sin x}.$$

D'où le tableau de variation :

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
y'	0	$-$	0	$-$	0
y	$176/105$	$\searrow$	$32\sqrt{2}/105$	$\searrow$	0

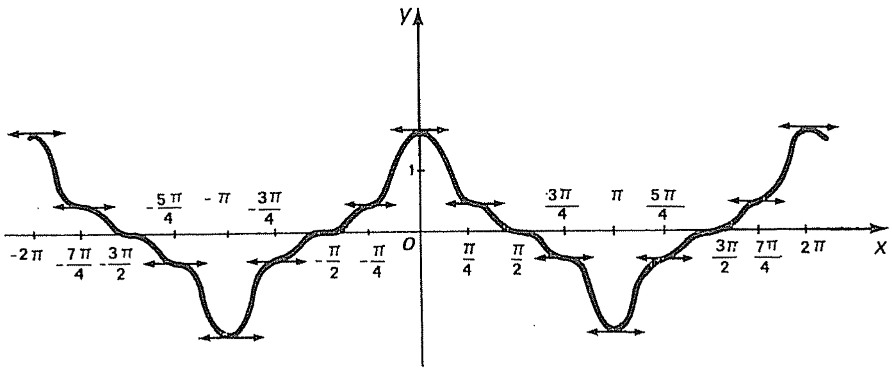


FIG. 6.13

10. *Considérons la fonction f définie par la relation*

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

La fonction f est définie pour tout nombre réel non multiple de π. De plus, pour tout point x de l'ensemble de définition,

$$f(x) = f(x+2\pi).$$

Cela signifie que deux points M et M' du graphe, d'abscisses x et $x+2\pi$ ont même ordonnée. Ils se déduisent dans une translation parallèle à Ox dont le vecteur a pour composantes $(2\pi, 0)$.

On dit que la fonction est *périodique*; 2π est une période. De plus, f est impaire; il suffit de l'étudier dans l'intervalle $[0, \pi]$. Enfin, la relation $\sin(\pi - x) = \sin x$ implique $f(\pi - x) = f(x)$. Ainsi, le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \pi/2$. On peut donc réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2]$. Dans cet intervalle la fonction n'est pas définie pour $x = 0$.

La dérivée est :

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}\cos x = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}.$$

$$y' = 0 \qquad \text{pour} \qquad \cos x = 0, \qquad \text{soit} \qquad x = \pi/2.$$

La dérivée est du signe de $-\cos x$, c'est-à-dire positive dans l'intervalle $[\pi/2, \pi[$ et négative dans l'intervalles $[0, \pi/2]$.

On obtient le tableau de variation :

x	0		$\pi/2$
y'		$-$	0
y	$+\infty$	$\searrow$	1

Il apparaît un minimum :

$$x = \pi/2, \qquad y = 1.$$

On obtient la courbe (Fig. 6.14) avec ses asymptotes d'équations

$$x=0 \qquad x=\pi\,.$$

On complète le graphe par symétries et translations.

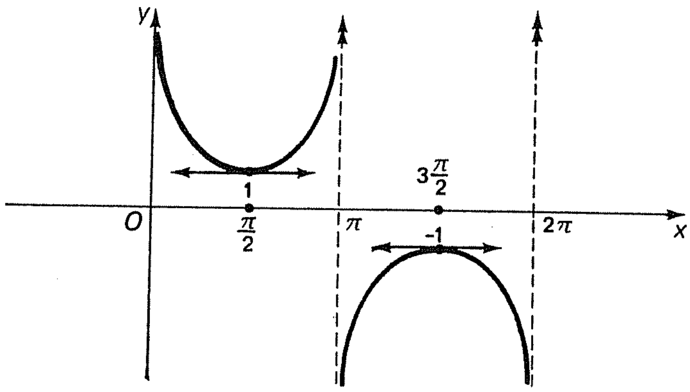


FIG. 6.14

11. *Soit f la fonction définie par la formule*

$$y=f(x)=\text{Arc}\sin\frac{2x}{1+x^2}\,.$$

Pour tout nombre réel x, il existe un nombre réel t tel que

$$\operatorname{tg} t = x\,.$$

Alors

$$\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}=\sin 2t\,.$$

Il en découle que $2x/(1+x^2)$ appartient à l'intervalle $[-1, 1]$; par suite, la fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier. D'autre part, les fonctions $x \mapsto 2x/(1+x^2)$ et $u \mapsto \text{Arc}\sin u$ sont toutes deux impaires; il s'ensuit que f est aussi impaire. Le graphe de f est donc symétrique par rapport à l'origine des coordonnées.

Lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $2x/(1+x^2)$ tend vers 0; donc y tend vers 0, et l'axe Ox est asymptote au graphe de f.

Le théorème sur la dérivabilité d'une fonction composée montre que f est dérivable en tout point x tel que $u=2x/(1+x^2)$ soit différent de 1 et de -1. Or, la relation

$$2x/(1+x^2)=1$$

équivaut à

$$(1-x)^2=0\,,$$

soit à $x=1$. De même, $u=-1$ équivaut à $x=-1$. En dehors de ces deux valeurs de x, nous pouvons calculer y' :

$$y' = u'/\sqrt{1-u^2},$$

où

$$u' = \frac{2(1+x^2)-2x\,2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Or,

$$1-u^2 = 1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\sqrt{1-u^2} = \frac{|1-x^2|}{(1+x^2)}.$$

Donc

$$y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{(1+x^2)}{|1-x^2|} = \frac{2}{(1+x^2)}\cdot\frac{(1-x^2)}{|1-x^2|}.$$

Quand $x>1$,

$$|1-x^2| = x^2-1, \qquad y' = -\frac{2}{1+x^2}.$$

Quand $0 \leqslant x < 1$,

$$|1-x^2| = 1-x^2, \qquad y' = \frac{2}{1+x^2}.$$

La fonction est donc croissante pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, et décroissante pour $x \geqslant 1$. Elle admet un maximum pour $x=1$. On obtient le tableau de variation pour $x \geqslant 0$:

x	0		1			$+\infty$
y'	2	$+$	$1 \Vert -1$	$-$		
y	0	$\nearrow$	$\pi/2$	$\searrow$		0

La figure 6.15 représente le graphe de la fonction.

On notera que le point $(1, \pi/2)$ est un point anguleux. Les demi-tangentes en ce point ont pour pentes 1 et -1.

Remarque. La dérivée de f est égale ou opposée à celle de la fonction $g : x \mapsto 2\,\mathrm{Arc\,tg}\, x$. Donc $f-g$ ou $f+g$ est constante. Nous pouvons interpréter ce résultat en notant que

$$y = \mathrm{Arc\,sin}\,(\sin 2t),$$

ce qui implique

$$y = 2t + 2k\pi \qquad k \in \mathbf{Z}$$

ou

$$y = \pi - 2t + 2k' \qquad k' \in \mathbf{Z},$$

avec

$$t = \text{Arc tg}\, x .$$

On vérifiera que

$$y = 2\,\text{Arc tg}\, x \qquad \text{si} \quad x \in [0, 1]$$
$$y = \pi - 2\,\text{Arc tg}\, x \qquad \text{si} \quad x \in [1, +\infty[.$$

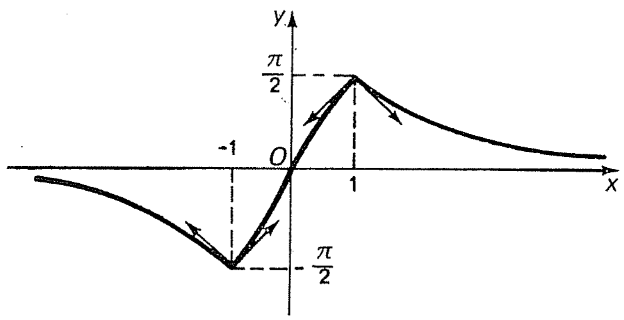


FIG. 6.15

12. *Considérons la fonction f définie par la relation*

$$y = f(x) = \text{Arc tg}\,\frac{1}{x}.$$

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x sauf 0. Il est immédiat que cette fonction est impaire; son graphe est donc symétrique par rapport à l'origine des coordonnées.

Lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, $1/x$ tend vers $+\infty$ et y tend vers $\pi/2$; lorsque x tend vers 0 par valeurs inférieures, on montre de même que y tend vers $-\pi/2$. Lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $1/x$ tend vers 0 et y tend vers 0.

Calculons la dérivée, en posant $u = 1/x$:

$$y' = \frac{u'}{1+u^2} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+1/x^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

La dérivée est négative, donc la fonction est décroissante. On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		0			$+\infty$
y'		$-$	‖		$-$	
y	0	↘	$-\pi/2$ ‖ $+\pi/2$		↘	0

Le graphe de f s'en déduit aussitôt (Fig. 6.16). (Cependant, on remarquera que f n'est pas définie à l'origine; les demi-tangentes aux points situés sur l'axe Oy ne sont pas à proprement parler des tangentes au graphe de f; ce sont les tangentes aux graphes des fonctions définies sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ et prolongeant f par continuité à l'origine.)

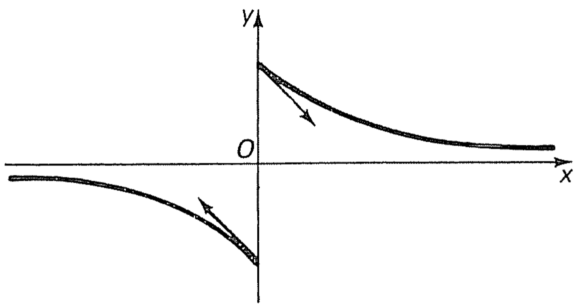


FIG. 6.16

Remarque. La dérivée de f n'est autre que celle de la fonction

$$g : x \mapsto -\text{Arc tg}\, x\,.$$

Les fonctions f et g, ayant même dérivée, diffèrent d'une constante sur chaque intervalle où elles sont toutes deux définies : en effet, la dérivée de $f-g$ est nulle, et $f-g$ est constante. Ainsi, il existe un nombre réel C tel que, pour tout nombre réel strictement positif x,

$$\text{Arc tg}\,(1/x) = -\text{Arc tg}\, x + C\,.$$

Pour déterminer C, faisons tendre x vers $+\infty$ dans les deux membres; il vient alors

$$0 = -\pi/2 + C$$

et

$$\text{Arc tg}\,(1/x) = \pi/2 - \text{Arc tg}\, x\,.$$

De même, pour tout nombre réel strictement négatif x,

$$\text{Arc tg}\,(1/x) = -\pi/2 - \text{Arc tg}\, x\,.$$

13. Puissance fournie par un générateur électrique dans une résistance. Soient E la force électromotrice d'un générateur, r sa résistance interne et R une résistance variable branchée aux bornes du générateur. D'après la loi de Joule, la puissance fournie dans la résistance est

$$P = RI^2 = R\left(\frac{E}{R+r}\right)^2 = \frac{RE^2}{(R+r)^2}\,.$$

Cette fonction est définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Nous avons calculé sa dérivée au n° 5.13 :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = E^2 \frac{r-R}{(R+r)^3}.$$

Rappelons que P passe par le maximum $E^2/4r$ au point $R = r$.
Le tableau de variation est

R	0		r		$+\infty$
P'	E^2/r^2	$+$	0	$-$	0
P	0	$\nearrow$	$E^2/4r$	$\searrow$	0

La demi-tangente à l'origine a pour pente

$$\operatorname{tg} \alpha = E^2/r^2 .$$

La limite de P lorsque R tend vers $+\infty$ est 0.

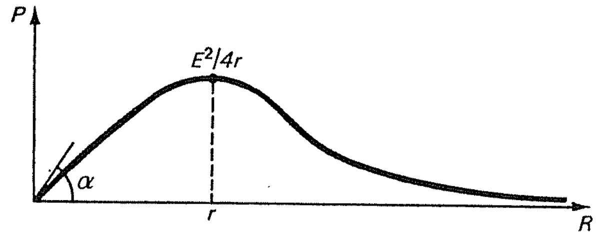


Fig. 6.17

On vérifiera que le point d'inflexion a pour abscisse $2r$.

14. *En électricité et en radio, on a souvent à étudier un circuit comprenant en série une bobine dont l'inductance est L et un condensateur de capacité C. On demande de tracer la courbe de l'impédance en supposant nulle la résistance de la bobine, la pulsation* ω *variant de* 0 *à* $+\infty$ $(\omega = 2\pi f)$.

On démontre que l'impédance Z est égale à :

$$Z = L\omega - 1/C\omega .$$

Cette fonction de ω est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$. La dérivée,

$$\mathrm{d}Z/\mathrm{d}\omega = L + 1/C\omega^2 ,$$

ne prend que des valeurs strictement positives; donc Z est strictement croissante.
L'impédance Z s'annule pour

$$LC\omega^2 = 1 ,$$

ce qui est la condition de résonance, soit encore

$$\omega = 1/\sqrt{LC}\,.$$

Lorsque ω tend vers 0, $1/\omega$ tend vers $+\infty$ et Z tend vers $-\infty$; lorsque ω tend vers $+\infty$, $1/\omega$ tend vers 0 et Z tend vers $+\infty$.

ω	0		$1/\sqrt{LC}$		$+\infty$
Z'	∞	$+$	$2L$	$+$	L
Z	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La différence entre Z et $L\omega$ tendant vers 0 lorsque ω tend vers $+\infty$, la droite d'équation $Z = L\omega$ est asymptote au graphe.

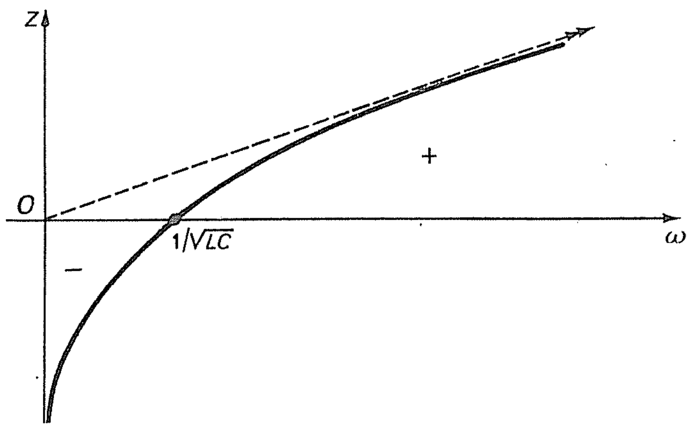


FIG. 6.18

On voit que l'impédance est négative à gauche de la résonance et positive à droite.

15. Circuit bouchon. *Étudier la variation de l'impédance d'un circuit électrique comprenant une bobine dont l'inductance est L et une capacité C* en parallèle, *la pulsation ω étant variable de* 0 *à* $+\infty$. *On suppose nulle la résistance de la bobine.*

On démontre en électricité et en radio que l'impédance d'un tel circuit, appelé *circuit bouchon*, est :

$$Z = L\omega/(1 - LC\omega^2)\,.$$

L'impédance Z est définie pour toute valeur strictement positive de ω, sauf pour

$$\omega = 1/\sqrt{LC}\,.$$

La dérivée est

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\omega}=\frac{L(1-LC\omega^2)+2L^2C\omega^2}{(1-LC\omega^2)^2}=\frac{L(1+LC\omega^2)}{(1-LC\omega^2)^2}\,.$$

Le numérateur ne peut pas s'annuler, il n'y a donc ni maximum, ni minimum; Z' est toujours positif, et Z *croît.*
La pente de la demi-tangente à l'origine est

$$\operatorname{tg}\alpha=L\,.$$

Lorsque ω tend vers $1/\sqrt{LC}$, $|Z|$ tend vers $+\infty$. Lorsque ω tend vers $+\infty$, Z tend vers 0. D'où le tableau de variation :

ω	0			$1/\sqrt{LC}$			$+\infty$
Z'	L	$+$		‖		$+$	0
Z	0	↗	$+\infty$	‖	$-\infty$	↗	0

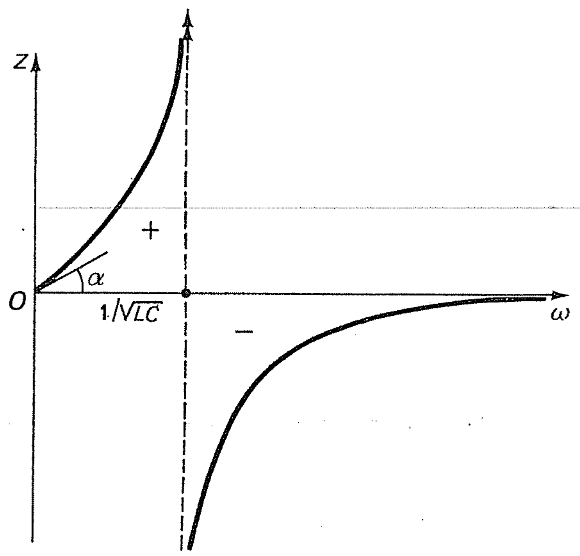


Fig. 6.19

On voit que l'impédance est d'abord positive, puis elle devient négative.
L'impédance est infinie pour $LC\omega^2=1$, d'où le nom de circuit bouchon. Ce montage est employé couramment en radio.

EXERCICES

Asymptotes

Trouver les asymptotes des courbes suivantes :

6.1 $y=\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}, \quad a>0.$

6.2 $y=\sqrt{\dfrac{x(x^2-a^2)}{a}}, \quad a>0.$

6.3 $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}.$

6.4 $y=\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{a^2}{x}, \quad a>0.$

6.5 $y=\dfrac{2x^2-2x-1}{x-2}.$

6.6 $y=x+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}.$

6.7 $y=x\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}.$

6.8 $y=\dfrac{2-2x}{5-3x}.$

6.9 $y=\dfrac{x^4}{x^2+1}.$

6.10 $y=ax+\dfrac{1}{ax}, \quad a>0.$

6.11 $y=\dfrac{2x^2-1}{x^2-1}.$

6.12 $y=\dfrac{x^3}{x-a}, \quad a>0.$

6.13 $y=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2+2x+2}.$

6.14 $y=x\sqrt{\dfrac{x^2-1}{2x-1}}.$

Variation de fonctions

Étudier la variation des fonctions suivantes :

6.15 $y=2x^3-6x-4.$

6.16 $y=-2x^4+x^2+3.$

6.17 $y=\dfrac{3x+1}{4-x}.$

6.18 $y=x+1-\dfrac{2}{x}.$

6.19 $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-9}}.$

6.20 $y=\dfrac{5-x}{2x+3}.$

6.21 $y=\dfrac{x^2+24}{x+1}.$

6.22 $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}.$

6.23 $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+2x-1}.$

6.24 $y=C\dfrac{L}{\sqrt{R^2+(L\omega-1/C\omega)^2}}=f(\omega).$

6.25 $y=\dfrac{R}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}=f(R).$

CHAPITRE 7

LES INTÉGRALES

7.1 Primitives. Nous avons étudié jusqu'ici les fonctions admettant une dérivée. Inversement, étant donnée une fonction f, nous nous proposons de trouver les fonctions dérivables g dont la dérivée est f. Une telle fonction g est appelée *primitive* de f. Ainsi, lorsque f est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par la formule

$$f(x) = 2x+5 ,$$

la fonction $g : x \mapsto x^2+5x$ est une primitive de f. Il en est de même de la fonction $h : x \mapsto x^2+5x+C$, où C est un nombre réel quelconque.

Cet exemple nous montre qu'une fonction donnée peut admettre une infinité de primitives. Nous allons examiner le lien entre les primitives d'une même fonction :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, admettant une primitive g.
Pour tout nombre réel C, la fonction $g+C$ est encore une primitive de la fonction f.

En effet,

$$(g+C)' = g' = f .$$

Réciproquement, pour toute primitive h de f, il existe un nombre réel C tel que $h = g+C$. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Plus précisément, soient x_0 un point de I de y_0 un nombre réel. Il existe une primitive h de f et une seule telle que

$$h(x_0) = y_0 . \tag{1}$$

En effet, puisque g et h sont des primitives de f,

$$(h-g)' = h'-g' = f-f = 0 .$$

Puisque la dérivée de la fonction $h-g$ est nulle, il découle de la formule des accroissements finis que cette fonction est constante.

Enfin, la relation (1) implique

$$h = g-g(x_0)+y_0 ,$$

ce qui montre l'unicité de h. L'application h ainsi définie convient visiblement.

Le tableau des dérivées, lu à l'envers, montre l'existence des primitives de quelques fonctions fondamentales, telles que la fonction cosinus ou la fonction sinus. La recherche systématique des primitives sera effectuée au tome 3.

Pour le moment, nous allons montrer que les fonctions continues admettent des primitives. Dans ce but, nous ferons appel à la théorie de l'intégration.

7.2 Notion d'intégrale. La notion d'intégrale a longtemps été présentée à partir de l'aire limitée par une courbe, de la manière suivante :

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $[a, b]$. *La fonction S qui mesure l'aire de la portion de plan limitée par le graphe de f, l'axe Ox et les droites parallèles à Oy d'abscisses a et x est une primitive de f* (Fig. 7.1).

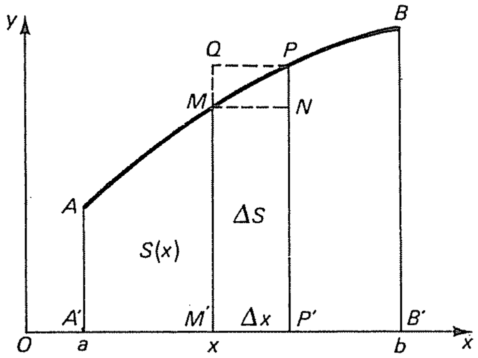


FIG. 7.1

Soient en effet x un point de $[a, b]$, M le point de coordonnées $(x, f(x))$, M' sa projection sur Ox et $S(x)$ l'aire de la surface $A'M'MA$. Alors S est une fonction de la variable x. Donnons à x un accroissement positif Δx; l'accroissement correspondant ΔS de $S(x)$ est compris entre les aires des rectangles $MM'P'N$ et $QM'P'P$ qui ont pour valeurs respectives :

$$\Delta x f(x) \quad \text{et} \quad \Delta x f(x+\Delta x)\,.$$

Donc :

$$\Delta x f(x) \leqslant \Delta S \leqslant \Delta x f(x+\Delta x)$$

ou

$$f(x) \leqslant \Delta S/\Delta x \leqslant f(x+\Delta x)\,.$$

Si Δx tend vers 0, $f(x+\Delta x)$ tend vers $f(x)$, car la fonction f est continue; dans ces conditions, $\Delta S/\Delta x$ tend vers $f(x)$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)\,.$$

Ainsi, la fonction S est dérivable, et sa dérivée S' est égale à f :

$$S' = f\,.$$

La fonction S est donc une primitive de la fonction f.

(Nous avons supposé x positif; le calcul serait analogue pour $\Delta x < 0$, ou encore pour une fonction f positive et décroissante.)

Enfin, l'aire limitée par le graphe de f, l'axe Ox et les segments $[A', A]$ et $[B', B]$ peut être considérée comme la limite de la somme des aires de rectangles dont le nombre augmente indéfiniment. Envisageons en effet une *subdivision* de l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire une suite finie strictement croissante $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de nombres réels telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Le plus grand des nombres $x_k - x_{k-1}$, où k appartient à $[1, n]$, s'appelle *pas* de la subdivision $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$; notons-le α_n.

Considérons les sommes :

$$s_n = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1})\,,$$
$$S_n = (x_1 - a)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \ldots + (b - x_{n-1})f(b)\,.$$

Elles représentent respectivement la somme des aires des rectangles du type $MM'P'N$ et $QM'P'P$ (Fig. 7.2). Ces deux sommes représentent les valeurs approchées par défaut et par excès de l'aire $\mathscr{A}$ représentée par $AA'B'B$.

$$s_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant S_n\,. \qquad (1)$$

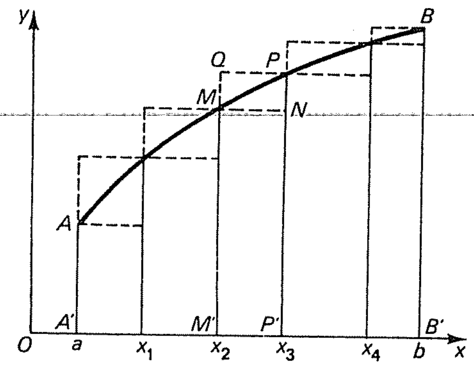


FIG. 7.2

Évaluons la différence :

$$S_n - s_n = (x_1 - a)[f(x_1) - f(a)] + \ldots + (b - x_{n-1})[f(b) - f(x_{n-1})]$$

qui représente la somme des aires des rectangles du type $QMNP$. En majorant toutes les différences $x_k - x_{k-1}$ par α_n, nous obtenons :

$$S_n - s_n \leqslant \alpha_n[f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(b) - f(x_{n-1})]$$
$$S_n - s_n \leqslant \alpha_n[f(b) - f(a)]\,.$$

Quand α_n tend vers 0, c'est-à-dire lorsque la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ est de plus en plus fine, on peut rendre $S_n - s_n$ inférieur à tout nombre réel strictement positif ε. Il suffit de prendre :

$$\alpha_n \leqslant \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}.$$

D'après la relation (1), on déduit :

$$0 \leqslant \mathscr{A} - s_n \leqslant S_n - s_n .$$

La différence $\mathscr{A} - s_n$ tend donc vers zéro, quand $\alpha_n \to 0$, autrement dit, la limite de s_n quand $\alpha_n \to 0$ est $\mathscr{A}$.

$$\lim_{\alpha_n \to 0} s_n = \mathscr{A} .$$

De même, puisque $S_n - s_n$ tend vers zéro,

$$\lim_{\alpha_n \to 0} S_n = \mathscr{A} .$$

Les sommes S_n et s_n admettent pour limite l'aire $\mathscr{A}$ de la surface $AA'BB'$ lorsque le nombre des intervalles partiels croît indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro.

Remarque. Si ξ_i est un point de l'intervalle (x_{i-1}, x_i), la relation $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ entraîne $f(x_{i-1}) \leqslant f(\xi_i) \leqslant f(x_i)$ et la somme :

$$U_n = (x_1 - a) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \ldots + (b - x_{n-1}) f(\xi_n)$$

est telle que :

$$s_n \leqslant U_n \leqslant S_n .$$

Comme s_n et S_n tendent vers $\mathscr{A}$ quand $\alpha_n \to 0$, U_n tend aussi vers $\mathscr{A}$ et :

$$\mathscr{A} = \lim_{\alpha_n \to 0} U_n = \lim_{\alpha_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi i) .$$

7.3 Définition des fonctions intégrables. La présentation historique des intégrales à partir de la notion d'aire est désormais abandonnée : en effet, en dehors du cas des rectangles, *il est impossible de définir correctement les aires avant les intégrales*!

C'est pourquoi nous allons introduire de manière précise la notion d'intégrale (à partir du point de vue intuitif des aires des rectangles); cette fois, nous ne nous limitons plus au cas des fonctions à la fois continues et croissantes.

Soient f une fonction numérique définie et bornée sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, $a < b$, et $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle somme de Riemann associée à f relativement à cette subdivision toute somme

$$R = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k),$$

où, pour tout entier k compris entre 1 et n, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. On dit que f est intégrable sur cet intervalle s'il existe un nombre réel l tel que, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de pas inférieur à η, et pour toute somme de Riemann R associée à f relativement à cette subdivision,

$$|R - l| \leqslant \varepsilon .$$

On vérifie aisément que le nombre l, s'il existe, est unique; on l'appelle alors *intégrale de f de a à b*, et on le note

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Les nombres a et b s'appellent respectivement *borne inférieure* et *borne supérieure* de l'intégrale de f.

(On peut mettre à la place de x toute autre lettre, à l'exclusion des lettres employées pour les bornes.)

EXEMPLES

1. Fonctions constantes. *Soit f une fonction constante et égale à α sur $[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$, et*

$$\int_a^b \alpha\,\mathrm{d}x = \alpha(b-a).$$

En effet, toute somme de Riemann associée à f relativement à une subdivision $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de $[a, b]$ est égale à

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\,\alpha = \alpha \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \alpha(b-a).$$

2. Soient c un point de $[a, b]$, α un nombre réel, et f la fonction définie sur $[a, b]$ par les formules

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \neq c$$
$$f(c) = \alpha .$$

Alors f est intégrable sur $[a, b]$.

En effet, toute somme de Riemann associée à f relativement à une subdivision de $[a, b]$ de pas inférieur à η est en valeur absolue inférieure à $|\alpha|.\eta$.

7.4 Valeur moyenne d'une fonction. *Soit f une fonction numérique bornée et intégrable sur un intervalle fermé borné* $[a, b]$. *Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le nombre $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *s'appelle valeur moyenne de la fonction f sur* $[a, b]$.

En effet, $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$ est une somme de Riemann associée à f relativement à la subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ définie par $x_k = a+k\,\dfrac{b-a}{n}$. La deuxième formule se ramène à la première, car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} f(a) = 0$.

7.5 Existence de fonctions intégrables. Le raisonnement qui a été fait au nº 7.2 montre qu'une fonction monotone est intégrable.

On démontre de même qu'*une fonction continue est intégrable.*

(On notera qu'une fonction monotone sur $[a, b]$ est bornée : par exemple, si f est croissante, pour tout élément x de $[a, b]$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. D'autre part, nous avons vu au chapitre 1 qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée.)

Remarque. Il existe des fonctions non intégrables. Soit par exemple f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par les formules :

$$f(x) = 1 \qquad \text{si } x \text{ est rationnel},$$
$$f(x) = 0 \qquad \text{si } x \text{ est irrationnel}.$$

La fonction f n'est pas intégrable sur $[0, 1]$.

Soit en effet $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une subdivision de $[0, 1]$. Pour tout élément k de $[1, n]$, il existe au moins un nombre rationnel ξ_k et au moins un nombre irrationnel ζ_k appartenant à l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$. Il en résulte que les deux sommes de Riemann

$$R = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(\xi_k) \quad \text{et} \quad R' = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(\zeta_k)$$

sont respectivement égales à 1 et à 0.

Supposons que f soit intégrale sur $[0, 1]$. Si le pas de la subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est inférieur à η, les deux inégalités

$$|R - l| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |R' - l| \leqslant \varepsilon$$

sont simultanément réalisées. L'inégalité du triangle montre alors que

$$|R-R'| \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui contredit l'hypothèse dès que $\varepsilon < 1/2$.

7.6 Changement d'intervalle d'intégration. Nous admettrons aussi le théorème ci-dessous, relatif à la restriction et aux prolongements d'une fonction intégrable :

Soient $[a, b]$ *et* $[a', b']$ *deux intervalles fermés bornés tels que*

$$a \leqslant a' < b' \leqslant b .$$

Soit f *une fonction bornée et intégrable sur* $[a, b]$. *Alors la restriction* g *de* f *à* $[a', b']$, a fortiori *bornée, est intégrable sur* $[a', b']$. *De plus,*

$$\int_{a'}^{b'} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\chi_{[a',b']}(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $\chi_{[a',b']}$ *désigne la fonction caractéristique de* $[a', b']$.

(Rappelons que la fonction caractéristique d'une partie est la fonction prenant la valeur 1 sur les éléments de cette partie, et la valeur 0 sur les éléments de son complémentaire.)

