Plan du cours

- 1 Analyse d'erreurs
- 2 Equations non-linéaires
- 3 Systèmes d’équations
- 4 Interpolation et approximation
- 5 Dérivation et intégration numériques
- 6 Equations différentielles

ANALYSE NUMERIQUE POUR L'INGENIEUR

CHAPITRE 6: RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

CHAPITRE 6

Plan

1. Introduction
2. Méthode d'Euler
3. Méthodes de Taylor
4. Méthode de Runge-Kutta (RK)
   - (a) RK2
   - (b) RK4
5. Méthodes a pas multiples
6. Cas des systèmes d'équations différentielles

Equations différentielles

1. Introduction

Les équations différentielles ou plus généralement les systèmes différentiels rencontres dans les divers domaines des sciences et techniques ont très rarement des solutions explicites.

En fait, si on trouve dans des ouvrages de mécanique, de physique,... des modèles différentiels simples qui s'intègrent exactement, c'est parce que les modèles en question ont été simplifiés a l'extrême de façon à pouvoir les étudier analytiquement et de comprendre les phénomènes qu'ils sont censés représenter. Dans le cas général, il est alors essentiel de disposer des méthodes numériques pour approcher la solution.

Equations différentielles

1. Exemples

1.1 Quelques exemples

1. Circuit R-C

$$\begin{cases} Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) & = 0 \\ q(0) & = q_0 \end{cases}$$

2. Problème du pendule

$$\begin{cases} \theta''(t) & = -\frac{c_f}{m}\theta'(t) - \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) \\ \theta'(0) & = \theta'_0 \\ \theta(0) & = \theta_0 \end{cases}$$

Equations différentielles

1. Exemples

3. Masse + ressort

$$\begin{cases} mx''(t) + ax'(t) + kx(t) & = 0 \\ x'(0) & = x'_0 \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

m = masse du ressort, a = viscosité du milieu ambiant, k = raideur du ressort.

Equations différentielles

1. 2 Problème théorique

Soit *I = [a; b] un intervalle de R et soit f une* fonction continue de *I R dans R.* On désire trouver la fonction $v : t \to v(t)$ vérifiant:

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= f(t, y(t)), \quad \forall t \in I && (1) \\
y(t_0) &= y_0 && (2)
\end{aligned}
$$

L' équations différentielle (1) est dite du premier ordre dans le sens qu'elle fait intervenir seulement la dérivée d'ordre 1.

On peut considérer plus généralement des équations d'ordre supérieur mais elles se ramènent aux équations du premier ordre.

En effet considérons l'équation différentielle d'ordre m suivante:

Equations différentielles

Exemples

Exemple 1.

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{y(x)}{x\log(x)} + \frac{1}{\log(x)}, \quad x \in [e,5] \\ y(e) &= e \end{aligned}$$

Exemple 2.

$$\begin{aligned} y'(x) &= y^{\frac{1}{2}}(x), \quad x \in [0,1] \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Equations différentielles

Exemples

Exemple 3.

$$\begin{aligned} y'(x) &= x^2 \cos^2(y(x)) + \sin^2(x), \quad x \in [-1, 1] \\ y(-1) &= 1 \end{aligned}$$

Exemple 4.

$$\begin{aligned} y'(x) &= 1 + \frac{y(x)}{x}, \quad x \in [1, 2] \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

Equations différentielles

Exemples

Exemple 5

$$\begin{cases} y'(t) = t \\ y(0) = 1 \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} + 1 \end{cases}$$

Exemple 6

$$\begin{cases} y'(t) = t\,y(t) \\ y(1) = 2 \\ y(t) = 2e^{\frac{(t^2-1)}{2}} \end{cases}$$

Equations différentielles

- 2. Méthode numérique d'Euler

On désire trouver une approximation de la fonction y(t) solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b] \\ y(a) & = y_0 \end{cases}$$

Algorithme de la méthode d’Euler

Equations différentielles

Algorithme de la méthode d'Euler

1 - Etant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0 ,y_0)

Et un nombre maximal d'itérations N

2 – Pour $0 \leq n \leq N$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n ,y_n)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$Ecrire\ t_{n+1} et\ y_{n+1}$$

