

**COURS DE PHYSIQUE ET CHIMIE**  
**CLASSES MP-TECHNO**  
**AMAM MOHAMED**  
**PEST**

**Ce cours couvre la totalité du programme de physique et de chimie des filières MP-Techno. Il est conçu pour les élèves des classes MP-Techno tunisiennes qui souhaitent avoir une vision globale du cours dans le strict respect du programme. Ce cours peut servir comme support aussi pour les élèves qui veulent passer les concours français (ccp, mines, centrale).**

**Pour bien profiter de ce cours il faut lire chaque chapitre au moins deux fois avant d'entamer les exercices.**

*prof. AMAMI ipest  
tel:95 55 64 10*

# partie I : Electromagnétisme

prof. F. AMMI ipest  
tel:95 55 6410

# Rappels d'Electrostatique

## I Le champ électrostatique

### I.1. Définitions

#### a) Force d'interaction

##### Loi de Coulomb

Deux charges ponctuelles immobiles  $q_1$  et  $q_2$ , placées dans le vide en des points  $M_1$  et  $M_2$  exercent l'une sur l'autre une force :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{1 \rightarrow 2}}{\|\vec{M}_1 M_2\|^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|\vec{M}_1 M_2\|^3}$$

ou, en utilisant les coordonnées sphériques ayant pour centre  $M_1$  :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$\epsilon_0$  est la permittivité du vide telle que  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  S.I

#### b) Champ électrostatique

La force exercée par la charge 1 sur la charge 2 peut aussi se mettre sous la forme :  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \times \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$   
 Cette forme est intéressante car elle comporte une partie qui ne dépend que de la charge 1 et que l'on nomme le **champ électrostatique créé par la charge 1**, noté  $\vec{E}_1$ .

##### Définition :

Le champ électrostatique  $\vec{E}_1$  créé par la charge  $q_1$  est tel que :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \times \vec{E}_1(r) \text{ avec } \vec{E}_1(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

##### Remarque

On peut alors interpréter la force de Coulomb, qui est une force à distance entre deux charges comme la force due à l'action du champ électrostatique créé par une charge sur l'autre.

### I.2. Principe de superposition

Soit une distribution  $\mathcal{D}$  de charges ponctuelles  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . L'expérience montre que la force résultante exercée sur une charge  $q$  par cette distribution est égale à la somme vectorielle des  $N$  forces exercées par chaque charge  $q_i$  supposée seule.

On s'intéresse en particulier à la force totale exercée dans le vide sur une charge  $q$  immobile par une distribution de charges immobiles. Cette force s'écrit :

$$\vec{F} = \sum_i q \vec{E}_i = q \sum_i \vec{E}_i = q \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

**Propriété**

Le champ électrostatique créé par la distribution de charge est donc égal à la somme de tous les champs électrostatiques créés par chacune des charges de la distribution.

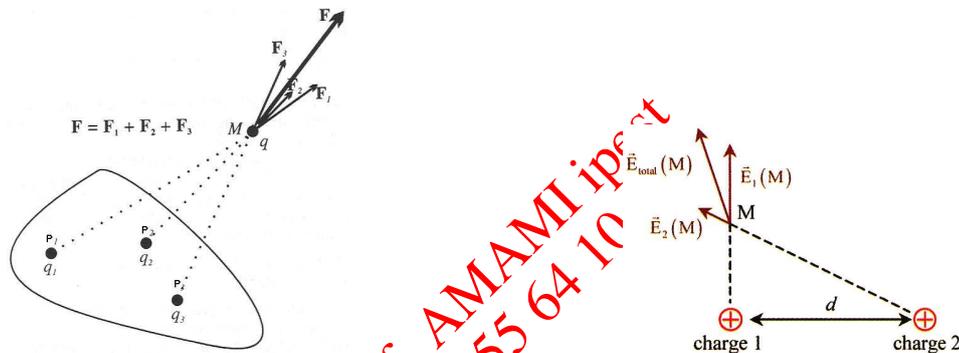


FIGURE 1 – (À gauche) Superposition des forces électrostatiques exercées par une distribution de charges. (À droite) Superposition des champs électrostatiques.

### I.3. Champ créé par une distribution de charges

a) Charges ponctuelles

Dans le cas d'une *distribution de charges ponctuelles*, le champ total créé au point  $M$  est donc la somme de tous les champs créés par chacune des charges en ce point :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{P_i M}}{\|\vec{P_i M}\|^3}$$

avec  $q_i$  la charge numéro  $i$  située au point  $P_i$

b) Charge volumique

Dans le cas d'une distribution  $\mathcal{D}$  de densité volumique de charge  $\rho$ , le champ total créé au point  $M$  est toujours la somme de tous les champs créés par chacune des charges en ce point. Cependant nous n'avons pas affaire à des charges ponctuelles : il faut donc faire la somme de tous les champs créés par les charges  $\delta q_{vol}$  contenues dans les petits volumes  $d\tau$  autour des points  $P_i$  avec  $\delta q_{vol} = \rho(P_i) d\tau$ . Cette somme est continue :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in \mathcal{D}} \rho(P) d\tau \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in \mathcal{D}} \rho(P) \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} d\tau$$

### c) Charge surfacique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{P \in \mathcal{D}} \sigma(P) dS \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{P \in \mathcal{D}} \sigma(P) \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} dS$$

### d) Charge linéique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{D}} \lambda(P) d\ell \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{D}} \lambda(P) \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} d\ell$$

## I.4. Le champ électrostatique est il toujours défini ?

Comme le calcul de champs repose sur un calcul d'intégrales, le champ créé peut ne pas être défini dans le cas où l'intégrale ne converge pas, c'est à dire quand la somme tend vers l'infini.

Ceci ne se produit jamais dans le cas à trois dimensions (charges ponctuelles ou distribution volumique). En effet, la distribution volumique de charge correspond à la réalité physique de l'objet considéré.  $\vec{E}$  est alors toujours défini et continu (pas de variation brutale) pour une distribution volumique de charge.

En revanche, les distributions surfacique et linéique sont des modélisations. En effet, pour la distribution surfacique, on suppose que l'épaisseur du matériau tend vers zéro, ce qui implique que la densité volumique de charge tend vers l'infini. Cela a pour conséquence que le champ électrostatique n'est pas défini en un point de la distribution et n'est pas continu à l'interface de la distribution.

## II Potentiel électrostatique

### II.1. Circulation du champ électrostatique et potentiel

#### Définition :

On appelle circulation d'un vecteur (ici circulation du champ électrostatique) entre les points  $A$  et  $B$  la quantité :

$$C_{AB(\Gamma)} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{avec } d\vec{r} \text{ un déplacement infinitésimal le long de } \Gamma$$

Si l'on calcule la circulation du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle, on a :

$$C_{AB(\Gamma)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

On constate que cette circulation est indépendante de la courbe  $\Gamma$  choisie et ne dépend que de la position des points  $A$  et  $B$ .

D'après le principe de superposition, le champ total créé par une distribution de charges est égal à la somme de tous les champs créés par chaque charge. On peut appliquer le raisonnement précédent à chacun de ces champs et on a donc la propriété suivante pour le champ total :

### Propriété

La circulation entre 2 points  $A$  et  $B$  du champ électrostatique créé par une distribution de charges est indépendante de la courbe  $\Gamma$  choisie pour aller du point  $A$  au point  $B$ .

### Définition :

Il existe une fonction  $V$  appelée potentiel électrostatique qui ne dépend que de la position des points et telle que :

$$C_{AB(\Gamma)} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(A) - V(B)$$

Pour une charge ponctuelle, on a :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0$$

$V$  s'exprime en volt.

## II.2. Expressions du potentiel

### a) Relation locale entre potentiel et champ électrostatique

Expression de  $dV$  À partir de l'expression intégrale :

$$C_{AB(\Gamma)} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(A) - V(B)$$

et comme

$$V(A) - V(B) = - \int_A^B dV$$

on peut déduire une *expression locale* de la relation :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

**Rappels sur le gradient** Soit un repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

Soit une fonction des trois variables d'espace  $f(x, y, z)$ . Soit  $M$  un point de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$  et  $M'$  un point infiniment voisin de coordonnées  $(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ .

On a alors  $\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$

Lorsque l'on passe de  $M$  à  $M'$ ,  $f$  passe de  $f$  à  $f + df$  avec

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z} dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x,z} dy + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{x,y} dz = \overrightarrow{\text{grad} f} \cdot d\vec{\ell}$$

où  $d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$  et où  $\overrightarrow{\text{grad} f}$  est appelé gradient de la fonction  $f$ .

### Définition :

Le gradient en un point  $M$  d'une fonction scalaire  $f(M)$  est un champ de vecteurs, noté  $\overrightarrow{\text{grad}_M f}$  et défini par

$$df(M) = \overrightarrow{\text{grad}_M f} \cdot d\vec{\ell}$$

où  $df$  est la différentielle de  $f$  au point  $M$  et  $d\vec{\ell}$  le vecteur déplacement du point  $M$  lors d'un déplacement infinitésimal.

### Remarque

Dans la suite, on omettra l'indice  $M$  et l'on notera  $\overrightarrow{\text{grad} f} = \overrightarrow{\text{grad}_M f}$ .

### Propriété

En coordonnées cartésiennes, le gradient d'une fonction  $f(x, y, z)$  a pour expression

$$\overrightarrow{\text{grad} f} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z} \vec{u}_x + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x,z} \vec{u}_y + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{x,y} \vec{u}_z$$

En introduisant l'opérateur nabla

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

on a

$$\overrightarrow{\text{grad} f} = \vec{\nabla} f$$

Propriété

L'expression du vecteur nabra  $\vec{\nabla}$  dépend du système de coordonnées.

- en coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Soit la surface  $\Sigma$  pour laquelle  $f(x, y, z) = cte$ . Soit  $\vec{d\ell}$  un déplacement élémentaire sur cette surface. Ce déplacement implique  $df = 0$  donc  $\vec{\text{grad}}f$  est orthogonal à tout déplacement  $\vec{d\ell}$  sur cette surface. De plus, si  $f$  est croissante entre deux points  $M$  et  $M'$ ,  $df > 0$  et  $\vec{\text{grad}}f$  est orienté dans le même sens que  $\vec{d\ell}$ .

Propriété

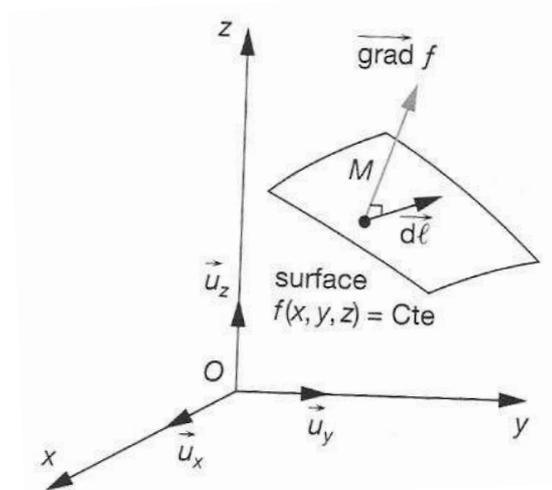
- $\vec{\text{grad}}f$  est un champ de vecteurs orthogonaux en tous points à la surface  $f(x, y, z) = cte$ ;
- $\vec{\text{grad}}f$  est orienté dans le sens où  $f$  croît.

Remarque

Le gradient généralise la dérivée d'une fonction dans le cas d'un espace à plusieurs dimensions.

**Relation locale entre  $E$  et  $V$**  Par définition de la fonction gradient :

$$dV = \vec{\text{grad}}V \cdot \vec{dr} \quad \text{donc} \quad \vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$$



**b) Principe de superposition**

Le champ électrostatique total créé par une distribution de charges est la somme des champs créés par chaque charge. On a alors :

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i -dV_i = dV \text{ avec } V = \sum_i V_i$$

**Propriété**

Le principe de superposition est également valable pour le potentiel électrostatique.

**c) Expressions du potentiel**

L'expression du potentiel créé par les différentes distributions de charges s'obtient donc facilement à partir de l'expression du potentiel créé par une charge ponctuelle :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0$$

- distribution discrète de charges :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M} + V_0$$

- distribution volumique de charges :

$$V(M) = \iiint_{P \in D} \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 PM} + V_0 = \iiint_{P \in D} \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 PM} + V_0$$

- distribution surfacique de charges :

$$V(M) = \iint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 PM} + V_0 = \iint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 PM} + V_0$$

- distribution linéique de charges :

$$V(M) = \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 PM} + V_0 = \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 PM} + V_0$$

#### Remarque

Le potentiel n'est pas défini en un point d'une distribution linéique de charge et n'est pas continu à la traversée de cette distribution.

### II.3. Énergie potentielle électrostatique

Calculons le travail de la force de Coulomb créée par un champ électrostatique  $\vec{E}$  sur une charge  $q$ . La force de Coulomb s'écrit :  $\vec{F} = q\vec{E}$ .  
Le travail élémentaire s'écrit donc :  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r}$ .  
En utilisant la relation définissant le potentiel électrostatique  $V$  :  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$ , on obtient :

$$\delta W = -q dV \quad \text{et} \quad W_{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B)$$

On voit que le travail de la force de Coulomb est indépendant du chemin suivi. La force de Coulomb est donc conservative et on peut définir l'énergie potentielle dont elle dérive.  
D'après la relation  $W_{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B)$ , on en déduit que l'énergie potentielle dont dérive la force de Coulomb exercée sur une charge  $q$  est :

#### Propriété

L'énergie potentielle dont dérive la force de Coulomb est

$$E_p = qV$$

avec  $V$  le potentiel électrostatique exercé au point où se situe la charge  $q$

## III Propriétés de symétrie du champ et du potentiel

### III.1. Symétries du champ électrostatique

#### a) Symétrie plane

#### Définition :

On dit qu'il existe une symétrie plane (pour une distribution de charges) si, quels que soient deux points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à un plan  $\Pi$ , on a :  $\delta q(P) = \delta q(P')$

Soit une distribution de charge ayant un plan de symétrie  $\Pi$  (voir figure 2).