Réciproquement, soit g *une fonction numérique bornée et intégrable sur* $[a', b']$. *Alors la fonction* f *définie sur* $[a, b]$ *par les formules*

$$\begin{array}{lll} f(x) = g(x) & \textit{si} & x \in [a', b'] \\ f(x) = 0 & \textit{si} & x \notin [a', b'], \end{array}$$

est intégrable sur $[a, b]$, *et*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a'}^{b'} g(x)\,\mathrm{d}x .$$

Soient maintenant a, b et c trois nombres réels tels que $a \leqslant b \leqslant c$. Puisque

$$f\chi_{[a,c]} = f\chi_{[a,b]} + f\chi_{[b,c]} - f\chi_{\{b\}},$$

une condition nécessaire et suffisante pour que f soit intégrable sur $[a, c]$ est que f le soit sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$. De plus,

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x . \tag{1}$$

Pour pouvoir généraliser la formule (1), posons

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

et

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Considérons alors une fonction f bornée et intégrable sur un intervalle fermé borné I, et trois points a, b, c de I (rangés dans un ordre quelconque). Nous pouvons écrire la célèbre *relation de Chasles* :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{2}$$

Le cas où $a < b < c$ découle aussitôt de la relation (1). La symétrie de la formule (2) par rapport à a, b et c montre aussitôt sa validité quelles que soient les positions relatives de ces trois points.

7.7 Propriétés des fonctions intégrables. Voici, sans démonstration, le résultat relatif aux opérations algébriques sur les fonctions intégrables :

Soient f et g deux fonctions numériques bornées et intégrables sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Alors $f+g$ et fg sont intégrables sur $[a, b]$. En particulier, si g est une constante k, kf est intégrable sur $[a, b]$.

(Il en découle que l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a, b]$ est une sous-algèbre unitaire de l'algèbre unitaire des fonctions définies sur $[a, b]$. De plus, l'application qui à toute fonction f intégrable sur $[a, b]$ associe son intégrcle sur $[a, b]$ est une forme linéaire.)

Enfin, si la fonction g est supérieure à un nombre réel strictement positif, $1/g$ est intégrable sur $[a, b]$.

Examinons maintenant comment se conservent les inégalités par intégration :

Soit f une fonction bornée et intégrable sur un intervalle $[a, b]$, $a < b$.
Si la fonction f est positive, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0\,.$$

En effet, toute somme de Riemann associée à f est positive. La proposition en résulte, par prolongement des inégalités.

Plus généralement :

Soient f et g deux fonctions numériques bornées et intégrables sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, $a < b$. Si $f \leqslant g$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

En effet, $g-f$ est positive, et

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nous pouvons alors établir la *formule de la moyenne* :
Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$, $a < b$.

Soit (m, M) un couple de nombres réels tel que

$$m \leqslant f \leqslant M .$$

Alors, si g est positive,

$$m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x .$$

En particulier, si $g = 1$,

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) .$$

Il suffit de remarquer que, puisque g est positive,

$$mg \leqslant fg \leqslant Mg .$$

La relation (1) s'écrit encore :

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M .$$

Autrement dit, si f est comprise entre m et M, il en est de même de sa valeur moyenne.

Nous allons préciser ces derniers résultats dans le cas des fonctions continues.

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, $a < b$. ~~Si f est strictement positive, c'est-à-dire si f est positive et s'il existe un point x_0~~ en lequel f prend une valeur strictement positive, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0 .$$

Puisque f est strictement positive, il existe un point x_0 de $[a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Puisque f est continue, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que, pour tout point x de $[a', b'] = [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap [a, b]$,

$$f(x) \geqslant f(x_0)/2 .$$

La fonction f est donc supérieure à la fonction g définie par les formules

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x_0)/2 \quad &\text{si} \quad &x \in [a', b'] , \\ g(x) &= 0 \quad &\text{si} \quad &x \notin [a', b'] . \end{aligned}$$

Or,

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = (b' - a')\frac{f(x_0)}{2} > 0 ,$$

ce qui entraîne le résultat annoncé.

Soient enfin f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, $a < b$. Si $f < g$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx.$$

On se ramène au cas précédent en considérant la fonction strictement positive $g-f$.

Ainsi, dans le cas des fonctions continues, l'intégration transforme une inégalité stricte en une inégalité stricte. (Dans le cas général, une inégalité stricte peut fort bien être transformée par intégration en une inégalité large.)

Inégalité de Schwarz. *Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, $a < b$. Alors*

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right).$$

En outre, il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si les fonctions f et g sont colinéaires.

En effet, l'application qui à tout couple (f, g) de fonctions continues sur $[a, b]$ associe l'intégrale $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ est évidemment une forme bilinéaire symétrique. De plus, pour toute fonction continue f, le nombre réel $\int_a^b f(x)^2\,dx$ est positif. Enfin, puisque la fonction f^2 est continue et positive, la relation $\int_a^b f(x)^2\,dx = 0$ équivaut à $f = 0$. Ainsi, l'application $(f, g) \mapsto \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ est un produit scalaire. L'inégalité annoncée est donc un cas particulier de l'inégalité de Schwarz que nous avons rencontrée au tome 1.

INTÉGRALES ET PRIMITIVES

7.8 Intégrales et primitives. Nous étudions maintenant la variation de l'intégrale d'une fonction f *en fonction de sa borne supérieure.*

Soit f une fonction bornée et intégrable sur un intervalle $[a, b]$. Nous savons que f est intégrable sur tout intervalle $[a, x]$ contenu dans $[a, b]$ (voir nº 7.6). *La fonction*

$$g : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est donc définie sur $[a, b]$.

La fonction g est continue sur $[a, b]$.

Soit en effet (x_0, x) un couple de points de $[a, b]$. D'après la relation de Chasles,

$$g(x)-g(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt. \tag{1}$$

Puisque la fonction f est bornée, il existe un couple (m, M) de nombres réels tel que

$$m \leqslant f \leqslant M.$$

Alors,

— si $x_0 \leqslant x$, $\quad m(x-x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(x-x_0);$

— si $x_0 \geqslant x$, $\quad M(x-x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant m(x-x_0).$

Notons k le plus grand des deux nombres $|m|$ et $|M|$. Alors, quels que soient les points x et x_0,

$$|g(x)-g(x_0)| \leqslant k\,|x-x_0|,$$

ce qui montre que g est continue au point x_0. Le point x_0 étant choisi arbitrairement dans $[a, b]$, g est continue sur cet intervalle.

Si f est positive, g est croissante. Si f est négative, g est décroissante.

Il s'agit encore d'une conséquence de la formule de Chasles : nous savons en effet que si f est positive et si $x_0 < x$,

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

La relation (1) montre alors que $g(x) \geqslant g(x_0)$. La démonstration est analogue dans les autres cas.

Si f est continue en un point x_0 de $[a, b]$, g est dérivable en ce point, et

$$g'(x_0) = f(x_0).$$

Il convient de montrer que

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} [f(t)-f(x_0)]\,\mathrm{d}t$$

tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. Or, la fonction f est continue au point x_0; pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que, pour tout point x de $[x_0-\eta, x_0+\eta] \cap [a, b]$, la valeur absolue de $f(x)-f(x_0)$ soit inférieure à ε. Il en est *a fortiori* ainsi pour tout point t de $[x_0, x]$. La relation

$$|f(t)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

implique $\quad \left|\dfrac{1}{x-x_0}\displaystyle\int_{x_0}^{x} [f(t)-f(x_0)]\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon,$

ce qui entraîne le résultat annoncé.

L'existence de l'intégrale nous permet de prouver l'existence de primitives pour une fonction continue :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de **R**. *Alors f admet une primitive sur I.*

Soit en effet a un point de I. Puisque f est continue sur I, f est intégrable sur tout intervalle $[a, x]$, où x appartient à I. D'après le théorème précédent, la fonction g est dérivable en tout point x de I, et

$$g' = f.$$

Ainsi, f admet g pour primitive.

Plus précisément, soit x_0 un point de I; l'unique primitive h de f s'annulant au point x_0 est donnée par la formule :

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En effet, d'après la formule de Chasles,

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = g(x) + \int_{x_0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction h, différant de g d'une constante, est encore une primitive de f; de plus, elle s'annule évidemment au point x_0. (Nous savons depuis le début de ce chapitre qu'une telle primitive h est unique.)

L'intégration nous a permis de prouver l'existence de primitives. Inversement, la connaissance d'une primitive permet de calculer les intégrales :

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et h une primitive quelconque de f. Alors :

$$\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = h(b) - h(a).$$

En effet, g et h, étant deux primitives de f, diffèrent d'une constante. Donc

$$g(b) - h(b) = g(a) - h(a).$$

Il suffit de remarquer que $g(a) = 0$ et que

$$g(b) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Signalons que la variation de la fonction h entre a et b se note $[h(x)]_a^b$.

Nous pouvons enfin préciser la formule de la moyenne dans le cas des fonctions continues :

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Il existe alors un point c de l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

La formule (1) n'est autre que la formule des accroissements finis appliquée à la fonction

$$x \mapsto \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarquons qu'il peut ne pas exister un tel nombre c lorsque f n'est pas continue. Ainsi, la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par les formules

$$f(x) = -1 \quad \text{si} \quad x < 0\,,$$
$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \geqslant 0\,,$$

a pour valeur moyenne 0 sur $[-1, 1]$, et 0 n'appartient pas à l'image de $[-1, 1]$ par f.

7.9 Exemples de calculs d'intégrales. D'après ce qui précède, pour calculer une intégrale, il suffit de connaître une primitive et de prendre sa variation entre les bornes d'intégrations.

EXEMPLE. *Calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est $x \mapsto \text{Arc tg}\, x$. Les valeurs de cette primitive aux points 0 et 1 étant respectivement 0 et $\pi/4$, l'intégrale proposée est égale à $\pi/4$.

De même :

1° $$I = \int_0^2 x^2\, dx = [x^3/3]_0^2 = \frac{1}{3}[2^3 - 0^3] = 8/3\,.$$

2° $$I = \int_0^\pi \sin x\, dx = -[\cos x]_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0)$$
$$I = -[-1-1] = 2\,.$$

3° $$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \sin \pi/2 - \sin(-\pi/2)$$
$$I = 1-(-1) = 2\,.$$

4° $$I = \int_0^1 (2x^2+1)\, dx\,.$$

On peut l'écrire, en la décomposant en deux intégrales :

$$\int_0^1 2x^2\, dx + \int_0^1 dx = 2[x^3/3]_0^1 + [x]_0^1 = \frac{2}{3}(1^3-0) + (1-0) = 2/3+1 = 5/3\,.$$

7.10 Intégrales fonctions des deux bornes. La fonction g que nous venons d'étudier,

$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\, dt\,,$$

porte naturellement le nom d'*intégrale fonction de sa borne supérieure.* La fonction h définie par la formule

$$x \mapsto \int_x^{x_0} f(t)\, dt\,,$$

appelée intégrale fonction de sa borne inférieure, se ramène aussitôt à la précédente, puisque

$$h = -g\,.$$

En particulier, si f est continue, h est dérivable, et

$$h' = -f\,.$$

Plus généralement, soient α et β deux fonctions numériques continues et dérivables sur un intervalle J, à valeurs dans I. Alors, si f est continue sur I, la fonction F définie sur J par la formule

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable, et

$$F'(x) = \beta'(x).(f\circ\beta)(x) - \alpha'(x).(f\circ\alpha)(x)\,.$$

Soit en effet y_0 un point de I. Considérons la primitive g de f s'annulant en ce point :

$$g : y \mapsto \int_{y_0}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

D'après la formule de Chasles,

$$F(x) = (g\circ\beta)(x) - (g\circ\alpha)(x)\,.$$

En dérivant les fonctions composées $g\circ\beta$ et $g\circ\alpha$ (voir chapitre 2), nous obtenons le résultat annoncé.

7.11 Notation intégrale des primitives. Soient f une fonction continue et h une primitive de f. La formule

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = h(x) - h(a)$$

conduit à noter

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

une primitive quelconque de f (lire « somme de $f(x)\,\mathrm{d}x$ »). Cette notation est à l'origine de nombreuses erreurs : en effet, ce symbole représente non pas une fonction, mais un ensemble de fonctions différant les unes des autres par des constantes.

Il faudra toujours penser que $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est déterminée à une constante additive près, ce qu'on note parfois :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x + C\,.$$

Le symbole $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ s'appelle *intégrale indéfinie*; par opposition, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est alors appelée *intégrale définie*.

PROCÉDÉS FONDAMENTAUX D'INTÉGRATION

Nous allons étudier deux procédés fondamentaux de calcul des intégrales, permettant souvent de se ramener au tableau des primitives.

7.12 Changement de variable. *Soient φ une fonction numérique continûment dérivable sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, et f une fonction numérique continue sur un intervalle I contenant l'image de $[a, b]$ par φ. Alors*

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \,.\, \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u\,. \tag{1}$$

Remarquons que la fonction $(f \circ \varphi) . \varphi'$, étant continue, est intégrable. Considérons la fonction g définie par la formule

$$y \mapsto \int_{\varphi(a)}^{y} f(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

La fonction $h = g \circ \varphi$, définie sur l'intervalle $[a, b]$, nulle au point a, a pour dérivée $(g' \circ \varphi) . \varphi'$ (voir chapitre 2). La fonction h est donc égale à

$$x \mapsto \int_a^x (g' \circ \varphi)(t) \,.\, \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Puisque $g' = f$, il suffit de substituer b à x pour obtenir la formule (1).

Remarque. On utilise souvent les changements de variable dans le calcul des primitives (voir tome 3). Mais cette fois, on cherche *une fonction*, et non plus *un nombre*! Il faudra donc revenir à l'ancienne variable dans le résultat final.

EXEMPLES

1. *Calculons*

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}.$$

Posons $x = \operatorname{tg} u$. Quand x varie de 0 à 1, u varie de 0 à $\pi/4$; $\mathrm{d}x = (1+\operatorname{tg}^2 u)\,\mathrm{d}u$ et l'élément différentiel devient :

$$\frac{(1+\operatorname{tg}^2 u)\,\mathrm{d}u}{(1+\operatorname{tg}^2 u)^2} = \frac{\mathrm{d}u}{1+\operatorname{tg}^2 u} = \cos^2 u\,\mathrm{d}u\,.$$

Donc :

$$I = \int_0^{\pi/4} \cos^2 u \, du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (1+\cos 2u)\, du$$

$$I = \left[\frac{1}{2}\left(u + \frac{\sin 2u}{2}\right)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi+2}{8}.$$

2. *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos^3 t}\, dt.$$

Remarquons que

$$\frac{\sin t}{\cos^3 t}\, dt = \operatorname{tg} t \, d(\operatorname{tg} t).$$

Posons alors $u = \operatorname{tg} t$. Il vient

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos^3 t}\, dt = \int_0^1 u \, du = [u^2/2]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

3. *Calculer*

$$I = \int_1^{7/4} \frac{dx}{9+16(x-1)^2}.$$

Nous pouvons écrire cette intégrale sous la forme :

$$I = \frac{1}{16}\int_1^{7/4} \frac{dx}{(x-1)^2+(3/4)^2}.$$

Posons $x-1 = \frac{3}{4}u$; alors $dx = \frac{3}{4}du$ et

$$I = \frac{1}{16}\,\frac{3/4}{9/16}\int_0^1 \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{12}\,[\operatorname{Arc\,tg} u]_0^1 = \pi/48.$$

4. *Calculer*

$$I = \int_0^{2\pi} \sin mx \, dx,$$

où m est un entier rationnel non nul.

Posons $mx = u$, d'où $m\,dx = du$ et $dx = \dfrac{du}{m}$.

Or,

$$\int \sin u \frac{du}{m} = -\frac{1}{m}[\cos mx];$$

d'où

$$I = -\frac{1}{m}[\cos mx]_0^{2\pi} = -\frac{1}{m}[\cos 2m\pi - \cos 0]\,;$$

comme $\cos 2m\pi = 1$,

$$I = -\frac{1}{m}[1-1] = 0.$$

Le résultat reste évidemment valable lorsque $m = 0$.

Ainsi, pour tout entier rationnel m, l'intégrale de la fonction $x \mapsto \sin mx$ *entre* 0 *et* 2π *est nulle.*

On trouverait de même

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{m}[\sin mx]_0^{2\pi} = \frac{1}{m}[\sin 2m\pi - \sin 0] = \frac{1}{m}[0-0] = 0.$$

Il en est donc de même pour la fonction $\cos mx$ entre 0 et 2π, et ces remarques nous serviront au tome 3 dans l'étude des séries de Fourier, et dans les exemples d'application.

7.13 Utilisation de symétries et de périodicité. Le calcul d'une intégrale se simplifie dans les cas particuliers suivants :

1. Si la fonction f est *impaire*, son intégrale sur un intervalle de centre 0 est nulle :

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Effectuons le changement de variable $x = -u$. Alors

$$I = \int_{a}^{-a} f(-u)\,\mathrm{d}(-u) = \int_{-a}^{a} f(-u)\,\mathrm{d}u.$$

Puisque la fonction f est impaire,

$$f(-u) = -f(u).$$

Donc

$$I = -\int_{-a}^{a} f(u)\,\mathrm{d}u = -I.$$

Ainsi, $2I = 0$, ce qui achève la démonstration.

On interprète facilement ce résultat, en remarquant que les deux aires $A'AO$ et $OB'B$ sont égales en valeur absolue et ont des signes opposés.

Donc l'aire algébrique limitée par la courbe, Ox, AA' et BB' est nulle (Fig. 7.3).

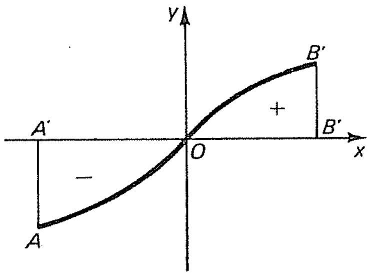


FIG. 7.3

2. Si la fonction f est *paire*,

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Décomposons l'intervalle d'intégration en deux parties : $[-a, 0]$ et $[0, a]$. On obtient :

$$I = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = I_1 + I_2.$$

Effectuons dans l'intégrale I_1, le changement de variable $x = -u$, donc $dx = -du$. Dans ces conditions :

$$I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-u)\,du = \int_{0}^{a} f(-u)\,du.$$

Comme $f(-u) = f(u)$, on obtient :

$$I_1 = \int_{0}^{a} f(u)\,du = I_2.$$

On interprète facilement ce résultat en utilisant la notion d'aire (Fig. 7.4) :

aire $AA'OE$ = aire $EOB'B$, donc aire $AA'B'B = 2 \times$ aire $EOB'B$.

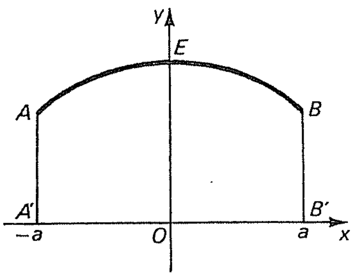


FIG. 7.4

3. *Si la fonction f admet T pour période, l'intégrale de f sur un intervalle ayant pour longueur T ne dépend pas de l'intervalle considéré* :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Effectuons le changement de variable $t = x + b - a$. Les bornes de la première intégrale deviennent $a + b - a = b$ et $a + T + b - a = b + T$. La relation cherchée en découle, puisque $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

EXEMPLES. **1.** La fonction cosinus étant paire,

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x = 2[\sin x]_0^{\pi/2} = 2(1-0) = 2\,.$$

2. *Calculer* $\quad I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x\,.$

Il suffit de remarquer que la fonction à intégrer $\sin x/\cos^3 x$ est impaire, donc $I = 0$.

3. *Calculer* $\quad J = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x\,.$

La fonction à intégrer admettant $2\,\pi$ pour période,

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

7.14 Intégration par parties. *Soient f et g des fonctions numériques continûment dérivables sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

Remarquons que les fonctions fg' et $f'g$, étant continues, sont intégrables. La formule (1) résulte immédiatement de la relation

$$(fg)' = fg' + f'g\,.$$

EXEMPLES

1. *Calculer* $\quad I = \displaystyle\int_0^1 x \operatorname{Arc\,tg} x\,\mathrm{d}x\,.$

Posons

$$u = \operatorname{Arc\,tg} x, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,;$$

$$\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{d'où} \qquad v = x^2/2\,.$$

On a donc $I = \left[\frac{x^2}{2}\,\mathrm{Arc\,tg}\,x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^2}.$

Calculons $J = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{(x^2+1-1)\,dx}{1+x^2} = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$

Donc $J = [x]_0^1 - [\mathrm{Arc\,tg}\,x]_0^1 = 1-\pi/4$

et $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$

2. *Calculer l'intégrale* $\int_0^{\pi/4} (x+\pi/4)\cos x\,dx.$

La formule (1) conduit aussitôt à

$$\int_0^{\pi/4} (x+\pi/4)\cos x\,dx = [(x+\pi/4)\sin x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \sin x\,dx = \frac{\pi+2}{2\sqrt{2}} - 1.$$

7.15 Primitives des fonctions à valeurs complexes. La définition des primitives s'étend au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes. On montre aisément que la fonction $f = P+jQ$ admet une primitive si et seulement si les fonctions à valeurs réelles P et Q en admettent une. On se ramène donc au cas des fonctions à valeurs réelles (à ceci près qu'il est parfois plus facile de trouver une primitive de f que des primitives de P et de Q).

Par exemple, soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = e^{jx} = \cos x + j\sin x.$$

Les fonctions $P : x \mapsto \cos x$ et $Q : x \mapsto \sin x$ admettent pour primitives les fonctions Q et $-P$. Donc f admet pour primitive la fonction $g = Q - jP$, c'est-à-dire la fonction g définie par la formule :

$$g(x) = \sin x - j\cos x = \frac{1}{j}(\cos x + j\sin x) = \frac{1}{j}e^{jx}.$$

7.16 Intégrale des fonctions à valeurs complexes. La définition des sommes de Riemann ne s'étend pas au cas des fonctions à valeurs complexes, *car il n'y a pas de relation d'ordre sur* $\mathbf{C}$.

On dit tout simplement qu'une fonction $f = P+jQ$ d'une variable réelle à valeurs complexes est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ si les fonctions P et Q le sont; on appelle alors intégrale de f sur $[a, b]$ le nombre complexe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P(x)\,dx + j\int_a^b Q(x)\,dx.$$

APPLICATIONS DES INTÉGRALES

7.17 Valeur moyenne d'un courant. Rappelons que la valeur moyenne d'une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$ est, par définition,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Nous allons calculer cette expression dans le cas du courant électrique.

a) *Courant non redressé :*

$$I = I_0 \sin \omega t .$$

La plus petite période est $T = 2\pi/\omega$. La valeur moyenne de l'intensité est :

$$I_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T I_0 \sin \omega t \,\mathrm{d}t .$$

En posant $u = \omega t$, nous voyons que

$$I_{\text{moy}} = \frac{I_0}{\omega T}\int_0^{2\pi} \sin u \,\mathrm{d}u = \frac{I_0}{2\pi}\left[-\cos u\right]_0^{2\pi} = 0 .$$

Un ampèremètre à cadre mobile (ou un voltmètre à cadre mobile), appareil sensible au courant moyen, ne déviera donc pas, ce qui est intuitif.

Il convient de noter que $I\Delta t$ est la quantité d'électricité transportée pendant un temps très court Δt; l'intégrale $\int_0^T I_0 \sin \omega t\,\mathrm{d}t$ représente donc la quantité d'électricité fournie pendant une période.

b) *Courant redressé à deux alternances* (Fig. 7.5) *:*

$$I = I_0 |\sin \omega t| .$$

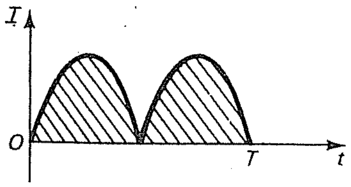


FIG. 7.5

Il est immédiat que

$$I_{\text{moy}} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} I_0 \sin \omega t \,\mathrm{d}t = \frac{2I_0}{\omega T}\left[-\cos u\right]_0^{\pi} = \frac{4I_0}{\omega T} = \frac{2I_0}{\pi}.$$

C'est ce qu'indiquera un galvanomètre à cadre mobile.

c) *Courant redressé à une alternance* (Fig. 7.6) *:*

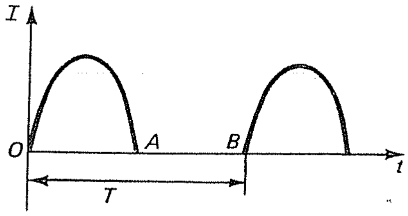


FIG. 7.6

Il est immédiat que l'intensité moyenne est la moitié de la précédente, soit

$$I_{\text{moy}} = I_0/\pi .$$

Remarque. Tout ce que nous venons de dire, dans les trois cas, sur les intensités s'applique aussi aux forces électromotrices et aux différences de potentiel, redressées ou non.

7.18 Valeur efficace d'un courant. Nous venons de voir que la valeur moyenne I_{moy} est l'intensité d'un courant continu transportant pendant une période la même quantité d'électricité que le courant alternatif considéré.

La *valeur efficace* I_{eff} d'un courant est l'intensité d'un courant continu qui dégage pendant une période la même quantité de chaleur que le courant alternatif considéré, dans une résistance donnée (et arbitraire). D'après la loi de Joule, la quantité de chaleur dégagée par ce courant continu est

$$W = RI_{\text{eff}}^2 T .$$

D'autre part, la quantité de chaleur dégagée par le courant alternatif est

$$W = R\int_0^T I^2 \,\mathrm{d}t .$$

La valeur de la résistance s'élimine, et il reste :

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I^2 \,\mathrm{d}t .$$

Ainsi, la valeur efficace n'est autre que la racine carrée de la valeur moyenne de I^2.

a) *Cas du courant non redressé :*

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (I_0 \sin \omega t)^2 \,\mathrm{d}t .$$

Or, $$\int_0^T \sin^2 \omega t \,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{T}{2}.$$

Il en découle que $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$.
De même pour la d.d.p. : $V_{\text{eff}} = V_0/\sqrt{2}$.

b) *Cas du courant redressé à deux alternances.* L'intensité efficace a la même valeur, puisque la quantité de chaleur, ne dépendant pas du sens du courant, est la même.

c) *Cas du courant redressé à une alternance.* La quantité de chaleur dégagée est la moitié de celle qui est dégagée par le courant à deux alternances, soit :

$$RI'^2 T = \tfrac{1}{2} RI_{\text{eff}}^2 T ;$$

d'où : $I' = I_{\text{eff}}/\sqrt{2} = I_0/2 .$

Comparaison entre la valeur moyenne et la valeur efficace. Nous venons de voir que

$$I_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T I \,\mathrm{d}t \qquad I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2 \,\mathrm{d}t} .$$

Or, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\int_0^T I\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_0^T I^2\,\mathrm{d}t}\ \sqrt{\int_0^T \mathrm{d}t}\,,$$

soit encore, puisque $\int_0^T \mathrm{d}t = T$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T I\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2\,\mathrm{d}t}\,,$$

ou enfin $I_{\text{moy}} < I_{\text{eff}}$.

La valeur moyenne d'un courant est donc toujours inférieure à sa valeur efficace.

7.19 Puissance fournie par un courant alternatif. Soient une différence de potentiel

$$V = V_0 \sin \omega t$$

et un courant I décalé d'un angle φ sur la d.d.p.

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)\,.$$

Pendant un temps très court Δt, l'énergie fournie est

$$\Delta W = VI\Delta t\,.$$

L'énergie totale pendant une période T est donc :

$$W = \int_0^T V_0 \sin \omega t\, I_0 \sin(\omega t - \varphi)\,\mathrm{d}t = V_0 I_0 \int_0^T \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi)\,\mathrm{d}t\,.$$

~~Or, on sait que :~~ $\cancel{\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]\,,}$

donc $\sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2}[\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]\,,$

ce qui donne deux intégrales :

$$W = \frac{V_0 I_0}{2}\left[\int_0^T \cos \varphi\ \mathrm{d}t - \int_0^T \cos(2\,\omega t - \varphi)\,\mathrm{d}t\right].$$

La deuxième intégrale est visiblement nulle; il reste donc :

$$W = \frac{V_0 I_0}{2} \cos \varphi \int_0^T \mathrm{d}t = \frac{V_0 I_0 T \cos \varphi}{2}\,.$$

La puissance P est l'énergie par seconde; soit $f = 1/T$ la fréquence. Alors :

$$P = f\,\frac{V_0 I_0 T \cos \varphi}{2} = \frac{V_0 I_0 \cos \varphi}{2} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}\,\frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi\,.$$

Finalement : $P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi\,.$

7.20 Calcul du travail à fournir pour allonger un ressort. *Calculer le travail qu'il faut dépenser pour allonger un ressort d'une longueur l, sachant que la force est proportionnelle au déplacement $F = Kx$.*

Le travail total n'est pas Fl puisque F varie tout le long du déplacement.

Plaçons-nous à la distance x du point de départ (là où la force initiale est zéro, le ressort n'étant pas tendu au départ). En ce point la force est

$$F = Kx\,.$$

Pendant un déplacement Δx très petit, le travail est sensiblement :

$$\Delta W = F\Delta x = Kx\Delta x\,.$$

Le travail total de 0 à l est donc :

$$W = \int_0^l Kx\,\mathrm{d}x = K[x^2/2]_0^l$$

$$W = K\left(\frac{l^2}{2} - 0\right) = \frac{Kl^2}{2} = \frac{Kl}{2}\,.\,l\,.$$

On remarque que $Kl/2$ est la valeur de la force au milieu du chemin parcouru, donc tout se passe comme si cette force moyenne s'était déplacée de l.

7.21 Calcul de l'énergie fournie par un condensateur électrique qui se décharge. Soient C sa capacité, V_0 la différence de potentiel entre ses deux bornes et Q_0 la charge électrique qu'il contient ($Q_0 = CV_0$).

La décharge n'étant pas instantanée, plaçons-nous à un instant quelconque, au bout du temps t. A ce moment, il reste dans le condensateur une charge Q et la d.d.p. aux bornes est $V = Q/C$.

Pendant un temps Δt, il sort une charge ΔQ du condensateur (Δt est suffisamment petit pour que l'on puisse supposer V constant), et l'énergie fournie par ΔQ coulombs qui « tombent » de V volts est :

$$\Delta W = V\Delta Q\,.$$

L'énergie totale est

$$W = \int_{Q_0}^{0} V\,\mathrm{d}Q = \int_{Q_0}^{0} \frac{Q}{C}\,\mathrm{d}Q\,.$$

(En effet, la variable étant Q, cette charge varie de Q_0 au début jusqu'à 0 à la fin de la décharge.) D'où

$$W = \frac{1}{C}\left[\frac{Q^2}{2}\right]_{Q_0}^{0} = \frac{1}{C}\left(0 - \frac{Q_0^2}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C} = -\frac{1}{2}\frac{C^2V_0^2}{C} = -\frac{1}{2}CV_0^2\,.$$

On retrouve bien ainsi l'énergie contenue dans C à l'état potentiel, le signe $-$ indiquant que c'est de l'énergie que l'on récupère.

7.22 Calcul du travail à fournir pour écarter les plaques d'un condensateur. *On considère un condensateur électrique de capacité C relié en permanence à une source continue dont la force électromotrice est E. Calculer le travail qu'il faut dépenser pour écarter l'une des plaques d'une distance D, parallèlement à elle-même (l'isolant étant l'air).*

Soit e la distance initiale des deux plaques; on démontre en électricité que la force attractive qui s'exerce sur chaque plaque est (système SI) :

$$F = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{SE^2}{e^2}, \qquad \text{où} \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9}$$

et où S est l'aire en regard des plaques. Il faut donc dépenser un travail pour écarter l'une des plaques (c'est-à-dire fournir de l'énergie).

