Equations différentielles

4. Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2

4 – 1 Algorithme de la méthode d'Euler modifiée

1 - Etant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0 , y_0)

Et un nombre maximal d'itérations N

2 – Pour $0 \leq n \leq N$

$$\hat{y} = y_n + h\, f(t_n , y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n , y_n) + f(t_n + h, \hat{y})]$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Ecrire

3 - Arrêt t_{n+1} , y_{n+1}

Equations différentielles

4 – 2 Algorithme de la méthode du point milieu

1 - Etant donné un pas de temps h, une condition initiale $(t_0\ , y_0)$

Et un nombre maximal d'itérations N

2 – Pour

$$0 \leq \ n \ \leq N$$

$$k_1 = \ h\, f(t_n\ , y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n \ + h\left[f\left(t_n + \frac{h}{2}\ , y_n + \frac{k_1}{2}\right)\right]$$

$$t_{n+1} = \ t_n + \ h$$

Ecrire

3 - Arrêt $t_{n+1}\ , y_{n+1}$

Equations différentielles

4 – 3 Algorithme de la méthode de Runge-Kutta ordre 4

1 - Etant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0 , y_0)

Et un nombre maximal d'itérations N

2 – Pour $0 \leq \; n \; \leq N$

$$k_1 = \; h \, f(t_n \, , y_n)$$

$$k_2 = \; h\left[f\left(t_n + \frac{h}{2} \, , y_n + \frac{k_1}{2}\right)\right]$$

$$k_3 = \; h\left[f\left(t_n + \frac{h}{2} \, , y_n + \frac{k_2}{2}\right)\right]$$

$$k_4 = \; h[f(t_n + h \, , y_n + k_3)]$$

Equations différentielles

4 – 3 Algorithme de la méthode de Runge-Kutta ordre 4

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Ecrire $t_{n+1}\ ,y_{n+1}$

3 - Arrêt

Exercices d’application

- **Exercice 1**

Faire trois itérations avec h = 0.1 des méthodes d’Euler, d’Euler modifié, du point milieu et de Runge-Kutta d’ordre 4 pour les équations différentielles suivantes :

$$a)\ y'(t) = t\, sin\big(y(t)\big) \qquad (y(0) = 2)$$

$$b)\ y'(t) = t^2 + \big(y(t)\big)^2 + 1 \qquad (y(1) = 0)$$

$$c)\ y'(t) = y(t)\, e^t \qquad (y(0) = 2)$$

Exercice 2

L’équation différentielle :

$$y'(t) = y(t) + e^t \qquad (y(t) = 2)$$

Possède la solution analytiqu

$$y(t) = e^t + e^{2t}.$$

a) En prenant h = 0.1, faire trois itér d’Euler modifiée et calculer l’erreur commise sur y_3 en comparant les résultats avec la solution analytique $y(0.3)$.

Exercices d'application

b) En prenant h = 0.05, faire six itérations de la méthode d'Euler modifiée et calculer l'erreur commise sur en comp$y_6$nt les résultats avec la solution analytique .

c) Faire le rapport des erreurs commises en a) e$y(0.3)$

commenter le résultat en f onction de l'erreur de troncature locale liée à la méthode utilisée.

d) Utiliser l'extrapolation de Richardson pour obtenir un meilleure approximation de .

Exercice 3

Refaire l'exercice précéde$y(0.3)$is cette fois à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Exercices d’application

- Exercices d’application à quelques phénomènes réelles
- **Exercice 1 : Du double au triple**

Une grandeur (non nulle) évolue à une vitesse proportionnelle à elle-même. On sait que cette grandeur double tous les dix ans. Combien de temps luis faut-il pour tripler ?

Exercice 2 La loi de refroidissement de Newton s’énonce comme ainsi: *‘’la vitesse de refroidissement d’un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant’’.* On suppose la température de l’air ambiant est constante égale à 25° C. Dans ces conditions, la température d’un corps passe de 100° C à 70° C en 15 minutes. Au bout de

Exercices d'application

combien de temps se trouvera t-il à 40° C ?

Exercice 3 : Dissolution d'une substance

Une substance se dissout dans l'eau. On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute. A l'instant t = 0 (t en minutes), on place 20g de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, donner une expression de la quantité $f(t)$ dissoute , en grammes, en fonction de t.

Exercice 4 : Taux d'alcoolémie

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool, il vérifie sur $\mathbb{R}_+$, l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = a\, e^{-t}$$

Exercices d'application

Où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+ : g(t) = f(t)e^t$. montrer que g(t) est une fonction affine.

2) Exprimer $f(t)$ fonction de t et de a.

3) Dans cette question, on suppose que a = 5.

a) Etudier la variation de f(t) et tracer la courbe. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.

b) Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0.5\ gL^{-1}$.