3 - Arrêt

Equations différentielles

Exemple $y'(t) = -y(t) + t + 1 \quad t \in [0, 1]$

$$y(0) = 1$$

$$y(t) = e^{-t} + t$$

Appliquer la méthode d'Euler pour un pas h = 0.1, 0.05 et 0.025

Tracer les courbes et comparer les résultats obtenus

Equations différentielles

Exemple

t_i	$y(t_i)$	y_i	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$
0	1.000 000	1.000 000	0.000 000
0.1	1.004 837	1.000 000	0.004 837
0.2	1.018 731	1.010 000	0.008 731
0.3	1.040 818	1.029 00	0.011 818
0.4	1.070 302	1.056 100	0.014 220
0.5	1.106 531	1.090 490	0.016 041
0.6	1.148 812	1.131 441	0.017 371
0.7	1.196 585	1.178 297	0.018 288
0.8	1.249 329	1.230 467	0.018 862
0.9	1.306 570	1.287 420	0.019 150
1.0	1.367 879	1.348 678	0.019 201

Equations différentielles

Programme Matlab

```
function [T,Y]=euler(f,t0,tn,y0,n)
% Methode d'Euler

t = t0;
y = y0;
h = (tn-t0)/n;      % Pas de temps
T = t0;             % temps initial
Y = y0;             % solution initiale
for k = 1:n
   y = y+h*feval(f,t,y);
                    % Iteration d'Euler
   t = t+h;
   T = [T;t];       % Tableau des t_i
   Y = [Y;y];       % Tableau des y_i
end
```

Equations différentielles

Programme Matlab

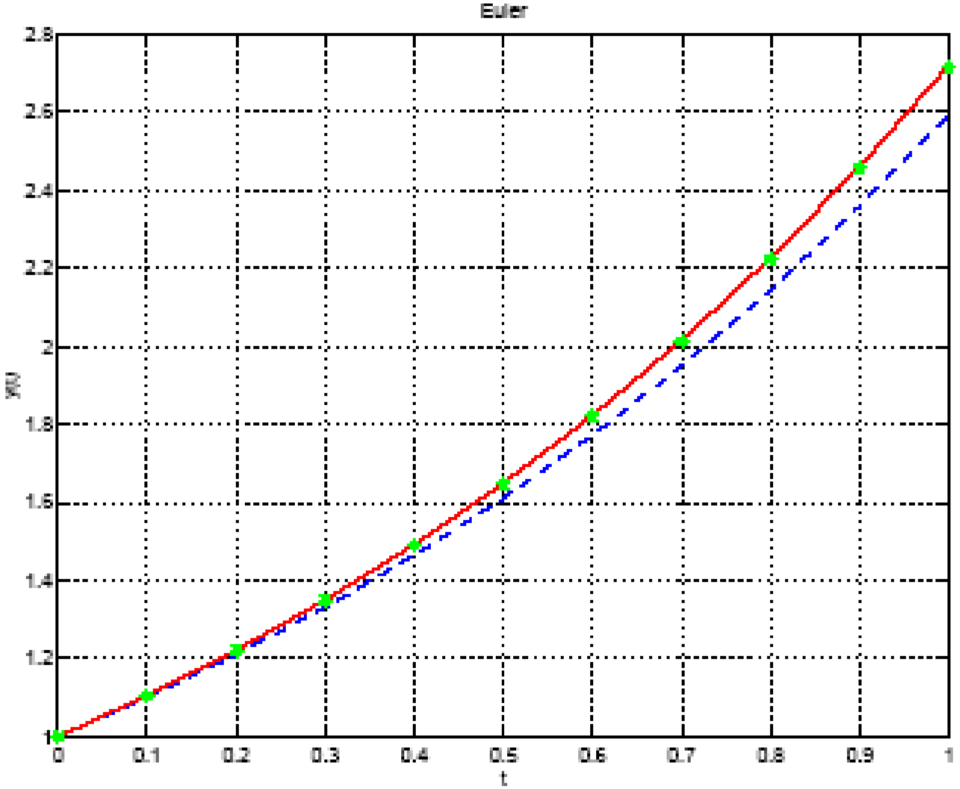
Exemple 1:

$$\begin{cases} y'(t) & = y(t), \quad t \in [0,2] \\ y(0) & = 1 \\ h = 0.5 & \end{cases}$$

temps	solution approchee	solution exacte	erreur
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000
0.500000	1.500000	1.648721	0.148721
1.000000	2.250000	2.718282	0.468282
1.500000	3.375000	4.481689	1.106689
2.000000	5.062500	7.389056	2.326556

Equations différentielles

Programme Matlab



Equations différentielles

Exemple 2

Exemple 2:

$$\begin{cases} y'(t) & = 1 + \frac{y(t)}{t}, \quad t \in [1,2] \\ y(1) & = 1 \\ h = 0.1, h = 0.01 & \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par:

$y(t) = t(1 + \log(t))$.

