

ELEMENTS DE CIRCUITS ELECTRIQUES

Patricia ROUSSEaux

Dépt. d'Electricité, Electronique et Informatique

PROGRAMME

1. Rappels : définitions, hypothèses, lois
2. Calculs de circuits résistifs simples (courant continu)
3. Calculs de circuits en courant alternatif (régime sinusoïdal établi)
 - notations complexes
 - puissances
 - le transformateur
4. Systèmes triphasés

PARTIE 1 :

DEFINITIONS ET HYPOTHESES DE BASE

LOIS DE KIRCHHOFF

CIRCUITS RESISTIFS SIMPLES

3.1 UN CIRCUIT ELECTRIQUE C'EST

Un ensemble de composants électriques interconnectés et dotés de points accessibles à l'observation (bornes), à la mesure.

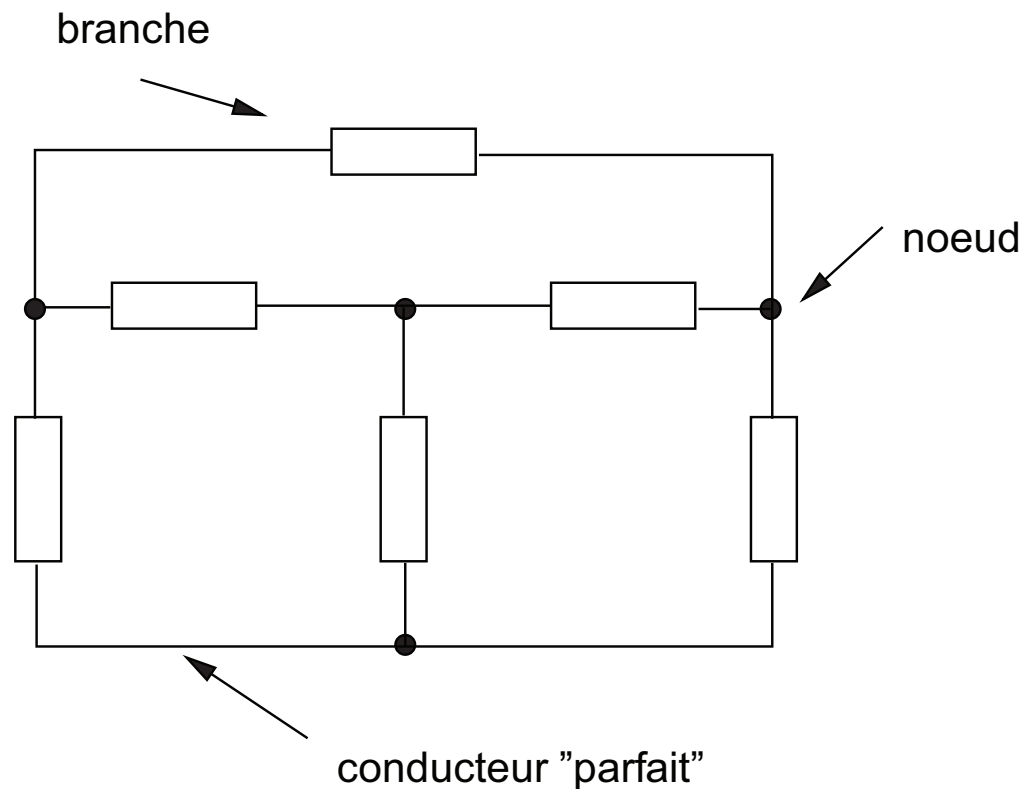
Grande variété du point de vue

- domaine d'application : omniprésents dans la vie courante et toutes les techniques
- taille : circuits intégrés (qq mm²) vs grands réseaux de transport de l'énergie électrique (qq 100taines km)
- tensions utilisées : qq μ V jusqu'à 100taines de kV
- fréquence des signaux : qq Hz à 10aines de GHz
- puissance : qq mW à plusieurs 10aines de milliers de MW

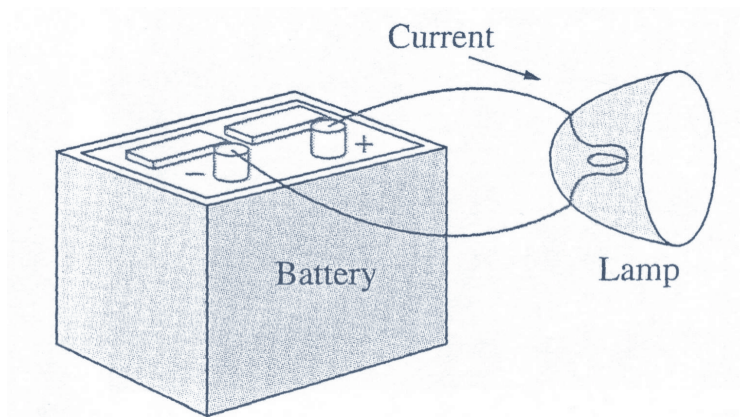
3.2 POUR LA **THEORIE DES CIRCUITS**, UN CIRCUIT ELECTRIQUE C'EST

Un ensemble d'éléments *idéaux* interconnectés

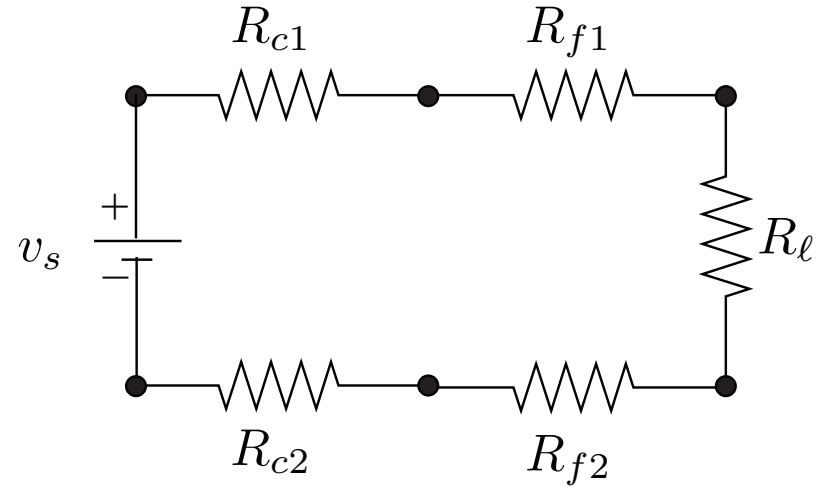
Analyse des propriétés et du comportement *électrique* des circuits; calcul des courants et des différences de potentiel aux bornes des éléments.



Système électrique



Modèle de circuit électrique



3 grandes catégories :

- éléments qui fournissent de l'énergie électrique : sources, générateurs
- éléments qui consomment de l'énergie électrique : charges
- éléments “lien” générateur - charges
- éléments de “coupure” : interrupteurs, disjoncteurs

3.3 VARIABLES FONDAMENTALES : TENSION ET COURANT

Les phénomènes électriques sont liés :

- à l'existence de charges électriques de deux types : + et -
- à la force d'attraction/repulsion qui existe entre des charges de signe différent/de même signe

Et plus précisément :

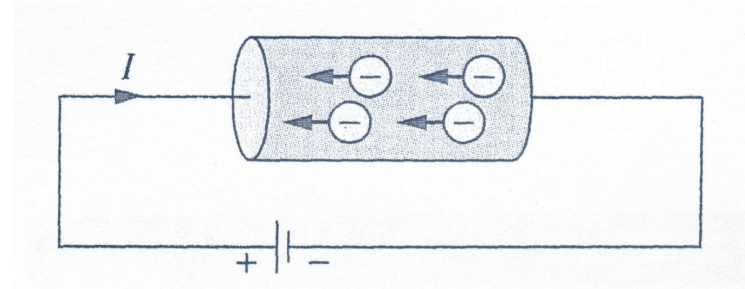
- aux charges électriques en mouvement : *courant*
- à l'existence de charges maintenues séparées : *tension*

1. Courant

Courant électrique : flux des charges le long des lignes de force du champ électrique

Intensité du courant : débit

$$i = \frac{dq}{dt}$$



Unité : Ampère (A)

Intensité de 1 A : une charge de 1 C traverse par seconde la section droite d'un conducteur.

Par convention : courant positif $\leftrightarrow$ mouvement de charges positives

Même si le plus souvent, ce sont des charges négatives (électrons) qui se déplacent.

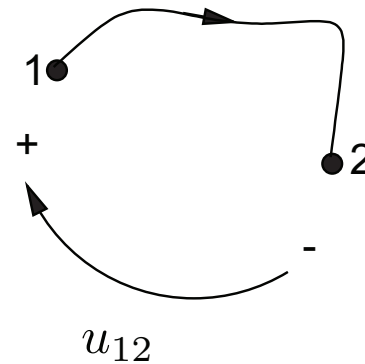
2. Tension ou différence de potentiel

Force (champ) électrique $\leftrightarrow$ énergie potentielle w

Potentiel électrique v = énergie potentielle par unité de charge

Travail produit par le passage de charges à travers un élément $\Rightarrow$ *différence de potentiel* ou *tension* entre les bornes de l'élément.

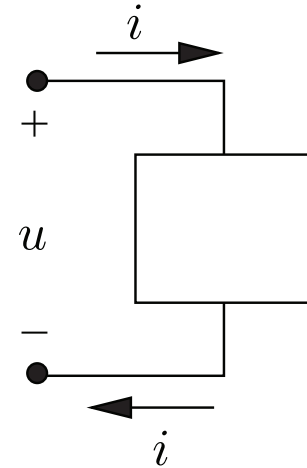
$$u_{12} = \frac{dw}{dq} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$



Unité : Volt (V)

3. Dipôle et sens conventionnels

Dipôle = élément idéal à deux bornes caractérisé par la paire de variables tension/courant (u, i) .



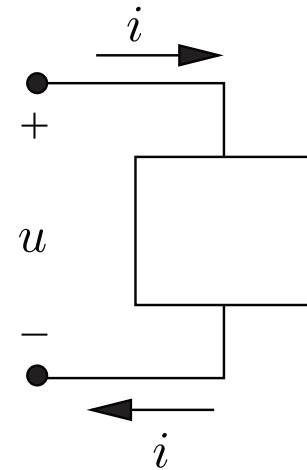
Dans un circuit, un dipôle occupe une *branche*. On désigne par *noeud* un point du circuit auquel aboutissent plusieurs branches

- $u(t) = v_+(t) - v_-(t)$: tension de branche ou d.d.p. entre les deux bornes
- $i(t)$: courant parcourant l'élément, le courant entrant par une borne est égal au courant sortant par l'autre (pas d'accumulation de charges dans l'élément)
- dipôle caractérisé entièrement par la relation entre les variables u et i :
exemple $u = Ri$ pour une résistance

Sens conventionnel de référence :

Sens associé :

- à la d.d.p. u : indiqué par les signes + et -
 $u > 0$ si le potentiel de la borne + est supérieur à celui de la borne -
- au courant i : indiqué par le sens de la flèche
 $i > 0$ si des charges positives entrent par la borne + et sortent par la borne -



Choix arbitraire, non imposé par des considérations physiques

4. Puissance et énergie

d.d.p. = travail effectué par la force électrostatique lorsqu'une charge de +1 C se déplace du potentiel le plus haut au potentiel le bas.

u = énergie par unité de charge = $\frac{dw}{dq}$; i = flux de charge par unité de temps = $\frac{dq}{dt}$

Puissance :

$$p(t) = u(t)i(t)$$

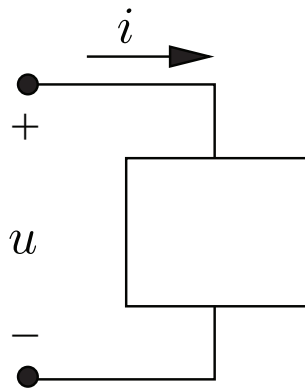
Energie :

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau$$

est l'énergie absorbée par le dipôle à l'instant t .

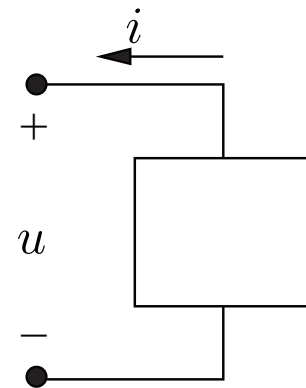
Importance du choix des sens de u et i

Sens conventionnels



puissance **délivrée** au dipôle

Sens non conventionnels



puissance **fournie** par le dipôle

3.4 HYPOTHESE DES CIRCUITS LOCALISES

Dimension d du circuit $\ll \lambda$, la longueur d'onde.

Longueur d'onde ? $\rightarrow$ *propagation*

Solution des eqs. de Maxwell en régime non stationnaire : eqs. d'onde

Pour une signal de fréquence f , solution de la forme

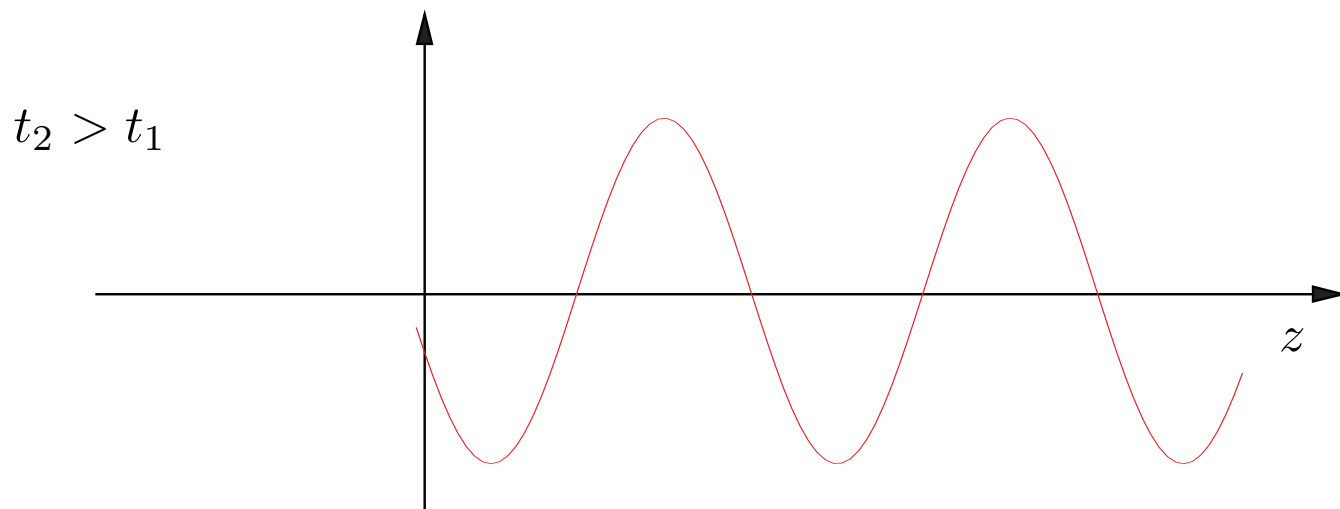
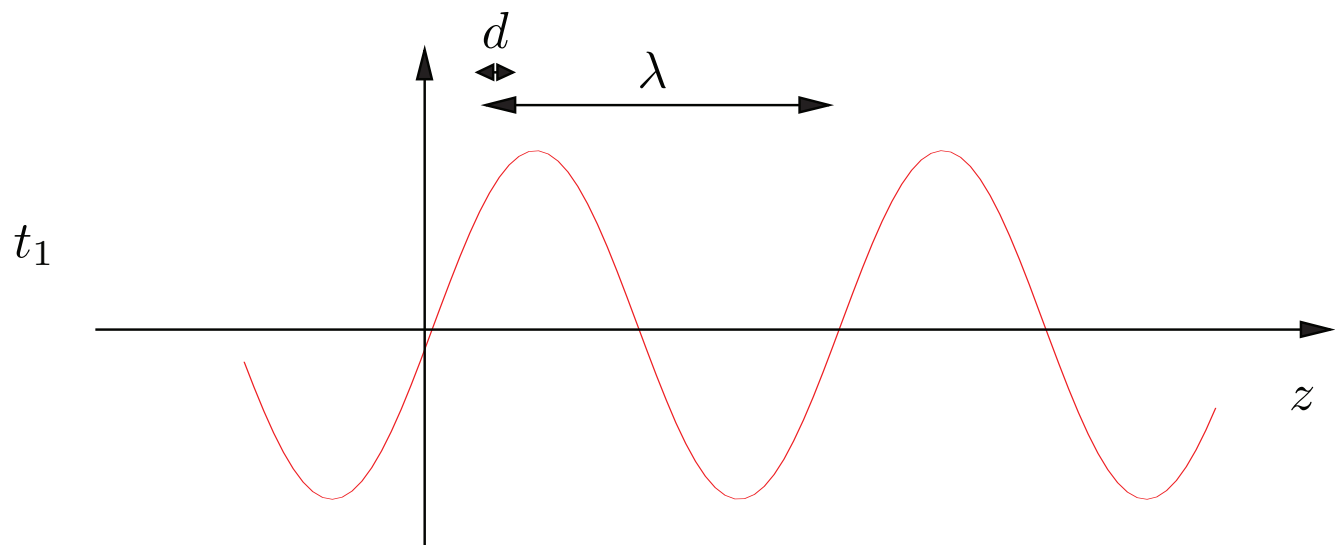
$$i(t, z) = I \sin\left(2\pi f\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)$$

Onde qui se propage le long des z . Longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

avec c la vitesse de propagation de l'onde.

Dans le vide $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, vitesse de la lumière.



Circuits distribués vs. circuits localisés

Soit un circuit de dimension d soumis à un signal de fréquence f (longueur d'onde λ) : Si $d \ll \lambda$: *circuit localisé*

1. Source de tension “secteur” : $f = 50$ Hz , $\lambda = 6000$ km
 - circuits “domestiques” et réseaux de distribution de l'énergie électrique : circuits localisés
 - grands réseaux de transport de l'énergie électrique : peuvent s'étendre sur des centaines de km, dans certaines situations ne peuvent plus être considérés comme localisés
2. signal électroacoustique : fréquence la plus élevée ~ 25 kHz, $\lambda = 12$ km
appareillage HiFi : circuit localisé
3. signal électrique présent dans un ordinateur : $f = 500$ MHz, $\lambda = 0.6$ m
pour certains circuits, l'hypothèse de quasi-stationnarité peut ne pas être vérifiée pour d'autres oui
4. signal radio : $f = 1$ GHz, $\lambda = 3$ cm
antenne, guide d'onde, ligne de transmission : circuits distribués

3.5 LOIS DE KIRCHHOFF

Les deux lois fondamentales de la théorie des circuits:

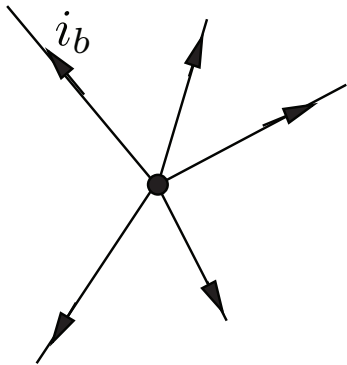
- sont indépendantes de la nature des éléments constituant le circuit;
- expriment les contraintes imposées par la manière dont les éléments sont interconnectés;

⇒ sont fixées par la topologie du circuit.

Deux hypothèses :

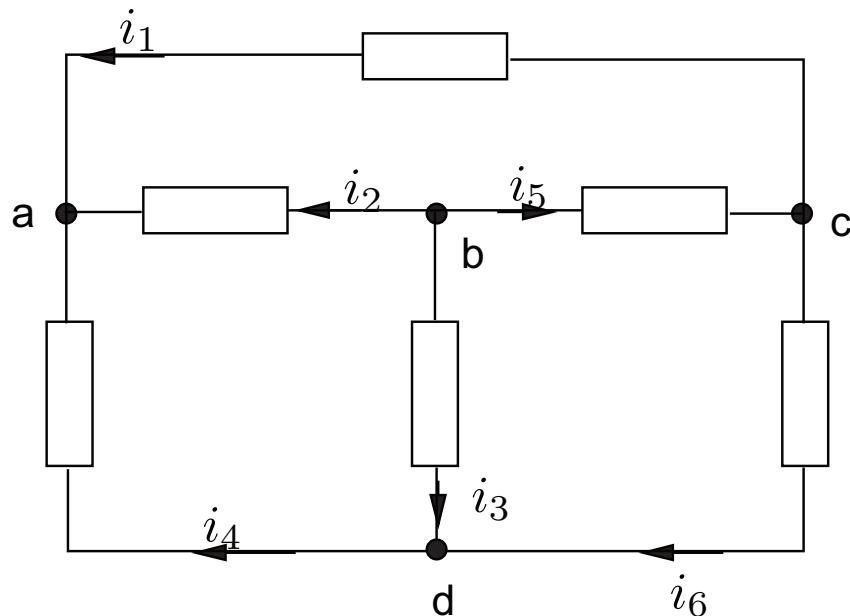
- pas d'accumulation de charges aux noeuds ni dans les éléments d'un circuit
- égalité entre tension et différence de potentiel

1. Première loi de Kirchhoff (PLK) ou loi des courants



$$\sum_{b \in \mathcal{N}} i_b(t) = 0$$

Pour tout circuit localisé, la somme algébrique des courants de toutes les branches partant d'un noeud est nulle à tout instant.