Exercices d'application

- **Exercice 5 : Modèle de Verhulst-loi logistique continue**

On repique des plants de 10 cm de haut sous une serre. On sait que la taille maximale de ces plantes est 1 m. On note la taille, en m d'un plant après t jours. (On a donc f(0) = 0.1). Le modèle de Verhulst consiste à considérer que la vitesse de croissance de la plante évolue suivant la relation :

$$f'(t) = a\, f(t)(1 - f(t))$$

Où a est une constante dépendant des conditions expérimentales. Autrement dit, f(t) est une solution, sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle :

$$y' = a\, y(1 - y)$$

1) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$z(t) = \frac{1}{f(t)}$$

Exercices d'application

Déterminer une équation différentielle satisfaite par z, puis la résoudre sur $((\mathbb{R}_+)$ En déduire que pour tout réel de $\mathbb{R}_+$ on a :

$$f(t) = \frac{1}{9\,e^{-at} + 1}$$

2) On observe qu'au bout cm.
Calculer a (on arrondira à 10^{-2} pres).
3) Etudier la limite de f en $+\infty$ en et préciser son sens de variation.
4) Représenter graphiquement la fonction f(t) .
5) Au bout de combien de jours dépassera telle 90 cm de haut ?

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

Exercice 1 *Du double au triple*

Par hypothèse, on a : $y' = ay$

Où a est le coefficient de proportionnalité.

Notons t le temps (en années). On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme :

$$y(t) = C\ e^{at}$$

Où C est une constante (non nulle, sinon y serait nulle)

Comme la grandeur double tous les dix ans, on a :

$$y(t + 10) = 2y(t)$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

$$C\ \mathbf{e}^{a(t+10)} = 2\ C\,\mathbf{e}^{at}$$

En simplifiant par $C\,\mathbf{e}^{at}$:

$$\mathbf{e}^{10a} = 2$$

D'où :

$$a = \frac{\ln 2}{10}$$

On a donc :

$$y(t) = C\,\mathbf{e}^{\frac{\ln 2}{10}t} = C\,2^{\frac{t}{10}}$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

Cherchons maintenant le temps T pour lequel, on a :

$$y(t+T) = 3y(t)$$

$$C\ \mathbf{e}^{a(t+T)} = 3\ C\,\mathbf{e}^{at}$$

$$\mathbf{e}^{aT} = 3$$

$$T = \frac{\ln 3}{a} = \frac{10\ln 3}{\ln 2} \simeq 15{,}85 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Il faut donc attendre 15 ans, 10 mois et 6 jours (au jours près) pour que cette quantité triple.

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

<u>Exercice 2</u> *Loi de refroidissement de Newton*

Notons $f(t)$ la température du corps à l'instant t (en minutes).

Selon la loi de refroidissement de Newton, on a :

$$f'(t) = a(25 - f(t))$$

Les solutions, sur $\mathbb{R}_+$, de cette équation différentielle sont de la forme :

$$f(t) = C\ \mathrm{e}^{-at} + 25$$

À l'instant $t = 0$, le corps est à une température de 100°C :

$$f(0) = 100$$

$$C + 25 = 100$$

$$C = 75$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $$f(t) = 75\,e^{-at} + 25$$

On sait que 15 minutes plus tard, le corps est à 70°C, ce qui permet de calculer a :

$$f(15) = 70$$

$$75\,e^{-15a} + 25 = 70$$

$$e^{-15a} = \frac{3}{5}$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

$$-15a = \ln\left(\frac{3}{5}\right) = \ln 3 - \ln 5$$

$$a = \frac{\ln 5 - \ln 3}{15} \simeq 0{,}034 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Déterminons maintenant le temps t à partir duquel le corps se trouve à une température de 40°C.

On résout l'équation : $f(t) = 40$

$$75\,\mathrm{e}^{-at} + 25 = 40$$

$$\mathrm{e}^{-at} = \frac{1}{5}$$

$$t = \frac{\ln 5}{a} = 15\frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 3} \simeq 47{,}26 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}$$

Il faut attendre 47 minutes (et 16 secondes, à la seconde près) que le corps atteigne la température de 40°C.

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

Exercice 3 *Dissolution d'une substance*

Comme la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(t) = a(20 - f(t))$$

Les solutions sont de la forme, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = C\ \mathrm{e}^{-at} + 20$$

À l'instant initial, il n'y a pas encore de quantité dissoute donc :

$$f(0) = 0$$

$$C + 20 = 0$$

$$C = -20$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

Comme les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, on a :

$$f(5) = 10$$

$$-20\,\mathrm{e}^{-5a} + 20 = 10$$

$$\mathrm{e}^{-5a} = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{\ln 2}{5} \simeq 0{,}14 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = 20\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5}t}\right) = 20\left(1 - 2^{-\frac{t}{5}}\right)$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

Exercice 4 *Taux d'alcoolémie*

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (les fonctions f et l'exponentielle le sont) et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(t) = f'(t)\ \mathrm{e}^t + f(t)\ \mathrm{e}^t = (f'(t) + f(t))\,\mathrm{e}^t$$

Et comme f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$: $\qquad g'(t) = a$

D'où : $\qquad g(t) = at + b$

La fonction g est bien affine (sur $\mathbb{R}_+$).