Equations différentielles

Exemple 2

h = 0.1

temps	solution approchee	solution exacte	erreur
1.000000	1.000000	1.000000	0.000000
1.100000	1.100000	1.204841	0.104841
1.200000	1.210000	1.418786	0.208786
1.300000	1.331000	1.641074	0.310074
1.400000	1.464100	1.871061	0.406961
1.500000	1.610510	2.108198	0.497688
1.600000	1.771561	2.352006	0.580445
1.700000	1.948717	2.602068	0.653351
1.800000	2.143589	2.858016	0.714427
1.900000	2.357948	3.119522	0.761575
2.000000	2.593742	3.386294	0.792552

Equations différentielles

Exemple 2

h=0.01

temps	solution approchee	solution exacte	erreur
1.000000	1.000000	1.000000	0.000000
1.010000	1.010000	1.020050	0.010050
1.020000	1.020100	1.040199	0.020099
1.030000	1.030301	1.060446	0.030145

Equations différentielles

Exemple 2

1.040000	1.040604	1.080790	0.040186
1.050000	1.051010	1.101230	0.050220
1.120000	1.126825	1.246928	0.120103
1.130000	1.138093	1.268106	0.130013
1.140000	1.149474	1.289372	0.139898
1.330000	1.388690	1.709288	0.320598
1.550000	1.728525	2.229295	0.500771
1.150000	1.160969	1.310726	0.149757
1.370000	1.445076	1.801291	0.356214
1.800000	2.216715	2.858016	0.641301
1.150000	1.160969	1.310726	0.149757
1.930000	2.522829	3.199014	0.676185
1.990000	2.678033	3.359388	0.681354
2.000000	2.704814	3.386294	0.681481

Equations différentielles

- 3. Méthodes de Taylor d'ordre 2

BUT: Améliorer la méthode d'Euler.

Algorithme de la méthode d'Euler

1 - Etant donné un pas de temps h, une condition initiale

Et un nombre maximal d'itérations N

2 – Pour $0 \leq n \leq N$

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n)\right)$$

$$Ecrire\ t_{n+1} et\ y_{n+1}$$

3 - Arrêt.

Equations différentielles

Programme Matlab

```
function [T,Y]=euler1(f,dtf,dyf,t0,
                    tn,y0,n)
% Euler Taylor

t = t0;
y = y0;
h = (tn-t0)/n;      % pas de temps
T = t0;             % temps initial
Y = y0;            % solution initiale
for k = 1:n
    k1 = feval(f,t,y);
    k2 = feval(dtf,t,y);
    k3 = feval(dyf,t,y);
    k = h*k1+ h*h*(k2+ k1*k3)/2;
    y = y+k;
    t = t+h;
    T = [T;t];
    Y = [Y;y];
end
```

Equations différentielles

Exemple

Exemple:

$$\begin{cases} y'(t) & = y(t) \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

t_n	y_n
0	1.0000000000000
0.1000000000000	1.1050000000000
0.2000000000000	1.2210250000000
0.3000000000000	1.3492326250000
0.4000000000000	1.4909020506250
0.5000000000000	1.6474467659406
0.6000000000000	1.8204286763644
0.7000000000000	2.0115736873826
0.8000000000000	2.2227889245578
0.9000000000000	2.4561817616364
1.0000000000000	2.7140808466082