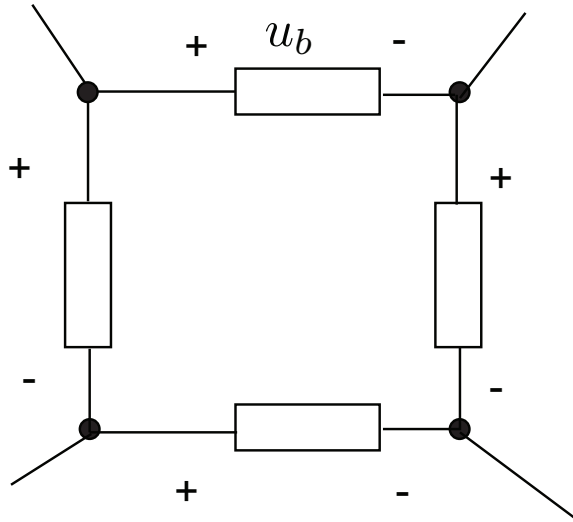
noeud a : $-i_1 - i_2 - i_4 = 0$ (1)

noeud b : $i_2 + i_3 + i_5 = 0$ (2)

noeud c : $i_1 - i_5 + i_6 = 0$ (3)

noeud d : $i_4 - i_3 - i_6 = 0$ (4)

2. Seconde loi de Kirchhoff (SLK) ou loi des tensions



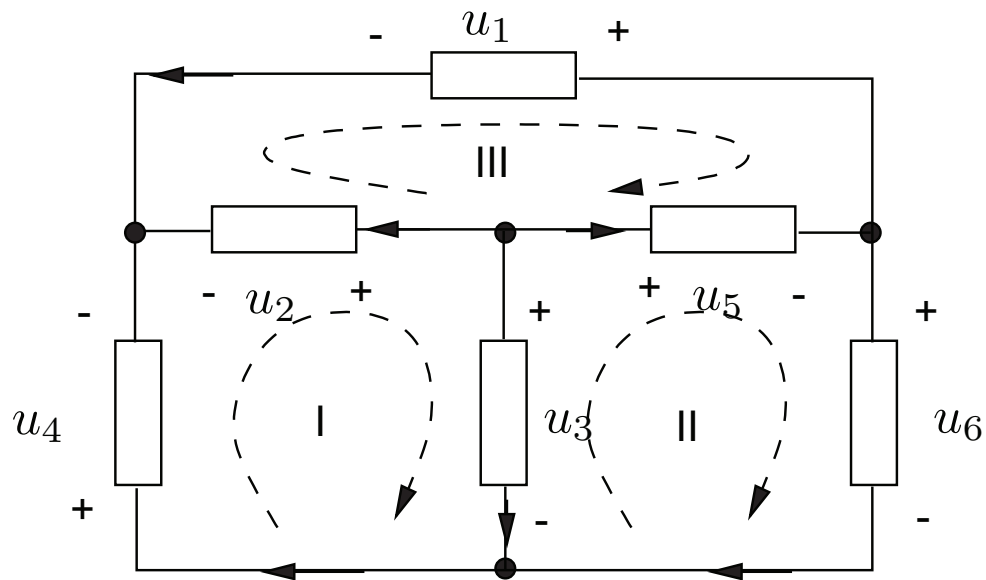
$$\sum_{b \in \mathcal{M}} u_b(t) = 0$$

Pour tout circuit localisé, la somme algébrique des tensions aux bornes de toutes les branches constituant une maille est nulle à tout instant.

Une maille est un chemin fermé constitué des branches rencontrées lorsque, partant d'un noeud, on y revient.

$$u_{12} = \frac{dw}{dq} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = v_1 - v_2$$

indépendant du chemin choisi de 1 à 2.



maille I : $-u_4 + u_2 - u_3 = 0$

maille II : $u_3 - u_5 - u_6 = 0$

maille III : $-u_2 + u_1 + u_5 = 0$

3.6 SOURCES DE COURANT ET DE TENSION

Source électrique = composant capable de réaliser une conversion d'énergie :
énergie de nature non électrique $\rightarrow$ énergie électrique

Impose soit un courant soit une tension déterminée

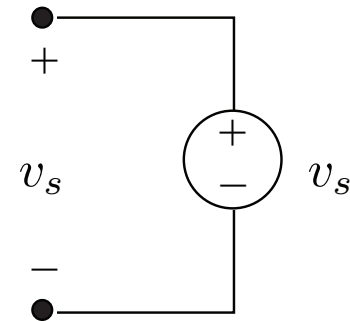
- batterie : énergie chimique $\rightarrow$ énergie électrique
- dynamo : énergie mécanique $\rightarrow$ énergie électrique
- centrale électrique :
 - énergie thermique $\rightarrow$ énergie mécanique $\rightarrow$ énergie électrique
 - énergie nucléaire $\rightarrow$ énergie mécanique $\rightarrow$ énergie électrique
 - énergie éolienne $\rightarrow$ énergie mécanique $\rightarrow$ énergie électrique
 - ...

Représentation en théorie des circuit par un *modèle*.

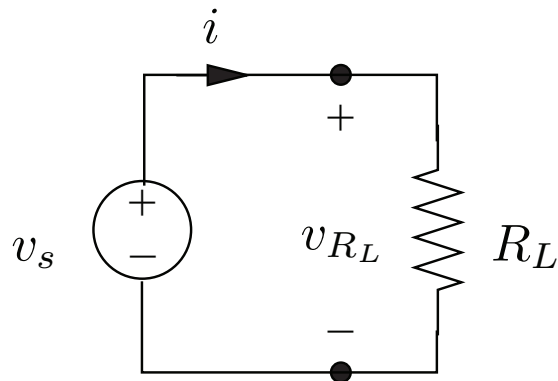
A la base de ces modèles, les *sources idéales de tension et de courant*

1. Source idéale de tension

Dipôle qui a la propriété de présenter à ses bornes une d.d.p $v_s(t)$ indépendante du courant qui le parcourt.



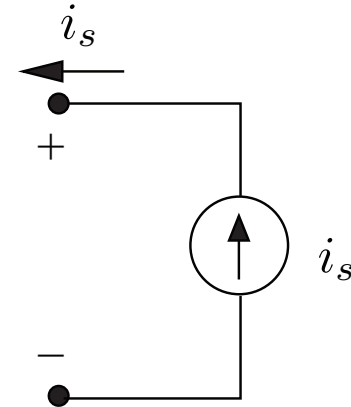
La d.d.p aux bornes de cet élément est indépendante de la charge qui y est connectée.



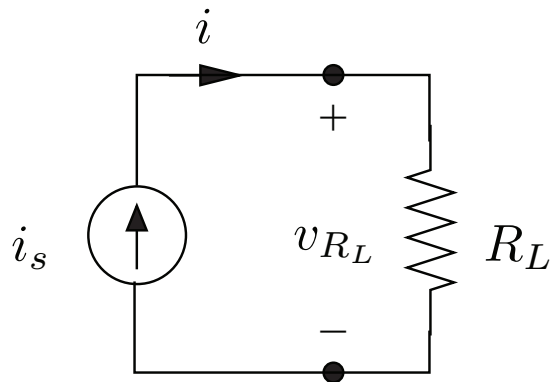
$$\begin{aligned} v_{R_L} &= v_s \quad \forall R_L \quad (\neq 0, \text{c.c.}) \\ i &= \frac{v_s}{R_L} = G_L v_s \end{aligned}$$

2. Source idéale de courant

Dipôle qui a la propriété de débiter un courant dont l'intensité $i_s(t)$ est indépendante de la d.d.p à ses bornes.

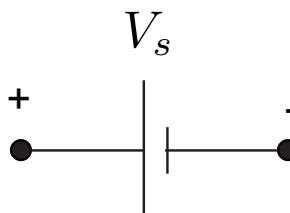
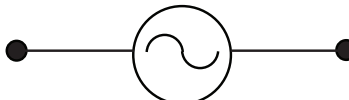


Le courant débité par cet élément est indépendant de la charge qui y est connectée.



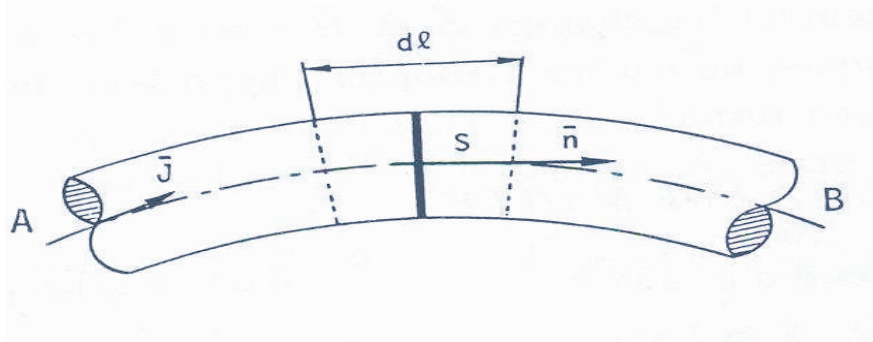
$$\begin{aligned} i &= i_s \quad \forall R_L \quad (\neq \infty, \text{c.o.}) \\ v_{R_L} &= R_L i_s \end{aligned}$$

Exemples :

- batterie (pile) : $v_s(t) = V_s \quad \forall t$ 
- générateur sinusoïdal : $v_s(t) = V_s \sin(\omega t)$ 
- source quelconque : $v_s(t) = f(t)$

3.7 LOI D'OHM ET RESISTANCE

Résistance d'un conducteur en régime stationnaire



Pour un conducteur de section constante S et de longueur ℓ parcouru par un courant continu I :

$$U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = RI$$

$$R = \frac{\ell}{\sigma S} = \text{résistance de l'élément.}$$

Par extension, la loi d'Ohm est utilisée en régime quasi-stationnaire.

On appelle *conductance* l'inverse de la résistance.

$$i = \frac{1}{R}u = Gu \quad [G] = S$$

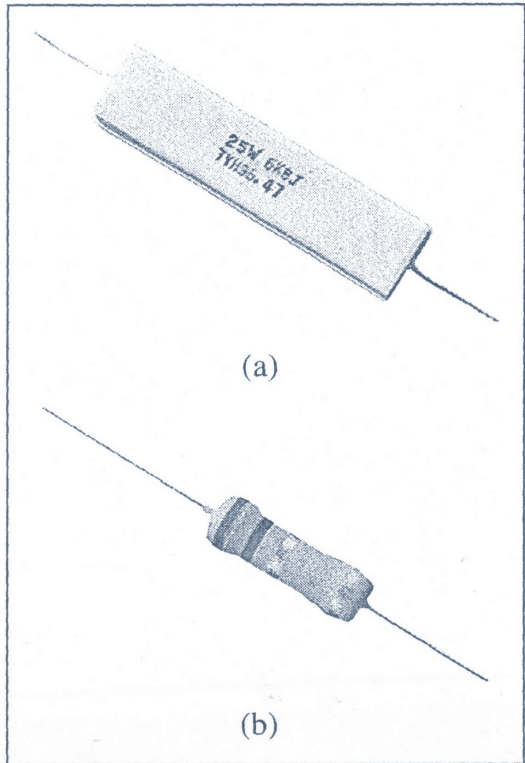


Figure 2.3

Fixed resistors: (a) wirewound type,
(b) carbon film type.
Courtesy of Tech America.

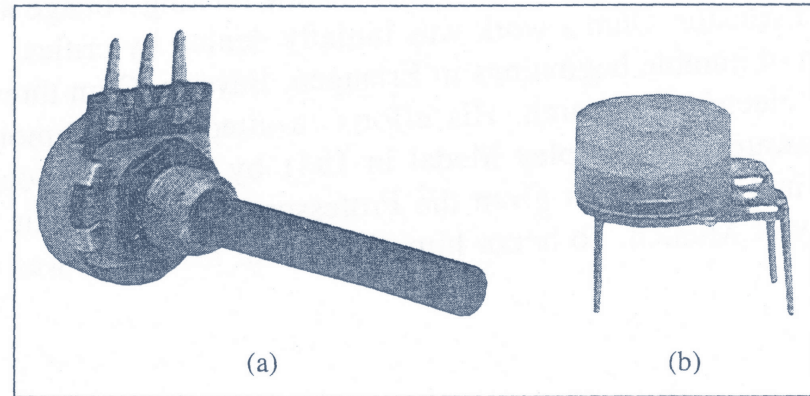
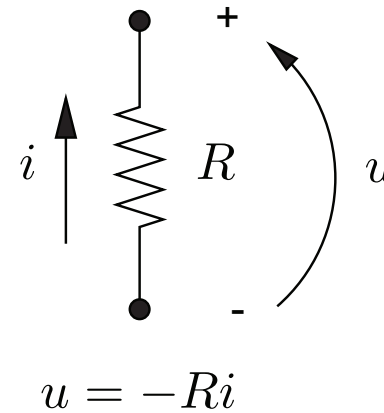
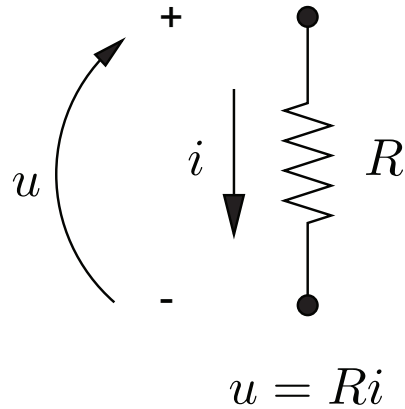


Figure 2.5

Variable resistors: (a) composition type, (b) slider pot.
Courtesy of Tech America.

Puissance absorbée par une résistance

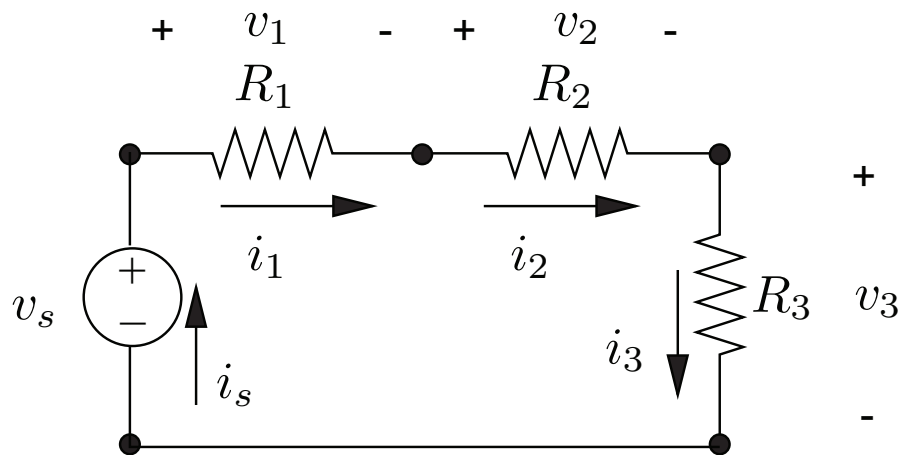


Puissance absorbée :

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) \\ &= Ri(t)i(t) = Ri^2(t) \\ &= Gu(t)u(t) = Gu^2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= -u(t)i(t) \\ &= Ri(t)i(t) = Ri^2(t) \\ &= Gu(t)u(t) = Gu^2(t) \end{aligned}$$

Association de résistances en série



Association en série : tous les éléments sont traversés par un même courant.

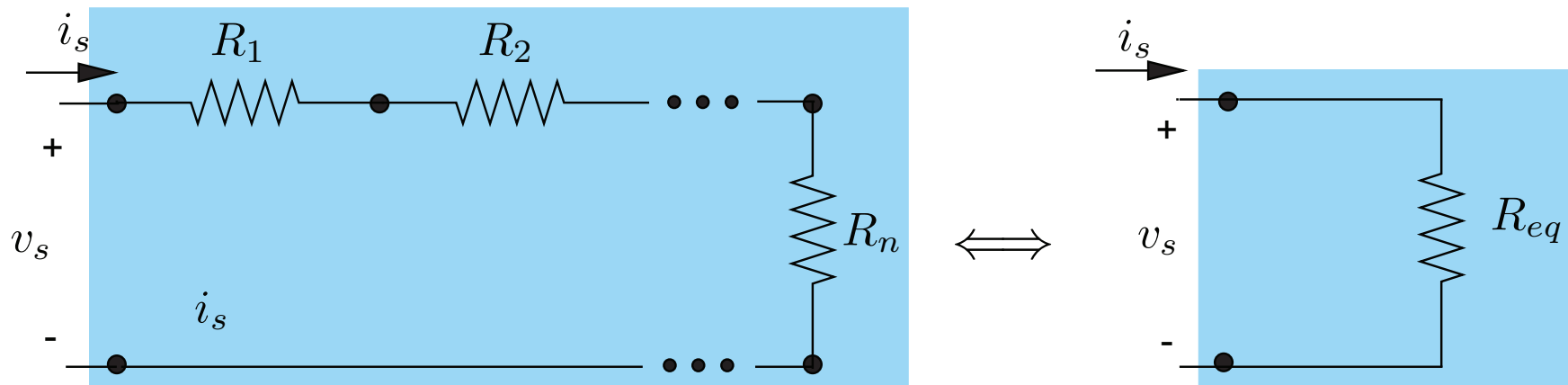
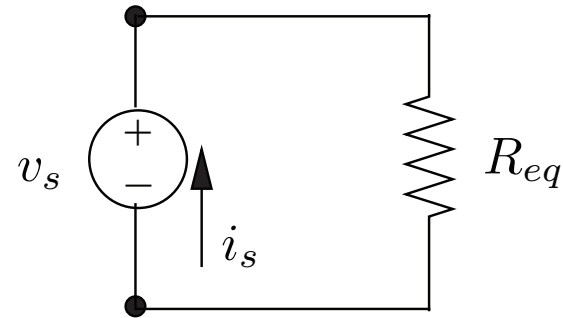
$$i_1 = i_2 = i_3 = i_s$$

$$\begin{aligned} v_s &= v_1 + v_2 + v_3 \\ &= R_1 i_s + R_2 i_s + R_3 i_s \quad \Rightarrow \quad i_s = \frac{v_s}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned}$$

Dipôle équivalent à l'association des 3 résistances : une résistance de valeur R_{eq}

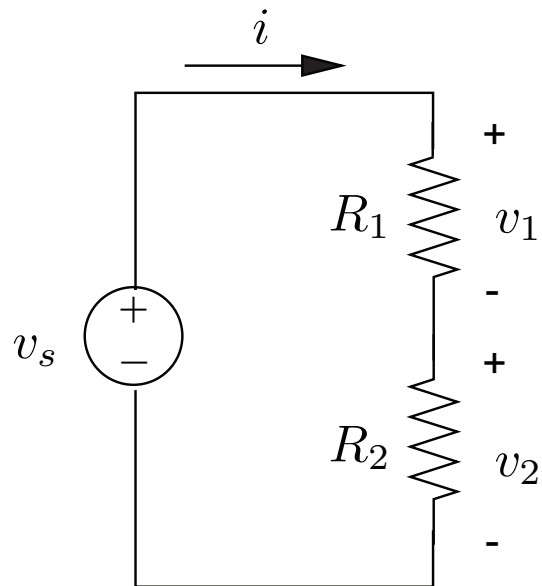
$$i_s = \frac{v_s}{R_{eq}}$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$



$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

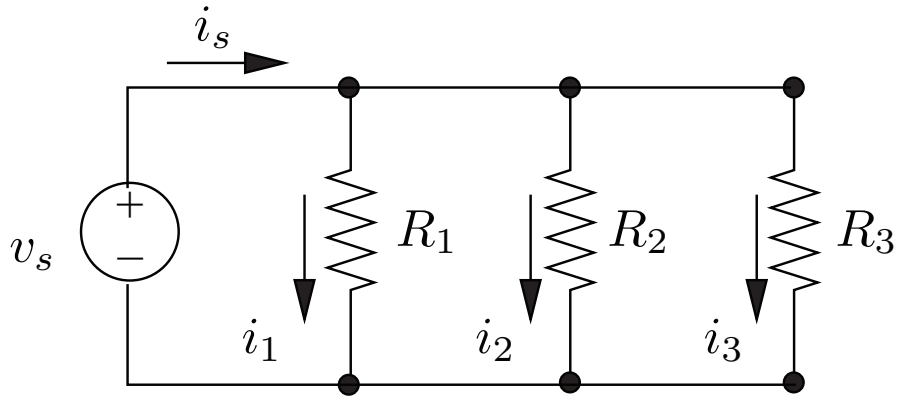
Division de la tension



$$i = \frac{v_s}{\sum R_\ell}$$

$$v_k = R_k i = v_s \frac{R_k}{\sum R_\ell} < v_s$$

Association de résistances en parallèle



Association en parallèle : une même d.d.p. aux bornes de tous les éléments.

$$v_s = R_1 i_1 = R_2 i_2 = R_3 i_3$$

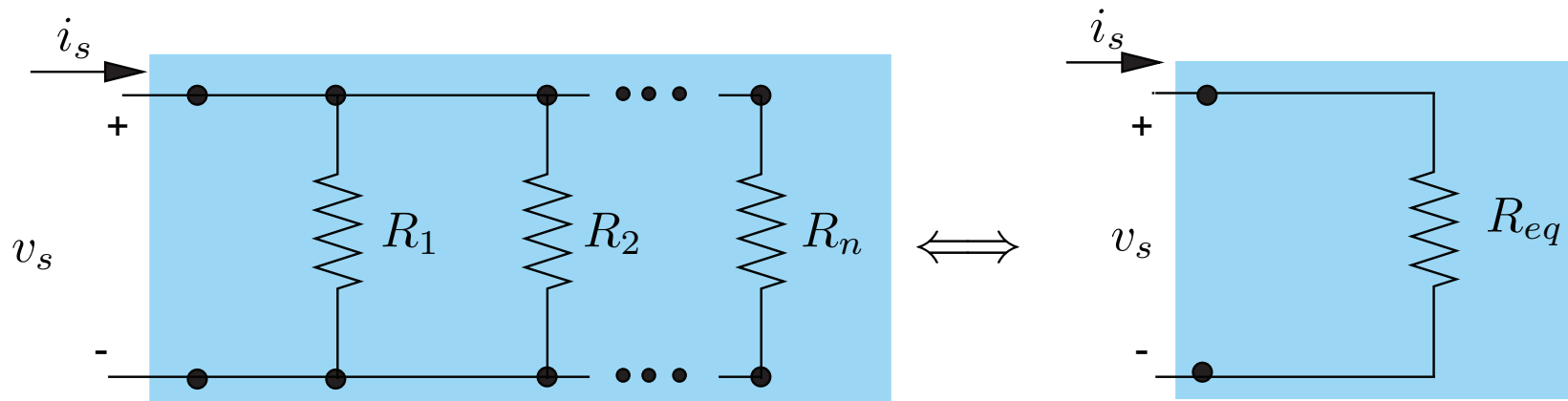
$$i_s = i_1 + i_2 + i_3 = v_s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

On peut représenter ce dipôle par une résistance équivalente qui vérifie :

$$\frac{i_s}{v_s} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

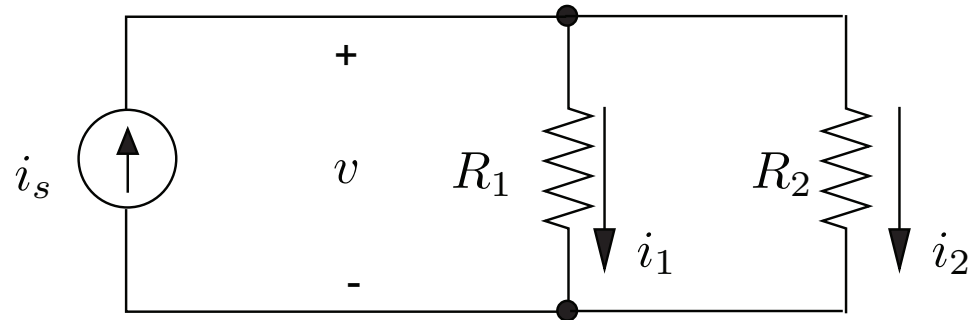
ou en termes de conductances :