- En tout point  $M$  du plan de symétrie, la contribution des deux éléments de volume  $d\tau_P$  et  $d\tau_{P'}$  symétriques par rapport à  $\Pi$  conduit à un champ créé au point  $M$  contenu dans le plan  $\Pi$ .
  - En tout point  $M$  extérieur au plan de symétrie, le champ créé au point  $M$  est le symétrique du champ créé au point  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à  $\Pi$ .
  - $V(M) = \frac{q_P}{4\pi\epsilon_0 PM} + \frac{q_{P'}}{4\pi\epsilon_0 P'M}$  et  $V(M') = \frac{q_P}{4\pi\epsilon_0 PM'} + \frac{q_{P'}}{4\pi\epsilon_0 P'M'}$
- Or,  $q_P = q_{P'}$ ,  $PM = P'M'$  et  $P'M = PM'$  donc  $V(M') = V(M)$

**Propriété**

Le champ électrostatique créé en un point d'un plan de symétrie appartient à ce plan.

À l'extérieur d'un plan de symétrie, le champ électrique est symétrique par rapport à ce plan :

si  $M' = sym_{\Pi}(M)$  alors  $\vec{E}(M') = sym_{\Pi}(\vec{E}(M))$  et  $V(M') = V(M)$

**Remarque**

On dit alors que  $\vec{E}$  est un vrai vecteur ou un vecteur polaire.

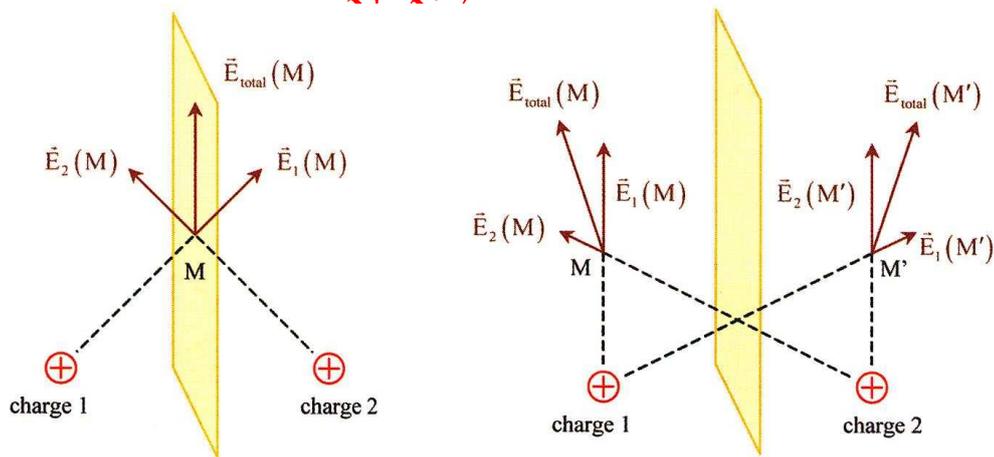


FIGURE 2 – (À gauche) Champ électrostatique en un point d'un plan de symétrie. (À droite) Champ en un point extérieur à un plan de symétrie.

**Propriété**

Le champ électrostatique en un point d'un axe de symétrie est colinéaire à cet axe.

b) Anti-symétrie plane

**Définition :**

On dit qu'il existe une anti-symétrie plane (pour une distribution de charges) si, quels que soient deux points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à un plan  $\Pi^*$ , on a :  $\delta q(P) = -\delta q(P')$

Soit une distribution de charge ayant un plan d'anti-symétrie  $\Pi^*$  (voir figure 3).

- En tout point  $M$  du plan d'anti-symétrie, la contribution des deux éléments de volume  $d\tau_P$  et  $d\tau_{P'}$  symétriques par rapport à  $\Pi$  conduit à un champ créé au point  $M$  perpendiculaire au plan  $\Pi^*$ .
- En tout point  $M$  extérieur au plan de symétrie, le champ créé au point  $M$  est l'opposé du symétrique du champ créé au point  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à  $\Pi^*$ .
- $V(M) = \frac{q_P}{4\pi\epsilon_0 PM} + \frac{q_{P'}}{4\pi\epsilon_0 P'M}$  et  $V(M') = \frac{q_P}{4\pi\epsilon_0 PM'} + \frac{q_{P'}}{4\pi\epsilon_0 P'M'}$

Or,  $q_P = -q_{P'}$ ,  $PM = P'M'$  et  $P'M = P'M'$  donc  $V(M') = -V(M)$

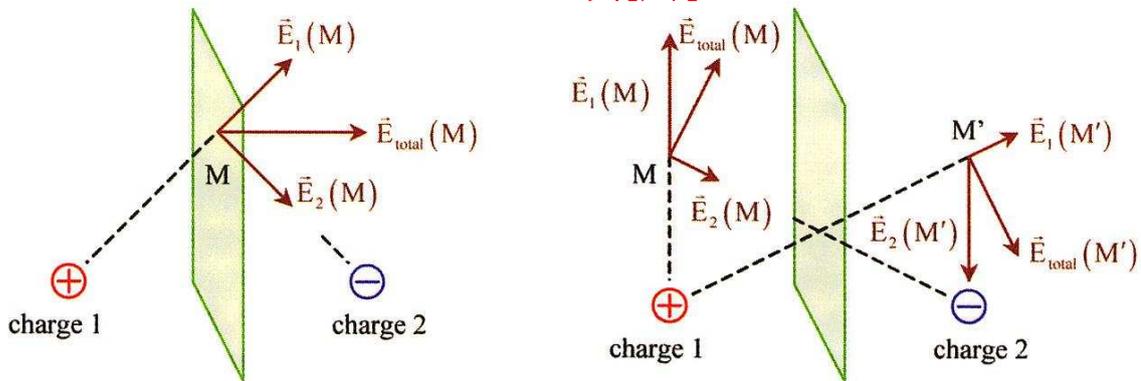


FIGURE 3 – (À gauche) Champ électrostatique en un point d'un plan d'anti-symétrie. (À droite) Champ en un point extérieur à un plan d'anti-symétrie.

**Propriété**

Le champ électrostatique créé en un point d'un plan d'anti-symétrie est perpendiculaire à ce plan.

À l'extérieur d'un plan d'anti-symétrie, le champ électrique est tel que :

si  $M' = sym_{\Pi^*}(M)$  alors  $\vec{E}(M') = -sym_{\Pi^*}(\vec{E}(M))$  et  $V(M') = -V(M)$

### III.2. Invariances du champ et du potentiel électrostatiques

On admet la validité du principe de Curie énoncé ci-dessous dans le cas de l'électrostatique.

#### Propriété

Le champ et le potentiel électrostatiques possèdent les mêmes propriétés d'invariance que la distribution de charge qui les crée.

#### a) Invariance par translation

##### Définition :

On dit qu'une distribution de charges est invariante par translation d'axe  $Oz$  si elle reste inchangée par toute translation d'axe  $Oz$  : quel que soit le point  $P$ , tous les points  $P'$  obtenus par translation d'axe  $Oz$  vérifient

$$\delta q(P) = \delta q(P')$$

##### Remarque

- Pour avoir une telle invariance, il faut donc que la distribution de charge soit infinie dans la direction de l'axe. Elle est de plus indépendante de la position  $z$  où l'on se trouve.
- Pour une telle distribution, tout plan perpendiculaire à l'axe est plan de symétrie. On a donc une infinité de symétries planes.

##### Conséquence

Si une distribution de charges est invariante par translation d'axe ( $Oz$ ), alors le champ et le potentiel électrostatique ne dépendent pas de  $z$ .

#### b) Invariance par rotation

##### Définition :

On dit qu'une distribution de charges est invariante par rotation d'axe  $Oz$  si elle reste inchangée par toute rotation autour de l'axe  $Oz$  : quel que soit le point  $P$ , tous les points  $P'$  obtenus par rotation de  $P$  autour de  $Oz$  vérifient

$$\delta q(P) = \delta q(P')$$

Remarque

- Pour une telle invariance, la distribution de charge est forcément indépendante de l'angle  $\theta$ . En utilisant des coordonnées cylindrique, on a donc :  $\delta q(r, \theta, z) = \delta q(r, z)$ .
- Pour une telle distribution, tout plan contenant l'axe  $Oz$  est plan de symétrie. On a donc une infinité de symétries planes.

Conséquence

Si une distribution de charges est invariante par rotation autour ( $Oz$ ), alors le potentiel et les composantes du champ électrostatiques ne dépendent pas de  $\theta$  où  $\theta$  est l'angle repérant la rotation autour de ( $Oz$ ). En coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ), on a donc

$$\|\vec{E}\| = E(r, z) \quad \text{et} \quad V = V(r, z)$$

Remarque

Si une distribution de charges est invariante par rotation d'axe ( $Oz$ ), la direction du champ peut tout de même dépendre de l'angle  $\theta$  !

Invariance	Conséquence sur $V$	Conséquence sur $\vec{E}$
translation parallèlement à $Oz$	$V(M) = V(x_M, y_M)$ ou $V(M) = V(r_M, \theta_M)$	$\vec{E}(M) = E_x(x_M, y_M)\vec{u}_x + E_y(x_M, y_M)\vec{u}_y$ ou $\vec{E}(M) = E_r(r_M, \theta_M)\vec{u}_r + E_\theta(r_M, \theta_M)\vec{u}_\theta$
rotation autour de $Oz$	$V(M) = V(r_M, z_M)$	$\vec{E}(M) = E_r(r_M, z_M)\vec{u}_r + E_z(r_M, z_M)\vec{u}_z$

### III.3. Exemples d'application

#### a) Direction et variables du champ créé par un fil infini

Soit un fil infini de densité linéique de charge  $\lambda$ . On souhaite déterminer le champ électrostatique en un point  $M$  situé à une distance  $r$  de l'axe du fil, porté par  $Oz$  (voir figure 4).

- Le plan perpendiculaire à  $Oz$  et passant par  $M$  est plan de symétrie. De même, le plan contenant  $Oz$  et passant par  $M$  est plan de symétrie donc  $\vec{E}(M) = E_r\vec{u}_r$
- Il y a invariance par translation parallèlement à  $Oz$  et par rotation autour de  $Oz$  donc  $E_r = E_r(r)$

d'où  $\boxed{\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r}$

#### b) Direction et variables du champ créé par une sphère chargée

Soit une sphère de rayon  $R$  uniformément chargée en volume avec une densité volumique de charge  $\rho$ . On souhaite déterminer le champ électrostatique en un point  $M$  situé à une distance  $r$  du centre de la sphère (voir figure 5).

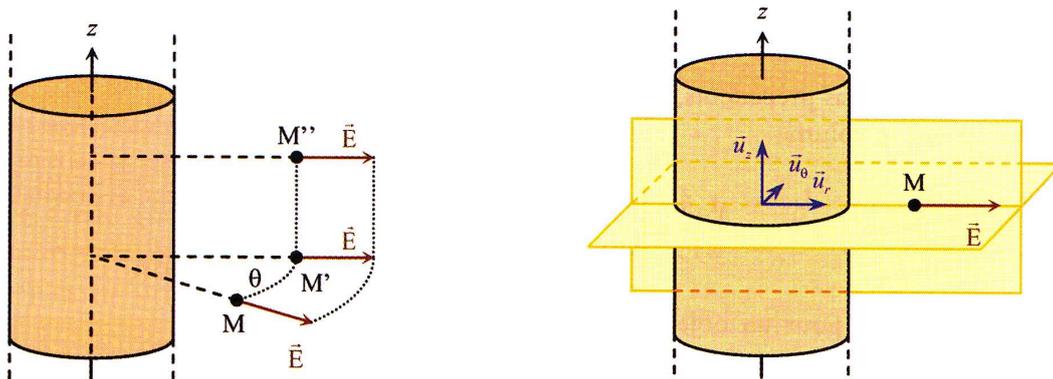


FIGURE 4 – Champ électrostatique créé par une distribution de charges à symétrie cylindrique.

- Tout plan passant par  $OM$  est plan de symétrie donc  $\vec{E}(M) = E_r \vec{u}_r$
- Il y a invariance par rotation autour de  $O$  donc  $E_r = E_r(r)$  d'où  $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r$

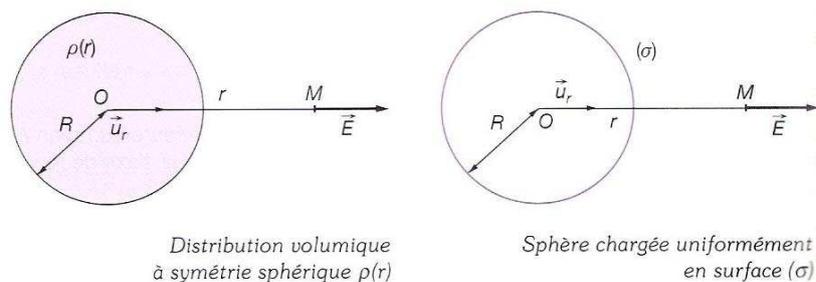


FIGURE 5 – Champ électrostatique créé par une distribution de charges à symétrie sphérique.

#### Remarque

Ce ne sont ni le même  $r$  ni le même  $\vec{u}_r$  que ceux des coordonnées cylindriques. On est ici en coordonnées sphériques. Ne pas les confondre !

### III.4. Topographie du champ et du potentiel électrostatiques

#### Définition :

Une ligne de champ est une courbe tangente au champ  $\vec{E}(M)$  en tout point  $M$ .

