

Équations générales des milieux continus

Jean Garrigues

10 mai 2012

Avant-propos

L'objectif de ce cours est d'établir les équations générales régissant tous les milieux continus, qu'ils soient solides ou fluides.

Les développements qui suivent se placent dans le cadre de la physique classique (non relativiste et non quantique). Les équations générales des milieux continus sont donc les conséquences des quatre principes fondamentaux de la physique classique¹ :

1. le principe de la conservation de la masse ;
2. le principe fondamental de la mécanique ;
3. le premier principe de la thermodynamique, encore appelé principe de la conservation de l'énergie ;
4. le second principe de la thermodynamique.

En ce qui concerne le principe fondamental de la mécanique, l'auteur a choisi résolument de conserver le principe fondamental de Newton, c'est-à-dire celui qui est généralement posé dans les cours de mécanique générale élémentaires. Ce choix est un choix pédagogique : plutôt de commencer la mécanique des milieux continus par l'énoncé d'un nouveau principe fondamental (le principe des travaux virtuels ou des puissances virtuelles²), il semble préférable à l'auteur de se baser sur les connaissances classiques acquises en mécanique générale. Les connaissances préalables de mécanique générale nécessaires à la lecture de ce cours se résument aux trois théorèmes généraux pour des ensembles de points matériels (finis ou non) :

1. le théorème de la résultante dynamique ;
2. le théorème du moment dynamique ;
3. le théorème de la puissance cinétique (dérivée temporelle de l'énergie cinétique).

La lecture de ce cours suppose aussi une maîtrise suffisante de l'algèbre et de l'analyse tensorielle³ ainsi que de la cinématique des milieux continus⁴.

Dans la mesure du possible, on respectera les conventions typographiques suivantes :

- les nombres réels sont en minuscules italiques (exemple : a, μ) ;
- les vecteurs sont en minuscules italiques grasses (exemple : $\mathbf{v}$) ;
- les tenseurs sont en majuscules italiques grasses (exemple : $\mathbf{T}$) ;
- les termes d'une matrice sont rangés dans un tableau entre crochets, à deux indices, l'indice de gauche est l'indice de ligne, et l'indice de droite est l'indice de colonne : $\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = [m_{ij}]$
- la transposition des matrices est notée avec un T en exposant (exemple : M^T) ;
- les espaces d'entités mathématiques sont en majuscules doublées (exemples : l'espace des réels : $\mathbb{R}$, l'espace des vecteurs de dimension 3 : $\mathbb{V}_3$).
- le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{V}_3$ est noté « $\wedge$ ».

1. En fait, on peut démontrer que si le principe de la conservation de l'énergie est universel et si les grandeurs calorifiques scalaires ou vectorielles sont objectives, les deux premiers principes (masse et mécanique) en sont des conséquences (voir l'article <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/60/02/61/PDF/MMCEnergetique.pdf>).

2. Dans ce cours, ils apparaissent donc comme des théorèmes.

3. L'auteur propose un autre cours intitulé *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*.

4. L'auteur propose un autre cours intitulé *Cinématique des milieux continus*.

Chapitre 1

Concepts fondamentaux

Avant d'aborder l'écriture des principes fondamentaux et leurs conséquences pour les milieux continus, il est nécessaire d'introduire des concepts indispensables à la bonne compréhension des chapitres suivants.

1.1 Les domaines de milieux continus

Dans l'étude des milieux continus, on applique les principes fondamentaux à des domaines de milieux continus. Comme on va le voir, on peut définir deux sortes de domaines. Dans la littérature spécialisée, les auteurs ne précisent pas toujours quelle est la définition de ce qu'ils appellent domaine de milieu continu, et cette imprécision est à l'origine de nombreux malentendus. On consacre cette section à en donner des définitions rigoureuses.

1.1.1 Domaine matériel

DÉFINITION : *Un domaine matériel est défini par l'ensemble des particules (a priori en mouvement) qui le constituent.*

Si une particule appartient au domaine matériel à un instant t , elle lui appartient donc à tout instant.

REMARQUE : Étant défini par les particules qui le constituent, un domaine matériel a la même définition pour tous les observateurs¹.

Un domaine matériel se déplace et se déforme en raison du mouvement de ses particules². Quand on considère un domaine matériel, on dit souvent que « l'on suit le domaine dans son mouvement ». *Il n'y a donc pas de matière qui traverse la frontière mobile.* Le domaine matériel étant en mouvement, l'ensemble des positions actuelles de ses particules définit une région de l'espace qui change à chaque instant.

NOTATIONS :

- un domaine matériel sera noté $\mathcal{D}^m$ (c'est un ensemble de particules);
- le domaine de l'espace qu'il occupe à l'instant t sera noté $\mathcal{D}_t^m$;
- sa frontière à l'instant t sera notée $\partial\mathcal{D}_t^m$.

VOCABULAIRE : En thermodynamique, les domaines matériels sont appelés *systèmes fermés*³.

1. Imaginer que l'on a peint en rouge toutes les particules du domaine matériel.

2. Ce mouvement est différent pour chaque observateur.

3. Avec parfois une petite nuance : les thermodynamiciens supposent parfois implicitement que la frontière étanche à la matière est fixe. Nous ne ferons évidemment pas cette restriction.

1.1.2 Domaine géométrique

DÉFINITION : Un domaine géométrique est défini par l'ensemble des points géométriques de $\mathcal{E}_3$ qui le constituent.

Comme pour tout domaine, la frontière d'un domaine géométrique est une surface fermée. Quand le milieu continu est en mouvement, les particules qui sont dans le domaine géométrique à un instant t ne sont pas les mêmes que celles qui s'y trouvent à un instant t' . On dit que le domaine géométrique est « traversé par le milieu continu ». Il y a donc des particules qui traversent la frontière (ou une partie de frontière), en entrant ou en sortant du domaine géométrique.

Dans ce cours, les frontières des domaines géométriques seront considérées *a priori* comme mobiles pour l'observateur choisi, mais le mouvement de ses frontières est sans rapport avec celui des particules qui s'y trouvent.

REMARQUE : Un domaine géométrique étant défini par des points de $\mathcal{E}_3$, chaque observateur attribue une position et un mouvement différent aux points de sa frontière. Toutefois, puisque tous les observateurs attribuent la même distance à tout couple de points géométriques (M_1, M_2) , la forme du domaine géométrique à un instant donné est la même pour tous les observateurs.

NOTATIONS :

- Un domaine géométrique sera noté $\mathcal{D}^g$ (c'est une région de l'espace $\mathcal{E}_3$ délimité par une frontière);
- Le domaine de l'espace qu'il occupe à l'instant t sera noté $\mathcal{D}_t^g$;
- Sa frontière (*a priori* mobile) à l'instant t sera notée $\partial\mathcal{D}_t^g$.

VOCABULAIRE : En thermodynamique, les domaines géométriques sont appelés *systèmes ouverts*. En mécanique des fluides, ils sont souvent aussi appelés *volumes de contrôle*⁴.

1.1.3 Comparaison entre les deux types de domaines

Les deux types de domaines ont chacun leur intérêt :

- Les domaines matériels sont les préférés des mécaniciens des solides déformables. En effet, leur sujet d'étude est le comportement d'un objet déformable toujours constitué des mêmes particules : les particules de l'objet déformable.
- Les domaines géométriques sont les préférés des mécaniciens des fluides. En effet, en mécanique des fluides (liquides ou gaz), on ne se préoccupe que de l'évolution des grandeurs physiques des particules qui sont à l'intérieur du domaine géométrique à un certain instant, plutôt que de se préoccuper de l'histoire individuelle des particules, notamment lorsqu'elles sont hors du domaine géométrique.

REMARQUE : Les mécaniciens des fluides qui n'envisagent que des domaines géométriques supposent souvent implicitement (et parfois un peu trop vite) que ces domaines géométriques ont des frontières fixes. Il n'est pas toujours possible de trouver un observateur pour lequel le domaine géométrique est fixe. Par exemple, si on considère le domaine géométrique défini comme l'espace à l'intérieur d'une turbomachine, il y a des parties de frontières qui sont mobiles (les aubages qui tournent) par rapport à d'autres parties de frontières (les parois) et il n'est pas possible de trouver un observateur pour lequel toutes les frontières du domaine géométrique sont fixes. C'est pourquoi dans la suite, pour ne pas restreindre la généralité des équations, les frontières d'un domaine géométriques seront *a priori* considérées comme mobiles (mais le mouvement des frontières est sans rapport avec celui des particules du milieu continu).

⁴. En thermodynamique comme en mécanique des fluides, il est parfois sous-entendu que les frontières d'un domaine géométrique sont fixes (pour un certain observateur).

1.2 Grandeurs physiques extensives

DÉFINITION : On dit qu'une grandeur physique globale $\mathcal{A}$ (scalaire, vectorielle ou tensorielle) évaluée pour un domaine $\mathcal{D}$ (matériel ou géométrique) est extensive si sa valeur pour le domaine $\mathcal{D}$ est la somme des valeurs de $\mathcal{A}$ pour tous les sous-domaines d'une partition quelconque de $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{A} \text{ extensive et } \left\{ \mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{D}_i \text{ et } \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset \ (i \neq j) \right\} \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}(\mathcal{D}_i)$$

Dans ces conditions, on peut affirmer⁵ qu'il existe un champ défini dans le domaine $\mathcal{D}$, appelé *densité volumique de $\mathcal{A}$* et noté $\mathcal{A}^v(M)$ tel que :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{A}^v(M) dv$$

Toutes les grandeurs physiques ne sont pas extensives. Les grandeurs physiques non extensives sont dites *intensives*.

EXEMPLES : Le volume (scalaire), la masse (scalaire), l'énergie cinétique (scalaire), la quantité de mouvement (vecteur) sont des grandeurs extensives.

La température (scalaire), la pression (scalaire), la déformation (tenseur d'ordre 2) sont des grandeurs intensives.

1.2.1 Application à un domaine matériel

Puisque dans un domaine matériel, les particules qu'il contient sont toujours les mêmes, on peut identifier ses particules indifféremment par la méthode de Lagrange (par leur position de référence) ou par la méthode d'Euler (par leur position actuelle). La position de référence du domaine matériel sera notée $\mathcal{D}_0^m$.

Si $\mathcal{A}$ est une grandeur extensive, sa valeur actuelle pour le domaine matériel $\mathcal{D}^m$ peut s'écrire de deux manières :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathcal{A}_L^v(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) dv_0 \quad (1.1)$$

où K_v est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont l'état de référence est $\mathcal{D}_0^m$ ⁶. Le terme $K_{vL}(\mathbf{x}_0, t)$ est sa description de Lagrange.

PRÉCISIONS : Pour passer de l'intégrale sur le domaine actuel $\mathcal{D}_t^m$ à l'intégrale sur le domaine de référence $\mathcal{D}_0^m$, on effectue le changement de variable $\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$, où $\mathbf{f}$ est la description de Lagrange du mouvement⁷. On a donc :

$$\mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) = \mathcal{A}_E^v(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t), t) = \mathcal{A}_L^v(\mathbf{x}_0, t) \quad (= \mathcal{A}^v(P, t)) \quad \text{et} \quad dv_t = K_v dv_0$$

1.2.2 Application à un domaine géométrique

Contrairement aux domaines matériels, on ne peut identifier les particules qui sont actuellement dans un domaine géométrique que par la méthode d'Euler, car ce sont les valeurs de $\mathcal{A}^v$ pour les particules qui sont actuellement dans le domaine qui sont l'objet de l'intégration (elles ne sont peut-être plus dans le domaine $\mathcal{D}_t^g$ à un autre instant).

En conséquence, la valeur actuelle de la grandeur extensive $\mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t)$ s'écrira exclusivement avec une description d'Euler du champ $\mathcal{A}^v$:

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t \quad (1.2)$$

5. Théorème de Radon en théorie de la mesure.

6. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, section 4.7

7. Voir *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, section 2.2 et 2.4

1.3 Rappel : dérivées temporelles d'intégrales à bord variables

Que les domaines envisagés soient matériels ou géométriques, on aura besoin, dans les chapitres qui suivent, d'écrire la dérivée temporelle d'intégrales sur ces domaines. Les frontières du domaine d'intégration sont *a priori* variables avec le temps.

La variation temporelle d'une intégrale de volume dont le domaine d'intégration varie avec le temps est due à la fois à la variation temporelle de l'intégrande et à la variation temporelle du domaine d'intégration.

On rappelle le résultat mathématique suivant⁸:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \mathcal{A}^v(\mathbf{x}, t) dv_t = \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}^v(\mathbf{x}, t) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathcal{A}^v(\mathbf{x}, t) (\mathbf{v}^f \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (1.3)$$

où :

- $\mathcal{A}^v(\mathbf{x}, t)$ est un champ défini dans une portion l'espace $\mathcal{E}_3$ contenant tous les domaines $\mathcal{D}_t$ ($\forall t$ appartenant à l'intervalle d'étude $[t_1, t_2]$);
- $\mathbf{v}^f$ est la vitesse des points de la frontière du domaine d'intégration;
- $\mathbf{n}_t$ est la normale unitaire extérieure actuelle à la frontière $\partial \mathcal{D}_t$.

1.4 Dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine matériel

Soit $\mathcal{A}$ une grandeur extensive dont la densité volumique est $\mathcal{A}^v(P, t)$.

Si le champ $\mathcal{A}^v$ est décrit par la méthode d'Euler

La valeur actuelle de la grandeur extensive pour le domaine matériel $\mathcal{D}^m$ est :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t \quad (\text{voir (1.1) page 3})$$

Le domaine d'intégration $\mathcal{D}_t^m$ est variable avec le temps. Le domaine étant matériel, la vitesse d'un point de la frontière du domaine d'intégration est la vitesse de la particule qui s'y trouve, on a donc : $\mathbf{v}^f = \mathbf{v}(P, t)$. En vertu du théorème (1.3), la dérivée temporelle de $\mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t)$ s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (1.4)$$

Le champ $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)$ étant défini dans tout le domaine d'intégration, on peut utiliser le théorème de la divergence⁹ pour transformer l'intégrale de frontière en une intégrale de volume.

En remarquant que : $\mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{n}_t) = (\mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)) \cdot \mathbf{n}_t$, il vient :

$$\int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \text{div}(\mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)) dv \quad (\text{si } \mathcal{A} \text{ est scalaire, } \otimes \text{ est un produit simple})$$

On obtient ainsi une seconde expression de la dérivée temporelle de $\mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t)$:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) + \text{div}(\mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)) \right) dv_t \quad (1.5)$$

8. Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur, section 4.3

9. Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur, section 3.8

En développant la divergence¹⁰, on obtient une troisième expression de la dérivée temporelle de $\mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) + \mathbf{grad}_E \mathcal{A}^v(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) + \text{div}_E \mathbf{v}(\mathbf{x}_t, t) \mathcal{A}^v(\mathbf{x}_t, t) \right) dv_t \\ \frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left(\dot{\mathcal{A}}_E^v(\mathbf{x}_t, t) + d_{vE}(\mathbf{x}_t, t) \mathcal{A}^v(\mathbf{x}_t, t) \right) dv_t \quad (\text{définition de la dérivée particulaire}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

où :

- $\dot{\mathcal{A}}_E^v$ est la description d'Euler de la dérivée particulaire¹¹ de la densité volumique $\mathcal{A}^v$;
- $d_{vE} = \text{div}_E \mathbf{v} = \text{Tr} \mathbf{D}$ est la description d'Euler du taux de dilatation volumique actuel.

Si le champ $\mathcal{A}^v$ est décrit par la méthode de Lagrange

La valeur actuelle de la grandeur extensive pour le domaine matériel $\mathcal{D}^m$ est :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathcal{A}_L^v(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) dv_0 \quad (\text{voir (1.1) page 3})$$

où K_{vL} est la description de Lagrange de la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont l'état de référence est $\mathcal{D}_0^m$.

Le domaine d'intégration $\mathcal{D}_0^m$ est, par définition, indépendant du temps. La vitesse des points de la frontière du domaine d'intégration est donc nulle ($\mathbf{v}^f = \mathbf{0}$). En vertu du théorème (1.3) page 4, la dérivée temporelle de $\mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t)$ est donc :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_0^m} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathcal{A}_L^v(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \right) dv_0 \quad (\text{d'après (1.3) page 4}) \quad (1.7)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \frac{d}{dt} \left(\mathcal{A}_L^v(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \right) dv_0 \quad (\mathbf{x}_0 \text{ ne dépend pas de } t)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left(\dot{\mathcal{A}}_L^v(\mathbf{x}_0, t) + \mathcal{A}_L^v(\mathbf{x}_0, t) \frac{\frac{d}{dt} K_{vL}(\mathbf{x}_0, t)}{K_{vL}(\mathbf{x}_0, t)} \right) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) dv_0$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_0^m} \left(\dot{\mathcal{A}}_L^v(\mathbf{x}_0, t) + \mathcal{A}_L^v(\mathbf{x}_0, t) d_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \right) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) dv_0 \quad (1.8)$$

où :

- $\dot{\mathcal{A}}_L^v$ est la description de Lagrange de la dérivée particulaire de la densité volumique $\mathcal{A}^v$;
- K_{vL} est la description de Lagrange de la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont l'état de référence est $\mathcal{D}_0^m$;
- $d_{vL} = \frac{\dot{K}_v}{K_v} = \frac{\dot{K}_{vL}}{K_{vL}} = \frac{\dot{K}_{vE}}{K_{vE}} = \text{Tr} \mathbf{D} = \text{div}_E \mathbf{v}$ est la description de Lagrange du taux de dilatation volumique actuel.

Les trois équations (1.4) page 4, (1.5) page 4 et (1.6) page 5 (avec des descriptions d'Euler), ainsi que les deux équations (1.7) et (1.8) (avec des descriptions de Lagrange) sont toutes des expressions équivalentes de la dérivée temporelle de $\mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t)$ sur un domaine matériel quand $\mathcal{A}$ est une grandeur extensive. On peut les utiliser indifféremment, selon les termes que l'on a envie de voir apparaître.

10. Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur, section 3.8

11. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, section 2.7

1.5 Dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine géométrique

Soit $\mathcal{A}$ une grandeur extensive dont la densité volumique est $\mathcal{A}^v(P,t)$.

Dans un domaine géométrique (de frontière *a priori* variable avec le temps), la seule manière de décrire les grandeurs des particules qui s'y trouvent est la méthode d'Euler :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t \quad (\text{voir (1.2) page 3})$$

Le domaine d'intégration $\mathcal{D}_t^g$ est *a priori* variable avec le temps, mais contrairement aux domaines matériels, la vitesse des points de la frontière est sans rapport avec la vitesse des particules du milieu continu qui s'y trouvent. En vertu du théorème (1.3) page 4, la dérivée temporelle de $\mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t)$ s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t) dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}^f \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (\text{voir (1.3) page 4}) \quad (1.9)$$

REMARQUE : S'il existe un observateur pour lequel toute la frontière du domaine géométrique est fixe, alors $\mathbf{v}^f = \mathbf{0}$ et, pour cet observateur, l'intégrale de bord disparaît.

On obtient une seconde expression de la dérivée temporelle de $\mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t)$ en notant que le théorème de la divergence implique :

$$\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{div}(\mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)) dv_t = \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (\text{si } \mathcal{A} \text{ est scalaire, } \otimes \text{ est un produit simple})$$

En ajoutant le terme de gauche et en retranchant le terme de droite de cette équation à l'équation (1.9), il vient :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t) dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) + \mathbf{div}(\mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t))}_{\boldsymbol{\tau}} dv_t + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\boldsymbol{\Phi}} \quad (1.10)$$

où :

- le terme $\boldsymbol{\tau}$ est appelé *taux*¹² de production volumique de $\mathcal{A}$ (unité : $[\mathcal{A}].\text{m}^{-3}.\text{s}^{-1}$) ;
- le terme $\int_{\mathcal{D}_t^g} \boldsymbol{\tau} dv_t$ est appelé *taux de production interne* de $\mathcal{A}$ (unité : $[\mathcal{A}].\text{s}^{-1}$) ;
- le terme $\boldsymbol{\Phi}$ est appelé *flux entrant*¹³ de $\mathcal{A}$ à travers la frontière (unité : $[\mathcal{A}].\text{s}^{-1}$).

La nouvelle expression (1.10) de la dérivée temporelle de $\mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t)$ est souvent appelée *équation de bilan* de la grandeur extensive $\mathcal{A}$ pour le domaine géométrique $\mathcal{D}^g$.

On interprète cette équation en disant que la variation temporelle de la grandeur extensive $\mathcal{A}$ dans le domaine géométrique $\mathcal{D}^g$ est due à la production interne de $\mathcal{A}$ à l'intérieur du domaine géométrique et au flux entrant de $\mathcal{A}$ à travers la frontière.

En développant la divergence dans l'expression de $\boldsymbol{\tau}$, on obtient une troisième expression de la dérivée

12. Attention, ici le mot « taux » signifie ici une dérivée temporelle simple et non une dérivée temporelle logarithmique comme on l'a vu dans d'autres contextes. Ces dénominations, consacrées par l'usage, peuvent induire en erreur.

13. Certains auteurs appellent « flux » l'intégrande de $\boldsymbol{\Phi}$. Son unité est alors : $[\mathcal{A}].\text{m}^{-2}.\text{s}^{-1}$.

temporelle de $\mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t) dv_t &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) + \mathbf{grad}_E \mathcal{A}^v(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) + \text{div}_E \mathbf{v}(\mathbf{x}_t, t) \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t + \\ &\quad \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)) \cdot \mathbf{n}_t ds_t \\ \frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t) dv_t &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{\left(\dot{\mathcal{A}}_E^v(\mathbf{x}_t, t) + d_{vE}(\mathbf{x}_t, t) \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) \right)}_{\tau} dv_t + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathcal{A}_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\Phi} \quad (1.11) \end{aligned}$$

où $d_{vE} = \frac{\dot{K}_v}{K_v} = \text{div}_E \mathbf{v} = \text{Tr} \mathbf{D}$ est la description d'Euler du taux de dilatation volumique actuel.

Les équations (1.9), (1.10) et (1.11) sont toutes des expressions équivalentes de la dérivée temporelle de $\mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t)$ sur un domaine géométrique quand $\mathcal{A}$ est une grandeur extensive. On peut les utiliser indifféremment, selon les termes que l'on a envie de voir apparaître.

1.6 Rappel : lemme fondamental

THÉORÈME : Soit $\mathcal{A}(M)$ un champ (scalaire, vectoriel ou tensoriel) défini dans $\mathcal{E}_3$ et soit un domaine $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$. On a l'équivalence suivante :

$$\forall \mathcal{D} \quad \int_{\mathcal{D}} \mathcal{A}(M) dv = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \quad \mathcal{A}(M) = \mathbf{0} \quad (1.12)$$

Autrement dit : si l'intégrale d'un champ est nulle quel que soit son domaine d'intégration, alors le champ est nul.

Ce lemme (la démonstration est donnée en annexe A.1 page 69) sera systématiquement utilisé dans les chapitres qui suivent pour déduire les expressions locales des principes fondamentaux.

1.7 Convention de notation

Pour alléger les écritures, on convient de ne plus faire figurer dans la suite du cours les arguments des descriptions d'Euler et de Lagrange. Il est sous entendu que la description de Lagrange d'un champ pour un certain observateur $\mathcal{R}$ a pour arguments $(\mathbf{x}_0, t)$ et que sa description d'Euler a pour arguments $(\mathbf{x}_t, t)$.

1.8 En bref...

Pour appliquer les principes fondamentaux de la physique classique, on raisonne sur deux sortes de domaines : les domaines matériels et les domaines géométriques.

Ces domaines ont en général des frontières (ou des parties de frontières) variables avec le temps.

Les grandeurs physiques extensives permettent de définir des champs de densités volumiques de ces grandeurs, qui peuvent être décrits par la méthode de Lagrange (seulement pour les domaines matériels) ou par la méthode d'Euler (pour les domaines matériels ou géométriques).

Suivant le type de domaine (matériel ou géométrique) et suivant le mode de description (Lagrange ou Euler) du champ de densité volumique $\mathcal{A}^\vee$, les dérivées temporelles d'une grandeur *extensive* $\mathcal{A}(\mathcal{D}, t)$, définie sur un domaine s'écrivent sous différentes formes :

- sur un domaine matériel $\mathcal{D}^m$ (description d'Euler ou de Lagrange):

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathcal{A}_E^\vee dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_E^\vee dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathcal{A}_E^\vee (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (1.13)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_E^\vee + \text{div}(\mathcal{A}_E^\vee \otimes \mathbf{v}_E) \right)}_{\tau_E} dv_t \quad (1.14)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \underbrace{(\dot{\mathcal{A}}_E^\vee + d_{vE} \mathcal{A}_E^\vee)}_{\tau_E} dv_t \quad (1.15)$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathcal{A}_L^\vee K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \underbrace{(\dot{\mathcal{A}}_L^\vee + d_{vL} \mathcal{A}_L^\vee)}_{\tau_L} K_{vL} dv_0 \quad (1.16)$$

- sur un domaine géométrique $\mathcal{D}^g$ (description d'Euler uniquement):

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathcal{A}_E^\vee dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_E^\vee dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathcal{A}_E^\vee (\mathbf{v}^f \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (1.17)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_E^\vee + \text{div}(\mathcal{A}_E^\vee \otimes \mathbf{v}_E) \right)}_{\tau_E} dv_t + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathcal{A}_E^\vee (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\Phi} \quad (1.18)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{(\dot{\mathcal{A}}_E^\vee + d_{vE} \mathcal{A}_E^\vee)}_{\tau_E} dv_t + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathcal{A}_E^\vee (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\Phi} \quad (1.19)$$

où

- $\mathbf{v}^f$ est la vitesse d'un point de la frontière d'un domaine géométrique ;
- K_v est la *dilatation volumique* actuelle (dans une déformation dont l'état de référence est $\mathcal{D}_0^m$) ;
- d_v est le *taux de dilatation volumique* actuel ;
- τ est le taux de production volumique de $\mathcal{A}$ à l'intérieur du domaine (matériel ou géométrique) ;
- Φ est le flux de $\mathcal{A}$ entrant dans le domaine géométrique à travers les frontières (convection). Il est nul pour les domaines matériels.

Chapitre 2

Conservation de la masse

2.1 Concept de masse en mécanique des milieux continus

La masse est une mesure de la quantité de matière.

Par principe, la masse d'un domaine est une grandeur *scalaire* (un tenseur d'ordre 0), *extensive* (la masse d'un domaine est la somme des masses d'une de ses partitions) et *objective* (sa valeur est la même pour tous les observateurs).

Dans le cadre d'un modèle continu de la matière se trouvant dans un domaine, l'extensivité permet d'affirmer l'existence dans ce domaine d'un champ de densité volumique de masse appelé *masse volumique actuelle*, traditionnellement notée ρ ¹.

- La masse d'un domaine matériel $\mathcal{D}^m$, de position de référence $\mathcal{D}_0^m$ et de position actuelle $\mathcal{D}_t^m$ peut s'écrire avec une description de Lagrange ou une description d'Euler des masses volumiques (voir (1.1) page 3, avec $\mathcal{A} = m$ et $\mathcal{A}^\vee = \rho$ scalaires) :

$$\begin{aligned} m(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E(\mathbf{x}_t, t) dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E dv_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L(\mathbf{x}_0, t) K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L K_{vL} dv_0 \end{aligned}$$

où K_v est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont l'état de référence est $\mathcal{D}_0^m$, et K_{vL} est sa description de Lagrange.

- La masse d'un domaine géométrique $\mathcal{D}^g$ s'écrit uniquement avec une description d'Euler du champ des masses volumiques (voir (1.2) page 3, avec $\mathcal{A} = M$ et $\mathcal{A}^\vee = \rho$ scalaires) :

$$m(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E(\mathbf{x}_t, t) dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E dv_t$$

2.2 Principe de la conservation de la masse

Une des manières d'exprimer le principe de la conservation de la masse est le suivant² :

PRINCIPE : *La masse de tout domaine matériel est invariante dans le temps.*

1. On devrait la noter $m_t^\vee$ ou ρ_t

2. On peut exprimer le principe de la conservation de la masse de différentes manières. Celle choisie ici, exprimée pour un domaine matériel, semble la plus intuitive à l'auteur. D'autres préfèrent l'exprimer avec un domaine géométrique, en disant que la production de masse y est nulle (voir (1.10) page 6). Dans ce cours, l'expression du principe sur un domaine géométrique devient un théorème.

2. CONSERVATION DE LA MASSE

Si le champ des masses volumiques du domaine matériel est décrit par la méthode d'Euler, le principe de la conservation de la masse pour un domaine matériel $\mathcal{D}^m$ s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} m(\mathcal{D}^m, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \, dv_t && \text{(voir (1.1) page 3)} \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left(\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \operatorname{div}_E(\rho \mathbf{v}) \right) dv_t && \text{(voir (1.14) page 8)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} (\dot{\rho}_E + \rho_E d_{vE}) \, dv_t \quad \text{(voir (1.15) page 8)} \quad (2.2)$$

où :

- $\dot{\rho}_E$ est la description d'Euler de la dérivée particulaire de la masse volumique actuelle ;
- $d_{vE} = \operatorname{div}_E \mathbf{v} = \operatorname{Tr} \mathbf{D}$ est la description d'Euler du taux de dilatation volumique actuel.