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

2. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $$f(t) = (at + b)\ \mathbf{e}^{-t}$$

Or, à l'instant $t = 0$, l'alcool n'est pas encore dans le sang, donc $f(0) = 0$:

$$b\,\mathbf{e}^{-t} = 0$$

$$b = 0$$

D'où : $$f(t) = at\,\mathbf{e}^{-t}$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

3. a. Étudions les variations de f. Comme f est solution de (E), on a :

$$f'(t) = 5\,\mathbf{e}^{-t} - f(t) = 5\,\mathbf{e}^{-t} - 5t\,\mathbf{e}^{-t} = 5\,\mathbf{e}^{-t}(1-t)$$

D'où : $$f'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1-t \geqslant 0 \Leftrightarrow t \leqslant 1$$

La fonction f est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.

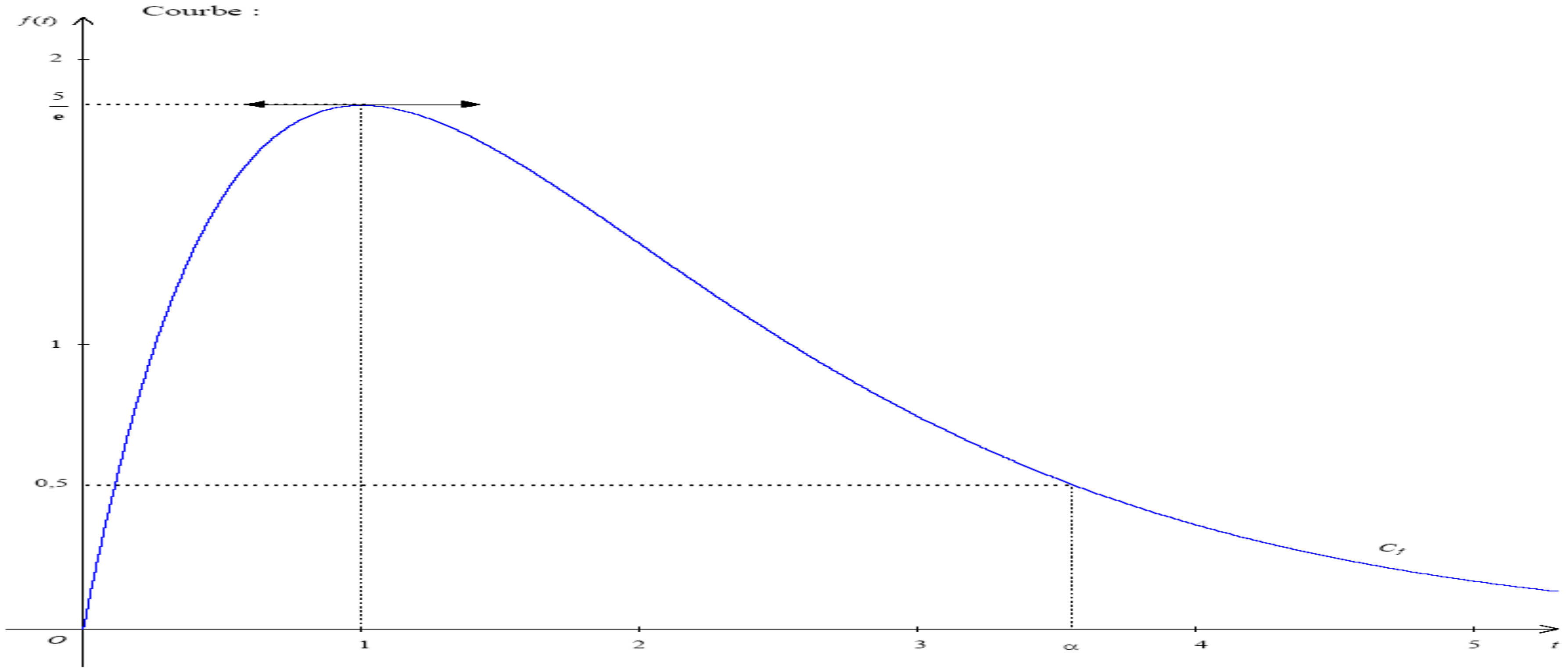
Elle admet donc un maximum en 1 et :

$$f(1) = \frac{5}{\mathbf{e}} \simeq 1{,}84 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Le taux d'alcoolémie maximal est de 1,84 gL^{-1} atteint au bout d'une heure.

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application



Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

b. Nous devons résoudre l'inéquation : $f(t) \leqslant 0,5$

$$5t\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant 0,5$$

$$t\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant 0,1$$

Ceci n'est pas possible formellement (inéquation transcendante).

Cependant, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et on a :

$$f(1) = \frac{5}{\mathrm{e}} > 0,5 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} 5t\,\mathrm{e}^{-t} = 0$$

Solution des Exercices

Solution des exercices d'application

Le théorème de bijection assure qu'il existe un unique réel α de $[1, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0,5$.

Le graphique permet de conjecturer : $\alpha \in]3 ; 4[$

Ce qui peut se contrôler à la calculatrice :

$$f(3) \simeq 0,75 \ (> 0,5) \ \text{ et } f(4) \simeq 0,37 \ (< 0,5)$$

On a donc bien : $\alpha \in]3 ; 4[$

Il faudra attendre 4 heures (à l'heure près par excès) pour pouvoir, par exemple, reprendre le volant...