Une surface équipotentielle est une surface sur laquelle le potentiel est constant.

Propriété

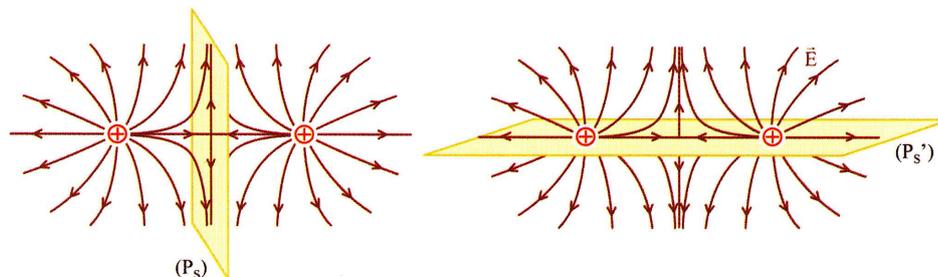
1. Les points de convergence et de divergence sont des points où se situent des charges ponctuelles : les lignes de champ **convergent vers une charge négative** et **divergent à partir d'une charge positive**.
2. Les lignes de champ ne se referment pas sur elles-mêmes.
3. Deux lignes de champ peuvent se croiser en un point  $M$ , appelé **point singulier**, si et seulement si :
  - le champ est nul en ce point  $M$   
ou
  - le champ n'est pas défini en ce point  $M$ , c'est-à-dire s'il existe une charge ponctuelle en ce point, ou si ce point est situé sur une distribution surfacique ou linéïque de charge ( $\rho \rightarrow \infty$ ).
4. Le potentiel **décroit** le long d'une ligne de champ.
5. Les lignes de champ sont **orthogonales aux surfaces équipotentielles** sauf si le point d'intersection est un point de champ nul.
6. En un point, il ne passe qu'**une seule** surface équipotentielle.



Lignes de champ d'une charge ponctuelle positive (à gauche) et négative (à droite).

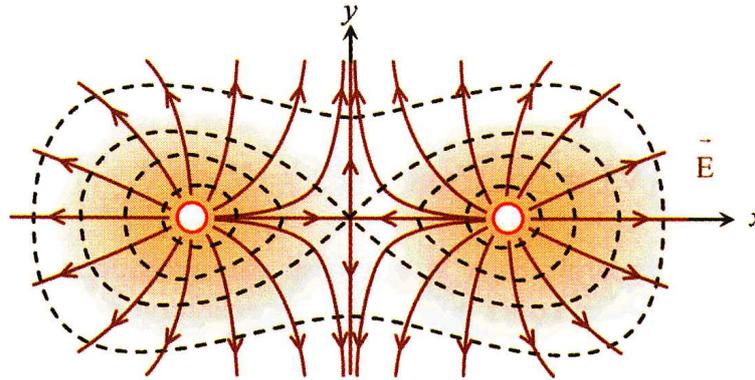
FIGURE 6 – Lignes de champ d'une charge ponctuelle.

**Exemple d'analyse d'une carte de champ** Le plan médiateur du segment portant les deux charges est plan de symétrie. Tout plan passant par les deux charges est plan de symétrie.



Plans de symétrie d'un système de deux charges identiques.

- Les lignes de champ divergent à partir des charges : les charges sont positives.



- les lignes de champ et les équipotentiellees sont symétriques par rapport à  $yOz$  et  $xOz$  : ce sont des plans de symétrie de la distribution de charge (voir plans de symétrie plus haut).  
C'est pourquoi, pour  $M$  appartenant à  $Oy$ ,  $\vec{E}(M)$  est colinéaire à  $\vec{u}_y$  et pour  $M$  appartenant à  $Ox$ ,  $\vec{E}(M)$  est colinéaire à  $\vec{u}_x$
- On remarque bien que  $\vec{E}$  est orthogonal aux équipotentielles.
- Point singulier :  $\vec{E}(O) = \vec{0}$  logique car  $\vec{E}(O) = \frac{q(\vec{P}_1\vec{O} + \vec{P}_2\vec{O})}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \vec{0}$
- Les équipotentielles entourent chaque charge, puis, à partir de l'équipotentielle critique, entourent les deux charges.
- Près des charges, on a la même carte de champ que pour une charge  $q$  seule. Loin des charges, la carte de champ ressemble à celle d'une charge ponctuelle de charge  $2q$ .

Remarque :  $Ox$  étant axe de symétrie, on pourrait reconstituer la carte de champ 3D par rotation autour de  $Ox$

prof. AMMAM (06) 95 55 61 10  
 tel: 95 55 61 10

## IV Calcul du champ et du potentiel électrostatiques

### IV.1. Calcul direct

#### a) Méthode

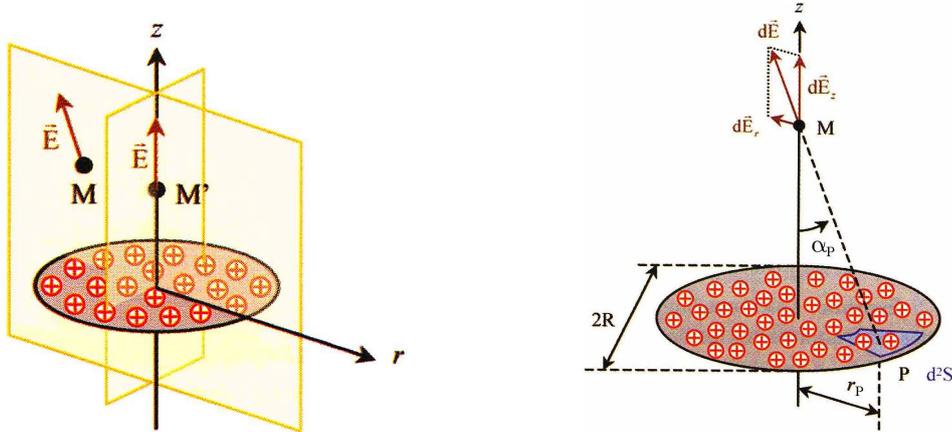
1. Identifier les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution étudiée. En déduire la forme (variables et direction) du champ/du potentiel.
2. Réaliser un découpage de la distribution en volume, surface ou longueur élémentaires.
3. Écrire l'expression du champ/du potentiel élémentaire créé par ces éléments de volume, surface ou longueur. Projeter le champ sur les différents axes afin de calculer des grandeurs scalaires.
4. Intégrer les projections du champ élémentaire sur les différents axes ou intégrer le potentiel élémentaire.
5. Donner l'expression vectorielle du champ total.

Remarque

Si l'ordre du calcul n'est pas imposé, il vaut mieux calculer d'abord le potentiel puis déterminer  $\vec{E}$  par la relation  $\vec{E} = -\text{grad} V$ .

**b) Champ sur l'axe d'un disque uniformément chargé en surface**

Soit un disque de rayon  $R$  uniformément chargé avec une densité surfacique de charge  $\sigma$ . On veut calculer le champ  $\vec{E}$  créé en un point  $M$  de l'axe  $Oz$ .



1. Identifier les symétries et les invariances

- tout plan passant par  $Oz$  est plan de symétrie.  $M$  appartient à  $Oz$  donc  $\vec{E}(M)$  est à l'intersection de tous ces plans :  $\boxed{\vec{E}(M) = E_z \vec{u}_z}$
- il y a invariance par rotation et  $r$  est fixé donc  $E_z$  ne dépend que de  $z$  :  $\boxed{\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{u}_z}$

2. Découpage

On cherche la plus grande surface sur laquelle  $E_z$  est constant, c'est-à-dire sur laquelle  $PM = cte$  ou encore  $r_P = cte$

Il s'agit d'une couronne de rayon  $r_P$  et d'épaisseur  $dr_P$ . Sa surface est  $dS_P = 2\pi r_P dr_P$

Charge contenue dans une couronne élémentaire :  $\boxed{\delta q = \sigma dS_P = \sigma 2\pi r_P dr_P}$

3. Champ élémentaire créé par une couronne élémentaire

$$d\vec{E} = \frac{\delta q \vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{PM}||^3} = \frac{\sigma 2\pi r_P dr_P \vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{PM}||^3} \text{ et } ||\vec{PM}|| = \frac{z}{\cos \alpha_P} \text{ donc } \vec{PM} = \frac{z}{\cos \alpha_P} (-\sin \alpha_P \vec{u}_r + \cos \alpha_P \vec{u}_z)$$

$$\boxed{d\vec{E} = \frac{\sigma r_P dr_P (\cos \alpha_P)^3}{2\epsilon_0 z^3} \left( \frac{z}{\cos \alpha_P} (-\sin \alpha_P \vec{u}_r + \cos \alpha_P \vec{u}_z) \right) = dE_r \vec{u}_r + dE_z \vec{u}_z}$$

Projection : on sait que  $\vec{E}(M) = E_z \vec{u}_z$  donc on ne s'intéresse qu'à la composante  $dE_z$

$$\boxed{dE_z = d\vec{E} \cdot \vec{u}_z = \frac{\sigma \cos^3 \alpha_P r_P}{2\epsilon_0 z^2} dr_P}$$

4. Intégration

$dE_z$  comporte deux variables :  $\alpha_P$  et  $r_P$ .

On se ramène à une seule variable :  $r_P = z \tan \alpha_P$  donc  $dr_P = z d(\tan \alpha_P) = \frac{z}{\cos^2 \alpha_P} d\alpha_P$  et

$$dE_z = \frac{\sigma \cos^3 \alpha_P z \tan \alpha_P}{2\epsilon_0 z^2} \frac{z}{\cos^2 \alpha_P} d\alpha_P = \frac{\sigma \sin \alpha_P}{2\epsilon_0} d\alpha_P$$

$$E_z = \int_{\alpha_P=0}^{\alpha_P=\alpha_{max}} dE_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\alpha_{max}} \sin \alpha_P d\alpha_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [-\cos \alpha_P]_0^{\alpha_{max}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_{max})$$

avec  $\cos \alpha_{max} = \frac{z}{PM} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$  d'où  $E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$

5. Champ vectoriel

$$\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{u}_z$$

Remarques

- Si  $z' < 0$ , avec  $M'(z')$  symétrique de  $M(z)$  (donc  $z' = -z$ ) alors  $\vec{E}(M') = sym \vec{E}(M) = -\vec{E}(M)$  d'où  $E_z(z') = -E_z(z)$

$$E_z(z') = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 + \frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} \right) = E_z(z' < 0)$$

On remarque que l'expression du champ dépend du signe de  $z$ .

- $\lim_{z \rightarrow 0^+} E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  et  $\lim_{z \rightarrow 0^-} E_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  il y a discontinuité du champ au passage de la distribution de charge.
- Cas de la plaque infinie : si  $R \gg z$ ,  $\vec{E}(M) \sim \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$

IV.2. Calcul du champ et du potentiel électrostatique par le théorème de Gauss

a) Théorème de Gauss

Théorème de Gauss

Le flux sortant du champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par une distribution de charges  $\mathcal{D}$  à travers une surface fermée  $\Sigma$  est égal à la charge contenue à l'intérieur de la surface  $\Sigma$  divisée par la permittivité du vide  $\epsilon_0$  :

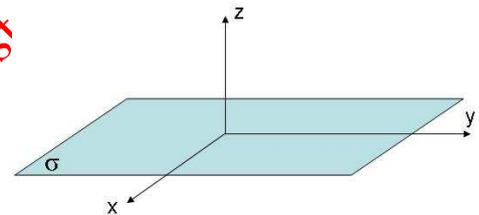
$$\Phi = \oiint_{\Sigma \text{ fermée}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

b) Méthode

1. Etude des symétries et des invariances pour déterminer la direction du champ électrostatique et les variables dont dépend sa norme.
2. Choix d'une surface fermée  $\Sigma$  dite *surface de Gauss* pour appliquer le théorème. Ce choix dépend bien sûr des symétries trouvées.  
 Pour déterminer le champ en un point  $M$  de l'espace, on choisit une surface  $\Sigma$  qui comprend une surface  $\Sigma'$  telle que :
  - $\Sigma'$  passe par le point  $M$
  - la norme de  $\vec{E}$  soit identique en tout point de  $\Sigma'$
  - le champ  $\vec{E}$  soit normal à  $\Sigma'$  en tout point
3. Application du théorème : calcul de l'expression du flux et de la charge  $Q_{int}$  puis détermination de  $\vec{E}$ .

c) Exemple

Soit un plan infini  $xOy$  uniformément chargé en surface avec une densité surfacique de charge  $\sigma$ . On souhaite déterminer le champ électrostatique en un point  $M$  situé à une distance  $z$  du plan.



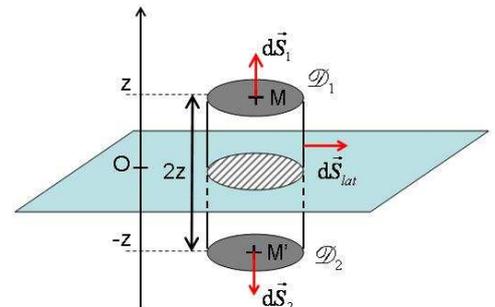
1. Analyse des invariances et des symétries

- Tout plan perpendiculaire à  $xOy$  est plan de symétrie donc  $\vec{E}(M) = E_z \vec{u}_z$
- Il y a invariance par translation parallèlement à  $Ox$  et à  $Oy$  donc  $E_z = E_z(z)$  d'où  $\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{u}_z$
- Si  $M'$  est le symétrique de  $M$  par rapport à  $xOy$  ( $z' = -z$ ) alors  $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$  soit  $E_z(z') = -E_z(z)$

2. Choix d'une surface de Gauss adaptée

On cherche une surface sur laquelle  $\|\vec{E}\| = cte$  donc il faut  $z = cte$ . On choisit un disque  $\mathcal{D}_1$  de surface  $S$  passant par  $M$  (cote  $z$ ).