Si le champ des masses volumiques du domaine matériel est décrit par la méthode de Lagrange, le principe de la conservation de la masse pour un domaine matériel $\mathcal{D}^m$ s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} m(\mathcal{D}^m, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L K_{vL} \, dv_0 && \text{(voir (1.1) page 3)} \\ &= \int_{\mathcal{D}_0^m} (\dot{\rho}_L + \rho_L d_{vL}) K_{vL} \, dv_0 && \text{(voir (1.16) page 8)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

où :

- $\dot{\rho}_L$ est la description de Lagrange de la dérivée particulaire de la masse volumique actuelle ;
- K_{vL} est la description de Lagrange de la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont l'état de référence est $\mathcal{D}_0^m$;
- $d_{vL} = \operatorname{div}_E \mathbf{v} = \operatorname{Tr} \mathbf{D}$ est la description de Lagrange du taux de dilatation volumique actuel.

2.3 Forme locale du principe de la conservation de la masse

Le principe de la conservation de la masse est vrai quel que soit le domaine matériel considéré. En vertu du lemme fondamental rappelé en (1.12) page 7, on peut en déduire des expressions locales du principe de la conservation de la masse :

On déduit de (2.1) et (2.2) page 10 que³ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_E(\rho \mathbf{v}) = \dot{\rho} + \rho d_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -d_v \quad (2.4)$$

où $d_v = \frac{\dot{K}_v}{K_v} = \operatorname{div}_E \mathbf{v} = \operatorname{Tr} \mathbf{D}$ est la description d'Euler du taux de dilatation volumique actuel.

Cette équation différentielle est l'écriture locale de la conservation de la masse. Elle est souvent appelée *équation de continuité*⁴.

Le taux de dilatation volumique (concept cinématique) est l'opposé du taux de variation (dérivée temporelle logarithmique) de la masse volumique.

REMARQUES :

1. En remarquant que $\dot{\rho}_E + \rho_E d_{vE}$ est le taux de production volumique de masse (voir (1.19) page 6, avec $\mathcal{A} = m$), on interprète l'équation de continuité (2.4) en disant que quand le principe de la conservation de la masse

3. On a enlevé les indices E inutiles car par définition $\mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathcal{A}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathcal{A}(P, t)$.

4. Cette dénomination est consacrée par l'usage. La « continuité » évoquée ici n'a rien à voir avec la continuité des applications qu'on évoque en mathématiques.

est vrai, le taux de production volumique de masse dans le domaine est nul. Il est possible de prendre cette conclusion comme principe fondamental, l'équation locale (2.4) est alors un principe dont on peut déduire les expressions globales sur un domaine matériel ou géométrique.

2. On obtient le même résultat en utilisant le lemme (1.12) page 7 sur les expressions globales lagrangiennes de la conservation de la masse (2.3) page 10 (la dilatation volumique K_v est toujours strictement positive).

L'équation différentielle (2.4) peut s'intégrer temporellement entre les instants t_0 et t :

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -d_v = -\frac{\dot{K}_v}{K_v} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{C}{K_v} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_L(\mathbf{x}_0, t) = \frac{C}{K_{vL}(\mathbf{x}_0, t)}$$

Pour $t = t_0$, on a : $K_{vL}(\mathbf{x}_0, t_0) = 1$ et $\rho_L(\mathbf{x}_0, t_0) = \rho_0(\mathbf{x}_0)$ où $\rho_0(\mathbf{x}_0)$ est la masse volumique de la particule $\mathbf{x}_0$ à l'instant de référence t_0 (masse volumique « initiale »). On en déduit que $C = \rho_0(\mathbf{x}_0)$. On a donc :

$$K_{vL} = \frac{\rho_0(\mathbf{x}_0)}{\rho_L(\mathbf{x}_0, t)} = \frac{\rho_0(P)}{\rho(P, t)} \quad \Leftrightarrow \quad K_v = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (2.5)$$

Le principe de la conservation de la masse implique l'égalité entre la dilatation volumique actuelle K_v (concept cinématique) et le rapport des masses volumiques initiale et actuelle.

Dans une déformation entre les instants t_0 et t , la masse volumique n'est donc pas constante en général. Elle ne l'est que dans une déformation isovolume⁵ ($K_v = 1$).

2.4 Bilan de masse pour un domaine géométrique

Dans un domaine géométrique $\mathcal{D}^g$, la masse du milieu continu contenu dans le domaine ne se conserve pas au cours du temps. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m(\mathcal{D}^g, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{\dot{\rho}_E + d_{vE} \rho_E}_{\tau_m=0} dv_t + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\Phi_m} \quad (\text{voir (1.19) page 8 avec } \mathcal{A} = m) \\ \frac{d}{dt} m(\mathcal{D}^g, t) &= \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t = \Phi_m \end{aligned} \quad (2.6)$$

où :

- $\mathbf{v}^f$ est la vitesse des points de la frontière du domaine géométrique;
- Φ_m est le débit massique entrant à travers la frontière du domaine géométrique.

La dérivée temporelle de la masse contenue dans un domaine géométrique est égale au débit massique entrant à travers la frontière.

REMARQUE : L'énoncé ci-dessus peut aussi bien être pris comme principe de la conservation de la masse, et on peut en déduire la forme locale et la forme globale pour un domaine matériel comme étant des théorèmes.

2.5 Densités massiques

La distribution dans un domaine $\mathcal{D}$ (géométrique ou matériel) d'une grandeur physique extensive $\mathcal{A}$ peut aussi se décrire par des densités massiques $\mathcal{A}^m$ (unité : $[\mathcal{A}].\text{kg}^{-1}$) plutôt que par des densités volumiques $\mathcal{A}^v$ (unité : $[\mathcal{A}].\text{m}^{-3}$). On a évidemment : $\mathcal{A}^v = \rho \mathcal{A}^m$.

5. En termes de tenseurs de déformation entre t_0 et t , la condition $K_v = 1$ se traduit par $\det \mathbf{U} = \det \mathbf{V} = 1$ ou encore dans le cas des petites perturbations par : $\text{Tr } \mathbf{\epsilon} = 0$ (voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, sections 4.7 et 4.12.1).

Pour un domaine matériel :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathcal{A}_E^\vee dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathcal{A}_E^m dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathcal{A}_E^m dm \quad (2.7)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathcal{A}_L^\vee K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \mathcal{A}_L^m K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathcal{A}_L^m \rho_0 dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathcal{A}_L^m dm \quad (2.8)$$

Pour un domaine géométrique :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathcal{A}_E^\vee dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathcal{A}_E^m dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathcal{A}_E^m dm \quad (2.9)$$

On obtient de nouvelles expressions de la dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine qui seront utiles dans la suite quand on utilise des densités massiques.

On a établi en (1.15) page 8 que pour un domaine matériel :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^m} (\dot{\mathcal{A}}_E^\vee + d_{vE} \mathcal{A}_E^\vee) dv_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left((\rho_E \mathcal{A}_E^m)^\cdot + d_{vE} \rho_E \mathcal{A}_E^m \right) dv_t \quad (\mathcal{A}_E^\vee = \rho_E \mathcal{A}_E^m) \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^m} (\rho_E \dot{\mathcal{A}}_E^m + \underbrace{\dot{\rho}_E \mathcal{A}_E^m + d_{vE} \rho_E \mathcal{A}_E^m}_0) dv_t \quad (\text{conservation de la masse, voir (2.4) page 10}) \\ \frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \dot{\mathcal{A}}_E^m dm \quad (2.10) \end{aligned}$$

De même, toujours pour un domaine matériel, à partir de (1.16) page 8, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_0^m} (\dot{\mathcal{A}}_L^\vee + d_{vL} \mathcal{A}_L^\vee) K_{vL} dv_0 \\ &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left((\rho_L \mathcal{A}_L^m)^\cdot + d_{vL} \rho_L \mathcal{A}_L^m \right) K_{vL} dv_0 \quad (\mathcal{A}_L^\vee = \rho_L \mathcal{A}_L^m) \\ &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left(\rho_L \dot{\mathcal{A}}_L^m + \underbrace{\dot{\rho}_L \mathcal{A}_L^m + d_{vL} \rho_L \mathcal{A}_L^m}_0 \right) K_{vL} dv_0 \quad (\text{conservation de la masse, voir (2.4) page 10}) \\ \frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \dot{\mathcal{A}}_L^m \rho_0 dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \dot{\mathcal{A}}_L^m dm \quad (K_{vL} = \frac{\rho_0}{\rho_L}, \text{ voir (2.5) page 11}) \quad (2.11) \end{aligned}$$

Enfin, pour un domaine géométrique, en utilisant (1.19) page 8:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^g} (\dot{\mathcal{A}}_E^\vee + d_{vE} \mathcal{A}_E^\vee) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathcal{A}_E^\vee (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n} ds_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \left((\rho_E \mathcal{A}_E^m)^\cdot + d_{vE} \rho_E \mathcal{A}_E^m \right) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathcal{A}_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n} ds_t \quad (\mathcal{A}_E^\vee = \rho_E \mathcal{A}_E^m) \\ \frac{d}{dt} \mathcal{A}(\mathcal{D}^g, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \dot{\mathcal{A}}_E^m dm + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathcal{A}_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n} ds_t}_{\Phi} \quad (2.12) \end{aligned}$$

où :

- Φ (unité : $[\mathcal{A}].s^{-1}$) est le flux de $\mathcal{A}$ entrant à travers la frontière du domaine géométrique (il est nul pour un domaine matériel) ;
- $\dot{\mathcal{A}}^m = \tau \rho^{-1}$ est la dérivée particulaire de la densité massique $\mathcal{A}^m$; c'est aussi le taux de production *massique* de la quantité extensive $\mathcal{A}$ à l'intérieur du domaine.

2.6 En bref...

La masse d'un domaine matériel est une grandeur scalaire, extensive, objective et invariante dans le temps, qui mesure la quantité de matière contenue dans le domaine matériel.

L'expression locale du principe de la conservation de la masse pour un milieu continu est une équation différentielle appelée *équation de continuité*.

La masse d'un domaine géométrique est variable dans le temps car de la matière traverse les frontières.

On peut calculer la dérivée temporelle d'une grandeur extensive $\mathcal{A}$ sur un domaine matériel ou géométrique avec des intégrales de volume de densités volumiques $\mathcal{A}^V$ ou bien avec des intégrales de masse de densités massiques $\mathcal{A}^m$.

Chapitre 3

Principe fondamental de la dynamique

3.1 Rappel de mécanique générale

3.1.1 Observateurs galiléens

DÉFINITION : *Un observateur galiléen est un observateur pour lequel le mouvement des points matériels obéit à la loi de Newton : $\mathbf{f} = m\boldsymbol{\gamma}$.*

On ne peut savoir si un observateur est galiléen ou non qu'en faisant des expériences pour vérifier si les prédictions de la loi de Newton sont correctes ou non pour cet observateur¹.

EXEMPLES D'EXPÉRIENCES : La loi de Newton prédit qu'un point matériel sans vitesse initiale et soumis à une force constante se déplace en ligne droite. Elle prédit aussi qu'un pendule lâché sans vitesse initiale oscille dans un plan fixe.

Si pour un observateur, les prédictions de la loi de Newton sont considérées comme suffisamment correctes, on peut déclarer comme galiléen cet observateur. Déclarer galiléen un observateur, c'est donc accepter une certaine approximation dans la confrontation avec des expériences.

EXEMPLES : Si on assimile un objet pesant à un point matériel, et si on utilise un observateur lié à la terre pour analyser son mouvement, cet objet est soumis à une force constante (en première approximation) : son poids². Lâché sans vitesse initiale, la loi de Newton prévoit que sa trajectoire est une droite colinéaire au poids. En première approximation, on peut constater que c'est vrai, cependant des mesures fines mettent en évidence une petite déviation vers l'est.

De même, si on observe le mouvement d'un pendule simple, on constate que, pour un observateur terrestre, son plan d'oscillation est sensiblement fixe. Mais une observation plus fine (pendule de Foucault) montre que ce plan tourne à une faible vitesse. Selon que l'on considère que la déviation vers l'est de la chute des corps ou que la vitesse de rotation du plan d'oscillation d'un pendule sont négligeables ou non, on décide si un observateur terrestre est galiléen ou non.

Tous les observateurs dont le mouvement par rapport à un observateur galiléen est une translation à vitesse constante sont aussi des observateurs galiléens car pour tous ces observateurs l'accélération d'un point matériel est la même. On ne peut donc pas distinguer un observateur galiléen absolu.

La loi de Newton $\mathbf{f} = m\boldsymbol{\gamma}$ n'est donc pas une loi universelle³. On peut la rendre artificiellement universelle en ajoutant aux forces extérieures agissant sur un point matériel des forces extérieures fictives appelées *forces d'inertie* (d'entraînement et de Coriolis). La loi de Newton est alors vraie pour tous les observateurs, mais les forces extérieures agissant sur un point matériel sont la somme de forces réelles⁴ et de forces fictives ; elles ne sont plus les mêmes pour tous les observateurs.

1. On rappelle que la valeur de l'accélération d'un point matériel dépend de l'observateur utilisé pour observer le mouvement.

2. Il faut faire l'expérience dans le vide pour éliminer l'action de l'air.

3. C'est-à-dire valable pour tous les observateurs. La seule mécanique dont les lois sont universelles est celle de la théorie appelée *Relativité générale* due à Einstein.

4. C'est-à-dire dont la source est identifiée.

3.1.2 Rappel des théorèmes généraux

On montre en mécanique générale, que pour tout ensemble de points matériels (fini ou infini), dont le mouvement est observé par un observateur galiléen, les trois théorèmes qui suivent rassemblent toutes les conséquences des lois fondamentales énoncées par Newton⁵ pour des points matériels :

1. Théorème de la résultante dynamique :

THÉORÈME : *La résultante dynamique (somme des quantités d'accélération) est égale à la résultante des actions mécaniques extérieures.*

2. Théorème du moment dynamique :

THÉORÈME : *Le moment dynamique en un point (somme des moments en ce point des quantités d'accélération) est égale au moment en ce point des actions mécaniques extérieures.*

3. Théorème de la puissance cinétique :

THÉORÈME : *La puissance cinétique (dérivée temporelle de l'énergie cinétique) est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs et de la puissance des efforts intérieurs.*

REMARQUE : Ces théorèmes sont encore vrais pour un observateur non galiléen si on ajoute aux forces extérieures des forces d'inertie fictives d'entraînement et de Coriolis.

3.2 Application aux domaines matériels

On considère maintenant un domaine *matériel* de milieu continu (c'est-à-dire un ensemble de particules, voir la définition en (1.1.1) page 1). On note $\mathcal{D}_t^m$ la position actuelle de ce domaine matériel. Ce domaine contient une infinité de particules. Son extérieur est par définition le reste de l'univers.

DÉFINITION : *On appelle actions mécaniques extérieures à un domaine l'action mécanique de l'extérieur du domaine sur ce domaine.*

L'objet de la mécanique (des milieux continus ou non) est de trouver les relations entre le mouvement du domaine matériel⁶ choisi et les sollicitations mécaniques de son extérieur.

3.2.1 Efforts extérieurs sur un domaine matériel

Les actions mécaniques extérieures sur un domaine matériel de milieu continu peuvent se classer en deux catégories : les actions mécaniques à distance et les actions mécaniques de contact.

Modélisation des actions mécaniques extérieures à distance

Les actions mécaniques extérieures à distance agissent sur toutes les particules du domaine. On les modélise par un champ de densité volumique *de force*⁷, qu'on notera $\mathbf{f}^v$ (unité : N.m^{-3}) ou par un champ de densité massique de forces que l'on notera $\mathbf{f}^m$ (unité : $\text{N.kg}^{-1} = \text{m.s}^{-2}$).

Le vecteur $\mathbf{f}^v$ représente la force totale par unité de volume (gravitationnelle, électrostatique...) exercée par le reste de l'univers sur la particule. *A priori*, la valeur de cette densité volumique de force dépend du

5. La loi $\mathbf{f} = m\mathbf{g}$, et l'action d'un point matériel sur un autre est une *force* colinéaire à la droite qui joint les deux points matériels (interactions de Newton).

6. On verra plus loin comment on peut envisager des domaines géométriques

7. Noter que l'on n'envisage pas de densité volumique de moment. De ce fait, on élimine la possibilité d'actions magnétiques. Le comportement électromagnétique des milieux continus n'est pas envisagé dans ce cours. Il demanderait une refonte de toute la cinématique des milieux continus : la position à un instant t d'un milieu continu n'est pas complètement décrite par la seule position actuelle de ses particules mais aussi par leur orientation actuelle (dipôles magnétiques par exemple).

domaine matériel choisi pour l'étude, car pour chaque domaine matériel, la définition de son extérieur est *a priori* différente⁸.

REMARQUES :

1. Si l'observateur utilisé pour décrire le mouvement ne peut pas être considéré comme galiléen, le vecteur $\mathbf{f}^v$ (ou bien $\mathbf{f}^m$) contient en outre des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.
2. Dans la plupart des études, les seules forces à distance notables exercées par l'extérieur sur les particules du domaine matériel se réduisent à la gravitation terrestre⁹, les autres masses extérieures ayant une action gravitationnelle négligeable devant celle de la terre, soit parce qu'elles sont trop éloignées¹⁰, soit parce que leur masse est trop faible¹¹. On peut donc souvent affirmer que le champ de forces gravitationnelles est indépendant du choix du domaine.
3. Lorsque les dimensions du domaine sont petites devant celles de la terre, on simplifie souvent le champ de gravitation terrestre (qui est approximativement un champ vectoriel central convergeant vers le centre de gravité de la terre) en disant que le champ de forces gravitationnel terrestre est un champ de forces massique uniforme $\mathbf{g}$, orienté vers le bas¹², appelé *accélération de la pesanteur*, et dont la norme au voisinage de la surface de la terre est $\|\mathbf{g}\| = g \simeq 9.81 \text{ m.s}^{-2}$.
4. On peut représenter les forces à distance par un champ de forces volumiques ou un champ de forces massiques ($\mathbf{f}^v = \rho \mathbf{f}^m$). Dans les applications où seule la pesanteur est prise en compte, on affirme parfois que le champ des forces volumiques est uniforme. Les lois de la gravitation montrent que c'est le champ des forces massiques $\mathbf{f}^m$ (l'accélération de la pesanteur) qui est uniforme. Le champ des forces volumiques $\mathbf{f}^v$ n'est uniforme que si l'on peut considérer que la masse volumique ρ est aussi un champ uniforme, ce qui est rarement le cas en mécanique des milieux continus. Cette approximation est acceptable pour des liquides (ρ sensiblement constant), elle est assez grossière pour les solides déformables, et elle est difficilement admissible pour les gaz.

Modélisation des forces extérieures de contact

Pour un domaine matériel de milieu continu, les forces extérieures de contact ne peuvent exister que sur la frontière du domaine. Elles sont modélisées par une densité surfacique de force s'appliquant sur la frontière $\partial \mathcal{D}^m$, qui sera notée $\mathbf{f}^s$ (unité : $\text{Pa} = \text{N.m}^{-2}$).

REMARQUES : Bien que la mécanique des milieux continus soit par essence inapte à représenter correctement la physique à l'échelle microscopique, on peut comprendre que les actions surfaciques de contact modélisent les actions mécaniques à court rayon d'action entre les corpuscules voisins de part et d'autre de la frontière.

Par ailleurs, si la norme d'un champ de forces de contact surfaciques est bien homogène à une pression, l'orientation et le sens du champ $\mathbf{f}^s$ est *a priori* quelconque par rapport à la normale extérieure de la frontière.

3.2.2 Efforts intérieurs dans un milieu continu

Soit $\mathcal{D}^m$ un domaine matériel dont la position actuelle est le domaine $\mathcal{D}_t^m$. On a défini dans la section précédente les actions de l'extérieur sur le domaine matériel. On se propose maintenant de définir des efforts intérieurs à ce domaine matériel.

Dans un domaine matériel discret (le nombre de points matériels est fini), il est aisé de définir les efforts intérieurs en considérant les interactions de Newton¹³ entre tous les couples de points matériels (le nombre de couples est fini). Dans un milieu continu, cette méthode est impossible. Pour analyser les efforts intérieurs dans un milieu continu, on les rend extérieurs en considérant des sous-domaines au domaine matériel étudié.

8. Dans la pratique, on simplifie souvent l'extérieur en le réduisant à quelques sources de champs gravitationnels ou électriques. Les champs de forces extérieures ne changent donc pas pour bon nombre de domaines matériels, tant qu'ils n'incluent pas l'une de ces sources.

9. À condition que la terre ne fasse pas partie du domaine, auquel cas la gravitation terrestre ne serait pas un effort extérieur.

10. Les astres par exemple. Toutefois, si l'on veut prévoir un phénomène comme la marée, il faut prendre en compte la gravitation due à la lune et celle due au soleil.

11. La matière voisine du domaine, par exemple des parois ou l'immeuble d'à côté.

12. C'est-à-dire vers la terre

13. On rappelle que les interactions de Newton entre deux points matériels se limitent à des *forces* (pas de moment d'interaction).

Soit un sous-domaine matériel $\mathcal{D}_1^m \subset \mathcal{D}^m$. L'extérieur du sous-domaine $\mathcal{D}_1^m$ peut être partitionné de la manière suivante :

$$\text{ext}(\mathcal{D}_1^m) = (\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m) \cup \text{ext}(\mathcal{D}^m)$$

Les actions du sous-domaine $\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m$ sur le sous-domaine $\mathcal{D}_1^m$ sont des actions intérieures au domaine $\mathcal{D}^m$.

Comme pour tout domaine matériel, les actions extérieures au sous-domaine $\mathcal{D}_1^m$ sont de deux sortes :

1. des actions extérieures à distance provenant de $(\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m)$ et de $\text{ext}(\mathcal{D}^m)$:

$$\mathbf{f}_{\mathcal{D}_1^m}^v = \underbrace{\mathbf{f}_{(\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m)/\mathcal{D}_1^m}^v}_{\mathbf{f}_{\text{int } \mathcal{D}_1^m}^v} + \underbrace{\mathbf{f}_{\text{ext}(\mathcal{D}^m)/\mathcal{D}_1^m}^v}_{\mathbf{f}_{\text{ext } \mathcal{D}_1^m}^v}$$

L'action à distance $\mathbf{f}_{\text{int } \mathcal{D}_1^m}^v$ est une action à distance *intérieure* au domaine $\mathcal{D}^m$.

2. des actions extérieures de contact sur la frontière $\partial\mathcal{D}_1^m$:

On note $\mathbf{c}$ la densité de force surfacique actuelle exercée par le sous-domaine $\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m$ sur le sous-domaine $\mathcal{D}_1^m$, répartie sur la frontière $\partial\mathcal{D}_1^m$.

La densité surfacique de force $\mathbf{c}$ est une action de contact *intérieure* à $\mathcal{D}^m$.

DÉFINITION : On appelle *contrainte actuelle*, la densité surfacique de force de contact actuelle qui s'exerce sur la frontière des sous-domaines d'un domaine matériel.

A priori, la valeur des contraintes $\mathbf{c}$, définies sur la frontière $\partial\mathcal{D}_1^m$, dépend à la fois du choix du sous-domaine $\mathcal{D}_1^m$ et du choix de la particule P sur sa frontière.

HYPOTHÈSE DE CAUCHY : La contrainte actuelle en une particule P de la frontière d'un sous-domaine matériel ne dépend que de la particule P et de la facette matérielle¹⁴ tangente à la frontière actuelle du sous-domaine matériel en P .

Si on repère la facette matérielle tangente à la frontière du sous-domaine $\mathcal{D}_1^m$ par sa direction actuelle $\mathbf{n}_t$, l'hypothèse de Cauchy affirme qu'il existe une application $\boldsymbol{\sigma}$ telle que :

$$\boldsymbol{\sigma} : (P, \mathbf{n}_t) \rightarrow \mathbf{c} = \boldsymbol{\sigma}(P, \mathbf{n}_t) \quad (3.1)$$

L'hypothèse de Cauchy implique que tous les sous-domaines matériels $\mathcal{D}_1^m$ dont la frontière contient la particule P et qui ont la même normale extérieure actuelle¹⁵ en P , ont la même force surfacique extérieure en P . En revanche, pour la même particule P , le vecteur contrainte $\mathbf{c}$ est *a priori* différent pour une autre facette matérielle de normale unitaire $\mathbf{n}'_t$ (c'est une autre famille de sous-domaines dont la normale extérieure commune en P est $\mathbf{n}'_t$).

JUSTIFICATION MICROPHYSIQUE : Microscopiquement, ce champ de forces surfaciques de contact modélise des actions intercorpusculaires à court rayon d'action de part et d'autre de la frontière de $\partial\mathcal{D}_1^m$, au voisinage de P . La localité de ces actions justifie leur indifférence à la forme de la frontière.

NOUVELLE DÉFINITION : On appelle *contrainte actuelle en la particule P pour la facette matérielle de normale actuelle $\mathbf{n}_t$* , la force surfacique actuelle qui s'exerce en P sur toute frontière de sous-domaine passant par P et de normale unitaire extérieure $\mathbf{n}_t$.

3.2.3 Existence du tenseur des contraintes

On démontre, en utilisant l'hypothèse de Cauchy et en appliquant le principe fondamental de la mécanique à un certain domaine matériel qu'on fait tendre d'une certaine manière vers un volume nul (voir la démonstration détaillée en annexe A.2 page 70), que l'application $\boldsymbol{\sigma}$ définie en (3.1) est nécessairement un opérateur *linéaire sur son argument $\mathbf{n}_t$* ,

14. Définition dans le cours *Cimématique des milieux continus*, du même auteur, section 4.9.1

15. Toutes les frontières de ces domaines matériels sont donc tangentes en P .

La contrainte $\mathbf{c}$ et la normale $\mathbf{n}_t$ étant des vecteurs, l'opérateur $\boldsymbol{\sigma}$ en la particule P est donc un endomorphisme linéaire de $\mathbb{V}$, c'est-à-dire un tenseur du second ordre.

DÉFINITION : On appelle tenseur des contraintes de Cauchy en la particule P , le tenseur du second ordre tel que la contrainte actuelle en P sur une facette matérielle de normale unitaire actuelle $\mathbf{n}_t$ est donnée par :

$$\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t) = \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t \quad (3.2)$$

Dans un milieu continu, il existe donc un champ matériel de tenseurs des contraintes : $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$.

Comme tous les champs matériels, le champ des tenseurs des contraintes peut aussi bien être décrit par la méthode de Lagrange que par la méthode d'Euler : $\boldsymbol{\sigma}(P, t) = \boldsymbol{\sigma}_L(\mathbf{x}_0, t) = \boldsymbol{\sigma}_E(\mathbf{x}_t, t)$.

3.2.4 Définitions et notations

Soit P une particule à l'intérieur d'un milieu continu, et soit $\mathbf{n}_t$ la normale unitaire actuelle d'une facette matérielle en P . On note $\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t)$ la contrainte actuelle en P pour cette facette matérielle.

La contrainte $\mathbf{c}$ est la force surfacique de contact actuelle exercée par la matière qui se trouve du côté de $\mathbf{n}_t$ (l'extérieur du sous-domaine matériel $\mathcal{D}_1^m$) sur la matière qui se trouve de l'autre côté de la facette matérielle (l'intérieur du sous-domaine matériel $\mathcal{D}_1^m$).

Contraintes normales et tangentielles

DÉFINITION : On appelle contrainte normale actuelle en la particule P pour la facette matérielle de normale actuelle $\mathbf{n}_t$, le scalaire défini par :

$$c_N = \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t) = \mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t$$

Si $c_N > 0$ on dit que c'est une *traction* (l'extérieur de $\mathcal{D}_1^m$ exerce sur $\partial\mathcal{D}_1^m$ une force vers lui).

Si $c_N < 0$ on dit que c'est une *compression*.

DÉFINITION : On appelle contrainte tangentielle actuelle en la particule P pour la facette matérielle de normale actuelle $\mathbf{n}_t$, le vecteur défini par :

$$\mathbf{c}_T = \mathbf{c} - c_N \mathbf{n}_t = \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t - (\mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t) \mathbf{n}_t$$

La contrainte tangentielle actuelle $\mathbf{c}_T$ pour la facette matérielle de normale actuelle $\mathbf{n}_t$ est un donc vecteur orthogonal à $\mathbf{n}_t$ (on vérifie aisément que $\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{c}_T = 0$).

