ELECTRONIQUE

STABILITE
des SYSTEMES LINEAIRES

EXIGIBLES de SUP

I. CIRCUIT LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

I. 1) RÉGIME LIBRE, RÉPONSE À UN ÉCHELON

▹ distinguer sur un relevé, régime transitoire et régime permanent, au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon

▹ interpréter et utiliser les continuités (tension aux bornes de C, courant dans L)

▹ établir l'équation différentielle du 1er ordre pour une grandeur électrique d'un circuit à 1 ou 2 mailles

▹ prévoir l'évolution, à partir d'une analyse s'appuyant sur une représentation graphique de la dérivée temporelle de la grandeur en fonction de la grandeur, AVANT toute résolution de l'équation différentielle

▹ déterminer analytiquement la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon

▹ déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire

I. 2) MATHEMATIQUES

▹ systèmes linéaires de 2 équations à 2 inconnues

▹ équations différentielles linéaires à coefficients constants du premier ordre $y' + ay = f(x)$ et du second ordre

$y'' + a y' + by = f(x)$

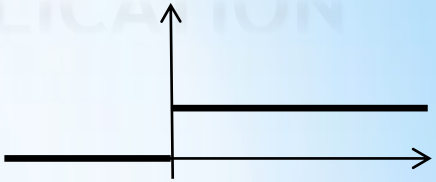
▹ trigonométrie circulaire et hyperbolique, exp et ln

▹ développements limités

▹ développement en série de Fourier d'une fonction périodique

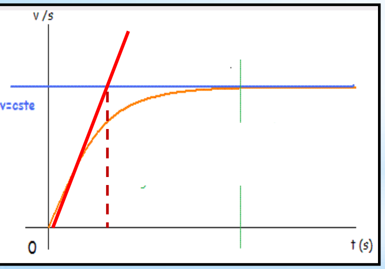
QUESTIONS et EXERCICES d'APPLICATION

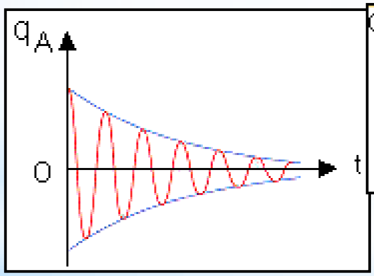
1) comment définir un <u>échelon</u> ?

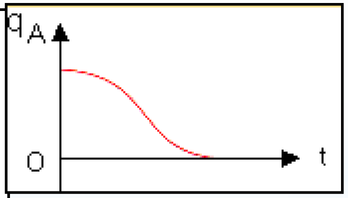


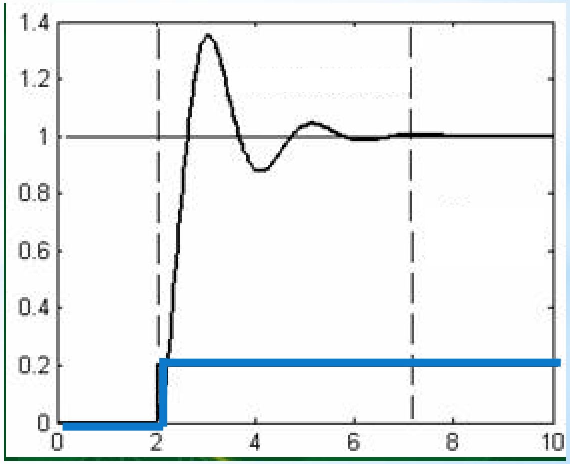
2) comment définir un régime <u>transitoire</u> ? <u>permanent</u> ? établi ?

3) <u>reconnaitre ces régimes</u>









Que représente le trait rouge ?

A quoi peuvent correspondre ces courbes expérimentalement ?

Que représente le trait pointillé ?

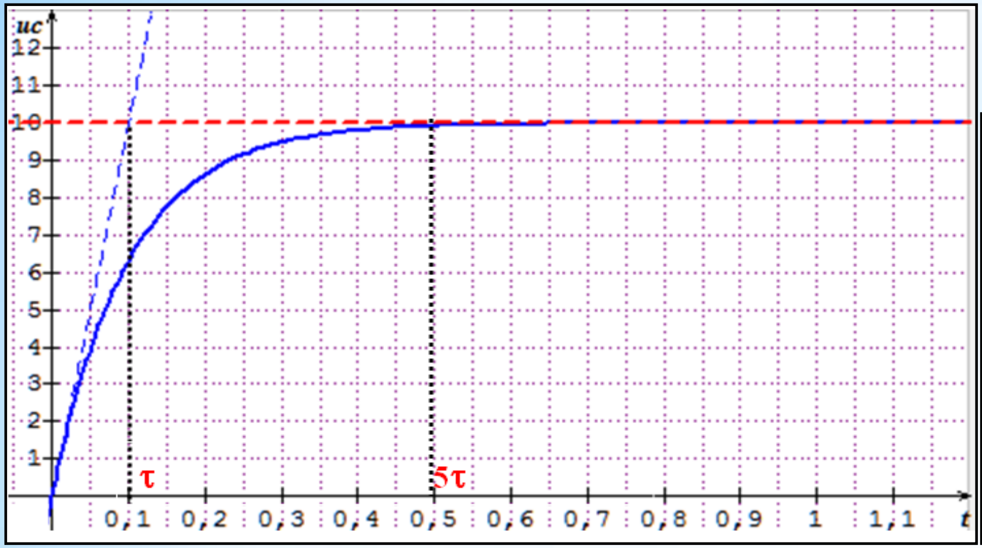
Son intersection avec l'axe t ?

En noir, signal de sortie
En bleu, signal d'entrée (échelon)

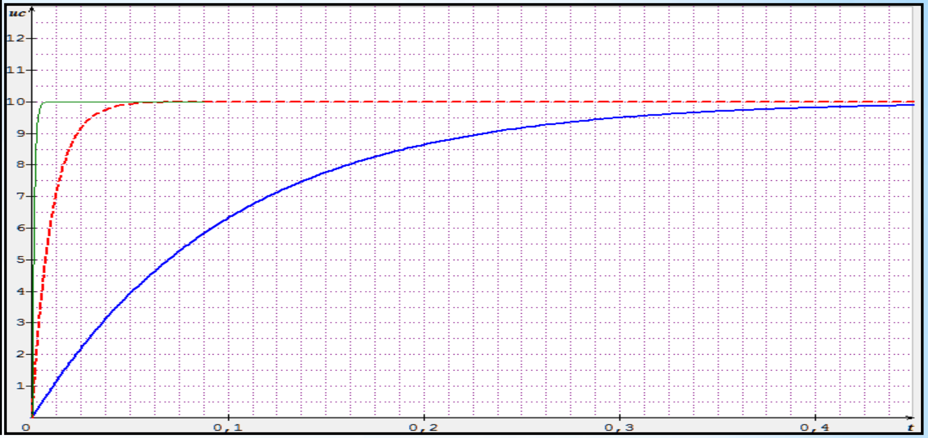
EXERCICE ❶:

Soit en série un générateur de tension idéal (E = 10V), une résistance (R = 1000 Ω) et une capacité parfaite C = 100µF initialement non chargée. Le circuit est fermé à t = 0 et on appelle u_C la tension aux bornes de C en convention récepteur. Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait $u_C(t)$, $u_C(t)$ et τ. Tracer l'allure de la courbe $u_C(t)$.

Rappeler la « démarche » de « résolution d'un problème »



Le condensateur est chargé et le régime permanent atteint en ½ seconde du fait de la grande valeur de R. Par exemple :
R = 1000Ω τ = 0,1s ; R = 100Ω τ = 0,01s ; R = 10Ω τ = 0,001s



4) comment définir un régime libre ? forcé?