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3$$



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Division du courant



$$v = \frac{i_s}{\sum G_\ell}$$

$$i_k = G_k v = i_s \frac{G_k}{\sum G_\ell}$$

3.8 EXEMPLES DE RESOLUTION DE CIRCUITS RESISTIFS SIMPLES

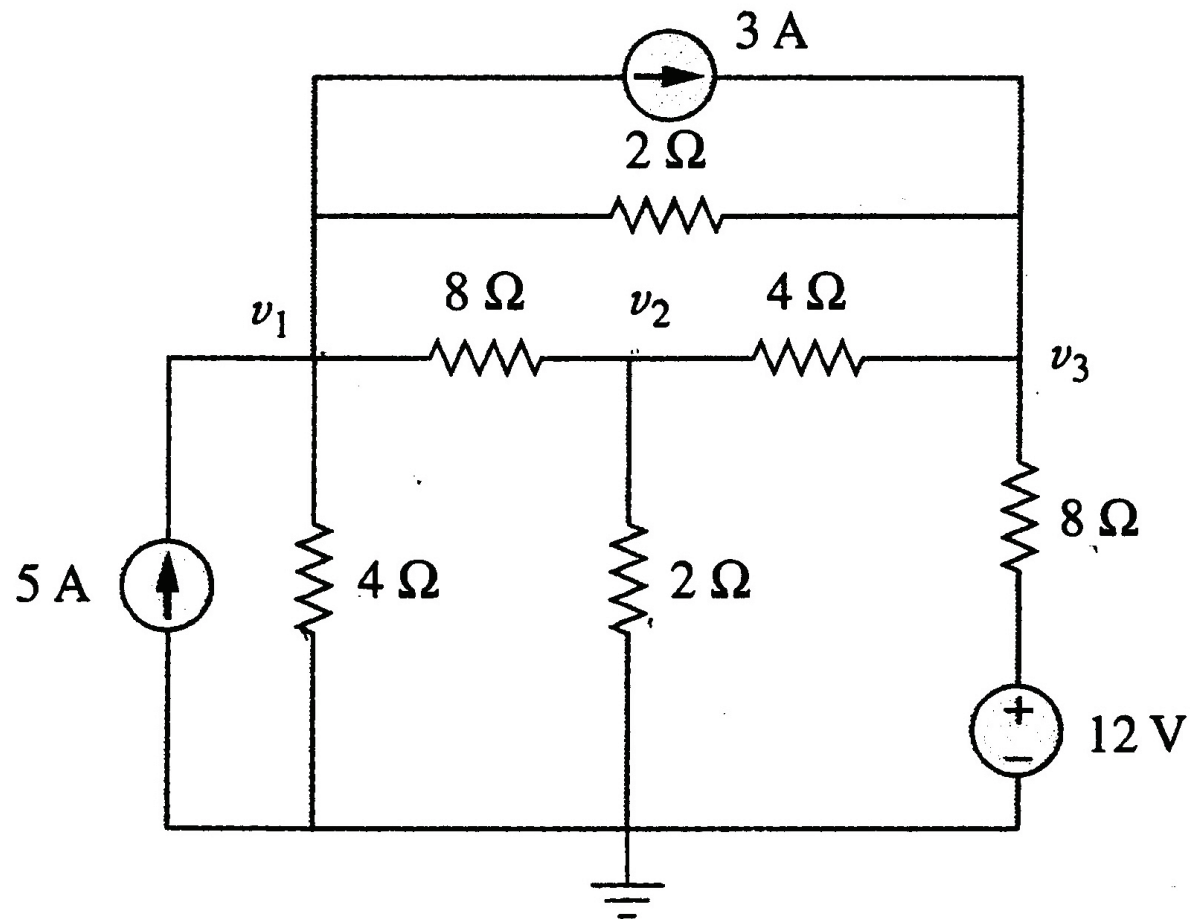
But : calculer tension et courant dans les b branches d'un circuit à n noeuds

Méthode:

- $n - 1$ PLK entre les b courants
- $b - (n - 1)$ SLK entre les b tensions = $2b$ équations à $2b$ inconnues
- b lois d'Ohm

Exercice

Calculer les tensions et courants dans toutes les branches du circuit ci-dessous.



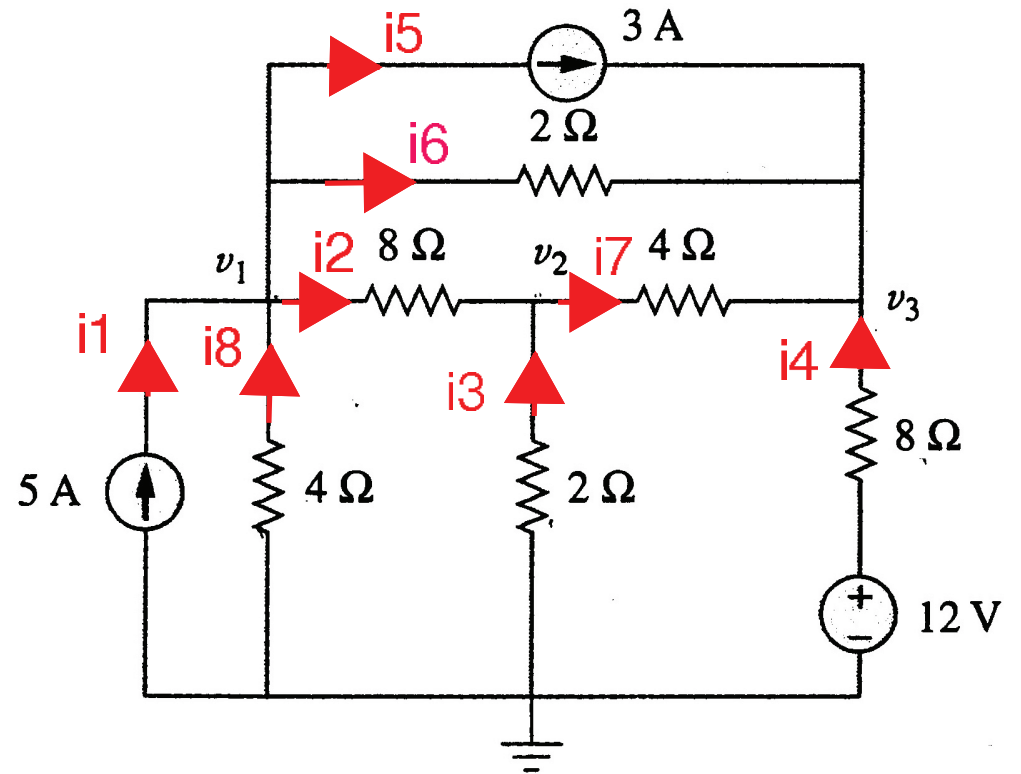
$$n = 3 \quad b = 8$$

$$i_1 = 5$$

$$i_5 = 3$$

$$u_6 = u_5$$

$$u_8 = u_1$$



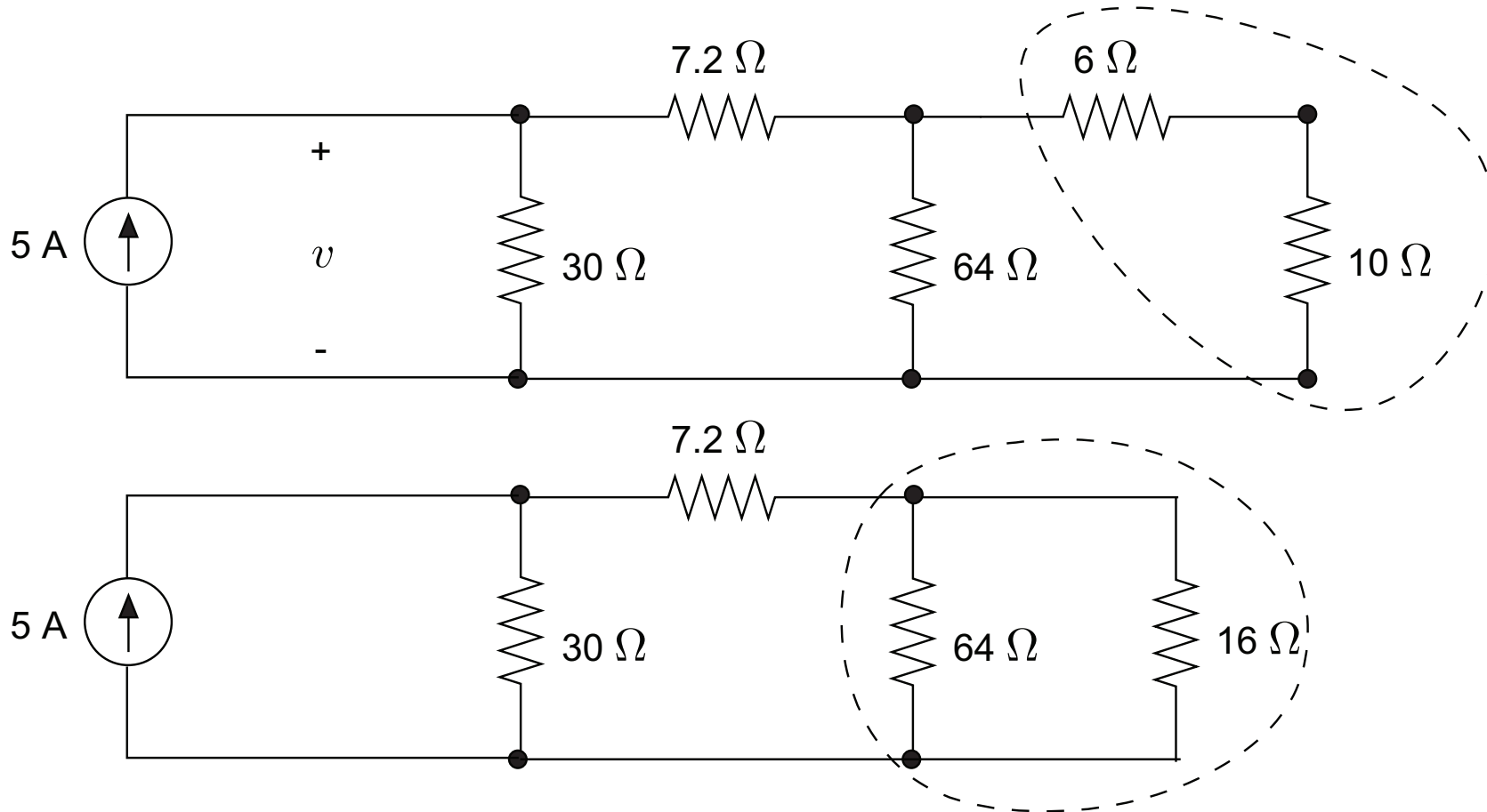
(Sol : $i_2 = 0.63 \text{ A}$, $i_3 = -2.47 \text{ A}$, $i_4 = -0.03 \text{ A}$, $i_6 = -1.13 \text{ A}$, $i_7 = -1.83 \text{ A}$, $i_8 = -2.5 \text{ A}$)

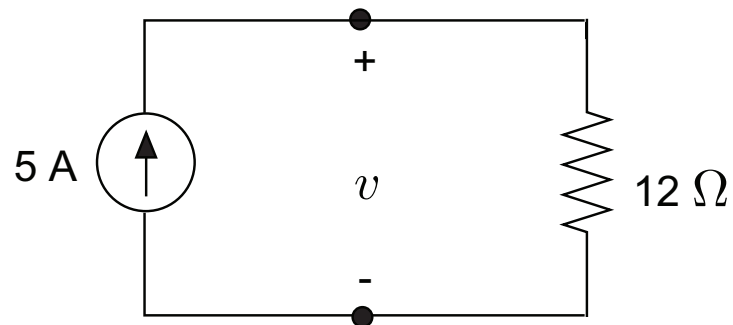
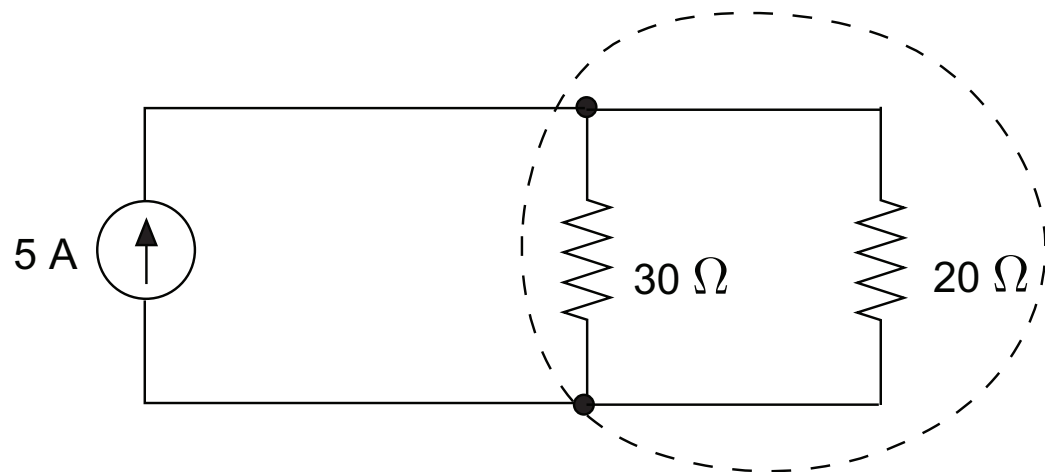
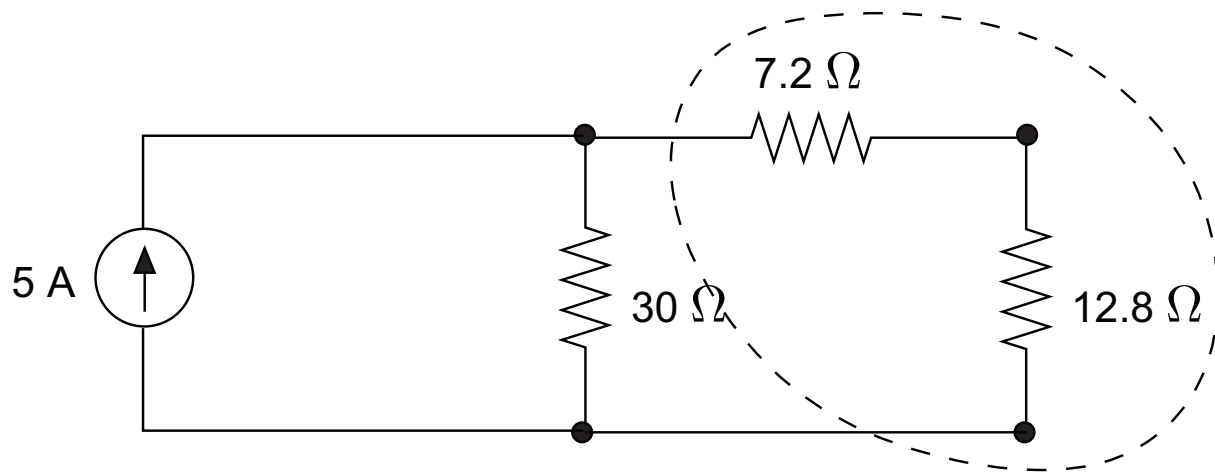
Souvent plus simple de recourir au maximum à des techniques de simplification de circuits :

- réductions successives de résistances en série et en parallèle
- théorème de Thévenin
- équivalence de sources
- transformation étoile-triangle

1. Résistance d'entrée du circuit

Détermination d'une résistance équivalente par réductions successives d'éléments en série et en parallèle

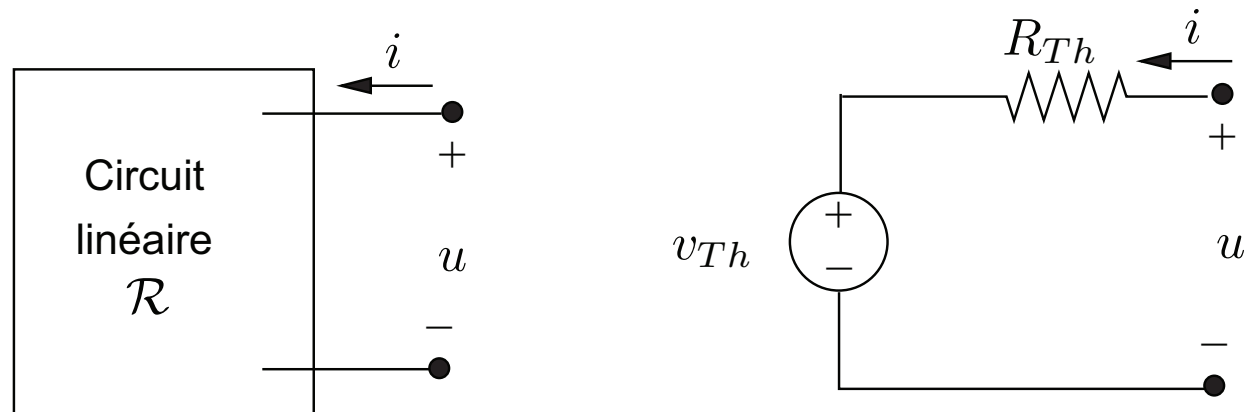




2. Dipôle équivalent de Thévenin

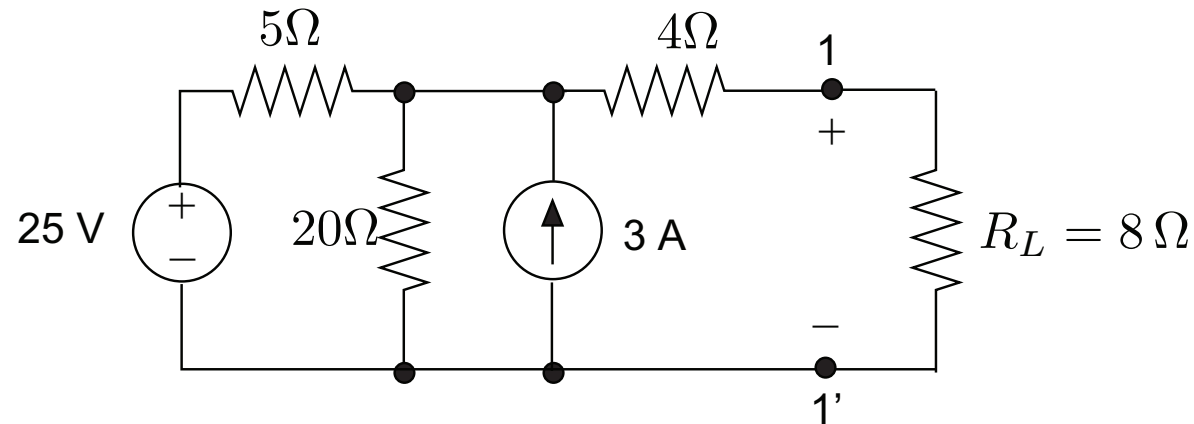
Un circuit résistif comportant des sources idéales de tension et de courant, vu d'un accès (une paire de bornes), peut être remplacé par un dipôle équivalent constitué d'une source idéale de tension v_{Th} en série avec une résistance R_{Th} .

- v_{Th} est la différence de potentiel aux bornes de l'accès à vide;
- R_{Th} est la résistance équivalente du circuit passifié, c'est-à-dire où toutes les sources indépendantes de courant ont été ouvertes et toutes les sources indépendantes de tension ont été court-circuitées.



Application: calculer les tensions et courants dans un circuit charge connecté sans devoir écrire toutes les équations du système complet.

A. Calculer la puissance fournie à une résistance de charge par un circuit

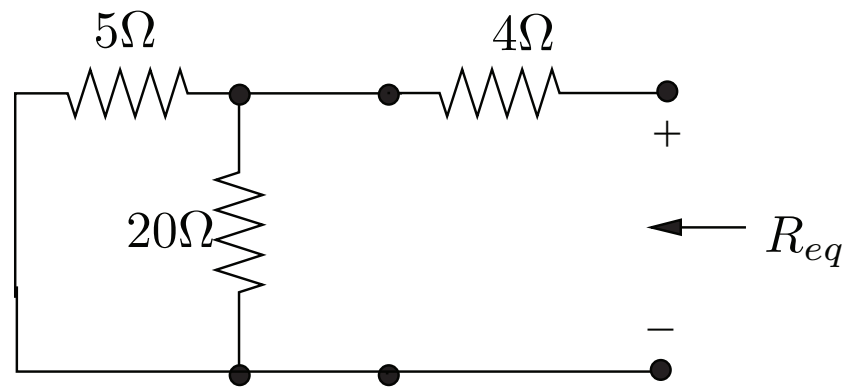


Rechercher tout d'abord le schéma équivalent de Thévenin du circuit vu à gauche de 11'.

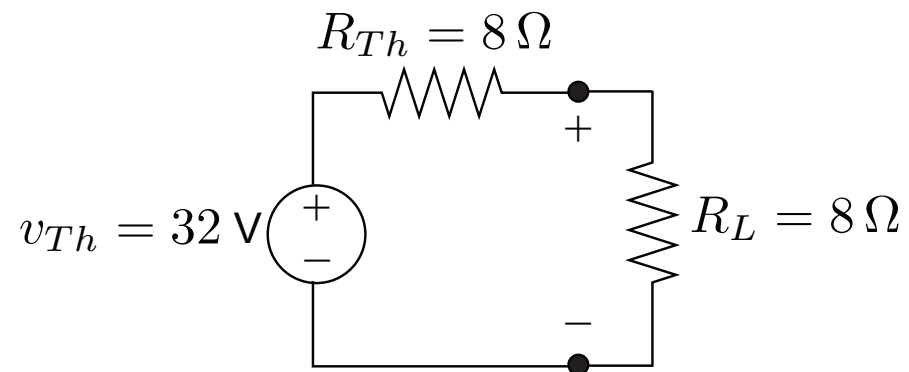
v_{Th} : tension à vide à l'accès

$$v_{Th} = v_{3A} \quad \text{PLK :} \quad \frac{v_{Th} - 25}{5} + \frac{v_{Th}}{20} - 3 = 0 \rightarrow v_{Th} = 32 \text{ V}$$

R_{Th} : résistance équivalente du circuit passifié



$$R_{eq} = 4 + \frac{20.5}{20 + 5} = 8 \Omega$$



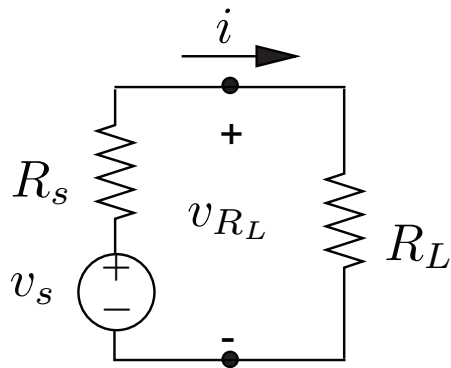
$$i = \frac{v_{Th}}{R_{Th}} = 2 \text{ A}$$

$$P_{R_L} = R_L i^2 = 32 \text{ W}$$

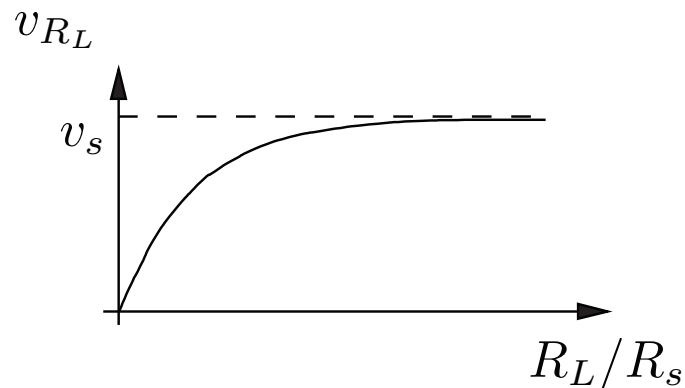
B. Modélisation de sources

Source réelle de tension : pas d'indépendance entre d.d.p. et courant.