Le travail total n'est pas FD, puisque F varie à chaque instant. Plaçons-nous donc à la distance x du point de départ (Fig. 7.7); la distance des plaques étant $e+x$, la force attractive est, à ce moment :

$$F = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{SE^2}{(e+x)^2}.$$

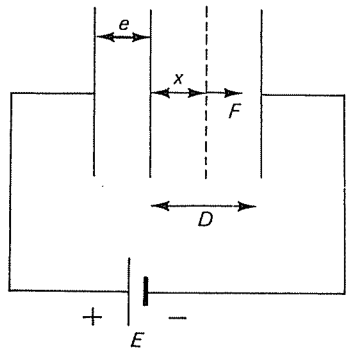


FIG. 7.7

Donnons à x un accroissement très petit Δx; le travail est

$$\Delta W = F\Delta x.$$

On obtient le travail total par intégration :

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^D \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{SE^2}{(e+x)^2}\,dx = \frac{\varepsilon_0}{2}SE^2\int_0^D \frac{dx}{(e+x)^2}\\
&= -\frac{\varepsilon_0}{2}SE^2.\left[\frac{1}{e+x}\right]_0^D = -\frac{\varepsilon_0}{2}SE^2\left[\frac{1}{e+D}-\frac{1}{e}\right]\\
&= -\frac{\varepsilon_0}{2}SE^2\left[\frac{e-e-D}{e(e+D)}\right] = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{SE^2D}{e(e+D)}\\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{SE^2}{e^2}\left(\frac{e}{1+e/D}\right).
\end{aligned}$$

On reconnaît le produit de la valeur initiale de la force par $\dfrac{e}{1+e/D}$.

7.23 Calcul du temps nécessaire pour qu'un réservoir d'eau se vide. *Soit un réservoir cylindrique de rayon* $R = 2$ m *et de hauteur* $h = 3$ m. *La vitesse d'écoulement* v *au tuyau de sortie, placé à la base, étant à chaque instant proportionnelle à la racine carrée de la hauteur de l'eau, calculer le temps nécessaire pour que ce réservoir se vide, sachant que le débit est de* 2 *litres par seconde au moment où la hauteur est de* 1 *mètre.*

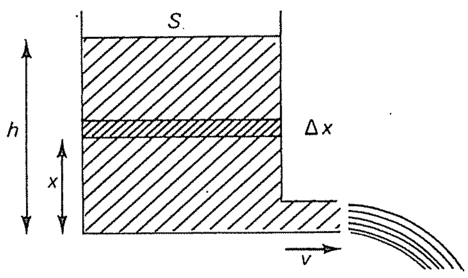


FIG. 7.8

La vitesse instantanée de l'eau à la sortie peut s'écrire (en litres par seconde), en appelant x la hauteur de l'eau à un instant quelconque (Fig. 7.8) :

$$v = 2\sqrt{x}$$

ou bien

$$v = 2\sqrt{x}\,10^{-3}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}.$$

Plaçons-nous donc au bout d'un temps t après l'ouverture du robinet. A ce moment le niveau de l'eau a déjà baissé, sa hauteur est devenue x et la vitesse de l'eau à la sortie est v.

Pendant un temps Δt, le niveau de l'eau baisse de Δx, et le volume d'eau correspondant à cette tranche est :

$$\Delta V = S\Delta x = \pi R^2 \Delta x = 4\pi \Delta x \text{ (en m}^3\text{)}.$$

D'autre part, pendant ce temps Δt, ce même volume d'eau est sorti par le robinet. Or, $v\Delta t$ représente le volume de l'eau qui est sorti :

$$\Delta V = 4000\pi\Delta x = v\Delta t \text{ (en litres)}.$$

D'où

$$\Delta t = \frac{4\,000\,\pi\Delta x}{v} = \frac{4000\,\pi\Delta x}{2\sqrt{x}}.$$

Le temps total pour vider le réservoir est

$$t = 2\pi\,10^3 \int_0^h \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 4\pi\,10^3\sqrt{h} = 4\,000\,\pi\sqrt{3} \approx 21\,765\,;$$

soit 6 h 2 mn 45 s.

7.24 Calcul de la poussée hydraulique sur une surface verticale. Considérons une porte d'écluse plane et rectangulaire, de hauteur h et de largeur l (Fig. 7.9).

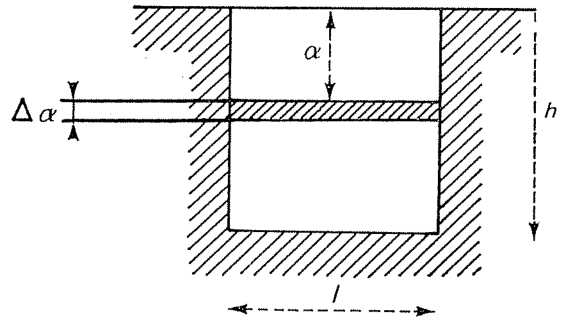


FIG. 7.9

Quand l'eau baigne entièrement l'une des faces de cette porte, elle exerce sur elle une force F dont nous désirons connaître la valeur.

On sait que la pression p varie avec la profondeur x, et que

$$p = 10^4 x$$

(les pressions étant mesurées en pascals et les longueurs en mètres.)

Considérons la partie de la porte comprise entre la profondeur x et la profondeur $x + \Delta x$; cette partie a pour aire $\Delta S = l\Delta x$, et la force qui s'exerce sur elle est

$$\Delta F = p\,\Delta S = 10^4 x l \Delta x\,.$$

La force totale s'exerçant sur toute la porte est donc :

$$F = \int_0^h 10^4\, lx\,\mathrm{d}x = 10^4\, l\,[x^2/2]_0^h = 10^4\, lh^2/2\,.$$

Application. Si $h = 6$ et $l = 10$, alors

$$F = 10^4 \frac{10 \times 36}{2} = 1{,}8 \times 10^6\,\mathrm{N}\,.$$

7.25 Calcul de la diminution de la longueur d'une tige verticale. *Calculer la diminution de longueur d'une tige verticale homogène, de section constante, reposant sur le sol, sous l'effet de la compression due à son poids* (Fig. 7.10).

On connaît la formule fondamentale de la résistance des matériaux : soit une tige quelconque en métal, de section S, soumise à un effort F de traction ou de compression; l'effort par millimètre carré est

$$n = F/S\,.$$

Si l est la longueur et Δl la variation de longueur, l'allongement ou la compression unitaire, c'est-à-dire par unité de longueur, est

$$i = \Delta l/l\,.$$

La loi de Hooke dit que l'effort unitaire n est proportionnel à i (tant qu'on ne dépasse pas la limite d'élasticité) :

$$n = Ei\,,$$

où E est le coefficient d'élasticité.

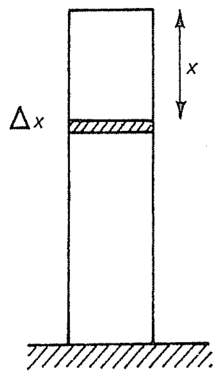


FIG. 7.10

Soit donc une tige (ou une colonne) verticale, de hauteur l, posée sur le sol. Un élément de hauteur Δx situé à la distance x du sommet est soumis à la force :

$$F = \delta S x\,,$$

où δ désigne la densité. Le raccourcissement *unitaire* est

$$i = n/E = \delta x/E\,.$$

La hauteur de l'élément devient donc :

$$\Delta x - \Delta x(\delta x/E) = \Delta x(1 - \delta x/E)\,.$$

La nouvelle hauteur l' de la tige s'obtient par intégration :

$$l' = \int_0^l (1 - \delta x/E)\,\mathrm{d}x = l - \frac{\delta l^2}{2E} = l - \frac{(\delta S l)\,l}{2ES} = l - \frac{Pl}{2ES}\,;$$

la diminution de hauteur est donc :

$$l - l' = Pl/2ES\,.$$

EXERCICES

Calculs d'intégrales

7.1 $\int_0^1 x^3(1-x)^3\,dx$.

7.2 $\int_3^8 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$.

7.3 $\int_1^8 (1+\sqrt[3]{x})\,dx$.

7.4 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 3x}{\sin x}\,dx$.

7.5 $\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) dx$.

7.6 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 4x}{\sin x}\,dx$.

7.7 $\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}$.

7.8 $\int_0^{\pi/4} \sin^3 2x\,dx$.

7.9 $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$.

7.10 $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

Applications des intégrales à des problèmes

7.11 Une rivière a la forme de la courbe $4y = x^3 - 4x^2 + 4x$ (x et y en km), et une route qui la coupe à l'origine forme l'axe des x. Quelle est la valeur du terrain compris entre la rivière et la route, à partir du point où la route coupe la rivière jusqu'au point où elle la coupe de nouveau, le terrain coûtant 10 000 F l'hectare ?

7.12 La vitesse angulaire d'un volant est $d\alpha/dt = Kt + \omega_0$. Si on suppose que $\omega_0 = 4\pi$ radians par seconde, et que $K = \pi/6$ rd/s, calculer le nombre de tours effectués pendant la deuxième minute.

7.13 Soit un ressort à boudin qui s'allonge de 1 mm pour un effort de traction de 30 N. Calculer le travail nécessaire pour allonger le ressort de 20 mm, sachant que la force de traction est proportionnelle au déplacement.

7.14 Un mobile tombe, en partant du repos, d'une distance h du centre de la Terre. La formule qui donne son accélération γ après une hauteur de chute x est

$$\gamma = gR^2/(h-x)^2$$

où g est l'accélération de la pesanteur et R le rayon de la Terre. Calculer la vitesse du mobile après une hauteur de chute x_1, la vitesse initiale étant nulle. Avec quelle vitesse touchera-t-il la surface de la Terre s'il part du repos à une distance $2R$?

7.15 La vanne d'une digue verticale a 10 m de largeur et 4 m de hauteur. Calculer la pression totale de l'eau sur cette vanne, quand le niveau de l'eau est à 4 m au-dessus du sommet de la vanne.

7.16 Un entonnoir conique est rempli d'eau. Si H est sa hauteur, R le rayon de base, et s la section du tuyau de sortie de l'entonnoir, calculer le temps t pour que l'entonnoir se vide.

CHAPITRE 8

FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

8.1 Préliminaires. Nous avons remarqué que le tableau des dérivées, lu à l'envers, fournit les primitives de certaines fonctions usuelles. Pour calculer les primitives d'autres fonctions, telles que $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, nous sommes amenés à introduire de nouvelles fonctions : fonctions logarithmes et exponentielles, fonctions puissances, fonctions hyperboliques. Ces diverses fonctions nous seront d'un usage constant jusqu'à la fin de cet ouvrage, au même titre que les fonctions circulaires, par exemple.

FONCTIONS LOGARITHMES

8.2 Définition des fonctions logarithmes. Les fonctions logarithmes apparaissent de manière naturelle dans la résolution du problème suivant :

Trouver les fonctions dérivables f définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ *telles que, pour tout couple* (x, y) *de nombres réels strictement positifs,*

$$f(xy) = f(x) + f(y) . \tag{1}$$

Nous imposons à une telle fonction f d'être injective. Alors f définit un isomorphisme de $]0, +\infty[$ sur son image par f.

La relation (1) signifie, par exemple que

$$f(6) = f(2) + f(3) ,$$

c'est-à-dire que la valeur de la fonction, lorsque la variable est 6, est égale à la somme des valeurs que prend la fonction pour $x = 2$ et $x = 3$.

La relation (1) permet de ramener le calcul d'un produit à celui d'une somme, et le calcul d'un quotient à celui d'une différence. (On emploie à cet effet une table des valeurs de f, ou une règle à calcul.)

Supposons d'abord qu'il existe une telle fonction f. En substituant 1 à x et y dans la relation (1), nous voyons que

$$f(1) = f(1) + f(1) ,$$

soit

$$f(1) = 0 .$$

Dérivons les deux membres de la relation (1) par rapport à y (c'est-à-dire en supposant provisoirement x constant) :

$$xf'(xy) = f'(y) ;$$

substituons 1 à y :

$$f'(x) = \frac{f'(1)}{x},$$

et posons

$$k = f'(1).$$

Puisque f est supposée injective, f' n'est pas nulle, et k est différent de 0.

Réciproquement, soit k un nombre réel non nul. Alors la fonction $x \mapsto k/x$, étant continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, est intégrable. Elle admet une primitive f et une seule s'annulant au point 1, à savoir la fonction

$$x \mapsto k \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Puisque k est différent de 0, la fonction f est strictement monotone, et donc injective.

Il reste à prouver que f satisfait à la relation (1). Calculons à cet effet $f(xy)$, en utilisant la relation de Chasles :

$$f(xy) = k \int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = k \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} + k \int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = f(x) + k \int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Dans la dernière intégrale, faisons le changement de variable $t = xu$:

$$k \int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = k \int_1^y \frac{x}{xu} \mathrm{d}u = k \int_1^y \frac{\mathrm{d}u}{u} = f(y),$$

ce qui montre que la fonction f convient.

Une telle fonction f est appelée logarithme. En particulier, lorsque $k = 1$, la fonction f est appelée logarithme népérien, et notée ln.

8.3 Propriétés des fonctions logarithmes. Soient f une fonction logarithme et x un nombre réel strictement positif. Alors

$$f(1/x) = -f(x). \tag{2}$$

En effet,

$$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = 0.$$

Plus généralement, soit n un entier rationnel. Alors

$$f(x^n) = nf(x). \tag{3}$$

(Cette formule est valable même si $n = 0$, à condition de convenir que $x^0 = 1$.)

La relation (3) se déduit immédiatement de la relation (1) par récurrence sur n, lorsque n est strictement positif. Si n est strictement négatif, posons $n' = -n$.

Alors

$$x^n = 1/x^{n'},$$

et

$$f(x^n) = f(1/x^{n'}) = -f(x^{n'}) = -n'f(x) = nf(x).$$

Soient enfin p un entier rationnel et q un entier naturel non nul. Alors

$$f(\sqrt[q]{x^p}) = \frac{p}{q} f(x). \tag{4}$$

Posons en effet $y = \sqrt[q]{x^p}$, soit $y^q = x^p$. D'après la formule (3),

$$f(y^q) = qf(y) = f(x^p) = pf(x).$$

La formule (4) s'en déduit aussitôt.

Remarque. Soient p' un entier rationnel et q' un entier naturel non nul tels que $p'q = pq'$, c'est-à-dire tels que

$$\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}.$$

Alors

$$f(\sqrt[q']{x^{p'}}) = \frac{p'}{q'} f(x) = \frac{p}{q} f(x) = f(\sqrt[q]{x^p}).$$

La fonction f étant injective,

$$\sqrt[q']{x^{p'}} = \sqrt[q]{x^p}.$$

La valeur commune des deux membres ne dépend donc que de x et de $r = p/q = p'/q'$; on la note x^r.

Les fonctions logarithmes nous ont donc permis d'étendre la définition des fonctions puissances au cas des exposants rationnels.

8.4 Logarithme népérien. La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée, étant la fonction $x \mapsto 1/x$, est à valeurs strictement positives. La fonction ln est donc strictement croissante. Pour pouvoir remplir le tableau de variation, il nous reste à chercher les limites de $\ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers 0.

Montrons d'abord que la limite de $\ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$ est $+\infty$. Puisque 2^n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, et que le logarithme népérien est croissant, il nous suffit de prouver que $\ln 2^n$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$; or,

$$\ln 2^n = n \ln 2,$$

et ln 2 est strictement positif. Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Comme $\ln x = -\ln 1/x$, il est clair que

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty .$$

Étudions enfin la limite de $(\ln x)/x$ lorsque x tend vers $+\infty$. Remarquons à cet effet que, pour tout nombre réel t supérieur à 1,

$$1/t \leqslant 1/\sqrt{t},$$

et donc que, pour tout nombre réel x supérieur à 1,

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \leqslant \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2(\sqrt{x}-1) < 2\sqrt{x}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Comme le second membre tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, il en est de même du premier membre, celui-ci étant positif.

Autrement dit, le graphe de la fonction logarithme népérien présente une branche parabolique dans la direction de Ox; d'autre part, il admet Oy pour asymptote.

Nous sommes maintenant en mesure de remplir le tableau de variation du logarithme népérien :

x	0		1		$+\infty$
$1/x$		$+$	1	$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$.

La dérivée seconde est la fonction $x \mapsto -1/x^2$; puisqu'elle ne s'annule jamais,

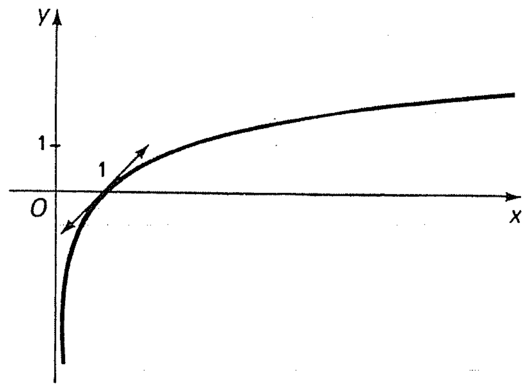


FIG. 8.1

le graphe de la fonction ln ne présente pas de point d'inflexion. La concavité est tournée vers les y négatifs (Fig. 8.1).

Pour $x = 1$, $y' = 1$; la tangente au point $(1, 0)$ est parallèle à la première bissectrice.

L'intervalle de **R** *image de l'intervalle* $]0, +\infty[$ *par la fonction logarithme népérien, n'étant ni majoré ni minoré, est* **R** *tout entier. Ainsi, le logarithme népérien est un isomorphisme du groupe multiplicatif* $]0, +\infty[$ *sur le groupe additif* $]-\infty, +\infty[$.

8.5 Logarithme de base *a*. Nous allons constater que l'étude de toute fonction logarithme se ramène à celle du logarithme népérien.

Le logarithme népérien étant une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$, pour tout nombre réel non nul k, il existe un nombre réel strictement positif a et un seul tel que

$$\ln a = 1/k .$$

De plus, a est différent de 1.

La fonction $\quad x \mapsto k \int_1^x \frac{dt}{t} = k \ln x$

s'écrit donc d'une manière et d'une seule sous la forme

$$x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}. \tag{1}$$

On l'appelle logarithme de base a, et on la note $\log_a$.

Le nombre a correspondant au cas du logarithme népérien (lorsque $k = 1$) s'appelle naturellement *base des logarithmes népériens*, ou parfois *nombre de Neper*, et se note e. La valeur approchée par défaut à 10^{-5} près de e est :

$$e \approx 2{,}718\,28 .$$

(Nous avons introduit au tome 1 le nombre e comme la limite de la suite de terme général $1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \cdots + \frac{1}{n\,!}$. Nous démontrerons au tome 3 qu'il s'agit bien du même nombre.)

La formule (1) permet de remplir aisément le tableau de variation de la fonction logarithme de base a. Il convient de distinguer deux cas suivants les valeurs de a.

	x	0		1		$+\infty$
$a > 1$	$\frac{1}{x \ln a}$		$+$		$+$	
	$\log_a x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

	x	0		1		$+\infty$
$0 < a < 1$	$\dfrac{1}{x \ln a}$		$-$		$-$	
	$\log_a x$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

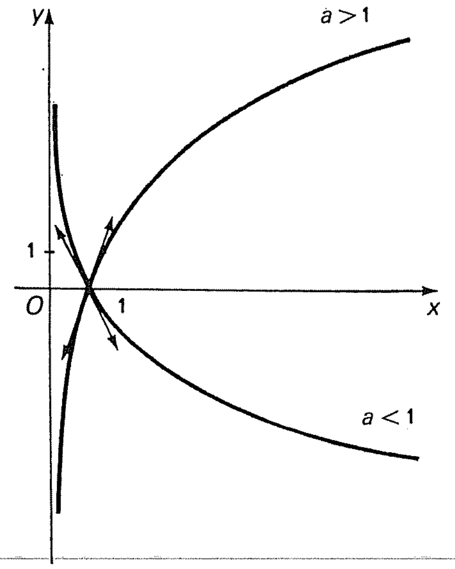


FIG. 8.2

Le logarithme de base a est aussi un isomorphisme du groupe multiplicatif $]0, +\infty[$ sur le groupe additif $]-\infty, +\infty[$.

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et différents de 1. La relation (1) montre que la fonction définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par la formule

$$x \mapsto \frac{\log_a x}{\log_b x}$$

est constante et égale à $\ln b/\ln a$. On peut encore exprimer ce rapport en remarquant que $\log_a a = 1$, ou que $\log_b b = 1$. D'où

$$\frac{\ln b}{\ln a} = \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Le logarithme de base 10 s'appelle *logarithme décimal*, et se note parfois lg. Le nombre $1/\ln 10$ se note M; approximativement,

$$M \approx 0{,}434\,29 \qquad \text{et} \qquad 1/M \approx 2{,}302\,59\,.$$

Le logarithme décimal d'un nombre réel strictement positif x est donc lié à son logarithme népérien par les formules

$$\log_{10} x = M \ln x,$$

$$\ln x = \frac{1}{M} \log_{10} x.$$

8.6 Dérivée logarithmique. Soit f une fonction dérivable et ne s'annulant pas. Le théorème sur la dérivée d'une fonction composée montre que $\ln|f|$ est dérivable, et que

$$(\ln|f|)' = f'/f.$$

Les formules donnant le logarithme d'un produit, d'un inverse, d'un quotient, se traduisent aussitôt par :

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \qquad \frac{\left(\frac{1}{g}\right)'}{\frac{1}{g}} = -\frac{g'}{g} \qquad \frac{\left(\frac{f}{g}\right)'}{\frac{f}{g}} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Nous voyons ainsi apparaître l'intérêt de la fonction f'/f, appelée *dérivée logarithmique* de f (ou dérivée du logarithme de f). Les relations précédentes se traduisent par :

La dérivée logarithmique du produit fg est la somme des dérivées logarithmiques de f et de g.

La dérivée logarithmique de $1/g$ est l'opposé de la dérivée logarithmique de g.

La dérivée logarithmique du quotient f/g est la différence des dérivées logarithmiques de f et de g.

Plus généralement, on montre que, pour tout couple (n, p) d'entiers rationnels,

$$\frac{\left(\frac{f^n}{g^p}\right)'}{\frac{f^n}{g^p}} = n\frac{f'}{f} - p\frac{g'}{g}.$$

Les dérivées logarithmiques constituent souvent un intermédiaire commode dans le calcul des dérivées, ainsi que le montre l'exemple ci-dessous :

EXEMPLE. *Calculer la dérivée de la fonction f définie par la formule*

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)^3}{(x^2+x+1)^2}.$$

Calculons d'abord la dérivée logarithmique de f :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - 2\,\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

En réduisant au même dénominateur, nous obtenons

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{6x}{(x-1)\,(x+1)\,(x^2+x+1)}.$$

En multipliant les deux membres par $f(x)$, nous trouvons finalement que

$$f'(x) = \frac{6x(x+1)^2}{(x^2+x+1)^3}.$$

Nous rencontrerons des dérivées logarithmiques dans l'étude des équations différentielles du premier ordre (voir tome 4). Nous utiliserons alors le théorème suivant :

Soient f et g deux fonctions dérivables ne s'annulant pas. Si les dérivées logarithmiques de f et de g sont égales, alors f et g sont proportionnelles.

(Autrement dit, il existe un nombre réel non nul k tel que $f = kg$.)

En effet, la relation

$$f'/f = g'/g$$

montre que $f'g - fg' = 0$, et donc que

$$(f/g)' = 0\,.$$

Il découle alors de la formule des accroissements finis que la fonction f/g est constante, ce qu'il fallait démontrer.

8.7 Différentielle logarithmique. Lorsqu'on emploie la notation différentielle, la dérivée logarithmique fait place à la *différentielle logarithmique*, c'est-à-dire à la différentielle du logarithme :

$$\mathrm{d}(\ln f) = \frac{\mathrm{d}f}{f}.$$

Par exemple, si

$$y = f(x) = (\operatorname{tg} x)^x\,,$$

alors

$$\ln y = x \ln \operatorname{tg} x$$

et

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sin 2x}.$$

Le théorème précédent s'énonce encore :

Soient f et g deux fonctions dérivables ne s'annulant pas. Si f et g ont la même différentielle logarithmique,

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \frac{\mathrm{d}g}{g},$$

alors les fonctions f et g sont proportionnelles.

8.8 Fonction exponentielle. Nous avons vu que le logarithme népérien est un isomorphisme du groupe multiplicatif $]0, +\infty[$ sur le groupe additif $]-\infty, +\infty[$. La fonction réciproque s'appelle fonction exponentielle, et se note

$$x \mapsto \exp x .$$

Cette fonction est un isomorphisme du groupe additif $]-\infty, +\infty[$ sur le groupe multiplicatif $]0, +\infty[$.

Autrement dit,

— pour tout nombre réel strictement positif x,

$$\exp(\ln x) = x;$$

— pour tout nombre réel u,

$$\ln(\exp u) = u;$$

— pour tout couple (u, v) de nombres réels,

$$\exp(u+v) = (\exp u).(\exp v).$$

Le théorème sur la dérivée d'une fonction réciproque montre que la fonction exponentielle est dérivable, et que

$$(\exp x)' = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{\exp x}\right)} = \exp x .$$

Le tableau de variation est

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(\exp x)'$		$+$	1	$+$	
$\exp x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Notons que, la dérivée au point d'abscisse 0 étant égale à 1,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1 .$$

Le graphe de l'exponentielle se déduit de celui du logarithme népérien par une symétrie relativement à la droite d'équation $y = x$. Il admet l'axe Ox pour asymptote.

Étudions la limite de $(\exp x)/x$ lorsque x tend vers $+\infty$. Posons à cet effet $y = \exp x$. Alors

$$\frac{\exp x}{x} = \frac{y}{\ln y}.$$

ce qui montre que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty.$$

Le graphe de l'exponentielle présente donc une branche parabolique dans la direction Oy (Fig. 8.3).

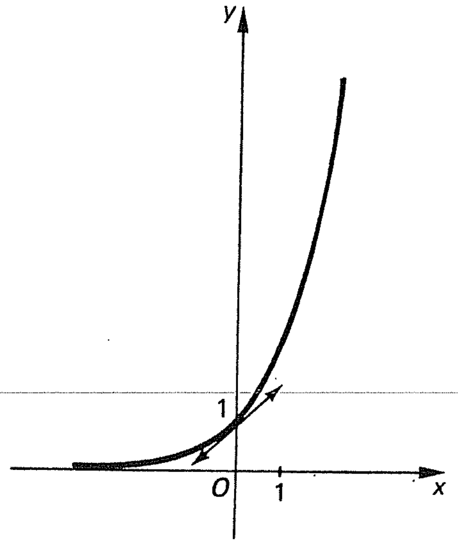


Fig. 8.3

Les propriétés des fonctions logarithmes montrent que, pour tout nombre réel u et pour tout entier rationnel n,

$$\exp nu = (\exp u)^n.$$

Plus généralement, pour tout nombre réel u et pour tout nombre rationnel r,

$$\exp ru = (\exp u)^r.$$

Prenons u égal à 1; alors

$$\exp n = (\exp 1)^n = e^n,$$

et

$$\exp r = (\exp 1)^r = e^r.$$

La restriction de la fonction exponentielle à l'ensemble **Q** des nombres rationnels n'est donc autre que la fonction

$$r \mapsto e^r .$$

Ceci nous conduit à noter

$$x \mapsto e^x$$

la fonction exponentielle.

8.9 Fonction exponentielle de base *a*. Nous pouvons étudier de même la fonction réciproque de la fonction logarithme de base a; cette fonction réciproque s'appelle fonction exponentielle de base a, et se note

$$x \mapsto \exp_a x .$$

(On omet donc l'indice a lorsque $a = e$.)

Cette fonction définit un isomorphisme du groupe additif $]-\infty, +\infty[$ sur le groupe multiplicatif $]0, +\infty[$.

Autrement dit,

— pour tout nombre réel strictement positif x,

$$\exp_a (\log_a x) = x ;$$

— pour tout nombre réel u,

$$\log_a (\exp_a u) = u ;$$

— pour tout couple (u, v) de nombres réels,

$$\exp_a (u+v) = (\exp_a u).(\exp_a v) .$$

L'exponentielle de base a est une fonction dérivable, et

$$(\exp_a x)' = (\ln a).\exp_a x .$$

Nous devons distinguer deux cas pour le tableau de variation :

$a > 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(\exp_a x)'$		$+$		$+$	
$\exp_a x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$0 < a < 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(\exp_a x)'$		$-$		$-$	
$\exp_a x$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

Comme dans le cas de la base e, on constate que, pour tout nombre rationnel r,

$$\exp_a r = a^r .$$

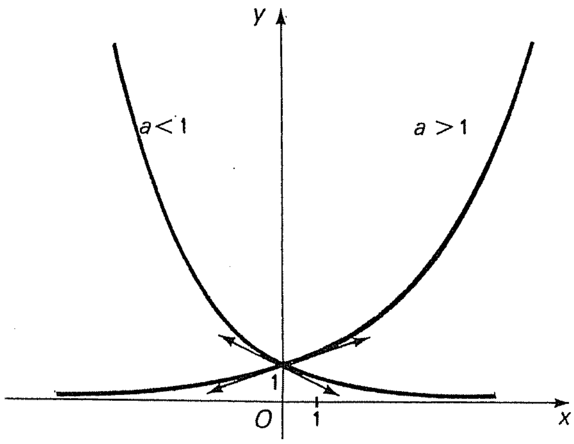


FIG. 8.4

On note donc

$$x \mapsto a^x$$

la fonction exponentielle de base a (Fig. 8.4).

La relation

$$y = a^x$$

équivaut à

$$\ln y = x \ln a ,$$

soit à

$$y = e^{x \ln a} . \qquad (1)$$

Nous retrouvons ainsi la dérivée de l'exponentielle de base a :

$$(\exp_a x)' = (a^x)' = (\ln a) . e^{x \ln a} = (\ln a) . \exp_a x = (\ln a) . a^x .$$

La relation (1) ayant un sens même si $a = 1$, on est amené à poser, pour tout nombre réel x.

$$1^x = 1 .$$

Dans ces conditions, pour tout couple (a, b) de nombres réels strictement positifs et pour tout nombre réel x,

$$(ab)^x = a^x b^x .$$

En effet,

$$e^{x \ln (ab)} = e^{x(\ln a + \ln b)} .$$

Les fonctions exponentielles décroissantes se rencontrent dans un grand nombre d'applications pratiques, par exemple :

1° la température d'un corps qui se refroidit est donnée par la formule approchée

$$\theta = \theta_0 \mathrm{e}^{-bt}$$

où t est le temps, et où b est une constante qui dépend de la nature, de la forme et de la... couleur du corps.

2° dans la décharge d'un condensateur électrique dans une résistance, l'intensité du courant en fonction du temps est

$$i = I\,\mathrm{e}^{-t/CR}\,.$$

3° dans l'établissement du courant dans une bobine d'induction,

$$i = I(1 - \mathrm{e}^{-t/RL})\,.$$

4° dans les vibrations des ressorts, les oscillations d'un pendule, un réservoir d'eau qui se vide par le bas, etc.

5° dans la décharge oscillante d'un condensateur dans une bobine, le courant est donné par

$$i = I\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \omega t\,.$$

8.10 Exercices sur les exponentielles

1. *Soit* $y = \mathrm{e}^{5x}$; *on demande de calculer* x *en fonction de* y.