REMARQUE : Dans le plan de la facette matérielle, on peut choisir *arbitrairement* deux directions unitaires orthogonales $\mathbf{t}_1$ et $\mathbf{t}_2$ et poser $\mathbf{c}_T = c_{T1} \mathbf{t}_1 + c_{T2} \mathbf{t}_2$. On a alors :

$$c_{T1} = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{c}_T = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{t}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t \quad c_{T2} = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{c}_T = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{t}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t$$

Les nombres c_{T1} et c_{T2} sont parfois appelés contraintes tangentielles pour les directions $\mathbf{t}_1$ et $\mathbf{t}_2$, en P pour la facette matérielle $\mathbf{n}_t$. Ces définitions sont de peu d'intérêt : les nombres c_{T1} et c_{T2} ne sont pas des scalaires, car leur valeur dépend du choix arbitraire des directions $\mathbf{t}_1$ et $\mathbf{t}_2$. Ils sont donc dénués de signification physique. Seule la norme $\|\mathbf{c}_T\|$ est un scalaire (c'est-à-dire dont la valeur ne dépend pas du choix d'une base).

Pour une facette matérielle en P de normale actuelle $\mathbf{n}_t$, on peut donc décomposer le vecteur contrainte $\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t)$ en une partie normale et une partie tangentielle de la manière suivante :

$$\mathbf{c} = c_N \mathbf{n}_t + \mathbf{c}_T \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{c}\|^2 = c_N^2 + \|\mathbf{c}_T\|^2$$

Les réels $\|\mathbf{c}\|$, c_N et $\|\mathbf{c}_T\|$ sont des scalaires (c'est-à-dire indépendants de la base dans laquelle on exprime les vecteurs).

3.2.5 Conditions aux limites en contrainte sur les frontières

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ existe en toute particule du domaine $\mathcal{D}_t^m$, et donc en particulier il existe aussi sur sa frontière actuelle $\partial\mathcal{D}_t^m$. Soit une particule $P' \in \partial\mathcal{D}_t^m$, et soit $\mathbf{n}_t(P')$ la normale extérieure actuelle à la frontière en P' . On déduit de la définition de la contrainte que le vecteur $\boldsymbol{\sigma}(P',t) \cdot \mathbf{n}_t(P')$ représente la force surfacique $\mathbf{f}^s(P')$ exercée par l'extérieur du domaine sur la frontière du domaine en ce point :

$$\boldsymbol{\sigma}(P',t) \cdot \mathbf{n}_t(P') = \mathbf{f}^s(P',t) \quad \forall P' \in \partial\mathcal{D}_t^m \quad (3.3)$$

Cette équation est appelée *condition aux limites en contraintes* en la particule frontière P' .

Dans tout milieu continu, le champ matériel des tenseurs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(P,t)$ doit nécessairement respecter cette condition aux frontières.

Notamment, sur une partie de frontière où il n'y a pas de forces extérieures de contact et dont le mouvement est libre (on l'appelle souvent « bord libre »), le champ du tenseur des contraintes doit être tel que :

$$\text{bord libre} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}(P',t) \cdot \mathbf{n}_t(P') = \mathbf{0}$$

3.3 Théorèmes généraux de la dynamique pour un domaine matériel

Par définition, la résultante dynamique, le moment dynamique en un point et l'énergie cinétique sont des grandeurs extensives. On peut donc définir des densités volumiques de ces grandeurs :

$$\mathbf{R}_{dyn} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t \quad \mathbf{M}_{dynO} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t \quad E_{cin} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} \, dv_t$$

Le choix du point pour évaluer les moments est indifférent. Dans toute la suite, ce point sera l'origine de l'observateur utilisé pour décrire le mouvement.

Par ailleurs, la section précédente a montré comment décrire les efforts extérieurs sur un domaine matériel (forces extérieures à distance et forces extérieures de contact) :

$$\mathbf{R}_{ext} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{f}_E^v \, dv_t + \int_{\partial\mathcal{D}_t^m} \mathbf{f}_E^s \, ds_t \quad (3.4)$$

$$\mathbf{M}_{extO} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^v \, dv_t + \int_{\partial\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^s \, ds_t \quad (3.5)$$

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^v \, dv_t + \int_{\partial\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^s \, ds_t \quad (3.6)$$

Les trois théorèmes généraux de la mécanique appliqués à un domaine matériel s'écrivent simplement :

$$\mathbf{R}_{dyn} = \mathbf{R}_{ext} \quad \mathbf{M}_{dynO} = \mathbf{M}_{extO} \quad \frac{d}{dt} E_{cin} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec}$$

Suivant la manière dont on transforme l'écriture de toutes ces intégrales, on obtient différentes expressions de ces trois théorèmes pour un domaine de milieu continu, certaines ayant parfois un nom particulier.

3.3.1 Théorème de la résultante dynamique sur un domaine matériel

Résultante des efforts extérieurs sur un domaine matériel

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathbf{R}_{ext} = \int_{\mathcal{D}_t^m} f_E^v dv_t + \int_{\partial\mathcal{D}_t^m} \mathbf{f}_E^s ds_t \quad (\text{définition (3.4) page 20}) \quad (3.7)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} f_E^v dv_t + \int_{\partial\mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t \quad (\text{condition aux limites (3.3) page 20})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} (f_E^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) dv_t \quad (\text{théorème de la divergence}) \quad (3.8)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\mathbf{R}_{ext} = \int_{\mathcal{D}_0^m} f_L^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f}_L^s K_{sL} ds_0 \quad (\text{changement de variables sur (3.7), voir (1.1) page 3})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} f_L^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial\mathcal{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} K_{sL} ds_0 \quad (\text{cinématique : } \mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} f_L^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial\mathcal{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} ds_0 \quad (\text{cinématique : } K_s = K_v \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left(f_L^v K_{vL} + \mathbf{div}_L (K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) \right) dv_0 \quad (\text{théorème de la divergence}) \quad (3.9)$$

Résultante dynamique sur un domaine matériel

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathbf{R}_{dyn} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\gamma}_E dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \dot{\mathbf{v}}_E dm \quad (\text{définition de l'accélération}) \quad (3.10)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E dm \quad (\text{cons. de la masse, voir (2.10) page 12})$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E dv_t \quad (dm = \rho_E dv_t)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_E \mathbf{v}_E) dv_t + \int_{\partial\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (\text{voir (1.3) page 4}) \quad (3.11)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\mathbf{R}_{dyn} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \boldsymbol{\gamma}_L dm = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \boldsymbol{\gamma}_L K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \boldsymbol{\gamma}_L dv_0 \quad (\text{voir (2.8) page 12}) \quad (3.12)$$

En écrivant l'égalité :

$$\mathbf{R}_{dyn} = \mathbf{R}_{ext}$$

et en choisissant l'une des expressions précédentes pour chacun des termes, on écrit le théorème de la résultante dynamique pour un domaine matériel sous les différentes formes qu'on peut trouver dans la littérature.

3.3.2 Théorème du moment dynamique sur un domaine matériel

Moment des efforts extérieurs sur un domaine matériel

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathbf{M}_{ext O} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge f_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge f_E^s ds_t \quad (\text{définition (3.5) page 20}) \quad (3.13)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge f_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge (\boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (\text{condition aux limites (3.3) page 20})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge f_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t \quad (\text{algèbre: produit vectoriel écrit avec } \mathbf{H}) \quad (3.14)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} (\mathbf{x}_t \wedge f_E^v + \mathbf{div}_E (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}_E))) dv_t \quad (\text{théorème de la divergence})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} (\mathbf{x}_t \wedge (f_E^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_E) dv_t \quad (\text{développement de la divergence}) \quad (3.15)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange ($\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$ où $\mathbf{f}$ est la description de Lagrange du mouvement) :

$$\mathbf{M}_{ext O} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f} \wedge f_E^L K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{H} : (\mathbf{f} \otimes \boldsymbol{\sigma}_L) \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} K_{sL} ds_0 \quad (\text{ch. var. de (3.14)})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f} \wedge f_E^L K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{H} : (\mathbf{f} \otimes \boldsymbol{\sigma}_L) \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} ds_0 \quad (K_s = K_v \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} (\mathbf{f} \wedge f_E^L K_{vL} + \mathbf{div}_L (K_{vL} \mathbf{H} : (\mathbf{f} \otimes \boldsymbol{\sigma}_L) \cdot \mathbf{F}^{-T})) dv_0$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} (\mathbf{f} \wedge (f_E^L + \mathbf{div}_L (K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})) + \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_L) K_{vL} dv_0 \quad (\text{algèbre}) \quad (3.16)$$

Moment dynamique sur un domaine matériel

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathbf{M}_{dyn O} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) - \underbrace{\mathbf{v}_E \wedge \mathbf{v}_E}_0 dm \quad (3.17)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E dm = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E dv_t \quad (\text{voir (2.10) page 12})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (\text{voir (1.13) page 8})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \frac{\partial}{\partial t} (\rho_E \mathbf{v}_E) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (\frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial t} = \mathbf{v}_E) \quad (3.18)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange ($\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$ où $\mathbf{f}$ est la description de Lagrange du mouvement) :

$$\mathbf{M}_{dyn O} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f} \wedge \boldsymbol{\gamma}_L dm = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \mathbf{f} \wedge \boldsymbol{\gamma}_L K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \mathbf{f} \wedge \boldsymbol{\gamma}_L dv_0 \quad (\text{voir (2.8) page 12}) \quad (3.19)$$

En écrivant l'égalité :

$$\mathbf{M}_{dyn O} = \mathbf{M}_{ext O}$$

et en choisissant l'une des expressions précédentes pour chacun des termes, on écrit le théorème du moment dynamique pour un domaine matériel sous les différentes formes qu'on peut trouver dans la littérature.

3.3.3 Théorème de la puissance cinétique sur un domaine matériel

Puissance des efforts extérieurs dans un domaine matériel

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{ext}^{mec} &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^s ds_t && \text{(voir définition (3.6) page 20)} \\
 &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t && \text{(condition aux limites (3.3) page 20)} \\
 &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left(\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^v + \text{div}_E (\mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E) \right) dv_t && \text{(théorème de la divergence)} \\
 &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left(\mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_E^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \right) dv_t && \text{(développement de la divergence)}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{ext}^{mec} &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{f}_L^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} K_{sL} ds_0 && \text{(ch. var. de (3.20))} \\
 &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{f}_L^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} ds_0 && (K_s = K_v \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|) \\
 &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left(\mathbf{v}_L \cdot \mathbf{f}_L^v K_{vL} + \text{div}_L (K_{vL} \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) \right) dv_0 && \text{(théorème de la divergence)} \\
 &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left(\mathbf{v}_L \cdot (\mathbf{f}_L^v K_{vL} + \mathbf{div}_L (K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})) + K_{vL} (\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \mathbf{grad}_L^T \mathbf{v}_L \right) dv_0 \\
 &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left(\mathbf{v}_L \cdot (\mathbf{f}_L^v K_{vL} + \mathbf{div}_L (K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})) + K_{vL} (\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \dot{\mathbf{F}} \right) dv_0 \\
 &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left(\mathbf{v}_L \cdot (\mathbf{f}_L^v K_{vL} + \mathbf{div}_L (K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})) + K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L : (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \right) dv_0
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Puissance cinétique dans un domaine matériel

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{cin}^{mec} &= \frac{dE_{cin}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dv_t = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{(\mathbf{v}_E^2)'}{2} dm && \text{(voir (2.10) page 12)} \\
 &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv_t
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\mathcal{P}_{cin}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\gamma}_L dm = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\gamma}_L K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\gamma}_L dv_0 \tag{3.24}$$

Le théorème de la puissance cinétique permet d'évaluer la puissance mécanique des efforts intérieurs dans un domaine matériel de milieu continu :

$$P_{int}^{mec} = \mathcal{P}_{cin}^{mec} - \mathcal{P}_{ext}^{mec}$$

En choisissant l'une des expressions précédentes pour chacun des termes, on trouve les différentes expressions de la puissance mécanique des efforts intérieurs P_{int}^{mec} qu'on peut trouver dans la littérature.

3.4 Forme locale des théorèmes généraux

Les résultats qui suivent sont les conséquences locales des trois théorèmes généraux énoncés pour un domaine matériel dans la section précédente.

3.4.1 Équation de mouvement

Ce résultat est la conséquence du théorème de la résultante dynamique. En prenant les formes eulériennes (3.8) page 21 et (3.10) page 21, il s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_E^v) dv_t$$

Cette égalité étant vraie pour tout domaine matériel, en utilisant le lemme énoncé en (1.12) page 7, on en déduit¹⁶ :

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^v = \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}^m \quad (3.25)$$

L'équation différentielle vectorielle (3.25) est appelée *forme eulérienne de l'équation de mouvement*.

En prenant les formes lagrangiennes (3.9) page 21 et (3.12) page 21, le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L K_{vL} \boldsymbol{\gamma}_L dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \left(\mathbf{f}_L^v K_{vL} + \mathbf{div}_L (K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) \right) dv_0$$

En utilisant le lemme énoncé en (1.12) page 7, on en déduit¹⁷ :

$$\rho K_v \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{f}^v K_v + \mathbf{div}_L (K_v \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \quad (3.26)$$

$$\rho_0 \boldsymbol{\gamma} = \rho_0 \mathbf{f}^m + \mathbf{div}_L (K_v \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \quad (K_v = \frac{\rho_0}{\rho} \text{ et } \mathbf{f}^v = \rho \mathbf{f}^m) \quad (3.27)$$

où $K_v = \det \mathbf{F}$ est la dilatation volumique dans une déformation de référence $\mathcal{D}_0^m$ et où ρ_0 est la masse volumique à l'instant de référence t_0 .

L'équation différentielle vectorielle (3.26) ou (3.27) est appelée *forme lagrangienne de l'équation de mouvement*.

REMARQUES : Pour faire une ressemblance avec la forme eulérienne, le groupement de termes $\boldsymbol{\Pi} = K_v \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$ est parfois appelé premier « tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff (ou encore de Boussinesq). On peut trouver une « interprétation » à ce tenseur : le vecteur $\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{n}_0$ est la force de contact *actuelle* par unité de surface *de référence*. Contrairement au tenseur des contraintes de Cauchy, le tenseur $\boldsymbol{\Pi}$ n'est pas symétrique.

Dans la littérature scientifique on trouve d'autres « tenseurs des contraintes » : le tenseur de Kirchhoff : $\boldsymbol{\tau} = K_v \boldsymbol{\sigma}$ et le second tenseur de Piola-Kirchhoff : $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Pi}$ qui sont symétriques. Ces groupements de termes sont nommés car ils apparaissent dans certains calculs. Ils n'ont pas interprétation physique.

3.4.2 Symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy

Ce résultat est la conséquence du théorème du moment dynamique. En prenant les formes eulériennes (3.15) page 22 et (3.17) page 22, il s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left(\mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}_E^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_E \right) dv_t$$

En tenant compte de la forme eulérienne de l'équation de mouvement (3.25), il reste :

$$\mathbf{0} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_E dv_t$$

16. On a enlevé les indices E inutiles car par définition $\mathbf{A}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{A}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{A}(P, t)$.

17. On a enlevé les indices L inutiles car par définition $\mathbf{A}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{A}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{A}(P, t)$.

En utilisant le lemme énoncé en (1.12) page 7, on en déduit : $\mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$.

Le tenseur des contraintes de Cauchy est un tenseur du second ordre symétrique.

REMARQUES : Cette conclusion n'est valable que si les actions extérieures et intérieures sont modélisables par des forces sans moment (milieux continus dits « non polarisés »). En effet, dans le cas contraire, le théorème du moment dynamique contient des termes supplémentaires qui invalident la conclusion.

D'autre part, on pouvait aussi bien déduire ce résultat à partir des expressions lagrangiennes du théorème du moment dynamique (3.16) et (3.19) page 22.

Contraintes principales

Le tenseur des contraintes de Cauchy actuel $\boldsymbol{\sigma}$ étant symétrique, il a donc 3 valeurs propres réelles $\sigma_1(P,t)$, $\sigma_2(P,t)$ et $\sigma_3(P,t)$ (éventuellement confondues).

DÉFINITION : *Les valeurs propres du tenseur des contraintes de Cauchy actuel sont appelées contraintes principales actuelles.*

Directions principales actuelles des contraintes

Soit une base propre *orthonormée* $\{\mathbf{u}_i\}$ construite sur les directions propres du tenseur des contraintes de Cauchy actuel. On écrit donc : $\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{U}_i$. On a évidemment : $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$.

En toute particule d'un milieu continu, il existe des facettes matérielles pour lesquelles la contrainte est uniquement normale : ce sont les facettes matérielles dont les normales actuelles sont colinéaires avec les directions propres actuelles du tenseur des contraintes de Cauchy.

Représentation de Mohr du tenseur des contraintes de Cauchy

Le tenseur des contraintes de Cauchy étant symétrique, il est susceptible d'être graphiquement représenté par la représentation de Mohr¹⁸.

Cette représentation graphique montre que la contrainte normale actuelle et la norme de la contrainte tangentielle actuelle pour une facette matérielle de normale actuelle $\mathbf{n}_t$ ne peuvent prendre des valeurs quelconques : le point de coordonnées $(c_N, \|\mathbf{c}_T\|)$ est astreint à rester à l'intérieur du tricerclé de Mohr. Notamment, si on ordonne les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, la norme de la contrainte tangentielle $\|\mathbf{c}_T\|$ ne peut dépasser la valeur $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$, et les valeurs extrémales de la contrainte normale sont : $\sigma_3 \leq c_N \leq \sigma_1$.

3.4.3 Puissance volumique des efforts intérieurs

Ce résultat est la conséquence du théorème de la puissance cinétique : en utilisant les expressions de la puissance cinétique (3.23) page 23 et de la puissance des efforts extérieurs (3.21) page 23, ce théorème s'écrit :

$$\mathcal{P}_{int}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dV_t - \int_{\mathcal{D}_t^m} \left(\mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_E^v + \text{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \text{grad}_E \mathbf{v} \right) dV_t$$

Compte tenu de l'équation de mouvement (3.25) page 24 il reste :

$$\mathcal{P}_{int}^{mec} = - \int_{\mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \text{grad}_E \mathbf{v} dV_t$$

18. Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur, section 4.5.

Enfin, compte tenu de la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\mathcal{P}_{int}^{mec} = - \int_{\mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{sym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} dv_t = - \int_{\mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E dv_t \quad (3.28)$$

où $\mathbf{D}$ est le tenseur des taux de déformation¹⁹.

La puissance des efforts intérieurs dans un domaine matériel est une intégrale de volume. On peut donc poser la définition suivante :

DÉFINITION : La densité volumique de puissance des efforts intérieurs dans un milieu continu est :

$$\mathcal{P}_{int}^v = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (3.29)$$

L'unité légale est le W.m⁻³.

REMARQUE : On laisse le soin au lecteur de vérifier qu'on aboutit au même résultat en utilisant les expressions lagrangiennes (3.22) page 23 et (3.24) page 23.

3.5 Théorèmes généraux pour les domaines géométriques

Soit un domaine géométrique $\mathcal{D}^g$ (éventuellement en mouvement, mais sans rapport avec celui du milieu continu) dont le domaine actuel est $\mathcal{D}_t^g$. L'équation de mouvement (3.25) page 24 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E dv_t &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{f}_E^v dv_t \\ \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E dv_t}_{\mathbf{R}_{dyn}} &= \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n} dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{f}_E^v dv_t}_{\mathbf{R}_{ext}} \quad (\text{théorème de la divergence}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

De même, l'équation de mouvement permet d'écrire :

$$\underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E dv_t}_{\mathbf{M}_{dyn O}} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E dv_t}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^v dv_t}_{\mathbf{M}_{ext O}^{dist}} \quad (3.31)$$

L'intégrande de l'intégrale $\mathbf{A}$ peut s'écrire sous la forme d'une divergence :

$$\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E = \mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{H} : \left(\mathbf{div}_E (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{grad}_E \mathbf{x}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \right) = \mathbf{div}_E (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})) - \underbrace{\mathbf{H} : (\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_E)}_0$$

L'intégrale $\mathbf{A}$ s'écrit donc :

$$\mathbf{A} = \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{div}_E (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})) dv_t = \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})) \cdot \mathbf{n} ds_t = \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \underbrace{(\boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{f}^s} ds_t = \mathbf{M}_{ext O}^{cont}$$

L'intégrale $\mathbf{A}$ de (3.31) est donc le moment en O des actions extérieures de contact.

Finalement, les deux premiers théorèmes généraux de la mécanique pour un domaine géométrique traversé par un milieu continu s'expriment exactement comme pour un domaine matériel :

$$\mathbf{R}_{dyn} = \mathbf{R}_{ext} = \mathbf{R}_{ext}^{cont} + \mathbf{R}_{ext}^{dist} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{dyn O} = \mathbf{M}_{ext O} = \mathbf{M}_{ext O}^{cont} + \mathbf{M}_{ext O}^{dist}$$

19. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, section 5.2.

3.5.1 Bilan de quantité de mouvement sur un domaine géométrique

On peut présenter le théorème de la résultante dynamique appliqué à un domaine géométrique $\mathcal{D}^g$ comme une équation de bilan de quantité de mouvement sur ce domaine géométrique, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{dyn} &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \gamma_E \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^g} \dot{\mathbf{v}}_E \, dm \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E \, dm - \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t \quad (\text{voir (2.12) page 12 avec } \mathcal{A}_E^m = \mathbf{v}_E) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t \end{aligned}$$

Le terme $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E \, dv_t$ est la dérivée temporelle de la *quantité de mouvement*²⁰ dans le domaine géométrique. Il est nul dans un mouvement stationnaire.

Le théorème de la résultante dynamique s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E \, dv_t = - \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{f}^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{f}^s \, ds_t}_{\mathbf{R}_{ext}}$$

En notant que $\mathbf{f}^s = \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t$, et en utilisant le théorème de la divergence, on peut encore l'écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E \, dv_t = - \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t}_{\Phi_{Q_{mvt}}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} (\mathbf{f}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) \, dv_t}_{\mathbf{R}_{ext}} \quad (3.32)$$

où $\Phi_{Q_{mvt}}$ est le flux (débit) de quantité de mouvement entrant à travers la frontière.

En comparant avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive donnée en (1.11) page 7, la quantité $\mathbf{f}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}$ peut-être interprétée comme le taux de production volumique de quantité de mouvement dans le domaine géométrique $\mathcal{D}^g$ et son intégrale $\mathbf{R}_{ext}$ est le taux de production interne de quantité de mouvement.

Ainsi, le théorème de la résultante dynamique peut être interprété comme un théorème de « conservation de la quantité de mouvement », si on considère la résultante des forces extérieures $\mathbf{R}_{ext}$ comme une source de quantité de mouvement (pour un domaine matériel, $\mathbf{v}_E = \mathbf{v}^f$, le terme $\Phi_{Q_{mvt}}$ est nul).

REMARQUES :

1. Dans certains ouvrages de mécanique, cette interprétation du théorème de la résultante dynamique est érigée en principe. Le théorème de la résultante dynamique est alors une interprétation.
2. L'équation (3.32) est très utile en mécanique des fluides lorsque le mouvement est stationnaire. Le terme de gauche est alors nul et il suffit de connaître les vitesses seulement à la frontière d'un domaine géométrique pour en déduire la résultante des efforts extérieurs (à distance et de contact) sur le domaine géométrique. Les actions à distance se réduisent la plupart du temps à la pesanteur dont la résultante est facile à évaluer (le poids du fluide dans le domaine géométrique). En revanche, la résultante des actions extérieures de contact est l'opposé de la résultante de l'action du fluide sur les frontières du domaine géométrique. On peut donc, en ne connaissant que les vitesses à la frontière du domaine géométrique, calculer la résultante des actions du fluide sur ses frontières.

20. On rappelle que la quantité de mouvement d'un point matériel de masse m se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v}$ est le produit $m\mathbf{v}$. Le vecteur $\mathbf{v}_E$ peut donc être vu comme une densité massique de quantité de mouvement et le vecteur $\rho_E \mathbf{v}_E$ est une densité volumique de quantité de mouvement. La quantité de mouvement est aussi parfois appelée impulsion.

3.5.2 Bilan de moment cinétique sur un domaine géométrique

On peut suivre la même démarche que précédemment pour interpréter le théorème du moment dynamique.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{dynO} &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \dot{\mathbf{v}}_E \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^g} \left((\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E)' - \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_t \wedge \mathbf{v}_E}_0 \right) dm \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E \, dm - \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t \quad (\text{voir (2.12) page 12 avec } \boldsymbol{\mathfrak{A}}_E^m = \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t
 \end{aligned}$$

Le terme $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E \, dv_t$ est la dérivée temporelle du *moment cinétique*²¹ dans le domaine géométrique. Il est nul dans un mouvement stationnaire.

Le théorème du moment dynamique s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E \, dv_t = - \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}^s \, ds_t}_{\mathbf{M}_{extO}}$$

$$\text{où } \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}^s = \mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{f}^s) = H : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}_E) \cdot \mathbf{n}_t$$

En utilisant le théorème de la divergence, on peut encore l'écrire :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E \, dv_t &= - \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \left(\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}^v + \mathbf{div}_E (H : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}_E)) \right) dv_t \\
 &= - \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \left(\mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \underbrace{H : (\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma})}_0 \right) dv_t \\
 &= \underbrace{- \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t}_{\Phi_{M_{cin}}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) \, dv_t}_{\mathbf{M}_{extO}} \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

En comparant avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive donnée en (1.11) page 7, la quantité $\mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma})$ peut-être interprétée comme le taux de production volumique de moment cinétique dans le domaine géométrique et $\mathbf{M}_{extO}$ est le taux de production interne de moment cinétique.

Ainsi, le théorème du moment dynamique peut être interprété comme un théorème de « conservation du moment cinétique », si on considère le moment résultant en O des forces extérieures $\mathbf{M}_{extO}$ comme une source de moment cinétique (pour un domaine matériel, $\mathbf{v}_E = \mathbf{v}^f$, le terme $\Phi_{M_{cin}}$ est nul).

REMARQUES :

1. Dans certains ouvrages de mécanique, cette interprétation du théorème du moment dynamique est érigée en principe. Le théorème du moment dynamique est alors une interprétation.
2. L'équation (3.33) est très utile en mécanique des fluides lorsque le mouvement est stationnaire. Le terme de gauche est alors nul et il suffit de connaître les vitesses seulement à la frontière d'un domaine géométrique pour en déduire le moment résultant en O des efforts extérieurs (à distance et de contact) sur le domaine géométrique. Les actions à distance se réduisent la plupart du temps à la pesanteur, dont le moment résultant en O est facile à évaluer (c'est le moment en O du poids du fluide dans le domaine géométrique). En revanche, le moment résultant en O des actions extérieures de contact est l'opposé du moment résultant en O de l'action du fluide sur les frontières du domaine géométrique. On peut donc, en ne connaissant que les vitesses à la frontière du domaine géométrique, calculer le moment résultant en O des actions du fluide sur ses frontières.

21. On rappelle que le moment cinétique en un point A d'un point matériel de masse m se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v}$ est le produit vectoriel $m \mathbf{AP} \wedge \mathbf{v}(P)$, c'est-à-dire le moment en A de la quantité de mouvement.

3.5.3 Bilan d'énergie cinétique sur un domaine géométrique

On peut interpréter le théorème de la puissance cinétique comme un bilan d'énergie cinétique sur le domaine géométrique : la puissance cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{cin} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dm = \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{(\mathbf{v}_E^2)}{2} dm + \int_{\partial\mathcal{D}_t^g} \rho_E \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t \quad (\text{voir (2.12) page 12 avec } \mathbf{a}_E^m = \frac{\mathbf{v}_E^2}{2}) \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv_t + \int_{\partial\mathcal{D}_t^g} \rho_E \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t \end{aligned} \quad (3.34)$$

La puissance des efforts extérieurs s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext}^{mec} &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}^v dv_t + \int_{\partial\mathcal{D}_t^g} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}^s ds_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}^v dv_t + \int_{\partial\mathcal{D}_t^g} \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t ds_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \left(\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}^v + \text{div}_E(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right) dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \left(\mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}^v + \text{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \right) dv_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \left(\rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \right) dv_t \quad (\text{équation de mouvement (3.25) page 24}) \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv_t - \mathcal{P}_{int}^{mec} \quad (\text{voir définition (3.28) page 26}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

De l'équation (3.34) et (3.35), il vient :

$$\mathcal{P}_{cin} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dm = - \underbrace{\int_{\partial\mathcal{D}_t^g} \rho_E \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\Phi_{Ecin}} + \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec} \quad (3.36)$$

où Φ_{Ecin} est le flux (débit) d'énergie cinétique entrant à travers la frontière.

En comparant avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive donnée en (1.11) page 7, la quantité

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^g} \left(\rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \right) dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \left(\mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_E^v + \text{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \right) dv_t$$

peut être interprétée comme un taux de production interne d'énergie cinétique et l'intégrande

$$\tau_{ec} = \rho \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \rho (\mathbf{f}^v + \text{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$$

peut être interprété comme un taux de production volumique d'énergie cinétique.

Ainsi, le théorème de la puissance cinétique peut être interprété comme un théorème de « conservation de l'énergie cinétique », si on considère la puissance des efforts extérieurs et l'opposé de la puissance des efforts intérieurs comme des sources d'énergie cinétique par unité de temps (pour un domaine matériel, $\mathbf{v}_E = \mathbf{v}^f$, le terme Φ_{Ecin} est nul).