- **QUESTION :** régimes transitoire et libre, quelles similitudes physique et mathématique ?

- **QUESTION :** pratiquement, en quoi consiste : « éteindre une source de tension (courant) idéal(e) »

- **QUESTION :** pour un interrupteur, fermer ou ouvrir un circuit consiste à le remplacer par quoi ?

II. OSCILLATEURS AMORTIS

II. 1) RÉGIME LIBRE, RÉPONSE À UN ÉCHELON

▹ analyser sur des relevés expérimentaux l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonctions des paramètres caractéristiques

▹ prévoir l'évolution du système à partir de confédérations énergétiques

▹ établir l'équation différentielle sous forme canonique afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité

▹ connaitre la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité

▹ déterminer la réponse détaillée dans le cas du régime libre ou du système soumis à un échelon en cherchant les racines du polynôme caractéristique

▹ déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité

II. 2) RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ , IMPEDANCES COMPLEXES

▹ établir et connaitre les impédances complexes pour R, L et C et leurs associations série et/ou parallèle

II. 3) OSCILLATEUR électrique (ou mécanique) soumis à unre EXCITATION SINUSOÏDALE RÉSONANCE (avec un n)

▹ utiliser la construction de Fresnel ou la méthode des complexes

▹ à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase, déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité dans le cas de la résonance en intensité ou en vitesse

▹ avec la résolution numérique, mettre en évidence le rôle du facteur de qualité dans la résonance en élongation

▹ relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité

QUESTIONS et EXERCICES d'APPLICATION

1) a-t-on déjà vu des <u>graphes expérimentaux d'oscillateurs amortis</u> ?

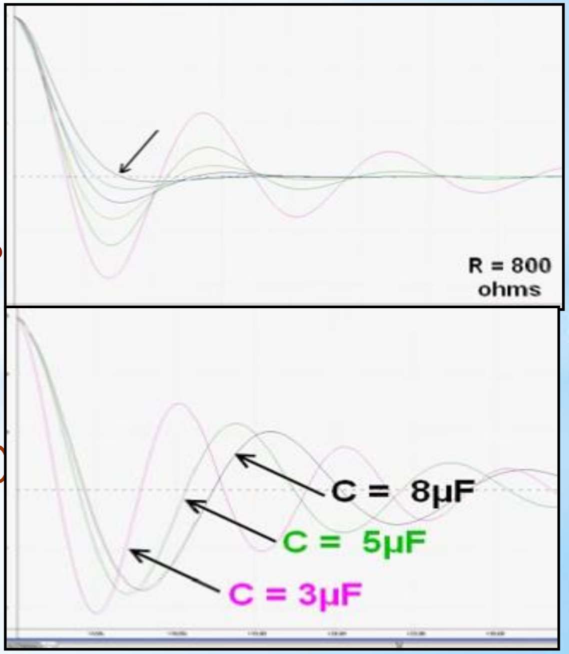
2) a-t-on déjà prévu une évolution d'un système par des <u>considérations énergétiques</u> ?

VIDEO ❶ :
régimes transitoires d'un circuit RLC série
http://youtu.be/eHa749RuUS4

- **QUESTION :** expliquer l'évolution de la courbe quand R augmente ?

- **QUESTION :** expliquer l'évolution de la période quand L ou C augmentent ?

- **QUESTION :** pourquoi W_e maximum quand W_m minimum(et réciproquement)



RAPPELS MATHEMATIQUES

EQUATION DIFFÉRENTIELLE DU 2ÈME ORDRE à COEFFICIENTS CONSTANTS avec SECOND MEMBRE CONSTANT

- On met le coefficient 1 devant le terme dérivé du plus grand ordre
- Le coefficient du terme dérivé du premier ordre traduit les pertes énergétiques *(frottements, résistance …)* et ainsi **l'amortissement de l'oscillateur**

nb : s'il est nul on retrouve une équation harmonique (*oscillateur harmonique à énergie totale constante*)

- Le coefficient du terme dérivé du premier ordre fait apparaitre le terme d'amortissement $\lambda > 0$ et on l'écrit sous forme d'un terme paire 2λ ; le coefficient du terme d'ordre zéro fait apparaitre le terme de pulsation propre ω_0^2 (de l'oscillateur non amorti) ; le second membre s'écrit en faisant apparaitre la pulsation propre $C\omega_0^2$
- $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 C}$ (s'il n'y a pas d'amortissement, on retrouve $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$ *équation harmonique*

1) Résolution de l'équation homogène (sans second membre) (correspond au *régime libre*)

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ d'équation caractéristique : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ trinôme du second degré de discriminant réduit :

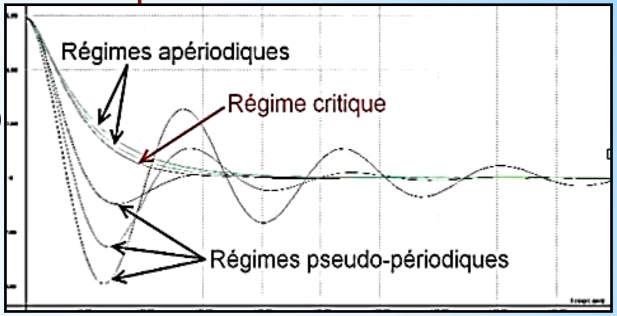
$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$

$\Delta' > 0$ *(amortissement fort)* : $r_{1-2} = -\lambda \pm \sqrt{\Delta'}$ (on pose $\omega = \sqrt{\Delta'}$) → $x(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$ $= e^{-\lambda t}(A \operatorname{ch} \omega t + B \operatorname{sh} \omega t)$
apériodique

$\Delta' < 0$ *(amortissement faible)* : $r_{1-2} = -\lambda \pm i\sqrt{\Delta'}$ (on pose $\omega = \sqrt{-\Delta'}$) → $x(t) = A e^{i r_1 t} + B e^{i r_2 t}$ $= e^{-\lambda t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$
pseudopériodique

$\Delta' = 0$ **critique** → $x(t) = e^{-\lambda t}(At + B)$

❑ **QUESTION :** quel est le point commun de ces 3 régimes qui découle de leurs expressions ?



2) Recherche d'une solution particulière (correspond au *régime permanent*)

indépendante du temps ⇒ dérivées temporelles nulles $x_p = C$

3) Résolution de l'équation générale $x(t) = x_l(t) + x_p$

$x(t) = e^{-\lambda t}(A\,\mathrm{ch}\,\omega t + B\,\mathrm{sh}\,\omega t) + C$ *ou* $e^{-\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + C$ *ou* $e^{-\lambda t}(At + B) + C$

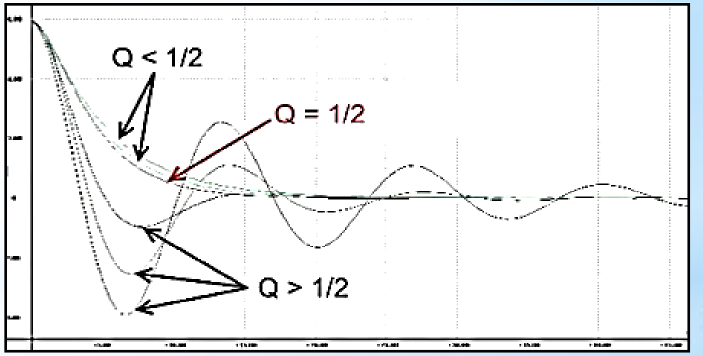
Pour déterminer les 2 constantes (A et B), il faut 2 conditions initiales : **$x(t = 0)$** et **$[dx(t)/dt]_{t=0}$**

nb : l'intérêt des trigonométries circulaire ou hyperbolique tient au fait, qu'en physique, une des conditions initiales est souvent nulle, or sin 0 = 0 et sh 0 = 0 (on a immédiatement A ou B puis on détermine la seconde par la deuxième condition initiale)