Prenons les logarithmes népériens des deux membres :

$$\ln y = \ln(\mathrm{e}^{5x}) = 5x \ln \mathrm{e}$$

et comme $\ln \mathrm{e} = 1$,

$$\ln y = 5x$$

d'où

$$x = \frac{1}{5} \ln y\,.$$

2. *Soit* $\log_{10} y = 3$; *calculer* y.

Pour avoir y, on prend la base, ici 10, que l'on élève à la puissance indiquée à droite du signe *égal*, ici 3 :

$$y = 10^3 = 1000\,;$$

en effet, le logarithme décimal de 1000 est bien 3.

3. *Soit* $\ln y = 3$, *calculer* y.

Pour avoir y, on prend la base, ici e, que l'on élève à la puissance indiquée à droite, ici 3 :

$$y = \mathrm{e}^3\,;$$

en effet, le logarithme népérien de e^3 est bien 3 :

$$\ln y = \ln \mathrm{e}^3 = 3 \ln \mathrm{e} = 3 \times 1 = 3\,.$$

4. *Soit l'expression :*

$$i = I\,e^{-t/CR} \qquad \textit{avec} \qquad \left| \begin{array}{l} I = 100 \text{ milliampères} \\ i = 10 \text{ milliampères} \\ C = 1 \text{ microfarad} \\ R = 1 \text{ mégohm.} \end{array} \right.$$

On demande de calculer t.

On a

$$\frac{i}{I} = e^{-t/CR} = \frac{1}{e^{t/CR}}$$

ou bien

$$I/i = e^{t/CR}.$$

Prenons les logarithmes népériens des deux membres :

$$\ln \frac{I}{i} = \ln e^{t/CR} = \frac{t}{CR} \ln e = \frac{t}{CR}.$$

d'où

$$t = CR \ln(I/i) = 10^{-6}\, 10^{6} \ln(0{,}100/0{,}010),$$

$$t = \ln 10 = 2{,}3 \lg 10 = 2{,}3\,\text{s}.$$

8.11 Exercices de dérivation des fonctions logarithmes et exponentielles.

1. *Calculer les deux premières dérivées de* $y = e^x \sin x$.

Écrivons

$$y = uv \qquad \text{avec} \qquad u = e^x \quad \text{et} \quad v = \sin x$$

$$y' = uv' + vu' \qquad \text{avec} \qquad u' = e^x \quad \text{et} \quad v' = \cos x$$

Donc

$$y' = e^x \cos x + \sin x\, e^x = e^x(\sin x + \cos x).$$

Pour calculer y'', posons $u = e^x$ et $v = \sin x + \cos x$.

Donc

$$v' = \cos x - \sin x$$

et

$$y'' = e^x(\cos x - \sin x) + (\sin x + \cos x)e^x,$$

$$y'' = 2\,e^x \cos x.$$

2. *Calculer la dérivée de* $y = \ln x \operatorname{Arc\,tg} x$.

En posant

$$u = \ln x \qquad v = \operatorname{Arc\,tg} x$$

$$u' = \frac{1}{x} \qquad v' = \frac{1}{1+x^2}$$

on obtient :

$$y = \ln x \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x} \operatorname{Arc\,tg} x .$$

3. *Calculer la dérivée de* $y = e^x/\ln x$.

$$y = \frac{u}{v} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u = e^x & u' = e^x \\ v = \ln x & v' = 1/x . \end{cases}$$

D'où

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{\ln x\, e^x - e^x . 1/x}{(\ln x)^2} = e^x . \frac{\ln x - 1/x}{(\ln x)^2}$$

$$y' = e^x \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x(\ln x)^2} \right].$$

4. *Calculer la dérivée de* $y = \ln \sqrt{1-4x^2}$.
Écrivons

$$y = \ln u \qquad \text{avec} \qquad u = \sqrt{1-4x^2}$$

$$y' = \frac{u'}{u} \qquad \text{avec} \qquad u' = \frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}} = -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} .$$

Donc

$$y' = -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} . \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = -\frac{4x}{1-4x^2} .$$

5. *Calculer la dérivée de* $y = \ln (x + \sqrt{x^2+a})$.
Écrivons

$$y = \ln u, \qquad \text{avec} \qquad u = x + \sqrt{x^2+a} ;$$

$$u' = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}} = \frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}} ;$$

$$y' = \frac{u'}{u} = \frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}} . \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} .$$

FONCTIONS PUISSANCES

8.12 Fonctions puissances. Les fonctions logarithmes et exponentielles vont nous permettre de généraliser la définition des fonctions puissances au cas où l'exposant n'est pas rationnel. Soient en effet x un nombre réel strictement positif. Le symbole x^α représente la valeur de l'exponentielle de base x au point α si $x \neq 1$, et le nombre 1 si $x = 1$.

La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par la formule

$$f(x) = x^\alpha$$

s'appelle *fonction puissance* α.

La fonction f, composée des fonctions $x \mapsto \alpha \ln x$ et $y \mapsto e^y$, est continue et monotone. Plus précisément,

— si $\alpha > 0$, f est strictement croissante;
— si $\alpha = 0$, f est constante;
— si $\alpha < 0$, f est strictement décroissante.

Les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0, et lorsque x tend vers $+\infty$, se déduisent aussitôt des propriétés des fonctions logarithme et exponentielle.

En particulier, si $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0.$$

En posant alors

$$0^\alpha = 0,$$

on prolonge la fonction puissance en une fonction continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

D'où les tableaux de variation :

$\alpha > 0$

x	0		$+\infty$
x^α	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\alpha < 0$

x	0		$+\infty$
x^α	$+\infty$	$\searrow$	0

D'après les propriétés des fonctions composées de fonctions dérivables, f est dérivable, et

$$(x^\alpha)' = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Cas où $\alpha > 0$. La limite de $x^\alpha/x = x^{\alpha-1}$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ si $\alpha > 1$, et à 0 si $0 < \alpha < 1$. Le graphe de f présente donc une branche parabolique dans la direction de Oy ou de Ox, suivant la position de α par rapport à 1. (Le cas où $\alpha = 1$ est celui de la fonction $x \mapsto x$, dont le graphe est une demi-droite.)

Pour étudier la dérivée à l'origine, nous devons encore considérer le rapport $x^\alpha/x = x^{\alpha-1}$. Si $\alpha > 1$, la limite est 0; le graphe a une demi-tangente horizontale. Si $0 < \alpha < 1$, la limite est $+\infty$; le graphe a une demi-tangente verticale.

Cas où $\alpha < 0$. Le graphe admet les axes de coordonnées pour asymptotes.

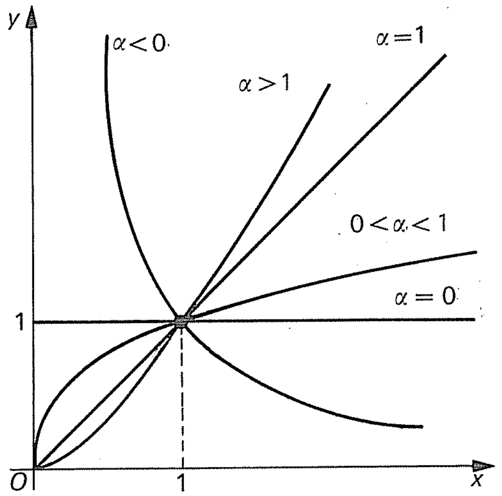


FIG. 8.5

Les graphes passent tous par le point (1, 1). Le cas où $\alpha > 1$ comprend celui des puissances m-ièmes; le cas où $0 < \alpha < 1$ comprend celui des fonctions racines m-ièmes (voir chapitre 1).

Enfin, pour tout couple (α, β) de nombres réels et pour tout nombre réel strictement positif x,

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta .$$

En effet,

$$e^{(\alpha+\beta)\ln x} = e^{\alpha \ln x} e^{\beta \ln x} .$$

8.13 Formes indéterminées exponentielles. On appelle *forme indéterminée* un problème sur les limites où les théorèmes généraux ne s'appliquent pas. Ainsi, le produit d'une fonction tendant vers 0 et d'une fonction tendant vers $+\infty$ peut avoir une limite finie, une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$), ou même ne pas avoir de limite. Il convient donc de faire une étude directe dans chaque cas. On utilise surtout à cet effet les développements limités (voir tome 3). Nous allons examiner tout de suite certaines formes indéterminées faisant intervenir les fonctions logarithmes, exponentielles et puissances.

Nous avons vu que $(\log_a x)/x$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Remplaçons

x par x^α, $\alpha > 0$; nous voyons ainsi que

$$\frac{\log_a x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{\log_a(x^\alpha)}{x^\alpha}$$

tend aussi vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Remplaçons maintenant x^α par $1/x^\alpha$; nous voyons alors que

$$x^\alpha \log_a x = \frac{1}{\alpha} x^\alpha \log_a(x^\alpha) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\log_a(1/x^\alpha)}{1/x^\alpha}$$

tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Remplaçons x dans $(\log_a x)/x$ par $a^{x/\alpha}$, si $a > 1$; il apparaît que

$$\frac{x^\alpha}{a^x} = \left(\frac{x}{a^{x/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\alpha\,\frac{\log_a a^{x/\alpha}}{a^{x/\alpha}}\right)^\alpha$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Remplaçons de même x par $a^{-x/\alpha}$ si $a < 1$; il apparaît cette fois que

$$a^x x^\alpha = (a^{x/\alpha} x)^\alpha = \left(-\alpha\,\frac{\log_a a^{-x/\alpha}}{a^{-x/\alpha}}\right)^\alpha$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

En résumé :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \log_a x = 0$$

si $a > 1$, $\qquad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$

si $a < 1$, $\qquad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} a^x x^\alpha = 0.$

On rencontre très souvent en pratique des fonctions de la forme

$$x \mapsto u(x)^{v(x)},$$

où u est une fonction positive.

Lorsque, pour x tendant vers une valeur x_0, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$,

- $u(x)$ tend vers 1 et $v(x)$ tend vers $+\infty$,
- $u(x)$ tend vers $+\infty$ et $v(x)$ tend vers 0,
- $u(x)$ tend vers 0 et $v(x)$ tend vers 0,

on ne peut appliquer les théorèmes généraux sur les limites.

Nous allons traiter quelques exemples où les indéterminations à lever se ramènent immédiatement aux formes

$$\frac{e^x - 1}{x} \quad \text{pour } x \text{ tendant vers } 0,$$

$$\frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad \frac{e^x}{x} \quad \text{pour } x \text{ tendant vers } +\infty .$$

8.14 Exemples.

1. *Calculer les limites à gauche et à droite au point* 0 *de*

$$y = (\operatorname{tg} x)\, e^{\cot x} .$$

Posons $u = \cot x$; alors

$$y = e^u/u .$$

Si x tend vers 0 par valeurs supérieures, u tend vers $+\infty$, et y tend vers $+\infty$. Si x tend vers 0 par valeurs inférieures, u tend vers $-\infty$, et y tend vers 0.

2. *Calculer la limite pour x tendant vers $\pi/4$ de*

$$y = \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e}{1 - \cot x}.$$

Posons $t = \operatorname{tg} x$; alors

$$y = t\,\frac{e^t - e}{t - 1} = e^t\,\frac{e^{t-1} - 1}{t - 1} .$$

Lorsque x tend vers $\pi/4$, $t - 1$ tend vers 0, et y tend vers e.

3. *Calculer la limite pour x tendant vers $\pi/2$ de*

$$y = \frac{\ln |\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x - 1}.$$

Écrivons y sous la forme

$$y = \frac{\ln |\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{1 - 1/\operatorname{tg} x}.$$

Puisque $|\text{tg}\, x|$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $\pi/2$, $1/\text{tg}\, x$ tend vers 0, et la deuxième fraction tend vers 1. Ainsi, y a même limite que $(\ln |\text{tg}\, x|)/\text{tg}\, x$. Il suffit de poser $u = |\text{tg}\, x|$ pour se ramener à la limite de $(\ln u)/u$ lorsque u tend vers $+\infty$. La limite de y est donc égale à 0.

4. *Soit a un nombre réel. Calculer la limite pour x tendant vers $+\infty$ de*

$$y = (1 + a/x)^x .$$

Par définition,

$$y = \exp [x \ln (1 + a/x)] .$$

Il suffit donc d'étudier la limite de

$$z = x \ln (1 + a/x) .$$

Posons $t = 1/x$; alors

$$z = \frac{\ln(1+at)}{t}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, t tend vers 0, et z a pour limite la dérivée au point 0 de la fonction $t \mapsto \ln (1 + at)$. D'après le théorème sur la dérivée d'une fonction composée, cette dérivée est égale à a. Ainsi, $\ln y$ tend vers a, et

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + a/x)^x = e^a,$$

Il en découle aussitôt que la suite de terme général

$$u_n = (1 + a/n)^n,$$

où n est un entier naturel non nul, est convergente et que sa limite est e^a.

Plus particulièrement encore,

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + 1/n)^n = e .$$

8.15 Quelques remarques supplémentaires sur le nombre e. Considérons un capital de 1 franc placé à un taux d'intérêt annuel de 10 %, et proposons-nous de chercher la valeur de la somme *capital + intérêts* au bout de 10 ans.

Premier cas : intérêt simple. Chaque année, l'intérêt est de 1/10 F, et en dix ans, le prêteur a reçu : $1/10 \times 10 = 1$ F. *Le capital a doublé.*

La figure 8.6 représente graphiquement ces faits pour un capital C; chaque échelon correspond à l'intérêt annuel, et les échelons sont tous égaux.

Deuxième cas : intérêt composé. Dans ce cas (réalisé par exemple dans les Caisses d'épargne), l'intérêt annuel est ajouté *à la fin de chaque année* au capital qui, par suite, s'accroît d'année en année.

Pour un capital de 1 F, l'intérêt annuel est de 1/10 F, et la somme capital + intérêt est de $1 + 1/10$ F. Autrement dit, à la fin de chaque année, le capital est multiplié par $1 + 1/10$.

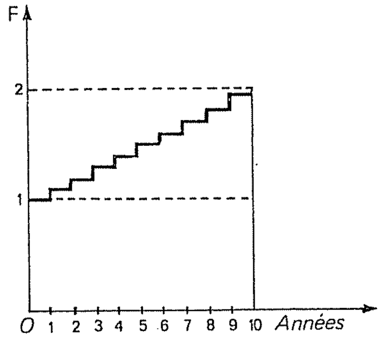


FIG. 8.6

A la fin de la première année, on possède $1+1/10$ F.
A la fin de la deuxième année, on possède :

$$(1+1/10)(1+1/10)=(1+1/10)^2 \text{ F}.$$

. . . .

A la fin de la dixième année, on possède :

$$(1+1/10)^9(1+1/10)=(1+1/10)^{10}\text{F} = 2{,}593\ 742 \text{ F}.$$

On remarquera que 10 est le nombre de parties égales en lesquelles le temps de 10 ans a été divisé.

Dans la figure 8.7, les échelons sont inégaux et vont en croissant, chacun d'entre eux étant les 11/10 de celui qui le précède.

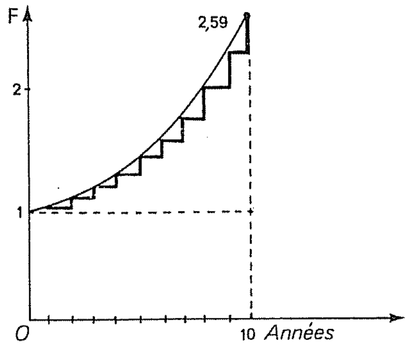


FIG. 8.7

Troisième cas. On peut concevoir un mode de calcul de l'intérêt composé où l'addition de l'intérêt au capital se ferait, non tous les ans, mais *tous les* 6 *mois.*

Pour un capital de 1 F, l'intérêt en 6 mois est de

$$\frac{1}{10}\text{F} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}\text{F},$$

et la somme capital+intérêt est de $1+1/20$ F. Autrement dit, cette nouvelle conception de l'intérêt composé revient à multiplier le capital, au bout de 6 mois, par $1+1/20$. Le capital devient donc :

au bout de	6 mois	$1+1/20$ F
	1 an	$(1+1/20)(1+1/20) = (1+1/20)^2$ F
	18 mois	$(1+1/20)^2(1+1/20) = (1+1/20)^3$ F
		....
	10 ans	$(1+1/20)^{20} = 2{,}654$ F.

On voit que cette façon de capitaliser rapporterait un plus grand intérêt, pour le même capital.

Généralisons cette conception de l'intérêt composé. Si au lieu de diviser nos 10 années en 20 parties égales, on les divise en 100, 1000, 10 000... parties égales, on obtient un capital final (en francs) respectivement égal à :

$$(1+1/100)^{100} = 2{,}704\,, \qquad (1+1/1000)^{1000} = 2{,}7117\,,$$

$$(1+1/10\,000)^{10\,000} = 2{,}7182\,.$$

L'expression $(1+1/n)^n$ croît donc avec la valeur de n. *Si n devient infini, nous avons vu que l'on trouve une valeur finie égale à*

$$\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,828...$$

8.16 Exemples de fonctions faisant intervenir les fonctions puissances. L'étude de la variation de fonctions faisant intervenir les fonctions puissances présente des difficultés nouvelles par l'apparition de formes indéterminées exponentielles. Nous allons traiter deux exemples.

1. *Étudier la variation de la fonction f définie par la relation*

$$y = f(x) = x^x\,.$$

Cette fonction est définie pour tout nombre réel strictement positif x. Puisque

$$\ln y = x \ln x\,, \qquad (1)$$

nous voyons que $\ln y$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0; donc y tend vers 1. Nous pouvons donc prolonger f par continuité en posant

$$f(0) = 1\,.$$

La relation (1) montre que $\ln y$ tend vers $+\infty$ avec x; donc y tend vers $+\infty$. De plus, $y/x = x^{x-1}$.
En prenant les logarithmes népériens des deux membres, nous voyons que y/x tend aussi vers $+\infty$. Le graphe de f admet donc une branche parabolique dans la direction de Oy.

Calculons la dérivée de f en dérivant d'abord les deux membres de la relation (1) :

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1\,;$$

d'où $$y' = x^x(\ln x + 1)\,. \tag{2}$$

La dérivée s'annule lorsque $\ln x = -1$, c'est-à-dire lorsque $x = 1/\mathrm{e} \approx 0{,}37$.

Remarquons que la formule (2) n'est valable que si x est strictement positif. Pour savoir si f est dérivable à l'origine, revenons à la définition même de la dérivée, en cherchant la limite de $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^x-1}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x}$

lorsque x tend vers 0. Or, $\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}\,.\ln x\,.$

Le premier facteur du second membre tend vers 1, et le second vers $-\infty$. Le produit tend donc vers $-\infty$. Ainsi, la fonction f n'est pas dérivable à l'origine; cedendant, le graphe admet une tangente verticale au point (0, 1).

Nous pouvons dresser le tableau de variation :

x	0		$1/\mathrm{e}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

D'où le graphe (Fig. 8.8).

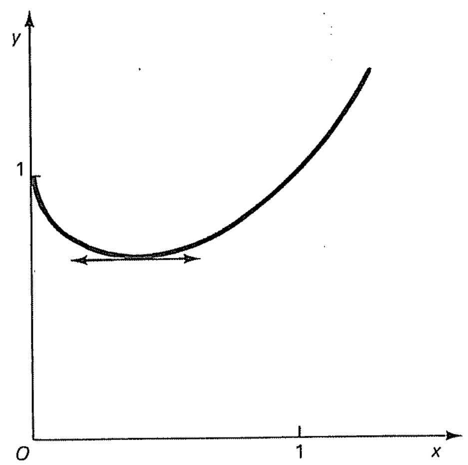


FIG. 8.8

2. *Étudier la variation de la fonction f définie par la relation*

$$y = f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x.$$

La fonction f est définie si et seulement si

$$\frac{x}{x-1} > 0,$$

c'est-à-dire si et seulement si x et $x-1$ sont non nuls et de même signe. L'ensemble de définition est donc $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Pour étudier les limites de y aux bornes des intervalles de définition, passons par l'intermédiaire de son logarithme népérien :

$$\ln y = x \ln \frac{x}{x-1} = x \ln |x| - x \ln |x-1|. \tag{2}$$

Lorsque x tend vers 0, il en est de même de $x \ln |x-1|$, et aussi de $x \ln |x|$; donc $\ln y$ tend vers 0, et y tend vers 1. Nous prolongeons f par continuité en posant $f(0) = 1$.

Lorsque x tend vers 1, $x \ln |x|$ tend vers 0, tandis que $\ln |x-1|$ tend vers $-\infty$; donc $\ln y$ tend vers $+\infty$, et y tend vers $+\infty$.

Pour examiner le comportement de y lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, remarquons que

$$y = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x} = \frac{1}{(1-1/x)^x}.$$

La limite du dénominateur lorsque x tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, est $e^{-1} = 1/e$; donc y tend vers e.

Calculons y' en dérivant les deux membres de la relation (2) :

$$z = \frac{y'}{y} = \ln \frac{x}{x-1} + x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right) = \ln \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1}.$$

Il n'est pas possible de déterminer directement le signe de y'. Étudions au préalable la variation de z, en dérivant cette nouvelle fonction :

$$z' = -\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)^2}.$$

Donc z' est positif si $x > 1$, négatif si $x < 0$; d'où le tableau de variation auxiliaire :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
z'		$-$		//////		$+$	
z		$\searrow$		//////		$\nearrow$	

Lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, z tend vers 0, ce qui montre que z est toujours négatif. Le signe de y' étant celui de z, nous sommes en mesure de dresser le tableau de variation de y :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		//////		$-$	
y	e	$\searrow$	1	//////	$+\infty$	$\searrow$	e

Examinons enfin si f est dérivable à l'origine, en revenant à la définition de la dérivée :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\exp\left(x \ln \dfrac{x}{x-1}\right) - 1}{x} = \frac{e^u - 1}{u} \cdot \frac{u}{x},$$

où $u = x \ln \dfrac{x}{x-1}$ tend vers 0. Alors $\dfrac{e^u-1}{u}$ tend vers 1, et $\dfrac{u}{x} = \ln \dfrac{x}{x-1}$ tend vers $-\infty$. La fonction f n'est donc pas dérivable à l'origine; cependant, le graphe de f (Fig. 8.9) admet une tangente verticale au point de coordonnées (0, 1).

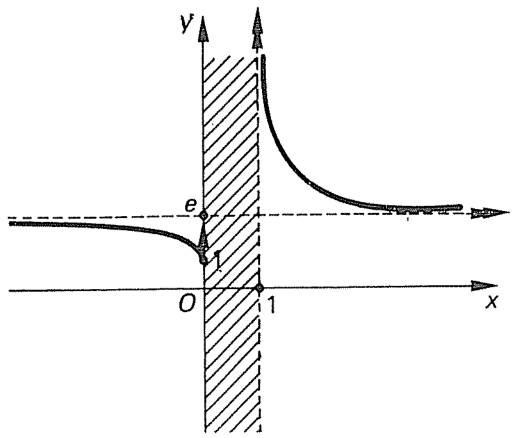


FIG. 8.9

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

8.17 Définitions des fonctions hyperboliques. Nous allons étudier certaines fonctions dont les propriétés sont très proches de celles des fonctions circulaires.

On appelle *cosinus hyperbolique* de x, et l'on note ch x, la quantité

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

On appelle *sinus hyperbolique* de x, et l'on note sh x, la quantité

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

On écrit :

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}}.$$

On appelle tangente hyperbolique de x (noté th x) le quotient

$$\boxed{\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}}.$$

(Les noms employés proviennent de la ressemblance avec les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

$$\operatorname{tg} x = j\,\frac{e^{-jx}-e^{jx}}{e^{-jx}+e^{jx}} = j\,\frac{e^{-2jx}-1}{e^{-2jx}+1} = j\,\frac{1-e^{2jx}}{1+e^{2jx}},$$

que nous avons établies au tome 1.)

Il résulte immédiatement des définitions que les fonctions ch et sh vérifient les relations

$$\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x = e^x \tag{1}$$

$$\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x = e^{-x}. \tag{2}$$

En multipliant les relations (1) et (2) membre à membre, nous obtenons

$$(\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x) = e^x e^{-x} = 1$$

ou

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x = 1}.$$

8.18 Dérivées des fonctions hyperboliques. Les fonctions ch et sh, étant des combinaisons linéaires de fonctions exponentielles, sont dérivables. Plus précisément :

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} ;$$

donc

$$\boxed{(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x}.$$

De même :

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

donc

$$\boxed{(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x}.$$

Enfin, la fonction th est dérivable, car c'est le quotient de deux fonctions dérivables. La formule donnant la dérivée d'un quotient montre que

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} ;$$

soit :

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

ou

$$(\operatorname{th} x)' = 1 - \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x ;$$

ainsi

$$\boxed{(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x}.$$

8.19 Variation des fonctions hyperboliques

1. *Fonction cosinus hyperbolique :*

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Comme $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x)$, la fonction est paire et le graphe de ch x admet Oy pour axe de symétrie.

Lorsque x tend vers $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$ et e^{-x} tend vers 0. Il en découle que ch x tend vers $+\infty$. De plus, le rapport e^x/x tend vers $+\infty$; le graphe (Fig. 8.10) admet donc une branche parabolique dans la direction de Oy.

La dérivée

$$y' = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

prend la valeur 0 pour

$$e^x = e^{-x} \quad \text{ou} \quad e^{2x} = 1 \quad \text{soit} \quad x = 0\,.$$

Elle est positive pour $x > 0$, car $e^x > e^{-x}$,

et négative pour $x < 0$ car $e^x - e^{-x} < 0$.

D'où le tableau de variation :

x	0		$+\infty$
y'	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. *Fonction sinus hyperbolique :*

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Comme $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, la fonction est impaire et le graphe de sh x admet le point O pour centre de symétrie.

Lorsque x tend vers $+\infty$, sh x tend vers $+\infty$ (et la différence entre ch x et sh x tend vers 0). Le graphe admet une branche parabolique dans la direction de Oy.

La dérivée

$$y' = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

est toujours positive. La fonction sh est croissante de $-\infty$ à $+\infty$.

x	0		$+\infty$
y'	1	$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

La dérivée seconde de sh x est encore égale à sh x; elle s'annule donc en même temps que y. On voit ainsi que l'origine est un point d'inflexion, la tangente en ce point étant la première bissectrice (Fig. 8.10).

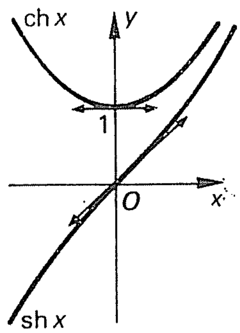


FIG. 8.10

3. *Fonction tangente hyperbolique :*

$$y = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

Comme $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$, la fonction est impaire et le graphe de $\operatorname{th} x$ admet le point O pour centre de symétrie.

Puisque e^{-2x} tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, $\operatorname{th} x$ tend vers 1. Le graphe admet donc pour asymptotes les droites d'équations $y = 1$ et $y = -1$.

La dérivée

$$y' = 1/\operatorname{ch}^2 x$$

est positive, donc la fonction th croît de -1 à 1.

x	0		$+\infty$
y'	1	+	
y	0	$\nearrow$	1

La dérivée seconde

$$y'' = -\frac{2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}$$

s'annule pour $x = 0$. L'origine est un point d'inflexion de la courbe. La tangente en ce point est la première bissectrice (Fig. 8.11).

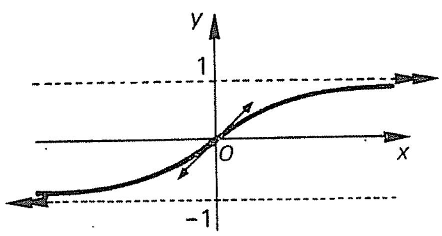


FIG. 8.11

La fonction th ne s'annule qu'à l'origine. La fonction $x \mapsto 1/\text{th}\ x$, définie sur $\mathbf{R}^*$, s'appelle *cotangente hyperbolique* et se note coth.

Remarque. On démontre que le graphe de la fonction cosinus hyperbolique est la courbe d'équilibre d'un fil pesant; c'est pourquoi cette courbe est appelée *chaînette.*

8.20 Trigonométrie hyperbolique. On peut établir des formules d'addition, de transformation de produit en somme, de somme en produit, etc. pour les fonctions hyperboliques; ces formules présentent une analogie frappante avec les formules de trigonométrie circulaire (voir tome 1).

Par exemple, soient a et b deux nombres réels. Alors

$$\begin{aligned}\text{ch}(a+b) &= \frac{e^{a+b}-e^{-(a+b)}}{2} = \frac{e^a\,e^b+e^{-a}\,e^{-b}}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(\text{ch}\ a+\text{sh}\ a)(\text{ch}\ b+\text{sh}\ b)+(\text{ch}\ a-\text{sh}\ a)(\text{ch}\ b-\text{sh}\ b)\right];\end{aligned}$$

il reste en simplifiant

$$\boxed{\text{ch}(a+b) = \text{ch}\,a\ \text{ch}\,b+\text{sh}\,a\ \text{sh}\,b}\,.$$

On trouverait par le même procédé

$$\boxed{\text{sh}(a+b) = \text{sh}\,a\ \text{ch}\,b+\text{ch}\,a\ \text{sh}\,b}\,.$$

Si maintenant l'on fait $a=b=x$, on a

$$\boxed{\begin{aligned}\text{ch}\ 2x &= \text{ch}^2 x+\text{sh}^2 x \\ \text{sh}\ 2x &= 2\ \text{sh}\,x\ \text{ch}\,x\end{aligned}}$$

et

$$\text{th}\ 2x = \frac{2\ \text{sh}\,x\ \text{ch}\,x}{\text{ch}^2 x+\text{sh}^2 x} = \frac{2\ \text{th}\ x}{1+\text{th}^2 x}.$$

On en déduit, par un procédé analogue à celui employé dans la trigonométrie circulaire,

$$\boxed{\begin{aligned}\text{ch}^2 x &= \frac{\text{ch}\ 2x+1}{2} \\ \text{sh}^2 x &= \frac{\text{ch}\ 2x-1}{2}\end{aligned}}$$

formules qui serviront plus loin dans le calcul de certaines intégrales.

8.21 Fonctions hyperboliques réciproques

1. *Fonction* Arg sh x. La fonction sinus hyperbolique étant croissante sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ et prenant ses valeurs dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, on peut définir une fonction réciproque appelée *argument sinus hyperbolique*.

La notation $y = \operatorname{Arg\,sh} x$ désigne la valeur de y telle que

$$x = \operatorname{sh} y .$$

Cette relation entraîne

$$\sqrt{1+x^2} = \operatorname{ch} y ;$$

d'où

$$e^y = \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y = x + \sqrt{1+x^2} .$$

Donc

$$\boxed{y = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \operatorname{Arg\,sh} x} .$$

La dérivée de $y = \operatorname{Arg\,sh} x$ se déduit de la relation $x = \operatorname{sh} y$:

$$x'(y) = \operatorname{ch} y = \sqrt{1+x^2} ;$$

donc

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} .$$

2. *Fonction* Arg ch x. La fonction cosinus hyperbolique est croissante sur $[0, +\infty[$ et prend ses valeurs sur $[1, +\infty[$. Elle admet une fonction réciproque, appelée *argument cosinus hyperbolique*.

La notation $y = \operatorname{Arg\,ch} x$ désigne la valeur positive de y telle que

$$x = \operatorname{ch} y .$$

Cette relation entraîne

$$\sqrt{x^2-1} = \operatorname{sh} y ,$$

puisque y est positif.