Comme on doit choisir une surface fermée, on complète cette surface avec un cylindre de hauteur  $2z$  et de section  $S$  et un disque  $\mathcal{D}_2$  identique à  $\mathcal{D}_1$  et passant par  $M'$  (cote  $-z$ ).



3. Application du théorème de Gauss

• **Calcul du flux :**

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat} + \iint_{\mathcal{D}_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{\mathcal{D}_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2$$

Or,  $dS_{lat}$  est orthogonal à  $\vec{u}_z$  donc  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat} = 0$ .

$\iint_{D_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{D_1} E_z(z) \vec{u}_z \cdot dS_1 \vec{u}_z = \iint_{D_1} E_z(z) dS_1$  et  $E_z(z)$  est a une valeur constante sur le

disque donc  $\boxed{\iint_{D_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = E_z(z) \iint_{D_1} dS_1 = E_z(z) \times S}$

De même,  $\iint_{D_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \iint_{\epsilon_1} -E_z(z) \vec{u}_z \cdot (-dS_2 \vec{u}_z) = \iint_{D_2} E_z(z) dS_2 = E_z(z) \times S$

donc  $\boxed{\iint_{D_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = E_z(z) \times S}$

Finalement,  $\boxed{\Phi = 2E_z(z) \times S}$

- Calcul de la charge intérieure :  $\boxed{Q_{int} = \sigma \times S}$

- Calcul de  $E_z(z)$  :  $\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2E_z(z) \times S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$

4. Expression de  $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z}$$

Il y a discontinuité du champ à la traversée du plan.

d) Analogie avec le champ gravitationnel

Analogies électrostatique/gravitation On rappelle que :

$$\vec{F}_c = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{F}_g = -G m_1 m_2 \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

$m$  est donc l'analogie de  $q$  et  $-G$  l'analogie de  $\frac{1}{4\pi \epsilon_0}$

**Théorème** Comme la démonstration du théorème de Gauss repose sur le fait que le champ électrostatique est en  $1/r^2$ , le théorème est aussi valable pour le champ gravitationnel.

**Théorème de Gauss pour le champ gravitationnel**

Le flux sortant du champ gravitationnel  $\vec{G}$  créé par une distribution de masse à travers une surface fermée  $\Sigma$  est égal à la masse contenue à l'intérieur de la surface  $\Sigma$  multipliée par  $-4\pi G$  :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma \text{ fermée}} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \times m_{int}$$

## V Dipôle électrostatique

### V.1. Définition

**Définition :**

L'ensemble de deux charges ponctuelles opposées  $-q$  et  $+q$  séparées par la distance  $NP = \ell$  constitue un dipôle électrostatique caractérisé par son moment dipolaire  $\vec{p}$  (dirigé de  $N$  vers  $P$ ) :

$$\vec{p} = q \overrightarrow{NP}$$

*Remarque*

L'unité S.I. est le C.m. On utilise également le debye ( $1 \text{ D} = \frac{1}{3} 10^{-29} \text{ C.m}$ ). L'emploi du debye s'explique par son ordre de grandeur, voisin du produit de la charge élémentaire par les dimensions de l'atome. Il est bien adapté pour l'expression de moments dipolaires de molécules.

Le dipôle électrostatique joue un rôle essentiel en chimie où il rend compte du comportement de nombreuses molécules (molécules polaires, molécules polarisables) ainsi que dans l'explication du comportement électrique des isolants.

### V.2. Potentiel et champ électrostatiques créés par un dipôle

#### a) Approximation dipolaire

Soit  $M$  un point où l'on veut calculer le potentiel et le champ électrostatiques créés par un dipôle électrostatique. Soit  $O$  le centre du dipôle. Nous allons nous placer dans l'approximation dipolaire, ce qui signifie que :

$$r = OM \gg \ell$$

Les effets du dipôle sont étudiés à des distances très grande devant la distance intercharge.

#### b) Potentiel électrostatique

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

avec  $r_+ = PM$  et  $r_- = NM$ .

Dans le triangle  $OMP$ , on a :

$$r_+^2 = r^2 - r\ell \cos \theta + \frac{\ell^2}{4}$$

soit

$$\frac{1}{r_+} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{\ell \cos \theta}{r} + \frac{\ell^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\ell \cos \theta}{2r} + o\left(\frac{\ell^2}{r^2}\right) \right)$$

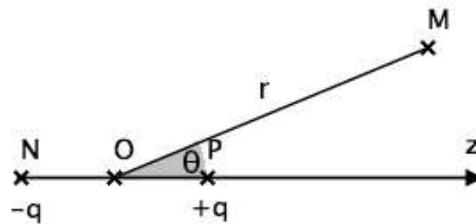
De même,

$$\frac{1}{r_-} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{\ell \cos \theta}{2r} + o\left(\frac{\ell^2}{r^2}\right) \right)$$

**Propriété**

Le potentiel électrostatique créé par un dipôle  $NP$  de moment dipolaire  $\vec{p} = p \vec{u}_z$  en un point  $M$  tel que  $\vec{OM} = \vec{r} = r \vec{u}$  s'écrit en coordonnées sphériques :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$



c) Champ électrostatique

Le champ se déduit par la relation  $\vec{E} = -\text{grad}V$  qui s'écrit, en coordonnées sphériques :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

**Propriété**

Le champ électrostatique créé par un dipôle  $PN$  de moment dipolaire  $\vec{p} = p \vec{u}_z$  en un point  $M$  tel que  $\vec{OM} = r \vec{u}$  s'écrit en coordonnées sphériques :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2p \cos \theta}{r^3} \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{p \sin \theta}{r^3} \quad E_\varphi = 0$$

De plus, comme

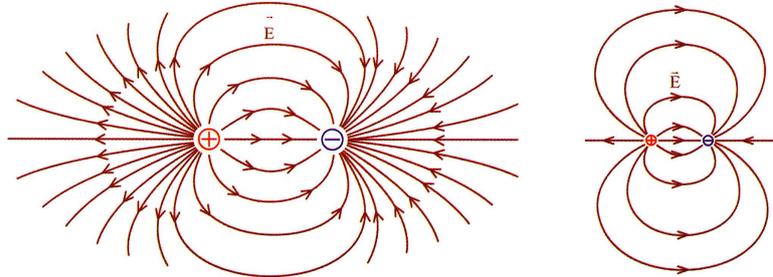
$$\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$$

on a  $\vec{u}_\theta = -\frac{1}{\sin \theta} \vec{u}_z + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \vec{u}_r$ . On obtient alors une nouvelle expression de  $\vec{E}$  :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( \frac{3\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} - \vec{p} \right)$$

d) Carte de champ

Voir figure 7.



Lignes de champ créées par deux charges opposées (« vues de loin » à droite).

FIGURE 7 – Carte de champ d'un dipôle électrostatique. À droite, on a la carte dans l'approximation dipolaire.

### V.3. Actions d'un champ électrostatique sur un dipôle

#### a) Champ uniforme

Soit un dipôle électrostatique soumis à un champ extérieur  $\vec{E}$ . Les forces  $\vec{F}_+ = q\vec{E}$  et  $\vec{F}_- = -q\vec{E}$  qui s'exercent sur les deux charges du dipôle ont une somme nulle et forment un couple dont le moment en un point  $O$  quelconque est défini par :

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{OP} \wedge \vec{F}_+ + \vec{ON} \wedge \vec{F}_- = q(\vec{OP} - \vec{ON}) \wedge \vec{E} = q\vec{NP} \wedge \vec{E}$$

#### Remarque

$\vec{\Gamma}$  ne dépend pas du point où on le calcule.

#### Propriété

Le moment du couple exercé par un champ extérieur uniforme  $\vec{E}$  sur un dipôle de moment dipolaire  $\vec{p}$  s'écrit :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Un champ extérieur uniforme exerce un couple tendant à aligner le dipôle sur le champ.

**b) Énergie potentielle d'un dipôle dans un champ**

Un dipôle rigide déplacé de l'infini au point  $M$  ou règne potentiel  $V(M)$ , dû au champ extérieur  $\vec{E}$ , acquiert l'énergie potentielle  $E_p$  :

$$E_p = q[V(P) - V(N)] = q dV = -q \vec{E} \cdot \vec{\ell} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

**Propriété**

L'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ extérieur s'écrit :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

**c) Champ non uniforme**

En coordonnées cartésiennes :

$$E_p = -p_x E_x - p_y E_y - p_z E_z$$

La force exercée sur le dipôle est alors :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

En considérant le mouvement de translation d'un dipôle rigide, avec  $\vec{p} = \overrightarrow{cte}$ , on obtient :

$$F_x = -p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - p_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = -p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} - p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = -(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) E_x$$

De même sur  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$ .

**Propriété**

Si  $\vec{p} = p_x \vec{u}_x + p_y \vec{u}_y + p_z \vec{u}_z$  en coordonnées cartésiennes, l'opérateur  $\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$  est défini par

$$\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} = \vec{p} \cdot \overrightarrow{\nabla} = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Cet opérateur, appliqué à un scalaire renvoie un scalaire. Appliqué à un vecteur, il renvoie un vecteur.

**Propriété**

La force exercée par un champ extérieur non uniforme  $\vec{E}$  sur un dipôle permanent de moment dipolaire  $\vec{p}$  s'écrit :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}$$

La force tend à entraîner le dipôle vers les régions de champ intense.

Le moment résultant garde sensiblement la même valeur que pour un champ uniforme :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

# Lois locales d'Electrostatique

Jusqu'à présent, les calculs de champ ou de potentiel électrostatique ont été menés soit directement, soit à l'aide du théorème de Gauss. La difficulté de ces calculs vient du fait que la géométrie de la source doit être prise en compte pour chacun des points où le champ est étudié.

Dans ce cours, nous cherchons à obtenir des équations locales, c'est-à-dire des équations différentielles aux dérivées partielles vérifiées par  $\vec{E}$  et  $V$ .

Il suffira alors de les résoudre et d'imposer les conditions aux limites liées à la géométrie du problème. Cette approche permet de séparer les variations spatiales du champ et la géométrie des sources et s'avèrera indispensable pour étudier la propagation des ondes électromagnétiques.

## I Formulation locale du théorème de Gauss

### I.1. Forme intégrale du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss sous sa forme intégrale s'écrit

$$\underbrace{\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\text{flux sortant de } \vec{E}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{Théorème de Gauss (forme intégrale)}$$

où  $\Sigma$  est une surface fermée quelconque,  $d\vec{S} = d^2S\vec{n}$  est le vecteur surface infinitésimal **orienté vers l'extérieur**,  $Q_{\text{int}}$  est la charge totale contenue à l'intérieur de la surface  $\Sigma$ ,  $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  est la permittivité du vide et  $\vec{E}$  est le champ électrique.

Autrement dit, le flux sortant du champ électrique  $\vec{E}$  à travers une surface fermée  $\Sigma$  est égal à la charge totale contenue dans  $\Sigma$  divisée par  $\epsilon_0$ .

### I.2. Forme locale du théorème de Gauss

Soit une surface fermée  $\Sigma$ . La charge totale contenue dans  $\Sigma$  vaut  $Q_{\text{int}} = \int_{V(\Sigma)} \rho d^3V$  où  $\rho$  est la densité volumique de charges et  $V(\Sigma)$  est le volume contenu dans  $\Sigma$ .

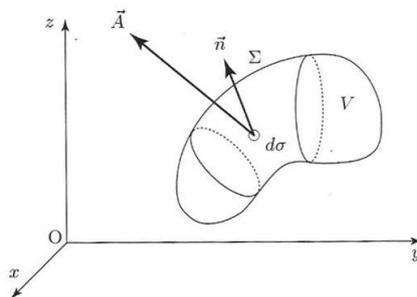


FIGURE 1 – Application du théorème de Green-Ostrogradsky : la surface fermée  $\Sigma$  encercle un volume  $V(\Sigma)$ . La normale à la surface est orientée vers l'extérieur, afin de calculer un flux **sortant**.

Le théorème de Gauss appliqué à  $\Sigma$  s'écrit

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d^2\vec{S} = \iiint_{V(\Sigma)} \frac{\rho}{\epsilon_0} d^3V$$

Le théorème de Green-Ostrogradsky permet de transformer une intégrale double sur une surface fermée en intégrale triple sur le volume contenu dans cette surface (voir figure 1).

#### Théorème de Green-Ostrogradsky

Pour tout champ de vecteur dérivable  $\vec{A}$ , on a :

$$\oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d^2\vec{S} = \iiint_{V(\Sigma)} \text{div}(\vec{A}) d^3V$$

- $\Sigma$  : surface fermée ;
- $V(\Sigma)$  : volume contenu dans  $\Sigma$  ;
- $\text{div}(\vec{A})$  : divergence du vecteur  $\vec{A}$ .

Le théorème de Gauss devient

$$\iiint_{V(\Sigma)} \left[ \text{div}(\vec{E}) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right] d^3V = 0$$

Cette relation est vérifiée  $\forall \Sigma$ . En particulier, pour une surface  $\Sigma$  réduite à un point, on obtient

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

#### Théorème de Gauss (forme locale)

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

où  $\rho$  est la densité volumique de charge et  $\epsilon_0$  la permittivité du vide.

### I.3. Expression de l'opérateur divergence

#### a) Définition

##### Définition :

Soit un champ de vecteurs

$$\vec{A} = A_x(x, y, z) \vec{u}_x + A_y(x, y, z) \vec{u}_y + A_z(x, y, z) \vec{u}_z$$

La divergence du vecteur  $\vec{A}$  est un scalaire  $\text{div}(\vec{A})$  tel que :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Remarque

- En coordonnées cartésiennes,

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

- Dans d'autres systèmes de coordonnées, l'expression de  $\text{div}(\vec{A})$  est différente mais on a toujours  $\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  à condition de dériver aussi les vecteurs de base!