CAS PARTICULIER : UTILISATION de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q

On écrit l'équation homogène sous forme canonique $\boxed{\dfrac{d^2x_l}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dx_l}{dt} + \omega_0^2 x_l = 0}$ le *discriminant* est $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2)$

- $\Delta > 0$ ⇒ $Q < ½$ et $x_l(t) = \exp(-t/2\tau Q)\,[A\,\mathrm{ch}(\omega t) + B\,\mathrm{sh}(\omega t)]$
  avec $\omega = \sqrt{\Delta}$ *régime apériodique*
- $\Delta = 0$ ⇒ $Q = ½$ et $x_l(t) = \exp(-t/2\tau Q)\,[A + Bt]$
  régime critique
- $\Delta < 0$ ⇒ $Q > ½$ et $x_l(t) = \exp(-t/2\tau Q)\,[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]$
  avec $\omega = \sqrt{-\Delta}$ *régime pseudo-périodique*



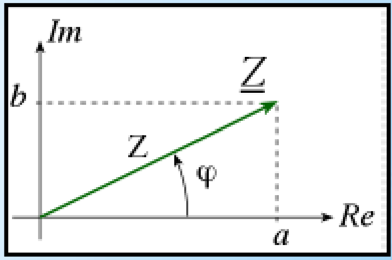
CAS PARTICULIER : REGIME FORCE SINUSOIDAL

- On utilise la **NOTATION COMPLEXE** pour faire les calculs (*aucune signification physique*)

$\underline{z} = a + jb$ *forme algébrique* $\underline{z} = Z(\cos\varphi + j.\sin\varphi)$ *forme trigonométrique* $\underline{z} = Ze^{j\varphi}$ *forme exponentielle*

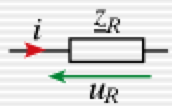
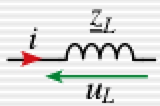
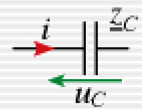
module $\boxed{Z = \|\underline{z}\| = \sqrt{a^2 + b^2}}$ **argument** $\boxed{tg\varphi = \dfrac{b}{a}}$

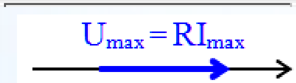
complexe conjugué de $\underline{z}$ est : $\underline{z}^* = a - jb = Ze^{-j\varphi}$

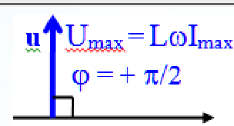


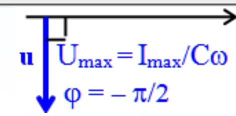
nb : l'intérêt est *d'éviter des calculs avec la trigonométrie*, surtout pour les intégrales et les dérivées nièmes
g (grandeur *réelle*, *physique*, *sinusoïdale*), on travaille avec sa grandeur complexe (élément *mathématique*) $\underline{g}$ telle que **g** = $\Re(\underline{g})$

ex : $u(t) = u_0 \cos \omega t$ ➔ $\underline{u} = u_0 e^{j\omega t} \Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{d\underline{u}}{dt} = j\omega\,(u_0 e^{j\omega t}) = j\omega\,\underline{u}}$; $\boxed{\int \underline{u}(t)\,dt = \dfrac{u_0\, e^{j\omega t}}{j\omega} = \dfrac{\underline{u}}{j\omega}}$

	Résistance	Inductance	Capacité
			
Impédance (Ω)	$Z_R = R$	$Z_L = L\omega$	$Z_C = \dfrac{1}{C\omega}$
Déphasage (rad)	$\varphi_R = 0$	$\varphi_L = +\dfrac{\pi}{2}$	$\varphi_C = -\dfrac{\pi}{2}$
Impédance complexe (Ω)	$\underline{Z}_R = R$ *réel pur*	$\underline{Z}_L = jL\omega$ *imaginaire pur*	$\underline{Z}_C = -j\dfrac{1}{C\omega}$ *imaginaire pur*

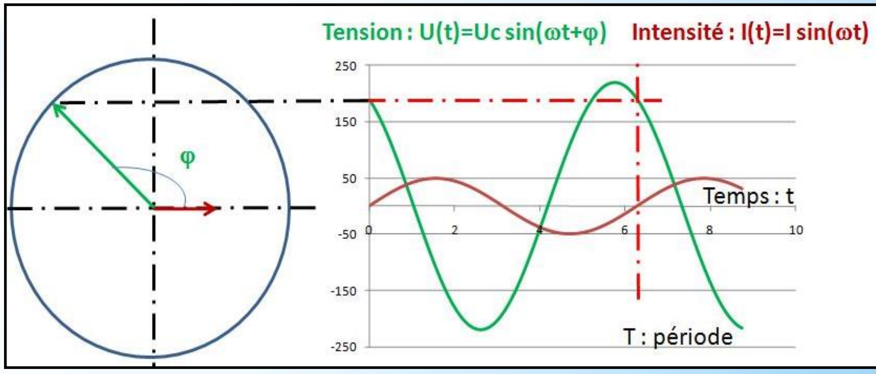






➢ On utilise la **CONSTRUCTION DE FRESNEL**

Définition : soit une grandeur sinusoïdale : $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$ **φ : phase à l'origine** **$(\omega t + \varphi)$: phase à l'instant t**
On lui associe un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de norme S tournant à vitesse angulaire ω (*on dessine à t = 0*)
Sa projection sur l'axe des abscisses est donc $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$



Intérêts

- Calcul de déphasage entre deux grandeurs (ex : u et i)
- Associations série de dipôles en régime sinusoïdal
- * même courant dans chaque donc i référence de phase
  - * U_R est en *phase* avec i
  - * U_L est en *quadrature avance* avec i
  - * U_C est en *quadrature retard* avec i

RAPPELS

- Si on s'intéresse aux fréquences pour lesquelles on a cette puissance maximale divisée par 2, c'est-à-dire des amplitudes divisées par $\sqrt{2}$: ce sont les **pulsations de coupures**. La bande de pulsation entre ces 2 dernières, c'est à dire la bande dans laquelle *la puissance est supérieure à la moitié de la puissance maximale*, est la **bande passante à – 3 décibels**.

- * pulsations de coupure à – 3 dB : $P_{1/2} = P_{max}/2 = U_{max}I_{max}/2 = U_{max}/\sqrt{2}\ I_{max}/\sqrt{2}$

  * notation « décibel »

  $P_{bel} = \log P/P_{ref}$ $\qquad$ $P_{décibel} = 10 \log P/P_{ref} = 10 \log RI^2/RI^2_{ref} = 20 \log I/I_{ref}$

  * exemple pour la bande passante

  $P_{1/2\ décibel} = 10 \log (P_{max}/2)/P_{ref} = 20 \log (I_{max}/\sqrt{2})/I_{ref} = 20 \log (I_{max})/I_{ref} - 20 \log\sqrt{2} = 20 \log (I_{max})/I_{ref} - 3$