D'où

$$e^y = \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y = \sqrt{x^2-1} + x$$

donc

$$\boxed{y = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) = \operatorname{Arg\,ch} x \qquad x > 1} .$$

La dérivée de $y = \operatorname{Arg\,ch} x$ se déduit de la relation $x = \operatorname{ch} y$:

$$x'(y) = \operatorname{sh} y = \sqrt{x^2-1} ;$$

donc

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

3. *Fonction* Arg th x. La fonction tangente hyperbolique est croissante sur $]-\infty, +\infty[$ et prend ses valeurs dans l'intervalle $]-1, 1[$. Elle admet une fonction réciproque, appelée *argument tangente hyperbolique*.

La notation $y = \text{Arg th}\, x$ désigne la valeur de y telle que

$$x = \text{th}\, y = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}.$$

On en déduit

$$x(e^{2y}+1) = e^{2y}-1,$$

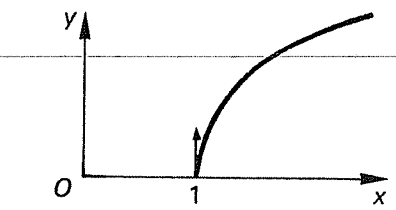
$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

donc :

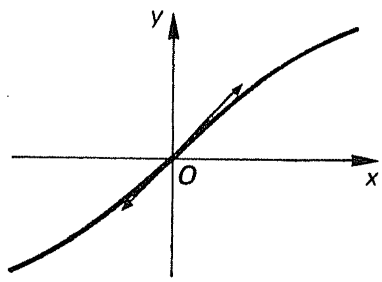
$$\boxed{y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \text{Arg th}\, x \qquad -1 < x < 1}.$$

La dérivée de $y = \text{Arg th}\, x$ se déduit de la relation $x = \text{th}\, y$. On a :

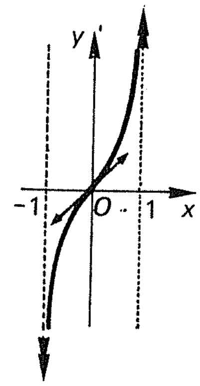
$$x'(y) = 1 - \text{th}^2\, y = 1 - x^2\,;$$



a) Fonction argument cosinus hyperbolique



b) Fonction argument sinus hyperbolique



c) Fonction argument tangente hyperbolique

FIG. 8.12

donc

$$y'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Remarque. Les graphes des fonctions Arg sh x, Arg ch x, Arg th x se déduisent de ceux des fonctions sh x, ch x $(x > 0)$, th x par symétrie par rapport à la première bissectrice (Fig. 8.12).

8.22 Interprétation géométrique des fonctions hyperboliques. Nous avons vu que, pour tout nombre réel t, ch t est supérieur à 1 et que

$$\text{ch}^2\, t - \text{sh}^2\, t = 1\,. \tag{1}$$

Réciproquement, soient x et y deux nombres réels tels que $x \geqslant 1$ et que

$$x^2 - y^2 = 1\,. \tag{2}$$

Il existe alors un nombre t et un seul tel que

$$\begin{cases} x = \text{ch}\, t \\ y = \text{sh}\, t\,. \end{cases} \tag{3}$$

En effet, puisque la fonction sh est une bijection de $\mathbf{R}$ sur lui-même, il existe un nombre réel t et un seul tel que $y = \text{sh}\, t$ (à savoir $t = \text{Arg sh}\, y$). Les relations (1) et (2) entraînent

$$x^2 = 1 + y^2 = 1 + \text{sh}^2\, t = \text{ch}^2\, t\,.$$

Comme ch t et x sont positifs, $x = \text{ch}\, t$.

En axes orthonormés la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 1$ est une hyperbole équilatère. L'ensemble des points de cette courbe dont l'abscisse x est supérieure à 1 est une branche de cette hyperbole. Ainsi, les relations (3) fournissent une représentation des coordonnées x et y d'un point de cette branche en fonction du paramètre t. C'est ce que nous appellerons au tome 5 une *représentation paramétrique.*

Les relations (3) sont à rapprocher des relations

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t\,, \end{cases}$$

représentation paramétrique du cercle trigonométrique.

Le lien très étroit entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires sera justifié au moment de l'étude des séries entières (voir tome 3).

EXERCICES

Fonctions logarithmes et exponentielles

8.1 Écrire 5^{2x} sous la forme e^{bx}, et calculer b.

8.2 Soit la fonction $y = 5^{2x}$; tirer x en fonction de y.

8.3 Soit $\lg y = 5$; calculer y. Soit $\ln y = 5$; calculer y.

8.4 Soit $y = K(1 - e^{-x/3})$; calculer x en fonction de y.

8.5 Soit $y = \sin e^{2x}$; tirer x en fonction de y.

Dérivées des fonctions logarithmes et exponentielles

Calculer les dérivées des expressions suivantes :

8.6 $y = e^{\sin 2x}$.

8.7 $y = e^{\sqrt{1-3x}}$.

8.8 $y = e^{\operatorname{tg} 1/x}$.

8.9 $y = \ln \sin 4x$.

8.10 $y = \ln \operatorname{tg} \sqrt{x}$.

8.11 $y = \ln e^{\sin x}$.

8.12 $y = \operatorname{Arc\,sin} \ln 2x$.

8.13 $y = e^{4x} \cos 3x$.

8.14 $y = e^{-5x} \operatorname{tg} 5x$.

8.15 $y = e^{2x} \ln 3x$.

8.16 $y = \dfrac{\ln 2x}{\ln 3x}$.

8.17 $y = \ln (x^2 \sqrt{1-x})$.

8.18 $y = \ln \sqrt[4]{1+x^2}$.

8.19 $y = \ln (\ln x)$.

8.20 $y = (\ln 1/x)^3$.

8.21 $y = (\ln \sqrt{1-4x^2})^4$.

8.22 $y = (\ln e^x)^5$.

8.23 $y = e^{x \sin x}$.

8.24 $y = e^{x^3}$.

8.25 $y = e^{1/\sqrt{x}}$.

8.26 $y = \sin (e^x/x)$.

8.27 $y = \cos e^{2x}$.

8.28 $y = \operatorname{tg}^3 e^x$.

8.29 $y = (\ln \operatorname{tg} x) \sin 2x$.

Dérivées secondes des fonctions logarithmes et exponentielles

Calculer les dérivées secondes des expressions suivantes :

8.30 $y = e^{2x} \cos 3x$.

8.31 $y = \ln 1/x$.

8.32 $y = \ln \sqrt{x}$.

8.33 $y = x^2 e^{-x}$.

8.34 $y = x^2 \ln x$.

8.35 $y = \dfrac{1}{x} \ln x$.

Différentielles des fonctions logarithmes et exponentielles

Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

8.36 $y = \ln(1+x) - \dfrac{2x}{x+2}$.

8.37 $y = e^x - \dfrac{2+x}{2-x}$.

8.38 $y = 1 + \ln(1+x) - \cos x + x - 2\sin x$.

8.39 $y = a^x - 1$.

8.40 $y = (x^2-1)e^{x^2}$.

8.41 $y = \ln\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)$.

8.42 $y = \ln(\ln x)$.

8.43 $y = x^{\cos x}$.

8.44 $y = \ln(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2})$.

8.45 $y = x^{1/x}$.

8.46 $y = (\cos x)^{\sin x}$.

8.47 $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$.

8.48 $y = \ln(\sin^n x)$.

8.49 $y = a^{x^n}$.

8.50 $y = e^{\sin^2 x}$.

8.51 $y = e^{x^2}/x$.

8.52 $y = \ln \dfrac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

8.53 $y = \ln(x^3 - 3x^2 + 6x)^{1/3}$.

Différentielles logarithmiques

Calculer les différentielles logarithmiques des fonctions suivantes :

8.54 $y = \dfrac{(x-1)^{5/2}(x-3)^{13/2}}{(x-2)^8}$.

8.55 $y = x^2\sqrt{x^2+3}$.

8.56 $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)(2x+3)}{x}}$.

8.57 $y = x^{\ln x}$.

8.58 $y = (2/x)^x$.

8.59 $y = x^n e^{nx} \sin^m x$.

8.60 $y = \dfrac{x^3\sqrt{1+\ln x}}{(1+x)^4}$.

8.61 $y = x^{\sqrt{x}}$.

8.62 $y = x^{\sin x}$.

8.63 $y = \dfrac{4x^2}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{4+x^2}}$.

8.64 $y = x^2\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2-4}$.

8.65 $y = (\sin^2 2x)^{\cos 3x}$.

8.66 $y = (x+1)x^{1/x}$.

8.67 $y = \dfrac{2x\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x}}$.

Variations de fonctions

Étudier la variation des fonctions suivantes :

8.68 $y = \ln\sqrt{x}$.

8.69 $y = \ln|1+x|$.

8.70 $y = x\, e^{1/x}$.

8.71 $y = \operatorname{Arc\,tg} e^x$.

8.72 $y = e^{-x}\sin x$.

8.73 $y = E(1 - e^{-t/CR})$.

Equation fonctionnelle

8.74 Déterminer les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, croissantes et telles que, pour tout nombre réel x, $f(x+1) - f(x) = e^{-x}$.

DÉRIVÉES USUELLES

On pose $P = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$ et $Q = \pi\mathbf{Z}$.

Fonctions		*Dérivées*	*Intervalles*
x^n	$n \in \mathbf{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbf{R}^*$
x^α	$\alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbf{R}_+^*$
e^{cx}	$c \in \mathbf{C}$	ce^{cx}	$\mathbf{R}$
u^x	$u \in \mathbf{R}_+^*$	$u^x \ln u$	$\mathbf{R}$
$\ln \lvert x\rvert$		$1/x$	$\mathbf{R}^*$
$\log_a \lvert x\rvert$	$a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\mathbf{R}^*$
$\operatorname{ch} x$		$\operatorname{sh} x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{sh} x$		$\operatorname{ch} x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{th} x$		$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1-\operatorname{th}^2 x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{coth} x$		$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1-\operatorname{coth}^2 x$	$\mathbf{R}^*$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbf{R}$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{tg} x$		$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x$	$\mathbf{R}-P$
$\cot x$		$-\dfrac{1}{\sin^2 x} = -1-\cot^2 x$	$\mathbf{R}-Q$
$\operatorname{Arg ch} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1, +\infty[$
$\operatorname{Arg sh} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{Arg th} x$		$\dfrac{1}{1-x^2}$	$]-1. 1[$
$\operatorname{Arc cos} x$		$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\operatorname{Arc sin} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\operatorname{Arc tg} x$		$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$

SOLUTIONS DES EXERCICES

CHAPITRE 1

Ensembles de définition

1.1 La fonction est définie sur $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$.

1.2 La fonction est définie sur $]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$.

1.3 La fonction $x \mapsto \sqrt{x-4}$ est définie sur $A = [4, +\infty[$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{6-x}$ est définie sur $B =]-\infty, 6]$.
La fonction $x \mapsto (\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$ est définie sur $A \cap B$
c'est-à-dire sur $[4, 6]$.

1.4 Le dénominateur s'annule pour $\sin x = \cos x$:

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad \text{où} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

L'ensemble de définition est la réunion des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$.

1.5 $z = (x-1)(x-5)(x-7)$

x		1		5		7	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-7$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
z	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

La fonction $x \mapsto \sqrt{z}$ est définie sur $[1, 5] \cup [7, +\infty[$.

1.6 $x^2 - 6x + 8 = 0 \qquad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ est définie sur $]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$.

1.7 La fonction $x \mapsto \operatorname{tg} x$ est périodique, de période π. Dans l'intervalle $[0, \pi]$, $(\operatorname{tg}^2 x - 1)$ a un signe positif sur $[\pi/4, \pi/2[\cup]\pi/2, 3\pi/4]$. L'ensemble de définition est la réunion des intervalles $[\pi/4 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ et $]\pi/2 + k\pi, 3\pi/4 + k\pi[$.

1.8 La fonction $x \mapsto \sin x$ est périodique, de période 2π. Dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, $\sin x$ est positif sur $[0, \pi]$. L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{\sin^3 x}$ est la réunion des intervalles $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$.

Parties entière et fractionnaire d'un nombre réel

1.9 $E(x)$ est déterminé par :

$$E(x) \leqslant x < E(x)+1\,.$$

Exemples : $\begin{cases} E(-2{,}5) = -3 \\ E(2{,}5) = 2. \end{cases}$

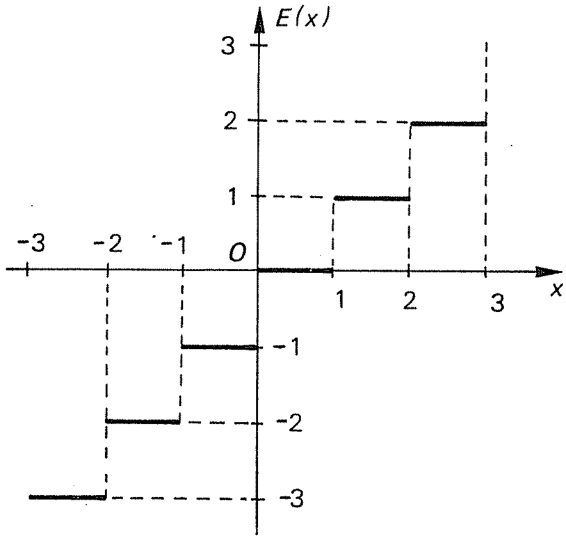


FIG. 1

1.10 $f(x) = x - E(x)$;

$$E(x+1) = E(x)+1\,, \qquad f(x+1) = f(x)\,.$$

L'intervalle d'étude de la fonction étant $[0, 1[$, on obtient le graphe complet par translations successives.

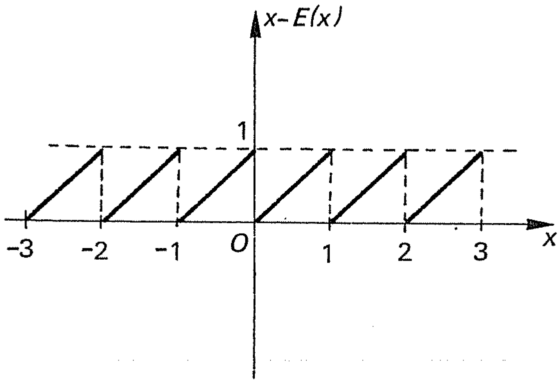


FIG. 2

1.11 $x \mapsto G(x) = F(x) - [F(x)]^2$.

F étant continue sur chacun des intervalles $]k, k+1[$, la fonction G est continue sur chacun de ces intervalles.

$$F(x) - [F(x)]^2 = F(x)(1 - F(x)) = (x - E(x))(1 - x + E(x)).$$

$$F(k) = 0, \qquad G(k) = 0.$$

Étudions la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers k par valeurs positives et négatives.

$x > k$, $\quad G(x) = (x-k)(1-x+k)$; $\quad G(x)$ a pour limite à droite 0,

$x < k$, $\quad G(x) = (x-k+1)(-x+k)$; $\quad G(x)$ a pour limite à gauche 0.

G est continue en k; G est donc continue sur **R**.

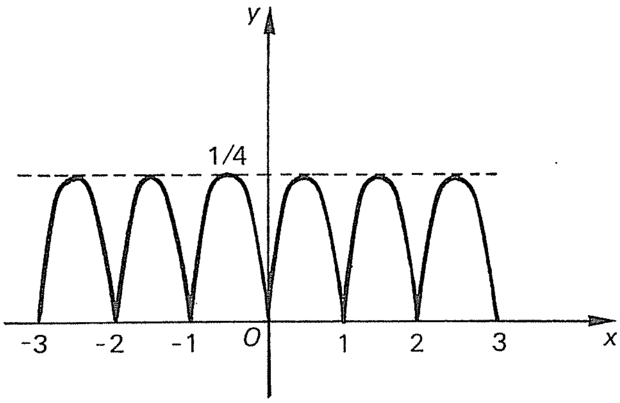


FIG. 3

1.12 $x \mapsto H(x) = E(x) + [F(x)]^2$.

E et F étant continues sur chacun des intervalles $]k, k+1[$, la fonction H ets continue sur chacun de ces intervalles.

$x > k$, $\quad H(x) = k + (x-k)^2$; $\quad H(x)$ a pour limite à droite k,

$x < k$, $\quad H(x) = k - 1 + (x-k+1)^2$; $\quad H(x)$ a pour limite à gauche k.

H est continue en k; H est donc continue sur **R**.

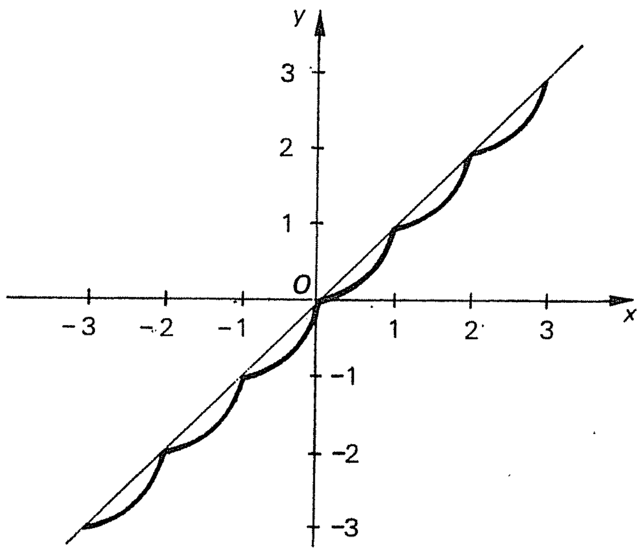


FIG. 4

1.13 Le graphe est composé de segments (dont le support passe par l'origine).

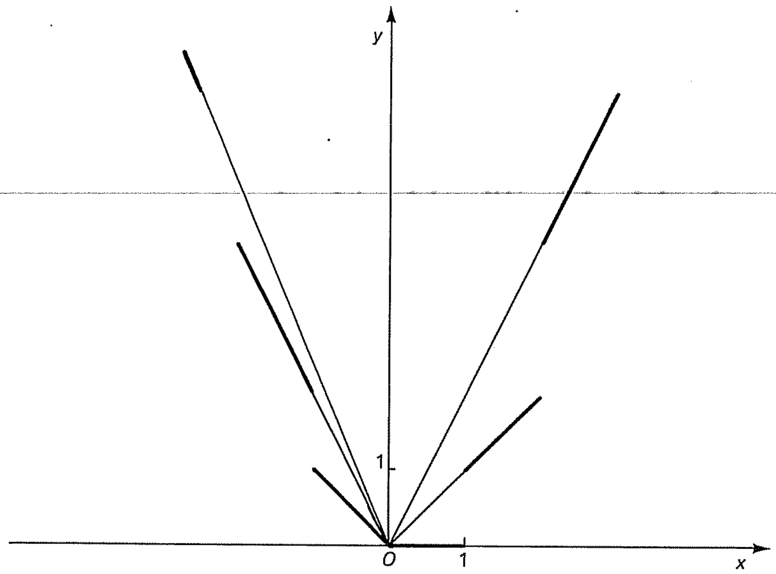


FIG. 5

1.14 Si $k \leqslant \frac{1}{x} < k + 1$, où $k \in \mathbf{Z}$, $J(x) = kx$. Par suite :

— Lorsque $x > 1$, $J(x) = 0$.

— Lorsque $\frac{1}{k+1} < x \leqslant \frac{1}{k}$, où $k \in \mathbf{Z}^* - \{ -1 \}$, $J(x) = kx$.

— Lorsque $x \leqslant -1$, $J(x) = -x$.

J coïncide avec une fonction linéaire sur chacun des intervalles : $]-\infty, -1]$, $]1, +\infty[$, $]1/(k+1), 1/k]$ $(k \neq 0, k \neq -1)$; elle est donc continue sur chacun de ces intervalles. J n'est pas continue aux points $1/k$.

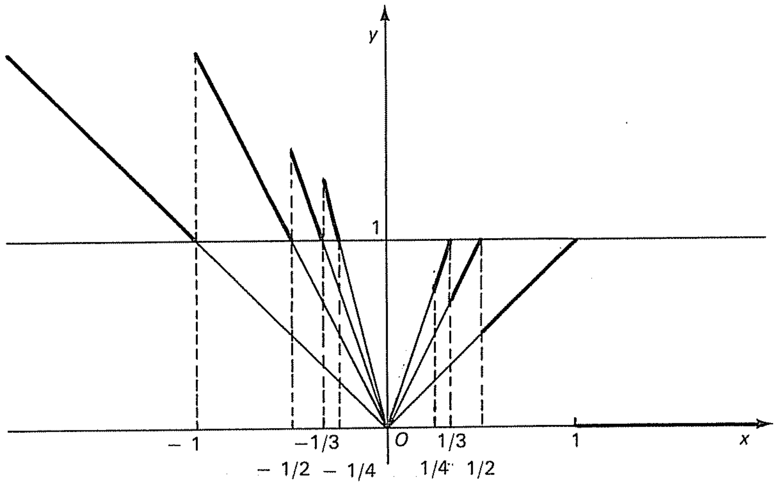


FIG. 6

1.15 $x \mapsto K(x) = \dfrac{x \sin \pi x}{E(x)} = \dfrac{f(x)}{E(x)}.$

Les fonctions f et E étant continues sur chacun des intervalles $]n, n+1[$ et la fonction E ne s'annulant pas, la fonction K est continue sur chacun des intervalles $]n, n+1[$.

Étudions la continuité en n $(n \neq 1)$.

$K(n) = 0.$

$x > k,\qquad K(x) = \dfrac{x \sin \pi x}{n}$; $K(x)$ a pour limite à droite 0.

$x < k,\qquad K(x) = \dfrac{x \sin \pi x}{n-1}$; $K(x)$ a pour limite à gauche 0.

K est continue en n; K est continue sur $[1, +\infty[$.

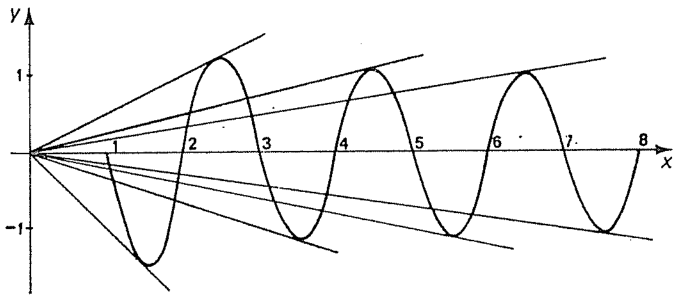


FIG. 7

Fonctions continues

1.16 Posons $f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x^2-x+1}$; alors $f(1) = 3$.

$$|f(x)-3| = \left|\frac{2(x-1)(x-2)}{x^2-x+1}\right| ;$$

$$|f(x)-3| \leqslant \frac{8}{3}|x-1|\,|x-2| \leqslant \frac{16}{3}|x-1| \qquad (\text{pour } 0 \leqslant x \leqslant 4).$$

La fonction est continue au point 1. L'inégalité $|f(x)-3|$ étant réalisée pour $|x-1| \leqslant 3/(16\times 100)$, l'ensemble des solutions de l'inéquation contient bien un intervalle fermé de centre 1 et non réduit à ce point.

1.17 $f(x) = |x|/x$.

$x>0$, $f(x)=1$; $f(x)$ a pour limite 1 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

$x<0$, $f(x)=-1$; $f(x)$ a pour limite -1 lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives.

f n'a pas de limite au point 0, et ne peut être prolongée par continuité.

$$f(x) = \frac{1}{1+x+|x|/x}.$$

$x>0$, $f(x)=[1/(2+x)]$; $f(x)$ a pour limite 1/2 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives,

$x<0$, $f(x)=1/x$; $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives.

$$f(x) = \sin\frac{1}{1+x+|x|/x}.$$

$x>0$, $f(x)=\sin[1/(2+x)]$; $f(x)$ a pour limite sin 1/2 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives,

$x<0$, $f(x)=\sin 1/x$; $f(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives.

1.18 $f(x_0) = \sin(\cos x_0)$.

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &= |\sin(\cos x_0)-\sin(\cos x_0)|\\ &= \left|2\sin\frac{\cos x-\cos x_0}{2}\,.\cos\frac{\cos x+\cos x_0}{2}\right|\end{aligned}$$

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant 2\left|\sin\frac{\cos x-\cos x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{\cos x-\cos x_0}{2}\right|$$

$$\leqslant \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant |x-x_0|.$$

L'inégalité $|f(x)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$ est réalisée pour $|x-x_0| \leqslant \varepsilon$. Il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$; f est donc continue en x_0. La fonction f étant continue en tout point, est continue sur **R**.

1.19 Écartons les cas triviaux où $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. La fonction g définie par la formule

$$g(x) = f(x) - x$$

est continue, et

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - 0 > 0 \\ g(1) &= f(1) - 1 < 0\,; \end{aligned}$$

le théorème des valeurs intermédiaires s'applique donc à g.

1.20 $$f(x) = \frac{2x}{1-x^2} = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Ensemble de définition $I_1 \cup I_2 \cup I_3$ $\begin{cases} I_1 =]-\infty, -1[\\ I_2 =]-1, +1[\\ I_3 =]1, +\infty[\,. \end{cases}$

Les fonctions g et h étant définies et continues sur les intervalles I_1, I_2 et I_3 et h ne s'annulant pas dans ces intervalles, f est continue sur ces intervalles.
Les opérations algébriques sur les fonctions monotones montrent que f est strictement croissante.

x	I_1	I_2		I_3
g	$\nearrow$ $-$	$\nearrow$ $-$	$\nearrow$ $+$	$\nearrow$ $+$
h	$\nearrow$ $-$	$\nearrow$ $+$	$\searrow$ $+$	$\searrow$ $-$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

La fonction f étant continue et strictement monotone sur chaque intervalle admet une fonction réciproque sur chaque intervalle.

I_1 : $\qquad y = \dfrac{2x}{1-x^2}, \qquad f(I_1) =]0, +\infty[\,.$

Si $y = 0$, alors $x = 0$. On suppose désormais $y \neq 0$.

$$x^2y + 2x - y = 0 \qquad x = \frac{-1+\varepsilon\sqrt{1+y^2}}{y}, \qquad \text{où} \qquad \varepsilon = \pm 1\,.$$

Lorsque y tend vers $+\infty$, x doit tendre vers -1, d'où $\varepsilon = -1$;

$$x = \frac{-1-\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

I_2 : $f(I_2) =]-\infty, +\infty[$;

$$x = \frac{-1+\varepsilon\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

Lorsque y tend vers $+\infty$, x doit tendre vers 1, d'où $\varepsilon = 1$;

$$x = \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

I_3 : $f(I_3) =]-\infty, 0[$;

$$x = \frac{-1-\sqrt{1+y^2}}{y},$$

$$f(\operatorname{tg}\theta) = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} = \operatorname{tg} 2\theta.$$

$2\theta = \operatorname{Arc}\sin \operatorname{tg} 2\theta$.

$\sin 2\theta = \operatorname{tg} 2\theta$; $(\sin 2\theta = 0;\ \cos 2\theta = 1)$.

$\theta = k\pi/2$. Comme Arc sin u appartient à $[-\pi/2, \pi/2]$, la solution est : $\boxed{\theta = 0}$.

1.21 $x = \operatorname{tg}\theta$, $\quad \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x = \theta + k\pi$

$$\begin{cases} \sin\theta = \operatorname{tg} 2\theta, \\ -\sin\theta = \operatorname{tg} 2\theta \end{cases}$$

1) $\sin\theta = \dfrac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} = \dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta(2-1/\cos^2\theta)}$

$\sin\theta = 0$ ou $2\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$;

le polynôme $X^2 - X - 1/2$ a pour racines $(1+\sqrt{3})/2$, $(1-\sqrt{3})/2$;

$\cos\theta = (1-\sqrt{3})/2$ $\quad \sin^2\theta = \sqrt{3}/2$.

$$\boxed{x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{1-\sqrt{3}}, \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{1-\sqrt{3}}}\ .$$

2) $\sin\theta = 0$ ou $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0$;

le polynôme $X^2 + X - 1/2$ a pour racines $(-1+\sqrt{3})/2$, $(-1-\sqrt{3})/2$;

$\cos\theta = (-1+\sqrt{3})/2$, $\quad \sin^2\theta = \sqrt{3}/2$.

On retrouve les solutions précédentes.