Source modélisée par son schéma équivalent de Thévenin. R_s est la résistance interne de la source et représente les pertes internes à la source.



$$\begin{aligned} v_{R_L} &= v_s - R_s i \\ &= R_L \frac{v_s}{R_L + R_s} = \frac{v_s}{1 + (R_s/R_L)} \end{aligned}$$

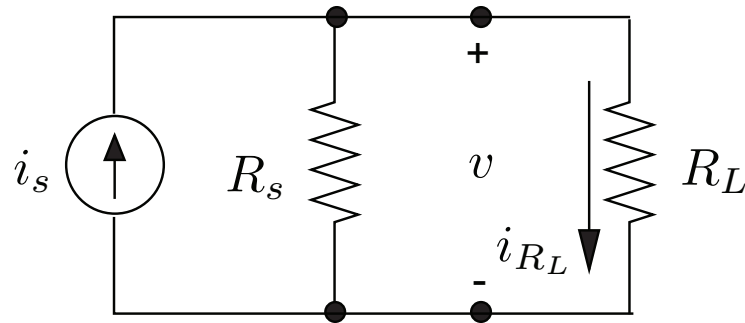


Comportement proche de celui de la source idéale si

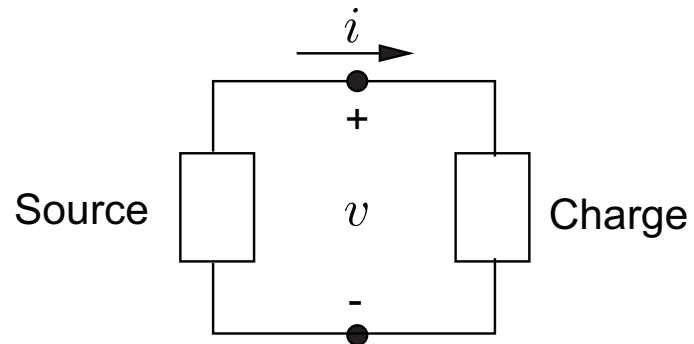
$$R_s \ll R_L$$

3. Equivalence de sources

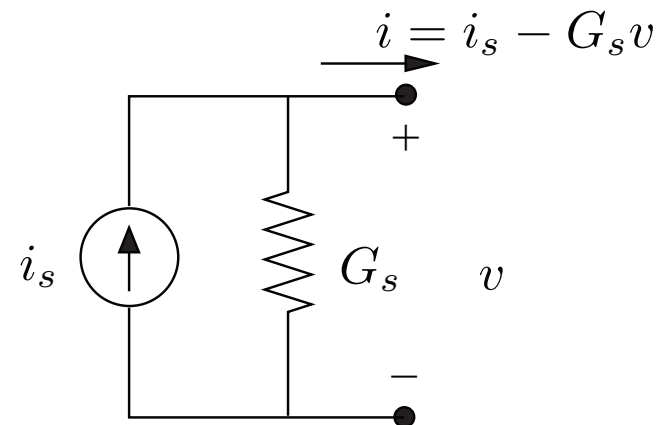
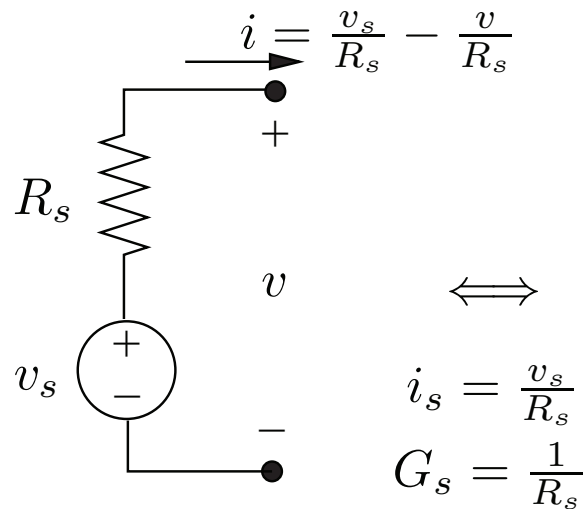
D'une manière analogue on peut modéliser une source de courant par la mise en parallèle d'une source idéale de courant et d'une résistance R_s



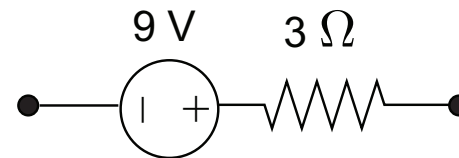
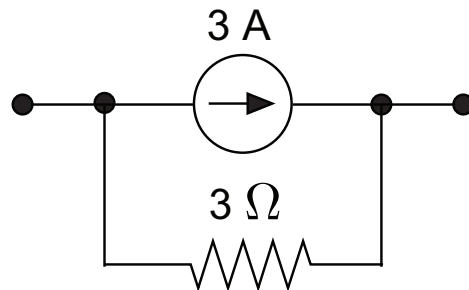
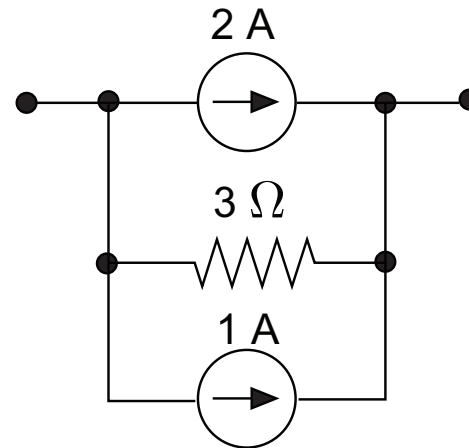
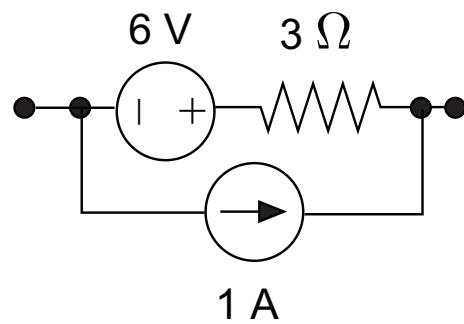
Il est aussi possible de transformer une source de courant en une source de tension et inversement.



Contrainte à satisfaire : même i sous même v

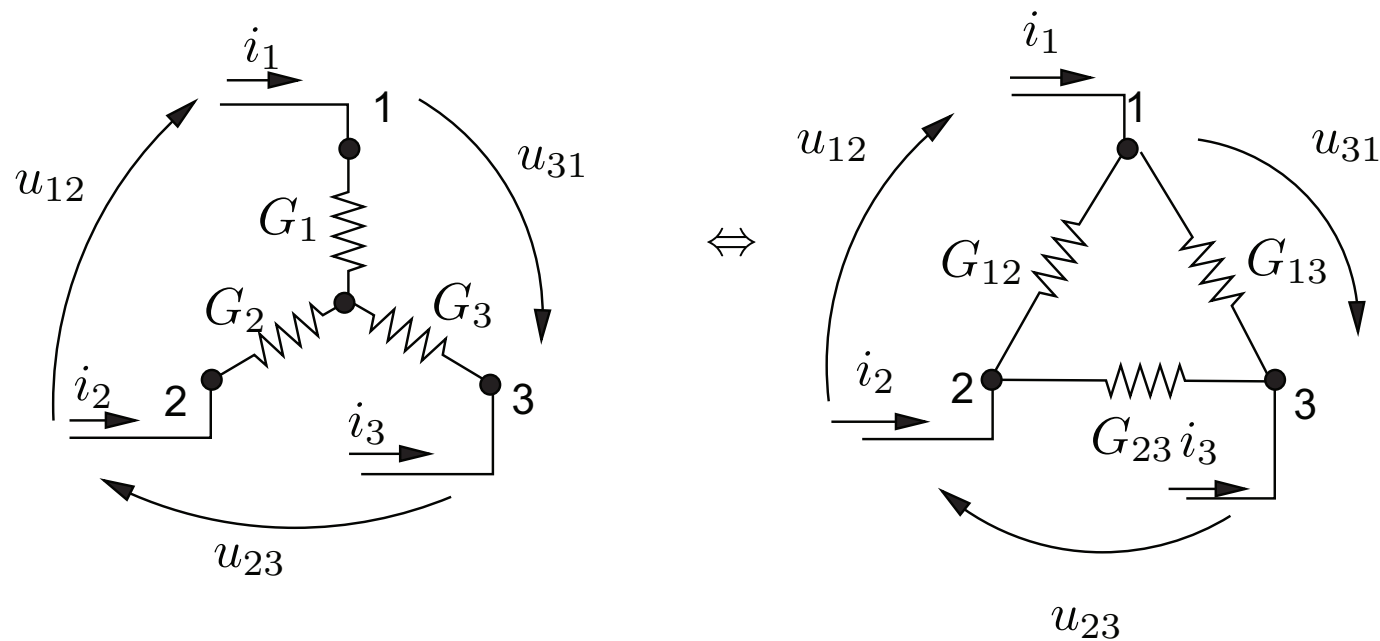


On peut appliquer successivement ces transformations pour simplifier un circuit



4. Transformation étoile $\longleftrightarrow$ triangle

Un circuit en étoile à trois branches peut être remplacé par un circuit équivalent en triangle et inversement



Exercices :

1. A l'aide des conditions d'équivalence, montrer que pour les tensions u_{12} , u_{23} , u_{31} données, les courants i_1 , i_2 et i_3 sont identiques dans les deux configurations.
2. Si l'on connaît les potentiels v_1 , v_2 , v_3 des noeuds 1, 2 et 3 par rapport à une référence donnée, calculer le potentiel du noeud central S de l'étoile en fonction de v_1 , v_2 et v_3 .
3. Résoudre le problème de la page 35 à l'aide de cette technique de transformation.

Conditions d'équivalence

Transformation étoile $\rightarrow$ triangle

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \qquad R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3}$$

$$G_{13} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \qquad R_{13} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \qquad R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1}$$

Transformation triangle $\rightarrow$ étoile

$$G_1 = \frac{G_{13} G_{23} + G_{12} G_{23} + G_{12} G_{13}}{G_{23}} \qquad R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$G_2 = \frac{G_{13} G_{23} + G_{12} G_{23} + G_{12} G_{13}}{G_{13}} \qquad R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

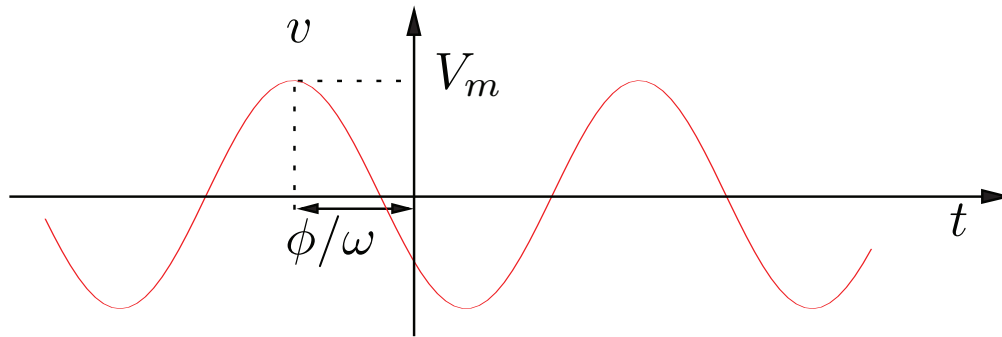
$$G_3 = \frac{G_{13} G_{23} + G_{12} G_{23} + G_{12} G_{13}}{G_{12}} \qquad R_3 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

PARTIE 2:

CIRCUITS EN REGIME SINUSOÏDAL ETABLI

4.1 SOURCE SINUSOÏDALE

Source indépendante qui délivre une tension (ou un courant) de forme sinusoïdale ou cosinusoidale (sin = cos déphasé)



$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi)$$

Signal périodique :

- période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ s
- fréquence : $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ Hz
- pulsation : ω rad/s
- phase : ϕ rad

Signal sinusoïdal entièrement déterminé par :

- son *amplitude* sous forme de la valeur maximale U_m ou de la valeur efficace :

$$\begin{aligned} U_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} U_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt} \\ &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} \simeq 0.707 U_m \end{aligned}$$

= valeur que devrait présenter une tension continue pour dissiper dans une résistance une puissance égale à la puissance *moyenne* dissipée par la tension sinusoïdale.

par la suite, on désignera U_{eff} par U .

- sa fréquence f
- sa phase ϕ

4.2 RELATIONS $u - i$ DE BASE

1. Résistance

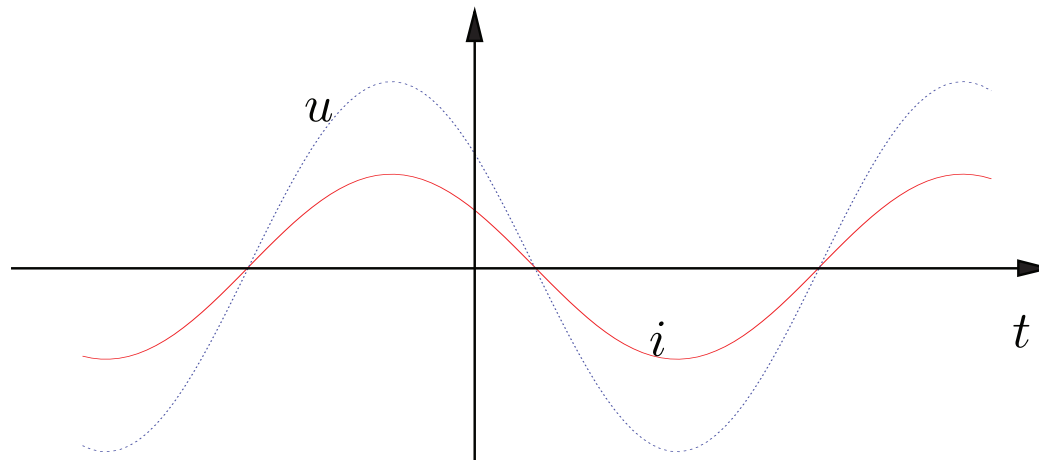
La loi d'Ohm s'applique et en régime sinusoïdal :

$$u(t) = Ri(t)$$

$$U \cos(\omega t + \phi_u) = RI \cos(\omega t + \phi_i)$$

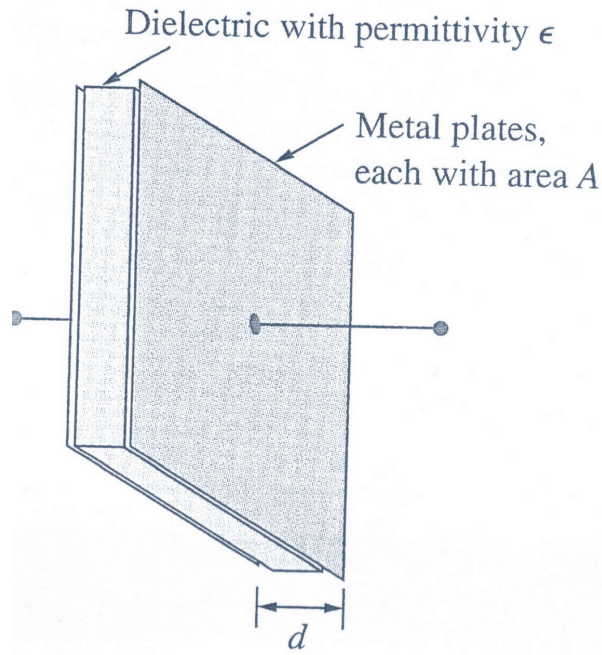
$$\boxed{U = RI} \quad \boxed{\phi_u = \phi_i}$$

Le courant et la tension aux bornes d'une résistance sont en phase.



2. Condensateur et capacité

A. Condensateur idéal en régime stationnaire



Deux plaques parallèles conductrices de surface S séparées d'une distance d et portant des charges égales et opposées $\pm Q$

Condensateur = accumulateur de charges électriques

Stockage d'énergie (champ électrique)

$$E = \frac{1}{2}CU^2$$

Les charges font naître une différence de potentiel U entre les plaques et

$$C = \frac{Q}{U} \text{ est la capacité de ce condensateur, } C = \frac{\epsilon S}{d} \text{ (F)}$$

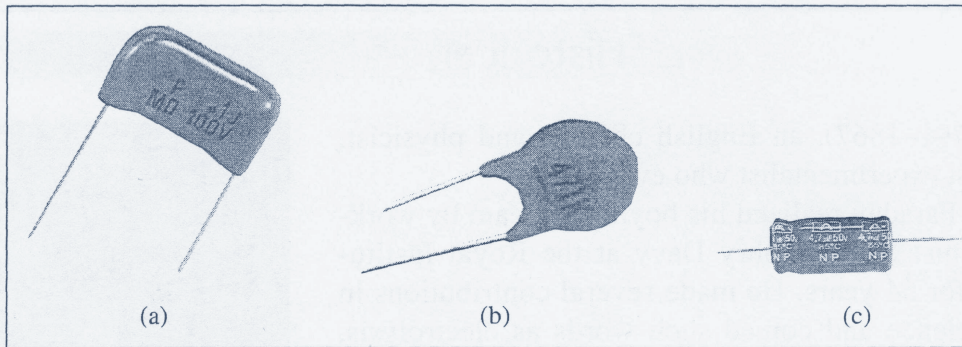


Figure 6.4

Fixed capacitors: (a) polyester capacitor, (b) ceramic capacitor, (c) electrolytic capacitor.
Courtesy of Tech America.

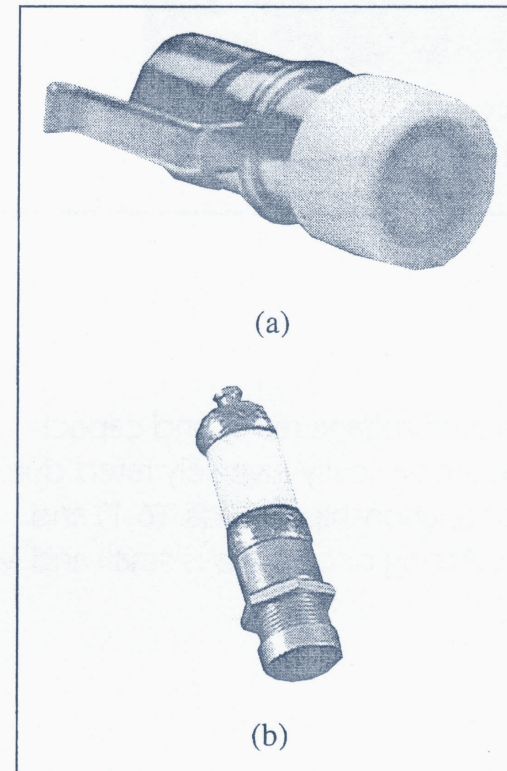


Figure 6.5

Variable capacitors: (a) trimmer capacitor, (b) filmtrim capacitor.
Courtesy of Johanson.

Ordre de grandeur de C : de qq. pF à qq. μF .

B. Condensateur idéal en régime variable

Une variation du potentiel u implique une modification de la charge portée par les plaques conductrices. Cette variation est apportée par le circuit extérieur qui débite un courant.

Variation de la tension Δu sur intervalle de temps Δt :

$$\Delta Q = C \Delta u \qquad \frac{\Delta Q}{\Delta t} = C \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

$$\boxed{i = C \frac{du}{dt}}$$

ou

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de manière brusque (attention aux court-circuits !!)

Si la tension est sinusoïdale, on a :

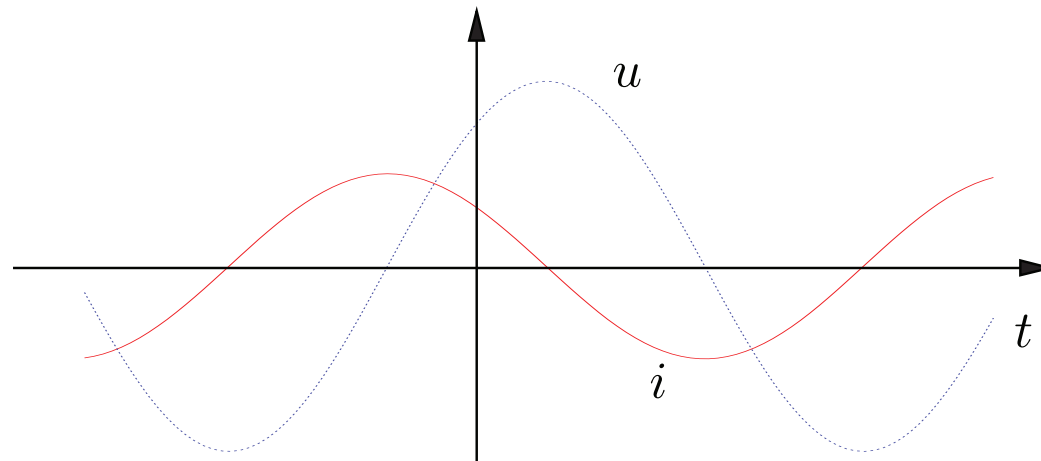
$$u = U \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$\begin{aligned} i &= -\omega C U \sin(\omega t + \phi_u) = \omega C U \cos(\omega t + \phi_u + \frac{\pi}{2}) \\ &= I \cos(\omega t + \phi_i) \end{aligned}$$

$$I = \omega C U$$

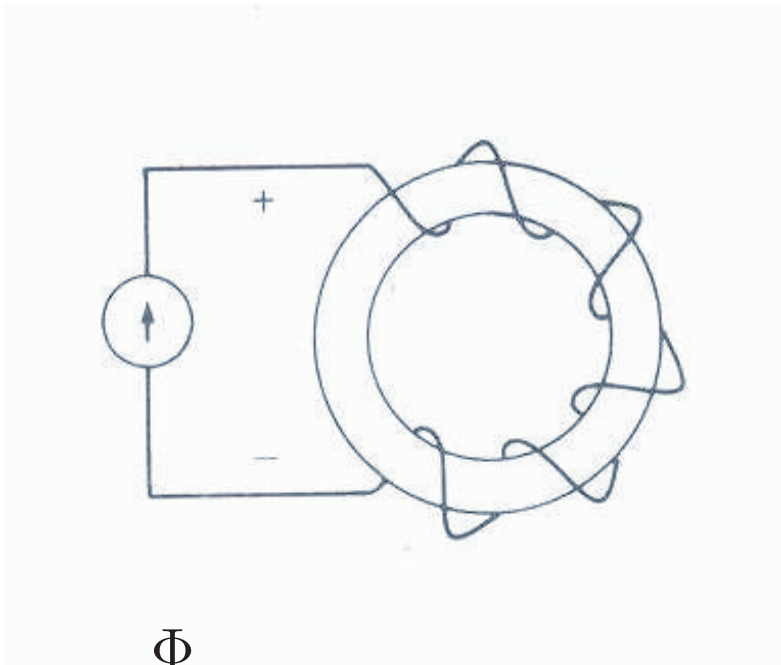
$$\phi_i = \phi_u + \frac{\pi}{2}$$

Dans un condensateur, le courant est *en avance* de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension.