3.6 Formulation intégrale des équations de mouvement

Cette formulation de l'équation de mouvement est à la base de méthodes numériques pour la résolution de problèmes de mécanique des milieux continus.

Soit $\mathbf{w}$ un champ de vecteurs arbitraire quelconque. L'équation de mouvement (3.25) page 24 implique :

$$\rho \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{w} \cdot \text{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}^v \quad \forall \mathbf{w}$$

En intégrant sur domaine actuel quelconque $\mathcal{D}_t$ (matériel ou géométrique, fixe ou non)²², on obtient :

$$\int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv = \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{w} \cdot \text{div}_E \boldsymbol{\sigma} dv + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_E^m dv \quad \forall \mathbf{w} \quad (3.37)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t} \text{div}_E (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dv - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \text{grad}_E \mathbf{w} dv + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_E^m dv \quad \forall \mathbf{w}$$

$$= \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_E^m dv - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \text{grad}_E \mathbf{w} dv \quad \forall \mathbf{w}$$

$$\int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv = \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_E^s ds + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_E^m dv - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \text{sym grad}_E \mathbf{w} dv \quad \forall \mathbf{w} \quad (3.38)$$

On démontre en analyse fonctionnelle que si cette égalité *scalaire* d'intégrales est vraie *pour tout champ* $\mathbf{w}$, alors elle est équivalente à l'équation *différentielle vectorielle* de mouvement.

INDICATIONS SUR LA DÉMONSTRATION : Si les champs arbitraires $\mathbf{w}$ et les champs $\rho \boldsymbol{\gamma}$, $\text{div}_E \boldsymbol{\sigma}$ et $\rho \mathbf{f}^m$ sont dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathcal{D}_t$ et de carré intégrable sur $\mathcal{D}_t$ (espace de Hilbert de dimension infinie), alors on montre en analyse fonctionnelle que $\int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}) dv_t$ est un produit scalaire noté $\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle$ de cet espace.

L'équation (3.37) s'écrit : $\int_{\mathcal{D}_t} (\rho_E \boldsymbol{\gamma}_E - \text{div}_E \boldsymbol{\sigma} - \rho_E \mathbf{f}_E^m) \cdot \mathbf{w} dv_t = 0 \Leftrightarrow \langle \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E - \text{div}_E \boldsymbol{\sigma} - \rho_E \mathbf{f}_E^m, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w}$.

Le vecteur $\rho_E \boldsymbol{\gamma}_E - \text{div}_E \boldsymbol{\sigma} - \rho_E \mathbf{f}_E^m$ étant orthogonal à tout vecteur $\mathbf{w}$, il est donc nécessairement nul.

Vocabulaire

- L'égalité (3.38) est appelée *formulation intégrale* ou encore *formulation variationnelle*²³ ou encore *formulation faible*²⁴ des équations de mouvement. Les champs arbitraires $\mathbf{w}$ sont appelés *fonctions test* ou encore *fonctions de pondération*.
- Si l'on interprète le champ vectoriel arbitraire $\mathbf{w}$ comme un champ de vitesses arbitraire, il est appelé champ de *vitesses virtuelles*. Les termes de l'égalité (3.38) sont alors homogènes à des puissances, et le théorème prend le nom de *théorème des puissances virtuelles*.
- Si l'on interprète le champ vectoriel arbitraire $\mathbf{w}$ comme un champ de déplacements arbitraire, il est appelé champ de *déplacements virtuels*. Les termes de l'égalité (3.38) sont alors homogènes à des travaux, et le théorème prend le nom de *théorème des travaux virtuels*.

REMARQUES :

1. Du fait de son équivalence à l'équation de mouvement (3.25) page 24, cette formulation est présentée dans certains de cours de mécanique des milieux continus comme le principe fondamental (peu intuitif) de la dynamique.
2. Cette formulation est à la base d'une méthode numérique de résolution *approchée* de systèmes d'équations différentielles : la méthode des éléments finis. L'approximation provient de ce que l'on cherche des solutions dans un sous-espace de dimension finie des fonctions définies (le plus souvent polynômiales par morceaux) et de carré intégrable sur le domaine $\mathcal{D}$ et que l'on remplace le $\forall \mathbf{w}$ par un nombre fini de champs $\mathbf{w}_i$ engendrant ce sous-espace de fonctions.
3. Dans le cas de domaines *matériels*, on peut décrire les champs par la méthode de Lagrange. On laisse le soin au lecteur, en suivant la même démarche que précédemment et en partant de l'expression lagrangienne de l'équation de mouvement (3.26) page 24, de vérifier que l'expression lagrangienne de ce théorème est :

$$\int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\gamma}_L dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_L^m dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_L^s dv_0 - \int_{\mathcal{D}_0^m} \underbrace{K_{vL}(\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})}_{\Pi_L} : \text{grad}_L \mathbf{w} dv_0 \quad \forall \mathbf{w}$$

22. Dans le calcul qui suit, on n'utilise pas de dérivées d'intégrales, les résultats sont donc valables pour tout type de domaine.

23. Ce nom est utilisé par les auteurs qui utilisent un autre principe fondamental de la mécanique : la solution d'un problème de mécanique est celle qui minimise une certaine intégrale appelée « énergie potentielle ». Pour chercher ce minimum, on utilise le calcul variationnel.

24. Ce nom est plutôt utilisé par les numériciens : cette formulation n'est pas plus faible que l'équation de mouvement, elle lui est équivalente. Elle ne devient faible que si on limite la recherche de solutions dans un certain espace de fonctions particulières.

où $\mathbf{F} = \text{grad}_L \mathbf{x}_t$, où $K_{vL} = \det \mathbf{F}$ est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont l'état de référence est $\mathcal{D}_0^m$ et où ρ_0 est la masse volumique à l'instant de référence t_0 .

Les auteurs qui interprètent $\mathbf{w}$ comme un champ de *vitesse virtuelle* transforment parfois le dernier terme :

$$\underbrace{K_{vL}(\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})}_{\Pi_L} : \text{grad}_L \mathbf{w} = \underbrace{K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L}_{\boldsymbol{\tau}_L} : \text{sym}(\text{grad}_L \mathbf{w} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \boldsymbol{\tau}_L : \underbrace{\text{sym grad}_E \mathbf{w}}_{\mathbf{D}^w}$$

où $\mathbf{D}^w$ serait interprétable comme un « taux de déformation virtuel » par ressemblance avec les vitesses réelles.

3.7 Changements d'observateur

Soient deux observateurs $\mathcal{R}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$ et soit $\mathbf{Q}_t$ le tenseur de changement d'observateur actuel. On convient de surmonter d'un « $\sim$ » les grandeurs relatives à l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$.

On montre en cinématique que la formule de changement d'observateur des directions matérielles actuelles $\mathbf{u}_t$ et des normales actuelles à une facette matérielle $\mathbf{n}_t$ ²⁵ sont :

$$\tilde{\mathbf{u}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{n}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_t \quad (3.39)$$

On pose *par principe* que les forces extérieures surfaciques de contact $\mathbf{f}^s = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t$ sur la frontière d'un domaine ont la même orientation par rapport à cette frontière pour tous les observateurs, c'est-à-dire que les forces surfaciques extérieures s'exerçant sur la frontière d'un domaine sont des grandeurs vectorielles objectives. Leur formule de changement d'observateur est donc²⁶ :

$$\tilde{\mathbf{f}}^s = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{f}^s \quad (3.40)$$

En appliquant la condition aux limites (3.3) page 20 pour chaque observateur, l'égalité (3.40) s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_t &= \mathbf{Q}_t \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t) \quad \forall \mathbf{n}_t \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_t &= \mathbf{Q}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t \quad \forall \mathbf{n}_t & (\text{en vertu de (3.39)}) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{Q}_t &= \mathbf{Q}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{Q}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}_t^T \end{aligned} \quad (3.41)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur tensorielle du second ordre objective²⁷.

Le champ de tenseur des contraintes de Cauchy est un champ tensoriel du second ordre objectif.

On en déduit aisément qu'une contrainte normale actuelle $c_N(P, \mathbf{n}_t, t) = \mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t$ est un scalaire objectif quelle que soit la facette matérielle de normale actuelle $\mathbf{n}_t$. De même, le vecteur contrainte tangentielle actuelle en une particule pour une facette matérielle de normale actuelle $\mathbf{n}_t$, ainsi que sa norme sont des grandeurs respectivement vectorielle et scalaire objectives car $\tilde{\mathbf{c}}_T \cdot \tilde{\mathbf{u}}_t = \mathbf{c}_T \cdot \mathbf{u}_t \quad \forall \mathbf{u}_t$. Les valeurs propres actuelles et les invariants actuels du tenseur des contraintes de Cauchy sont des scalaires objectifs et les directions propres actuelles sont des grandeurs vectorielles objectives.

REMARQUE : On laisse le soin au lecteur d'établir les formules de changement d'observateur des autres « tenseurs des contraintes » Π , $\boldsymbol{\tau}$ et $\mathbf{S}$ évoqués dans la remarque en fin de section (3.4.1) page 24. Il en déduira²⁸ que seul le tenseur $\boldsymbol{\tau} = K_v \boldsymbol{\sigma}$ est objectif.

25. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, section 4.13. 1 et 4.13.2

26. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, section 3.3

27. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, section 3.4

28. On rappelle que la formule de changement d'observateur du gradient lagrangien des positions actuelles $\tilde{\mathbf{F}}$ est : $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T$, voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, section 3.6.1

Enfin, on déduit aisément de l'objectivité du tenseur des contraintes de Cauchy (3.41) et de celle du tenseur des taux de déformation²⁹ que la puissance volumique actuelle des efforts intérieurs est une grandeur scalaire objective :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\mathbf{D}} \quad (3.42)$$

En revanche, la puissance des efforts extérieurs (à distance comme de contact), l'énergie cinétique et la puissance cinétique ne sont pas des grandeurs objectives, car la vitesse et l'accélération ne sont pas des grandeurs vectorielles objectives.

3.8 En bref...

Dans ce cours, on a choisi de considérer les lois de Newton comme étant le principe fondamental de la mécanique. Elles supposent notamment que les actions intérieures ou extérieures sur une particule sont de simples forces sans moment. On montre en mécanique générale que les lois de Newton appliquées à un ensemble de points matériels (domaine matériel) conduisent aux trois théorèmes généraux de la mécanique classique : théorème de la résultante dynamique, théorème du moment dynamique, et théorème de la puissance cinétique.

L'application de ces théorèmes à un domaine matériel de milieu continu conduit à la notion de *contrainte actuelle en une particule et pour une facette matérielle* pour décrire les efforts intérieurs à un milieu continu, ainsi qu'à l'existence dans tout milieu continu d'un champ de tenseurs du second ordre objectif, appelé *tenseur des contraintes de Cauchy*, qui décrit la contrainte actuelle pour toutes les facettes matérielles repérées par leur normale unitaire actuelle autour d'une particule. *Ce tenseur des contraintes doit satisfaire à des conditions aux limites sur la frontière.*

La forme globale des théorèmes généraux pour un domaine matériel ou pour un domaine géométrique est la même. Toutefois elle peut s'écrire sous différentes formes pour des domaines matériels ou géométriques par transformations d'intégrales, et suggérer d'autres interprétations en termes de bilan de quantité de mouvement, de moment cinétique ou d'énergie cinétique.

La forme locale des trois théorèmes généraux conduit à l'équation de mouvement (forme lagrangienne ou eulérienne), à la symétrie du tenseur des contraintes et à la définition d'une densité volumique de puissance des efforts intérieurs.

Il existe une formulation intégrale équivalente à l'équation locale de mouvement.

29. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, section 5.10.2

Chapitre 4

Conservation de l'énergie

Le principe de la conservation de l'énergie est aussi appelé *Premier principe de la thermodynamique*. Avant d'aborder l'expression du principe de la conservation de l'énergie pour un domaine de milieu continu, il est utile de rappeler un certain nombre de concepts de base utilisés en thermodynamique.

4.1 Concepts de base en thermodynamique

La thermodynamique générale envisage des systèmes matériels dont la constitution interne est *a priori* quelconque (machines, objets matériels solides ou non, ponctuels ou non, agencés de manière quelconque) et susceptibles d'échanger de l'énergie avec l'extérieur du système. Cet échange d'énergie se fait sous la forme d'énergie mécanique, qu'on appelle *travail* et sous la forme d'autres énergies non mécaniques, principalement la *chaleur*.

On va naturellement s'intéresser plus particulièrement au cas où la matière qui constitue le système étudié est modélisée par un milieu continu¹. Les systèmes dont on étudiera l'évolution sont donc des domaines matériels ou des domaines géométriques (voir la section 1.1 page 1) remplis de milieu continu.

4.1.1 Variables d'état

Comme on va le voir dans la suite, le principe de la conservation de l'énergie invoque « l'état actuel d'un système ». Il convient de préciser ce concept.

Dans le cas d'un système discret², l'état actuel du système est descriptible avec un nombre fini de paramètres qui sont *nécessaires et suffisants* pour reproduire complètement la configuration actuelle du système. Cette liste de paramètres est appelée *liste de variables d'état indépendantes*. Pour un observateur donné, il existe un grand nombre de listes possibles de paramètres pour décrire l'état actuel d'un système discret.

De plus, un état doit être un concept de définition universelle, c'est-à-dire que si un système matériel est dans un certain état pour un observateur $\mathcal{R}$, (chaque variable d'état a une certaine valeur), il doit être dans le même état pour un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ ³. La manière la plus simple de rendre universelle la définition

1. C'est d'ailleurs le cas dans la plupart des cours de thermodynamique élémentaire, où l'on raisonne essentiellement sur des « masses de gaz » (le plus souvent parfaits). Il n'en reste pas moins vrai que tout système matériel peut être considéré comme presque partout continu, au sens de la théorie des distributions. Les intégrales qui sont dans ce cours peuvent être prises au sens de Lebesgue.

2. Par exemple, un assemblage de points matériels, de solides éventuellement dilatables, de ressorts sans masse, liés ou articulés entre eux, réservoirs, etc.

3. Les définitions non universelles n'ont aucun intérêt en physique. Quel serait l'intérêt du concept d'état si des observateurs attribuaient un état actuel différent à un même système matériel ? Si tel était le cas, la thermodynamique d'un système donné serait différente pour chaque observateur !

d'un état est de ne n'utiliser que des variables d'état scalaires *objectives* pour décrire l'état du système matériel. Ainsi, l'état est décrit par une liste de scalaires qui sont les mêmes pour tous les observateurs.

REMARQUE : Cette condition exclut donc de la liste des variables d'état d'un système, toute grandeur telle que des positions ou des vitesses par rapport à un observateur. En revanche, des distances ou des angles entre des éléments du système sont des grandeurs objectives.

Dans le cas d'un domaine de milieu continu, l'état du domaine est décrit par un certain nombre *nécessaire et suffisant* de champs matériels $\chi_i(P,t)$ de grandeurs physiques *objectives* décrivant l'état actuel de chaque particule, leurs positions relatives actuelles, etc. Si l'on connaît tous ces champs, on est capable *par définition* de déterminer⁴ toutes les autres champs matériels (objectifs ou non) de grandeurs physiques définissables sur ce milieu continu.

DÉFINITION : On appelle liste de variables d'état indépendantes d'un domaine matériel de milieu continu, une liste ordonnée **nécessaire et suffisante** de champs matériels objectifs pour décrire complètement tous les états envisageables de ce domaine matériel.

Le choix d'une liste de variables d'état indépendantes est donc la première étape de la modélisation d'un milieu matériel continu.

En faisant ce choix, on *décide* que tous les états du domaine matériel envisageables par ce modèle sont représentés en donnant indépendamment une valeur arbitraire à chacune des variables d'état (dans un certain domaine de valeurs admissibles). Les grandeurs physiques objectives choisies pour caractériser un état de domaine matériel peuvent être des champs scalaires, vectoriels ou tensoriels. Tant que le modèle de milieu continu n'est pas précisé (fluide, solide déformable, etc), on les note $\{\chi_1(P,t), \dots, \chi_n(P,t)\}$.

REMARQUES : Le choix d'un ensemble de variables d'état indépendantes est normalement suggéré par des constatations expérimentales sur le milieu continu qu'on veut modéliser : on doit pouvoir donner indépendamment à chacune des variables d'état une valeur arbitraire. Elles ne peuvent donc pas être liées par une relation issue d'une définition, de la cinématique ou d'un principe fondamental.

Par exemple, on ne peut pas prendre simultanément la masse volumique actuelle ρ et un tenseur de déformation actuel comme variables d'état indépendantes, car la dilatation volumique actuelle en une particule K_V (calculable à partir du tenseur de déformation actuelle) est liée à la masse volumique actuelle en raison du principe de la conservation de la masse ($K_V = \rho_0 \rho^{-1}$, voir (2.5) page 11). Ces deux grandeurs ne sont donc pas indépendantes.

Autre exemple : en thermodynamique des gaz parfaits on ne peut pas prendre comme variables d'état indépendantes à la fois la température, la masse volumique et la pression d'une particule car ces trois grandeurs sont liées par la définition d'un gaz parfait ($p = k\rho T$ où k est une constante caractéristique du gaz parfait). Si on choisit la température et la masse volumique comme variables d'état d'un gaz parfait, la pression d'une particule de gaz parfait est une fonction d'état (voir section 4.1.2 page 35).

En revanche, si on constate expérimentalement qu'il faut distinguer des états qui auraient les mêmes valeurs de variables d'état, alors il faut ajouter à la liste de ces variables d'état une ou plusieurs variables d'état qui permettent de distinguer ces états. Plus l'ensemble de variables d'état indépendantes est grand, plus le modèle de la matière est compliqué, mais il sera d'autant plus apte à rendre compte du comportement réel du milieu continu.

Exemples de listes de variables d'état indépendantes

On verra dans le chapitre suivant qu'une variable d'état obligatoire est la température absolue T . Elle figure donc toujours dans la liste des variables d'état des exemples qui suivent.

- La variable d'état masse volumique actuelle (un scalaire) traduit la présence d'une certaine quantité de matière par unité de volume⁵. Cette description de la répartition actuelle de la matière est la plupart du temps jugée suffisante pour les modèles de fluides simples. Une liste de variables d'état objectives pour décrire l'état d'une particule de fluide simple est donc $\{T, \rho\}$.

4. En résolvant des équations algébriques ou des équations différentielles avec des conditions initiales et des conditions aux limites.

5. Microscopiquement, c'est un nombre de corpuscules par unité de volume

- Un tenseur de déformation actuelle (un tenseur du second ordre) traduit plus finement la disposition actuelle de la matière en comparant les distances actuelles entre particules voisines avec celles d'une configuration de référence. Un tenseur de déformation doit donc obligatoirement figurer dans la liste des variables d'état d'une particule de milieu continu solide déformable. L'instant de référence utilisé pour définir les déformations serait, par exemple, un instant où le solide déformable n'a encore jamais été sollicité. Une liste de variables d'état objectives pour décrire l'état d'une particule de solide déformable isotrope est donc $\{T, \mathbf{X}\}$ où $\mathbf{X}$ est un tenseur de déformation actuelle objectif⁶.
- Pour les solides déformables anisotropes, un tenseur de déformation est insuffisant pour distinguer les états : il faut compléter la description de l'état d'une particule en précisant l'orientation du tenseur des déformations actuelles par rapport aux directions actuelles d'anisotropie. Les variables d'état doivent donc comporter à la fois un tenseur de déformation actuelle et les directions matérielles actuelles d'anisotropie. Une liste de variables d'état indépendantes objectives pour décrire l'état d'une particule de solide déformable anisotrope est donc $\{T, \mathbf{X}, \mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_p\}$ où $\mathbf{X}$ est un tenseur de déformation actuelle objectif et où les $\mathbf{N}_i$ sont des tenseurs uniaxiaux donnant les directions d'anisotropie actuelles.
- Pour certains milieux continus, l'histoire des changements d'état pour parvenir à un état donné peut être jugée importante. Il faut alors ajouter des variables d'état (scalaires, vectorielles ou tensorielles)⁷ qui sont le résumé actuel de l'histoire de cette particule. Ces variables d'état sont appelées *variables d'état internes*⁸. Ce résumé de l'histoire peut être plus ou moins riche selon les éléments de l'histoire que l'on a sélectionnés comme importants.

4.1.2 Fonction d'état

L'énoncé du principe de la conservation de l'énergie invoque la notion de « fonction d'état ». Il convient de préciser ce concept.

DÉFINITION : On appelle fonction d'état, toute grandeur physique dont la valeur est déterminée par la seule connaissance des valeurs de la liste des variables d'état indépendantes.

VOCABULAIRE : Les fonctions d'état (ou certaines d'entre-elles) sont aussi appelées *potentiels thermodynamiques*.

Les fonctions d'état sont donc des applications $\{\chi_1, \dots, \chi_n\} \rightarrow \mathbb{V}_3^{\otimes q}$ où q est l'ordre de tensorialité de la fonction d'état⁹. Une fonction d'état est donc une grandeur χ_j dont la définition f_{χ_j} est de la forme :

$$\chi_j(P) = f_{\chi_j}(\chi_1(P), \dots, \chi_n(P))$$

Pendant l'évolution d'un domaine, l'état $\{\chi_0, \dots, \chi_n\}$ des particules évolue avec le temps, la valeur de la fonction d'état $\chi_j(P)$ évolue donc aussi avec le temps. On définit donc la dérivée particulaire¹⁰ de cette fonction d'état :

$$\dot{\chi}_j(P) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_{\chi_j} \otimes^{p_i} \dot{\chi}_i(P)$$

où p_i est l'ordre de tensorialité de la variable d'état χ_i et où $\otimes^{p_i}$ est un produit tensoriel p_i -contracté.

6. Il en existe plusieurs, voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, section 4.6

7. Ces variables d'état traduisent en général des réarrangements ou des ruptures de liaisons intercorpusculaires. Les phénomènes macroscopiques s'appellent : plastification, endommagement, etc.

8. Le qualificatif d'« interne » semble plus ou moins consacré par l'usage, bien que toutes les variables d'état puissent être vues comme « internes ». Certains auteurs les appellent « non observables », les autres variables d'état étant donc « observables ». Si l'auteur de ce cours osait proposer une terminologie qui ne soit pas trompeuse, il les appellerait variables « mnésiques ».

9. La plupart des fonctions d'état envisagées dans la suite seront scalaires ($q = 0$, $\mathbb{V}_3^{\otimes q} = \mathbb{R}$).

10. Voir la définition de la dérivée particulaire dans le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, section 2.7, et le cours *Algèbre et analyse tensoriel pour l'étude des milieux continus*, section 2.2.2 pour la dérivation de fonctions d'arguments tensoriels.

REMARQUE : On peut définir un grand nombre de fonctions d'état χ'_j : toute fonction de fonctions d'état et de variables d'état est une fonction d'état. Parmi l'ensemble de grandeurs $\{\chi_1, \dots, \chi_n, \chi'_1, \dots, \chi'_q\}$, on peut choisir n grandeurs $\{\chi''_1, \dots, \chi''_n\}$ telles que les $n - q$ grandeurs restantes s'expriment en fonction des χ''_i . Il suffit que l'application (changement de variables d'états) $\{\chi_1, \dots, \chi_n\} \leftrightarrow \{\chi''_1, \dots, \chi''_n\}$ soit inversible. Cette possibilité de changer de liste de variables d'états indépendantes explique la profusion de formules (exprimant la même chose) que l'on peut trouver dans certains cours de thermodynamique. Dans la suite, par souci de clarté, on évitera de faire de tels changements de variables d'état. Les seules fonctions d'état réellement indispensables sont celles introduites par les deux principes fondamentaux de la thermodynamique, à savoir l'énergie interne introduite par le premier principe de la thermodynamique (voir section 4.2.1 page 38) et l'entropie introduite par le second principe de la thermodynamique (voir chapitre 5 page 45). Les autres fonctions d'état évoquées classiquement en thermodynamique (enthalpie, énergie libre, etc.) sont définies par des combinaisons de ces deux fonctions d'état et de variables d'état.

Fonctions d'état objectives et objectivité des variables d'état

La définition d'une fonction d'état est, comme toute définition, universelle. Soit une fonction d'état *scalaire* définie par $\chi' = f_{\chi'}(\chi_1, \dots, \chi_n)$. L'universalité de la définition signifie que l'application $f_{\chi'}$ est la même pour tous les observateurs.

Si la grandeur physique définie par la fonction d'état est une grandeur scalaire objective (sa valeur scalaire pour un état de particule est la même pour tous les observateurs), on peut écrire :

$$\chi'(P) = f_{\chi'}(\chi_1(P), \dots, \chi_n(P)) = f_{\chi'}(\tilde{\chi}_1(P), \dots, \tilde{\chi}_n(P))$$

avec la même fonction (définition) $f_{\chi'}$ pour tous les observateurs et où les $\tilde{\chi}_i(P)$ sont les valeurs des variables d'état (*a priori* tensorielles) de la particule P pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$.

Les variables d'état étant objectives, les formules de changement d'observateur de ces variables d'état sont connues *a priori*¹¹ :

$$\tilde{\chi}_i(P) = \mathcal{R}_{Q_i}(\chi_i(P))$$

où $\mathcal{R}_{Q_i}$ est un opérateur de changement d'observateur dont la nature change avec l'ordre de tensorialité de la variable d'état¹².

La fonction d'état scalaire χ' étant objective, l'application $f_{\chi'}$ doit satisfaire à l'égalité :

$$f_{\chi'}(\chi_1(P), \dots, \chi_n(P)) = f_{\chi'}(\mathcal{R}_{Q_1}(\chi_1(P)), \dots, \mathcal{R}_{Q_n}(\chi_n(P)))$$

Ainsi, si les variables d'état sont des grandeurs objectives, toute fonction d'état à valeur scalaire objective est nécessairement une fonction isotrope de ses arguments¹³.

On sait qu'il existe alors une fonction $\bar{f}_{\chi'}$ telle que :

$$f_{\chi'}(\chi_1(P), \dots, \chi_n(P)) = \bar{f}_{\chi'}(I_1(P), \dots, I_m(P)) \quad (4.1)$$

où $\{I_1, \dots, I_m\}$ sont des scalaires calculés à partir des arguments tensoriels $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ de la fonction $f_{\chi'}$. Cette liste dépend du nombre et de l'ordre de tensorialité des variables d'état tensorielles χ_i .

L'évaluation d'une fonction d'état scalaire objective et, d'une manière générale, la description de l'état d'une particule de milieu continu avec des variables d'état tensorielles objectives, peut donc se ramener à un ensemble de m variables d'état scalaires objectives où m est inférieur ou égal au nombre de composantes nécessaires pour donner une valeur aux n variables d'état tensorielles $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$.

11. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, sections 3.2 à 3.5

12. On rappelle que pour une grandeur vectorielle objective $\mathbf{v}$, la formule de changement d'observateur est $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{v}$, et pour une grandeur tensorielle d'ordre 2 objective $\mathbf{T}$ elle s'écrit : $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}_t^T$.

13. Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur, section 2.3.2

DÉFINITION : La liste des m champs scalaires objectifs $\{I_1, \dots, I_m\}$ est appelée liste de variables d'état réduites.

REMARQUE : La signification physique profonde de ce résultat mathématique est que les seules valeurs réelles, communes à tous les observateurs, nécessaires et suffisantes pour décrire un état de particule contenant des variables d'état vectorielles ou tensorielles, sont les invariants de chacune des variables d'état et les invariants « croisés » qui définissent les orientations relatives de ces tenseurs les uns par rapport aux autres, en excluant toute orientation absolue par rapport à un observateur particulier. Les m variables scalaires $\{I_1, \dots, I_m\}$ ne permettent donc pas de reconstruire complètement les variables d'état tensorielles pour un observateur donné, elles permettent seulement de reconstruire l'ensemble des variables d'état tensorielles à une rotation quelconque près.

4.1.3 Espace des états

Chaque état de particule étant défini par un nombre fini m de scalaires objectifs, on peut donc représenter les tous états envisageables d'une particule de ce modèle de milieu continu avec un point de $\mathbb{R}^m$ (ou d'un certain domaine de $\mathbb{R}^m$).

DÉFINITION : Soit m le nombre de scalaires objectifs nécessaires et suffisants pour décrire l'état d'une particule. On appelle espace des états, noté $\mathbb{E}$, un espace affine de points de dimension m tel que chaque point représente un état possible de particule.

Dans cet espace, les fonctions d'état scalaires peuvent se représenter par des hypersurfaces de dimension $m - 1$ qui sont les isovaleurs de la fonction d'état.

REMARQUE : En thermodynamique des gaz, les variables d'état indépendantes se réduisent à deux scalaires objectifs ($m = 2$, on dit parfois que les gaz sont « divalents »). Les isovaleurs des fonctions d'état d'un gaz sont donc des courbes dans un espace des états de dimension 2. On peut donc les représenter graphiquement sur des diagrammes plans. Du fait que les thermodynamiciens changent souvent de système de variables d'état indépendantes (voir la remarque en section 4.1.2 page 36), il existe plusieurs versions de ces diagrammes, qui expriment néanmoins tous la même chose : l'évolution de grandeurs le long d'un chemin dans l'espace des états¹⁴.