**b) Interprétation**

La divergence traduit le caractère localement convergent ou divergent d'un champ de vecteurs  $\vec{A}(x, y, z)$ .

Soit  $\Sigma$  une surface fermée. Calculons le flux de  $\vec{A}$  à travers  $\Sigma$  :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d^2\vec{S} = \iiint_{V(\Sigma)} \text{div}(\vec{A}) d^3V$$

donc  $\text{div}(\vec{A}) = \frac{d\Phi}{d^3V}$  quand  $d^3V \rightarrow 0$ .

- Si  $\text{div}(\vec{A}) > 0$ ,  $d\Phi > 0$  donc  $\vec{A}$  est localement divergent.
- Si  $\text{div}(\vec{A}) < 0$ ,  $d\Phi < 0$  donc  $\vec{A}$  est localement convergent.

**I.4. Application**

Exercice

On considère une sphère uniformément chargée en volume, de densité volumique de charge  $\rho$  et de rayon  $R$ . En utilisant la formulation locale du théorème de Gauss, déterminer le champ électrique  $\vec{E}$  en tout point de l'espace.

**Symétries et invariances**

- Tout plan contenant par  $OM$  est plan de symétrie pour la distribution de charges. Le champ  $\vec{E}$  est un vecteur polaire. Au point  $M$ , il appartient donc à l'intersection des plans de symétrie passant par  $M$  soit

$$\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{u}_r$$

- Il y a invariance par rotation autour de  $O$  donc les composantes du champ ne dépendent d'aucuns angles et

$$||vE||(M) = ||vE||(r)$$

Au bilan

$$\boxed{\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r}$$

Dans la suite, on notera  $E_r(r) = E(r)$ .

**Formulation locale du théorème de Gauss**

En coordonnées sphériques :

$$\text{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \underbrace{\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(E_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}}_{=0 \text{ car } E_\theta = E_\varphi = 0}$$

L'application du théorème de Gauss conduit à

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{à l'intérieur de la sphère}$$

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = 0 \quad \text{à l'extérieur de la sphère}$$

- Si  $r < R$  :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E)}{dr} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow r^2 E = \frac{\rho r^3}{3\epsilon_0} + C_1 \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} + \frac{C_1}{r^2}$$

Or,  $E$  ne peut pas diverger en  $r = 0$  car il n'y a pas de charge localisée en  $r = 0$ . On a donc  $C_1 = 0$  et :

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad \text{pour } r < R$$

- Si  $r > R$  :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E)}{dr} = 0 \Rightarrow r^2 E = C_2 \Rightarrow E = \frac{C_2}{r^2}$$

La distribution de charges étant volumique, le champ électrique est continu. En particulier, en  $r = R$  :

$$E(r = R^-) = E(r = R^+) \Rightarrow \frac{C_2}{R^2} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$$

On a alors :

$$C_2 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad \text{pour } r > R$$

## II Circulation du champ électrostatique

### II.1. Lien entre le champ et le potentiel électrostatique

La circulation du champ électrostatique sur un chemin orienté de  $A$  à  $B$  ne dépend pas du chemin suivi. Ainsi

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V(A) - V(B)$$

où  $V$  est le potentiel électrostatique (défini à une constante près).

On en déduit

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\operatorname{grad}V \cdot d\vec{\ell} \quad \text{soit} \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}V$$

### II.2. Caractère conservatif de la circulation du champ électrostatique

#### a) Formulation intégrale

Soit  $\mathcal{C}$  un chemin fermé orienté. On a nécessairement

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Propriété

Le caractère conservatif de la circulation du champ  $\vec{E}$  s'exprime par :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

b) Formulation localeThéorème de Stokes

Pour tout champ de vecteurs dérivable  $\vec{A}$ , on a :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma(C)} \text{rot}(\vec{A}) \cdot d^2\vec{S}$$

- $C$  : contour fermé ;
- $\Sigma(C)$  : surface s'appuyant sur  $C$  ;
- $d^2\vec{S}$  : vecteur surface orienté par la règle du tire-bouchon ;
- $\text{rot}(\vec{A})$  : rotationnel de  $\vec{A}$ .

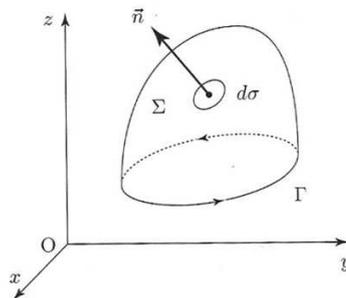


FIGURE 2 – Application du théorème de Stokes : la surface  $\Sigma$  s'appuie sur le contour  $\Gamma$ . Sa normale est orientée d'après la règle du tire-bouchon : on tourne le tire-bouchon dans le sens conventionnel d'orientation du contour  $\Gamma$ . Le sens global de déplacement du tire-bouchon donne le sens global de la normale à la surface.

On obtient alors

$$\iint_{\Sigma(C)} \text{rot}(\vec{E}) \cdot d^2\vec{S} = 0$$

Cette relation est valable pour tout contour  $C$ . À la limite où  $C$  est réduit à un point, on trouve

$$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$$

Propriété

Le caractère conservatif de la circulation du champ électrostatique  $\vec{E}$  s'exprime sous la forme locale :

$$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$$

### II.3. Expression du rotationnel

#### a) Définition

**Définition :**

Soit un champ de vecteurs  $\vec{A}$  en coordonnées cartésiennes

$$\vec{A} = A_x(x, y, z) \vec{u}_x + A_y(x, y, z) \vec{u}_y + A_z(x, y, z) \vec{u}_z$$

Le rotationnel de  $\vec{A}$  est un vecteur qui, au vecteur  $\vec{A}$  associe, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque

L'expression du rotationnel est différente dans d'autres systèmes de coordonnées mais l'on a toujours  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  à condition de dériver aussi les vecteurs de base !

#### b) Interprétation du rotationnel

Le rotationnel traduit la façon dont un champ tourne autour d'un contour fermé.

Par exemple, en mécanique du solide, on étudie le mouvement de rotation d'un point autour de  $Oz$  à la vitesse angulaire  $\omega$ . On a alors

$$\vec{v}(M) = \omega \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} = -y\omega \vec{u}_x + x\omega \vec{u}_y$$

Calculons  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})$  :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 2\omega \vec{u}_z \quad \text{donc} \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})$$

## II.4. Application

On considère une sphère uniformément chargée en volume, de densité volumique de charge  $\rho$  et de rayon  $R$ . L'étude des symétries et des invariances a montré que  $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$ . Calculons  $\text{rot}(\vec{E})$  :

$$\text{rot}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(E_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

## III Équation de Poisson

### III.1. Équation locale pour le potentiel

La forme locale du théorème de Gauss s'écrit

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

tandis que le fait que  $\vec{E}$  soit à circulation conservative impose

$$\vec{E} = -\text{grad}V$$

On en déduit

$$\text{div}(\text{grad}V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Mais

$$\text{div}(\text{grad}V) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V$$

#### Propriété

L'équation locale pour le potentiel électrostatique est l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

avec  $\Delta V$  : laplacien scalaire du potentiel.

### III.2. Expression du laplacien scalaire

#### a) Définition

**Définition :**

En coordonnées cartésiennes, le laplacien scalaire d'une fonction  $f(x, y, z)$  est un scalaire  $\Delta f$  tel que :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Remarque

- $\Delta f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}^2 f$ .
- Le laplacien scalaire prend une autre forme dans d'autres systèmes de coordonnées.

#### b) Interprétation

Le laplacien généralise la dérivée seconde à une fonction à plusieurs variables. En particulier, si  $M_0$  est un extremum local :

- si  $\Delta V(M_0) > 0$  :  $M_0$  est un minimum du potentiel ;
- si  $\Delta V(M_0) < 0$  :  $M_0$  est maximum du potentiel.

## IV Relation de passage à la traversée d'une surface chargée

### IV.1. Densité surfacique de charge

Soit une distribution volumique de charges d'épaisseur  $a$  petite devant les autres dimensions, de surface  $S$  et de densité volumique de charge  $\rho$ .

Si  $\rho$  est uniforme, la charge totale vaut :  $Q = aS\rho$ .

Dans une modélisation surfacique,  $a \rightarrow 0$  et  $Q$  reste fixée. On a alors

$$Q = \sigma S \quad \text{avec} \quad \sigma = a\rho$$

**Propriété**

Une modélisation surfacique d'une distribution volumique de charges, de densité  $\rho$  et d'épaisseur  $a$  est obtenue dans la limite  $a \rightarrow 0$  et  $\rho a = \sigma = cte$ .

Remarque

Si  $a \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow \infty$  donc les équations locales ne sont plus valables sur la surface.

### IV.2. Relation de passage pour le champ électrostatique

On considère une surface chargée, de densité surfacique de charges  $\sigma$ , séparant deux milieux de permittivité  $\epsilon_0$  notés 1 et 2.

On note  $\vec{n}_{12}$  le vecteur normal à cette surface orienté de 1 vers 2,  $\vec{E}_1(P)$  le champ en un point  $P$  de la surface du côté du milieu 1 et  $\vec{E}_2(P)$  le champ en un point  $P$  de la surface du côté du milieu 2.

#### Relation de passage pour le champ électrostatique

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

On en déduit que :

#### Propriété

★ la composante normale à la surface du champ électrique est discontinue

$$E_{2N}(P) - E_{1N}(P) = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0}$$

★ la composante tangentielle du champ électrique est continue.

#### Remarque

En revanche, le potentiel est continu à la traversée d'une surface chargée.

### IV.3. Exemple : cas de la sphère uniformément chargée

#### Exercice

On considère une sphère de rayon  $R$ , de centre  $O$ , uniformément chargée en surface et de densité surfacique de charges  $\sigma$ . Déterminer le champ créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace et vérifier la relation de passage pour  $\vec{E}$ .

#### Symétrie et invariances

• Soit un point  $M$  quelconque. Tout plan contenant  $OM$  est un plan de symétrie pour la distribution de charges. Le champ  $\vec{E}$  étant un vecteur polaire, il appartient, au point  $M$ , à tout plan de symétrie passant par  $M$ . Ici,  $\vec{E}(M)$  appartient à l'intersection des plans de symétrie, c'est-à-dire  $(O, \vec{u}_r)$ . On en déduit

$$\vec{E}(M) = E(M) \vec{u}_r$$

• La distribution de charge est invariante par rotation : les composantes du champ ne dépendent donc d'aucun angle. On a donc

$$\|\vec{E}\|(M) = \|\vec{E}\|(r) \quad \text{avec} \quad r = OM$$

Au bilan

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$$

On choisit comme surface de Gauss une sphère  $\Sigma$  de rayon  $r$  de centre  $O$ . Appliquons le théorème de Gauss sous sa forme intégrale à la sphère  $\Sigma$  :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d^2\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Or

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d^2\vec{S} = E(r) 4\pi r^2 \quad \text{et} \quad Q_{\text{int}} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ Q = \sigma 4\pi R^2 & \text{si } r > R \end{cases}$$

On a donc

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{à l'intérieur de la sphère } (r < R) \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_r & \text{à l'extérieur de la sphère } (r > R) \end{cases}$$

Au niveau de la sphère,

$$\vec{E}(R^+) - \vec{E}(R^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_r$$

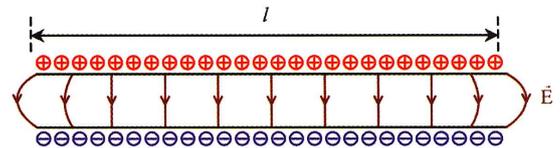
On retrouve bien la discontinuité de la composante normale de  $\vec{E}$ , alors que la composante tangentielle de  $\vec{E}$  est continue.

## V Application au condensateur plan

### V.1. Calcul du champ électrostatique

On appelle condensateur plan un ensemble de deux conducteurs plans infinis, d'épaisseur négligeable, parallèles entre eux.

Dans la pratique, les conducteurs ont une surface  $S$  et sont distants de  $e$ . Le modèle du condensateur plan est réalisé en bonne approximation si  $e$  est négligeable devant les dimensions des plaques. La charge surfacique peut être supposée uniforme.



#### Exercice

Considérons un condensateur dont l'armature 1, située en  $z = e/2$ , porte une densité surfacique  $\sigma_1 = +\sigma$  positive (charge totale  $Q$ ) et l'armature 2, située en  $z = -e/2$ , porte une densité  $\sigma_2 = -\sigma$  négative (charge totale  $-Q$ ). Déterminer le champ électrique dans l'espace entre les armatures.

#### Remarque

Dans un condensateur, les charges portées par les surfaces des armatures en vis-à-vis sont opposées.

#### 1. Symétries et invariances

Tout plan perpendiculaire aux armatures est plan de symétrie donc  $\vec{E} = E_z \vec{u}_z$ .

Il y a invariance de la distribution de charges par translation parallèlement à  $Ox$  et à  $Oy$  donc le champ ne dépend que de la distance  $z$  :

$$\vec{E} = E_z(z) \vec{u}_z$$

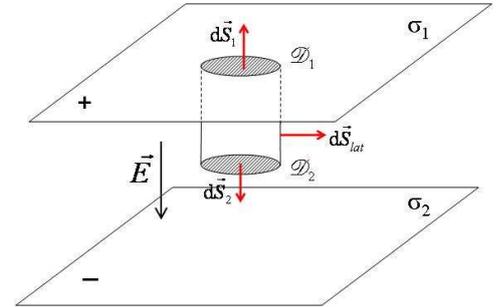
2. Théorème de Gauss

Appliquons le théorème de Gauss avec une surface fermée cylindrique incluant une des armatures.