3. Bobine et inductance

A. Inductance idéale en régime stationnaire



Un noyau magnétique entouré d'une bobine de N spires parcourue par un courant continu I fait naître dans la bobine un flux ϕ (flux total embrassé par toutes les spires)

$L = \frac{\Phi}{I}$ est le coefficient de self-induction de cette bobine, $L = \mu \frac{N^2 S}{\ell}$ (H)

où μ est la perméabilité magnétique du noyau, S est la surface d'une spire et ℓ est la longueur de la bobine.

Stockage d'énergie (champ magnétique) : $E = \frac{1}{2} L I^2$

Ordre de grandeur de L :

- bobine à air : qq. 10aines μH
- noyau magnétique ouvert : $0.1 \mu\text{H}$ à 10 mH
- noyau magnétique fermé : $100 \mu\text{H}$ à qq. H (stockage d'énergie)

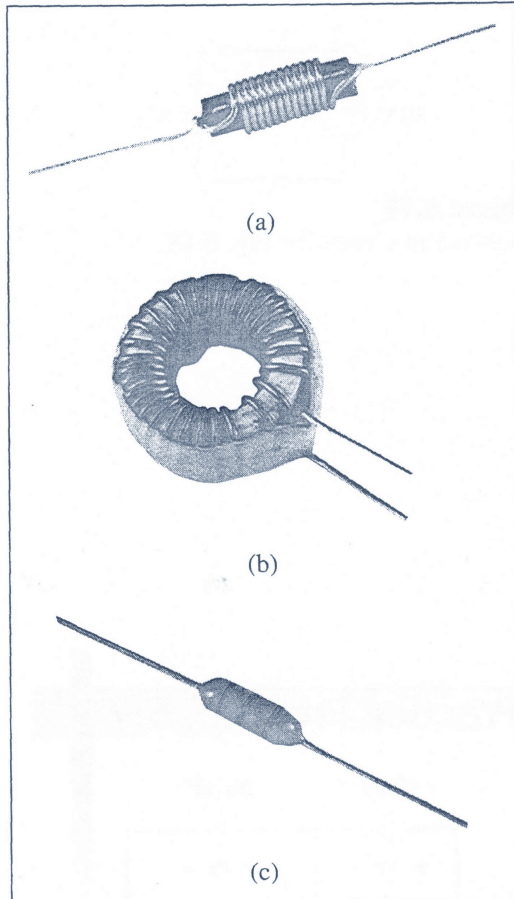


Figure 6.22

Various types of inductors: (a) solenoidal wound inductor, (b) toroidal inductor, (c) chip inductor.

Courtesy of Tech America.

B. Inductance idéale en régime variable

Une variation du courant i et donc du flux implique l'apparition d'une force contre-électromotrice aux bornes de la bobine (loi de Lenz).

$$\Delta\Phi = L \Delta i \qquad \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = L \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

$$\boxed{u = L \frac{di}{dt}}$$

ou

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

Le courant circulant dans une inductance ne peut pas varier de manière brusque (arcs lors de l'ouverture de circuits inductifs).

Si le courant est sinusoïdal, on a :

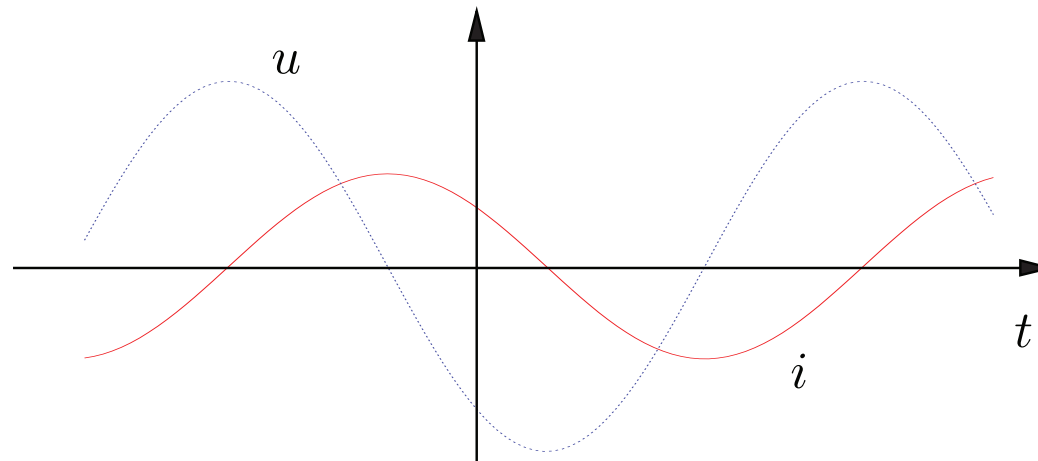
$$i = I \cos(\omega t + \phi_i)$$

$$\begin{aligned} u &= -\omega L I \sin(\omega t + \phi_i) = \omega L I \cos(\omega t + \phi_i + \frac{\pi}{2}) \\ &= U \cos(\omega t + \phi_u) \end{aligned}$$

$$\boxed{U = \omega L I}$$

$$\boxed{\phi_u = \phi_i + \frac{\pi}{2}}$$

Dans une inductance, le courant est *en retard* de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension.



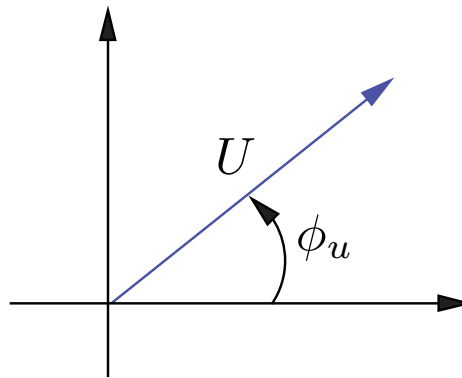
4.3 GRANDEURS COMPLEXES - PHASEURS

1. Grandeur complexe associée à un signal sinusoïdal

Il est possible de caractériser entièrement une tension ou un courant sinusoïdal de fréquence donnée ω par un nombre complexe appelé phaseur:

- le module du nombre complexe représente l'amplitude
- l'argument du nombre complexe représente la phase

$$U \cos(\omega t + \phi_u) \iff \bar{U} e^{j\phi_u} = U \cos \phi_u + jU \sin \phi_u$$

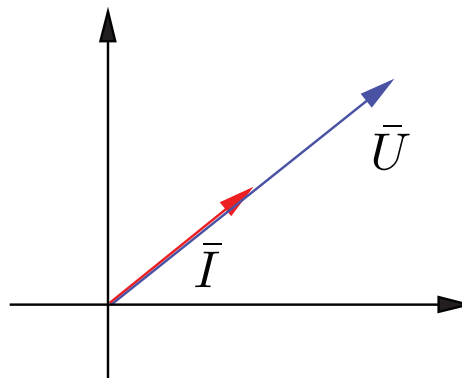


2. Relations $u - i$ en fonction des phaseurs

A. Résistance

$$U \cos(\omega t + \phi_u) = RI \cos(\omega t + \phi_i)$$

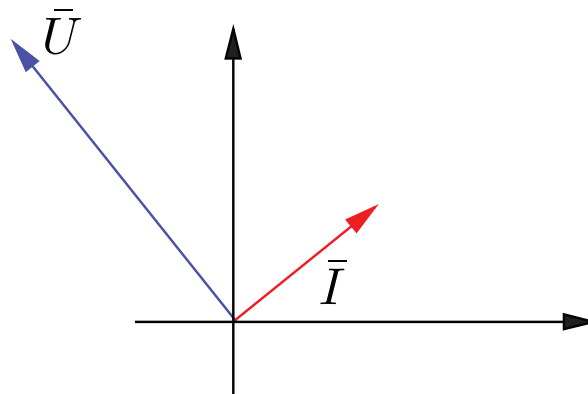
$$\boxed{\bar{U} = U e^{j\phi_u} = RI e^{j\phi_i} = R\bar{I}}$$



B. Inductance

$$U \cos(\omega t + \phi_u) = \omega L I \cos(\omega t + \phi_i + \frac{\pi}{2})$$

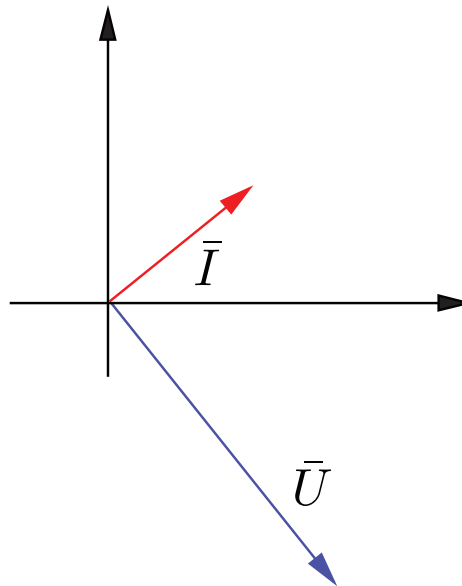
$$\boxed{\bar{U} = U e^{j\phi_u} = \omega L I e^{j(\phi_i + \frac{\pi}{2})} = j\omega L \bar{I}}$$



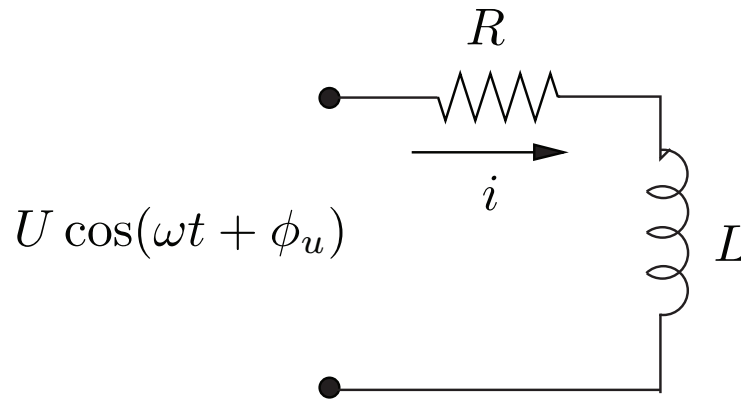
C. Condensateur

$$I \cos \omega t + \phi_i = \omega C U \cos(\omega t + \phi_u + \frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{\bar{I} = U e^{j\phi_i} = \omega C U e^{j(\phi_u + \frac{\pi}{2})} = j\omega C \bar{U} \quad \Leftrightarrow \bar{U} = \frac{1}{j\omega C} \bar{I}}$$



D. Circuit RL



Courant $i(t)$ solution particulière
de

$$u = L \frac{di}{dt} + R i$$

Soit $i(t) = I \cos(\omega t + \phi_i)$ avec le phaseur $\bar{I} = I e^{j\phi_i}$ et
 $u(t) = U \cos(\omega t + \phi_u)$ avec le phaseur $\bar{U} = U e^{j\phi_u}$

$$\begin{aligned} U \cos(\omega t + \phi_u) &= R I \cos(\omega t + \phi_i) - \omega L I \sin(\omega t + \phi_i) \\ &= \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I \cos(\omega t + \phi_i + \arctan \frac{\omega L}{R}) \end{aligned}$$

$U = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I \quad \phi_u = \phi_i + \arctan \frac{\omega L}{R}$
--

3. Impédance, loi d'Ohm généralisée et lois de Kirchhoff

A. Impédance et admittance

Si l'on pose $Z = R + j\omega L$, on peut écrire pour les phaseurs la *loi d'Ohm généralisée* :

$$\bar{U} = Z\bar{I} \quad U = |Z|\bar{I} \quad \phi_u = \phi_i + \angle Z$$

Le nombre complexe Z est appelé *Impédance* du circuit.

L'inverse de l'impédance est appelée *admittance*

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z} \quad \bar{I} = Y \bar{U}$$

Pour les dipôles élémentaires, on a

R	C	L
$\bar{U} = R\bar{I}$	$\bar{U} = \frac{1}{j\omega C}\bar{I}$	$\bar{U} = j\omega L\bar{I}$
$Z = R$	$Z = \frac{1}{j\omega C}$	$Z = j\omega L$
$Y = \frac{1}{R}$	$Y = j\omega C$	$Y = \frac{1}{j\omega L}$

Z et Y sont deux nombres complexes.

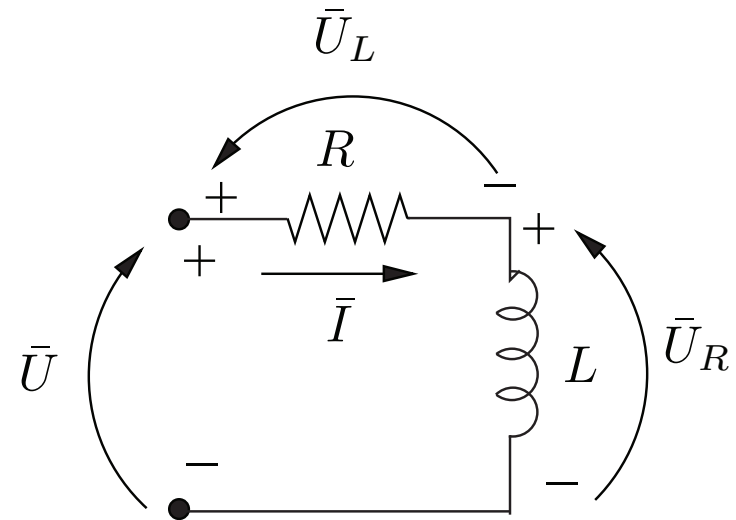
$$Z = R + j X = |Z|e^{j\theta} \quad \left\{ \begin{array}{ll} R = \operatorname{Re}[Z] = |Z| \cos \theta & \text{est la } \textit{résistance} \\ X = \operatorname{Im}[Z] = |Z| \sin \theta & \text{est la } \textit{réactance} \\ |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} & \text{est le } \textit{module} \\ \theta = \arctan \frac{X}{R} & \text{est l'}\textit{argument} \end{array} \right.$$

$$Y = G + j B = |Y|e^{j\zeta} \quad \left\{ \begin{array}{ll} G = \operatorname{Re}[Y] = |Y| \cos \zeta & \text{est la } \textit{conductance} \\ B = \operatorname{Im}[Y] = |Y| \sin \zeta & \text{est la } \textit{susceptance} \\ |Y| = \sqrt{G^2 + B^2} & \text{est le } \textit{module} \\ \zeta = \arctan \frac{B}{G} & \text{est l'}\textit{argument} \end{array} \right.$$

B. Lois de Kirchhoff

Pour le circuit RL, on a

$$\begin{aligned}\bar{U} &= Z\bar{I} \\ &= (R + j\omega L)\bar{I} \\ &= \bar{U}_R + \bar{U}_L\end{aligned}$$



C'est l'expression de la SLK pour les phaseurs.

On déduit que les lois de Kirchhoff peuvent s'écrire aussi pour les phaseurs

SLK :

$$u_1(t) + u_2(t) + \dots u_k(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \dots \bar{U}_k = 0$$

PLK :

$$i_1(t) + i_2(t) + \dots i_k(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots \bar{I}_k = 0$$

C. Association d'impédances - Théorème de Thévenin

Combinant loi d'Ohm généralisée et lois de Kirchhoff, on peut réaliser des associations d'impédances en série et en parallèle de la même façon que pour les résistances.

Le théorème de Thévenin peut aussi s'appliquer. On remplace un circuit par un dipôle constitué d'une f.e.m de phaseur $\bar{V}_{Th}$ en série avec un dipôle d'impédance Z_{Th} :

- $\bar{V}_{Th}$ représente la tension apparaissant aux bornes du circuit lorsqu'il est à vide;
- Z_{Th} représente l'impédance équivalente du circuit lorsqu'il a été passifié.

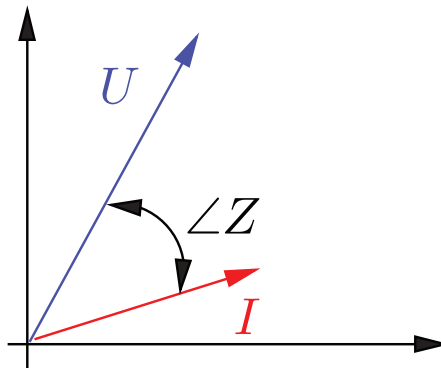
4. Exercices

Exemple 1 : impédance d'un circuit RLC série

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \angle Z = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

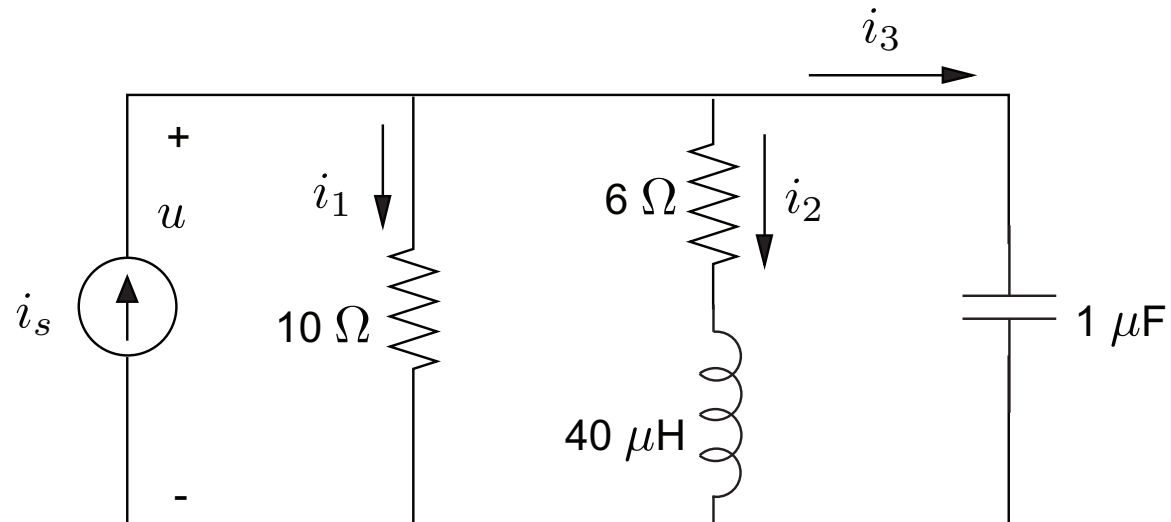
$$\text{résistance : } R, \quad \text{réactance : } X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$



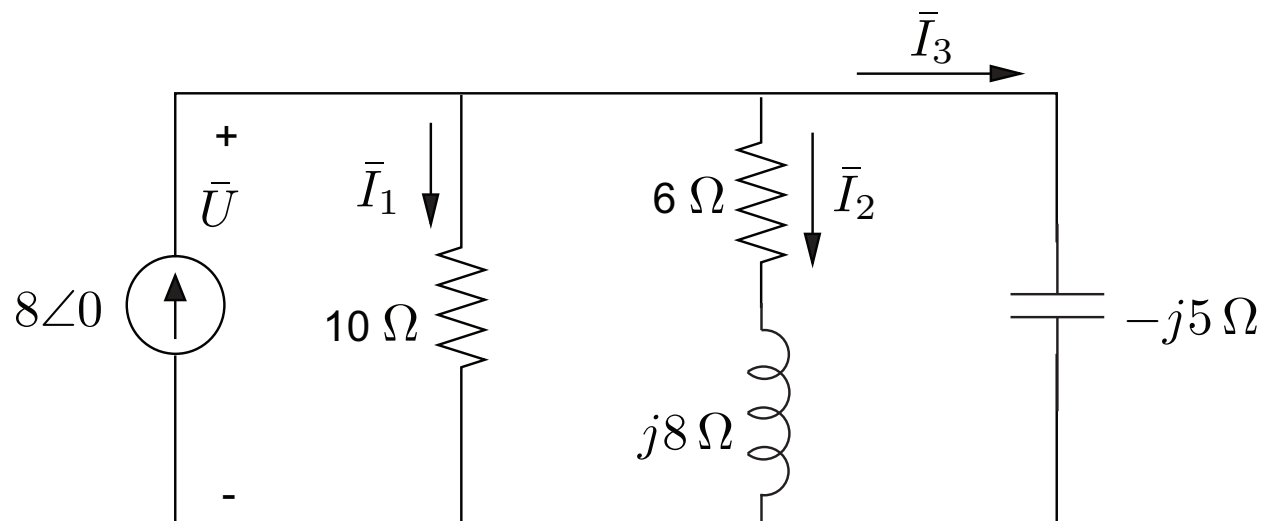
Exemple 2 : circuit parallèle et admittance

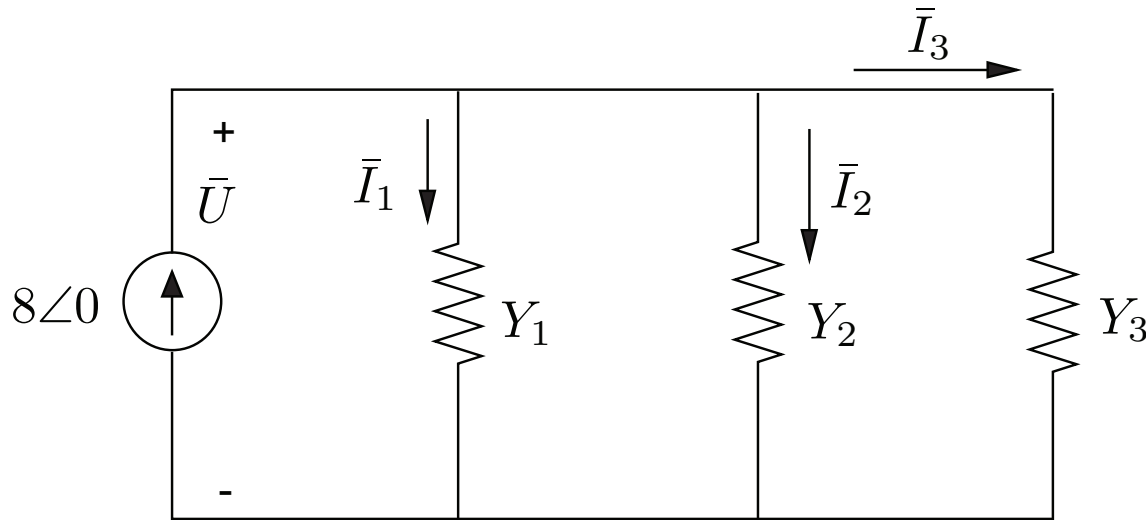
La source de courant délivre un courant $i(t) = 8 \cos 200\,000 t$ A.