4.1.4 Évolution thermodynamique

L'évolution thermodynamique d'un domaine (matériel ou géométrique) est la description des changements d'état de chaque particule du domaine, c'est-à-dire la donnée des m champs matériels $\{I_1(P, t), \dots, I_m(P, t)\}$. Dans l'évolution thermodynamique d'un domaine, chaque particule suit donc son propre chemin (ou trajectoire) dans l'espace des états $\mathbb{E}$, paramétré par le temps.

DÉFINITION : On appelle évolution thermodynamique d'une particule, le chemin (ou la trajectoire) du point représentatif de l'état de la particule au cours du temps dans l'espace des états.

DÉFINITION : On appelle vitesse d'évolution thermodynamique à l'instant t de la particule P , la dérivée temporelle dans l'espace des états du point représentatif de l'état dans une évolution.

Les m composantes de la vitesse d'évolution thermodynamique d'une particule dans l'espace des états $\mathbb{E}$ sont donc les m dérivées particulières $\{\dot{I}_1(P, t), \dots, \dot{I}_m(P, t)\}$.

Il faut bien noter que si l'ensemble des variables d'état d'un modèle de milieu continu est bien un ensemble de valeurs indépendantes¹⁵, l'ensemble de ses dérivées particulières dans une évolution ne l'est pas nécessairement : il se peut que des lois cinématiques, physiques ou des principes fondamentaux imposent des relations entre les dérivées particulières des variables d'état.

14. On peut tenter de justifier ces différentes versions de diagrammes par le fait qu'on souhaite représenter des chemins d'évolutions particulières (isothermes, isobares, isochores, isentropes,...) par des verticales ou des horizontales.

15. On peut donner une valeur arbitraire à chacune des variables d'état pour définir un état.

Toutes les directions de vitesse d'évolution thermodynamique autour d'un point de l'espace des états ne sont donc pas toujours possibles.

EXEMPLE : Pour un milieu continu solide anisotrope, la déformation actuelle et les directions d'anisotropie actuelles font partie des variables d'état indépendantes : tout tenseur de déformation associé à toute direction d'anisotropie est un état possible. Néanmoins, les directions d'anisotropie étant des directions matérielles, la cinématique implique des relations entre la dérivée particulière des déformations et la dérivée particulière des directions d'anisotropie car les directions d'anisotropie sont entraînées par le mouvement.

4.2 Principe de la conservation de l'énergie

La démarche suivie dans ce chapitre est similaire à celle suivie dans les deux chapitres précédents : on pose le principe pour un domaine matériel, on en déduit une expression locale et on exprime les conséquences pour un domaine géométrique.

Le principe de la conservation de l'énergie est aussi appelé *Premier principe de la thermodynamique*. Il fait intervenir un nouveau concept : la chaleur, qui est une forme d'énergie non mécanique, mais qui peut aussi être échangée avec l'extérieur.

4.2.1 Énoncé classique pour une évolution finie entre deux instants

On considère un domaine matériel¹⁶ quelconque en évolution entre deux instants t_1 et t_2 . Le premier principe de la thermodynamique postule deux axiomes :

1. *l'énergie se conserve* : il existe une grandeur scalaire, extensive et objective, appelée *énergie interne* du domaine matériel, telle que l'énergie (travail et chaleur) reçue¹⁷ de l'extérieur du domaine matériel entre ces deux instants sert à modifier son énergie cinétique (modification du mouvement), le reste servant à modifier son énergie interne¹⁸.
2. *l'énergie interne du domaine matériel est une fonction d'état* : à chaque état du domaine matériel correspond une valeur de son énergie interne. Les modifications de l'énergie interne du domaine matériel se traduisent donc nécessairement par des changements des variables d'état du domaine matériel.

L'énergie reçue de l'extérieur est à la fois de l'énergie mécanique (du travail) et de l'énergie non mécanique (de la chaleur). Le premier principe s'écrit donc classiquement :

$$(E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1)) + (E_{int}(t_2) - E_{int}(t_1)) = W_{t_1}^{t_2} + Q_{t_1}^{t_2} \quad (4.2)$$

où :

- la variation d'énergie interne $E_{int}(t_2) - E_{int}(t_1)$ du domaine matériel se traduit par des changements d'état dans le domaine matériel, c'est-à-dire des modifications des variables d'état ;
- le terme $W_{t_1}^{t_2}$ désigne le travail mécanique reçu (éventuellement négatif) de l'extérieur par le système pendant l'évolution entre les instants t_1 et t_2 ;
- le terme $Q_{t_1}^{t_2}$ désigne la chaleur reçue (éventuellement négative) de l'extérieur par le système pendant l'évolution entre les instants t_1 et t_2 .

16. Les thermodynamiciens disent *système fermé*. Pour l'instant, le domaine matériel n'est pas nécessairement un domaine de milieu continu, mais il est néanmoins toujours constitué de la même matière.

17. Par convention, on parle toujours de l'énergie reçue de l'extérieur par le domaine matériel. Si l'énergie « reçue » est négative, elle est en fait cédée au milieu extérieur.

18. Bien noter qu'il n'y a pas de spécialisation : on peut modifier l'énergie cinétique aussi bien avec du travail que de la chaleur. Il en est de même pour l'énergie interne.

L'expression de la fonction d'état énergie interne en fonction des variables d'état n'est pas précisée par le principe. Cette relation est particulière à chaque système étudié. Dans le cas d'un domaine matériel de milieu continu, cette relation est particulière à chaque milieu continu (acier, eau, air ...).

C'est en précisant d'une part la liste des variables d'état nécessaire et suffisante pour caractériser l'état d'un domaine matériel et d'autre part l'expression de l'énergie interne en fonction de ces variables d'état, que l'on construit un modèle du comportement du milieu continu contenu dans le domaine.

REMARQUE : Dans un grand nombre de traités de thermodynamique, le premier principe de la thermodynamique est énoncé avec des systèmes supposés « à l'équilibre » aux instant t_1 et t_2 , sans définition claire de ce que signifie cet « équilibre » : tantôt les vitesses sont supposées nulles¹⁹ (il n'y a donc pas de variation d'énergie cinétique) ou constantes dans le temps (accélération nulle, « équilibre mécanique ») et/ou uniformes dans l'espace (mouvement de translation), tantôt les champs de variables d'état dans le domaine sont supposés uniformes (« équilibre thermique » et autres...)²⁰, et bien souvent les deux à la fois. Comme on va le voir par la suite, cette idée d'« équilibre » est inutile. Ces conditions soit-disant simplificatrices ne sont évoquées que parce que c'est dans ces cas particuliers que les vérifications expérimentales sont les plus faciles à faire. Pour pouvoir appliquer le principe avec de telles restrictions, on est amené à considérer les évolutions du système étudié comme une « succession d'états d'équilibre », éventuellement « infiniment lente » qui n'ont aucun sens physique. Lorsqu'un système matériel (continu ou non) évolue, les vitesses ou les accélérations de ses particules se sont en général pas nulles, les champs de variables d'état ne sont en général pas uniformes et le principe de la conservation de l'énergie n'en reste pas moins vrai.

4.2.2 Énoncé global instantané

L'énoncé (4.2) page 38 est affirmé pour toutes les transformations, c'est-à-dire $\forall t_1$ et $\forall t_2$, et donc en particulier pour toute sous-transformation entre deux instants t et $t + dt$ aussi proches que l'on veut²¹. On va donc en donner une formulation instantanée qui garantit le respect du principe de la conservation de l'énergie pour toute sous-évolution d'une évolution :

$$\frac{d}{dt}E_{cin} + \frac{d}{dt}E_{int} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{cal} \quad (4.3)$$

où :

- $\mathcal{P}_{ext}^{mec}$ est la puissance mécanique actuelle des efforts extérieurs (à distance et de contact) ;
- $\mathcal{P}_{ext}^{cal}$ est la puissance calorifique actuelle reçue de l'extérieur.

Il faut maintenant traduire cet énoncé global valable pour un système matériel *a priori* quelconque, dans le cas où la matière du système matériel est modélisée par un milieu continu²².

4.2.3 Conservation de l'énergie pour un domaine matériel de milieu continu

Soit $\mathcal{D}^m$ un domaine matériel, soit $\mathcal{D}_t^m$ sa position actuelle et soit $\mathcal{D}_0^m$ sa position de référence.

L'énergie interne est, par principe, une grandeur *extensive*²³, on peut donc définir une densité massique d'énergie interne, notée e^m et appelée *énergie interne massique*²⁴, telle que l'énergie interne actuelle d'un domaine matériel est (voir (1.1) page 3) :

$$E_{int}(\mathcal{D}_t^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} e_E^m dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E e_E^m dv_t = \int_{\mathcal{D}_0^m} e_L^m dm = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L e_L^m K_v dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 e_L^m dv_0$$

19. Pour quel observateur ?

20. Par exemple la température ou la pression sont supposés uniformes dans l'espace, ce qui évite de parler de champs matériels pour les variables d'état.

21. Naturellement, tous les états intermédiaires $t \in [t_1, t_2]$ ne sont pas « à l'équilibre » quel que soit le sens qu'on donne à ce mot.

22. Voir la remarque 1 page 33.

23. L'extensivité postulée de l'énergie interne est parfois appelée en thermodynamique : « principe de l'état local ».

24. Les thermodynamiciens disent aussi : énergie interne spécifique.

4. CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

où e^m est l'énergie interne massique actuelle (unité : J.kg^{-1}).

D'autre part, l'énergie interne massique est, par principe, une *fonction d'état*. Il existe donc une application réelle f_e telle que :

$$e^m(P) = f_e(\chi_1(P), \dots, \chi_n(P))$$

L'application universelle f_e est caractéristique de chaque modèle de milieu continu, par le choix de ses variables (la liste des variables d'état χ_i) et par l'application f_e elle-même (expression de l'énergie interne massique en fonction des variables d'état).

Enfin, l'énergie interne est, par principe, une grandeur scalaire *objective*. Puisque les variables d'état sont objectives, l'application f_e est une fonction isotrope de ses arguments tensoriels et peut donc être ramenée à une fonction $\bar{f}_e$ d'arguments scalaires (voir (4.1) page 36) :

$$e^m(P) = \bar{f}_e(I_1(P), \dots, I_m(P))$$

où les variables d'état réduites scalaires $\{I_1, \dots, I_m\}$ sont connues quand on connaît la liste des variables d'état tensorielles objectives.

L'énergie cinétique actuelle et la puissance mécanique extérieure actuelle d'un domaine matériel ont été définies dans le chapitre sur le principe fondamental de la mécanique. On rappelle leurs différentes expressions ici :

$$\begin{aligned} E_{cin}(\mathcal{D}_t^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dm = \int_{\mathcal{D}_0^m} \frac{\mathbf{v}_L^2}{2} dm = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \frac{\mathbf{v}_L^2}{2} K_v dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \frac{\mathbf{v}_L^2}{2} dv_0 \\ \mathcal{P}_{ext}^{mec}(\mathcal{D}_t^m, t) &= \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^v dv_t}_{\text{Puiss. forces à distance}} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\text{Puiss. forces de contact}} \\ &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{f}_L^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} ds_0 \quad (\text{par exemple, voir (3.22) page 23}) \end{aligned}$$

Dans un domaine matériel, on représente l'énergie calorifique reçue de l'extérieur par deux termes :

- un terme de frontière :

$$\mathcal{P}_{ext}^{cal surf} = - \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t = - \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{q}_L \cdot \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} K_{sL} ds_0 = - \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{q}_L \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} ds_0$$

Ce terme est la puissance calorifique reçue de l'extérieur par conduction²⁵ à travers la frontière. Le champ vectoriel $\mathbf{q}$, défini dans tout le domaine matériel²⁶, est appelé *courant de chaleur*²⁷ (W.m^{-2}).

- un terme de volume :

$$\mathcal{P}_{ext}^{cal vol} = \int_{\mathcal{D}_t^m} r_{extE}^v dv_t = \int_{\mathcal{D}_0^m} r_{extL}^v K_{vL} dv_0$$

Le champ scalaire r_{ext}^v représente une puissance calorifique volumique (W.m^{-3}) reçue à l'intérieur du domaine matériel mais *due à une source d'énergie extérieure*²⁸. On peut utiliser ce terme pour modéliser une production de chaleur due à un rayonnement d'origine extérieure qui cède une partie de son énergie sous forme de chaleur en traversant le domaine matériel par interaction avec la matière (par exemple un rayonnement micro-ondes). Dans beaucoup d'applications, ce terme est nul.

25. On applique ici le principe à un domaine *matériel*. Aucune matière ne traverse la frontière, il n'y a donc pas d'apport de chaleur à travers la frontière par convection.

26. L'existence du champ vectoriel $\mathbf{q}$ dans le domaine est souvent postulée. En fait, on peut prouver son existence de la même manière que pour l'existence du tenseur des contraintes. La démonstration d'existence est donnée en annexe A.3 page 72.

27. Le vecteur $\mathbf{q}$ est parfois appelé « flux » de chaleur ; quelquefois, c'est le scalaire $q^s = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ qui est appelé « flux » de chaleur.

28. C'est un apport de chaleur à distance, comparable aux forces extérieures à distance.

Le principe de la conservation de l'énergie (4.3) page 39 pour un domaine matériel s'écrit donc (avec les descriptions d'Euler) :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dm}_{\mathcal{P}_{cin} = \frac{d}{dt} E_{cin}(\mathcal{D}^m, t)} + \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} e_E^m dm}_{\frac{d}{dt} E_{int}(\mathcal{D}^m, t)} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\mathcal{P}_{ext}^{mec}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} r_{ext E}^v dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\mathcal{P}_{ext}^{cal}} \quad (4.4)$$

On peut simplifier l'expression globale de la conservation de l'énergie pour un domaine matériel (4.4), en utilisant le théorème de la puissance cinétique : $\mathcal{P}_{cin} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec}$.

$$\frac{d}{dt} E_{int}(\mathcal{D}^m, t) = -\mathcal{P}_{int}^{mec} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} r_{ext E}^v dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\mathcal{P}_{ext}^{cal}} \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} e_E^m dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^m} r_{ext E}^v dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t \quad (\text{voir (3.28) page 26}) \quad (4.5)$$

$$\int_{\mathcal{D}_t^m} \dot{e}_E^m \rho_E dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^m} r_{ext E}^v dv_t - \int_{\mathcal{D}_t^m} \text{div}_E \mathbf{q} dv_t \quad (\text{voir (2.10) page 12}) \quad (4.6)$$

Si on utilise les descriptions de Lagrange dans le domaine matériel, le principe de la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \dot{e}_L^m K_{vL} dv_0 &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L : \mathbf{D}_L K_{vL} dv_0 + \int_{\mathcal{D}_0^m} r_{ext L}^v K_{vL} dv_0 - \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{q}_L \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} ds_0 \\ \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \dot{e}_L^m dv_0 &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L : \mathbf{D}_L K_{vL} dv_0 + \int_{\mathcal{D}_0^m} r_{ext L}^v K_{vL} dv_0 - \int_{\mathcal{D}_0^m} \text{div}_L (K_v \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}) dv_0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

où K_v est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont la référence est $\mathcal{D}_0^m$.

4.3 Forme locale de la conservation de l'énergie

On l'obtient par le même procédé que pour les autres principes : en utilisant le lemme fondamental à partir de l'expression globale (4.6), on obtient la forme locale de la conservation de l'énergie, appelée *forme eulérienne de l'équation de la chaleur*²⁹ :

$$\rho \dot{e}^m = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} \quad (4.8)$$

L'énergie interne massique étant une fonction d'état, sa dérivée particulière est :

$$\dot{e}^m = \sum_{i=1}^n \partial_i f_e \otimes^{p_i} \dot{\boldsymbol{\chi}}_i = \sum_{j=1}^m \partial_j \bar{f}_e \dot{I}_j \quad (f_e(\boldsymbol{\chi}_0, \dots, \boldsymbol{\chi}_n) = \bar{f}_e(I_1, \dots, I_m), \text{ voir (4.1) page 36})$$

où :

- p_i est l'ordre du tenseur $\boldsymbol{\chi}_i$ et $\otimes^{p_i}$ est un produit tensoriel p_i -contracté ;
- $\{\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\}$ sont les variables d'état tensorielles ;
- f_e est la fonction d'état énergie interne massique en fonction des variables d'état tensorielles ;

²⁹ On a enlevé les indices E inutiles car par définition $\boldsymbol{\mathcal{A}}_E(\mathbf{x}_t, t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_L(\mathbf{x}_0, t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(P, t)$.

- $\{I_1, \dots, I_m\}$ sont les variables d'état réduites (scalaires) ;
- $\bar{f}_e$ est la fonction d'état énergie interne massique en fonction des variables d'état réduites.

Pour un certain milieu continu (l'application f_e ou $\bar{f}_e$ et la liste des variables d'état sont connues), la conservation de l'énergie s'écrit donc :

$$\rho \sum_{i=1}^n \partial_i f_e \otimes^{p_i} \dot{\chi}_i = \rho \sum_{j=1}^m \partial_j \bar{f}_e \dot{I}_j = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} \quad (4.9)$$

On peut aussi écrire une *forme lagrangienne de l'équation de la chaleur* en appliquant le lemme fondamental à l'équation (4.7) page 41 :

$$\underbrace{K_v \rho}_{\rho_0} \dot{e}^m = - \underbrace{K_v}_{\boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - K_v r_{ext}^v - \text{div}_L (K_v \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q})$$

où $\rho_0 = \rho_L(\mathbf{x}_0, t_0)$ et où $\boldsymbol{\tau}$ est le « tenseur des contraintes » de Kirchhoff (voir la remarque page 24).

REMARQUE : Le terme $K_v \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}$ parfois noté $\mathbf{q}_0$ est difficilement interprétable.

4.4 Conservation de l'énergie pour un domaine géométrique

Soit un domaine géométrique dont la position actuelle est $\mathcal{D}_t^g$. De l'équation locale (4.8) page 41, il vient :

$$\int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \dot{e}_E^m dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{r}_{ext E}^v dv_t - \int_{\mathcal{D}_t^g} \text{div}_E \mathbf{q} dv_t$$

En utilisant la dérivation des intégrales de masse sur un domaine géométrique (2.12) page 12, il vient :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} e^m dm}_{\frac{dE_{int}}{dt}} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E dv_t}_{-\mathcal{P}_{int}^{mec}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{r}_{ext E}^v dv_t - \int_{\mathcal{D}_t^g} \text{div}_E \mathbf{q} dv_t}_{\mathcal{P}_{ext}^{cal}} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E e_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\Phi_e} \quad (4.10)$$

où Φ_e est le flux (débit) d'énergie interne entrant à travers la frontière et où $\mathbf{v}^f$ est la vitesse de la frontière du domaine géométrique.

En comparant (4.10) avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive donnée en (1.11) page 7, la quantité $\mathcal{P}_{ext}^{cal} - \mathcal{P}_{int}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^g} (\mathbf{r}_{ext E}^v - \text{div}_E \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E) dv_t$ peut s'interpréter comme un taux de production interne d'énergie interne, et le terme $\tau_{int} = \mathbf{r}_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ est le taux de production volumique d'énergie interne.

Ainsi, on peut interpréter le principe de la conservation de l'énergie, comme un principe de « conservation de l'énergie interne », à condition de considérer la puissance calorifique extérieure et l'opposé de la puissance mécanique des efforts intérieurs comme des sources d'énergie interne. Pour un domaine matériel, le flux à travers la frontière est nul.

BILAN D'ÉNERGIE TOTALE : En utilisant le théorème de la puissance cinétique sous forme de bilan d'énergie cinétique pour un domaine géométrique (3.36) page 37 :

$$\frac{d}{dt} E_{cin} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec} + \Phi_{E_{cin}}$$

et en additionnant terme à terme avec (4.10) il vient :

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \frac{dE_{int}}{dt} + \frac{dE_{cin}}{dt} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{cal} + \underbrace{\Phi_e + \Phi_{E_{cin}}}_{\Phi_{E_{tot}}}$$

Ainsi, si on appelle *énergie totale* le terme $E_{tot} = E_{cin} + E_{int}$, en comparant avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive donnée en (1.11) page 7, le principe de la conservation de l'énergie peut être présenté comme un principe de conservation de l'énergie totale, à condition de considérer la puissance mécanique des efforts extérieurs et la puissance calorifique extérieure comme des sources d'énergie totale. Le taux de production volumique d'énergie totale est : $\tau_{E_{tot}} = \mathbf{v} \cdot (\text{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^v) + \mathbf{r}_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q}$. Pour un domaine matériel, le flux à travers la frontière est nul.

4.5 Changements d'observateur

L'énergie interne massique est par principe une grandeur scalaire objective. D'autre part, la puissance volumique des efforts intérieurs $P_{int}^{mec} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ l'est aussi (voir (3.42) page 32).

On pose *par principe* que la puissance calorifique surfacique actuelle transmise par conduction à travers la frontière $\mathbf{q}^s = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_t$ (W.m^{-2}) est un scalaire objectif ($\tilde{\mathbf{q}}^s = \mathbf{q}^s$). On déduit aisément de l'égalité : $\tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_t = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_t$, en utilisant (3.39) page 31, que la formule de changement d'observateur du vecteur courant de chaleur $\mathbf{q}$ est :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{q} \quad (4.11)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective.

Le vecteur courant de chaleur $\mathbf{q}$ est un champ vectoriel objectif.

On montre en cinématique que la divergence eulérienne d'un champ vectoriel objectif est un champ scalaire objectif³⁰. On en déduit que :

Le champ $\text{div}_E \mathbf{q}$ est un champ scalaire objectif.

On déduit de la forme locale de la conservation de l'énergie (4.8) page 41 que :

La puissance calorifique volumique extérieure $\mathbf{r}_{ext}^v$ est une grandeur scalaire objective.

En revanche, l'énergie cinétique, sa dérivée temporelle (la puissance cinétique) et la puissance des efforts extérieurs ne sont pas des grandeurs objectives, car la vitesse n'est pas une grandeur objective. On peut récrire le principe de la conservation de l'énergie global pour un domaine matériel sous la forme :

$$\frac{d}{dt} E_{int} - \mathcal{P}_{ext}^{cal} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} - \frac{d}{dt} E_{cin}$$

Le terme de gauche étant objectif, le terme de droite $\mathcal{P}_{ext}^{mec} - \frac{d}{dt} E_{cin}$ l'est aussi. Bien que chacun des termes de cette différence soit non objectif, leur différence est objective.

4.6 En bref...

Lorsqu'un domaine de milieu continu évolue, le point représentatif de l'état de chaque particule suit son propre chemin dans l'espace des états.

Le premier principe de la thermodynamique postule la conservation de l'énergie d'un domaine matériel (système fermé) via l'existence d'une énergie interne qui est une fonction d'état objective. On en déduit une équation différentielle locale de la conservation de l'énergie appelée *équation de la chaleur* (une forme eulérienne et une forme lagrangienne).

La fonction d'état objective *énergie interne massique* est caractéristique de chaque modèle de milieu continu (par la liste des variables d'état objectives et par son expression en fonction de ces variables). Elle peut être identifiée par des mesures expérimentales ou bien sa forme peut être posée *a priori* par une relation mathématique avec des coefficients à ajuster aux mesures.

30. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, section 3.6.2.

4. CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

Pour un domaine géométrique (système ouvert), l'expression globale du principe s'écrit en tenant compte du flux d'énergie interne traversant la frontière par convection.

L'énergie interne et les quantités calorifiques sont des grandeurs scalaires objectives. En revanche, l'énergie cinétique, la puissance cinétique, le travail et la puissance des forces extérieures ne le sont pas.

Chapitre 5

Second principe de la thermodynamique

5.1 Introduction

Le second principe de la thermodynamique n'est pas toujours présenté dans les cours de milieux continus pour deux raisons :

1. Il n'est utile que quand on cherche à construire un modèle de comportement de milieux continus thermodynamiquement admissible (tous devraient l'être!).
2. Contrairement aux trois principes fondamentaux précédents, il ne conduit pas à des équations mais à une inéquation dont on n'a pas à se soucier dans la résolution d'un problème dès lors qu'un modèle de comportement thermodynamiquement admissible a été choisi.

Ce chapitre n'est donc indispensable que pour les lecteurs qui ont en vue la construction de nouveaux modèles de comportements. Les modèles de comportement classiques des solides et des fluides, proposés généralement sans justification dans les cours élémentaires, satisfont (approximativement pour certains) automatiquement l'inégalité du second principe de la thermodynamique.

REMARQUE : Il n'est cependant pas pédagogiquement inutile de vérifier que les modèles de comportement classiques satisfont bien le principe. Il est aussi pédagogiquement utile de reconstruire les modèles classiques à partir du second principe de la thermodynamique, pour les justifier¹.

Le second principe de la thermodynamique introduit une nouvelle variable d'état : la *température absolue*, ainsi qu'une nouvelle fonction d'état : l'*entropie*. Il sort du cadre de ce cours de tenter de justifier l'énoncé de ce principe par un exposé de l'évolution historique des idées en thermodynamique ou par des expériences de pensée sur les machines thermiques idéales de Carnot. L'auteur a choisi résolument de le présenter comme les principes précédents, c'est-à-dire en l'énonçant comme un axiome sans essayer de le justifier.

Dans ce chapitre, on suit la même démarche que dans les chapitres précédents : le principe est énoncé de manière globale pour un domaine matériel, on en déduit une inégalité locale et une expression globale pour les domaines géométriques.

1. Historiquement, les lois de comportement classiques des fluides et des solides déformables ont été proposées sans le souci de respecter le second principe. C'est donc un peu par chance qu'ils se trouvent être thermodynamiquement admissibles (ou presque). L'oubli de ce principe a notamment pu conduire, dans un passé récent, à la proposition de certaines lois de comportement thermodynamiquement inadmissibles comme le comportement dit « hypoélastique », dont on peut encore trouver la trace dans certains codes de calcul.

5.2 Énoncé classique

On postule l'existence d'une grandeur scalaire positive non extensive mais objective appelée *température absolue* (unité légale : le Kelvin de symbole K).

On postule que la chaleur est une énergie qui ne peut se transmettre d'une région A vers une région B que si $T_A > T_B$ (on dit que « la chaleur va du chaud vers le froid »).

REMARQUE : Parler de la température absolue d'un système fini ou d'une région n'a de sens que quand elle est uniforme dans le système ou la région ! La température est une grandeur non extensive.

Une variation d'entropie « dS » est quantifiée par le rapport d'une quantité de chaleur « dQ » échangée divisée par la température T au moment de ce échange : $dS = \frac{dQ}{T}$.

EXEMPLE : S'il y a un transfert de chaleur « dQ » de la région A vers la région B , le gain (négatif) d'entropie de la région A est $-\frac{dQ}{T_A}$ et le gain (positif) d'entropie de la région B est $\frac{dQ}{T_B}$. L'extensivité de l'entropie permet d'écrire que la variation d'entropie du système $A \cup B$ due au transfert de chaleur « dQ » est $\frac{dQ}{T_B} - \frac{dQ}{T_A} > 0$ car $T_A > T_B$. Un échange de chaleur à l'intérieur du système $A \cup B$ provoque donc une augmentation d'entropie.

On postule l'existence d'une fonction d'état extensive et objective appelée *entropie* du système (J.K^{-1}), dont la variation dans une évolution du système est due en partie aux apports d'entropie extérieure $\frac{dQ_{\text{ext}}}{T}$ où dQ_{ext} est la chaleur reçue de l'extérieur entre les instants t et $t + dt$ à la température $T(t)$ du système.

REMARQUE : Au cours d'une évolution avec échange de chaleur, la température d'un système de dimension finie ne reste généralement pas constante dans le temps, mais elle resterait uniforme dans le système pour qu'on puisse parler de sa température. Une telle définition impliquerait que l'on ne puisse parler de l'entropie d'un système fini que quand sa température est uniforme !

On donne généralement l'inégalité du second principe pour une transformation « infinitésimale » (entre t et $t + dt$) d'un système fini sous la forme suivante :

$$dS \geq \frac{dQ_{\text{ext}}}{T} \quad \text{ou encore} \quad dS - \frac{dQ_{\text{ext}}}{T} = dS_{\text{int}} \geq 0$$

où :

- dS signifie « petite variation d'entropie du système entre les instants t et $t + dt$ » d'une évolution ;
- dQ_{ext} est la « petite quantité de chaleur » reçue de l'extérieur par le système entre ces deux instants ;
- $T = T(t)$ est la température (uniforme) du système à l'instant t .
- Le reste de la variation d'entropie du système, $dS_{\text{int}} = \frac{dQ_{\text{int}}}{T} = dS - \frac{dQ_{\text{ext}}}{T} \geq 0$, est une production interne d'entropie positive due à des processus internes non précisés.