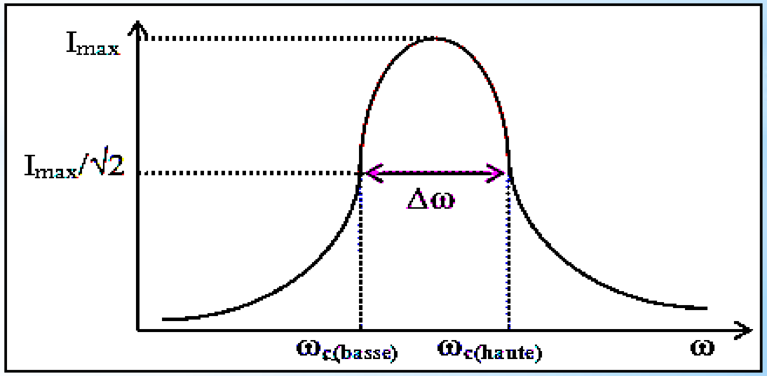
- $$I(\omega=\omega_c) = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow Z(\omega=\omega_c) = \sqrt{R^2 + (L\omega_c - \frac{1}{C\omega_c})^2} = Z_{min}\sqrt{2} = R\sqrt{2}$$ $\rightarrow$ $$\omega_c = \frac{\pm R \pm \sqrt{R^2 + 4L/C}}{2L}$$

$$\omega_{c(basse)} = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{2L} > 0 \quad \text{et} \quad \omega_{c(haute)} = \frac{+R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{2L} > 0$$

$\rightarrow$ $\Delta\omega\,(\textit{bande passante}) = \frac{R}{L}$

- On définit le **facteur de qualité** $$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Il caractérise bien l'**ACUITE** de la RESONANCE



ex : excellence parfaite : « pic » à ω_0
très bonne résonance : $\Delta\omega$ **faible** donc **Q élevé**

nb : il faut Q > 1/2

I) TRANSPORT du SIGNAL

- **SIGNAL** : grandeur physique contenant de l'information.

continu (sur des intervalles de temps) ou **discret** (échantillonné par n valeurs)

- **Système physique *déterministe***

grandeur physique d'entrée **e(t)** → **OPERATEUR** → **s(t)** grandeur de sortie

♦ pas aléatoire (différent du « bruit »)
♦ la nature des grandeurs peut différer

Citez des exemples

- **Système LINEAIRE** : **l'équation différentielle** qui relie e(t) et s(t) est **linéaire**, donc satisfait au « principe de superposition »

- **Système PERMANENT (STATIONNAIRE)**

♦ ce comportement du système assure la reproductibilité de sa réponse : *conditions de fonctionnement stables*.

exemple de système linéaire permanent

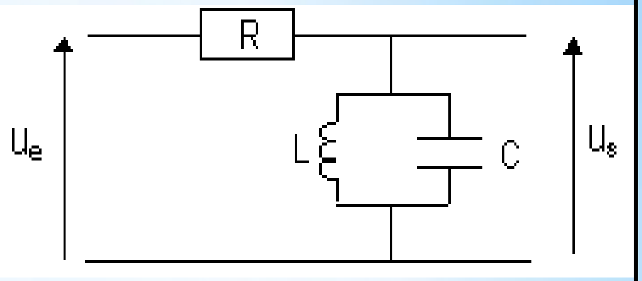
- *systèmes régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants*

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k s(t)}{dt^k}}$$

EXEMPLE

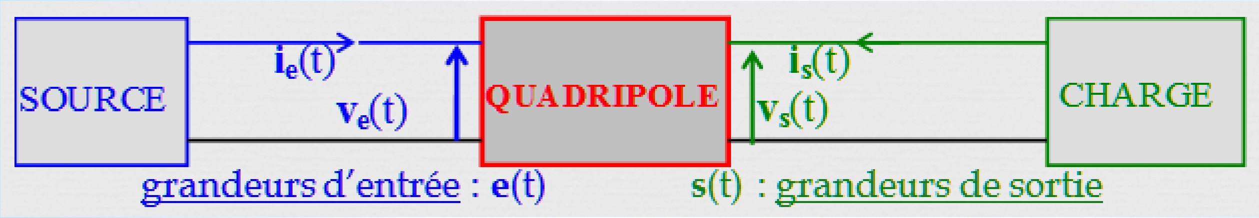
Soit le dispositif suivant, Déterminer l'équation différentielle entrée-sortie.
Quelle sont les unités de L/R et RC ? Que représente ces grandeurs ?
Sans calcul, prévoir le comportement du signal de sortie dans les cas :

1) régime stationnaire et Ue = 0
2) régime stationnaire et Ue = cte ≠ 0
3) Ue = 0 et Us évolue à partir de Us(0) ≠ 0



II) FONCTION de TRANSFERT

rappel : systèmes **QUADRIPOLES**



II. 1) RÉGIME SINUSOÏDAL

signal d'entrée : **e(t)** = E cos (ωt + φ)

- ❑ **solution générale $s_1(t)$ de l'équation homogène** (**régime LIBRE**) $\sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = 0$

- *SI régime stable* : *amortissement* (temps caractéristique) ➔ régime transitoire.

- ❑ **solution particulière $s_p(t)$ de l'équation complète** (**régime FORCE**)

- *SI système linéaire permanent* ➔ même forme que le signal en entrée : **s(t)** = E' cos (ωt + ψ)

☞ pour un signal d'entrée résultant de la superposition de signaux sinusoïdaux, si le signal de sortie comporte des pulsations autres, le système est ***non linéaire***

II. 2) SIGNAUX PERIODIQUES

Soit un **signal périodique f(t),** on peut le décomposer en « composantes » sinusoïdales par **décomposition en série de Fourier** (*intérêt de l'étude du cas particulier harmonique même si il n'a pas de réelle signification physique*).

❑ **séries de FOURIER**

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos (nx + \varphi_n)}$$

$a_0/2 = A_0$: *terme moyen sur une période.* A_1 : amplitude du **FONDAMENTAL** A_n : amplitude du **Nième HARMONIQUE**

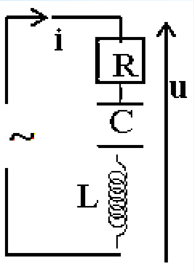
- f(x) *paire*, tous les termes b_n sont nuls ; f(x) *impaire*, tous les termes a_n sont nuls.

En physique la variable est le temps : on fait le changement de variable $x \equiv \omega t$ avec les bornes $\pm T/2$:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t \, d(\omega t) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t \, dt \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t \, dt}$$

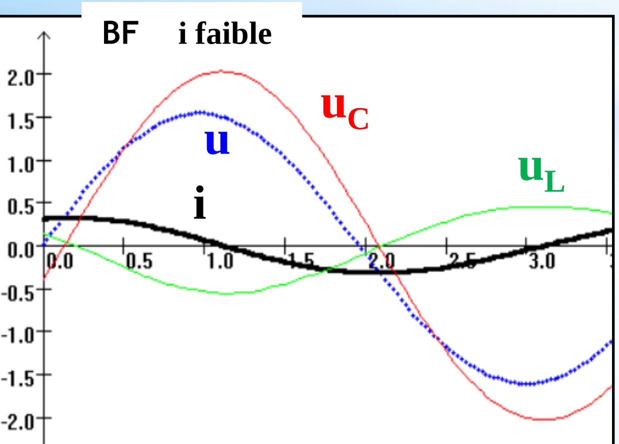
➢ EXEMPLE

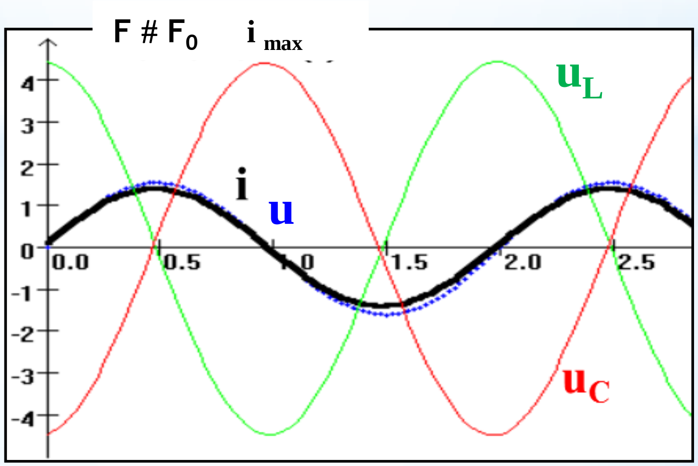
Soit un circuit R, L, C série alimenté par une source de tension u = U cos ($\omega t + \varphi_u$) [φ_u le déphasage de u par rapport à i], En utilisant la construction de Fresnel, donner l'expression du module de l'impédance Z équivalente à R, L, C série, puis le déphasage φ_u.
Donner l'expression de la pulsation de résonance ω pour laquelle l'intensité est maximale.
Que vaut alors l'impédance Z et φ_u. Que peut-on dire alors de u et i ?
Que peut-on dire de l'amplitude de i pour des fréquences $\omega_b \ll \omega_0 \ll \omega_h$