Trouver les expressions temporelles de u , i_1 , i_2 et i_3 en régime établi.



$$\bar{I} = 8 \angle 0, \quad \omega L = 8 \Omega, \quad \frac{-1}{\omega C} = -5 \Omega$$





$$Y_1 = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ S}$$

$$Y_2 = \frac{1}{6 + j8} = 0.06 - j0.08 \text{ S}$$

$$Y_3 = j0.2 \text{ S}$$

Admittance vue de la source :

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0.16 + j0.12 = 0.2\angle 36.87^\circ \quad \rightarrow \quad Z = \frac{1}{Y} = 5\angle -36.87^\circ$$

$$\bar{U} = Z\bar{I} = 40\angle -36.87^\circ \quad \rightarrow \quad u(t) = 40 \cos(200\,000t - 36.87^\circ) \text{ V}$$

$$\bar{I}_1 = Y_1\bar{U} = 4\angle -36.87^\circ \quad \rightarrow \quad i_1(t) = 4 \cos(200\,000t - 36.87^\circ) \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = Y_2\bar{U} = 4\angle -90^\circ \quad \rightarrow \quad i_2(t) = 4 \cos(200\,000t - 90^\circ) \text{ A}$$

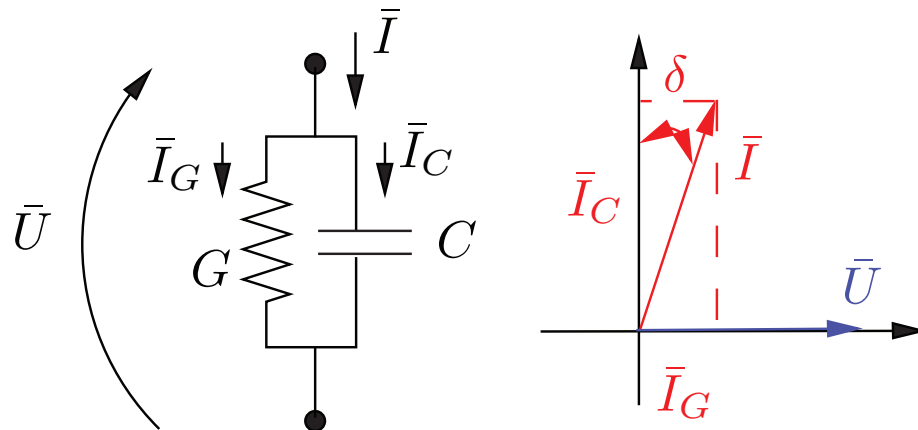
$$\bar{I}_3 = Y_3\bar{U} = 8\angle 53.13^\circ \quad \rightarrow \quad i_2(t) = 8 \cos(200\,000t + 53.13^\circ) \text{ A}$$

Exemple 3 : Modèle de condensateur réel

On représente généralement un condensateur par un circuit constitué de la mise en parallèle d'une capacité idéale C et d'une conductance G .

G modélise les pertes

- par conduction dans le matériau diélectrique (pertes Joule)
- en hautes fréquences, les pertes par hystérésis diélectrique (pas pour les condensateurs à air !)



$$\bar{I}_G = G\bar{U}$$

$$\bar{I}_C = j\omega C\bar{U}$$

$$\bar{I} = \bar{I}_G + \bar{I}_C$$

$$Y = G + j\omega C$$

Le courant total n'est plus en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension : petit angle δ de différence

“Qualité” du condensateur à la pulsation ω évaluée via :

-

$$\tan \delta = \frac{G}{\omega C}$$

ordre de grandeur : 10^{-3} à 10^{-5}

- le facteur de qualité (plus rare pour un condensateur)

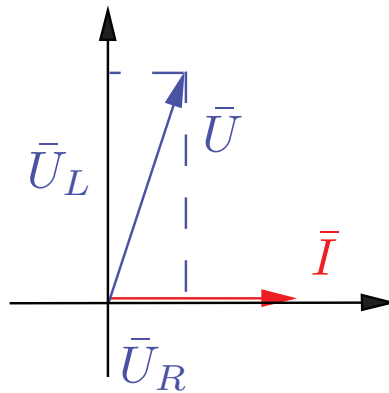
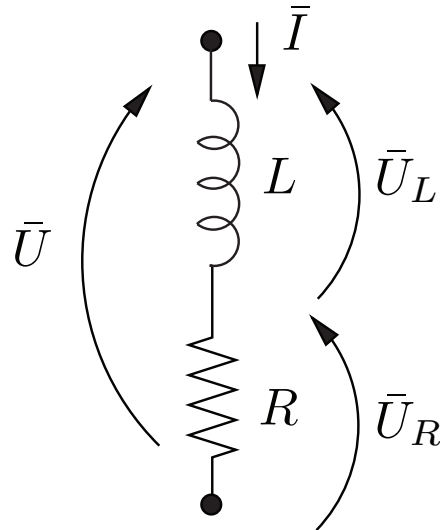
$$Q = \frac{\omega C}{G} = \frac{1}{\tan \delta}$$

Exemple 4 : Modèle de bobine réelle

On représente généralement une bobine par un circuit constitué de la mise en série d'une inductance idéale L et d'une résistance R .

R modélise les pertes

- par effet Joule dans le fil conducteur, tenir compte de l'effet pelliculaire en hautes fréquences
- en hautes fréquences, les pertes par hystérésis magnétique (si noyau ferromagnétique)



$$\bar{U}_R = R\bar{I}$$

$$\bar{U}_L = j\omega L\bar{I}$$

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L$$

$$Z = R + j\omega L$$

Le courant total n'est plus en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension.

“Qualité” de la bobine à la pulsation ω évaluée via :

- le facteur de qualité

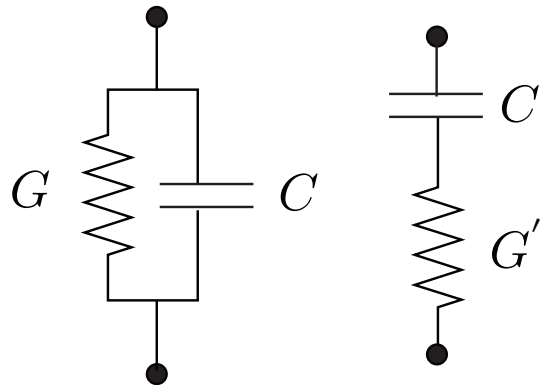
$$Q = \frac{\omega L}{R}$$

Pour une bobine de très grande qualité : qq. 100aines

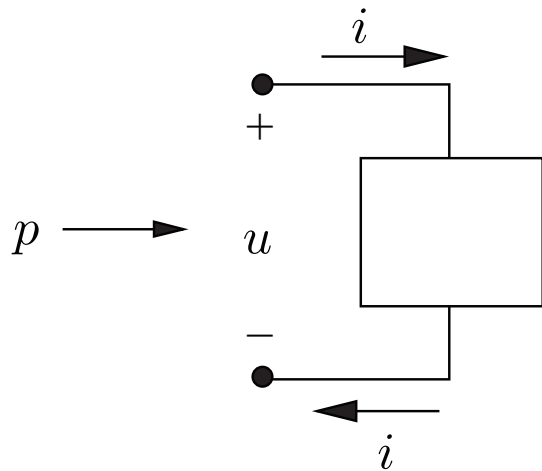
Exemple 5

Soit un condensateur de capacité $C = 2 \text{ nF}$ et d'angle de perte $\tan \delta = 2 \cdot 10^{-4}$ à la fréquence de 1 MHz.

Calculer les paramètres des schémas équivalents “parallèle” et “série” de la forme ci-dessous.



4.4 CALCUL DES PUISSANCES



$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi_u) \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

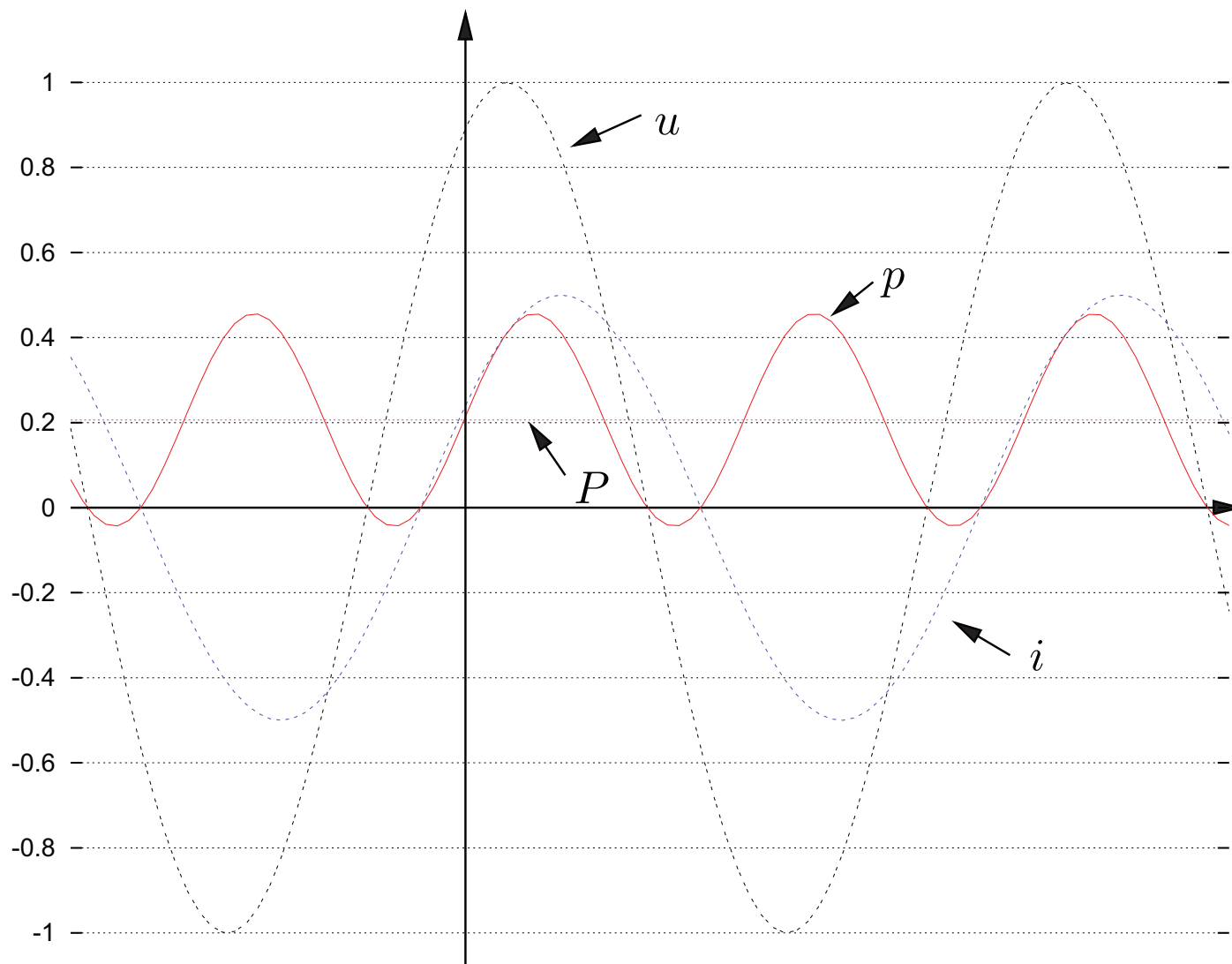
Puissance *instantanée* fournie au dipôle :

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) \\ &= U_m I_m \cos(\omega t + \phi_u) \cos(\omega t + \phi_i) \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\phi_u - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)] \end{aligned}$$

En utilisant les valeurs efficaces :

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$p(t) = U I [\cos(\phi_u - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)]$$



La puissance instantanée $p(t)$

- oscille à une fréquence double de celle de u et i
- est alternativement positive et négative $\rightarrow$ échanges d'énergie

Le terme constant $P = U I \cos(\phi_u - \phi_i)$

- représente la puissance moyenne fournie au dipôle par période, et donc la puissance réellement utilisable

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

- dépend non seulement de l'amplitude de u et i mais aussi de leur déphasage $\phi_u - \phi_i$
- P est appelée *puissance active*

Le terme oscillant $p_f = U I \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)$

- est appelé puissance fluctuante;
- est de moyenne nulle;

$$\begin{aligned}
 p(t) &= U I \cos(\phi_u - \phi_i) + U I \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \\
 &= U I \cos(\phi_u - \phi_i) + U I \cos(2(\omega t + \phi_u) - (\phi_u - \phi_i)) \\
 &= P + P \cos 2(\omega t + \phi_u) + Q \sin 2(\omega t + \phi_u)
 \end{aligned}$$

$$Q = U I \sin(\phi_u - \phi_i)$$

est la *puissance réactive*. Elle est due au déphasage existant entre u et i et est liée aux échanges d'énergie magnétique et électrostatique survenant dans le circuit suite à la présence d'inductances et de condensateurs.

Le produit $S = U I = \sqrt{P^2 + Q^2}$ est appelé *puissance apparente*

Unités :

- $p(t), p_f(t), P$: W
- Q : var (volt.ampère réactif)
- S : VA (volt.ampère)

D. Le facteur de puissance

$$P = U I \cos(\phi_u - \phi_i) = U I \cos \Phi$$

$\cos \Phi$ est le *facteur de puissance* du circuit :

- circuit résistif : $\cos \Phi = 1$
- circuit purement inductif ou capacitif : $\cos \Phi = 0$

Le facteur de puissance dépend directement du déphasage entre le courant et la tension aux bornes du dipôle.

Qui est responsable de ce déphasage ?

L'impédance du dipôle :

$$Z = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U e^{j\phi_u}}{I e^{j\phi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\phi_u - \phi_i)}$$

et $\Phi = \text{argument de } Z$

$$P = U I \cos \Phi \quad \rightarrow \quad I = \frac{P}{U \cos \Phi}$$

Si le dipôle est alimenté par une tension constante en amplitude U , pour délivrer au dipôle une même puissance P , le courant doit être d'autant plus important que le $\cos \Phi$ du dipôle est petit.

Le facteur de puissance renseigne sur la qualité de la transmission de l'énergie.

Remarque : facteur de puissance et puissance réactive sont liés :

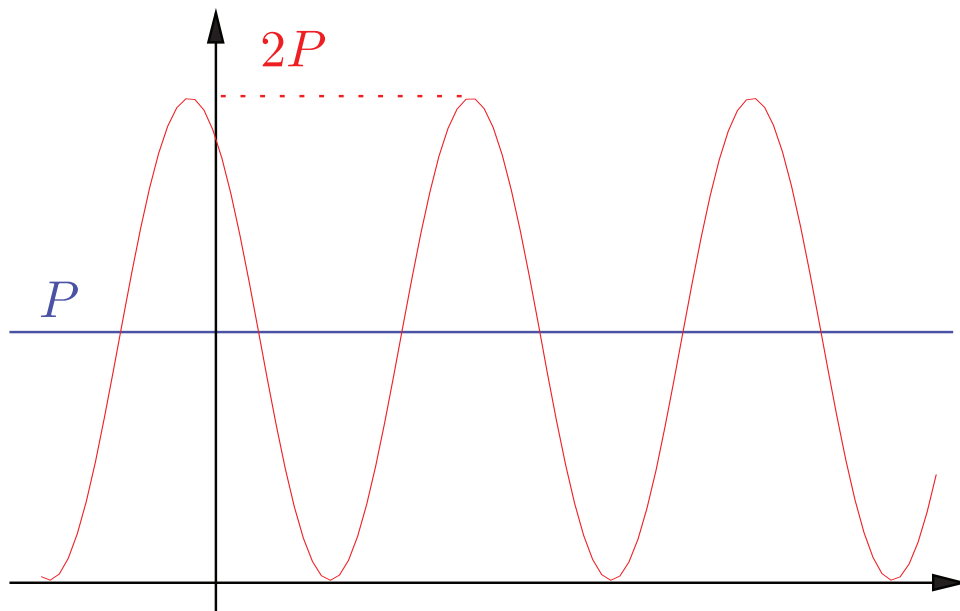
- $\cos \Phi$ proche de 1 : $Q = U I \sin \Phi$ faible
- $\cos \Phi$ proche de 0 : $Q = U I \sin \Phi$ proche de sa valeur max. $U I$

A. Dipôle purement résistif

u et i sont en phase : $\phi_u - \phi_i = 0$

$$\cos \Phi = 1$$

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = RI_m^2 \cos^2(\omega t + \phi_u) \\ &= RI^2(1 + \cos 2(\omega t + \phi_u)) \\ &= P + P \cos 2(\omega t + \phi_u) \end{aligned}$$



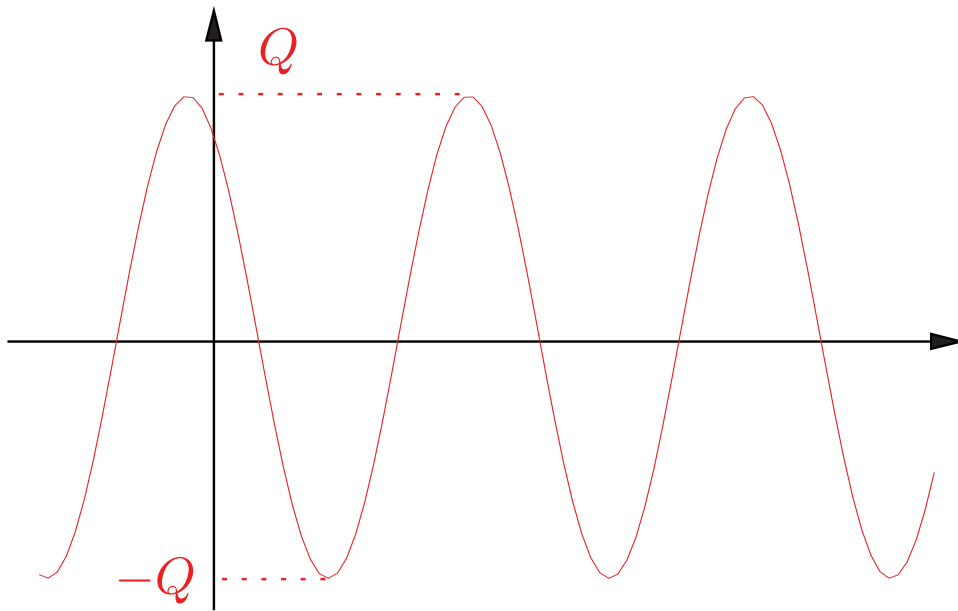
p toujours positif !
 de moyenne $P = RI^2$
 $p_f = P \cos 2(\omega t + \phi_u)$
 $Q = 0 !$

B. Dipôle purement inductif

i est en retard de 90° par rapport à u : $\phi_u - \phi_i = 90^\circ$

$$\cos \Phi = 0$$

$$\begin{aligned} p(t) &= \omega L I_m^2 \cos(\omega t + \phi_u) \cos(\omega t + \phi_u - 90^\circ) \\ &= \omega L I^2 \sin(2(\omega t + \phi_u)) \\ &= Q \sin(2(\omega t + \phi_u)) \end{aligned}$$



p de moyenne nulle

$$\rightarrow P = 0 !$$

$$p_f = Q \sin 2(\omega t + \phi_u)$$

$$Q = \omega L I^2$$

Echanges périodiques
d'énergie entre les induc-
tances et le reste du circuit.

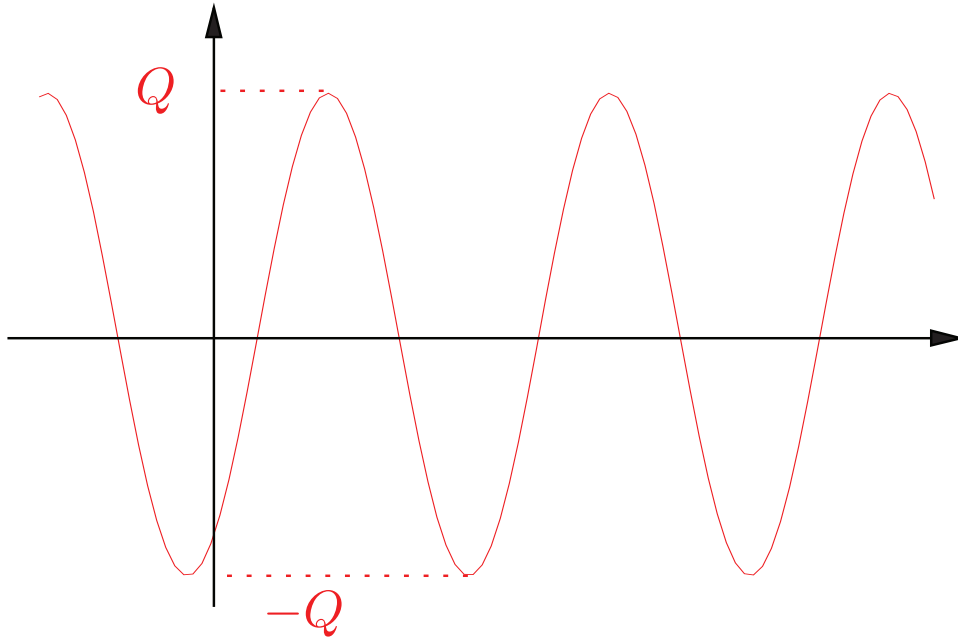
Une inductance consomme
de la puissance réactive

C. Dipôle purement capacitif

i est en avance de 90° par rapport à u : $\phi_u - \phi_i = -90^\circ$

$$\cos \Phi = 0$$

$$\begin{aligned} p(t) &= \omega C U_m^2 \cos(\omega t + \phi_u) \cos(\omega t + \phi_u + 90^\circ) \\ &= -\omega C U^2 \sin(2(\omega t + \phi_u)) \\ &= Q \sin(2(\omega t + \phi_u)) \end{aligned}$$



p de moyenne nulle

$\rightarrow P = 0 !$

$$p_f = Q \sin 2(\omega t + \phi_u)$$

$$Q = -\omega C U^2$$

Echanges périodiques
d'énergie entre les condensa-
teurs et le reste du circuit.