Equations différentielles

Exemple

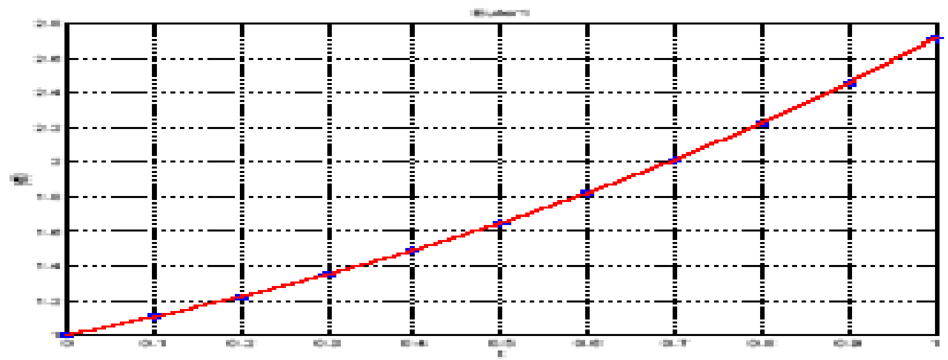


Figure 1: Euler, Taylor

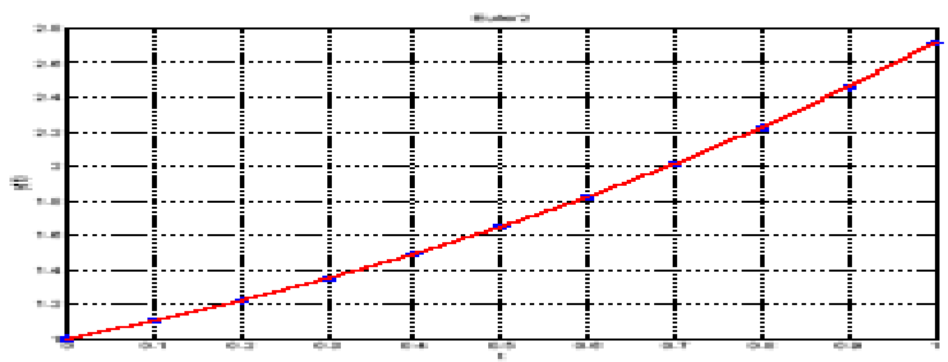


Figure 2: Taylor, e^{t_n}

Equations différentielles

Exemple : Reprendre l'exemple précédent par l'algorithme de Taylor

$$y'(t) = -y(t) + t + 1 \quad t \in [0,1]$$
$$y(0) = 1$$
$$y(t) = e^{-t} + t$$

$$\begin{cases} y'(t) = t\,y(t) \\ y(1) = 2 \\ y(t) = 2e^{\frac{(t^2-1)}{2}} \end{cases}$$

Equations différentielles

4. Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2

4 – 1 Algorithme de la méthode d'Euler modifiée

1 - Etant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0 , y_0)

Et un nombre maximal d'itérations N

2 – Pour $0 \leq n \leq N$

$$\hat{y} = y_n + h\, f(t_n , y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n , y_n) + f(t_n + h, \hat{y})]$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Ecrire t_{n+1} , y_{n+1}

3 - Arrêt

Equations différentielles

4 – 2 Algorithme de la méthode du point milieu

1 - Etant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0, y_0)

Et un nombre maximal d'itérations N

2 – Pour

$$0 \leq n \leq N$$

$$k_1 = h\, f(t_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)\right]$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Ecrire t_{n+1}, y_{n+1}

3 - Arrêt

Equations différentielles

4 – 3 Algorithme de la méthode de Runge-Kutta ordre 4

1 - Etant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0 , y_0)

Et un nombre maximal d'itérations N

2 – Pour $0 \leq n \leq N$

$$k_1 = h\, f(t_n , y_n)$$

$$k_2 = h\left[f\left(t_n + \frac{h}{2} , y_n + \frac{k_1}{2}\right)\right]$$

$$k_3 = h\left[f\left(t_n + \frac{h}{2} , y_n + \frac{k_2}{2}\right)\right]$$

$$k_4 = h[f(t_n + h , y_n + k_3)]$$

Equations différentielles

4 – 3 Algorithme de la méthode de Runge-Kutta ordre 4

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Ecire $t_{n+1}\ , y_{n+1}$

3 - Arrêt

Exercices d’application

- **Exercice 1**

Faire trois itérations avec h = 0.1 des méthodes d’Euler, d’Euler modifié, du point milieu et de Runge-Kutta d’ordre 4 pour les équations différentielles suivantes :

$$a)\ y'(t) = t\,sin\big(y(t)\big) \qquad (y(0) = 2)$$

$$b)\ y'(t) = t^2 + \big(y(t)\big)^2 + 1 \qquad (y(1) = 0)$$

$$c)\ y'(t) = y(t)\,e^t \qquad (y(0) = 2)$$

Exercice 2

L’équation différentielle : $y'(t) = y(t) + e^t \quad (y(t) = 2)$

Possède la solution analytique . $y(t) = e^t + e^{2t}$.

a) En prenant h = 0.1, faire trois itérations de la méthode d’Euler modifiée et calculer l’erreur commise sur y_3 en comparant les résultats avec la solution analytique $y(0.3)$.