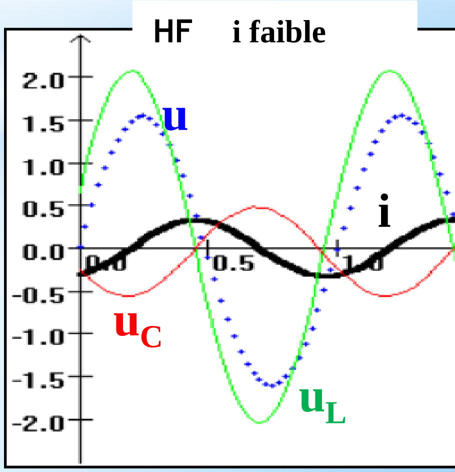


➢

➔

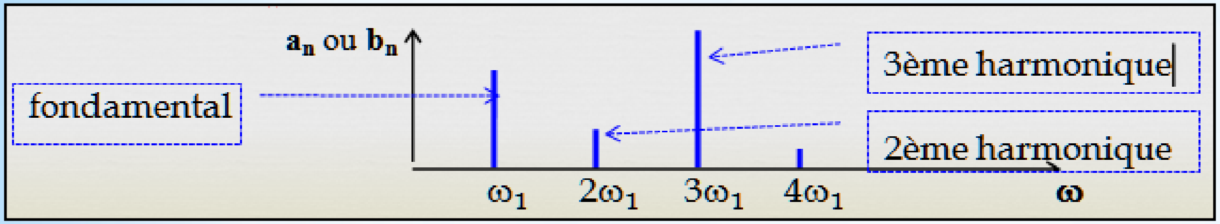






spectres de FOURIER

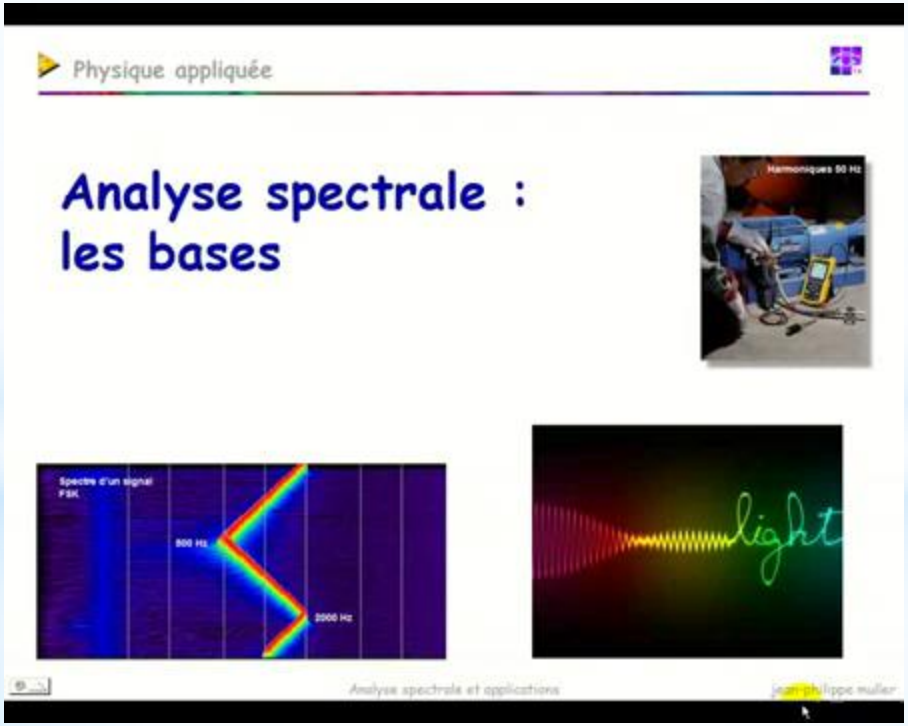
Il est plus « parlant » de représenter en *abscisse* le rang de l'harmonique (**nω**) et en *ordonnée* son amplitude (valeur de a_n , b_n) sous forme d'un **spectre** qui montre l'importance respective des différentes harmoniques.

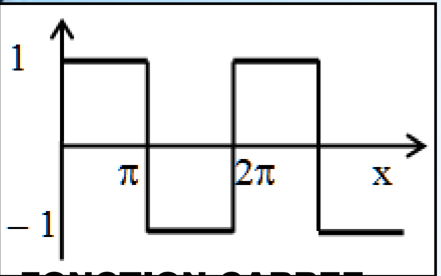


http://youtu.be/DrpyE2psCNg

*www.ta-formation.com/cours/e-**spectres**.pdf*

40 min



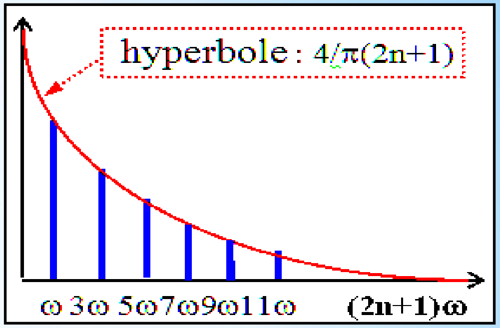


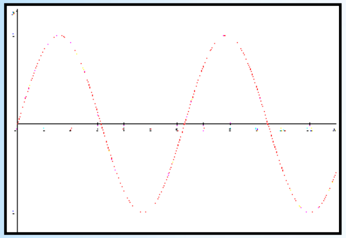
FONCTION CARREE

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\ldots+\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\right]$$

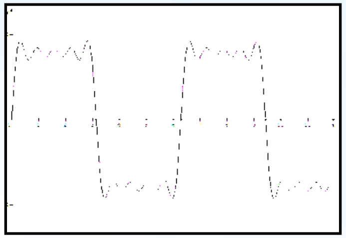
DECOMPOSITION en SERIE de FOURIER

SPECTRE de FOURIER

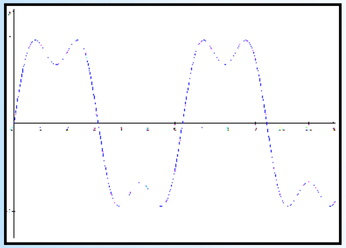




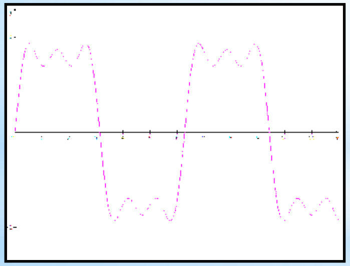
fondamental



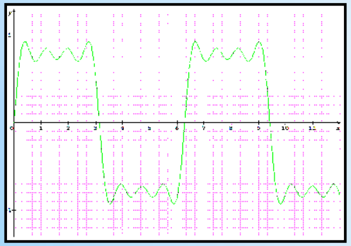
fondamental
+ harmonique 3
+ harmonique 5
+ harmonique 7
+ harmonique 9