PRÉCISIONS : L'augmentation d'entropie due aux échanges de chaleur entre les régions A et B d'un système évoquée dans l'exemple précédent (dissipation thermique) n'est pas la seule cause de création d'entropie. Des quantités de chaleur peuvent être gagnées ou perdues par le système à la température T en raison de phénomènes internes comme le frottement (exothermique), des changements de phase ou des réactions chimiques (exothermiques ou endothermiques), etc. La création interne d'entropie dS_{int} est parfois notée $\frac{dQ_f}{T}$ quand le frottement est seul en cause. Il n'en reste pas moins vrai que, même s'il existe des phénomènes internes endothermiques, le second principe de la thermodynamique postule que la production interne totale d'entropie (dissipation thermique et autres) est non négative.

Sous cette forme, le principe est inutilisable en mécanique des milieux continus : les températures d'un milieu continu sont décrites par un champ de température qui n'est généralement pas uniforme. Le second principe de la thermodynamique demande donc à être reformulé de manière plus pertinente.

5.3 Énoncé du second principe pour un domaine matériel

Soit $\mathcal{D}^m$ un domaine matériel dont la position actuelle est $\mathcal{D}_t^m$ et dont la position de référence est $\mathcal{D}_0^m$. Le second principe de la thermodynamique affirme que :

1. Il existe une variable d'état de particule, notée T , scalaire, objective, positive et non extensive appelée *température absolue*.
La liste des variables d'état indépendantes et objectives caractérisant l'état d'une particule (voir section 4.1.1 page 33) s'écrira donc : $\{T, \chi_2, \dots, \chi_n\}$ et sa liste de variables d'état réduites (voir (4.1) page 36) est $\{T, I_2, \dots, I_m\}$.
2. En une particule, le produit scalaire $\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{grad}_E T$ est négatif ou nul (c'est la traduction locale du principe « la chaleur va du chaud vers le froid »).
3. Il existe une fonction d'état scalaire et extensive² S appelée *entropie*. Son extensivité permet de définir une *entropie massique*³ (unité : $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$) telle que l'entropie actuelle $S(\mathcal{D}^m, t)$ d'un domaine matériel $\mathcal{D}^m$ peut s'écrire (voir section 1.2 page 3) :

$$S(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} s_E^m dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E s_E^m dv_t = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L s_L^m K_{v_L} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 s_L^m dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} s_L^m dm$$

L'entropie massique en une particule P étant une fonction d'état scalaire objective, et les variables d'état étant objectives, il existe une fonction f_s et une fonction $\bar{f}_s$ telles que :

$$s^m(P) = f_s(T(P), \chi_2(P), \dots, \chi_n(P)) = \bar{f}_s(T(P), I_2(P), \dots, I_m(P))$$

où l'application universelle f_s (ou $\bar{f}_s$) est caractéristique de chaque modèle de milieu continu, par le choix de ses variables (les variables d'état indépendantes) et par l'application elle-même (valeur de l'entropie massique en fonction des variables d'état) ;

4. Pendant une évolution, la dérivée temporelle de l'entropie du domaine matériel, appelée *taux*⁴ d'entropie du domaine matériel, est supérieure ou égale au taux d'entropie d'origine extérieure :

$$\frac{d}{dt} S(\mathcal{D}^m, t) \geq \int_{\mathcal{D}_t} \frac{r_{\text{ext}E}^v}{T_E} dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t} \frac{\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t}{T_E} ds_t$$

Il existe donc un taux de production d'entropie interne (unité : W.K^{-1}), *non négatif*, dû à des processus internes non précisés⁵ à l'intérieur du domaine :

$$\frac{dS_{\text{int}}}{dt} = \frac{d}{dt} S(\mathcal{D}^m, t) - \int_{\mathcal{D}_t} \frac{r_{\text{ext}E}^v}{T_E} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \frac{\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t}{T_E} ds_t \geq 0 \quad (5.1)$$

Le cas où la relation (5.1) est une égalité (il n'y a pas de production interne d'entropie) n'a lieu que pour une classe particulière d'évolutions thermodynamiques idéales que l'on qualifie de « réversibles ». Les autres sont dites « irréversibles »⁶.

REMARQUE : Avec cet énoncé, il est possible d'envisager l'entropie d'un domaine matériel (ou d'un sous-domaine) à température non uniforme. Les puissances calorifiques reçues de l'extérieur du domaine, modélisées par r_{ext}^v (puissance calorifique volumique actuelle apportée à distance par rayonnement) et par $q^s = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_t$ (puissance calorifique surfacique actuelle entrant à travers la frontière par conduction), ont déjà été définies dans le chapitre précédent (voir section 4.2.3 page 39).

2. Le postulat d'extensivité de l'entropie est parfois appelé « principe de l'état local ».

3. Les thermodynamiciens disent aussi : entropie spécifique.

4. Contrairement au chapitre sur les vitesses de déformation, le mot « taux » signifie ici « dérivée temporelle » et non « dérivée temporelle logarithmique ».

5. Voir les PRÉCISIONS page 46.

6. Ces qualificatifs usuels peuvent induire en erreur : certaines évolutions (comme une fissuration ou une fracture) sont irréversibles au sens commun du terme, alors que d'autres, bien que sujettes à une production interne d'entropie, ne le sont pas vraiment car on peut revenir à l'état antérieur en cédant de l'entropie au milieu extérieur.

5.4 Forme locale du second principe de la thermodynamique

En utilisant la dérivée des intégrales de masse d'un domaine matériel (2.10) page 12 et le théorème de la divergence, le second principe de la thermodynamique pour un domaine matériel (5.1) s'écrit :

$$\frac{dS_{int}}{dt} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \dot{s}_E^m dv_t - \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{r_{ext E}^v}{T_E} dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^m} \text{div}_E \frac{\mathbf{q}}{T} dv_t \geq 0$$

Le principe étant vrai pour tout domaine matériel, il vient une première expression locale de ce principe⁷ :

$$\dot{s}_{int}^v = \rho \dot{s}^m - \frac{r_{ext}^v}{T} + \text{div}_E \frac{\mathbf{q}}{T} \geq 0 \quad (5.2)$$

où :

- le terme $\dot{s}_{int}^v$ est le taux de production volumique d'entropie ($\text{W.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$) dû à des processus internes;
- le terme $\frac{r_{ext}^v}{T} - \text{div}_E \frac{\mathbf{q}}{T}$ est le taux de production volumique d'entropie d'origine externe ($\text{W.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$).

FORME LAGRANGIENNE : Si on utilise la description de Lagrange des champs dans le domaine matériel, il vient :

$$\int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \dot{s}_L^m K_{vL} dv_0 \geq \int_{\mathcal{D}_0^m} \frac{r_{ext L}^v}{T_L} K_{vL} dv_0 - \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} K_{vL} \frac{\mathbf{q}_L}{T_L} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 ds_0$$

On en déduit une forme locale lagrangienne du second principe : $\underbrace{K_v \rho}_{\rho_0} \dot{s}^m - K_v \frac{r_{ext}^v}{T} + \text{div}_L \left(K_v \mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \geq 0$.

En développant la divergence, on peut obtenir d'autres expressions .

En développant la divergence avec l'identité : $\text{div}_E \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{\text{div}_E \mathbf{q}}{T} + \mathbf{q} \cdot \text{grad}_E \frac{1}{T} = \frac{\text{div}_E \mathbf{q}}{T} - \mathbf{q} \cdot \frac{\text{grad}_E T}{T^2}$, l'expression locale du second principe s'écrit encore :

$$\dot{s}_{int}^v = \rho \dot{s}^m - \frac{r_{ext}^v}{T} + \frac{\text{div}_E \mathbf{q}}{T} - \mathbf{q} \cdot \frac{\text{grad}_E T}{T^2} \geq 0$$

Puisque $T > 0$, on peut multiplier chaque membre par T sans changer le sens de l'inégalité :

$$T \dot{s}_{int}^v = \rho T \dot{s}^m - r_{ext}^v + \text{div}_E \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad (5.3)$$

DÉFINITION : On appelle dissipation, la puissance calorifique volumique (W.m^{-3}) d'origine interne, notée Φ , non négative par principe :

$$\Phi = T \dot{s}_{int}^v = \rho T \dot{s}^m - r_{ext}^v + \text{div}_E \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad (5.4)$$

Avec cette définition, la forme locale du second principe s'écrit simplement :

$$\Phi \geq 0 \quad (5.5)$$

En toute particule d'un milieu continu et pour toute évolution possible à partir de son état, la dissipation doit être non négative.

En utilisant la conservation de l'énergie (4.8) page 41, on obtient une autre expression de la dissipation :

$$\Phi = \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \text{grad}_E T \geq 0 \quad (5.6)$$

7. On a supprimé les indices E inutiles car $\mathcal{A}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathcal{A}(P, t)$.

La non négativité du champ des dissipations exprime que le taux de production volumique interne d'entropie $\dot{s}_{int}^v = \Phi T^{-1}$ est non négatif pour toute évolution de particule d'un milieu continu.

En revanche, le second principe n'affirme rien *a priori* sur la nature des processus internes qui produisent cette entropie, excepté le fait que le dernier terme $-\frac{\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{grad}_E T}{T_E}$ est non négatif (voir axiome 2 page 47).

DÉFINITION : On appelle dissipation thermique, la puissance volumique non négative (par principe) définie par :

$$\Phi_{th} = -\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0 \quad (\text{voir axiome 2 page 47}) \quad (5.7)$$

DÉFINITION : On appelle dissipation intrinsèque, la puissance volumique définie par :

$$\Phi_{int} = \Phi - \Phi_{th} = \rho T \dot{s}^m - r_{ext}^v + \text{div}_E \mathbf{q} = \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (5.8)$$

Avec ces définitions, la forme locale du second principe s'écrit :

$$\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{th} \geq 0 \quad \text{avec} \quad \Phi_{th} \geq 0$$

Comme on peut le constater, le second principe de la thermodynamique n'impose pas que la dissipation intrinsèque soit non négative. Il impose seulement que : $\Phi_{int} \geq -\Phi_{th}$.

REMARQUE : Lors de la construction de modèles de milieux continus, on peut assurer la satisfaction au second principe de la thermodynamique en s'arrangeant pour que la dissipation intrinsèque soit toujours non négative. Cette condition n'est qu'une condition suffisante pour satisfaire au principe. Elle n'est nullement nécessaire. De ce fait, on élimine la possibilité d'existence de processus internes endothermiques. C'est le cas pour la plupart des modèles de milieux continus monoconstituants (pas de réaction chimique ni changement de phase).

Les milieux continus multiconstituants sortent du cadre de ce cours, mais on peut noter que si la dissipation intrinsèque est négative, sa norme est limitée par la dissipation thermique : $\Phi_{int} = -|\Phi_{int}| \geq -\Phi_{th} \Rightarrow |\Phi_{int}| \leq \Phi_{th}$. Autrement dit : la chaleur nécessaire à un processus interne endothermique local (une fusion par exemple) ne peut être fournie que par un échange de chaleur de la particule avec ses voisines.

Dans les expressions de la dissipation intrinsèque, la dérivée particulière de l'entropie massique est :

$$\dot{s}^m = \sum_{i=1}^n \partial_i f_s \otimes^{Pi} \dot{\chi}_i = \sum_{j=1}^m \partial_i \bar{f}_s \dot{I}_j$$

L'expression de la dissipation (5.6) page 48 montre que, pour un modèle de milieu continu donné (la liste des variables d'état et les fonctions d'état énergie interne massique et entropie massique sont connues), la dissipation actuelle en une particule en évolution dépend :

- de l'état actuel de la particule (au moins par ρ et T , mais aussi par d'autres variables d'état éventuelles),
- de la vitesse d'évolution thermodynamique actuelle de la particule (par les dérivées particulières des variables d'état),
- de la cinématique du mouvement (au moins par tenseur des taux de déformation actuel $\mathbf{D}$, mais aussi éventuellement par les dérivées particulières de certaines variables d'état),
- de son environnement thermique actuel $\mathbf{grad} T$.

Quand on construit un modèle de milieu continu, il faut donc :

1. choisir une liste de variables d'état indépendantes objectives (éventuellement tensorielles), qui se ramène à une liste de variables d'état réduite de scalaires objectifs ;
2. choisir les expressions des deux fonctions d'état scalaires objectives *énergie interne massique* (en se donnant f_e ou $\bar{f}_e$) et *entropie massique* (en se donnant f_s ou $\bar{f}_s$).

Ces choix doivent être faits de telle manière que pour tout état et pour toute évolution thermodynamique possible à partir de cet état, la dissipation soit non négative.

Comme on le verra dans la construction de modèles, cette condition implique l'existence⁸ de ce qu'il est convenu d'appeler des lois de comportement, qui ne peuvent pas être choisies arbitrairement car elles doivent respecter l'inégalité du second principe de la thermodynamique en toutes situations.

AUTRE EXPRESSION DU SECOND PRINCIPE : Au lieu d'utiliser comme fonction d'état l'énergie interne massique e^m , on peut préférer utiliser l'énergie libre de Helmholtz massique ψ^m définie par : $\psi^m = e^m - T s^m$. On a alors :

$$\dot{\psi}^m = \dot{e}^m - s^m \dot{T} - T \dot{s}^m$$

On obtient une autre expression du second principe, avec les fonctions d'état ψ^m et s^m , appelée *inégalité de Clausius-Duhem*:

$$\Phi = \underbrace{-\rho (\dot{\psi}^m + s^m \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}}_{\Phi_{int}} - \underbrace{\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \text{grad}_E T}_{\Phi_{th}} \geq 0$$

Le couple de fonctions d'état (ψ^m, s^m) est très utilisé à la place du couple (e^m, s^m) en thermomécanique des solides déformables car il simplifie l'écriture de certaines formules.

5.5 Second principe de la thermodynamique pour un domaine géométrique

Soit $\mathcal{D}_t^g$ un domaine géométrique. De l'équation locale (5.2) page 48, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E s_E^m dv_t - \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{r_{ext E}^v}{T_E} dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \text{div}_E \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) dv_t &\geq 0 \\ \int_{\mathcal{D}_t^g} s_E^m dm - \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{r_{ext E}^v}{T_E} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \frac{\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t}{T_E} dv_t &\geq 0 \end{aligned}$$

et en utilisant la dérivée d'un intégrale de masse sur un domaine géométrique (2.12) page 12, on obtient :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} s_E^m dm}_{\frac{dS}{dt}} - \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{r_{ext E}^v}{T_E} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \frac{\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t}{T_E} dv_t}_{\frac{d}{dt} S_{ext}} - \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E s_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\phi_s} \geq 0$$

où ϕ_s est le flux (débit) convectif d'entropie entrant à travers la frontière et où $\mathbf{v}^f$ est la vitesse de la frontière.

On peut encore écrire ce bilan de diverses manières en transformant des intégrales, comme par exemple :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} s_E^m dm \geq \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{r_{ext E}^v - \text{div}_E \mathbf{q}}{T_E} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E s_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t \quad (5.9)$$

où $r_{ext E}^v - \text{div}_E \mathbf{q}$ peut être remplacé par $\rho \dot{e}^m - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ (équation de la chaleur (4.8) page 41), etc.

En comparant (5.9) avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive donnée en (1.11) page 7, on peut interpréter la quantité $\tau_{s ext} = \frac{r_{ext E}^v - \text{div}_E \mathbf{q}}{T} = \frac{\rho \dot{e}^m - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}}{T}$ comme un taux de production volumique d'entropie ($\text{W.K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$) d'origine extérieure.

Ainsi, la dérivée temporelle de l'entropie d'un domaine géométrique est supérieure ou égale à la somme de la production d'entropie d'origine extérieure et du flux d'entropie entrant dans le domaine géométrique à travers la frontière par convection. La différence est une production d'entropie due à des processus internes $\int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{\Phi_E}{T_E} dv_t$.

8. Un exemple de loi dont l'existence est imposée par une inégalité est donné plus loin en section 5.7 page 51

5.6 Changements d'observateur

Considérons deux observateurs $\mathcal{R}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$ et soit $\mathbf{Q}_t$ le tenseur de changement d'observateur à l'instant t .

La température est un scalaire objectif par principe. On montre en cinématique que le gradient eulérien d'un champ scalaire objectif est un champ vectoriel objectif⁹. La formule de changement d'observateur du gradient eulérien du champ de températures est donc :

$$\mathbf{grad}_E \tilde{T} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E T \quad (5.10)$$

Toutes les grandeurs qui interviennent dans l'expression de la dissipation (voir (5.6) page 48) sont des grandeurs objectives. Les dissipations Φ , Φ_{th} et Φ_{int} sont donc des champs de grandeurs scalaires objectives.

5.7 Nécessité de l'existence d'une loi de comportement thermique

L'axiome 2 de l'énoncé du second principe de la thermodynamique pour un domaine matériel de milieu continu donné en section 5.3 page 47 impose l'inégalité :

$$-\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0$$

en toutes situations, c'est-à-dire quel que soit l'environnement thermique représenté par le vecteur $\mathbf{grad}_E T$.

On en déduit que le vecteur courant de chaleur $\mathbf{q}$ est nécessairement au moins fonction du vecteur $\mathbf{grad}_E T$:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E T \leq 0 \quad \forall \mathbf{grad}_E T \quad \Rightarrow \quad \exists \mathbf{f}_q \text{ tel que } \mathbf{q} = \mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T, \dots)$$

La fonction $\mathbf{f}_q$ est appelée *loi de comportement thermique* ou *loi de conduction thermique*.

La loi la plus simple que l'on puisse choisir est la très populaire *loi de Fourier* :

$$\mathbf{q} = -\alpha \mathbf{grad}_E T \quad \text{avec} \quad \alpha \geq 0 \quad (5.11)$$

On vérifie aisément qu'elle satisfait bien la non négativité de la dissipation thermique et qu'elle est bien universelle¹⁰. Cette loi linéaire simple n'est *a priori* valable que pour des milieux continus isotropes, car aucune référence n'est faite à des directions matérielles d'anisotropie (la loi est la même quel que soit l'orientation de $\mathbf{grad}_E T$ par rapport aux directions matérielles).

On peut construire des lois de comportement thermiques plus évoluées : le scalaire α peut être remplacé par toute fonction isotrope (au sens mathématique) à valeur non négative de la forme $\alpha(\mathbf{grad}_E T, T, \boldsymbol{\chi}_i, \mathbf{D}, \dots)$. On obtient ainsi des lois de conduction thermique non linéaires, mais toujours pour des milieux continus isotropes.

On peut aussi construire des lois de conduction thermique pour des milieux continus anisotropes¹¹. Par exemple, pour un milieu continu à une seule direction d'anisotropie¹² dont la direction actuelle est $\mathbf{n}_t$ (vecteur unitaire), on peut prendre des lois de conduction thermique de la forme suivante :

$$\mathbf{q}_E = -\alpha_1(\dots)(\mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{n}_t)\mathbf{n}_t - \alpha_2(\dots)(\mathbf{grad}_E T - (\mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{n}_t)\mathbf{n}_t)$$

où α_1 est la conductivité thermique dans la direction d'anisotropie, et α_2 est la conductivité thermique transverse (perpendiculairement à la direction d'anisotropie). On vérifie aisément que cette loi satisfait le second principe si les fonctions α_1 et α_2 sont à valeur scalaire non négative et que cette loi de conductivité thermique est bien universelle si les fonctions α_1 et α_2 sont des fonctions non négatives isotropes de leurs arguments tensoriels objectifs.

9. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, section 3.6.2

10. En utilisant la formule de changement d'observateur de $\mathbf{q}$ en (4.11) page 43 et celle de $\mathbf{grad}_E T$ en (5.10) page 51, on vérifie aisément que la loi est la même pour un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$: $\tilde{\mathbf{q}} = -\alpha \mathbf{grad}_E \tilde{T}$

11. En général ce sont des milieux continus solides déformables.

12. On les appelle milieux continus « isotropes transverses ». Ce sont, par exemple, des milieux fibreux ou feuilletés que l'on veut modéliser comme des milieux continus.

5.8 Capacités calorifiques locales dans une évolution

La *capacité calorifique* ($\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$) souvent aussi appelée *chaleur massique*¹³, est habituellement définie comme la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 Kelvin l'unité de masse de matière dans une certaine transformation finie dont les états initiaux et finaux sont à température uniforme ($\mathbf{grad}_E T_1 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{grad}_E T_2 = \mathbf{0}$) mais différentes ($T_2 - T_1 = 1 \text{ K}$).

On va en donner ici une définition locale et instantanée : dans un milieu continu en évolution, les puissances calorifiques volumiques échangées en une particule sont :

$$\begin{aligned} \tau_{ext}^{cal} &= r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} = \rho \dot{e}^m - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} & (\text{conservation de l'énergie (4.8) page 41}) & (5.12) \\ \text{et } \Phi_{int} &= \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} & (\text{dissipation intrinsèque (5.6) page 48}) & (5.13) \end{aligned}$$

La première représente la puissance calorifique volumique locale d'origine extérieure et la seconde représente la puissance calorifique volumique locale due aux processus internes. La somme des deux est la puissance calorifique volumique totale actuelle mise en jeu en une particule.

REMARQUE : Dans l'équation (5.13) page 52, on ne tient pas compte de la dissipation thermique car cet échange de chaleur n'est dû qu'à la non uniformité des températures et n'est donc pas caractéristique du milieu continu. On retrouve ainsi une définition locale de la capacité calorifique dans les mêmes conditions que la définition globale habituelle énoncée en début de section.

On peut alors définir une capacité calorifique locale actuelle C qui donne la vitesse d'échauffement due à ces puissances calorifiques volumiques locales :

$$\begin{aligned} \rho C \dot{T} &= \tau_{ext}^{cal} + \Phi_{int} = \rho T \dot{s}^m & (5.12) + (5.13) \\ C &= \frac{T}{\dot{T}} \dot{s}^m = T \partial_T f_s + T \sum_{i=2}^n \partial_i f_s \otimes p_i \frac{\dot{\chi}_i}{\dot{T}} = T \partial_T f_s + T \sum_{j=2}^m \partial_j \bar{f}_s \frac{\dot{I}_j}{\dot{T}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

où la fonction d'état entropie massique s'exprime en fonction des variables d'état tensorielles ou des variables scalaires réduites :

$$s^m = f_s(\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n) = \bar{f}_s(I_1, \dots, I_m)$$

La capacité calorifique locale dépend donc *a priori* à la fois de l'état actuel et de la direction actuelle de la vitesse d'évolution de la particule dans l'espace des états. Pour des vitesses d'évolution telles que $\dot{T} = 0$ (évolution à température constante dans le temps) elle n'est évidemment pas définie.

5.9 En bref...

Le second principe est une inégalité qui exprime que, dans l'évolution d'un domaine, la variation d'entropie du domaine n'est pas due qu'aux échanges d'entropie avec l'extérieur, il y a en général un taux de production interne d'entropie $\int_{\mathcal{D}} \Phi T^{-1} dv$ (unité : W.K^{-1}), sauf pour des évolutions particulières idéales dites « réversibles ».

La forme locale de ce principe est la non négativité de la dissipation : $\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{th} \geq 0$, à respecter en toute particule et à tout instant de l'évolution de tout milieu continu.

La production d'entropie d'origine non externe est due au moins à la dissipation thermique $\Phi_{th} \geq 0$ (non uniformité des températures) et à d'éventuels processus internes (endo ou exothermiques) : la dissipation intrinsèque $\Phi_{int} \geq -\Phi_{th}$. Dans la plupart des modèles de milieux continus monoconstituants (donc sans réaction chimique ni changement de phase), les processus internes sont exothermiques (essentiellement le frottement) et la dissipation intrinsèque est non négative.

13. Cette dénomination est trompeuse, elle suggère que l'unité est en J.kg^{-1} .

Lorsqu'on construit un nouveau modèle de comportement de milieu continu (choix d'une liste de variables d'états indépendantes et choix de l'expression des fonctions d'état énergie interne massique f_e et entropie massique f_s en fonction des variables d'état), le comportement du milieu continu est complètement défini. Ces choix doivent satisfaire automatiquement la condition $\Phi \geq 0$ dans toutes les situations. Cette condition implique l'existence de lois de comportement. Les modèles milieux continus ainsi construits sont dits thermodynamiquement admissibles.

Dans la résolution d'un problème de thermomécanique des milieux continus dans lequel le modèle de milieu continu est donné, le second principe n'apparaît pas dans les équations car il est normalement automatiquement respecté par le modèle de milieu continu donné (s'il est thermodynamiquement admissible).

Chapitre 6

Exemple : le modèle « fluide simple »

L'objet de ce chapitre est d'illustrer comment on peut construire des modèles de fluides simples thermodynamiquement admissibles. On verra comment le second principe de la thermodynamique implique l'existence d'une loi de comportement mécanique et d'une loi de comportement thermique, que ces lois ne peuvent pas être choisies arbitrairement et qu'enfin que le modèle classique *fluide newtonien* est le plus simple d'entre eux.

Il est tout à fait possible d'ignorer ce chapitre et de poser la loi de comportement mécanique des fluides newtoniens ainsi que la loi de comportement thermique de manière autoritaire : il suffit de vérifier qu'elles satisfont bien le second principe de la thermodynamique dans toutes les situations, c'est-à-dire qu'avec ce modèle, la dissipation est non négative dans toute évolution. Nonobstant, la démarche de construction de ces lois est pédagogiquement intéressante : elle montre les origines profondes de ce modèle et elle ouvre la voie à la construction de modèles de comportement thermodynamiquement admissibles de fluides simples non linéaires.

6.1 Définition d'un fluide simple

DÉFINITION : On appelle *fluide simple*, un milieu continu dont les deux variables d'état indépendantes sont la température T et la masse volumique ρ .

La présence de la température dans les variables d'état est imposée par le second principe. Le choix de la masse volumique comme seule autre variable d'état traduit l'intention de ne pas distinguer l'état de deux particules ayant la même température autrement que par la densité volumique de masse actuelle, sans référence à une déformation par rapport à un instant particulier. Autrement dit, les fluides simples n'ont pas de forme propre par rapport à laquelle on pourrait donner un sens physique à un tenseur de déformation qui comparerait les distances actuelles entre particules par rapport à celles d'une configuration de référence.

Avec seulement deux variables d'état scalaires et objectives, un fluide simple est un des modèles de milieux continus les plus simples que l'on puisse construire.

La fonction d'état énergie interne massique et la fonction d'état entropie massique sont donc des fonctions des deux variables d'état (T, ρ) :

$$e(P, t) = f_e(T(P, t), \rho(P, t)) \quad s(P, t) = f_s(T(P, t), \rho(P, t))$$

REMARQUE : Les deux variables d'état étant des scalaires, les variables d'état réduites sont les mêmes.

Leurs dérivées particulières sont donc :

$$\dot{e} = \partial_T f_e \dot{T} + \partial_\rho f_e \dot{\rho} \quad \dot{s} = \partial_T f_s \dot{T} + \partial_\rho f_s \dot{\rho}$$

6.2 Conséquences du second principe de la thermodynamique

Le second principe de la thermodynamique s'écrit (voir (5.6) page 48) :

$$\Phi = \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0$$

soit encore pour un fluide simple :

$$\rho \left(T \partial_T f_s - \partial_T f_e \right) \dot{T} + \rho \left(T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e \right) \dot{\rho} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0 \quad (6.1)$$

Cette inégalité doit être satisfaite en toutes situations, c'est-à-dire pour toute vitesse d'évolution ($\forall \dot{T} \forall \dot{\rho}$), pour tout mouvement ($\forall \mathbf{D}$), à partir de tout état (T, ρ) et pour tout environnement thermique ($\forall \mathbf{grad}_E T$).

Or, les grandeurs $\dot{\rho}$ et $\mathbf{D}$ ne peuvent varier indépendamment : elles sont liées par le principe de la conservation de la masse donné en (2.4) page 10 :

$$\dot{\rho} = -\rho \text{Tr} \mathbf{D}$$

En décomposant le tenseur $\mathbf{D}$ en partie sphérique et déviatorique, on isole $\text{Tr} \mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} = \frac{\text{Tr} \mathbf{D}}{3} \mathbf{G} + \mathbf{dev} \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \frac{\text{Tr} \mathbf{D}}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{G} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{dev} \mathbf{D} = \frac{\text{Tr} \mathbf{D}}{3} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{dev} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{dev} \mathbf{D}$$

Le second principe de la thermodynamique pour un fluide simple (6.1) page 56 s'écrit donc :

$$\rho \left(T \partial_T f_s - \partial_T f_e \right) \dot{T} - \rho^2 \left(T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e - \frac{\text{Tr} \boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2} \right) \text{Tr} \mathbf{D} + \mathbf{dev} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{dev} \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0 \quad (6.2)$$

Cette inégalité doit être vraie dans toutes les situations c'est-à-dire :

- $\forall \dot{T}$ (vitesse actuelle d'évolution de la température de la particule),
- $\forall \mathbf{D}$ (taux de déformation), c'est-à-dire : $\forall \text{Tr} \mathbf{D}$ (partie sphérique) et $\forall \mathbf{dev} \mathbf{D}$ (partie déviatorique), autrement dit : pour tout mouvement actuel au voisinage de la particule;
- $\forall \mathbf{grad}_E T$ (environnement thermique actuel de la particule),

chacune de ces quatre grandeurs $\{\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \mathbf{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T\}$ pouvant *indépendamment* prendre une valeur arbitraire.