Un condensateur produit de
la puissance réactive

E. Expression de P et Q à partir de l'impédance du dipôle

Impédance :

$$Z = R + jX = \sqrt{R^2 + X^2} e^{j \arctan X/R} = |Z| e^{j\Phi}$$

Puissance active :

$$P = UI \cos(\phi_u - \phi_i) = |Z| I^2 \cos \Phi = RI^2$$

Puissance réactive :

$$Q = UI \sin(\phi_u - \phi_i) = |Z| I^2 \sin \Phi = XI^2$$

Exercices

1. Une impédance de charge Z_L est alimentée par une source de tension sinusoïdale de 220 V (valeur efficace) et soutire une puissance active de 2 kW sous un courant d'amplitude $I = 11$ A.

Déterminer le facteur de puissance de cette charge. Que vaut la puissance réactive consommée par la charge ? Que vaut l'impédance Z_L ?

2. Compensation - Amélioration du $\cos \Phi$

Une impédance de charge est alimentée par une source de tension représentée par son schéma équivalent de Thévenin $V_{Th} = 220$ V et $Z_{Th} = 5 + j2 \Omega$.

Cette charge consomme une puissance active $P_L = 500$ W et une puissance réactive $Q_L = 300$ Var. On place une réactance en parallèle sur cette charge de manière à obtenir pour la charge globale un $\cos \Phi = 1$. Quel élément doit-on placer ? quelle est sa valeur ? Que devient dans ce cas la puissance active consommée par la charge Z_L ?

3. Un court-circuit de résistance $R_{cc} = 1 \Omega$ se produit aux bornes de la charge du circuit du point 2. Quelle est l'amplitude du courant délivré par la source à la suite du court-circuit ?

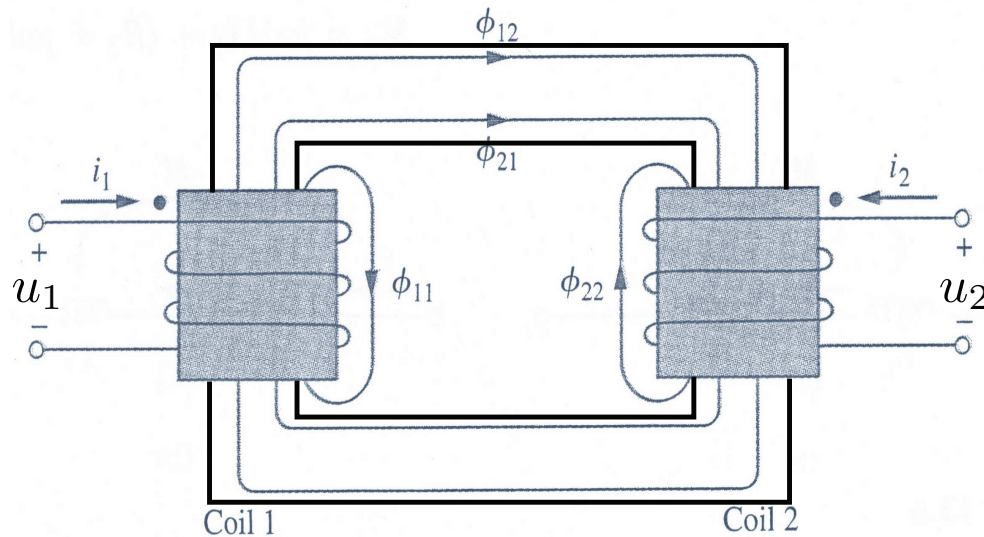
4.5 LE TRANSFORMATEUR

1. Principe

Deux bobines magnétiquement couplées.

Utile pour

- adapter le niveau de tension : transport et distribution de l'énergie électrique
- adapter l'impédance d'un circuit à une impédance de charge : circuits électroniques, télécom
- réaliser des mesures de courant et de tension



11' : primaire , 22' : secondaire

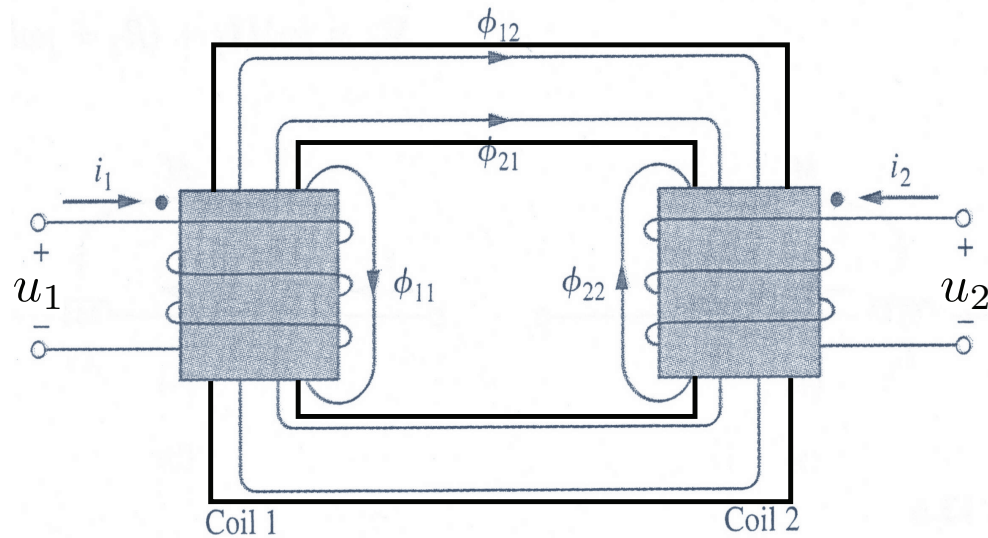
N_1 : nombre de tours de la bobine 1

N_2 : nombre de tours de la bobine 2

Soit le primaire alimenté par une source de tension sinusoïdale u_1

- courant i_1 crée champ H alternatif dans le noyau magnétique, proportionnel à N_1 ;
- champ coupe les spires de l'enroulement secondaire et y crée un flux variable (ϕ_{12});
- induit une tension variable, proportionnelle à N_2 .
- Si secondaire fermé, circulation d'un courant i_2 ; produit à son tour un champ variable dans le le noyau (ϕ_{21}).

2. Les flux



- les flux de fuite ϕ_{11} et ϕ_{22} : ne traversent pas le noyau mais seulement chacun des deux enroulements
- flux dans le noyau magnétique : somme de la contribution de chacun des deux courants: $\phi_m = \phi_{12} + \phi_{21}$

Soit $\mathcal{R}$ la reluctance du circuit magnétique ($\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S}$).

$$\phi_m = \phi_{12} + \phi_{21} = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{\mathcal{R}}$$
$$\phi_{12} = \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}} \quad \phi_{21} = \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}}$$

Flux total embrassé :

par la bobine 1 :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= N_1(\phi_{11} + \phi_m) \\ &= N_1\phi_{11} + \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}i_1 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}}i_2 \end{aligned}$$

par la bobine 2 :

$$\begin{aligned} \phi_2 &= N_2(\phi_{22} + \phi_m) \\ &= N_2\phi_{22} + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}i_2 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}}i_1 \end{aligned}$$

Tensions induites:

$$u_1 = \frac{d\phi_1}{dt} \quad u_2 = \frac{d\phi_2}{dt}$$

3. Le transformateur idéal

Hypothèses d'idéalité:

- pas de flux de fuite : $\phi_{11} = \phi_{22} = 0$

$$u_1 = N_1 \frac{d\phi_m}{dt} \quad u_2 = N_2 \frac{d\phi_m}{dt}$$

$$u_2 = \frac{N_2}{N_1} u_1$$

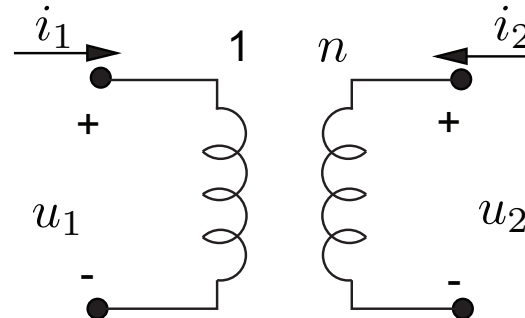
- matériau magnétique idéal :

$$\mu \rightarrow \infty \quad \mathcal{R} \rightarrow 0$$

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$$

$$i_2 = -\frac{N_1}{N_2} i_1$$

$$\begin{aligned} u_2 &= n u_1 \\ i_1 &= -n i_2 \end{aligned}$$



$n = \frac{N_2}{N_1}$ est le rapport de transformation.

4. Inductances

Inductances de fuite :

$$L_{\ell 1} = \frac{N_1 \phi_{11}}{i_1} \quad L_{\ell 2} = \frac{N_2 \phi_{22}}{i_2}$$

Admittance $Y = G + jB$:

$$S = \bar{U} \bar{I}^* = Y^* \bar{U} \bar{U}^* = Y^* U^2 = G U^2 - jB U^2$$

$$P = G U^2 \quad Q = -B U^2$$

Inductance magnétisante vue du primaire:

$$L_{m1} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}$$

Flux :

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= L_{\ell 1} i_1 + L_{m1} i_1 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_2 & \phi_2 &= L_{\ell 2} i_2 + \frac{N_2^2}{N_1^2} L_{m1} i_2 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_1 \\
 &= L_1 i_1 + M i_2 & &= M i_1 + L_2 i_2
 \end{aligned}$$

Inductances propres et mutuelle :

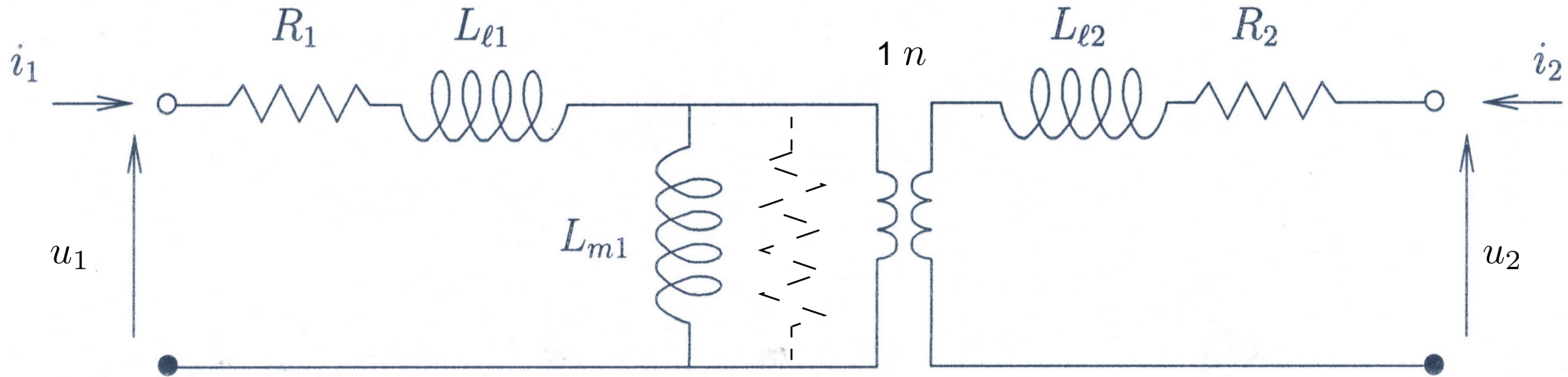
$$\begin{aligned}
 L_1 &= L_{\ell 1} + L_{m1} \\
 L_2 &= L_{\ell 2} + \frac{N_2^2}{N_1^2} L_{m1} \\
 M &= \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} = \frac{N_2}{N_1} L_{m1}
 \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad k = \text{coefficient de couplage, } 0 < k < 1$$

5. Schéma équivalent

On ajoute une résistance pour chaque enroulement (pertes Joule dans les enroulements)



Pertes “Cuivre” : $R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$

Pertes “Fer” (courants de Foucault dans le noyau), résistance supplémentaire (pointillés) : R_f

PARTIE 3 :

SYSTEMES TRIPHASES

Transport et distribution de l'énergie électrique sont réalisés au moyen de systèmes triphasés fonctionnant en régime sinusoïdal (à l'exception de quelques liaisons haute tension à courant continu).

Le transport utilise des systèmes à THT (très haute tension, 700 à 150 kV).

La distribution utilise des systèmes BT (basse tension, qq kV à qq 100taines V).

Pourquoi ?

- THT permet de réduire les pertes par effet Joule dans les conducteurs
- régime sinusoïdal permet l'utilisation de transformateurs pour abaisser ou élever les niveaux de tension
- régime triphasé
 - permet la création de champs tournants (moteurs, alternateurs)
 - économie de conducteurs pour transporter une même puissance

5.1 CIRCUIT TRIPHASÉ ÉQUILIBRÉ

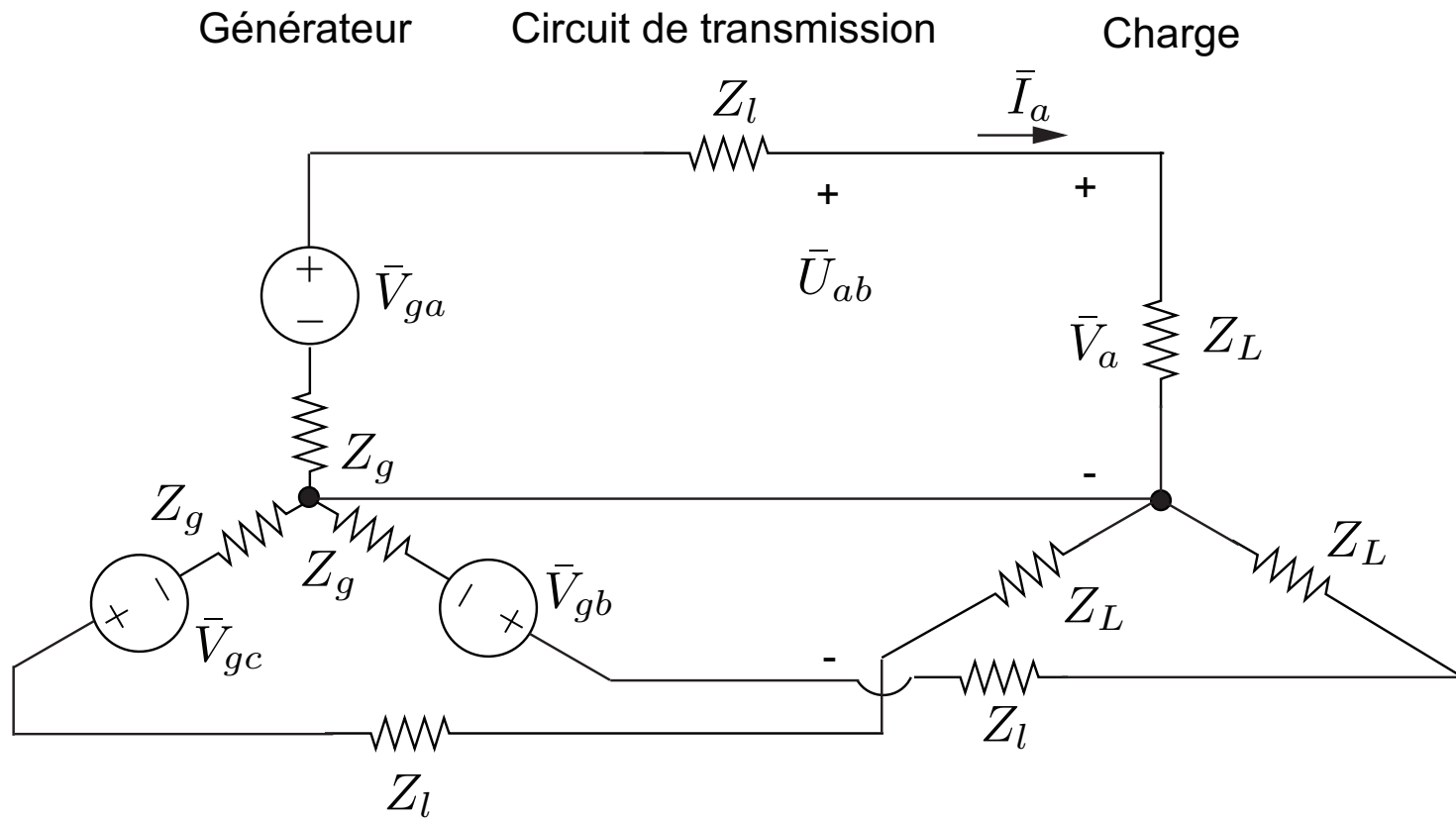
1. Principe

Un circuit triphasé est constitué de trois circuits appelés *phases*.

Un système est équilibré si tous ses constituants le sont.

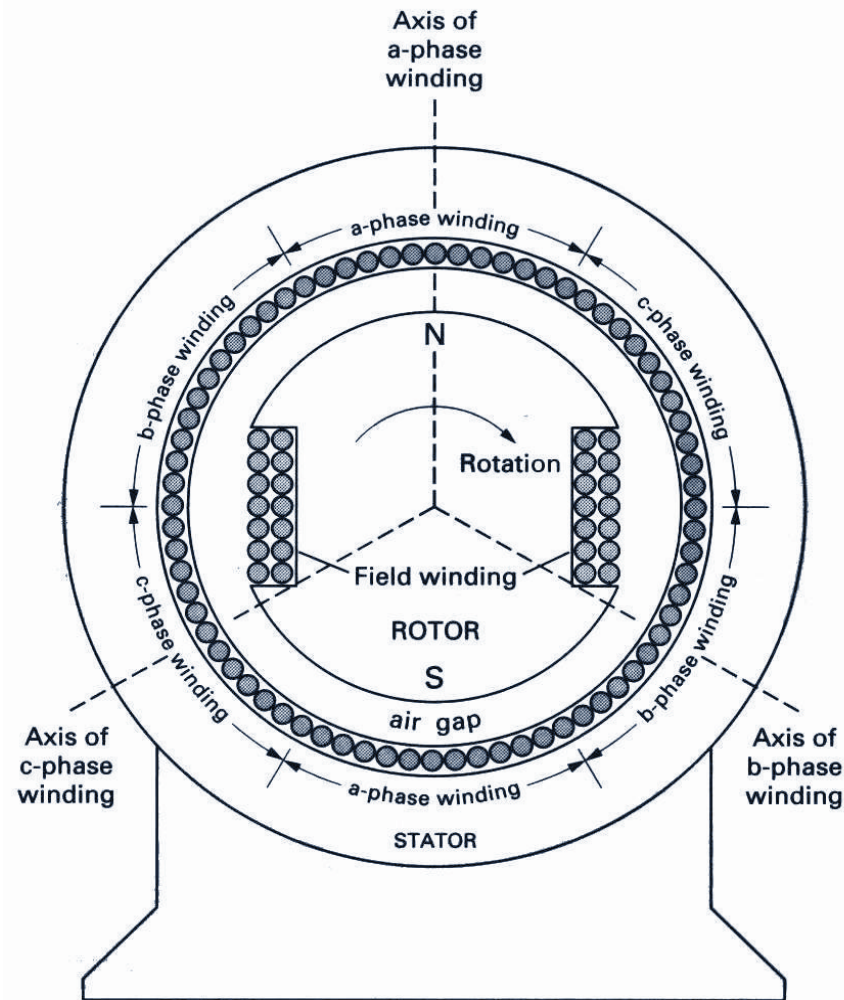
Éléments triphasés :

- générateur : circuit à 3 accès qui délivre 3 f.e.m, équilibré si les f.e.m sont égales en amplitude et déphasées temporellement entre elles d'un tiers de période et si chaque phase présente une impédance interne identique;
- charge : circuit à 3 accès, équilibré si chaque phase est constituée d'une impédance identique;
- circuit de transmission : relie la charge au générateur, équilibré si chaque phase possède une impédance identique.



4 conducteurs : un par phase + conducteur de neutre

2. Générateur triphasé équilibré



Le rotor tourne à une vitesse angulaire constante ω .

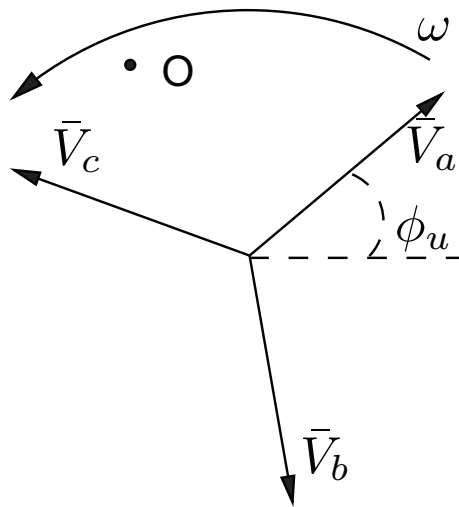
Pour les réseaux à 50 Hz : 3000 tours/min (Rem : la vitesse peut être divisée par un facteur p si le rotor possède plusieurs paires de pôles).

Circuit d'excitation du rotor parcouru par un courant continu.

Génère des f.e.m. égales en amplitude mais déphasées temporellement d'un tiers de période (correspond à un déphasage de 120°).