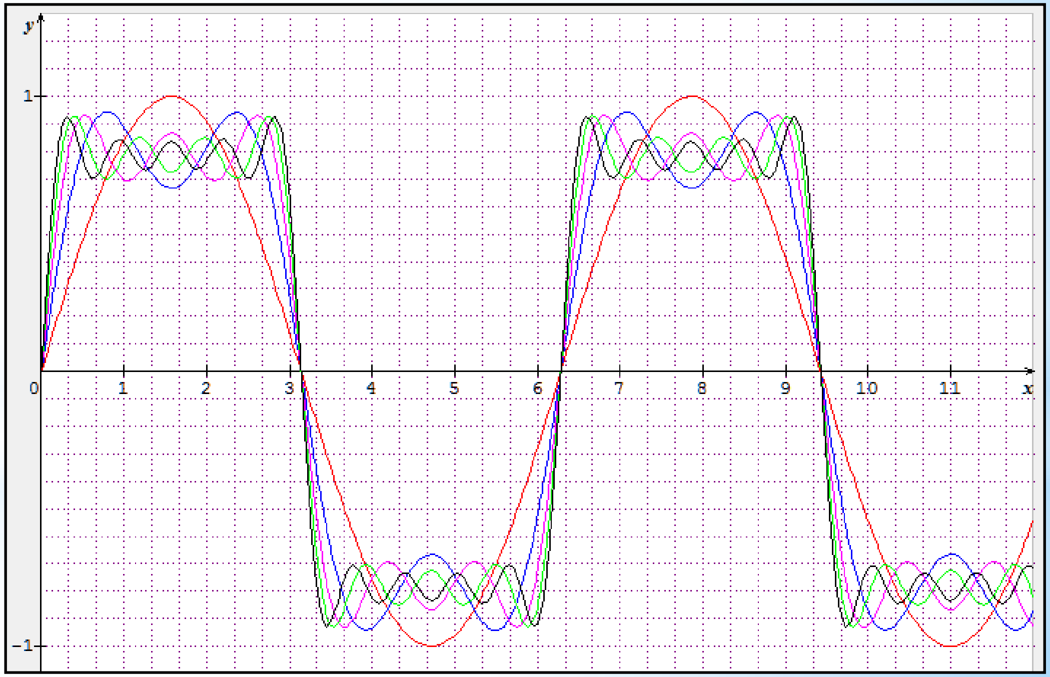
fondamental
+ harmonique 3



fondamental
+ harmonique 3
+ harmonique 5



fondamental
+ harmonique 3
+ harmonique 5
+ harmonique 7



évolution par l'addition d'harmoniques

II. 3) FONCTION de TRANSFERT complexe

La relation entre **signal de sortie** : **s**(t) (*réponse*) et **d'entrée** : **e**(t) (*commande, excitation*) est appelée :

FONCTION de TRANSFERT

$$\overline{H}(j\omega) = \frac{\overline{s}(t)}{\overline{e}(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i}{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k} = G(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}$$

$G(\omega) = |\overline{H}(j\omega)|$: **module** (ou **gain**) de $\overline{H}$

$\varphi(\omega)$: **l'argument** (ou **déphasage**) de $\overline{H}$

nb : La fonction de transfert est **caractéristique du système** et est donc reliée à ***l'équation différentielle linéaire à coefficients constants*** du système dans le même domaine d'étude, qui d'ailleurs *fixe son ordre*.

nb : S'agissant d'une **caractérisation du système**, *elle ne dépend pas du signal* : le choix particulier du comportement en régime *sinusoïdal* permet rapidement de passer de l'équation différentielle à la fonction de transfert complexe en utilisant le cas particulier en *complexe*.

nb : on peut aussi utiliser **p = jω** pour se rapprocher des notations SI

II. 4) REPRESENTATION DE BODE

nb : la plage de fréquences utilisée est souvent importante (0 → ∞) et on lui préfère donc une échelle logarithmique (– ∞ → +∞), qui « resserre » les valeurs par puissances de 10 : abscisse → **log ω**

la plage de gains utilisée est souvent aussi importante (10^{-5} → 10^{5}) et on lui préfère donc une échelle logarithmique : ordonnée → **G_{dB} = 20 log G** → **G_{dB}(log ω) : log-log** *mais* **φ(log ω) : semi-log**

La **représentation de BODE** de la fonction de transfert est l'association des graphes : **G_{dB}(log ω)** et **φ(log ω)**

rappels : la plage de fréquence de **f** à **2f** s'appelle une **OCTAVE**

la plage de fréquence de f à **10f** s'appelle une **DECADE** *(log 10f = log f + log 10 = log f + 1 !)*

❑ BANDE PASSANTE

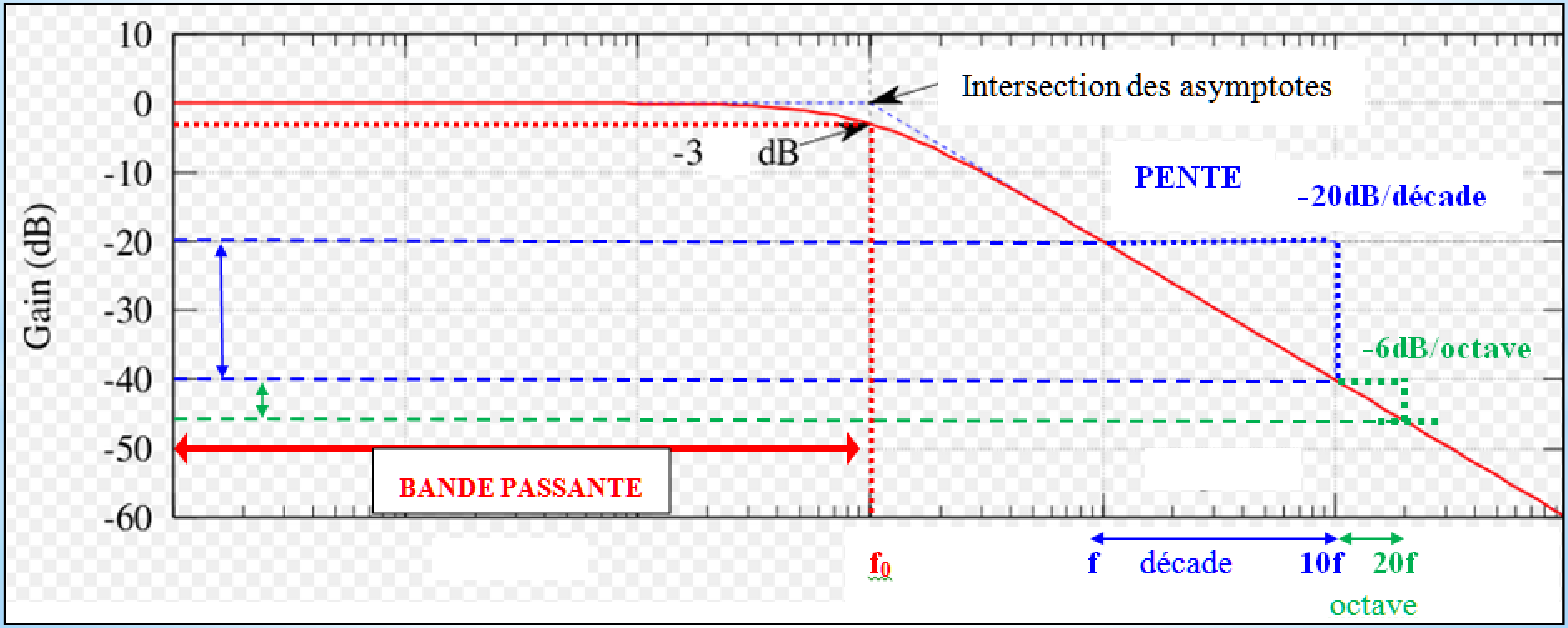
Il s'agit d'un <u>intervalle de fréquences</u> dans lequel la puissance est supérieure à $P_{max}/2$, donc l'amplitude supérieure à $A_{max}/\sqrt{2}$

ex : gain en amplitude en décibel, ω_c la pulsation de coupure telle que $G(\omega_c) = G_{max}/\sqrt{2}$: $\mathbf{G_{dB}(\omega = \omega_c)}$ = 20 log $[G_{max}/\sqrt{2}]$ = 20 log G_{max} – 20 log $\sqrt{2}$ = **20 log G_{max} – 3 (<u>bande passante à – 3 décibel</u>)**