CHAPITRE 2

2.1 $y' = 4(6x+5)(3x^2+5x-1)^3.$

2.2 $y' = \dfrac{10x-3}{2\sqrt{5x^2-3x}}.$

2.3 $y' = -\dfrac{4(3x^3-x)}{(3x^4-2x^2+1)^2}.$

2.4 $y' = -\dfrac{2}{x^3}\cos\dfrac{1}{x^2}.$

2.5 $y = u^2, \qquad u = \sin x^2;$

$y' = 2uu' = 2\sin x^2 \,.\, 2x\cos x^2 = 2x\sin 2x^2.$

2.6 $y = \operatorname{tg} u, \qquad u = \sqrt{1-4x^2}\,;$

$$y' = \frac{u'}{\cos^2 u} = -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}\,\frac{1}{\cos^2\sqrt{1-4x^2}}.$$

2.7 $y = 1/\cos u, \qquad u = \sqrt{x}\,;$

$$y' = \frac{u'\sin u}{\cos^2 u} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{\sin\sqrt{x}}{\cos^2\sqrt{x}}.$$

2.8 $y = \operatorname{Arc\,tg} u, \qquad u = \sqrt{1-\operatorname{tg} x}\,;$

$$y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$= -\frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{2\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}\,\frac{1}{1+(\sqrt{1-\operatorname{tg} x})^2}$$

$$= -\frac{1}{2\cos^2 x}\,\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}\,\frac{1}{2-\operatorname{tg} x}.$$

2.9 $y = uv, \qquad u = \operatorname{Arc\,sin} x, \qquad v = \operatorname{Arc\,sin} 2x;$

$$y' = u'v+v'u = \frac{\operatorname{Arc\,sin} 2x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2\operatorname{Arc\,sin} x}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

2.10 $y = (\text{Arc tg } u)\, u\,, \qquad u = 1/x\,;$

$$y' = u'\left(\frac{u}{1+u^2} + \text{Arc tg } u\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\left(\frac{1/x}{1+1/x^2} + \text{Arc tg}\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x}\text{Arc tg}\frac{1}{x}\right).$$

2.11 $y = u/v, \qquad u = \text{Arc tg } 2x, \qquad v = \text{Arc tg } 3x\,;$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \left(\frac{2 \text{ Arc tg } 3x}{1+4x^2} - \frac{3 \text{ Arc tg } 2x}{1+9x^2}\right)\left(\frac{1}{\text{Arc tg } 3x}\right)^2.$$

2.12 $$y = \frac{\sin 2x \sin x}{x} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\cos 3x}{x}\right).$$

$$y' = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} + \frac{3 \sin 3x}{x} + \frac{\cos 3x}{x^2}\right).$$

2.13 $$y' = \sqrt{x+2} + \frac{x+1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3x+5}{2\sqrt{x+2}}.$$

2.14 $y = u/v, \qquad u = \sqrt{x^2-1}, \qquad v = 2x+1\,;$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$= \frac{1}{(2x+1)^2}\left[\frac{x(2x+1)}{\sqrt{x^2-1}} - 2\sqrt{x^2-1}\right] = \frac{x+2}{(2x-1)^2\sqrt{x^2-1}}.$$

2.15 $y = \sqrt{1-x^2}\,; \qquad y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$

2.16 $y = u + 1/u, \qquad u = \sqrt[3]{x}\,;$

$$y' = u'(1 - 1/u^2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right).$$

2.17 $y = u/v, \qquad u = x, \qquad v = \sqrt{1+4x^2}\,;$

$$y' = \frac{1}{(1+4x^2)}\left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\right) = \frac{1}{(1+4x^2)^{3/2}}.$$

2.18 $y = \operatorname{tg} u, \qquad u = x+1/x;$

$$y' = \frac{u'}{\cos^2 u} = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{\cos^2(x+1/x)}.$$

2.19 $y = u^4, \qquad u = \sin 1/x;$

$$y' = 4u'u^3 = -\frac{4}{x^2}\cos\frac{1}{x}\sin^3\frac{1}{x} = -\frac{2}{x^2}\sin\frac{2}{x}\sin^2\frac{1}{x}.$$

2.20 $y = u^3, \qquad u = \cos\sqrt{x};$

$$y' = 3u'u^2 = -\frac{3}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x} = -\frac{3}{4\sqrt{x}}\sin 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}.$$

2.21 $y = u^5, \qquad u = \operatorname{tg} 1/2x;$

$$y' = 5u'u^4$$
$$= -\frac{5}{2x^2}\frac{1}{\cos^2 1/2x}\operatorname{tg}^4\frac{1}{2x} = -\frac{5}{2x^2}\frac{\sin^4 1/2x}{\cos^6 1/2x}.$$

2.22 $y = u^3, \qquad u = \sin x^4 = \sin v, \qquad v = x^4;$

$$y' = 3u'u^2 = 3v'\cos vu^2 = 3v'\cos v\sin^2 v$$
$$= 12x^3\cos x^4\sin^2 x^4 = 6x^3\sin x^4\sin 2x^4.$$

2.23 $y = u^4, \qquad u = \cos\frac{1}{1+x^2} = \cos v, \qquad v = \frac{1}{1+x^2};$

$$y' = 4u'u^3 = -4v'\sin vu^3 = -4v'\sin v\cos^3 v$$
$$= -4\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\sin\frac{1}{1+x^2}\cos^3\frac{1}{1+x^2}$$
$$= \frac{4x}{(1+x^2)^2}\sin\frac{2}{1+x^2}\cos^2\frac{1}{1+x^2}.$$

2.24 $y = uv, \qquad u = \sin^2 x, \qquad v = \operatorname{tg}^2 2x;$

$$y' = u'v+v'u$$
$$= 2\sin x\cos x\operatorname{tg}^2 2x+\sin^2 x\, 4\frac{\operatorname{tg} 2x}{\cos^2 2x}$$
$$= \operatorname{tg} 2x\left(\sin 2x\operatorname{tg} 2x+4\frac{\sin^2 x}{\cos^2 2x}\right).$$

2.25 $y = \text{Arc tg}\, u, \qquad u = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}};$

$$y' = \frac{u'}{1+u^2}, \qquad u' = \left(\sqrt{x} - \frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)\frac{1}{x} = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}};$$

$$y' = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{x+1}{x^2-x+1}.$$

2.26 $y = \text{Arc sin}\, u, \qquad u = 1/\sqrt{x};$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-1/x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}.$$

2.27 $y = \text{Arc tg}\, u, \qquad u = 1/\sqrt{x};$

$$y' = \frac{u'}{1+u^2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \frac{1}{1+1/x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

2.28 $y = \text{Arc tg}\, u, \qquad u = \sin x;$

$$y' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}.$$

2.29 $y = \text{Arc tg}\, u, \qquad u = \text{tg}\, x;$

$$y' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{1+\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = 1 \qquad (\text{Arc tg}(\text{tg}\, x) \neq x).$$

2.30 $y = \text{Arc sin}\, u, \qquad u = \sin x;$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

2.31 $y = \sin^2 u, \qquad u = (x-1)\sqrt{x};$

$$y' = 2u' \cos u \sin u$$
$$= u' \sin 2u, \quad \text{où} \quad u' = \sqrt{x} + \frac{(x-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$$
$$y' = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}} \sin 2(x-1)\sqrt{x}.$$

2.32 $y' = 4\cos x - 2\sin x.$

2.33 $y = u^4, \qquad u = \cos 1/x\,;$

$$y' = 4u'u^3 = +\frac{4}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cos^3\frac{1}{x} = \frac{2}{x^2}\sin\frac{2}{x}\cos^2\frac{1}{x}.$$

2.34 $y' = 2\cos 2x - 2\sin x.$

2.35 $y = u^2, \qquad u = \sqrt{x} + 2x\,;$

$$y' = 2u'u = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\right)(\sqrt{x}+2x) = 8x + 6\sqrt{x} + 1.$$

2.36 $y = u^4, \qquad u = \sin 4x;$

$$y' = 4u'u^3 = 16\cos 4x \sin^3 4x = 8\sin 8x \sin^2 4x.$$

2.37 $y = \sin 2x + 1 - \cos 2x = 1 + \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$y' = 2\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

2.38 $y = u/v, \qquad u = x\sqrt{4x+1}, \qquad v = (2x+1)^2;$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \qquad u' = \sqrt{4x+1} + \frac{2x}{\sqrt{4x+1}} = \frac{6x+1}{\sqrt{4x+}}$$
$$= \left[\frac{6x+1}{\sqrt{4x+1}}(2x+1)^2 - 4x(2x+1)\sqrt{4x+1}\right]\frac{1}{(2x+1)^4}$$
$$= \frac{-4x^2 + 4x + 1}{\sqrt{4x+1}\,(2x+1)^3}.$$

2.39 $y = 3(1-\cos 2x)\cos 2x = 3(u-u^2), \qquad u = \cos 2x\,;$

$$y' = 3u'(1-2u) = -6\sin 2x(1 - 2\cos 2x).$$

2.40 $y = 1/u^2, \qquad u = \operatorname{tg}\sqrt{1-x^2} = \operatorname{tg} v, \qquad v = \sqrt{1-x^2}\,;$

$$y' = -\frac{2u'}{u^3} = -\frac{2v'}{\cos^2 v}\frac{1}{\operatorname{tg}^3 v} = -\frac{2v'}{\operatorname{tg} v \sin^2 v},$$

$$y' = \frac{2x}{\operatorname{tg}\sqrt{1-x^2}\,\sin^2\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-x^2}}.$$

2.41 $y = 1/u^4, \qquad u = \sin(x^2-1)\,;$

$$y' = -\frac{4u'}{u^5} = -8x\frac{\cot(x^2-1)}{\sin^4(x^2-1)}.$$

2.42 $y = uv, \qquad u = \sin 2x, \qquad v = \operatorname{tg} 1/x\,;$

$$y' = u'v+v'u = 2\cos 2x \operatorname{tg} 1/x - \frac{1}{x^2}\frac{\sin 2x}{\cos^2 1/x}.$$

2.43 $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$

2.44 $y = u^4, \qquad u = \operatorname{Arc\,tg}\sqrt{x}\,;$

$$y' = 4u'u^3 = \frac{2(\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Calcul des dérivées successives

2.45 $y = uv, \qquad u = \sin 2x, \qquad v = \sin 3x\,;$

$$\begin{aligned} y'' &= u''v+2u'v'+uv'' \\ &= -4\sin 2x \sin 3x + 12\cos 2x\cos 3x - 9\sin 2x\sin 3x \\ &= 12\cos 2x\cos 3x - 13\sin 2x\sin 3x. \end{aligned}$$

2.46 $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} = \dfrac{1}{u}, \qquad u = 2\sqrt{x}(1+x);$

$$y'' = -\frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{4x(1+x)^2}\left(\frac{(1+x)}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}\right) = -\frac{3x+1}{4x\sqrt{x}(1+x)^2}.$$

2.47 $y' = 4x^3 + \dfrac{2}{\sqrt{x}}, \qquad y'' = 12x^2 - \dfrac{1}{x\sqrt{x}}.$

2.48 $y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$,

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

2.49 $y = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\qquad y'' = 2\cos 2x$.

2.50 $y' = 2\,\mathrm{tg}\,x + 2\,\mathrm{tg}^3 x$;

$$y'' = 2(1+\mathrm{tg}^2\,x) + 6\,\mathrm{tg}^2\,x(1+\mathrm{tg}^2\,x)$$

$$= \frac{2}{\cos^2 x}(1+3\,\mathrm{tg}^2\,x) = \frac{2}{\cos^4 x}(1+2\sin^2 x).$$

2.51 $y = \dfrac{2}{1+x} - 1$, $\qquad y'' = \dfrac{4}{(1+x)^3}$.

2.52 $y' = 4\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{4}{1+x^2} + \dfrac{8}{(1+x^2)^2}$;

$$y'' = \frac{8x}{(1+x^2)^2} - \frac{32x}{(1+x^2)^3} = 8x\frac{x^2-3}{(1+x^2)^3}.$$

2.53 $y = uv$, $\qquad u = x^3$, $\qquad v = 1/(x-1)^2$;

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$= \frac{6x}{(x-1)^2} - \frac{12x^2}{(x-1)^3} + \frac{6x^3}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}.$$

2.54 $y = (1-\cos x)/2$, $\qquad y'' = (\cos x)/2$.

2.55 $y = uv$, $\qquad u = x$, $\qquad v = \mathrm{Arc\,tg}\,x$;

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv'' = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

2.56 $y'' = \dfrac{2}{(1+x^2)^2}$; $\qquad y''' = \dfrac{-8x}{(1+x^2)^3}$.

2.57 $y = x^{2/3}, \qquad y' = \frac{2}{3}x^{-1/3},$

$$y'' = -\frac{2}{9}x^{-4/3}, \qquad y''' = \frac{8}{27}x^{-7/3}.$$

2.58 $y = uv, \qquad u = \sin 2x, \qquad v = \cos 3x;$

$$\begin{aligned} y''' &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \\ &= -8\cos 2x \cos 3x + 36 \sin 2x \sin 3x - \\ &\quad -54 \cos 2x \cos 3x + 27 \sin 2x \sin 3x \\ &= -62 \cos 2x \cos 3x + 63 \sin 2x \sin 3x . \end{aligned}$$

2.59 $y = \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x} = \dfrac{2\cos x}{4\cos^2 x - 1} = g(u), \qquad u = 2\cos x$

$$y = g(u), \qquad y' = g'_{(u)}\, u',$$

$$y'' = g''_{(u)}\, u'^2 + g'_u\, u'',$$

$$y''' = g'''_{(u)}\, u'^3 + 3g''_{(u)}\, u'u'' + g'_u u''',$$

$$y(u) = \frac{u}{u^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{u+1} + \frac{1}{2u-1},$$

$$y'_{(u)} = -\frac{1}{2(u+1)^2} - \frac{1}{2(u-1)^2} = -\frac{u^2+1}{(u^2-1)^2},$$

$$y''_{(u)} = \frac{1}{(u+1)^3} + \frac{1}{(u-1)^3} = \frac{2u^3+6u}{(u^2-1)^3},$$

$$y'''_{(u)} = -\frac{3}{(u+1)^4} - \frac{3}{(u-1)^4} = -\frac{6u^4+36u^2+6}{(u^2-1)^4}.$$

$$u' = -2\sin x, \qquad u'' = -2\cos x, \qquad u''' = 2\sin x;$$

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{2\sin x}{(4\cos^2 x-1)^4}[(4-u^2)(6u^4+36u^2+6)] \\ &\quad + \frac{2\sin x}{(4\cos^2 x-1)^4}[3u(u^2-1)(2u^3+6u)] \\ &\quad + \frac{2\sin x}{(4\cos^2 x-1)^4}[(u^4-2u^2+1)(-u^2-1)] \\ &= \frac{2\sin x}{(4\cos^2 x-1)^4}(-64\cos^6 x + 16\cos^4 x + 484\cos^2 x + 23). \end{aligned}$$

2.60 $y = uv, \qquad u = \operatorname{tg} x, \qquad v = \operatorname{tg} 2x;$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''';$$

$$u' = (1+\operatorname{tg}^2 x), \qquad u'' = 2 \operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x).$$

$$u''' = 2(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+3\operatorname{tg}^2 x),$$

$$v' = 2(1+\operatorname{tg}^2 2x), \qquad v'' = 8 \operatorname{tg} 2x(1+\operatorname{tg}^2 2x),$$

$$v''' = 16(1+\operatorname{tg}^2 2x)(1+3\operatorname{tg}^2 2x)$$

$$\begin{aligned} y''' &= 2 \operatorname{tg} 2x(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+3\operatorname{tg}^2 x) + 12 \operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 2x) \\ &\quad + 24 \operatorname{tg} 2x(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 2x) + 16 \operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 2x)(1+3\operatorname{tg}^2 2x) \\ &= \frac{16 \operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg}^2 x - 1)^4}(5\operatorname{tg}^6 x + 19\operatorname{tg}^4 x + 19\operatorname{tg}^2 x + 5). \end{aligned}$$

2.61 $y = \dfrac{1-u}{1+u} = g(u), \qquad u = x^2;$

$$y''' = g'''_u u'^3 + 3g''_u u'u'' + g'_u u''';$$

$$g(u) = \frac{1-u}{1+u} = \frac{2}{1+u} - 1,$$

$$g'_u = -\frac{2}{(1+u)^2}, \qquad g''_u = \frac{4}{(1+u)^3}, \qquad g'''_u = \frac{-12}{(1+u)^4};$$

$$u' = 2x, \qquad u'' = 2, \qquad u''' = 0;$$

$$y''' = -\frac{96x^3}{(1+x^2)^4} + \frac{48x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{48x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}.$$

2.62 $y = u^3, \qquad u = \operatorname{tg} x^2;$

$$y''' = 6u'^3 + 18uu'u'' + 3u^2u''';$$

$$u' = 2x(1+\operatorname{tg}^2 x^2);$$

$$u'' = 2(1+\operatorname{tg}^2 x^2)(1+4x^2 \operatorname{tg} x^2);$$

$$u''' = 8x(1+\operatorname{tg}^2 x^2)(3\operatorname{tg} x^2 + 6x^2 \operatorname{tg}^2 x^2 + 2x^2).$$

$$\begin{aligned} y''' &= 48x^3(1+\operatorname{tg}^2 x^2)^3 + 72x \operatorname{tg} x^2(1+\operatorname{tg}^2 x^2)^2(1+4x^2 \operatorname{tg} x^2) + \\ &\quad + 24x \operatorname{tg}^2 x^2(1+\operatorname{tg}^2 x^2)(3\operatorname{tg} x^2 + 6x^2 \operatorname{tg}^2 x^2 + 2x^2) \\ &= 24x(1+\operatorname{tg}^2 x^2)[2x^2(1+\operatorname{tg}^2 x^2)^2 + 3\operatorname{tg} x^2(1+\operatorname{tg}^2 x^2)(1+4x^2 \operatorname{tg} x^2) \\ &\quad + \operatorname{tg}^2 x^2(3\operatorname{tg} x^2 + 6x^2 \operatorname{tg}^2 x^2 + 2x^2)]. \end{aligned}$$

2.63 $y \quad = u+v, \qquad u = \sin x, \qquad v = \cos x;$

$y^{(n)} = u^{(n)}+v^{(n)} = \sin(x+n\pi/2)+\cos(x+n\pi/2).$

2.64 $y = 1/x.$

On va démontrer par récurrence que : $y^{(n)} = (-1)^n n!\, x^{-n-1}$:

$y^{(1)} = -1/x^2 = (-1)^1\, 1!\, x^{-1-1}.$

Supposons l'égalité vérifiée à l'ordre $n-1$:

$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n},$

$y^{(n)} \quad = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(-n)\, x^{-n-1} = (-1)^n n!\, x^{-n-1}.$

2.65 On va démontrer par récurrence que la dérivée n-ième de $y = f(ax)$ est $a^n f^{(n)}(ax)$. En effet:

$y' \quad = af'(ax)$

....

$y^{(n-1)} = a^{n-1} f^{(n-1)}(ax)$

$y^{(n)} \quad = a^n f^{(n)}(ax).$

Application : $a = 2, f(x) = \cos x$:

$y^{(n)} = 2^n \cos(2x+n\pi/2).$

2.66 $y = 4x^{-2}.$

On va démontrer par récurrence que :

$y^{(n)} = 4(-1)^n (n+1)!\, x^{-n-2},$

$y^{(1)} = 4(-2)\, x^{-3} = 4(-1)^1\, 2!\, x^{-1-2}.$

Supposons l'égalité vérifiée à l'ordre $n-1$:

$y^{(n-1)} = 4(-1)^{n-1}\, n!\, x^{-n+1-2},$

$y^{(n)} \quad = 4(-1)^n (n+1)!\, x^{-n-2}.$

2.67 Comme

$X^2-3X+2 = (X-1)(X-2),$

les nombres réels A, B et C vérifient

$A(X-2)+B(X-1)+C(X^2-3X+2) = 3X^2-6X+2.$

D'où $\quad C = 3, \quad A = 1 \quad$ et $\quad B = 2.$

La dérivée n-ième de f est la somme des dérivées n-ièmes des trois fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{x-1}, \qquad x \mapsto \frac{2}{x-2} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto 3.$$

C'est donc la fonction

$$x \mapsto (-1)^n \, n! \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{2}{(x-2)^{n+1}}\right].$$

2.68 Posons $y = \dfrac{\text{Arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$, et dérivons le produit $y\sqrt{1-x^2}$:

$$(y\sqrt{1-x^2})' = y'\sqrt{1-x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} = (\text{Arc}\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il s'ensuit que y vérifie l'équation différentielle

$$y'(1-x^2) - xy = 1. \qquad (1)$$

La formule de Leibniz fournit une relation de récurrence entre les dérivées successives :

$$(1-x^2)f^{(n)}(x) - (2n-1)\, xf^{(n-1)}(x) - (n-1)^2 f^{(n-2)}(x) = 0 \qquad (n \geqslant 2).$$

Substituons 0 à x :

$$f^{(n)}(0) - (n-1)^2 f^{(n-2)}(0) = 0.$$

Comme $f(0) = 0$, toutes les dérivées d'ordre pair sont nulles à l'origine. La relation (1) montre que $f'(0) = 1$; d'où

$$f^{(2p+1)}(0) = 2^{2p}(p!)^2.$$

2.69 D'une part, $y' = 2x - 12$; d'autre part, $y' = 15$. Donc $x = 27/2$.

2.70 $y' = x(x-1) + (x-1)(x+2) + x(x+2)$.

Les pentes des tangentes à la courbe aux points où elle coupe l'axe des x sont :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} (x-1)(x-2) = -1 \times 2 = -2$$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} x(x+2) = 1 \times 3 = 3$$

$$f'(-2) = \lim_{x\to -2} x(x-2) = (-2)(-3) = 6.$$

2.71 $y' = 3x^2 - x$.

La pente de la tangente est égale à 10 aux points dont l'abscisse vérifie :

$3x^2 - x = 10$; $\qquad x_1 = 2, \quad x_2 = -5/3.$

2.72 $y' = 4\dfrac{4-x^2}{(4+x^2)^2}$; $\qquad x = 0, \qquad y' = 1.$

2.73 La fonction est périodique, de période 2π :

$y' = 2(\cos x - 3\sin 2x) = 2\cos x\,(1 - 6\sin x)$.

Sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, la tangente a une pente nulle aux points

$$\begin{cases} x_1 = \pi/2 \\ y_1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3\pi/2 \\ y_2 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0{,}166 \\ y_3 = 19/6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 2{,}975 \\ y_4 = 19/6\,. \end{cases}$$

2.74 $y' = 2(x-1)$.

La courbe coupe la droite $y = 5$ aux points :

$$\begin{cases} x_1 = 1-\sqrt{6} \\ y'_1 = -2\sqrt{6} \\ \alpha_1 = -78°\,30' \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1+\sqrt{6} \\ y'_2 = 2\sqrt{6} \\ \alpha_2 = 78°\,30'. \end{cases}$$

CHAPITRE 3

Calcul des différentielles

3.1 $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right)\mathrm{d}x\,.$

3.2 $\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x\,.$

3.3 $\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\right)\mathrm{d}x\,.$

3.4 $\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x\,.$

3.5 $\mathrm{d}y = \left(1 - \frac{4}{15}\cos x + \frac{1}{15}\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{4}{5}\frac{1}{\cos^2 x/2}\right)\mathrm{d}x\,.$

3.6 $y = u/v, \qquad u = a+x, \qquad v = (b+x)^n;$

$$\mathrm{d}y = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}$$

$$= \frac{(b+x)^n\,\mathrm{d}x - (a+x)\,n(b+x)^{n-1}\,\mathrm{d}x}{(b+x)^{2n}} = \frac{(b-na)+x(1-n)}{(b+x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,.$$

3.7 $y = \sqrt{u}, \qquad u = \frac{x-a}{x-b}, \qquad \mathrm{d}u = \frac{a-b}{(x-b)^2}\,\mathrm{d}x\,;$

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \frac{(a-b)}{2(x-b)^2}\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\,\mathrm{d}x\,.$$

3.8 $y = uv, \qquad u = \cos x, \qquad v = (\sin^2 x + 2);$

$$\mathrm{d}y = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v = -3\sin^3 x\,\mathrm{d}x\,.$$

3.9 $y = \sqrt[3]{u}, \qquad u = x^2 + a, \qquad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x\,;$

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{3\sqrt[3]{u^2}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+a)^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

3.10 $$\mathrm{d}y = \frac{(6x^2(x-1)^2+4x^3(x-1))\,(x+1)-x^3(x-1)^2}{(x+1)\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2(x-1)\,(9x^2+5x-6)}{(x+1)\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

3.11 $$y = \operatorname{Arc\,cos} u, \qquad u = \frac{b+a\cos x}{a+b\cos x} = \frac{b+av}{a+bv}, \qquad v = \cos x;$$

$$\mathrm{d}u = \frac{a^2-b^2}{(a+bv)^2}\,\mathrm{d}v, \qquad \mathrm{d}v = -\sin x\,\mathrm{d}x.$$

$$\mathrm{d}y = -\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{|a+b\cos x|}\,\frac{\sin x}{|\sin x|}\,\mathrm{d}x.$$

3.12 $$y = \sin u, \qquad u = \sqrt{a^2-x^2}, \qquad \mathrm{d}u = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\mathrm{d}y = \cos u\,\mathrm{d}u = -\frac{x\cos\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

3.13 $$y = \operatorname{Arc\,tg} u, \qquad u = \frac{x\sqrt{3}}{x+2}, \qquad \mathrm{d}u = \frac{2\sqrt{3}}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{2\sqrt{3}}{(x+2)^2+3x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x.$$

3.14 $$y = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}, \qquad u = \sqrt{x}, \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,;$$

$$\mathrm{d}y = -\frac{1}{(1+u)^2}\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x(1-x)}\,(1+\sqrt{x})}.$$

3.15 $$y = u^2, \qquad u = \frac{\sin x}{x}, \qquad \mathrm{d}u = \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)\mathrm{d}x\,;$$

$$\mathrm{d}y = 2u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x^2}\left(\sin 2x - \frac{2\sin^2 x}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

3.16 $y = \sqrt{u}, \qquad u = a\sin^2 x + b\cos^2 x, \qquad \mathrm{d}u = (a-b)\sin 2x\,\mathrm{d}x\,;$

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \frac{(a-b)\sin 2x}{2\sqrt{a\sin^2 x + b\cos^2 x}}\mathrm{d}x\,.$$

3.17 $y = \sqrt{u}, \qquad u = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\,;$

$$\mathrm{d}u = \frac{2(1-x^2)}{(1-x+x^2)^2}\mathrm{d}x\,;$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \frac{(1-x^2)}{(1-x+x^2)^2}\sqrt{\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

3.18 $\mathrm{d}y = (\cos x - \cos x\sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \cos^3 x\,\mathrm{d}x\,.$

3.19 $\mathrm{d}y = \left(\operatorname{Arc\,sin} x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x\,.$

3.20 $y = \operatorname{Arc\,tg} u\,; \qquad u = \dfrac{x}{1-x^2}, \qquad \mathrm{d}u = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x\,.$

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1+x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x\,.$$

3.21 $y = \operatorname{Arc\,sin} u, \qquad u = \cos x, \qquad \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x\,;$

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{\sin x}{|\sin x|}\mathrm{d}x\,.$$

3.22 $y = 5(3x^2-2x)^{-1/3}\,;$

$$\mathrm{d}y = -\frac{10}{3}\,\frac{3x-1}{\sqrt[3]{(3x^2-2x)^4}}\mathrm{d}x\,.$$

3.23 $y = uv, \qquad u = \sqrt{1+2x}, \qquad v = \sqrt[3]{1+3x}$

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}, \qquad \mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$$

$$\mathrm{d}y = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v$$

$$= \left(\frac{\sqrt[3]{1+3x}}{\sqrt{1+2x}} + \frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{2+5x}{\sqrt{1+2x}\,\sqrt[3]{(1+3x)^2}}\,\mathrm{d}x.$$

3.24 $y = uv, \quad u = 2x-1, \quad v = \sqrt{2x-x^2}\,;$

$$\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}v = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x\,;$$

$$\mathrm{d}y = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v$$

$$= \left(2\sqrt{2x-x^2} + \frac{(2x-1)(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{-4x^2+7x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

3.25 $y = \operatorname{Arc\,cos} u, \quad u = \dfrac{1-v}{1+v}, \quad v = x^2;$

$$\mathrm{d}y = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left(-\frac{2}{(1+v)^2}\right)\mathrm{d}v = \frac{2\varepsilon\mathrm{d}x}{1+x^2}, \text{ où } \varepsilon=1 \text{ si } x>0,\ \varepsilon=-1 \text{ si } x<0.$$

3.26 $y = \sin u, \quad u = x^2+1/x, \quad \mathrm{d}u = (2x-1/x^2)\,\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}y = \cos u\,\mathrm{d}u = (2x-1/x^2)\cos(x^2+1/x)\,\mathrm{d}x.$$

3.27 $y = uv, \quad u = \sin^2 2/x, \quad v = \operatorname{tg}^3 x/2$

$$\mathrm{d}u = -\frac{2}{x^2}\sin\frac{4}{x}, \qquad \mathrm{d}v = \frac{3}{2}\,\frac{\operatorname{tg}^2 x/2}{\cos^2 x/2}\,;$$

$$\mathrm{d}y = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v$$

$$= \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\left(-\frac{2}{x^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sin\frac{4}{x} + \frac{3}{x}\sin^2\frac{2}{x}\,\frac{1}{\cos^2 x/2}\right)\mathrm{d}x.$$

3.28 $y = uv, \quad u = x, \quad v = \operatorname{Arc\,sin}(\cos 2x);$

$$\mathrm{d}v = -\frac{2\sin 2x}{|\sin 2x|}$$

$$dy = v\,du + u\,dv = \left(\text{Arc sin}(\cos 2x) - \frac{2x \sin 2x}{|\sin 2x|}\right)dx.$$

3.29 $y = uv, \qquad u = \sqrt{1-x}, \qquad v = \text{Arc sin}\sqrt{x}$

$$dy = v\,du + u\,dv = \frac{1}{2}\left(-\frac{\text{Arc sin}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$$

Problèmes sur les différentielles

3.30 $S = x(5-x), \quad dS = (5-2x)\,dx.$

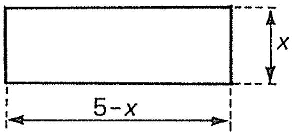


FIG. 1

Pour qu'un accroissement de x donne un accroissement de l'aire du rectangle, il faut et il suffit que $(5-2x)$ soit strictement positif: $5-2x > 0$, $x < 2{,}5$.

3.31 $BC = 100$ cm,
$AH = 50$ cm.
$x/100 = (50-y)/50$,
$y = 50 - x/2$,

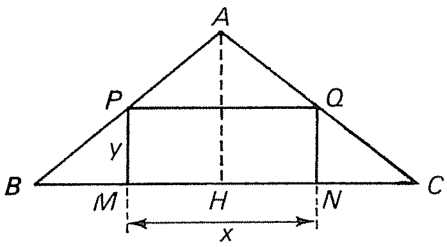


FIG. 2

$S = 50x - x^2/2 \qquad \boxed{\Delta S = (50-x)\,\Delta x}.$

3.32 $S = \pi R^2$,
$dS = 2\pi R\,dR$,
$dS/dt = 2\pi R\,dR/dt = 2\pi \times 12 \times 5$ m/s $= 377$ m²/s.

3.33 $h = d$,
$V = \pi h d^2/4 = \pi h^3/4$,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt} = \frac{3\pi}{4} \times 100 \times 2\,\mathrm{m/s} = 471\,\mathrm{m^3/s}\,.$$

3.34 $OA^2 + OB^2 = l^2$,

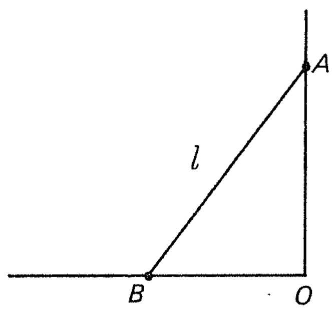


FIG. 3

$$OA\,.\,V_A + OB\,.\,V_B = 0\,,$$

$$V_B = -\frac{OA}{OB} V_A\,,$$

$$\boxed{|V_B| = \frac{OA}{OB} V_0}$$

3.35 $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \pi h^3/12, \qquad R = h/2\,;$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt}\,;$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi} \frac{dV}{dt} h^{-2} = \frac{4}{\pi} \frac{4}{36} = 0{,}141\,\mathrm{cm/mn}\,.$$

3.36 $S = a^2\sqrt{3}/4;$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} a \frac{da}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} 6\sqrt{3} = 9\,\mathrm{cm^2/mn} = 0{,}15\mathrm{cm^2/s}\,.$$

3.37 $V = \frac{4}{3}\pi R^3\,;$

$$dV/dt = 4\pi R^2\, dR/dt = 4\pi \times 100 \times 1 = 1256\ \mathrm{cm^3/s}\,.$$

3.38 $\dfrac{dL}{d\theta} = \dfrac{L}{1\,000} \qquad \dfrac{dl}{d\theta} = \dfrac{l}{1\,000}$

$$\frac{1}{S}\frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{L}\frac{dL}{d\theta} + \frac{1}{l}\frac{dl}{d\theta} = \frac{2}{1\,000} = 0{,}2\,\%.$$

3.39 $BT^2 = OB^2 + OT^2 \qquad V_s =$ vitesse de séparation.

$$dBT = \frac{OB\,dOB + OT\,dOT}{BT}$$

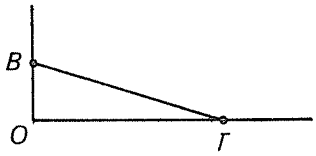


FIG. 4

$$V_S = \frac{(V_B^2 + V_T^2)\,t}{\sqrt{(V_B^2 + V_T^2)\,t^2}}$$

$$= \sqrt{V_B^2 + V_T^2} = \sqrt{2\,500 + 100} = 51\ \text{km/h}.$$

3.40 $S = a^2$

$dS/dt = 2a\,da/dt = 2 \times 10 \times 10^{-2} = 0{,}2\ \text{m}^2/\text{s}$.

3.41 $y = \sin\alpha$

$dy = \cos\alpha\, d\alpha$

$dy = \dfrac{1}{2} d\alpha \qquad \boxed{\alpha = \pi/3}$.