En définissant les « vecteurs généralisés » suivants¹ $\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{V}_3^{\otimes sd} \times \mathbb{V}_3$:

$$\mathbf{x} = \left\{ \rho \left(T \partial_T f_s - \partial_T f_e \right), -\rho^2 \left(T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e - \frac{\text{Tr} \boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2} \right), \mathbf{dev} \boldsymbol{\sigma}, -\frac{\mathbf{q}}{T} \right\}$$

$$\mathbf{y} = \left\{ \dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \mathbf{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T \right\}$$

le second principe de la thermodynamique (6.2) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \quad \text{où } \bullet \text{ est un « produit scalaire généralisé ».}$$

Le « vecteur » $\mathbf{x}$ est donc nécessairement au moins fonction du « vecteur » $\mathbf{y}$. On en déduit la *nécessité de l'existence* des quatre fonctions $f_1 \in \mathbb{R}$, $f_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f}_3 \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2sd}$ et $\mathbf{f}_4 \in \mathbb{V}_3$ suivantes :

$$x_1 = f_1(\mathbf{y}, \dots) \Rightarrow \rho (T \partial_T f_s - \partial_T f_e) = f_1(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \mathbf{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots) \quad (6.3)$$

$$x_2 = f_2(\mathbf{y}, \dots) \Rightarrow -\rho^2 \left(T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e - \frac{\text{Tr} \boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2} \right) = f_2(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \mathbf{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots) \quad (6.4)$$

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{f}_3(\mathbf{y}, \dots) \Rightarrow \mathbf{dev} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_3(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \mathbf{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots) \quad (6.5)$$

$$x_4 = \mathbf{f}_4(\mathbf{y}, \dots) \Rightarrow -\frac{\mathbf{q}}{T} = \mathbf{f}_4(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \mathbf{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots) \quad (6.6)$$

1. L'espace $\mathbb{V}_3^{\otimes sd}$ est l'espace vectoriel des tenseurs du second ordre symétriques et de trace nulle. Il est de dimension 5. On rappelle que le produit doublement contracté est un produit scalaire de cet espace.

où les arguments supplémentaires (...) peuvent être toutes variables autres que les « composantes » du vecteur $\mathbf{y}$ (par exemple des variables d'état T et/ou ρ).

L'inégalité du second principe de la thermodynamique (6.2) page 56 s'écrit donc :

$$f_1 \dot{T} + f_2 \text{Tr} \mathbf{D} + f_3 : \mathbf{dev} \mathbf{D} + f_4 \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0 \quad \forall \dot{T} \quad \forall \text{Tr} \mathbf{D} \quad \forall \mathbf{dev} \mathbf{D} \quad \forall \mathbf{grad}_E T \quad (6.7)$$

Il faut donc *choisir* les quatre fonctions f_1 , f_2 , f_3 et f_4 (lois de comportement) dont l'existence est nécessaire, telles que l'inégalité (6.7) soit respectée $\forall \dot{T}$, $\forall \text{Tr} \mathbf{D}$, $\forall \mathbf{dev} \mathbf{D}$ et $\forall \mathbf{grad}_E T$. Les quatre sous-sections qui suivent exposent les conséquences de l'existence des quatre fonctions évoquées en (6.3), (6.4), (6.5) et (6.6) page 56.

6.2.1 Relation de Helmholtz

Dans l'équation (6.3) page 56, le terme de gauche $\rho(T \partial_T f_s - \partial_T f_e)$ est une fonction d'état, c'est-à-dire fonction des seules variables d'état. On en déduit que la fonction f_1 est nécessairement aussi une fonction d'état. Elle n'est donc pas fonction de ses quatre premiers arguments. L'équation (6.3) page 56 ne peut être que de la forme :

$$\rho(T \partial_T f_s - \partial_T f_e) = f_1(T, \rho)$$

Dans l'inégalité (6.7), vraie $\forall \dot{T}$, la fonction d'état f_1 ne pouvant être fonction de $\dot{T}$, elle est nécessairement nulle. On en déduit que dans un fluide simple :

$$T \partial_T f_s - \partial_T f_e = 0 \quad (6.8)$$

Dans un fluide simple, le second principe de la thermodynamique implique que les fonctions d'état $f_e(T, \rho)$ et $f_s(T, \rho)$ sont liées par la relation différentielle (6.8) appelée *relation de Helmholtz*². Pour définir le comportement thermodynamique d'un fluide simple, il suffit donc de donner une seule fonction d'état, l'autre se déduit de la résolution de cette équation différentielle.

AUTRE EXPRESSION DE LA RELATION DE HELMHOLTZ : Si on utilise le couple de fonctions d'état (ψ^m, s^m) à la place du couple (e^m, s^m) où $\psi^m = e^m - T s^m$, il vient : $\partial_T f_e = \partial_T f_\psi + f_s + T \partial_T f_s$.

La relation de Helmholtz (6.8) s'écrit alors :

$$f_s = -\partial_T f_\psi \quad (6.9)$$

6.2.2 Loi de comportement mécanique

Les deux équations (6.4) et (6.5) prouvent la nécessité de l'existence de deux lois de comportement mécanique reliant le tenseur des contraintes aux autres grandeurs :

$$\frac{\text{Tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} = \underbrace{\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e)}_{-p} + f_2(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \mathbf{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots) \quad (6.10)$$

$$\mathbf{dev} \boldsymbol{\sigma} = f_3(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \mathbf{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots) \quad (6.11)$$

L'équation (6.10) définit la partie sphérique du tenseur des contraintes de Cauchy, et l'équation (6.11) définit sa partie déviatorique.

DÉFINITIONS : On appelle *pression thermodynamique d'un fluide simple* la fonction d'état définie par :

$$p(T, \rho) = -\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) = \rho^2 \partial_\rho f_\psi \quad (6.12)$$

2. Cette relation est parfois appelée « postulat » de Helmholtz. En fait il est inutile de la postuler : elle est une conséquence du second principe de la thermodynamique.

La grandeur scalaire $-\frac{\text{Tr}\boldsymbol{\sigma}}{3} = p - f_2$ est appelée *pression mécanique*.

La décomposition en partie sphérique et déviatorique étant unique, on peut rassembler les deux lois (6.10) et (6.11) en une seule loi tensorielle :

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{sph}\boldsymbol{\sigma} + \text{dev}\boldsymbol{\sigma} = (-p + f_2)\mathbf{G} + \mathbf{f}_3$$

6.2.3 Loi de comportement thermique

La dernière équation (6.6) page 56 affirme la nécessité d'une loi de comportement thermique, encore appelée loi de conduction thermique :

$$\mathbf{q} = -T \mathbf{f}_4(\dot{T}, \text{Tr}\mathbf{D}, \text{dev}\mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$$

REMARQUE : La nécessité de l'existence d'une loi de conduction thermique a déjà été déduite de la condition $\Phi_{th} \geq 0$ imposée par le second principe de la thermodynamique (voir section 5.7 page 51).

6.2.4 Second principe de la thermodynamique pour les fluides simples

Dans ces conditions, l'inégalité du second principe de la thermodynamique pour les fluides simples s'écrit :

$$\Phi = \underbrace{f_2 \text{Tr}\mathbf{D} + \mathbf{f}_3 : \text{dev}\mathbf{D}}_{\Phi_{int}} + \underbrace{\mathbf{f}_4 \cdot \text{grad}_E T}_{\Phi_{th} \geq 0} \geq 0 \quad \forall \mathbf{D} \forall \text{grad}_E T$$

Comme on peut le constater, le second principe ne dit rien sur les fonctions f_2 , $\mathbf{f}_3$ et $\mathbf{f}_4$ sauf d'affirmer la nécessité de leur existence. Il faut les *choisir* telles que l'inégalité ci-dessus soit respectée dans toute évolution.

6.3 Fluides simples newtoniens

Pour continuer la modélisation d'un fluide simple, il faut *choisir* les trois fonctions f_2 , $\mathbf{f}_3$ et $\mathbf{f}_4$ de telle manière que le second principe de la thermodynamique soit satisfait en toutes situations, c'est-à-dire $\forall \dot{T} \forall \mathbf{D} \forall \text{grad}_E T$. Pour définir les *fluides newtoniens*, on fait les choix suivants :

1. $f_2 = k(T, \rho) \text{Tr}\mathbf{D}$ avec $k(T, \rho) \geq 0$. Le coefficient $k(T, \rho) \geq 0$ est appelé *viscosité de volume*.
2. $\mathbf{f}_3 = 2\mu(T, \rho) \text{dev}\mathbf{D}$ avec $\mu(T, \rho) \geq 0$. Le coefficient $\mu(T, \rho) \geq 0$ est appelé *viscosité de cisaillement* ou encore *viscosité dynamique*.
3. $\mathbf{f}_4 = \frac{\alpha(T, \rho)}{T} \text{grad}_E T$ avec $\alpha(T, \rho) \geq 0$. Avec ce choix, on retrouve la loi de Fourier linéaire isotrope proposée en (5.11) page 51. Le coefficient $\alpha(T, \rho)$ est appelé *coefficient de conductibilité thermique*.

REMARQUE : Bien souvent, les fonctions k , μ et α sont choisies constantes, c'est-à-dire indépendantes de l'état actuel, ou bien seulement fonctions de la température.

Comme on peut le constater, ces choix simples ne sont pas nécessaires mais ils sont suffisants pour que l'inégalité du second principe de la thermodynamique soit respectée en toutes situations. En effet, avec ces choix, la dissipation est la somme de termes non négatifs séparément :

$$\Phi = \underbrace{k(T, \rho) (\text{Tr}\mathbf{D})^2 + 2\mu(T, \rho) \|\text{dev}\mathbf{D}\|^2}_{\Phi_{int}} + \underbrace{\alpha(T, \rho) T^{-1} \|\text{grad}_E T\|^2}_{\Phi_{th}} \geq 0$$

Les lois de comportement mécanique (6.10) page 57 d'un fluide newtonien sont donc :

$$\frac{\text{Tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} = \underbrace{\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e)}_{-p} + k \text{Tr} \mathbf{D} \quad \text{dev} \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \text{dev} \mathbf{D}$$

La pression mécanique $-\frac{\text{Tr} \boldsymbol{\sigma}}{3}$ et la pression thermodynamique p d'un fluide newtonien sont égales quand la viscosité de volume k est nulle (fluides de Stokes) ou pour des mouvements particuliers tels que le taux de dilatation volumique est nul³ ($d_v = \text{Tr} \mathbf{D} = 0$).

Ces deux lois de comportement se rassemblent en une seule équation tensorielle. On obtient la *loi de comportement mécanique* des fluides newtoniens :

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{sph} \boldsymbol{\sigma} + \text{dev} \boldsymbol{\sigma} = (-p + k \text{Tr} \mathbf{D}) \mathbf{G} + 2\mu \text{dev} \mathbf{D} = 2\mu \mathbf{D} + \left(-p + \left(k - \frac{2\mu}{3} \right) \text{Tr} \mathbf{D} \right) \mathbf{G}$$

où la pression thermodynamique $p = -\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e)$ est une fonction d'état caractéristique du fluide étudié.

La loi de comportement thermique choisie est celle de Fourier : $\mathbf{q} = -\alpha \text{grad}_E T$.

Les choix faits précédemment pour les fonctions f_2 , f_3 et f_4 sont parmi les plus simples que l'on puisse faire pour assurer le respect du second principe de la thermodynamique. On vérifie aisément avec les formules de changement d'observateur de $\mathbf{D}$ ⁴ et de $\boldsymbol{\sigma}$ (voir (3.41) page 31), que la loi de comportement mécanique des fluides newtoniens est bien universelle, c'est-à-dire qu'elle est la même pour tous les observateurs.

REMARQUE : On peut construire des lois de comportement non linéaires de fluides simples si les fonctions scalaires non négatives k , μ et α ont une liste d'arguments plus complète, notamment comprenant le tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$. Les fonctions scalaires k , μ et α doivent être des fonctions isotropes de leurs arguments tensoriels pour assurer l'universalité de la loi de comportement mécanique. Ces fluides sont dits rhéofluidifiants ou bien rhéoépaississants.

Pour compléter la modélisation du fluide simple, il faut préciser l'expression d'une des fonctions d'état introduites (p , f_e , f_s , $f_\psi = f_e - T f_s$ ou autre) en fonction des variables d'état. Les autres se trouvent déterminées par leur définition et par la relation de Helmholtz. Les sections qui suivent en donnent quelques exemples.

6.4 Un exemple de fluide simple : les gaz parfaits

Plutôt que de se donner une des fonctions d'état f_e , f_s ou f_ψ , on définit habituellement les gaz parfaits en se donnant la fonction d'état *pression thermodynamique* $p(T, \rho)$ appelée *loi de Mariotte*⁵ :

$$p = r \rho T$$

où r est une constante caractéristique du gaz parfait.

La définition de la fonction d'état p donnée en (6.12) page 57 et la relation de Helmholtz (6.8) page 57 conduisent à un système différentiel qui permet de déterminer les deux fonctions d'état f_e et f_s :

$$-\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) = r \rho T \quad T \partial_T f_s - \partial_T f_e = 0$$

La solution générale de ce système différentiel est :

$$f_s = -r \ln \rho + f_1(T) \quad f_e = \int_{T_0}^T T f_1'(T) dT + C$$

3. C'est notamment le cas en statique des fluides ou si le fluide est supposé parfaitement incompressible ($\dot{\rho} = 0$).

4. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, sections 5.10.2

5. Cette loi macroscopique peut aussi bien être considérée comme d'origine expérimentale ou comme suggérée par un modèle issu de la physique statistique.

6. EXEMPLE : LE MODÈLE « FLUIDE SIMPLE »

REMARQUE : Noter qu'on retrouve un résultat classique, parfois postulé : l'énergie interne massique d'un gaz parfait n'est fonction que de la température.

Les inconnues $f_1(T)$ et C peuvent être déterminées par des mesures expérimentales, par exemple la mesure de la capacité calorifique $C_v(T)$ à p constant ($\dot{p} = 0$), habituellement appelée à *volume constant*. Elle s'écrit (voir (5.14) page 52) :

$$C_v(T) = T \partial_T f_s + T \partial_p f_s \frac{\dot{p}}{\dot{T}} = T f_1'(T) \quad \Rightarrow \quad f_1(T) = \int_{T_0}^T \frac{C_v(T)}{T} dT + C'$$

Finalement, les deux fonctions d'état f_e et f_s d'un gaz parfait sont :

$$f_s = -r \ln p + \int_{T_0}^T \frac{C_v(T)}{T} dT + C' \quad f_e = \int_{T_0}^T C_v(T) dT + C$$

Elles sont définies à une constante près, ce qui est sans grande importance car seules leurs dérivées partielles interviennent dans les lois de comportement et dans la dissipation. On peut toujours choisir un état de référence (T_0, p_0) dans lequel elles sont déclarées nulles ou égales à une valeur de référence s_0^m et e_0^m .

L'une quelconque de ces fonctions d'état peut être prise comme définition des gaz parfaits, la relation de Helmholtz et la définition de la pression thermodynamique permettent de retrouver la loi de Mariotte.

REMARQUE : Pour les gaz, on peut définir une chaleur massique à pression thermodynamique constante, notée C_p . Pour un gaz parfait : $p = r \rho T \Rightarrow \dot{p} = r T \dot{\rho} + r \rho \dot{T}$. Dans une évolution à pression thermodynamique constante, on a donc $\dot{p} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} = -\frac{\rho}{T}$.

La capacité calorifique à pression constante est donc :

$$C_p = T \partial_T f_s + \partial_p f_s \frac{\dot{p}}{\dot{T}} = C_v + T \frac{r}{\rho} \frac{\rho}{T} = C_v + r$$

ce qui est connu sous le nom de *relation de Mayer*.

En conclusion, les gaz parfaits sont les fluides simples tels que la pression thermodynamique satisfait à la loi de Mariotte. Ils sont complètement caractérisés par une mesure de la constante r , une mesure d'une capacité calorifique ($C_p(T)$ ou $C_v(T)$) et la donnée des fonctions f_2 , f_3 et f_4 (pour les gaz parfaits newtoniens, ce sont la viscosité de volume k , la viscosité de cisaillement μ et la conductivité thermique α). On peut construire un modèle de gaz plus proche des gaz réels en suivant la même démarche, mais en remplaçant la loi de Mariotte par celle de Van der Waals.

6.5 Liquides idéaux

Les liquides idéaux sont des fluides simples parfaitement incompressibles ($\dot{p} = 0 \Rightarrow p = p_0$). La variable d'état p est donc une constante.

On peut construire un modèle de liquide idéal (newtonien ou non) en posant que la pression thermodynamique de ce fluide est indépendante des variables d'état T et p :

$$p(T, p) = p_0$$

Un tel liquide est incompressible ($\partial_p p = 0$) et indilatable ($\partial_T p = 0$, pas de variation de pression dans une évolution de température à volume constant).

La définition de la pression thermodynamique p donnée en (6.12) page 57 et la relation de Helmholtz (6.8) page 57 conduisent au système différentiel :

$$-\rho^2 (T \partial_p f_s - \partial_p f_e) = p_0 \quad T \partial_T f_s - \partial_T f_e = 0$$

dont la solution générale est :

$$f_s = \int_{T_0}^T \frac{g'(T)}{T} dT + C_1 \quad f_e = -\frac{p_0}{\rho} + g(T)$$

La fonction $g(T)$ peut se déterminer par une mesure de capacité calorifique (nécessairement à volume constant car $\dot{p} = 0$) :

$$C_v(T) = T \frac{df_s}{dT} = g'(T) \quad (\text{voir (5.14) page 52})$$

On obtient les deux fonctions d'état f_e et f_s du liquide idéal :

$$f_s = \int_{T_0}^T \frac{C_v(T)}{T} dT + C_1 \quad f_e = -\frac{p_0}{\rho} + \int_{T_0}^T C_v(T) dT + C_2$$

REMARQUE : La pression thermodynamique p_0 en une particule n'est pas fonction des variables d'état. Il n'en reste pas moins vrai que dans un milieu continu, elle peut varier dans l'espace et dans le temps : p_0 est un champ matériel.

6.6 Liquides simples compressibles et dilatables

6.6.1 Compressibilité et dilatabilité

On se propose de chercher un modèle de liquide simple (les variables d'état indépendantes sont T et p) compressible et dilatable avec un comportement choisi de la forme suivante :

$$d_v = -\chi_T(T, p) \dot{p} + \alpha_p(T, p) \dot{T} \quad (6.13)$$

où :

- d_v est le taux de dilatation volumique ;
- p est la pression thermodynamique ;
- χ_T est la compressibilité à température constante⁶ (unité : Pa^{-1}) ;
- α_p est la dilatabilité à pression constante (unité : K^{-1}).

On cherche donc ici à modéliser un liquide dont la variation relative de volume dépend de la variation de pression (compressibilité du liquide) et de la variation de température (dilatabilité du liquide).

REMARQUE : Dans l'écriture différentielle habituellement utilisée chez les thermodynamiciens, cette équation s'écrit :

$$\frac{dv}{v} = -\chi_T dp + \alpha_p dT \quad \text{où } v = \rho^{-1} \text{ est le volume massique.}$$

La conservation de la masse (2.4) page 10 et la définition de la pression thermodynamique (6.12) page 57 permettent d'écrire :

$$d_v = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} \quad \text{et} \quad p = -\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) = \rho^2 \partial_\rho f_\psi$$

où $\psi^m = e^m - T s^m$ est la fonction d'état énergie libre de Helmholtz.

6. Il faut en général des échanges thermiques pour maintenir la température constante pendant la compression ou la détente.

L'équation (6.13) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -\chi_T (\rho^2 \partial_\rho f_\psi) \cdot + \alpha_p \dot{T} \\ &= -\chi_T (2\rho \dot{\rho} \partial_\rho f_\psi + \rho^2 \partial_{\rho\rho} f_\psi \dot{\rho} + \rho^2 \partial_{\rho T} f_\psi \dot{T}) + \alpha_p \dot{T} \\ 0 &= \dot{\rho} \left(\frac{1}{\rho} - \chi_T (2\rho \partial_\rho f_\psi + \rho^2 \partial_{\rho\rho} f_\psi) \right) + \dot{T} \left(-\chi_T \rho^2 \partial_{\rho T} f_\psi + \alpha_p \right) \end{aligned}$$

Cette loi devant être vraie pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état, c'est-à-dire $\forall \dot{T}$ et $\forall \dot{\rho}$, et les termes entre parenthèses étant des fonctions d'état (c'est-à-dire seulement fonction de T et de ρ), on en déduit :

$$0 = \frac{1}{\rho} - \chi_T (2\rho \partial_\rho f_\psi + \rho^2 \partial_{\rho\rho} f_\psi) \quad \text{et} \quad 0 = -\chi_T \rho^2 \partial_{\rho T} f_\psi + \alpha_p$$

L'énergie libre massique de Helmholtz est donc solution des deux équations différentielles du second ordre :

$$2\partial_\rho f_\psi + \rho \partial_{\rho\rho} f_\psi = \frac{1}{\rho^2 \chi_T} \quad \partial_{\rho T} f_\psi = \frac{\alpha_p}{\rho^2 \chi_T} \quad (6.14)$$

où les deux fonctions $\chi_T(T, \rho)$ et $\alpha_p(T, \rho)$ peuvent être identifiées par des mesures expérimentales de compression à température constante et de dilatation volumique à pression constante.

En dérivant l'équation de gauche par rapport à T et tenant compte de l'équation de droite, on en déduit l'équation différentielle que doit satisfaire la fonction d'état f_ψ :

$$\frac{2\alpha_p}{\rho^2 \chi_T} + \rho \partial_{\rho\rho T} f_\psi = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial_T \chi_T}{\chi_T^2} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_{\rho\rho T} f_\psi = -\frac{1}{\rho^3 \chi_T} \left(\frac{\partial_T \chi_T}{\chi_T} + 2\alpha_p \right) \quad (6.15)$$

avec les conditions (6.14).

6.6.2 Exemple de modèle simple de liquide compressible et dilatable

HYPOTHÈSE : On construit ici un modèle simple en supposant que la compressibilité à température constante χ_T et la dilatation thermique à pression constante α_p sont des constantes : $\chi_T = \chi_0$ et $\alpha_p = \alpha_0$.

REMARQUE : Dans les liquides, la compressibilité à température constante χ_T est toujours non négative (le volume diminue toujours avec la pression). En revanche, la dilatation thermique à pression constante n'est pas toujours non négative. Par exemple, on sait que pour l'eau à la pression atmosphérique et à des températures entre 273 K et 277 K, le coefficient de dilatation à pression constante est négatif, nul à 277 K, puis positif pour des températures supérieures. On ne peut donc pas modéliser le comportement de l'eau avec l'approximation $\alpha_p = \alpha_0$, sauf peut-être loin de cette anomalie.

Compte tenu de cette hypothèse, la solution générale du système d'équations différentielles (6.14) page 62 est :

$$f_\psi = -\frac{1}{\rho \chi_0} (\ln \rho + \alpha_0 T + 1) - \frac{C}{\rho} + g(T) \quad (6.16)$$

La pression thermodynamique (voir la définition (6.12) page 57) est alors :

$$p = \frac{1}{\chi_0} (\ln \rho + \alpha_0 T) + C$$

Pour $\rho = \rho_0$ et $T = T_0$, on pose $p = p_0$. On a donc

$$C = p_0 - \frac{1}{\chi_0} (\ln \rho_0 + \alpha_0 T_0)$$

Finalement, la pression thermodynamique est :

$$p = \frac{1}{\chi_0} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_0} + \alpha_0 (T - T_0) \right) + p_0$$

L'énergie libre massique de Helmholtz est donc (voir (6.16) page 62) :

$$f_\psi = -\frac{1}{\rho \chi_0} \left(1 + \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \alpha_0 (T - T_0) \right) - \frac{p_0}{\rho} + g(T)$$

L'entropie massique est (relation de Helmholtz (6.9) page 57) :

$$f_s = -\partial_T f_\psi = \frac{\alpha_0}{\rho \chi_0} - g'(T)$$

L'énergie interne est :

$$f_e = f_\psi + T f_s = -\frac{1}{\rho \chi_0} \left(1 + \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \alpha_0 T_0 \right) - \frac{p_0}{\rho} + g(T) - T g'(T)$$

La fonction g peut être déterminée avec une mesure de la capacité calorifique $C_v(T)$ à volume constant ($\dot{\rho} = 0$) :

$$C_v(T) = T \partial_T f_s = -T g''(T) \Rightarrow g'(T) = -\int \frac{C_v}{T} dT + C_1 \Rightarrow g(T) = -\int \int \frac{C_v}{T} dT + C_1 T + C_2$$

REMARQUE : On constate que dans ce modèle simplifié ($\chi_T(T, \rho) = \chi_0$ et $\alpha_p(T, \rho) = \alpha_0$), la capacité calorifique à volume constant C_v ne peut être fonction que de la température. Si l'expérience le contredit, il faut remettre en question les hypothèses simplificatrices $\chi_T = \chi_0$ et $\alpha_p = \alpha_0$.

Si de plus C_v est supposé constant ($C_v = C_{v0}$), il vient :

$$g' = -C_{v0} \ln T + C_1 \quad g = -C_{v0}(T \ln T - T) + C_1 T + C_2$$

Finalement, avec les hypothèses $\chi_T = \chi_0$, $\alpha_p = \alpha_0$ et $C_v = C_{v0}$, et en posant $f_s(T_0, \rho_0) = s_0$ et $f_e(T_0, \rho_0) = e_0$ pour déterminer les constantes C_1 et C_2 , les fonctions d'état sont :

$$\begin{aligned} f_s &= \frac{\alpha_0}{\rho_0 \chi_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) + C_{v0} \ln \frac{T}{T_0} + s_0 \\ f_e &= -\frac{1}{\rho \chi_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \left(\frac{p_0}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0 \chi_0} - \frac{T_0 \alpha_0}{\rho_0 \chi_0} \right) + C_{v0} (T - T_0) + e_0 \\ p &= \frac{1}{\chi_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{\alpha_0}{\chi_0} (T - T_0) + p_0 \\ f_\psi &= -\frac{1}{\rho \chi_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \left(\frac{p_0}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0 \chi_0} + \frac{\alpha_0 (T - T_0)}{\rho_0 \chi_0} \right) + C_{v0} \left(T - T_0 - T \ln \frac{T}{T_0} \right) + e_0 - T s_0 \end{aligned}$$

REMARQUE : Dans une évolution à pression constante, l'équation (6.13) page 61 implique : $-\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \alpha_0 \dot{T} \Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{T} = -\rho \alpha_0$. La capacité calorifique à pression constante est donc (voir (5.14) page 52) :

$$C_p = T \partial_T f_s + T \partial_\rho f_s \frac{\dot{\rho}}{T} = C_v + T \partial_\rho f_s \frac{\dot{\rho}}{T} = C_v + \frac{\alpha_0^2}{\chi_0} \frac{T}{\rho}$$

C_p est expérimentalement plus facile à mesurer. Dans le cas du modèle simplifié, C_p est nécessairement de la forme :

$$C_p = C_{v0} + \frac{\alpha_0^2}{\chi_0} \frac{T}{\rho}$$

Si l'expérience le contredit, il faut remettre en question une ou plusieurs des hypothèses simplificatrices ($\chi_T = \chi_0$, $\alpha_p = \alpha_0$ et $C_v = C_{v0}$) et intégrer l'équation différentielle (6.15) page 62.

6.7 En bref ...

Les fluides simples sont les fluides dont les deux variables d'état indépendantes sont la température absolue T (imposée par le second principe de la thermodynamique) et la masse volumique ρ .

En choisissant⁷ l'expression d'une fonction d'état f_e (énergie interne massique) ou f_s (entropie massique) ou p (pression thermodynamique) ou autre, et en respectant la relation de Helmholtz (voir (6.8) page 57) et la définition de p (voir (6.12) page 57) qui déterminent par un système d'équations différentielles les autres fonctions d'état, on construit tous les modèles thermodynamiques de fluides simples auxquels on peut associer une loi de comportement mécanique (fluide newtonien par exemple) et thermique (loi de Fourier par exemple).

Les fluides *newtoniens* sont des fluides simples dont la loi de comportement mécanique est :

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + k \text{Tr} \mathbf{D}) \mathbf{G} + 2\mu \text{dev} \mathbf{D} = 2\mu \mathbf{D} + \left(-p + \left(k - \frac{2\mu}{3} \right) \text{Tr} \mathbf{D} \right) \mathbf{G}$$

où

- $p = -\rho^2(T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e)$ est une fonction d'état caractéristique du fluide simple appelée la pression thermodynamique ;
- $k(T, \rho)$ est la viscosité de volume, souvent considérée comme une constante ou seulement fonction de la température ou même parfois nulle (fluides de Stokes) ;
- $\mu(T, \rho)$ est la viscosité de cisaillement ou viscosité dynamique, souvent considérée comme une constante ou seulement fonction de la température ou même parfois nulle (fluides non visqueux) ;
- $\mathbf{D}$ est le tenseur des taux de déformation.