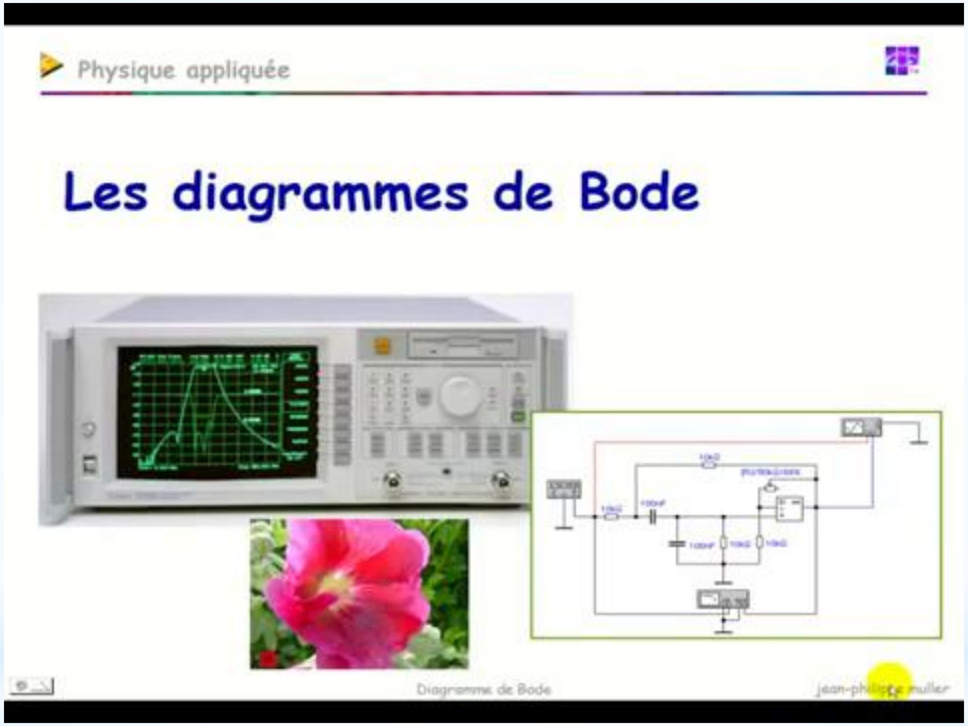
❑ COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

le <u>comportement fréquentiel</u> (à *très basse fréquence* : $\omega \rightarrow$ **0** et à *très haute fréquence* : $\omega \rightarrow \propto$) montre un <u>comportement asymptotique</u> que l'on caractérise par **sa pente**

ex : $\lim(\omega \rightarrow \infty)$ GdB # 20 log ω [équation d'une droite, en coordonnée log ω, de pente + 20, coupant l'axe des abscisses ($G_{dB} = 0$) en log ω_0]



http://youtu.be/MfcGScsTyhQ
29 min



II. 5) CAS des FILTRES

❑ SYSTEMES du PREMIER ORDRE

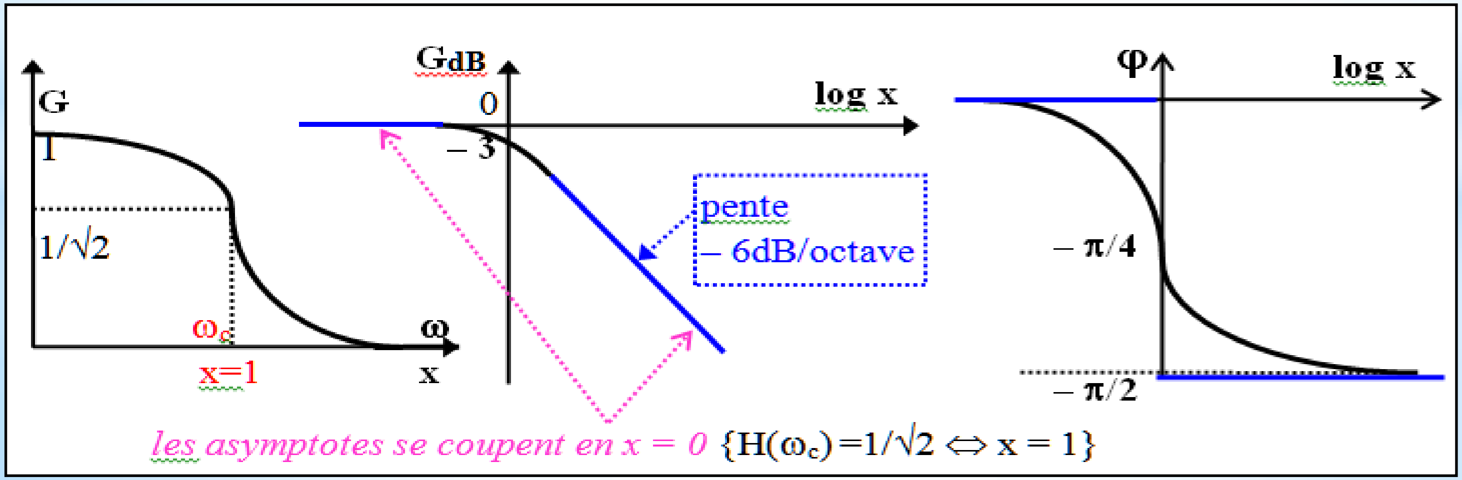
- ω_c : **pulsation de coupure** : $G(\omega_c) = H_{max}/\sqrt{2}$)
- $\tau = 1/\omega_c$: **temps caractéristique** *(constante de temps)*
- $x = \omega/\omega_c$: **pulsation réduite** (*sans dimension*)
- $p = j\omega \Rightarrow jx = \tau p$ ou $x = \tau\omega$

filtre PASSE-BAS
$\overline{\mathbf{H}} = \dfrac{H_{max}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}} = \dfrac{H_{max}}{1 + j\omega\tau} = \dfrac{H_{max}}{1 + jx} = \dfrac{H_{max}}{1 + \tau p}$

Si on prend $H_{max} = 1$ $\quad |H(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow$ $G_{dB} = -10 \log(1 + x^2)$

$\varphi = -\varphi_{dénominateur} = -\arg(1 + jx) \Rightarrow \tan \varphi_{dénominateur} = x$ et $\varphi = -\arctan x$

- $x << 1 \Rightarrow H \# 1 \Rightarrow \varphi \to \arg 1 = 0$ et $G_{dB} \# 0 \Leftrightarrow$ asymptote $G_{dB} = 0$
- $x >> 1 \Rightarrow H \# 1/jx \Rightarrow \varphi \to -\pi/2$ et $G_{dB} \# -20 \log x \Leftrightarrow$ asymptote de pente - 20 dB/décade (– 6 dB/octave)



filtre PASSE-HAUT

$$\overline{H}=\frac{H_{max}}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}=\frac{H_{max}}{1-\frac{j}{\omega\tau}}=\frac{H_{max}\,jx}{1+jx}=\frac{H_{max}\,\tau p}{1+\tau p}$$

Si on prend $H_{max}=1$ $\quad |H(x)|=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

réflexion ❶ : identique au filtre passe bas en remplaçant x par 1/x, **or** log 1/x = – log x donc *<u>symétrie par rapport à l'axe des gains</u>*.

réflexion ❷ : le dénominateur est identique au filtre passe bas et le numérateur est imaginaire pur **donc** le *<u>graphe de phase est une translation de $\pi/2$</u>* ($\varphi=\pi/2-\varphi_{dénominateur}$)

➔ <u>prendre le schéma précédente</u> : pour G inverser les rôle de part et d'autre de x = 1 ; G_{dB} prendre la courbe symétrique/axe G_{dB} pour la phase translater vers le haut de $\pi/2$!