- Calcul du flux :

$$\Phi = \iint_{\mathcal{D}_1} \underbrace{\vec{E}}_0 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{\mathcal{D}_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_{lat}} \underbrace{\vec{E}}_0 \cdot d\vec{S}_{lat}$$

$$\Rightarrow \Phi = \iint_{\mathcal{D}_2} E_z(z) \vec{u}_z \cdot (-dS_2 \vec{u}_z) = \iint_{\mathcal{D}_2} -E_z(z) dS_2 = -E_z(z) \times S$$



- Calcul de la charge intérieure :  $Q_{int} = \sigma S$ .
- Calcul du champ :

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow -E_z(z)S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z}$$

Le champ créé entre les armatures est donc **uniforme**.

Remarque

On vérifie que :

1.  $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$  en tout point hors des surfaces chargées (car  $\rho = 0$  partout sauf au niveau des plaques) ;
2. le champ est discontinu à la traversée des plaques

$$\begin{cases} \vec{E} \left( z = \frac{e^+}{2} \right) - \vec{E} \left( z = \frac{e^-}{2} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour la plaque 1 } (z=e/2) \\ \vec{E} \left( z = -\frac{e^+}{2} \right) - \vec{E} \left( z = -\frac{e^-}{2} \right) = \frac{-\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour la plaque 2 } (z=-e/2) \end{cases}$$

V.2. Capacité d'un condensateur

Définition :

On appelle capacité du condensateur le coefficient  $C$  tel que

$$Q_1 = C(V_1 - V_2) = CU$$

où  $U = V_1 - V_2$  est la tension aux bornes du condensateur.

Remarque

- $C$  s'exprime en Farad ( $F$ ).
- $C$  est nécessairement positif car si  $V_1 > V_2$ , les lignes de champ quittent 1 pour aller sur 2 donc 1 est chargé positivement.
- $C$  ne dépend que de la géométrie du condensateur.

Reprenons l'exemple du condensateur plan et déterminons sa capacité.

1.  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$ , ou encore :

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z = -\frac{Q}{\epsilon_0 S} \int_1^2 dz = \frac{Qe}{\epsilon_0 S}$$

2. On en déduit

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Remarque

\* Pour  $e = 5 \mu\text{m}$  et  $S = 10^{-4} \text{m}^2$ , on trouve

$$C = 0,18 \text{ nF}$$

\* Afin d'augmenter les valeurs des capacités, on place un diélectrique entre les armatures de sorte que la permittivité devienne

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \text{ avec } \epsilon_r = 2 \text{ à } 1000$$

\* Cette expression permet de comprendre que  $\epsilon_0$  s'exprime en  $F \cdot m^{-1}$ .

### V.3. Énergie électrique emmagasinée

Considérons un condensateur plan initialement déchargé. On insère le condensateur dans un circuit afin de réaliser sa charge. On souhaite déterminer l'énergie électrique emmagasinée par le condensateur à la fin de sa charge (instant  $t_1$ ). On note  $Q$  la charge du condensateur à l'instant  $t_1$ . La différence de potentiel aux bornes du condensateur est  $\Delta V = U = \frac{Q}{C}$ .

L'énergie électrique reçue par le condensateur entre les instants  $t_0$  et  $t_1$  s'écrit :

$$W = \int_{t_0}^{t_1} u i dt = \int_{Q(t_0)}^{Q(t_1)} \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C}$$

Propriété

Lorsqu'un condensateur accumule la charge  $Q = CU$ , il stocke l'énergie :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

### V.4. Énergie du champ électrostatique

Une fois le condensateur chargé, il existe un champ électrostatique non nul entre les armatures. On peut associer au champ électrostatique une énergie. En effet, on a  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$  et  $U = E e$  donc

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} \epsilon_0 S e E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \mathcal{V}$$

avec  $\mathcal{V} = S e$  le volume situé entre les armatures.

Accumuler une charge électrique dans le condensateur revient à emmagasiner de l'énergie en créant un champ électrique.

**Propriété**

On associe au champ électrostatique une densité volumique d'énergie  $\mathcal{E}_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ .

**Remarque**

- Ce résultat est généralisable à tout problème électrostatique impliquant des conducteurs à l'équilibre.
- On remarque que l'énergie du champ est d'autant plus grande que le champ est intense.

## VI Bilan

### VI.1. Rappels sur les opérateurs et opérateur nabra

L'opérateur nabra  $\vec{\nabla}$  est défini en coordonnées cartésiennes par

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On a alors, en coordonnées cartésiennes

$$\vec{\text{grad}} V = \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\Delta V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

**VI.2. Relations entre les opérateurs**

On a montré que  $\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$  avec  $\vec{E} = -\text{grad}V$ . Ce résultat est général et s'énonce sous la forme :

**Propriété**

$\forall \vec{A} :$   $\text{rot}(\vec{A}) = \vec{0} \iff \exists f \quad \vec{A} = -\text{grad}f$

On en déduit

$\text{rot}(\text{grad}f) = \vec{0} \quad \forall f \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0} \quad \forall f$

De la même manière, on a :

**Propriété**

$\forall \vec{A} :$   $\text{div}(\vec{A}) = 0 \iff \exists \vec{C} \quad \vec{A} = \text{rot}(\vec{C}) \quad \forall \vec{A}$

ce qui implique

$\text{div}(\text{rot}(\vec{A})) = 0 \quad \forall \vec{A} \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \quad \forall \vec{A}$

Enfin,

**Propriété**

$\Delta f = \text{div}(\text{grad}f) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}^2 f$

**VI.3. Équations de l'électrostatique**

	Formulation intégrale	Formulation locale
Théorème de Gauss	$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d^2\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad + \text{C.L.}$
Circulation du champ électrostatique	$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$	$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0} \quad + \text{C.L.}$
Existence du potentiel électrostatique	$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V(A) - V(B)$	$\vec{E} = -\text{grad}V$
Équation de Poisson		$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$
Relation de passage		$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$

# Conducteurs en équilibre électrostatique

## 4.1. Définition d'un conducteur

### Conducteur en équilibre électrostatique

Un conducteur est un milieu matériel dans lequel certaines charges électriques, que l'on nommera « charges mobiles », sont susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique. S'agissant de métaux ou d'alliages métalliques, ces charges mobiles sont négatives, portées par les électrons de conduction.

#### *Champ électrique « mésoscopique »*

Nous parlons ici de champ « thermodynamique », valeur moyenne du champ à l'échelle mésoscopique (échelle très petite par rapport à l'échelle du laboratoire et très grande par rapport à l'échelle des atomes). En effet, dans un tel matériau il existe également des charges fixes, source de champs électrostatiques microscopiques : nous ne parlons pas ici du champ microscopique au voisinage immédiat de ces charges pas plus que du champ microscopique au voisinage des porteurs mobiles.

De la même façon, lorsque nous parlons du « déplacement » des porteurs mobiles, nous parlons de leur éventuel mouvement moyen au sens mésoscopique. Les charges microscopiques sont soumises, y compris à l'équilibre électrostatique, à un mouvement stochastique incessant d'agitation thermique. Ce mouvement est de valeur moyenne nulle à l'échelle d'une cellule de matière de dimension mésoscopique et il ne lui correspond par conséquent aucun déplacement mésoscopique.

#### *Le champ électrique est nul au cœur d'un conducteur en équilibre électrostatique*

En l'absence de champ électrique dans le volume du conducteur, il n'y a pas de déplacement de charge et, réciproquement, l'équilibre électrostatique d'un conducteur implique la nullité du champ électrique dans la totalité du volume du conducteur.

#### *Le volume d'un conducteur en équilibre électrostatique est équipotentiel*

Dire que le champ électrique est nul, cela revient à affirmer que le volume tout entier d'un conducteur en équilibre électrostatique est équipotentiel. Nous parlons bien sûr du potentiel électrique au sens mésoscopique du terme, valeur moyenne du potentiel à l'échelle de cellules mésoscopiques de matière.

#### *Champ et potentiel dans un conducteur en équilibre électrostatique*

**Dans le volume d'un conducteur  $\mathcal{C}$  en équilibre électrostatique, le champ électrique est nul et le potentiel est uniforme.**

$$\forall \mathbf{M} \in \mathcal{C} : \vec{E}(\mathbf{M}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad V(\mathbf{M}) = V_0 = C^{te}$$

### Charges de surface, théorème de Coulomb

En conséquence du théorème de Gauss, nous déduisons que, dans le volume d'un conducteur en équilibre électrostatique, la densité volumique de charge est nécessairement nulle.

$$\vec{E} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \rho = 0$$

Si le conducteur est chargé, les charges mobiles se déplacent en surface en se disposant de telle sorte que le champ électrique soit nul dans tout le volume : nous admettrons, sans démonstration, qu'une telle répartition surfacique de charge est unique.

Rappelons la propriété de discontinuité du champ électrique à la traversée d'une surface chargée, démontrée au chapitre précédent :

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_1$$

Cette propriété prend à la surface d'un conducteur à l'équilibre, le champ étant nul à l'intérieur, la forme particulière du *théorème de Coulomb*.

#### *Théorème de Coulomb*

**Le champ électrostatique à la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique est normal à la surface, dirigé vers l'extérieur si le conducteur est porteur d'une charge positive, vers l'intérieur si la charge est négative. La valeur algébrique du champ orienté par la normale extérieure est égale au rapport par  $\epsilon_0$  de la densité surfacique de charge électrique :**

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}}$$

### Capacité d'un conducteur seul dans l'espace

#### *Définition*

Considérons un conducteur « seul dans l'espace », porteur d'une charge électrique  $Q$  répartie à sa surface en une densité surfacique  $\sigma(M)$  avec,  $S$  étant la surface du conducteur :

$$Q = \iint_{M \in S} \sigma(M) dS$$

Le potentiel du conducteur, l'origine étant choisie à l'infini, s'exprime comme l'opposé de la circulation du champ de l'infini à la surface du conducteur :

$$V = V(M) = - \int_{\infty \rightarrow M} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Cette circulation est indépendante du parcours et aussi indépendante du point  $M$  considéré à la surface du conducteur. Le conducteur étant considéré seul dans l'espace, son potentiel est dû à la seule présence des charges électriques à sa surface, soit :

$$V = V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{M \in S} \frac{\sigma(M) dS}{PM}$$

Imaginons une charge  $Q$  multipliée par un scalaire  $\alpha$  quelconque. La charge surfacique  $\sigma(M)$  en tout point  $M$  de la surface sera multipliée par ce paramètre  $\alpha$  et ce sera aussi le cas du potentiel  $V$  au cœur du conducteur.

Nous en déduisons que la charge d'un conducteur seul dans l'espace est proportionnelle au potentiel de ce conducteur, l'origine des potentiels étant choisie à l'infini. Le coefficient de proportionnalité est qualifié de *capacité* du conducteur seul dans l'espace :

$$Q = CV$$

Cette capacité ne dépend *a priori* que du détail de la forme géométrique de la surface du conducteur.

**Exemple d'un conducteur sphérique seul dans l'espace**

Un conducteur sphérique de rayon  $R$  porteur d'une charge  $Q$  à l'équilibre présente, du fait de sa symétrie sphérique, une charge surfacique uniforme  $\sigma = Q/4\pi R^2$

Nous avons déjà exprimé le champ et le potentiel créé dans tout l'espace par une sphère uniformément chargée en surface. Ce champ est nul à l'intérieur de la sphère, preuve qu'il s'agit bien de la solution d'équilibre de la sphère conductrice chargée. À l'extérieur de la sphère, le champ et le potentiel ont pour expression :

$$\text{pour } r > R, \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$$

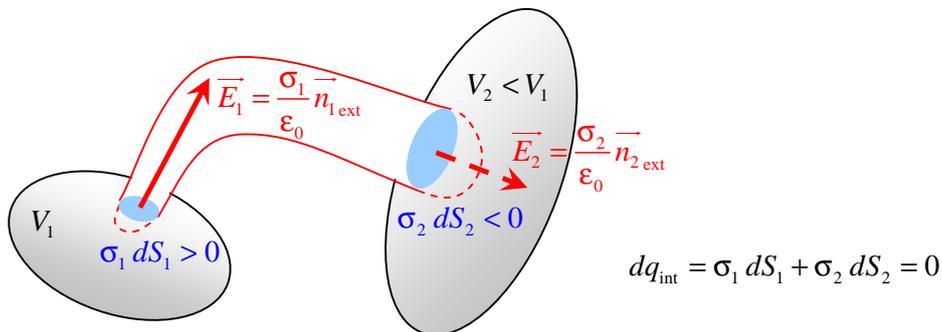
En particulier, à la surface du conducteur sphérique, pour  $r = R$ , le potentiel a pour valeur  $V = Q/4\pi\epsilon_0 R$  et nous en déduisons la valeur de la capacité d'un sphère de rayon  $R$  seule dans l'espace :

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

**4.2. Condensateur**

**Théorème des éléments de surface correspondants**

Deux conducteurs  $C_1$  et  $C_2$ , porteurs de charges électriques  $Q_1$  et  $Q_2$ , acquièrent, à l'équilibre électrostatique, des distributions de charges correspondant à des potentiels uniformes  $V_1$  et  $V_2$  dans les volumes de chacun des conducteurs. Certaines lignes de champ joignent un conducteur à l'autre et l'orientation de ces lignes de champ définit celui des conducteurs dont le potentiel est le plus élevé :



Considérons un tube de champ élémentaire joignant le conducteur  $C_1$  au conducteur  $C_2$  et construisons une surface fermée en posant des « capuchons » (représentés en pointillé sur la figure ci-dessus) dans le volume intérieur de chaque conducteur, à chacune des extrémités du tube de champ.