La loi de comportement thermique (loi de conduction thermique) choisie pour les fluides newtoniens est généralement la loi de Fourier.

7. Ces choix doivent être physiquement ou expérimentalement motivés.

Chapitre 7

Conclusion

Dans les chapitres de ce cours, on a exprimé les conséquences des quatre principes fondamentaux de la physique classique sur les milieux continus, sous forme globale pour des domaines matériels ou géométriques, ainsi que sous une forme locale.

Les formes locales du principe de la conservation de la masse, du principe fondamental de la mécanique et du principe de la conservation de l'énergie sont des équations différentielles aux dérivées partielles, qui doivent être satisfaites en tout point et à tout instant de l'évolution de tout milieu continu.

En revanche, l'inéquation du second principe de la thermodynamique est automatiquement satisfaite dès lors que l'on utilise un modèle de milieu continu thermodynamiquement admissible. Cette inéquation disparaît donc dans la résolution d'un problème de thermomécanique des milieux continus. Cette inéquation n'est utile que quand on cherche à construire des nouveaux modèles, pour qu'ils ne soient pas thermodynamiquement absurdes.

7.1 Le problème de mécanique des milieux continus

Les équations restantes (les trois premiers principes) sont évidemment insuffisantes pour déterminer l'évolution d'un domaine de milieu continu particulier (acier, eau, air, etc) sous l'action de sollicitations extérieures. Il faut les compléter par :

1. Un modèle de comportement du milieu continu non seulement thermodynamiquement admissible, mais qui reflète aussi correctement le comportement réel de la matière. Ceci suppose :
 - (a) le choix d'une liste de variables d'état objectives indépendantes (ou la liste des variables scalaires réduites) ;
 - (b) le choix de lois de comportement mécanique et thermique satisfaisant le second principe de la thermodynamique ;
 - (c) l'expression des deux fonctions d'état ¹ énergie interne massique (f_e ou $\bar{f}_e$) et entropie massique (f_s ou $\bar{f}_s$) ² en fonction de ces variables d'état (tensorielles ou réduites) reflétant correctement le comportement thermodynamique de la matière (capacités calorifiques, dilatation...).
2. Une description des sollicitations extérieures sur le domaine étudié : ce sont les *conditions aux limites* (mécaniques et/ou thermiques) et les *conditions initiales* (mécaniques et/ou thermiques), ainsi que

1. Ou de l'une des deux si la relation de Helmholtz est vraie.

2. En thermomécanique des solides déformables, on préfère souvent le couple de fonctions d'état (ψ^m, s^m) au couple de fonctions d'état (e^m, s^m). On passe de l'un à l'autre par la relation $\psi^m = e^m - T s^m$.

les actions à distance (mécaniques et/ou thermiques) qui apparaissent dans les équations locales de la mécanique et de l'énergie.

- Les conditions aux limites mécaniques sont souvent des positions (ou des déplacements) ou des vitesses imposées aux frontières ou encore des forces surfaciques de contact imposées aux frontières : $\boldsymbol{\sigma}(P',t) \cdot \mathbf{n}_t(P') = \mathbf{f}_0^s(P',t)$.
- Les conditions aux limites thermiques sont souvent des températures imposées aux frontières ou des puissances calorifiques surfaciques imposées aux frontières : $\mathbf{q}(P',t) \cdot \mathbf{n}_t = q_0^s(P',t)$.
- On peut aussi envisager des conditions aux limites plus compliquées comme des relations entre forces appliquées et positions ou encore entre température de bord et puissance calorifique surfacique transmise à travers la frontière.

Ces conditions aux limites doivent modéliser de façon aussi réaliste que possible les actions de l'extérieur sur la frontière du domaine étudié. Elles sont donc essentielles pour la qualité de la solution.

L'ensemble de ces équations étant posé, la description du problème est complète. Les champs matériels à déterminer sont : les champs des variables d'état, des fonctions d'état, des vitesses, des positions (ou des déplacements), des contraintes, des déformations, des taux de déformation, etc, pour toute particule et à tout instant. On peut aussi bien rechercher la description de Lagrange ou la description d'Euler de ces champs matériels, les équations différentielles ont été données dans les deux cas.

En mécanique des milieux continus (solides ou fluides), il arrive bien souvent que l'on ne recherche qu'une solution stationnaire (si elle existe). Dans ce cas, le temps disparaît des équations différentielles et le problème s'en trouve quelque peu simplifié.

7.2 La résolution

La résolution analytique d'un système d'équations aussi complexe est rarement possible sauf dans quelques problèmes académiques extrêmement simplistes (mais pédagogiquement intéressants). Les causes des difficultés de résolution sont :

- la complexité du système différentiel (équations couplées, le plus souvent non linéaires);
- la non unicité éventuelle des solutions, leur instabilité éventuelle, la présence éventuelle de bifurcations (en nombre fini voire infini);
- la complexité de la forme du domaine étudié;
- la complexité des conditions aux limites modélisant correctement les interactions mécaniques et thermiques avec l'extérieur du domaine.

Pour la plupart des problèmes industriels, le recours à une méthode de résolution numérique est indispensable pour la résolution du problème exposé en section 7.1. Ces méthodes numériques sont précieuses mais il ne faut jamais perdre de vue que :

1. Le résultat numérique est approché pour trois raisons :
 - (a) les calculs sont nécessairement approchés car la représentation des nombres dans les machines est nécessairement finie, donc tronquée, et les erreurs de troncature se propagent en croissant dans les calculs successifs;
 - (b) la méthode numérique est par elle-même approchée car l'espace des fonctions dans lequel on cherche une solution approchée est un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions définies sur le domaine étudié;
 - (c) la « convergence numérique » apparente de l'implémentation numérique d'un algorithme théorique n'est jamais une preuve de la convergence mathématique.
2. Pour étudier l'influence d'un paramètre, on ne peut que refaire le calcul pour différentes valeurs numériques du paramètre en supposant que cette influence est suffisamment régulière entre deux valeurs successives pour faire des interpolations.

3. Dans les problèmes non linéaires, dans lesquels on est rarement assuré de l'unicité de la solution ou de l'absence de bifurcations voire de solutions caotiques, un résultat numérique est toujours sujet à caution et doit toujours être considéré avec circonspection car on maîtrise rarement la (les) branche(s) suivie(s) par l'algorithme en cas de solutions multiples.

REMARQUE : Dans les problèmes stationnaires, on peut néanmoins obtenir analytiquement des résultats partiels intéressants en utilisant les trois premiers principes, non pas sous leur forme locale, mais sous une forme globale (sur un domaine matériel ou géométrique précis) avec quelques hypothèses simplificatrices sur les frontières. Par exemple, il est souvent possible d'évaluer des valeurs intégrées sur des parties de frontière (débits, forces résultantes, moments résultants, quantités de chaleur échangée), mais sans information sur le détail de leur répartition.

Annexe A

Démonstrations

A.1 Lemme fondamental pour les intégrales de volume

Soit $g(M)$ un champ scalaire défini dans $\mathcal{E}_3$ et soit un domaine $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$. Il faut montrer que :

$$\forall \mathcal{D} \quad \int_{\mathcal{D}} g(M) dv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \quad g(M) = 0$$

L'implication $g(M) = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} g(M) dv = 0$ est triviale. Il suffit donc de montrer l'implication inverse.

On représente les points $M \in \mathcal{D}$ par un vecteur $\mathbf{x}$. Pour définir des domaines $\mathcal{D}$ arbitraires, on considère un domaine fixe $\mathcal{D}_0$ arbitraire dont les points courants sont $\mathbf{x}_0$ et une application $\bar{\mathbf{f}}$ arbitraire mais différentiable telle que :

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$$

Avec une fonction $\bar{\mathbf{f}}$ arbitraire, on génère tous les domaines $\mathcal{D}$.

Par changement de variable, on ramène l'intégrale sur $\mathcal{D}$ à une intégrale sur $\mathcal{D}_0$:

$$\int_{\mathcal{D}} g(\mathbf{x}) dv = \int_{\mathcal{D}_0} g(\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)) \bar{K}_v(\mathbf{x}_0) dv_0$$

où $\bar{K}_v = \frac{dv}{dv_0} = \det \mathbf{grad} \bar{\mathbf{f}} > 0$ (analogie avec la cinématique, la fonction arbitraire $\bar{\mathbf{f}}$ étant comparable à la description de Lagrange $\mathbf{f}$ d'un mouvement réel). On a donc :

$$\forall \mathcal{D} \quad \int_{\mathcal{D}} g(M) dv = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \bar{K}_v(\mathbf{x}_0) > 0 \quad \int_{\mathcal{D}_0} g(\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)) \bar{K}_v(\mathbf{x}_0) dv_0 = 0$$

On démontre en analyse fonctionnelle que l'ensemble des fonctions définies sur $\mathcal{D}_0$ et de carré intégrable sur $\mathcal{D}_0$, noté $\mathbb{L}_{\mathcal{D}_0}^2$, est un espace vectoriel de Hilbert, de dimension infinie, sur lequel on peut définir un produit scalaire :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathcal{D}_0} f_1(\mathbf{x}_0) f_2(\mathbf{x}_0) dv_0$$

L'intégrale $\int_{\mathcal{D}_0} g(\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)) \bar{K}_v(\mathbf{x}_0) dv_0$ est donc le produit scalaire des deux fonctions $h = g \circ \bar{\mathbf{f}}$ et $\bar{K}_v$ appartenant à $\mathbb{L}_{\mathcal{D}_0}^2$:

$$\int_{\mathcal{D}_0} \underbrace{g(\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0))}_{h(\mathbf{x}_0)} \bar{K}_v(\mathbf{x}_0) dv_0 = \langle h, \bar{K}_v \rangle \quad \text{où } h = g \circ \bar{\mathbf{f}}$$

Si un vecteur h de $\mathbb{L}_{\mathcal{D}_0}^2$ est orthogonal à tout vecteur de cet espace, alors ce vecteur est nul. La fonction $\bar{f}$ étant arbitraire, la fonction $\bar{K}_v = \det \mathbf{grad} \bar{f}$ l'est aussi. On en déduit :

$$\forall \bar{K}_v > 0 \quad \langle h, \bar{K}_v \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = 0 \quad \Rightarrow \quad g \circ \bar{f} = 0 \quad \forall \bar{f} \quad \Rightarrow \quad g = 0$$

On généralise sans difficulté aux champs vectoriels ou tensoriels, il suffit d'appliquer le résultat précédent aux composantes du champ. On a donc :

$$\forall \mathcal{D} \quad \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A}(M) dv = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \quad \mathbf{A}(M) = \mathbf{0}$$

A.2 Existence du champ tensoriel des contraintes de Cauchy

Considérons un sous-domaine matériel dont la position actuelle est le tétraèdre $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}_t^m$, défini par les particules sommets P_0, P_1, P_2 et P_3 , et dont les faces planes $P_0P_2P_3, P_0P_3P_1$ et $P_0P_1P_2$ sont orthogonales. Les normales unitaires sont respectivement $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ et $\mathbf{n}_3$. On note $\mathbf{n}_0$ la normale unitaire à la face $P_1P_2P_3$.

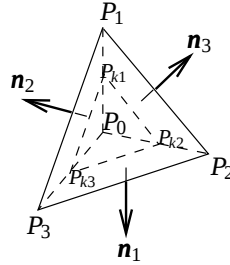


FIG. A.1 – Un sous-domaine matériel tétraédrique $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}_t^m$

On note S_i les aires des faces, la géométrie de ce tétraèdre permet d'écrire :

$$\frac{S_i}{S_0} = -\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_i \quad \forall i \in [1, 2, 3] \quad (\text{A.1})$$

Comme pour tout domaine matériel, les efforts extérieurs qui s'appliquent sur le sous-domaine matériel tétraédrique $\mathcal{T}$ sont :

1. un champ de forces massiques à distance $\mathbf{f}_T^m$ (gravitation, forces d'inertie, etc) agissant sur l'intérieur du tétraèdre,
2. un champ de contraintes sur chaque face de la frontière : $\mathbf{c}_i$ sur la face S_i .

En appliquant le théorème de la résultante dynamique (voir (3.1.2) page 16) au domaine matériel $\mathcal{T}$, il vient :

$$\int_{\mathcal{T}} (\boldsymbol{\gamma}_E - \mathbf{f}_{TE}^m) \rho_E dv = \sum_{i=0}^3 \int_{S_i} \mathbf{c}_{iE} ds$$

On définit les valeurs moyennes de chacune de ces intégrales :

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{1}{V_{\mathcal{T}}} \int_{\mathcal{T}} \rho_E (\boldsymbol{\gamma}_E - \mathbf{f}_{TE}^m) dv \quad \bar{\mathbf{c}}_i = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \mathbf{c}_{iE} ds \quad \forall i \in [0, 1, 2, 3]$$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au domaine matériel $\mathcal{T}$ s'écrit donc encore :

$$\bar{\mathbf{f}} V_{\mathcal{T}} = \bar{\mathbf{c}}_0 S_0 + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{c}}_i S_i$$

On définit maintenant d'autres sous-domaines matériels $\mathcal{T}_k$ par homothétie de centre P_0 et de rapport k appliquée au tétraèdre $\mathcal{T}$. Les tétraèdres $\mathcal{T}_k$ obtenus ont le même sommet P_0 , les autres étant P_{1k} , P_{2k} et P_{3k} (voir figure A.1 page 70). Dans cette homothétie, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3 . Les faces de $\mathcal{T}_k$ sont parallèles à celles de $\mathcal{T}$ et leurs normales unitaires $\mathbf{n}_i$ sont donc invariantes dans l'homothétie. Le théorème de la résultante dynamique appliqué aux sous-domaines $\mathcal{T}_k$ s'écrit comme précédemment :

$$\bar{\mathbf{f}}_k V_{\mathcal{T}_k} = \bar{\mathbf{c}}_{0k} S_{0k} + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{c}}_{ik} S_{ik}$$

où $\bar{\mathbf{f}}_k$ est la valeur moyenne des forces à distance moins les quantités d'accélération sur le domaine $\mathcal{T}_k$, et où $\bar{\mathbf{c}}_{ik}$ est la valeur moyenne des vecteurs contraintes sur les faces S_{ik} .

Compte tenu de l'homothétie, $V_{\mathcal{T}_k} = k^3 V_{\mathcal{T}}$ et $S_{ik} = k^2 S_i$. Il vient :

$$\bar{\mathbf{f}}_k k^3 V_{\mathcal{T}} = \bar{\mathbf{c}}_{0k} k^2 S_0 + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{c}}_{ik} k^2 S_i \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{f}}_k k V_{\mathcal{T}} = \bar{\mathbf{c}}_{0k} S_0 + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{c}}_{ik} S_i$$

En faisant tendre le rapport d'homothétie k vers 0, on obtient¹ :

$$\mathbf{0} = S_0 \lim_{k \rightarrow 0} \bar{\mathbf{c}}_{0k} + \sum_{i=1}^3 S_i \lim_{k \rightarrow 0} \bar{\mathbf{c}}_{ik}$$

Dans cette limite, les valeurs des contraintes moyennes sur chacune des faces tendent (par définition de la contrainte) respectivement vers les contraintes en P_0 pour les directions de ces faces dont les normales sont de direction constante :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \bar{\mathbf{c}}_{ik} = \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t) \quad \forall i \in [0, 1, 2, 3]$$

Le passage à la limite conduit donc à :

$$\mathbf{0} = S_0 \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_0, t) + \sum_{i=1}^3 S_i \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t)$$

La contrainte en la particule P_0 pour la facette de normale $\mathbf{n}_0$ est donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_0, t) &= - \sum_{i=1}^3 \frac{S_i}{S_0} \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t) (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_0) && \text{(voir (A.1) page 70)} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^3 (\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t) \otimes \mathbf{n}_i)}_{\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t)} \cdot \mathbf{n}_0 && \text{(algèbre tensorielle)} \end{aligned}$$

Pour toute direction $\mathbf{n}_0$, la contrainte actuelle $\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_0, t)$ est une fonction linéaire de $\mathbf{n}_0$, car le tenseur du second ordre $\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t)$ est indépendant de $\mathbf{n}_0$.

En revanche, le tenseur du second ordre $\boldsymbol{\sigma}$ est encore *a priori* une fonction des trois directions unitaires $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ et $\mathbf{n}_3$. Pour montrer qu'elle en est indépendante, on fait le même raisonnement avec un autre domaine tétraédrique $\mathcal{T}'$, de même sommet P_0 dont les normales unitaires aux faces sont $\mathbf{n}_0$ (identique au précédent), $\mathbf{n}'_1$, $\mathbf{n}'_2$ et $\mathbf{n}'_3$ (les trois autres directions orthogonales sont différentes). Par passage à la limite, on trouve une autre expression de la contrainte actuelle $\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_0, t)$:

$$\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_0, t) = \underbrace{\sum_{i=1}^3 \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}'_i, t) \otimes \mathbf{n}'_i}_{\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3, t)} \cdot \mathbf{n}_0$$

1. Il est remarquable de constater que dans le passage à la limite, les intégrales de volume (les forces à distance et les accélérations) disparaissent.

On a donc : $\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_0, t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t) \cdot \mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3, t) \cdot \mathbf{n}_0$.

Cette égalité étant vraie pour toute direction $\mathbf{n}_0$, les deux tenseurs sont égaux :

$$\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3, t)$$

Cette dernière égalité est vraie pour toute base $\{\mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3\}$. L'opérateur $\boldsymbol{\sigma}$ n'est donc pas fonction du choix des orientations des faces $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$, et on peut écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0, t)$$

Il existe donc bien en chaque particule P_0 d'un milieu continu un tenseur du second ordre $\boldsymbol{\sigma}(P_0, t)$ tel que la contrainte actuelle sur une facette matérielle de normale $\mathbf{n}_0$ est donnée par :

$$\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_0, t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0, t) \cdot \mathbf{n}_0$$

La démonstration précédente ne prouve que l'existence du champ matériel tensoriel du second ordre appelé *tenseur des contraintes de Cauchy* sans préciser sa distribution dans l'espace ni son évolution dans le temps.

REMARQUE : Contrairement à ce qui est parfois affirmé, pour prouver l'existence du champ de tenseurs des contraintes dans un milieu continu, il n'est pas nécessaire de négliger les forces de volume extérieures à distance agissant sur les tétraèdres (autogravitation dans un domaine contenant le tétraèdre et inerties d'accélération) : elles disparaissent dans le passage à la limite.

Si le champ d'autogravitation $\mathbf{f}_a^m$ est défini dans un domaine $\mathcal{D}$ et est ajouté au champ de gravitation d'origine extérieure $\mathbf{f}_e^m$, le champ de tenseur des contraintes, solution de l'équation de mouvement $\text{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_a^m + \rho \mathbf{f}_e^m = \rho \boldsymbol{\gamma}$, prend en compte l'autogravitation. Toutefois, la résolution de l'équation de mouvement se trouve fortement compliquée, car le champ d'autogravitation $\mathbf{f}_a^m$ dépend de la forme actuelle du domaine $\mathcal{D}$. C'est dans l'écriture de l'équation de mouvement que l'on peut faire l'approximation $\mathbf{f}_a^m \ll \mathbf{f}_e^m$.

A.3 Existence du champ vectoriel courant de chaleur

Cette démonstration d'existence est semblable à celle du champ de tenseur des contraintes de Cauchy.

On considère un domaine matériel $\mathcal{D}^m$ dont la position actuelle est $\mathcal{D}_t^m$. La puissance calorifique surfacique extérieure actuelle entrant par conduction à travers sa frontière est un scalaire noté $q_s(t)$ (W.m^{-2}).

Pour étudier les échanges de chaleur à l'intérieur du domaine, on procède comme pour la définition des efforts intérieurs à un milieu continu : on considère des sous-domaines $\mathcal{D}_1$ et leurs échanges thermiques avec leur extérieur $(\mathcal{D} - \mathcal{D}_1) \cup \text{ext}(\mathcal{D})$, dont une partie sont des échanges thermiques intérieurs à $\mathcal{D}_t^m$ (voir section 3.2.2 page 17).

HYPOTHÈSE : La puissance calorifique surfacique actuelle $q_s(t)$ traversant une facette matérielle ne dépend que de la particule et de la facette matérielle (repérée par sa normale actuelle).

REMARQUE : Cette hypothèse est semblable à l'hypothèse de Cauchy posée en section 3.2.2 page 18.

Il existe donc une fonction f_q telle que $q_s(t) = f_q(P_0, \mathbf{n}, t)$ où P_0 est une particule et $\mathbf{n}$ est la normale actuelle à une facette matérielle.

On applique ensuite le principe de la conservation de l'énergie (équation (4.5) page 41) au sous-domaine matériel tétraédrique de la démonstration de Cauchy (voir figure A.1 page 70):

$$\int_{\mathcal{T}} \dot{e}_E^m dm = \int_{\mathcal{T}} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E dv_t + \int_{\mathcal{T}} r_{\text{ext}E}^v dv_t - \sum_{i=0}^3 \int_{S_i} q_{sE} ds_t$$

On définit ensuite les valeurs moyennes des intégrales suivantes :

$$\bar{I}_v = \frac{1}{V_{\mathcal{T}}} \int_{\mathcal{T}} (\rho_E \dot{e}_E^m - \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E - r_{\text{ext}E}^v) dv_t \quad \bar{I}_i = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} q_{sE} ds_t$$

où $V_{\mathcal{T}}$ est le volume du tétraèdre $\mathcal{T}$ et S_i l'aire des faces S_i .

Le principe de la conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$V_{\mathcal{T}} \bar{I}_v + \sum_{i=0}^3 S_i \bar{I}_i = 0$$

Ce même principe de la conservation de l'énergie appliqué à des tétraèdres $\mathcal{T}_k$ homothétiques de $\mathcal{T}$ de centre P_0 et de rapport k s'écrit :

$$k^3 V_{\mathcal{T}} \bar{I}_{vk} + k^2 \sum_{i=0}^3 S_i \bar{I}_{ik} = 0 \quad \Rightarrow \quad k V_{\mathcal{T}} \bar{I}_{vk} + \sum_{i=0}^3 S_i \bar{I}_{ik} = 0$$

où $\bar{I}_{vk}$ et $\bar{I}_{ik}$ sont les valeurs moyennes des intégrales de volume et de surface sur le tétraèdre $\mathcal{T}_k$.

Lorsqu'on fait tendre k vers 0, les normales n_i sont de direction constante et il reste :

$$\begin{aligned} S_0 q_{s0} &= - \sum_{i=1}^3 S_i q_{si} \\ q_{s0} &= - \sum_{i=1}^3 \frac{S_i}{S_0} q_{si} = \sum_{i=1}^3 q_{si} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{q}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) \cdot \mathbf{n}_0 \end{aligned} \quad (\text{voir (A.1) page 70})$$

où $q_{si} = \lim_{k \rightarrow 0} \bar{I}_{ik} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{S_{ik}} \int_{S_k} q_{si}(t) ds_t$, ce qui est par définition la puissance calorifique surfacique traversant la facette matérielle en P_0 de normale actuelle $\mathbf{n}_i$.

Pour toute facette matérielle de normale actuelle $\mathbf{n}_0$, la puissance calorifique surfacique actuelle entrant par cette facette est une fonction linéaire de la direction $\mathbf{n}_0$:

$$q_{s0}(t) = \mathbf{q}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t) \cdot \mathbf{n}_0$$

On termine la démonstration de la même manière que dans la section précédente : on considère les autres tétraèdres, de même sommet P_0 , de même normale $\mathbf{n}_0$ mais dont les autres normales orthogonales sont différentes : $\mathbf{n}'_1$, $\mathbf{n}'_2$ et $\mathbf{n}'_3$. En refaisant le calcul précédent, on en déduit que :

$$q_{s0}(t) = \mathbf{q}(P_0, \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3, t) \cdot \mathbf{n}_0 \quad \forall \mathbf{n}'_1 \forall \mathbf{n}'_2 \forall \mathbf{n}'_3$$

On a donc :

$$q_{s0}(t) = \mathbf{q}(P_0, t) \cdot \mathbf{n}_0$$

En chaque particule P_0 d'un milieu continu, il existe un champ matériel vectoriel $\mathbf{q}(P_0, t)$, appelé courant de chaleur, tel que la puissance calorifique surfacique traversant par conduction une facette matérielle en la particule P_0 de normale actuelle $\mathbf{n}_0$ est donnée par $q_s(P_0, t) = \mathbf{q}(P_0, t) \cdot \mathbf{n}_0$.

Cette démonstration ne prouve que l'existence du champ matériel vectoriel courant de chaleur sans préciser sa distribution dans l'espace ni son évolution dans le temps.

Table des matières

1	Concepts fondamentaux	1
1.1	Les domaines de milieux continus	1
1.1.1	Domaine matériel	1
1.1.2	Domaine géométrique	2
1.1.3	Comparaison entre les deux types de domaines	2
1.2	Grandeurs physiques extensives	3
1.2.1	Application à un domaine matériel	3
1.2.2	Application à un domaine géométrique	3
1.3	Rappel : dérivées temporelles d'intégrales à bord variables	4
1.4	Dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine matériel	4
1.5	Dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine géométrique	6
1.6	Rappel : lemme fondamental	7
1.7	Convention de notation	7
1.8	En bref...	7
2	Conservation de la masse	9
2.1	Concept de masse	9
2.2	Principe de la conservation de la masse	9
2.3	Forme locale du principe de la conservation de la masse	10
2.4	Bilan de masse pour un domaine géométrique	11
2.5	Densités massiques	11
2.6	En bref...	13
3	Principe fondamental de la dynamique	15
3.1	Rappel de mécanique générale	15
3.1.1	Observateurs galiléens	15
3.1.2	Rappel des théorèmes généraux	16
3.2	Application aux domaines matériels	16
3.2.1	Efforts extérieurs sur un domaine matériel	16
3.2.2	Efforts intérieurs dans un milieu continu	17
3.2.3	Existence du tenseur des contraintes	18
3.2.4	Définitions et notations	19
3.2.5	Conditions aux limites en contrainte sur les frontières	20
3.3	Théorèmes généraux de la dynamique pour un domaine matériel	20
3.3.1	Théorème de la résultante dynamique sur un domaine matériel	21
3.3.2	Théorème du moment dynamique sur un domaine matériel	22
3.3.3	Théorème de la puissance cinétique sur un domaine matériel	23
3.4	Forme locale des théorèmes généraux	24
3.4.1	Équation de mouvement	24
3.4.2	Symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy	24
3.4.3	Puissance volumique des efforts intérieurs	25
3.5	Théorèmes généraux pour les domaines géométriques	26

3.5.1	Bilan de quantité de mouvement sur un domaine géométrique	27
3.5.2	Bilan de moment cinétique sur un domaine géométrique	28
3.5.3	Bilan d'énergie cinétique sur un domaine géométrique	29
3.6	Formulation intégrale des équations de mouvement	29
3.7	Changements d'observateur	31
3.8	En bref...	32
4	Conservation de l'énergie	33
4.1	Concepts de base en thermodynamique	33
4.1.1	Variables d'état	33
4.1.2	Fonction d'état	35
4.1.3	Espace des états	37
4.1.4	Évolution thermodynamique	37
4.2	Principe de la conservation de l'énergie	38
4.2.1	Énoncé classique pour une évolution finie entre deux instants	38
4.2.2	Énoncé global instantané	39
4.2.3	Conservation de l'énergie pour un domaine matériel de milieu continu	39
4.3	Forme locale de la conservation de l'énergie	41
4.4	Conservation de l'énergie pour un domaine géométrique	42
4.5	Changements d'observateur	43
4.6	En bref...	43
5	Second principe de la thermodynamique	45
5.1	Introduction	45
5.2	Énoncé classique	46
5.3	Énoncé du second principe pour un domaine matériel	47
5.4	Forme locale du second principe	48
5.5	Second principe pour un domaine géométrique	50
5.6	Changements d'observateur	51
5.7	Nécessité de l'existence d'une loi de comportement thermique	51
5.8	Capacités calorifiques locales dans une évolution	52
5.9	En bref...	52
6	Exemple : le modèle « fluide simple »	55
6.1	Définition d'un fluide simple	55
6.2	Conséquences du second principe de la thermodynamique	56
6.2.1	Relation de Helmholtz	57
6.2.2	Loi de comportement mécanique	57
6.2.3	Loi de comportement thermique	58
6.2.4	Second principe de la thermodynamique pour les fluides simples	58
6.3	Fluides simples newtoniens	58
6.4	Un exemple de fluide simple : les gaz parfaits	59
6.5	Liquides idéaux	60
6.6	Liquides simples compressibles et dilatables	61
6.6.1	Compressibilité et dilatabilité	61
6.6.2	Exemple de modèle simple de liquide compressible et dilatable	62
6.7	En bref	64
7	Conclusion	65
7.1	Le problème de mécanique des milieux continus	65
7.2	La résolution	66
A	Démonstrations	69
A.1	Lemme fondamental pour les intégrales de volume	69

A.2	Existence du champ tensoriel des contraintes de Cauchy	70
A.3	Existence du champ vectoriel courant de chaleur	72