3. Tensions et courants triphasés équilibrés

Si système équilibré, courants et tensions dans les 3 phases gaux en amplitude et décalés d'un tiers de période = tensions et courants triphasés équilibrés.



$$\bar{V}_a = V e^{j\phi_u}$$

$$v_a(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$\bar{V}_b = V e^{j(\phi_u - \frac{2\pi}{3})}$$

$$v_b(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \phi_u - \frac{2\pi}{3})$$

$$= \bar{V}_a e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{2}V \cos(\omega(t - \frac{T}{3}) + \phi_u)$$

$$\bar{V}_c = V e^{j(\phi_u - \frac{4\pi}{3})}$$

$$v_c(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \phi_u - \frac{4\pi}{3})$$

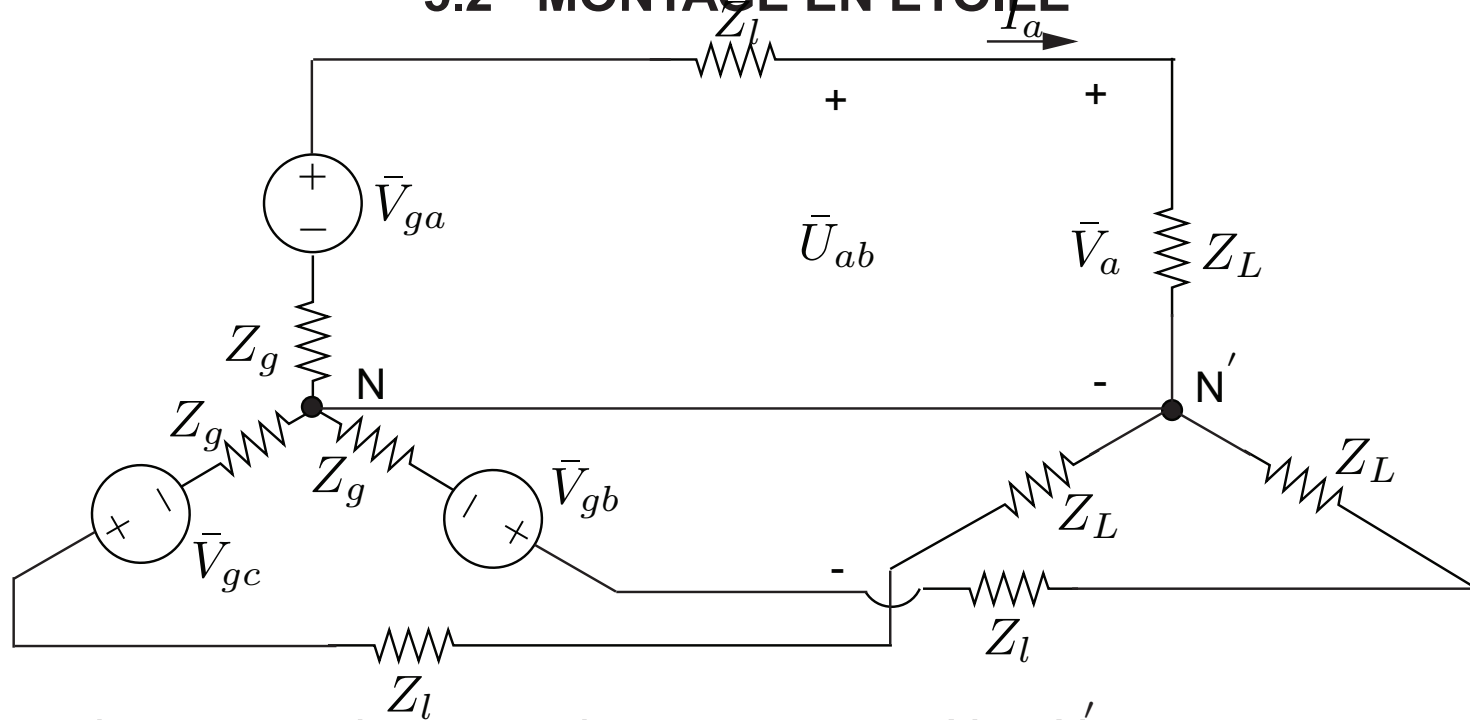
$$= \bar{V}_a e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{2}V \cos(\omega(t - \frac{2T}{3}) + \phi_u)$$

Idem pour les courants $\bar{I}_a$, $\bar{I}_b$ et $\bar{I}_c$.

$$\bar{V}_a + \bar{V}_b + \bar{V}_c = 0 \quad \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0$$

5.2 MONTAGE EN ÉTOILE



Le courant dans le conducteur reliant les *neutres* N et N' est :

$$\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0$$

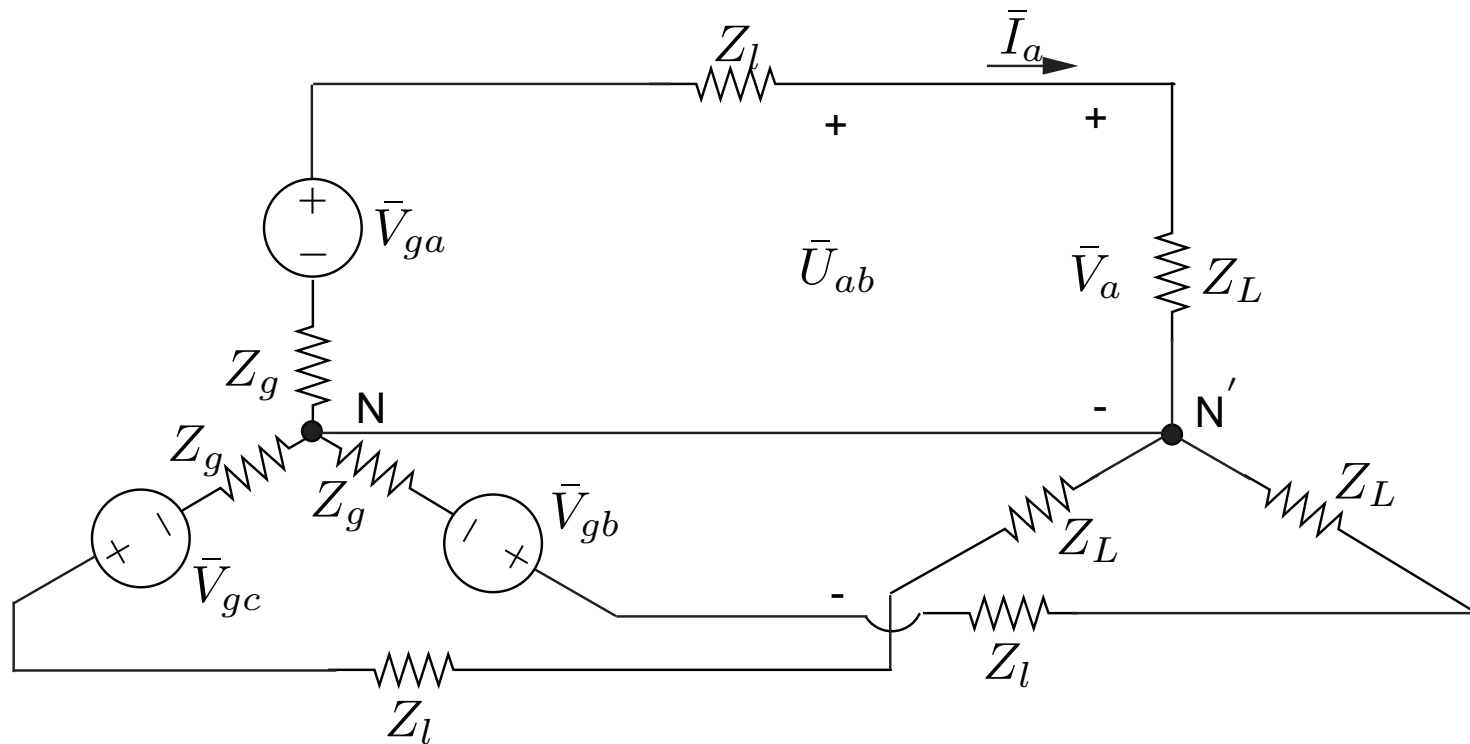
En régime parfaitement équilibré, tous les neutres sont au même potentiel.

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_a}{Z_L} = \frac{\bar{V}_{ga}}{Z_g + Z_l + Z_L}$$

Tension de phase et tension de ligne

$\bar{V}_a$ est une *tension de phase* (ou tension simple) : c'est la différence de potentiel aux bornes d'une charge monophasée, ou la différence de potentiel entre une ligne et le neutre.

$\bar{U}_{ab}$ est une *tension de ligne* (ou tension composée ou tension entre phases) : c'est la différence de potentiel entre deux phases.

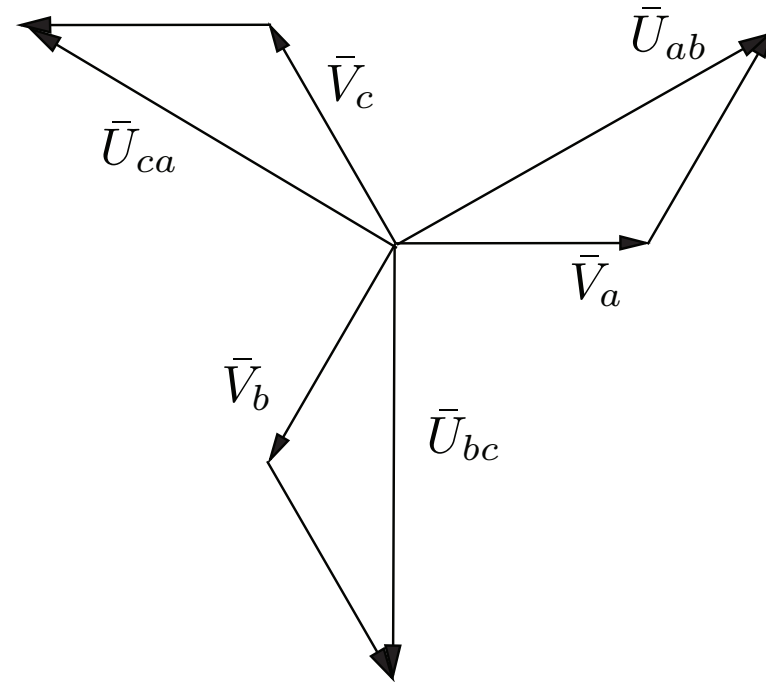


Les trois tensions de ligne sont :

$$\bar{U}_{ab} = \bar{V}_a - \bar{V}_b = \sqrt{3}\bar{V}_a e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\bar{U}_{bc} = \bar{V}_b - \bar{V}_c = \sqrt{3}\bar{V}_b e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\bar{U}_{ca} = \bar{V}_c - \bar{V}_a = \sqrt{3}\bar{V}_c e^{j\frac{\pi}{6}}$$



$\bar{U}_{ab}$, $\bar{U}_{bc}$, $\bar{U}_{ca}$ forment aussi une séquence directe et $U = \sqrt{3}V$

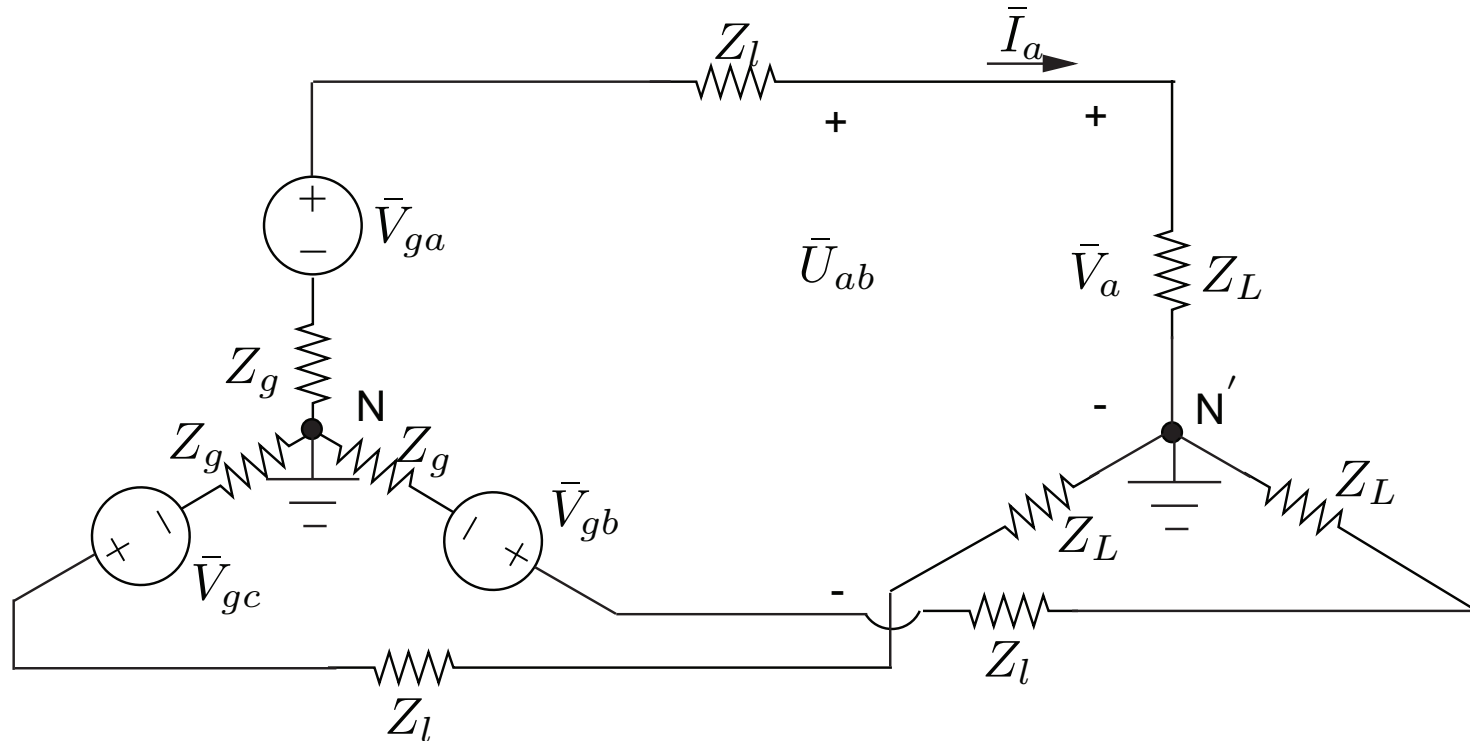
Dans un montage en étoile, on dispose de deux tensions.

Distribution domestique :

- tension de phase : 220 - 230 V (tension phase-neutre)
- tension de ligne : 380 - 400 V

Mise à la terre des neutres

En régime équilibré, le courant dans le conducteur de neutre est nul $\rightarrow$ on peut supprimer ce conducteur.



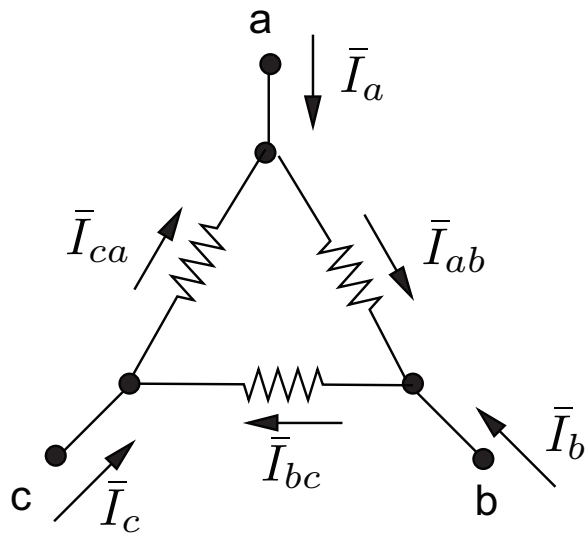
En pratique, il existe toujours un léger déséquilibre entre les phases et on connecte les neutres à la terre.

Avantages :

- faible courant de déséquilibre circule via la terre
- en cas de court-circuit entre une phase et la terre, évite les surtensions :
soit $\bar{V}_c = 0$,
 - si N et N' ne sont pas mis à la terre, différences de potentiel entre les deux autres phases et la terre = tension composée = $\sqrt{3}V$, tension supérieure à la tension normale;
 - si N et N' sont mis à la terre:
 - différences de potentiel entre les deux autres phases et la terre conservent des valeurs normales,
 - courant de "fuite" $i_a + i_b + i_c$ non négligeable circule via la terre entre le point de court-circuit et le neutre,
 - ce courant peut être détecté par une protection (disjoncteur différentiel !)

5.3 CONNEXION EN TRIANGLE

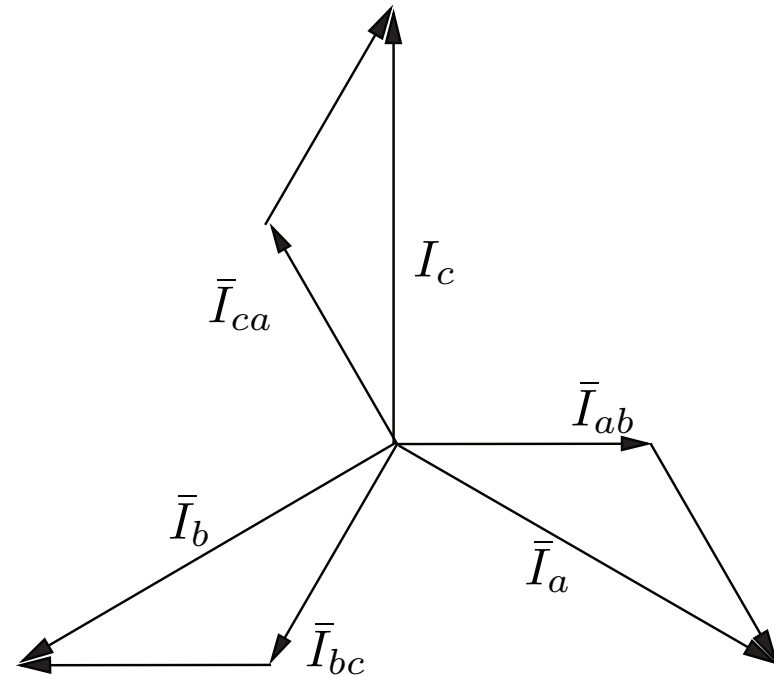
Un équipement triphasé peut être connecté en étoile comme plus haut ou en triangle.



Une seule tension, la tension de ligne, mais deux courants.
Pas de point neutre.

$\bar{I}_a, \bar{I}_b, \bar{I}_c$ sont les courants de ligne
 $\bar{I}_{ab}, \bar{I}_{bc}, \bar{I}_{ca}$ sont les courants de phase

$$\begin{aligned}\bar{I}_a &= \bar{I}_{ab} - \bar{I}_{ca} = \sqrt{3}\bar{I}_{ab}e^{-j\frac{\pi}{6}} \\ \bar{I}_b &= \bar{I}_{bc} - \bar{I}_{ab} = \sqrt{3}\bar{I}_{bc}e^{-j\frac{\pi}{6}} \\ \bar{I}_c &= \bar{I}_{ca} - \bar{I}_{bc} = \sqrt{3}\bar{I}_{ca}e^{-j\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$



Soit I_l l'amplitude des courants de ligne et I_{ph} l'amplitude des courants de phase :

$$I_l = \sqrt{3}I_{ph}$$

5.4 PUISSANCES

Puissance instantanée fournie à une charge triphasée connectée en étoile :

$$\begin{aligned} p_{3\phi}(t) &= v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c \\ &= 3VI \cos(\phi_u - \phi_i) = 3P \end{aligned}$$

Puissance instantanée fournie à une charge triphasée connectée en triangle :

$$\begin{aligned} p_{3\phi}(t) &= u_{ab} i_{ab} + u_{bc} i_{bc} + u_{ca} i_{ca} \\ &= 3U I_{ph} \cos(\phi_u - \phi_i) = 3P \end{aligned}$$

$p_{3\phi}(t) = 3 \times$ la P active consommée par l'impédance Z_L d'une des phases.

Dans les deux cas :

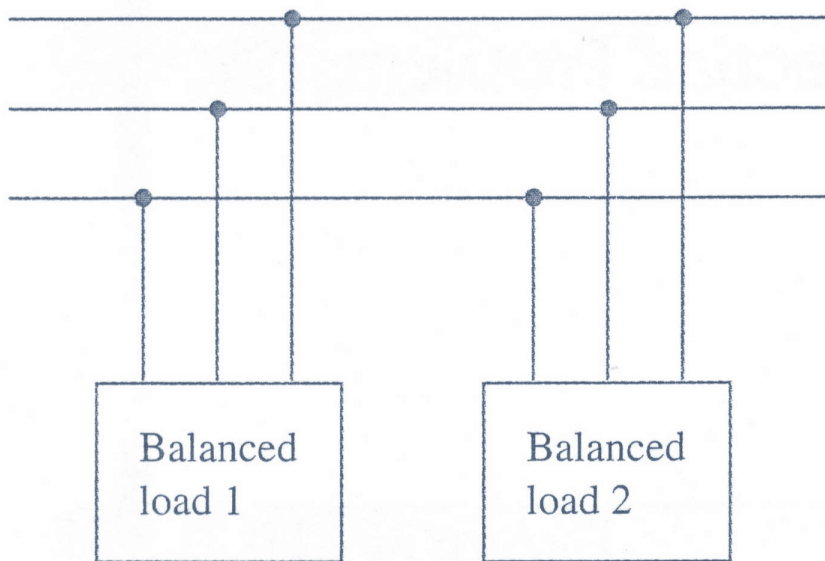
$$P_{3\phi} = \sqrt{3}UI \cos \Phi \quad Q_{3\phi} = \sqrt{3}UI \sin \Phi$$

avec

- $\cos \Phi$ de la charge Z_L
- U la tension de ligne, I le courant de ligne

5.5 EXERCICES

1. Charge composite - Compensation



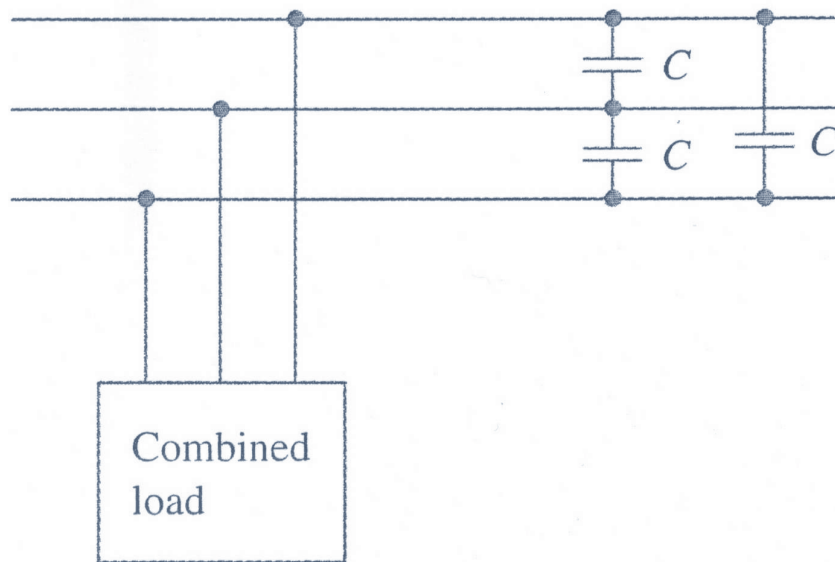
Tension de ligne : 15 kV

Load 1:

$$P_1 = 15 \text{ kW} \quad \cos \Phi_1 = 0.6 \text{ inductif}$$

Load 2 :

$$Q_2 = 5 \text{ kVar} \quad \cos \Phi_2 = 0.8 \text{ inductif}$$



Calculer P , Q , S , $\cos \Phi$ pour la charge globale

L'ensemble des 3 condensateurs vise à porter le $\cos \Phi$ à 0.9

Puissance réactive produite par ces condensateurs ?

Valeur de C ?

2. Courant de court-circuit - Système déséquilibré

Une charge résistive triphasée équilibrée en étoile consomme une puissance $P = 3 \text{ kW}$ et est alimentée par un générateur triphasé délivrant une tension de phase $V = 220 \text{ V}$. Un court-circuit d'impédance $R_{cc} = 5 \Omega$ se produit aux bornes de la phase a.

Les neutres sont mis à la terre et la résistance de terre est estimée à 20Ω .

Calculer les courants dans les 3 phases.