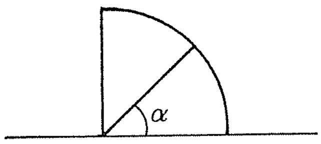


FIG. 5

3.42 $S = \dfrac{1}{2} AB\, AC \sin\alpha$

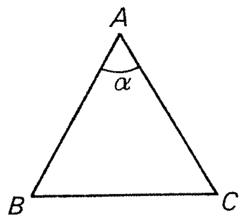


FIG. 6

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left(AC \sin\alpha \frac{dAB}{dt} + AB \sin\alpha \frac{dAC}{dt} + AB\,.\,AC \cos\alpha \frac{d\alpha}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + 400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}\right)$$

$$= 27{,}32\,\text{cm}^2/\text{s}.$$

3.43 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2$

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 24$ $\quad \boxed{x = \pm 2}$.

3.44 $S = \frac{6a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

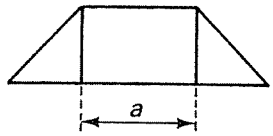


FIG. 7

$\mathrm{d}S/\mathrm{d}t = 3\sqrt{3}\, a\, \mathrm{d}a/\mathrm{d}t$
$= 3\sqrt{3} \times 1 \times 0{,}02 = 0{,}1\,\text{m}^2/\text{s}.$

3.45 $V = \pi R^2 h + \frac{2\pi}{3} R^3$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 2\pi R h \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \pi R^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + 2\pi R^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$$

$$= \pi \cdot 10(40 \times 1 + 10 \times 2 + 2 \times 10 \times 1)$$

$$= 2\,512\,\text{m}^3/\text{mn}.$$

3.46 $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$

$$\mathrm{d}V = \frac{\pi}{3}(R^2\,\mathrm{d}h + 2Rh\,\mathrm{d}R),$$

$$\mathrm{d}V = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{2h}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -2\frac{15}{10} \cdot 5 = -15\,\text{cm/s}.$$

3.47 $P = RI^2,$

$\Delta P = 2RI\Delta I = 2 \cdot 100 \cdot 10^{-2} = 2$ watts.

3.48 $I = E/(R+r).$

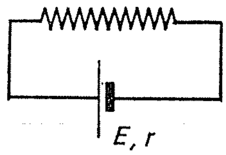


FIG. 8

1) $$\Delta I = -\frac{E}{(R+r)^2}\Delta R$$

$$= -\frac{100}{(50)^2}\,.\,2 = -8\times10^{-2}\,\text{A}, \qquad \boxed{\Delta I = -80\,\text{mA}}\,.$$

2) $$V = \frac{RE}{R+r}$$

$$\Delta V = \frac{rE}{(R+r)^2}\Delta R = \frac{10\,.\,100}{(50)^2}2 = 0{,}8 \text{ volt}.$$

3) $P = VI$
$\mathrm{d}P = (V\mathrm{d}I/\mathrm{d}R + I\mathrm{d}V/\mathrm{d}R)\mathrm{d}R = V\mathrm{d}I + I\mathrm{d}V$
$\Delta P = -80\times8\times10^{-2} + 2\times0{,}8 = -4{,}8$ watts.

3.49 $L = 4\pi N^2 S/l\,.\,10^9$

$$\Delta L = -\frac{4\pi N^2 S}{10^9}\frac{\Delta l}{l^2} = -4\pi\frac{10^9}{10^9}\cdot\frac{1}{2\,500} = -5\times10^{-3}\,\text{H} = -5\,\text{mH}.$$

3.50 $Z = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 L^2 f^2}$

$$\Delta Z = \frac{4\pi^2 L^2 f\Delta f}{\sqrt{R^2+4\pi^2L^2f^2}} = \frac{4\pi^2\times9\times10^2\times50\times2}{\sqrt{10^8+4\pi^2\times9\times25\times10^4}} \approx -260\,\Omega.$$

3.51 $Z = 1/2\pi Cf$,

$$\Delta Z = -\frac{1}{2\pi Cf^2}\Delta f = -\frac{1}{2\pi\times25\,.\,10^{-3}}\times2 = 12{,}8\,\Omega.$$

3.52 $T = 2\pi\sqrt{LC}$

$$\Delta T = \pi\sqrt{L/C}\,\Delta C$$

$$= \pi\sqrt{10^{-3}/10^{-9}}\times10\times10^{-12} = 3{,}14\times10^{-8}\,\text{s} = 0{,}0314\,\mu\text{s}.$$

3.53 $\text{tg}\,\varphi = 2\pi Lf/R$

a) $$\Delta(\text{tg}\,\varphi) = \frac{2\pi L}{R}\Delta f = \frac{2\pi\times100}{200}\times2 = 6{,}28$$

b) $$\Delta(\text{tg}\,\varphi) = -\frac{2\pi Lf}{R^2}\Delta R = -2\pi\times\frac{100\times50}{(200)^2}5 = -3{,}92.$$

3.54 $W = \frac{1}{2}mv^2$,
$\Delta W = mv\Delta v = 500$ J.

CHAPITRE 4

Sens de variation des fonctions

4.1 $y' = 2(x-3)$.
La fonction est décroissante sur $]-\infty, 3]$ et croissante sur $[3, +\infty[$.

4.2 $y' = 3x^2+6x+2$. La dérivée a deux racines :

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{3}}{3}, \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{3}}{3};$$

elle est positive si $x \leqslant x_1$ et si $x \geqslant x_2$, négative entre les racines. Donc la fonction est croissante sur $]-\infty, x_1]$ et sur $[x_2, +\infty[$; elle est décroissante sur $[x_1, x_2]$.

4.3 $y' = 4(x^3+1) = 4(x+1)(x^2-x+1)$. Comme x^2-x+1 ne prend que des valeurs strictement positives sur **R**, la dérivée a le signe de $x+1$. Donc la fonction est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et croissante sur $[-1, +\infty[$.

4.4
$$\begin{aligned} y' &= 3(x+1)^2(2x-1)^2+4(x+1)^3(2x-1) \\ &= (x+1)^2(2x-1)(10x+1). \end{aligned}$$

La dérivée s'annule sans changer de signe pour $x = -1$. La fonction est croissante sur $]-\infty, -1/10]$ et sur $[1/2, +\infty[$, décroissante sur $[-1/10, 1/2]$.

4.5 $y' = -\dfrac{22}{(2x-3)^2}$. La dérivée ne s'annule pas. La fonction est décroissante sur $]-\infty, 3/2[$ et sur $]3/2, +\infty[$.

4.6 $y' = \dfrac{2x}{(1-2x^2)^{3/2}}$. La fonction est décroissante sur $]-\sqrt{2}/2, 0]$ et croissante sur $[0, \sqrt{2}/2[$.

4.7 $y' = \dfrac{2(1-2x^2)}{(2x^2+1)^2}$. La fonction est croissante sur $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$, décroissante sur $]-\infty, -\sqrt{2}/2]$ et sur $[\sqrt{2}/2, +\infty[$.

4.8 $y' = \dfrac{(x+5)(x-1)^2}{(x+1)^3}$. La fonction est croissante sur $]-\infty, -5]$ et sur $[-1, +\infty[$, décroissante sur $[-5, -1]$.

Points d'inflexion

4.9 $y' = 3x^2-12x-36, \qquad y'' = 6x-12 = 6(x-2)$.
Point d'inflexion : $x = 2, y = -58$.

4.10 $y = x^3+3x^2-4$, $y'' = 6(x+1)$.
Point d'inflexion : $x = -1$, $y = -2$.

4.11 $y = x^3+x^2-2x$, $y'' = 6x+2$.
Point d'inflexion : $x = -1/3$, $y = 20/27$.

4.12 $y' = 4x^3-12x^2$, $y'' = 12x^2-24x = 12x(x-2)$.
Points d'inflexion : $x = 0$, $y = 10$ et $x = 2$, $y = -6$.

4.13 $y' = 2x-1/x^2$, $y'' = 2+2/x^3$.
Point d'inflexion : $x = -1$, $y = 0$.

4.14 $y' = 1-4/x^2$, $y'' = 8/x^3$.
Il n'y a pas de point d'inflexion.

4.15 $y' = 1+216/x^3$, $y'' = -648/x^4$.
Il n'y a pas de point d'inflexion.

4.16 $y' = 3x^2-48/x^2$, $y'' = 6x+96/x^3 = \dfrac{6(x^4+16)}{x^3}$.

Il n'y a pas de point d'inflexion.

4.17 $y' = (x-1)^3+3x(x-1)^2$,
$$y'' = 6(x-1)^2+6x(x-1) = 6(x-1)(2x-1) .$$
Points d'inflexion : $x = 1/2$, $y = -1/16$ et $x = 1$, $y = 0$.

4.18 $y = x^2-16/x$, $y' = 2x+16/x^2$, $y'' = 2(1-16/x^3)$.
Point d'inflexion : $x = 2\sqrt[3]{2}$, $y = 0$.

4.19 Décomposons la fraction rationnelle $\dfrac{X^2-3X-19}{X+4}$ en éléments simples :

$$\frac{X^2-3X-19}{X+4} = X-7+\frac{9}{X+4}.$$

D'où $y' = 1-9/(x+4)^2$, $y'' = 18/(x+4)^3$. Il n'y a pas de point d'inflexion.

4.20 De même :

$$\frac{1}{X^2-5X+6} = \frac{1}{(X-2)(X-3)} = \frac{1}{X-3}-\frac{1}{X-2}.$$

d'où

$$y' = \frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-3)^2}, \qquad y'' = -\frac{2}{(x-2)^3}+\frac{2}{(x-3)^3}.$$

Réduisons au même dénominateur :

$$y'' = 2\frac{3x^2-15x+19}{(x^2-5x+6)^3}.$$

$\Delta = 225-228 = -3 < 0$. Il n'y a pas de point d'inflexion.

4.21 $y = x^3-3x^2+4$, $\qquad y'' = 6(x-1)$.
Point d'inflexion : $x = 1$, $y = 2$.

4.22 $y' = \text{Arc tg}\, x + \dfrac{x}{1+x^2}$, $\qquad y'' = \dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2}{(1+x^2)^2}$.

Il n'y a pas de point d'inflexion.

4.23 $y' = \text{Arc tg}\, x + \dfrac{x+2}{1+x^2}$, $\qquad y'' = \dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1-4x-x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-2x)}{(1+x^2)^2}$.

Point d'inflexion : $x = 1/2$, $y = \frac{5}{2}\,\text{Arc tg}\,\frac{1}{2}$.

4.24 La fonction est périodique, de période 2π.
$y' = 2\cos x+\cos 2x$, $\qquad y'' = -2(\sin x+\sin 2x) = -2\sin x(1+2\cos x)$.
Sur l'intervalle $[0, 2\pi[$, quatre points d'inflexion :
$(0, 0)$, $(2\pi/3,\ 3\sqrt{3}/4)$, $(4\pi/3,\ -3\sqrt{3}/4)$, $(\pi, 0)$.

Recherche des maximums et des minimums

4.25 $y' = 1-\dfrac{1}{x^2}$.

La dérivée s'annule pour $\begin{cases} x = -1 : \text{maximum} \\ x = 1 : \text{minimum}. \end{cases}$

4.26 $y' = 3\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

La dérivée s'annule pour $\begin{cases} x = -1 : \text{minimum} \\ x = 1 : \text{maximum}. \end{cases}$

4.27 $y' = 6x-\dfrac{10}{x^2} = 2\dfrac{(3x^3-5)}{x^2}$.

La dérivée s'annule pour $x = \sqrt[3]{5/3}$: minimum.

4.28 $y' = \dfrac{3(1-2x^3)}{(1+x^3)^2}$.

La dérivée s'annule pour $x = 1/\sqrt[3]{2}$: maximum.

4.29 $y' = 3(x^2 - 16/x^2)$.

La dérivée s'annule pour $\begin{cases} x = -2 : \text{maximum} \\ x = 2 : \text{minimum}. \end{cases}$

4.30 $y' = \dfrac{6-x^2}{(x^2-5x+6)^2}$

La dérivée s'annule pour $\begin{cases} x = -\sqrt{6} : \text{minimum} \\ x = \sqrt{6} : \text{maximum}. \end{cases}$

4.31 $y' = 3x^2+2x-2$.

La dérivée s'annule pour $\begin{cases} x = (-1-\sqrt{7})/3 : \text{maximum} \\ x = (-1+\sqrt{7})/3 : \text{minimum}. \end{cases}$

4.32 La fonction est périodique, de période 2π. Cherchons les maximums et minimums sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.
$y' = 3 \cos x \sin^2 x$.

La dérivée s'annule pour $\begin{cases} x = \pi/2 \quad : \text{maximum} \\ x = 3\pi/2 : \text{minimum}. \end{cases}$

La dérivée s'annule également, mais sans changer de signe pour $x = 0$, $x = \pi$.

4.33 La fonction est périodique, de période π. Cherchons les maximums et les minimums sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2[$.
$y' = \sin 2x + 2 \cos 2x$.

La dérivée s'annule pour $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \operatorname{Arc\,tg}(-2) \qquad\qquad : \text{minimum} \\ x = \frac{1}{2} \operatorname{Arc\,tg}(-2) + \pi/2 : \text{maximum}. \end{cases}$

4.34 $y' = 4(x-2)x(x-4)$.

La dérivée s'annule pour $\begin{cases} x = 0 : \text{minimum} \\ x = 2 : \text{maximum} \\ x = 4 : \text{minimum}. \end{cases}$

4.35 $y' = -\dfrac{1}{x^2}\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$.

La dérivée s'annule pour $x = -2$: minimum.

4.36 $y' = \dfrac{x^2-8x+12}{(x-4)^2}$.

La dérivée s'annule pour $\begin{cases} x = 2 : \text{maximum} \\ x = 6 : \text{minimum}. \end{cases}$

4.37 La fonction est définie sur $[-4, 4]$, et dérivable sur $]-4, 4[$.

$$y' = \sqrt{16-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}.$$

La dérivée s'annule pour $\begin{cases} x = -2\sqrt{2} : \text{minimum} \\ x = 2\sqrt{2} : \text{maximum.} \end{cases}$

4.38 $y' = \dfrac{x^2(x^2-36)}{(x^2-12)^2}$.

La dérivée s'annule pour $\begin{cases} x = -6 : \text{maximum} \\ x = 0 : \text{point d'inflexion} \\ x = +6 : \text{minimum.} \end{cases}$

4.39 La fonction est définie sur $[-2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}]$ et dérivable sur $]-2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}[$.

$$y' = 2x\sqrt{24-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{24-x^2}} = \frac{3x(16-x^2)}{\sqrt{24-x^2}}.$$

La dérivée s'annule pour $\begin{cases} x = -4 : \text{maximum} \\ x = 0 : \text{minimum} \\ x = 4 : \text{maximum.} \end{cases}$

4.40 $y' = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{(1-x)^2} = -\left(\dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{(1-x)^2}\right)$.

La fonction n'a ni maximum ni minimum.

4.41 $y' = -2\dfrac{4x+7}{(x-2)^3}$.

La dérivée s'annule pour $x = -1{,}75$: minimum.

4.42 $y' = a\left(\dfrac{1-bx^2}{(1+bx^2)^2}\right)\left(\dfrac{1}{\left[1+\left(\dfrac{ax}{1+bx^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\dfrac{ax}{1+bx^2}\right)$.

La dérivée s'annule pour $\begin{cases} x = -1/\sqrt{b} : \text{maximum} \\ x = 0 \quad : \text{minimum} \\ x = 1/\sqrt{b} : \text{maximum.} \end{cases}$

CHAPITRE 6

Asymptotes

6.1 Lorsque x tend vers a, y tend vers $+\infty$.
Asymptote : droite d'équation $x=a$.

6.2 Lorsque x tend vers $+\infty$, y/x tend vers $+\infty$.
Le graphe a donc une branche parabolique; il n'y a pas d'asymptote.

6.3 Lorsque x tend vers $-\infty$, y/x tend vers -1

$$y+x = x\left(-\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1\right) = x\frac{1-x/(x-1)}{\sqrt{x/(x-1)}+1} = \frac{x}{x-1}\,\frac{-1}{\sqrt{x/(x-1)}+1}.$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, $y+x$ tend vers $-1/2$.
Asymptote : droite d'équation $y=-x-1/2$.
Lorsque x tend vers 1, par valeurs supérieures, y tend vers $+\infty$.
Asymptote : droite d'équation $x=1$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, y/x tend vers $+1$

$$y-x = x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right) = x\frac{x/(x-1)-1}{\sqrt{x/(x-1)}+1} = \frac{x}{x-1}\,\frac{1}{\sqrt{x/(x-1)}+1}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $y-x$ tend vers $+1/2$.
Asymptote : droite d'équation $y=x+1/2$.

6.4 Lorsque x tend vers 0, y tend vers $\pm\infty$.
Asymptote : droite d'équation $x=0$ (axe Oy).

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{a}+\frac{a^2}{x^2}.$$

Lorsque x tend vers $\pm\infty$, y/x tend vers $\pm\infty$.

6.5 Lorsque x tend vers 2, y tend vers $\pm\infty$.
Asymptote : droite d'équation $x=2$.

$$\frac{y}{x} = \frac{2x^2-2x-1}{x(x-2)}.$$

Lorsque x tend vers $\pm\infty$, y/x tend vers 2

$$y-2x = \frac{2x^2-2x-1-2x^2+4x}{x-2} = \frac{2x-1}{x-2}.$$

Lorsque x tend vers $\pm\infty$, $y-2x$ tend vers 2.
Asymptote : droite d'équation $y=2x+2$.

6.6 La fonction est définie sur $]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$.
Lorsque x tend vers -1 par valeurs inférieures, y tend vers $+\infty$.
Asymptote : droite d'équation $x=-1$.
Lorsque x tend vers ∞, $y-x$ tend vers 1.
Asymptote : droite d'équation $y=x+1$.

6.7 La fonction est définie sur $]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[$.
Lorsque x tend vers 2 par valeurs supérieures, y tend vers $+\infty$.
Asymptote : droite d'équation $x=2$.
Lorsque x tend vers $\pm\infty$, y/x tend vers 1.

$$y-x = x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}-1\right) = x\frac{\dfrac{x-1}{x-2}-1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}+1} = \frac{x}{x-2}\,\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}+1}.$$

Lorsque x tend vers ∞, $y-x$ tend vers $1/2$.
Asymptote : droite d'équation $y=x+1/2$.

6.8 Lorsque x tend vers $5/3$, y tend vers $\pm\infty$.
Asymptote : droite d'équation $x=5/3$.
Lorsque x tend vers $\pm\infty$, y tend vers $2/3$.
Asymptote : droite d'équation $y=2/3$.

6.9 Lorsque x tend vers $\pm\infty$, y/x tend vers $+\infty$.
Il n'y a pas d'asymptote.

6.10 Lorsque x tend vers 0, y tend vers $\pm\infty$.
Asymptote : droite d'équation $x=0$ (axe Oy).
Lorsque x tend vers $\pm\infty$, $y-ax$ tend vers 0.
Asymptote : droite d'équation $y=ax$.

6.11 Lorsque x tend vers ± 1, y tend vers $\pm\infty$.

Asymptotes : droites d'équation $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$

Lorsque x tend vers $\pm\infty$, y tend vers 2.
Asymptote : droite d'équation $y=2$.

6.12 Lorsque x tend vers a, y tend vers $\pm\infty$.
Asymptote : droite d'équation $x=a$.
Lorsque x tend vers ∞, y/x tend vers $\pm\infty$.

6.13 Lorsque x tend vers $\pm\infty$, y/x tend vers $1/2$.

$$y-\frac{x}{2}=\frac{x^3-2x+1-x^3-x^2-x}{2x^2+2x+2}=\frac{-x^2-3x+1}{2x^2+2x+2}.$$

Lorsque x tend vers $\pm\infty$, $y-x/2$ tend vers $-1/2$.
Asymptote : droite d'équation $y=x/2-1/2$.

6.14 Lorsque x tend vers $1/2$ par valeurs inférieures, y tend vers $+\infty$.
Asymptote : droite d'équation $x=1/2$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, y/x tend vers $+\infty$.

Variation de fonctions

6.15 $f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1)$; $f'(x)$ a le signe de x^2-1, polynôme du second degré qui s'annule pour $x=+1$ et $x=-1$; d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe coupe l'axe Oy au point $I=(0,\ -4)$, qui est un centre de symétrie; la tangente en ce point a pour coefficient directeur $f'(0)$, soit -6; l'équation de cette tangente est $y+4=-6(x-0)$, soit $y=-6x-4$.

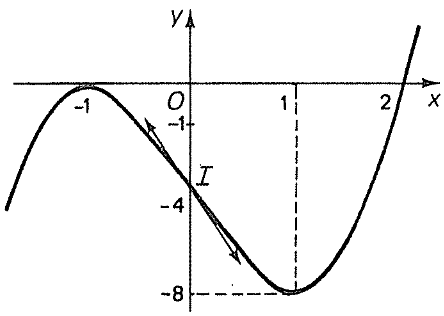


FIG. 1

Puisque $f'(x)=12x$ s'annule en changeant de signe, I est un point d'inflexion.

Le tableau de variation montre que $f(x)$ s'annule pour $x=-1$ et s'annule pour une autre valeur de x, strictement supérieure à 1.

6.16 L'ensemble de définition est $\mathbf{R}$; la fonction étant paire, on peut limiter son étude à l'intervalle $[0, +\infty[$.

$$f'(x)=-8x^3+2x=2x(1-4x^2)=2x(1-2x)(1+2x).$$

Le signe de $f'(x)$, qui se présente comme un produit de facteurs, est alors donné par le tableau suivant :

x	0		1/2		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$1-2x$		$+$	0	$-$	
$1+2x$		$+$		$+$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	

Lorsque $x \to +\infty$, $f(x) = -2x^4\left(1 - \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{3}{2x^4}\right)$ tend vers $-\infty$, d'où le tableau de variation :

x	0		1/2		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	25/8	$\searrow$	$-\infty$

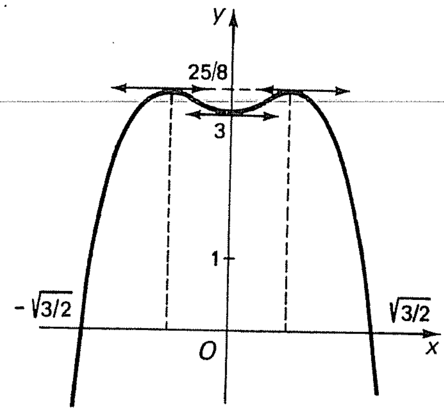


FIG. 2

6.17 La fonction est définie pour $x \neq 4$.

Dérivée : $f'(x) = \dfrac{13}{(4-x)^2}$. Cette dérivée est positive. La fonction f est croissante.

Lorsque $x \to \pm\infty, f(x) \to -3$, la droite parallèle à l'axe Ox, d'équation $y = -3$, est donc asymptote à la courbe.

Lorsque $x \to 4$, $|f(x)| \to \pm\infty$. Pour connaître le signe de $f(x)$, observons que, pour x positif, le numérateur de $f(x)$ est positif : le dénominateur $4-x$ est positif pour $x<4$, négatif pour $x>4$.

x	$-\infty$		4			$+\infty$
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖	$-\infty$	$\nearrow$	-3

La droite d'équation $x=4$ est asymptote à la courbe.

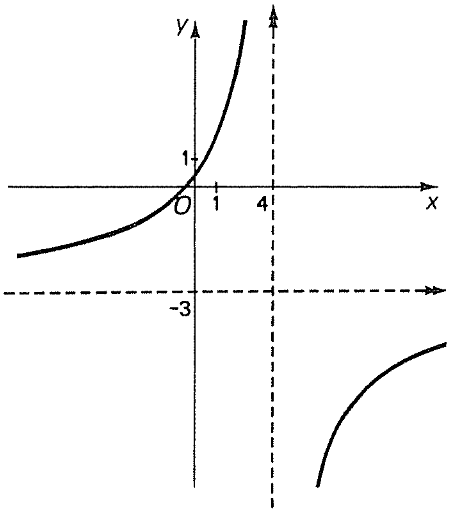


FIG. 3

6.18 La fonction est définie pour $x \neq 0$.

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2}.$$

Si x tend vers $\pm\infty$, $f(x)$ tend vers $\pm\infty$. Comme $f(x)-x-1 = -2/x$ tend vers 0, la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote.

x	$-\infty$		0			$+\infty$
y'		$+$	‖		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Le point (0, 1) est centre de symétrie du graphe.

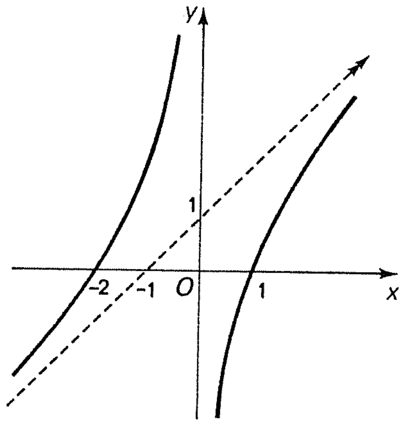


FIG. 4

6.19 Ensemble de définition : $]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$. La fonction étant impaire, l'intervalle d'étude est $]3, +\infty[$.

$$f'(x) = -\frac{18}{(x^2-9)^{3/2}}.$$

x	3		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2

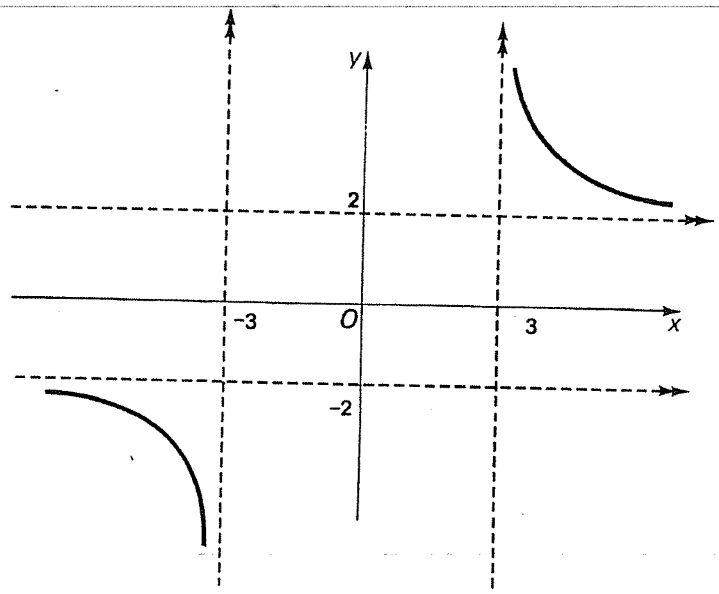


FIG. 5

Asymptotes : droites d'équations $x = 3$, $y = 2$, et leurs symétriques par rapport à O.

6.20 La fonction est définie pour $x \neq -3/2$.

$$y' = -\frac{13}{(2x+3)^2}.$$

x	$-\infty$		$-3/2$			$+\infty$
y'		$-$	‖		$-$	
y	$-1/2$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$		$\searrow$	$-1/2$

Les droites d'équations $x = -3/2$ et $y = -1/2$ sont asymptotes au graphe. Leur point d'intersection est centre de symétrie.

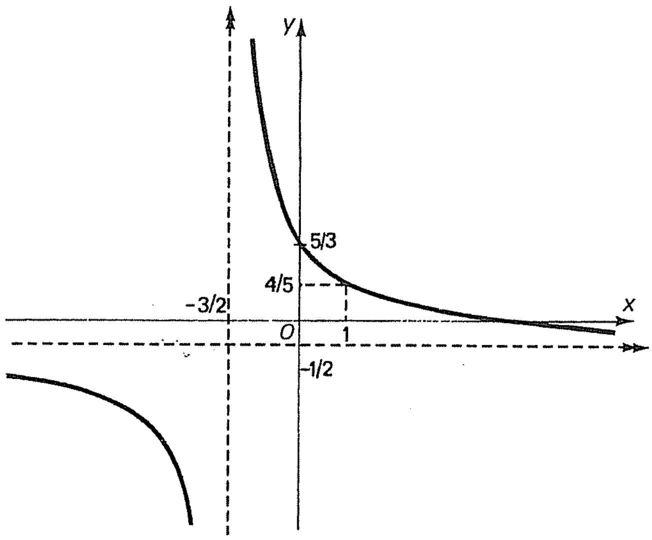


FIG. 6

6.21 $$y = \frac{x^2+24}{x+1} = x - 1 + \frac{25}{x+1}.$$

Intervalle de définition $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

Valeurs aux bornes $x \to -1 \quad y \to \pm\infty$,
$x \to \pm\infty \quad y \to \pm\infty \quad$ (Asymptote $y = x - 1$).

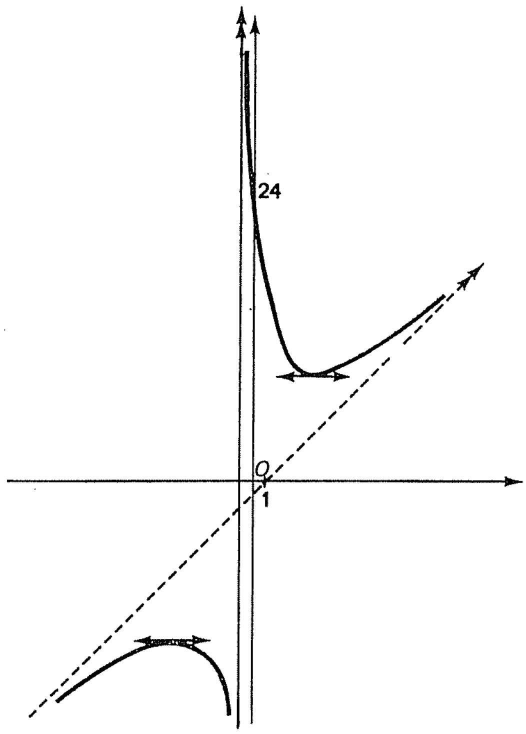


FIG. 7

Calcul de la dérivée $y' = 1 - \dfrac{25}{(x+1)^2}$, $y'(-6) = y'(4) = 0$.

x	$-\infty$		-6		-1		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-12	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

6.22 La fonction est définie pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$.

Valeurs aux bornes : $x \to -1$, $y \to \pm\infty$
$x \to 1$, $y \to \pm\infty$
$x \to \infty$, $y \to 1$.