Exercices d'application

b) En prenant h = 0.05, faire six itérations de la méthode d'Euler modifiée et calculer l'erreur commise sur y_6 en comparant les résultats avec la solution analytique $y(0.3)$.

c) Faire le rapport des erreurs commises en a) et b) et commenter le résultat en f onction de l'erreur de troncature locale liée à la méthode utilisée.

d) Utiliser l'extrapolation de Richardson pour obtenir un meilleure approximation de $y(0.3)$.

Exercice 3

Refaire l'exercice précédent, mais cette fois à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Exercices d'application

- Exercices d'application à quelques phénomènes réelles
- **Exercice 1 : Du double au triple**

Une grandeur (non nulle) évolue à une vitesse proportionnelle à elle-même. On sait que cette grandeur double tous les dix ans. Combien de temps luis faut-il pour tripler ?

Exercice 2 La loi de refroidissement de Newton s'énonce comme ainsi:

"la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant". On suppose la température de l'air ambiant est constante égale à 25° C. Dans ces conditions, la température d'un corps passe de 100° C à 70° C en 15 minutes. Au bout de

Exercices d'application

combien de temps se trouvera t-il à 40° C ?

Exercice 3 : Dissolution d'une substance

Une substance se dissout dans l'eau. On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute. A l'instant t = 0 (t en minutes), on place 20g de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, donner une expression de la quantité $f(t)$ dissoute , en grammes, en fonction de t.

Exercice 4 : Taux d'alcoolémie

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie sur $\mathbb{R}_+$, l'équation différentielle : $(E) : y' + y = a\,e^{-t}$

Exercices d'application

Où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1) On pose, pour tou $t \in \mathbb{R}_+ : g(t) = f(t)e^t$. . Démontrer que g(t) est une fonction affine.

2) Exprimer $f(t)$ en fonction de t et de a.

3) Dans cette question, on suppose que a = 5.

a) Etudier la variation de f(t) et tracer la courbe. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.

b) Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0.5\ gL^{-1}$.

Exercices d'application

- **Exercice 5 : Modèle de Verhulst-loi logistique continue**

On repique des plants de 10 cm de haut sous une serre. On sait que la taille maximale de ces plantes est 1 m. On note la taille, en m d'un plant après t jours. (On a donc f(0) = 0.1). Le modèle de Verhulst consiste à considérer que la vitesse de croissance de la plante évolue suivant la relation : $f'(t) = a\, f(t)(1 - f(t))$

Où a est une constante dépendant des conditions expérimentales. Autrement dit, f(t) est une solution, sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle : $y' = a\, y(1-y)$.

1) On pose, pour tout : $t \in \mathbb{R}_+$:

$$z(t) = \frac{1}{f(t)}$$

Exercices d'application

Déterminer une équation différentielle satisfaite par z, puis la résoudre sur $(\mathbb{R}_+)$. En déduire que pour tout réel de $\mathbb{R}_+$ on a :

$$f(t) = \frac{1}{9\,e^{-at} + 1}$$

2) On observe qu'au bout de 15 jours, la plante mesure 19 cm. Calculer a (on arrondira à 10^{-2} près).

3) Etudier la limite de f en $+\infty$ en et préciser son sens de variation.

4) Représenter graphiquement la fonction f(t) .

5) Au bout de combien de jours, la plante dépassera telle 90 cm de haut ?

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

Exercice 1 *Du double au triple*

Par hypothèse, on a : $y' = ay$

Où a est le coefficient de proportionnalité.