Le flux sortant du champ électrique à travers cette surface fermée est nul. Il est nul à travers les parois du tube de champ par le fait que, par définition, le champ électrique est tangent au tube. Il est nul à travers les capuchons par le fait que le champ électrique est nul à l'intérieur des conducteurs à l'équilibre.

En conséquence, par application du théorème de Gauss à cette surface élémentaire fermée, nous en déduisons que la charge intérieure, portée par les éléments de surface correspondants, est nulle. Cette affirmation constitue le théorème des éléments de surface correspondants :

**Théorème des éléments de surface correspondants**

Considérons des solides conducteurs en équilibre électrostatique et un tube de champ élémentaire autour d'une ligne de champ électrique joignant l'un des conducteurs à un autre de potentiel moindre. Le tube de champ élémentaire découpe sur ces conducteurs des surfaces élémentaires  $dS_1$  et  $dS_2$  que l'on qualifie d' « éléments de surface correspondants ».

Les éléments de surface correspondants sont porteurs de charges électriques  $\sigma_1 dS_1$  et  $\sigma_2 dS_2$  opposées.

**Surfaces de deux conducteurs en influence totale : condensateur**

**Influence totale**

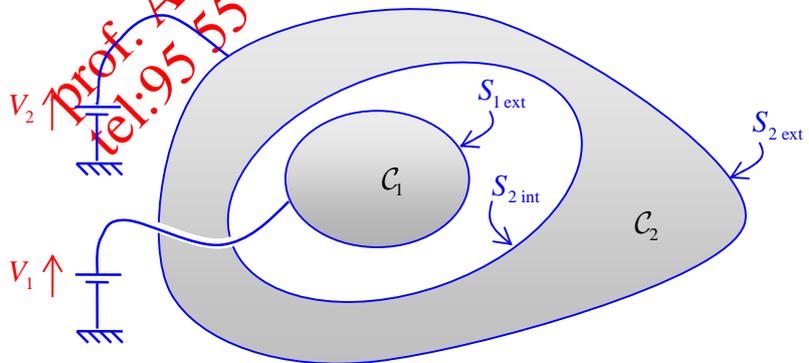
Nous dirons qu'une surface  $S_1$  d'un conducteur  $C_1$  et une surface  $S_2$  d'un second conducteur  $C_2$  sont sous influence totale lorsque toutes les lignes de champ quittant l'une des surfaces aboutissent à l'autre surface. En conséquence, les deux surfaces correspondantes sont porteuses de charges  $Q_1$  et  $Q_2$  opposées. Les deux surfaces conductrices en regard  $S_1$  et  $S_2$  constituent un système physique  $\{S_1, S_2\}$  que l'on appelle « condensateur ».



**Attention !** Prenons garde à cette règle élémentaire de topologie : un conducteur peut définir plusieurs surfaces, une surface extérieure et autant de surfaces intérieures qu'il possède de cavités disjointes. Toutes ces surfaces peuvent être porteuses de charges électriques.

La façon la plus simple de réaliser un condensateur est de considérer la surface extérieure  $S_{1ext}$  d'un conducteur  $C_1$  placé à l'intérieur d'une cavité d'un conducteur creux  $C_2$ .

Le système  $\{S_{1ext}, S_{2int}\}$  est un condensateur.



Dans ce cas, nous noterons  $Q_1$  la charge portée par le conducteur  $C_1$  et  $Q_2$  la charge portée par le conducteur  $C_2$ . Cette charge  $Q_2 = Q_{2int} + Q_{2ext}$  se répartit sur les deux surfaces  $S_{2int}$  et  $S_{2ext}$  et les charges portées par les surfaces correspondantes du condensateur sont opposées :  $Q_1 + Q_{2int} = 0$ . On appelle « charge du condensateur » la charge de l'une quelconque des armatures, par exemple  $Q = Q_1 = -Q_{2int}$ .

**Capacité d'un condensateur**

La définition du potentiel implique une relation linéaire entre celui-ci et les charges portées par les conducteurs. Ainsi existe-t-il des coefficients constants  $C_{ij}$  tels que :

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_{2int} + Q_{2ext} = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

Les coefficients d'influence  $C_{ij}$  ne dépendent que de la géométrie des surfaces des conducteurs.

Dans le cas particulier où le conducteur  $C_2$  est porté à un potentiel nul, la charge extérieure  $Q_{2\text{ext}}$  est nulle et les relations de linéarité s'écrivent :  $Q_1 = C_{11}V_1 = -Q_{2\text{int}} = -C_{21}V_1$ . Nous poserons  $C = C_{11} = -C_{21}$ , coefficient positif, que l'on appelle « capacité » du condensateur  $\{S_1, S_{2\text{int}}\}$ .

Notons enfin que, dans le cas particulier où les deux conducteurs sont au même potentiel, la charge  $Q$  est nécessairement nulle, ce qui implique la relation  $C_{11} + C_{12} = 0$ , soit  $C_{12} = -C_{11} = -C$ .

Les relations de dépendance linéaire entre charges et potentiels s'écrivent finalement :

$$\begin{cases} Q_1 = CV_1 - CV_2 \\ Q_{2\text{int}} + Q_{2\text{ext}} = -CV_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

La première relation définit la loi fondamentale des condensateurs, justifiant l'appellation de « capacité » pour ce coefficient  $C$  qui ne dépend, rappelons-le, que de la géométrie des surfaces en regard :

$$Q_1 = C(V_1 - V_2) = -Q_{2\text{int}}$$

### Effet d'écran

La seconde relation devient alors  $Q_{2\text{ext}} = (C_{22} - C)V_2$ . Elle rend compte d'une propriété tout autant remarquable : la charge extérieure du conducteur  $C_2$  est indépendante du potentiel  $V_1$  du conducteur intérieur. Nous dirons que le conducteur  $C_2$ , entourant totalement le conducteur  $C_1$ , *fait écran* à ce dernier. Notons que le coefficient  $C_{22} - C$  s'identifie tout simplement à la capacité  $C_2$  du conducteur  $C_2$  seul dans l'espace et ne dépend donc que de la géométrie de la surface extérieure  $S_{2\text{ext}}$ .

### Application : la cage de Faraday

D'éventuelles expériences d'électrostatique se déroulant à l'intérieur d'un conducteur creux sont sans influence aucune sur les équilibres électrostatiques à l'extérieur de ce conducteur. Ainsi, la *cage de Faraday*, reliée à la masse, constitue-t-elle un blindage électrostatique quasi parfait. Elle protège les observateurs extérieurs de toute influence des facéties qui peuvent se dérouler à l'intérieur.

## Énergie électrostatique d'un condensateur

### Expression en fonction des potentiels

Notons  $U = V_1 - V_2$  la différence de potentiels entre les armatures d'un condensateur porteur d'une charge  $Q = Q_1 = -Q_2$ . Le travail électrique qui doit être fourni pour faire varier algébriquement la charge de la valeur  $Q$  à la valeur  $Q + dQ$  a pour expression :  $\delta W = V_1 dQ_1 + V_2 dQ_2 = (V_1 - V_2) dQ = U dQ = CU dU$ .

Ce travail est la différentielle d'une fonction d'état  $\mathcal{E}_e$ , énergie électrostatique du condensateur chargé, que l'on peut exprimer aussi bien comme fonction de la charge du condensateur ou comme fonction de la tension  $U$  :

$$\delta W = d\mathcal{E}_e \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} C(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

**Expression en fonction du champ**

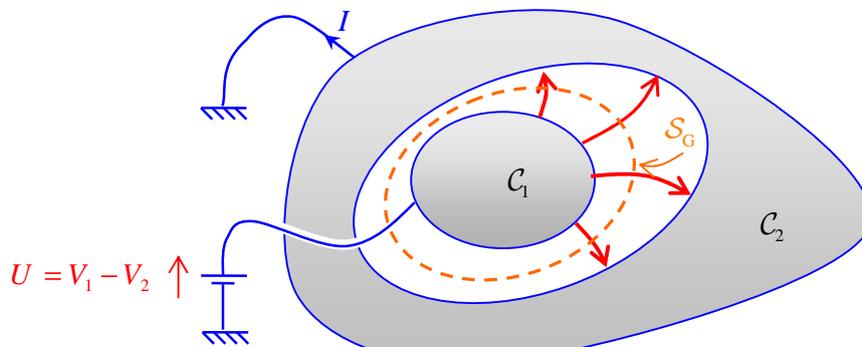
L'énergie électrostatique du condensateur est localisée dans le volume de l'espace entre les armatures, dans lequel s'établit un champ électrique lorsque le condensateur est chargé.

Si le milieu inter plaques est vide de toute matière polarisable, la densité volumique d'énergie électrostatique a pour expression en tout point  $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \overline{E}^2$  et nous en déduisons l'expression de l'énergie par intégration sur tout le volume intérieur :

$$\mathcal{E}_e = \iiint_{\text{Volume intérieur}} u_e d\tau = \iiint_{\text{Volume intérieur}} \frac{1}{2} \epsilon_0 \overline{E}^2 d\tau$$

**Résistance de fuite d'un condensateur**

Imaginons le cas particulier où le volume intérieur du condensateur a les propriétés électriques d'un conducteur ohmique homogène de conductivité uniforme  $\gamma$ .



Cela signifie, rappelons-le, qu'en tout point où existe un champ électrique  $\overline{E}$ , il apparaît une densité de courant  $\overline{j}$  proportionnelle au champ, le coefficient de proportionnalité définissant la conductivité :

$$\overline{j} = \gamma \overline{E}$$

Le courant de fuite  $I$  entre les armatures du condensateur tend à décharger ce dernier. Nous pouvons l'exprimer comme flux de la densité de courant  $\overline{j}$  à travers n'importe quelle surface fermée entourant le conducteur intérieur  $C_1$ , totalement située dans l'espace entre les deux armatures, telle que la surface  $S_G$  représentée en pointillé sur le schéma ci-dessus :

$$I = \oiint_{S_G} \overline{j} \cdot \overline{n_{ext}} dS = GU$$

La relation de proportionnalité  $I = GU$  entre le courant  $I$  et la tension  $U$  définit la conductance de fuite  $G$  du condensateur ou son inverse  $R = \frac{1}{G}$ , résistance de fuite du condensateur.

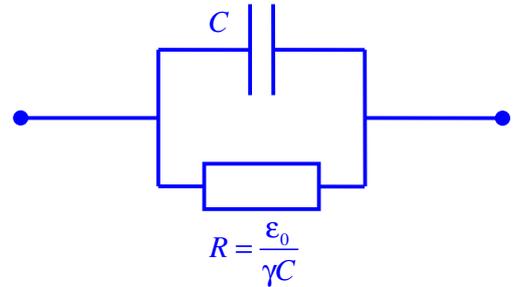
Remarquons que l'intensité  $I$ , flux de la densité de courant  $\overline{j}$ , est, dans le cas d'un milieu ohmique homogène, proportionnelle au flux du champ électrique  $\overline{E}$  à travers la même surface  $S_G$ . Selon le théorème de Gauss, ce flux est proportionnel à la charge intérieure  $Q$  :

$$I = \oiint_{S_G} \overline{j} \cdot \overline{n_{ext}} dS = \oiint_{S_G} \gamma \overline{E} \cdot \overline{n_{ext}} dS = \gamma \oiint_{S_G} \overline{E} \cdot \overline{n_{ext}} dS = \gamma \frac{Q}{\epsilon_0} = \gamma \frac{C}{\epsilon_0} U$$

Nous en concluons que, dans ce cas particulier d'un milieu ohmique homogène, et indépendamment de la forme géométrique des conducteurs, la conductance de fuite d'un condensateur est proportionnelle à la capacité. Si le milieu matériel entre les armatures a les propriétés diélectriques du vide, cette relation s'écrit :

$$G = \gamma \frac{C}{\epsilon_0} \quad \text{ou encore} \quad RC = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$$

*Remarque :* la constante de temps  $RC$  est le temps caractéristique dans lequel le condensateur se décharge à travers sa propre conductance interne. Ce temps est proportionnel à la résistivité (inverse de la conductivité) du milieu matériel entre les armatures. Le condensateur est alors électriquement équivalent à un condensateur idéal de même capacité monté en parallèle avec cette résistance de fuite.



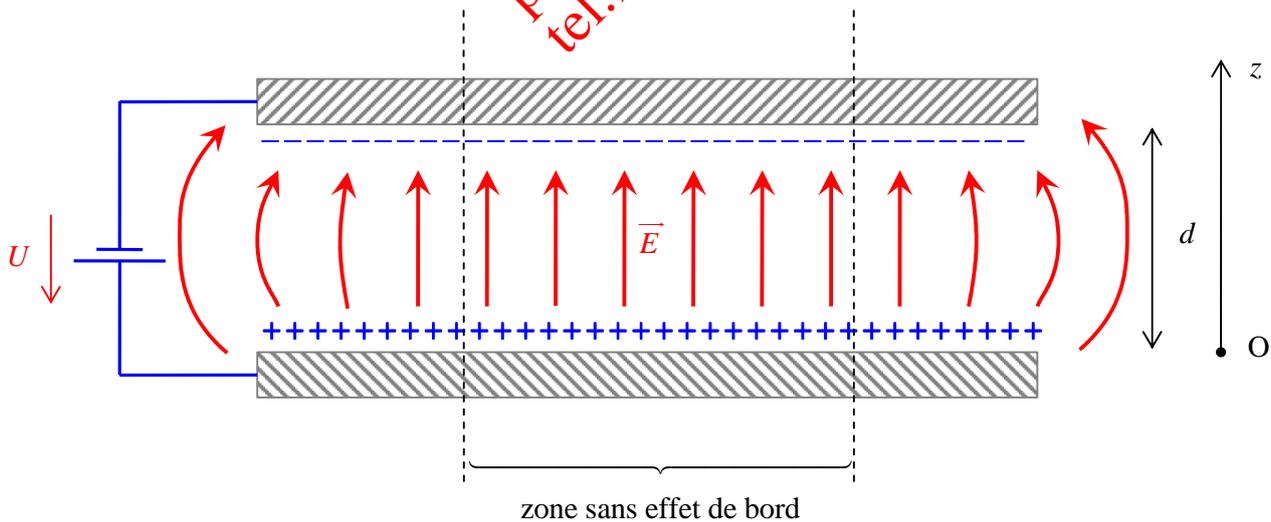
### 4.3. Exemples de condensateurs de géométries particulières

#### Condensateur plan

##### Étude de symétrie

Deux plaques métalliques planes parallèles sont disposées à une distance mutuelle  $d$  très petite par rapport à leurs dimensions linéaires caractéristiques, de telle sorte que les « effets de bords » puissent être négligés : le condensateur ainsi formé se trouve, pour la plus grande partie de sa surface, dans une situation présentant une symétrie d'invariance par translation quelconque parallèle aux plaques, comme si les plaques étaient infinies.