❑ SYSTEMES du SECOND ORDRE

- ω_0 : **pulsation de résonance**
- τ, **x** et **p** *définis à l'identique*
- Q : **facteur de qualité**

nb : ils ont tous 3 le *même dénominateur* !
donc ont tous 3 la *même équation homogène*

PASSE-BAS

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q_0}\frac{ds}{dt}+\omega_0^2 s=\omega_0^2 H_0 E$$

PASSE-HAUT

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q_0}\frac{ds}{dt}+\omega_0^2 s=0$$

PASSE-BANDE

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q_0}\frac{ds}{dt}+\omega_0^2 s=0$$

PASSE-BAS

$$\overline{H}=\frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{Q\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}=\frac{H_0}{1+\frac{p}{Q\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}=\frac{H_0}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$$

PASSE-HAUT

$$\overline{H}=\frac{-H_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+j\frac{\omega}{Q\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}=\frac{H_0(\tau p)^2}{1+\frac{p}{Q\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}=\frac{H_0(-x^2)}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$$

PASSE-BANDE

$$\overline{H}=\frac{-H_0\left(\frac{j}{Q}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1+j\frac{\omega}{Q\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}=\frac{H_0\left(\frac{\tau p}{Q}\right)}{1+\frac{p}{Q\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}=\frac{H_0\left(\frac{jx}{Q}\right)}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$$

EXERCICE ❷

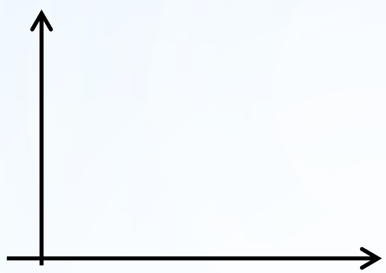
Soit e(t) = 4 + 2 cos(ω_0t) + 1,5 cos (2ω_0t) en Volt avec ω_0 = 500 rad/s. Donner son spectre. On veut accéder à la valeur moyenne grâce à un filtre RC. Proposer le dispositif et vérifier son bon choix, en théorie.

A

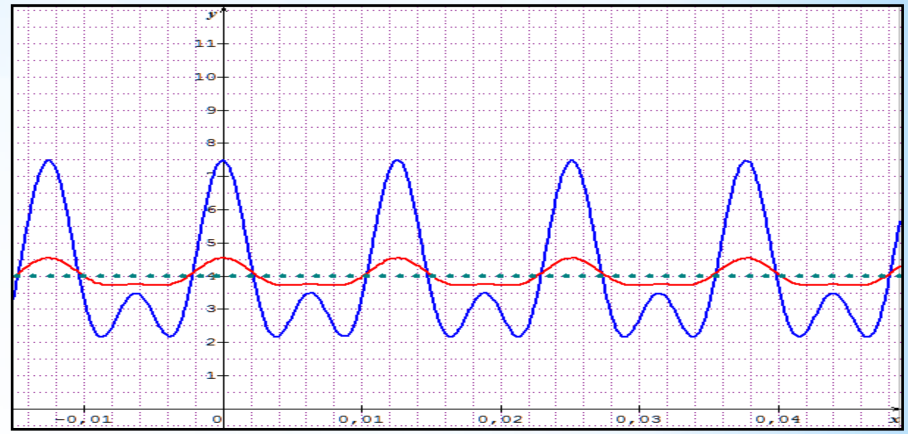
B

C

	$\omega = 0$	ω_0	$2\omega_0$
e			
G			
s			



D



EXERCICE ❸

Soit un signal d'entrée de forme carrée de 6 V crête à crête et de fréquence 1 kHz. Soit un filtre passe-bas R = 10 kΩ et C = 10 nF. Dessiner sur le même graphe le signal d'entrée e et de sortie s. Dessiner de même les spectres en fréquence. Remarques ?

❑ UTILISATION

En faisant l'hypothèse de filtres idéaux, on considère qu'une composante sinusoïdale de pulsation *à l'intérieur de la bande passante se retrouve en sortie*, en revanche *à l'extérieur elle est éliminée*

- un passe-bas ne transmet que les composantes de pulsations appartenant à **$[0, \omega_c]$**
- un passe-haut ne transmet que les composantes de pulsations appartenant à **$[\omega_c, \infty]$**
- un passe-bande ne transmet que les composantes de pulsations appartenant à **$[\omega_1, \omega_2]$**

nb : **H(0)** n'est non nulle ***que*** pour un filtre passe bas : ***un passe-bas transmet la composante continue (multipliée par H(0)) mais un passe-haut et passe bande l'élimine***.

Les exigibles, de SUP, ayant tous été passés en revue, le problème de la stabilité des systèmes, de SPÉ, ne pose aucun problème

III) STABILITE d'un SYSTEME

❑ **RELATION entrée-sortie** : elle est **caractérisée** par l'équation différentielle ou la fonction de transfert entre le signal d'entrée **e(t)** et le signal de sortie **s(t)**. Ce dernier est l'image par l'opérateur du signal d'entrée SI s(t) ne diverge pas pendant le régime transitoire.
Ce régime *transitoire ou libre correspond à la solution de l'équation homogène* [c'est-à-dire sans le second membre qui est fonction de l'excitation e(t)]

❑ **STABILITE :** un système est **STABLE** si la solution de l'équation homogène tend vers 0

➢ SYSTÈME du PREMIER ORDRE

$$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0}$$

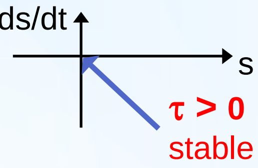
qui correspond au *dénominateur* **$1 + j\omega\tau$** de la fonction de transfert

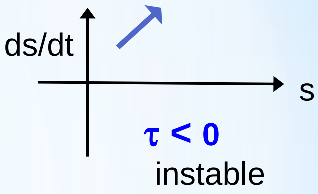
a pour solution $s_l(t) = A \exp(-t/\tau)$

* si $\underline{\tau > 0}$ **convergence** : ***système stable***

* si $\underline{\tau < 0}$ **divergence** : ***système instable***

nb : dans le <u>plan de phase</u> (ds/dt ; s) on a une droite de pente $-1/\tau$ qui passe par 0





➢ SYSTÈME du SECOND ORDRE

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0}\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0}$$

écrite autrement [*(ds/dt)] :

$$\frac{d^2s}{dt^2}\left(\frac{ds}{dt}\right) + \omega_0^2 s\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2}s^2\right] = -\frac{\omega_0}{Q}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

identique à une variation d'énergie E(t) de signe opposé à celui de Q

* Q > 0 E(t) diminue jusqu'à s'annuler (STABLE)
* Q < 0 E(t) augmente et le système devient instable
* second membre nul : E = cte équation de conservation

RESUME : une différence de signe entre les coefficients entraine une instabilité

$$\frac{d^2s}{dt^2} + a\frac{ds}{dt} + b\ s = 0$$

	b < 0	b > 0
a < 0	instable	instable
a = 0	instable	limite
a > 0	instable	STABLE