Notons t le temps (en années). On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme :

$$y(t) = C\ e^{at}$$

Où C est une constante (non nulle, sinon y serait nulle)

Comme la grandeur double tous les dix ans, on a :

$$y(t+10) = 2y(t)$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

$$C\ \mathbf{e}^{a(t+10)} = 2\ C\,\mathbf{e}^{at}$$

En simplifiant par $C\,\mathbf{e}^{at}$:

$$\mathbf{e}^{10a} = 2$$

D'où :

$$a = \frac{\ln 2}{10}$$

On a donc :

$$y(t) = C\,\mathbf{e}^{\frac{\ln 2}{10}t} = C\,2^{\frac{t}{10}}$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

Cherchons maintenant le temps T pour lequel, on a :

$$y(t+T) = 3y(t)$$

$$C\ \mathbf{e}^{a(t+T)} = 3\ C\,\mathbf{e}^{at}$$

$$\mathbf{e}^{aT} = 3$$

$$T = \frac{\ln 3}{a} = \frac{10 \ln 3}{\ln 2} \simeq 15{,}85 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Il faut donc attendre 15 ans, 10 mois et 6 jours (au jours près) pour que cette quantité triple.

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

Exercice 2 *Loi de refroidissement de Newton*

Notons $f(t)$ la température du corps à l'instant t (en minutes).

Selon la loi de refroidissement de Newton, on a :

$$f'(t) = a(25 - f(t))$$

Les solutions, sur $\mathbb{R}_+$, de cette équation différentielle sont de la forme :

$$f(t) = C\ \mathrm{e}^{-at} + 25$$

À l'instant $t = 0$, le corps est à une température de 100°C :

$$f(0) = 100$$

$$C + 25 = 100$$

$$C = 75$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $$f(t) = 75\,\mathrm{e}^{-at} + 25$$

On sait que 15 minutes plus tard, le corps est à 70°C, ce qui permet de calculer a :

$$f(15) = 70$$

$$75\,\mathrm{e}^{-15a} + 25 = 70$$

$$\mathrm{e}^{-15a} = \frac{3}{5}$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

$$-15a = \ln\left(\frac{3}{5}\right) = \ln 3 - \ln 5$$

$$a = \frac{\ln 5 - \ln 3}{15} \simeq 0{,}034 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Déterminons maintenant le temps t à partir duquel le corps se trouve à une température de 40°C.

On résout l'équation : $$f(t) = 40$$

$$75\,\mathrm{e}^{-at} + 25 = 40$$

$$\mathrm{e}^{-at} = \frac{1}{5}$$

$$t = \frac{\ln 5}{a} = 15\frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 3} \simeq 47{,}26 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}$$

Il faut attendre 47 minutes (et 16 secondes, à la seconde près) que le corps atteigne la température de 40°C.

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

Exercice 3 *Dissolution d'une substance*

Comme la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(t) = a(20 - f(t))$$

Les solutions sont de la forme, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = C\ \mathrm{e}^{-at} + 20$$

À l'instant initial, il n'y a pas encore de quantité dissoute donc :

$$f(0) = 0$$

$$C + 20 = 0$$

$$C = -20$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

Comme les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, on a :

$$f(5) = 10$$

$$-20\,\mathrm{e}^{-5a} + 20 = 10$$

$$\mathrm{e}^{-5a} = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{\ln 2}{5} \simeq 0{,}14 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = 20\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5}t}\right) = 20\left(1 - 2^{-\frac{t}{5}}\right)$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

Exercice 4 *Taux d'alcoolémie*

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (les fonctions f et l'exponentielle le sont) et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(t) = f'(t)\ \mathrm{e}^t + f(t)\ \mathrm{e}^t = (f'(t) + f(t))\,\mathrm{e}^t$$

Et comme f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$: $\quad g'(t) = a$

D'où : $\quad g(t) = at + b$

La fonction g est bien affine (sur $\mathbb{R}_+$).

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

2. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $$f(t) = (at + b)\ \mathbf{e}^{-t}$$

Or, à l'instant $t = 0$, l'alcool n'est pas encore dans le sang, donc $f(0) = 0$:

$$b\,\mathbf{e}^{-t} = 0$$

$$b = 0$$

D'où : $$f(t) = at\,\mathbf{e}^{-t}$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

3. a. Étudions les variations de f. Comme f est solution de (E), on a :

$$f'(t) = 5\,\mathrm{e}^{-t} - f(t) = 5\,\mathrm{e}^{-t} - 5t\,\mathrm{e}^{-t} = 5\,\mathrm{e}^{-t}(1-t)$$

D'où : $f'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - t \geqslant 0 \Leftrightarrow t \leqslant 1$

La fonction f est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.