Calcul de la dérivée :

$$y' = -\frac{x^2+4x+1}{(x^2-1)^2}, \qquad y'(-2+\sqrt{3}) = y'(-2-\sqrt{3}) = 0.$$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-1		$-2+\sqrt{3}$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
y	1	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

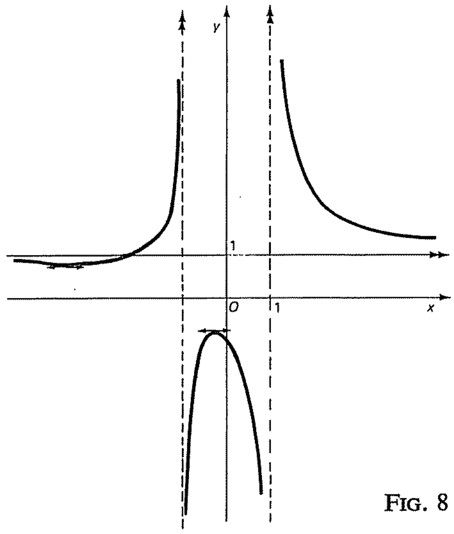


FIG. 8

6.23 La fonction f est définie pour $x^2+2x-1 \neq 0$, donc si x est différent de x_1 et de x_2, où $x_1 = -1-\sqrt{2}$ et $x_2 = -1+\sqrt{2}$.

$$f'(x) = \frac{(4x-3)(x^2+2x-1)-(2x+2)(2x^2-3x+1)}{(x^2+2x-1)^2}$$

$$= \frac{7x^2-6x+1}{(x^2+2x-1)^2}.$$

$f'(x)$ a le signe du trinôme $7x^2-6x+1$, dont les racines sont

$$x_3 = \frac{3-\sqrt{2}}{7} \quad \text{et} \quad x_4 = \frac{3+\sqrt{2}}{7}.$$

x	$-\infty$		x_1		x_3		x_2		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	y_3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	y_4	$\nearrow$	2

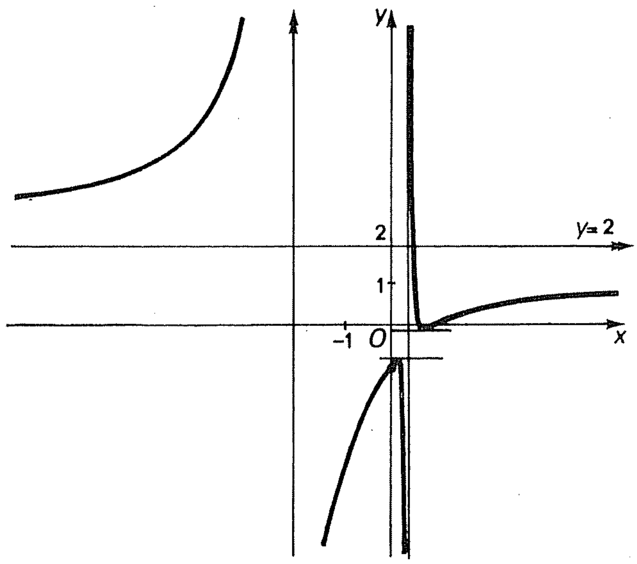


FIG. 9

6.24 Le nombre ω, désignant une fréquence, varie dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

$$f'(\omega) = -LC\frac{(L+1/C\omega^2)(L\omega-1/C\omega)}{[R^2+(L\omega-1/C\omega)^2]^{3/2}}.$$

ω	0		$1/\sqrt{LC}$		$+\infty$
$f'(\omega)$		$+$	0	$-$	
$f(\omega)$	0	$\nearrow$	LC/R	$\searrow$	0

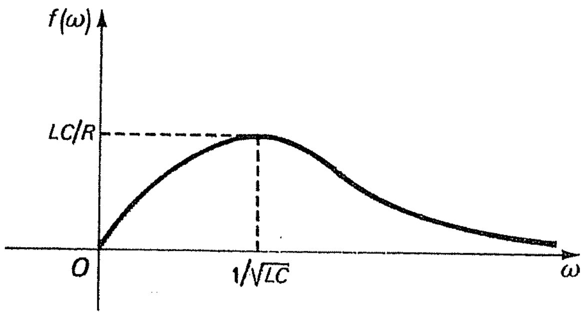


FIG. 10

6.25 Intervalle de définition : $[0, +\infty[$.

Valeurs aux bornes : $R = 0, \quad y = 0.$

$R \to +\infty, \quad y \to 1/C\omega.$

$$y' = \frac{1}{(1+R^2 C^2 \omega^2)^{3/2}}, \qquad y' > 0.$$

R	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	$1/C\omega$

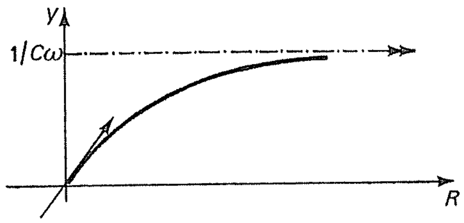


FIG. 11

CHAPITRE 7

7.1 $x^3(1-x)^3 = x^3-3x^4+3x^5-x^6$

$$\int x^3(1-x)^3\,dx = \frac{x^4}{4}-\frac{3x^5}{5}+\frac{x^6}{2}-\frac{x^7}{7}.\quad \text{D'où}\quad I = 1/140.$$

7.2 Effectuons le changement de variable $t = 1+x$. Alors

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{1+x}.$$

D'où $\quad I = 2(\sqrt{9}-\sqrt{4}) = 2.$

7.3 $$\int (1+\sqrt[3]{x})\,dx = x+\frac{3}{4}x^{4/3}.\quad \text{D'où}\quad I = 8+\frac{3}{4}8^{4/3}-1-3/4 = 73/4.$$

7.4 $\sin 3x = 3\sin x-4\sin^3 x,\qquad \dfrac{\sin 3x}{\sin x} = 3-4\sin^2 x = 1+2\cos 2x.$

$$\int \frac{\sin 3x}{\sin x}dx = x+\sin 2x.\quad \text{D'où}\quad I = \pi/2.$$

7.5 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\qquad \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}.$

D'où $\quad I = \left[-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}\right]_{-3}^{-1} = 10/9.$

7.6 $\sin 4x = 4\cos^3 x\sin x-4\cos x\sin^3 x$

$$\frac{\sin 4x}{\sin x} = 4\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x) = 4\cos x(1-2\sin^2 x).$$

Posons $t = \sin x$; alors $dt = \cos x\,dx$ et

$$I = 4\int_0^1 (1-2t^2)\,dt = 4\,[t-2t^3/3]_0^1 = 4/3.$$

7.7 Posons $x = 3t$; alors

$$I = \int_0^1 \frac{3\,dt}{9(1+t^2)} = \frac{1}{3}\,[\text{Arc tg } t]_0^1 = \pi/12.$$

7.8 $\sin^3 2x = \frac{1}{4}(3\sin 2x - \sin 6x)$, $\int \sin^3 2x \, dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\cos 2x + \frac{1}{6}\cos 6x\right)$.

D'où $I = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right) = 1/3$.

7.9 $x\sqrt{1+x} = (x+1-1)\sqrt{1+x} = (1+x)^{3/2} - \sqrt{1+x}$.

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}.$$

D'où $I = \frac{2}{5}(4^{5/2}-1) - \frac{2}{3}(4^{3/2}-1)$

ou enfin $I = 116/15$.

7.10 $\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{x+1-1}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - 2\sqrt{1+x}.$$

D'où $I = \frac{2}{3}(27-8) - 2(3-2) = 32/3$.

Applications des intégrales à des problèmes

7.11 $4y = x(x^2-4x+4) = x(x-2)^2$. La rivière rencontre la route aux points d'abscisses 0 et 2. L'aire du terrain compris entre la rivière et la route est

$$A = \int_0^2 y\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (x^3-4x^2+4x)\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2\right]_0^2$$
$$= 1/3\,\text{km}^2 = 33{,}3\,\text{ha}.$$

La valeur du terrain est donc 333 000 F.

7.12 $\frac{d\alpha}{dt} = Kt + \omega_0 = \frac{\pi}{6}t + 4\pi$.

$$\alpha_{120} - \alpha_{60} = \int_{60}^{120}\left(\frac{\pi}{6}t + 4\pi\right)dt = \pi[t^2/12 + 4t]_{60}^{120} = 1\,140\,\pi.$$

Le nombre de tours effectués pendant la deuxième minute est :

$$N = (\alpha_{120} - \alpha_{60})/2\pi = 570 \text{ tours}.$$

7.13 Soit l l'allongement total. Le travail total n'est pas $W=Fl$, puisque F varie à chaque instant. Plaçons-nous donc à la distance x de l'origine; la force de traction est alors :

$$F=kx\,.$$

Donnons à x un accroissement Δx. Pendant le déplacement Δx, le travail est

$$\Delta W=F\Delta x=kx\Delta x\,.$$

Lorsque $x=0{,}001$ m, nous savons que $F=30$ N. Donc

$$k=30\,000\ \mathrm{N/m}\,.$$

On obtient le travail total (avec $l=0{,}02$ m) en intégrant de 0 à l :

$$W=\int_0^l 30\,000\,x\,\mathrm{d}x=\frac{30\,000}{2}\left[x^2\right]_0^{0,02}=15\,000(0{,}02)^2=6\,\mathrm{J}\,.$$

7.14 $\gamma=gR^2/(h-x)^2=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x\,.$

Donc :

$$v\,\mathrm{d}v=\frac{gR^2}{(h-x)^2}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{v_1} v\,\mathrm{d}v=\int_0^{x_1}\frac{gR^2}{(h-x)^2}\mathrm{d}x\,,$$

soit

$$\frac{v_1^2}{2}=gR^2\left(\frac{1}{h-x_1}-\frac{1}{h}\right)=\frac{gR^2x_1}{h(h-x_1)}$$

et

$$v_1=\sqrt{\frac{2gR^2x_1}{h(h-x_1)}}\,.$$

Application : $h=2R$, $x_1=R$; alors $v_1=\sqrt{gR}$.

7.15 La pression exercée sur une bande de hauteur Δz située à une distance z du fond est

$$\Delta f=\rho g(8-z)\,10\,\Delta z\,.$$

D'où

$$f=\int_0^4 10\,\rho g(8-z)\,\mathrm{d}z=10\,\rho g(8z-z^2/2)_0^4=240\,\rho g\,.$$

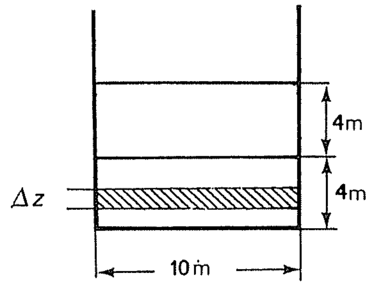


FIG. 1

7.16 On utilise la formule de Torricelli :

$$v_e^2 = 2gz \qquad (v_e : \text{vitesse d'écoulement}).$$

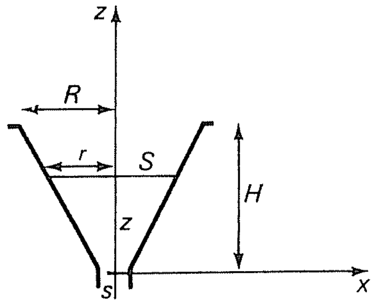


FIG. 2

D'autre part :

$$s v_e \, dt = -S \, dz \qquad (S = \pi r^2 = \pi R^2 \,.\, z^2/H^2),$$

d'où :

$$dt = -\frac{\pi R^2}{H^2 s} \frac{z^2}{\sqrt{2gz}} dz.$$

Le temps t pour que l'entonnoir se vide est donc :

$$t = \frac{\pi R^2}{H^2 s \sqrt{2g}} \int_0^H z^{3/2} \, dz = \frac{2}{5} \frac{\pi R^2}{H^2 s \sqrt{2g}} [z^{5/2}]_0^H,$$

$$t = \frac{2\pi R^2}{5s} \sqrt{\frac{H}{2g}}.$$

Fonctions logarithmes et exponentielles

8.1 $5^{2x} = e^{(2\ln 5)x}$; $\quad b = 2\ln 5$.

8.2 $x = (\ln y)/(2\ln 5)$.

8.3 $y = 10^5$; $\quad y = e^5$.

8.4 $e^{-x/3} = 1 - y/K \qquad x = -\ln(1-y/K)^3$.

8.5 $e^{2x} = \text{Arc}\sin y + 2k\pi$ ou $e^{2x} = \pi - \text{Arc}\sin y + 2k\pi$

$x = \frac{1}{2}\ln(\text{Arc}\sin y + 2k\pi)$ ou $x = \frac{1}{2}\ln(\pi - \text{Arc}\sin y + 2k\pi)$.

Dérivées des fonctions logarithmes et exponentielles

8.6 $y = e^u \qquad u = \sin 2x$

$y' = u'e^u = 2\cos 2x\, e^{\sin 2x}$.

8.7 $y = e^u, \qquad u = \sqrt{1-3x}, \qquad u' = -\dfrac{3}{2\sqrt{1-3x}}$;

$$y' = u'e^u = -\frac{3\exp(\sqrt{1-3x})}{2\sqrt{1-3x}}.$$

8.8 $y = e^u, \qquad u = \operatorname{tg} 1/x, \qquad u' = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{\cos^2 1/x}$;

$$y' = u'e^u = -\frac{1}{x^2}\frac{e^{\operatorname{tg} 1/x}}{\cos^2 1/x}.$$

8.9 $y = \ln u, \qquad u = \sin 4x, \qquad u' = 4\cos 4x$;

$y' = u'/u = 4\cot 4x$.

8.10 $y = \ln u, \qquad u = \operatorname{tg}\sqrt{x}, \qquad u' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{u'}{u} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}.$$

8.11 $y = \ln e^{\sin x} = \sin x,$

$y' = \cos x.$

8.12 $y = \operatorname{Arc}\sin u, \qquad u = \ln 2x, \qquad u' = 1/x$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln 2x)^2}}.$$

8.13 $y = uv, \qquad u = e^{4x}, \qquad v = \cos 3x;$

$y' = u'v + v'u = e^{4x}(4\cos 3x - 3\sin 3x).$

8.14 $y = uv, \qquad u = e^{-5x}, \qquad v = \operatorname{tg} 5x;$

$$y' = u'v + v'u = e^{-5x}\left(-5\operatorname{tg} 5x + \frac{5}{\cos^2 5x}\right) = \frac{5e^{-5x}(2-\sin 10x)}{2\cos^2 5x}.$$

8.15 $y = uv, \qquad u = e^{2x}, \qquad v = \ln 3x;$

$y' = u'v + v'u = e^{2x}(2\ln 3x + 1/x).$

8.16 $y = u/v, \qquad u = \ln 2x, \qquad v = \ln 3x$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{1}{x(\ln 3x)^2}(\ln 3x - \ln 2x) = \frac{\ln 3/2}{x(\ln 3x)^2}.$$

8.17 $y = 2\ln x + \ln\sqrt{1-x} \qquad y' = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2(1-x)}.$

8.18 $y = \ln\sqrt[4]{1+x^2} = \dfrac{1}{4}\ln(1+x^2) \qquad y' = \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1+x^2}.$

8.19 $y = \ln u, \qquad u = \ln x;$

$$y' = \frac{u'}{u} = \frac{1}{x\ln x}.$$

8.20 $y = -u^3 \qquad u = \ln x$

$$y' = -3u^2u' = -\frac{3}{x}(\ln x)^2.$$

8.21 $y = u^4, \qquad u = \dfrac{1}{2}\ln(1-4x^2), \qquad u' = -\dfrac{4x}{1-4x^2}$

$$y' = 4u^3u' = -\frac{2x[\ln(1-4x^2)]^3}{1-4x^2}.$$

8.22 $y = (\ln e^x)^5 = x^5, \qquad y' = 5x^4.$

8.23 $y = e^u, \qquad u = x \sin x, \qquad u' = x \cos x + \sin x;$

$y' = u' e^u = (x \cos x + \sin x) e^{x \sin x}.$

8.24 $y = e^u, \quad u = x^3, \quad u' = 3x^2;$

$y' = u' e^u = 3x^2 e^{x^3}.$

8.25 $y = e^u, \quad u = 1/\sqrt{x}, \quad u' = -1/(2x^{3/2});$

$$y' = u' e^u = -\frac{e^{1/\sqrt{x}}}{2x^{3/2}}.$$

8.26 $y = \sin u, \qquad u = \dfrac{e^x}{x}, \qquad u' = \dfrac{e^x}{x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right);$

$$y = u' \cos u = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cos \frac{e^x}{x}.$$

8.27 $y = \cos u, \qquad u = e^{2x};$

$y' = -u' \sin u = -2e^{2x} \sin e^{2x}.$

8.28 $y = \operatorname{tg}^3 u, \qquad u = e^x;$

$$y' = 3u' \operatorname{tg}^2 u (1 + \operatorname{tg}^2 u) = 3e^x \frac{\sin^2 e^x}{\cos^4 e^x}.$$

8.29 $y = uv, \qquad u = \ln \operatorname{tg} x, \qquad v = \sin 2x.$

$$\begin{aligned} y &= u'v + v'u \\ &= \frac{\sin 2x}{\cos^2 x \operatorname{tg} x} + 2 \cos 2x \ln \operatorname{tg} x = 2(1 + \cos 2x \ln \operatorname{tg} x). \end{aligned}$$

Dérivées secondes des fonctions logarithmes et exponentielles

8.30 $y'' = u''v + 2u'v' + uv'', \qquad u = e^{2x}, \qquad v = \cos 3x$

$$\begin{aligned} &= e^{2x}(4 \cos 3x - 12 \sin 3x - 9 \cos 3x) \\ &= -e^{2x}(5 \cos 3x + 12 \sin 3x). \end{aligned}$$

8.31 $y = -\ln x, \qquad y'' = 1/x^2.$

8.32 $y = \dfrac{1}{2} \ln x, \qquad y'' = -\dfrac{1}{2x^2}.$

8.33 $y = uv, \qquad u = x^2, \qquad v = e^{-x};$

$y'' = u''v + 2u'v' + uv'' = e^{-x}(x^2 - 4x + 2).$

8.34 $y = uv, \qquad u = x^2, \qquad v = \ln x\,;$

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv'' = 2\ln x + 4 - 1 = 2\ln x + 3\,.$$

8.35 $y = uv, \qquad u = 1/x, \qquad v = \ln x$

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv'' = \frac{2\ln x}{x^3} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^3} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}\,.$$

Différentielles des fonctions logarithmes et exponentielles

8.36 $\mathrm{d}y = \left(\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{4}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x\,.$

8.37 $\mathrm{d}y = \left(\mathrm{e}^x - \dfrac{4}{(x-2)^2}\right)\mathrm{d}x\,.$

8.38 $\mathrm{d}y = \left(\dfrac{1}{1+x} + \sin x + 1 - 2\cos x\right)\mathrm{d}x\,.$

8.39 $y = \mathrm{e}^{x\ln a} - 1, \qquad \mathrm{d}y = \ln a\; a^x \mathrm{d}x\,.$

8.40 $y = uv, \qquad u = (x^2-1), \qquad v = \mathrm{e}^{x^2}$

$$\mathrm{d}y = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v = 2x^3\,\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\,.$$

8.41 $y = \ln u, \qquad u = \dfrac{x+a}{x-a}, \qquad \mathrm{d}u = -\dfrac{2a}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x;$

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{2a}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x.$$

8.42 $y = \ln u, \qquad u = \ln x,$

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x\,.$$

8.43 $y = \mathrm{e}^{\cos x\,\ln x} = \mathrm{e}^{uv}$

$$\mathrm{d}y = (v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v)\,\mathrm{e}^{uv} = \left(-\sin x\,\ln x + \frac{\cos x}{x}\right)x^{\cos x}\mathrm{d}x\,.$$

8.44 $y = \ln u, \qquad u = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\,;$

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x\,,$$

$$dy = \frac{du}{u} = \frac{1+\sqrt{1-x^4}}{x\sqrt{1-x^4}}\,dx\,.$$

8.45 $y = e^{(\ln x)/x}$;

$$dy = \frac{1}{x^2}(1-\ln x)\,x^{1/x}\,dx\,.$$

8.46 $y = e^{\sin x \ln \cos x}$;

$$dy = \left(-\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x \ln \cos x\right)(\cos x)^{\sin x}\,dx\,.$$

8.47 $y = e^{\ln \operatorname{tg} x \ln x}$;

$$dy = \left(\frac{\ln x}{\operatorname{tg} x} + \ln x \operatorname{tg} x + \frac{\ln \operatorname{tg} x}{x}\right)(\operatorname{tg} x)^{\ln x}\,dx\,.$$

8.48 $y = n \ln \sin x, \qquad dy = n \cot x\,dx\,.$

8.49 $y = e^{x^n \ln a}, \qquad dy = n \ln a x^{n-1}\, a^{x^n}\,dx\,.$

8.50 $y = e^u, \qquad u = \sin^2 x, \qquad du = \sin 2x\,dx$

$$dy = e^u\,du = \sin 2x\, e^{\sin^2 x}\,dx\,.$$

8.51 $y = u/v, \qquad u = e^{x^2}, \qquad v = x;$

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} = \frac{(2x^2-1)\,e^{x^2}}{x^2}\,dx\,.$$

8.52 $y = \ln x - \ln\sqrt{x^2-x+1} = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)\,;$

$$dy = \left(\frac{1}{x} - \frac{2x-1}{2(x^2-x+1)}\right)dx = \frac{2-x}{2x(x^2-x+1)}\,dx\,.$$

8.53 $y = \frac{1}{3}\ln(x^3 - 3x^2 + 6x)\,;$

$$dy = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 3x + 6}\,\frac{dx}{x}\,.$$

Différentielles logarithmiques

8.54 $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{5}{2}\dfrac{dx}{x-1} + \dfrac{13}{2}\dfrac{dx}{x-3} - \dfrac{8\,dx}{x-2} = \dfrac{x^2+4}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx.$

8.55 $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2\,dx}{x} + \dfrac{x\,dx}{x^2+3} = \dfrac{3(x^2+2)}{x(x^2+3)}dx.$

8.56 $\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2x+3} - \dfrac{1}{2x}\right)dx = \dfrac{2x^2-3}{2(x+1)(2x+3)x}dx.$

8.57 $\ln y = (\ln x)^2, \qquad \dfrac{dy}{y} = \dfrac{2\ln x}{x}dx.$

8.58 $\dfrac{dy}{y} = \left(\ln\dfrac{2}{x} - 1\right)dx.$

8.59 $\dfrac{dy}{y} = \left[n\left(\dfrac{1}{x} + 1\right) + m\cot x\right]dx.$

8.60 $\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2x(1+\ln x)} - \dfrac{4}{1+x}\right)dx.$

8.61 $\ln y = \sqrt{x}\ln x$

$\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}dx.$

8.62 $\ln y = \sin x \ln x;$

$\dfrac{dy}{y} = \left(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)dx.$

8.63 $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2\,dx}{x} - \dfrac{x\,dx}{1+x^2} - \dfrac{x\,dx}{4+x^2} = \dfrac{5x^2+8}{x(1+x^2)(4+x^2)}dx.$

8.64 $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2}{x}dx + \dfrac{2x^3}{x^4-16}dx = \dfrac{4(x^4-8)}{x(x^4-16)}dx.$

8.65 $\ln y = 2\cos 3x \ln\sin 2x$

$\dfrac{dy}{y} = 2(2\cos 3x\cot 2x - 3\sin 3x\ln\sin 2x)\,dx.$

8.66 $\ln y = \ln(x+1) + \dfrac{\ln x}{x}$

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)dx.$$

8.67 $$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{4x}{4x^2-1} - \frac{x^2-1}{x(x^2-3)}\right)dx = \frac{2(2x^4-10x^2+1)}{x(4x^2-1)(x^2-3)}dx.$$

Variations de fonctions

8.68 $y = \ln\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\ln x.$

Intervalle de définition $]0, +\infty[$.
Valeurs aux bornes : $x \to 0$, $y \to -\infty$,
$x \to +\infty$, $y \to +\infty$.

Calcul de la dérivée :

$$y' = \frac{1}{2x}, \qquad y' > 0.$$

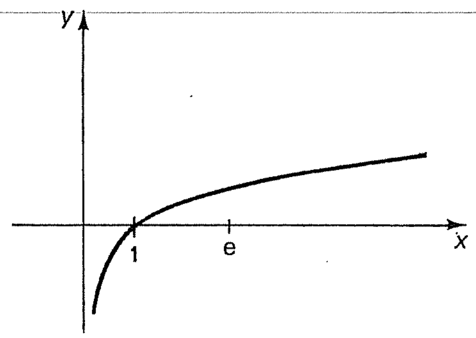


FIG. 1

8.69 Ensemble de définition : $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$. La fonction prend la même valeur en x et en $-2-x$. Le graphe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -1$. L'intervalle d'étude est $]-1, +\infty[$.

Valeurs aux bornes : $x \to +\infty$, $y \to +\infty$,
$x \to -1$, $y \to -\infty$.

Calcul de la dérivée :

$$y = \ln(1+x), \qquad y' = \frac{1}{1+x}, \qquad y' > 0.$$

x	-1		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

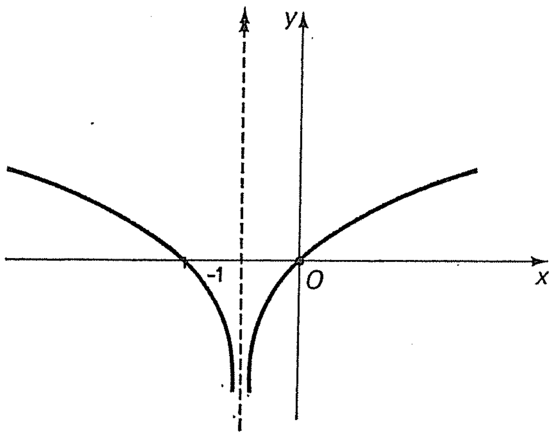


FIG. 2

8.70 Intervalle de définition : $]-\infty, +\infty[-\{0\}$.

Valeurs aux bornes : $x \to +\infty, \quad y \to +\infty$ (Asymptote : $y = x+1$)

$x \to -\infty, \quad y \to -\infty$

$x \to 0^-, \quad y \to 0$

$x \to 0^+, \quad y \to +\infty.$

Calcul de la dérivée :

$$y' = e^{1/x}(1-1/x) \qquad x<0 \quad \text{ou} \quad x>1 \quad y'>0$$
$$0<x<1 \qquad y'<0.$$

x	$-\infty$			0			1		$+\infty$
y'		$+$		$\Vert$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

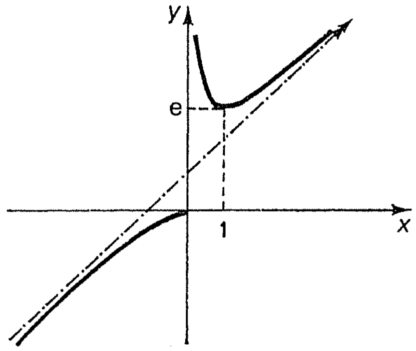


FIG. 3

8.71 Intervalle de définition : $]-\infty, +\infty[$.

Valeurs aux bornes : $x \to -\infty, \quad y \to 0,$

$x \to +\infty, \quad y \to +\pi/2.$

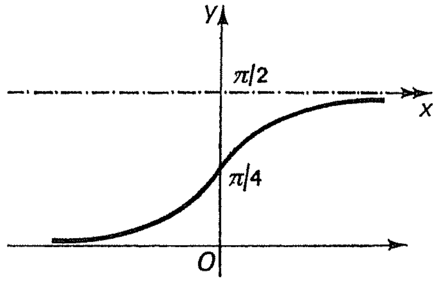


FIG. 4

Calcul de la dérivée : $\quad y' = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}, \qquad y' > 0.$

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	$\pi/2$

8.72 Intervalle de définition $]-\infty, +\infty[$. Le graphe se trouve entre ceux des fonctions $y = e^{-x}$ et $y = -e^{-x}$.

$$y' = e^{-x}(\cos x - \sin x)\,.$$

La dérivée s'annule lorsque $x = \pi/4 + k\pi$. Formons le tableau de la restriction de y à $[-\pi/2, \pi/2]$:

x	$-\pi/2$		0		$\pi/4$		$\pi/2$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	$-e^{\pi/2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}$	$\searrow$	$e^{-\pi/2}$

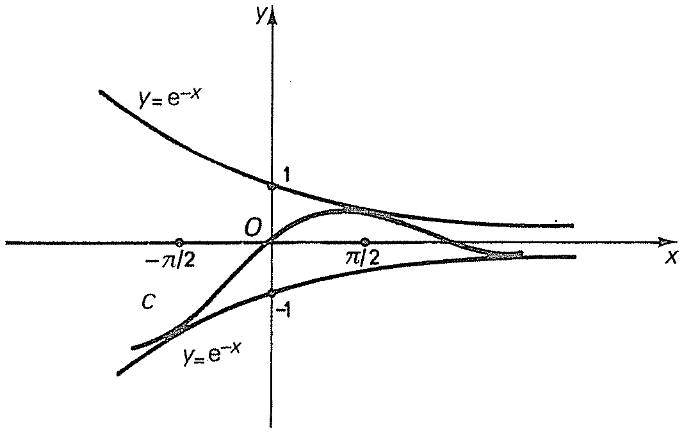


FIG. 5

8.73 Intervalle de définition : $[0, +\infty[$.

Valeurs aux bornes : $t = 0, \quad y = 0$

$t \to +\infty, \quad y \to E.$

Calcul de la dérivée :

$$y' = \frac{E}{CR}\, e^{-t/CR}, \qquad y' > 0.$$

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	E

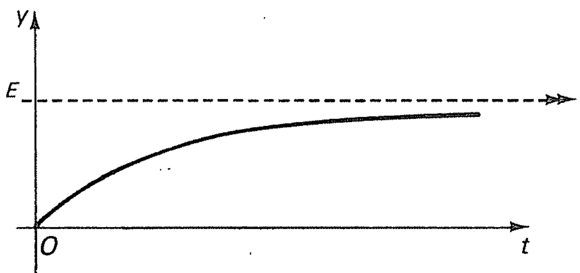


FIG. 6

8.74 Pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel n,

$$f(x+n) - f(x) = e^{-x} + e^{-x-1} + \cdots + e^{-x-n+1} = e^{-x}\,\frac{1 - e^{-n}}{1 - e^{-1}}.$$

La suite $(f(x+n))$ est donc convergente. Puisque f est monotone, $f(t)$ admet une limite a lorsque t tend vers $+\infty$, et, nécessairement,

$$f(x) = a - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-1}}.$$

Réciproquement, pour tout nombre réel a, la fonction f ainsi définie convient visiblement.

INDEX TERMINOLOGIQUE

Dépôt légal : Juillet 1985
Dépôt légal de la précédente édition : 4e trimestre 1973
JOUVE, 75001 PARIS
N° d'Imprimeur : 14510
Achevé d'imprimer : 15 juillet 1985

J. Quinet

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

Depuis de nombreuses années, et au fil de plusieurs réimpressions, plus de 100 000 étudiants, ingénieurs, techniciens et professionnels se sont formés avec succès aux mathématiques supérieures grâce à cet ouvrage.

Cette nouvelle édition, totalement *refondue et augmentée de sujets nouveaux*, est l'œuvre d'une équipe de professeurs enseignant aux niveaux universitaire, technique et professionnel.

Les règles qui ont guidé sa rédaction restent celles de J. QUINET :

- EXPLIQUER ET FAIRE COMPRENDRE.
- AVOIR TOUJOURS POUR BUT L'APPLICATION PRATIQUE.
- Exposer la théorie par les moyens les plus *simples* et les plus *rapides*, en distinguant l'*essentiel* de ce qui est secondaire.
- Illustrer tout calcul et toute théorie par des exemples, des exercices et des applications à l'électricité, l'électronique, la mécanique, etc.

Une innovation : les solutions de *tous* les exercices proposés sont données à la fin de chaque volume.

Essentiellement pédagogique et moderne, cet ouvrage est, par la réponse qu'il donne aux besoins de la technique industrielle actuelle, un instrument indispensable de FORMATION PERMANENTE.

Le COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATHIQUES SUPÉRIEURES comporte 5 tomes :

1. Algèbre
2. Fonctions usuelles
3. Calcul intégral et séries
4. Équations différentielles
5. Géométrie

Il est complété par le livre de J. Fourastié et B. Sahler "Probabilités et statistiques".

9 782040 056339

ISBN 2-04-005633-5

[redacted]5-07