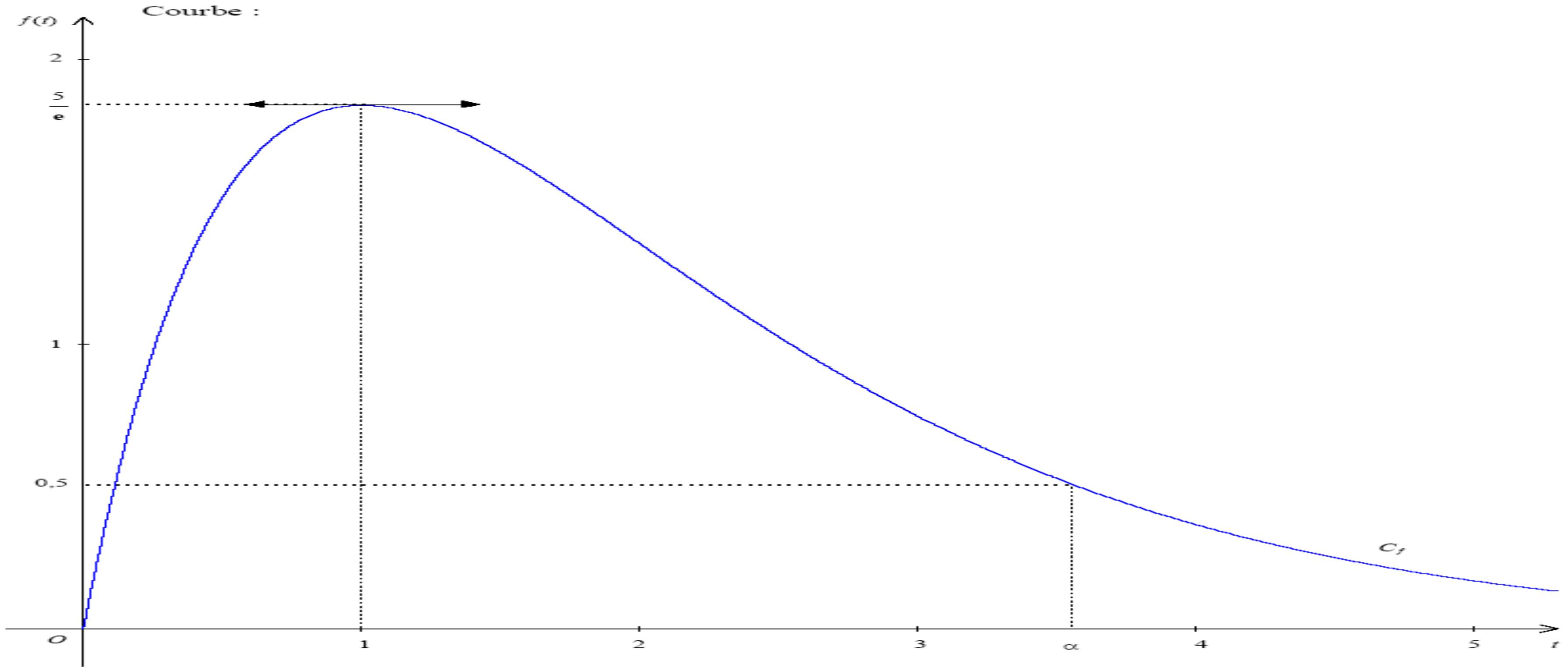
Elle admet donc un maximum en 1 et :

$$f(1) = \frac{5}{\mathrm{e}} \simeq 1{,}84 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Le taux d'alcoolémie maximal est de 1,84 gL^{-1} atteint au bout d'une heure.

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application



Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

b. Nous devons résoudre l'inéquation : $f(t) \leqslant 0{,}5$

$$5t\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant 0{,}5$$

$$t\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant 0{,}1$$

Ceci n'est pas possible formellement (inéquation transcendante).

Cependant, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et on a :

$$f(1) = \frac{5}{\mathrm{e}} > 0{,}5 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} 5t\,\mathrm{e}^{-t} = 0$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

Le théorème de bijection assure qu'il existe un unique réel α de $[1, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0,5$.

Le graphique permet de conjecturer : $\alpha \in]3 ; 4[$

Ce qui peut se contrôler à la calculatrice :

$$f(3) \simeq 0,75 \ (> 0,5) \text{ et } f(4) \simeq 0,37 \ (< 0,5)$$

On a donc bien : $\alpha \in]3 ; 4[$

Il faudra attendre 4 heures (à l'heure près par excès) pour pouvoir, par exemple, reprendre le volant...