Une différence de potentiel étant instaurée entre les deux conducteurs, les surfaces en regard se retrouvent chargées, la plaque de potentiel le plus élevé étant porteuse de charges positives.



Si l'on se place suffisamment loin des bords, un axe  $Oz$  perpendiculaire aux plaques est un axe de symétrie de la distribution de charge : le champ électrique entre les armatures est donc orthogonal aux plaques et, du fait de l'invariance par translation, ne dépend que de  $z$  :

$$\vec{E} = E_z(z) \vec{e}_z$$

Par application du théorème de Gauss sur une surface fermée cylindrique d'axe Oz totalement située entre les plaques, on démontre facilement que le champ électrique est uniforme entre les armatures et, connaissant le module du champ  $E = \sigma/\epsilon_0$  à la surface des plaques métalliques ( $\sigma$  est la densité surfacique de charge de l'armature chargée positivement), le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

La différence de potentiel, égale à l'opposé de la circulation du champ d'une armature à l'autre, a pour expression :  $U = Ed = \sigma d/\epsilon_0$

### Expression de la capacité

La charge surfacique est proportionnelle à la tension et le coefficient de proportionnalité définit la capacité surfacique du condensateur :

$$\frac{C}{S} = \frac{\sigma}{U} = \frac{\epsilon_0}{d} \quad \text{soit} \quad C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

### Point de vue énergétique

L'énergie électrostatique surfacique du condensateur chargé, de valeur  $\frac{\mathcal{E}_e}{S} = \frac{1}{2} \frac{C}{S} U^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{d} U^2$  est localisée entre les armatures avec, dans la zone sans effet de bord, une répartition volumique uniforme.

La densité volumique d'énergie est égale au rapport de l'énergie surfacique  $\frac{\mathcal{E}_e}{S}$  par l'épaisseur  $d$  :

$$u_e = \frac{\mathcal{E}_e}{Sd} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{U}{d} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

## Condensateur cylindrique

### Étude de symétrie

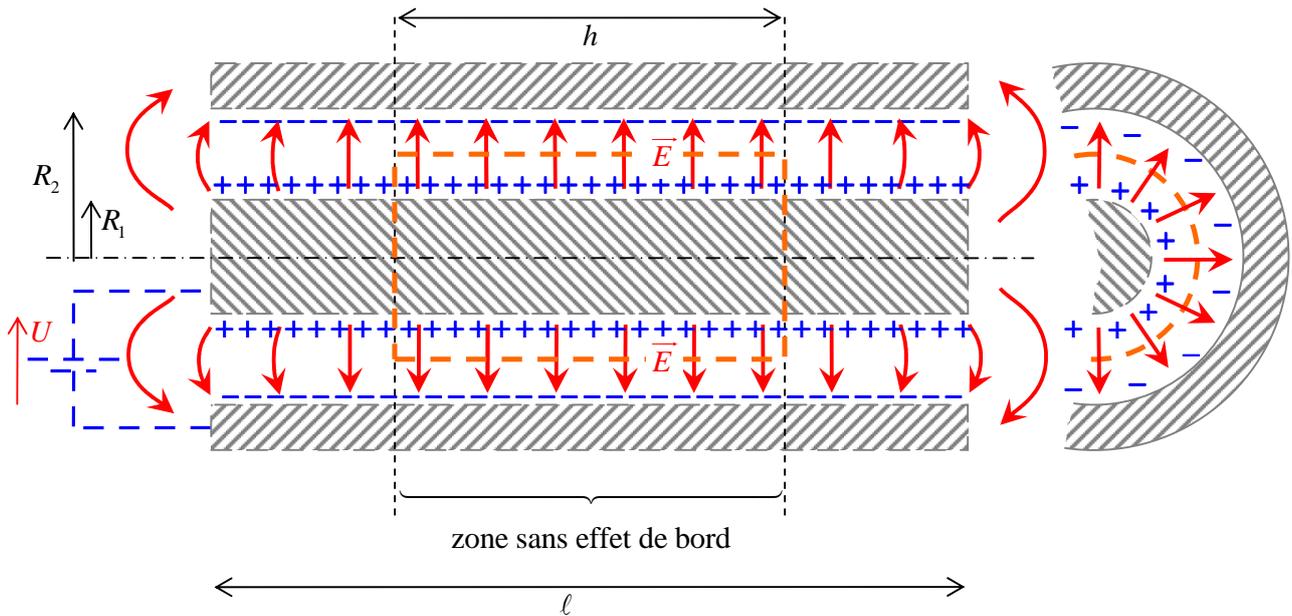
Un cylindre métallique plein de rayon  $R_1$  est placé sur l'axe  $\Delta$  d'un cylindre creux de rayon intérieur  $R_2$  et de même longueur  $\ell$  supposée très grande par rapport à  $R_2$ , de telle sorte que les « effets de bords » puissent être négligés : le condensateur ainsi formé se trouve, pour la plus grande partie de sa surface, dans une situation présentant une symétrie d'invariance par translation parallèle à l'axe des cylindres et d'invariance par rotation autour de cet axe, comme si les cylindres étaient infinis. Soit, en coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  d'axe  $\Delta$  :

$$\vec{E} = E_\rho(\rho) \vec{e}_\rho(\varphi)$$

Une différence de potentiel étant instaurée entre les deux conducteurs, les surfaces en regard se retrouvent chargées, le cylindre de potentiel le plus élevé étant porteur de charges positives.

Appliquons le théorème de Gauss sur une surface fermée constituée d'une surface latérale cylindrique d'axe  $\Delta$  et de hauteur  $h$  et de « couvercles » circulaires : le flux sortant d'une telle surface se réduit au seul flux  $2\pi\rho h E_\rho(\rho)$  à travers la surface latérale, tandis que la charge intérieure est égale à  $2\pi R_1 h \sigma_1$  où  $\sigma_1$  est la densité surfacique de charge portée par le cylindre intérieur. Nous déduisons l'expression du champ électrique radial :

$$E_\rho(\rho) = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 \rho}$$



**Expression de la capacité**

Notons que la densité surfacique  $\sigma_2$  portée par la surface cylindrique opposée a une valeur différente de  $\sigma_1$  de telle sorte que la charge totale  $Q_2$  portée par la surface intérieure du conducteur extérieur soit, conformément au théorème des éléments de surface correspondants, opposée à  $Q_1$  :

$$Q_2 = 2\pi R_2 \ell \sigma_2 = -Q_1 = -2\pi R_1 \ell \sigma_1 \quad \text{soit} \quad R_2 \sigma_2 = -R_1 \sigma_1 = -\frac{Q}{2\pi \ell}$$

Nous déterminons l'expression de la capacité linéique d'un tel condensateur en calculant l'opposé de la circulation du champ électrique entre les deux armatures sur un parcours radial :

$$U = -\int_{R_2}^{R_1} E_p(\rho) d\rho = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 \rho} d\rho = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \ell} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Soit  $\frac{Q}{\ell} = \frac{C}{\ell} U$  avec  $\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$

*Remarque :* plaçons nous dans le cas où l'épaisseur diélectrique  $e$  de la cavité est très petite, soit  $R_2 = R_1 + e$  avec  $e \ll R_1$ . L'expression de la capacité linéique, limitée au premier ordre en  $e/R_1$ , devient :

$$\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right)} = 2\pi \epsilon_0 \frac{R_1}{e} \left(1 + o\left(\frac{e}{R_1}\right)\right)$$

Cela correspond à l'expression de la capacité surfacique d'un condensateur plan d'épaisseur  $e$  :

$$\frac{C}{S} = \frac{C}{2\pi R_1 \ell} \approx \frac{\epsilon_0}{e}$$

Nous retrouverons ce comportement limite dans tous les cas où l'épaisseur diélectrique d'un condensateur est très petite par rapport aux rayons de courbure des armatures.

**Point de vue énergétique**

L'énergie électrostatique linéique du condensateur chargé, de valeur  $\frac{\mathcal{E}_e}{\ell} = \frac{1}{2} \frac{C}{\ell} U^2 = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} U^2$  est localisée entre les armatures.

La densité volumique d'énergie, dans la zone sans effet de bord, n'est fonction que de la distance radiale à l'axe  $\Delta$  :

$$u_e(\rho) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_p(\rho)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\rho\ell} \right)^2 = \frac{1}{8\pi^2\epsilon_0} \left( \frac{Q}{\ell} \right)^2 \frac{1}{\rho^2}$$

Pour retrouver l'énergie électrostatique linéique, intégrons la densité volumique sur toute la surface diélectrique comprise entre les électrodes. L'intégration se fait sommation de contributions de couronnes élémentaires de rayon compris entre  $\rho$  et  $\rho + d\rho$ .

$$\frac{\mathcal{E}_e}{\ell} = \int_{R_1}^{R_2} u_e(\rho) \times 2\pi\rho d\rho = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{8\pi^2\epsilon_0} \left( \frac{Q}{\ell} \right)^2 \frac{1}{\rho^2} 2\pi\rho d\rho = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{\ell} \right)^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{\ell} \right)^2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Avec  $\frac{Q}{\ell} = \frac{C}{\ell} U = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} U$ , nous retrouvons bien l'expression attendue,  $\frac{\mathcal{E}_e}{\ell} = \frac{1}{2} \frac{C}{\ell} U^2$ .

**Condensateur sphérique**

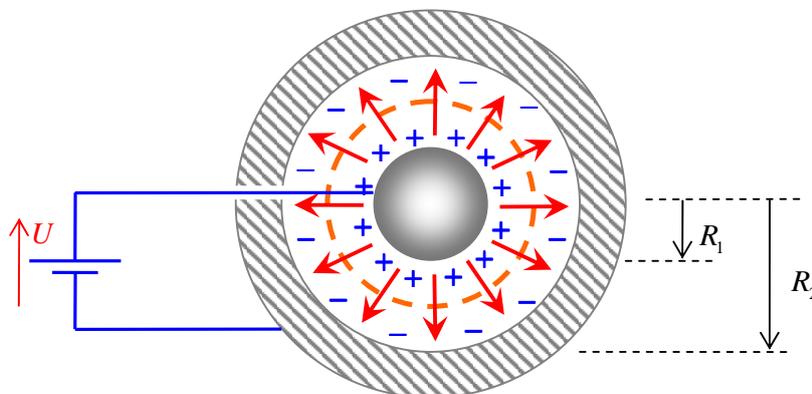
**Étude de symétrie**

Une sphère métallique pleine de rayon  $R_1$  est placée au centre O d'une sphère creuse de rayon intérieur  $R_2$  : le condensateur ainsi formé présente une symétrie sphérique de centre O, ce qui implique qu'en tout point de l'espace le champ électrique est radial et la composante radiale ne dépend que la distance  $r$  au centre O. Soit, en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  :

$$\vec{E} = E_r(r) \vec{e}_r(\theta, \varphi)$$

Une différence de potentiel étant instaurée entre les deux conducteurs, les surfaces en regard se retrouvent chargées, la sphère de potentiel le plus élevé étant porteuse de charges positives.

Appliquons le théorème de Gauss sur une surface sphérique concentrique de rayon  $r$  compris entre  $R_1$  et  $R_2$  : le flux sortant d'une telle surface a pour valeur  $4\pi r^2 E_r(r)$  tandis que la charge intérieure est égale à  $4\pi R_1^2 \sigma_1$  où  $\sigma_1$  est la densité surfacique de charge portée par la sphère intérieure.



Nous déduisons l'expression du champ électrique radial :  $E_r(r) = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon_0 r^2}$

**Expression de la capacité**

Notons que la densité surfacique  $\sigma_2$  portée par la surface sphérique opposée a une valeur différente de  $\sigma_1$  de telle sorte que la charge totale  $Q_2$  portée par la surface intérieure du conducteur extérieur soit opposée à  $Q_1$ , conformément au théorème des éléments de surface correspondants :

$$Q_2 = 4\pi R_2^2 \sigma_2 = -Q_1 = -4\pi R_1^2 \sigma_1 \quad \text{soit} \quad R_2^2 \sigma_2 = -R_1^2 \sigma_1 = -\frac{Q}{4\pi}$$

Nous déterminons l'expression de la capacité linéique d'un tel condensateur en calculant l'opposé de la circulation du champ électrique entre les deux armatures sur un parcours radial :

$$U = -\int_{R_2}^{R_1} E_r(r) dr = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Soit  $Q = CU$  avec  $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$

*Remarque :* ici encore, si l'on se place dans le cas où l'épaisseur diélectrique  $e$  de la cavité est très petite, soit  $R_2 = R_1 + e$  avec  $e \ll R_1$ . L'expression de la capacité, limitée au premier ordre en  $e/R_1$ , devient :

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 (R_1 + e)}{e} = \epsilon_0 \frac{4\pi R_1^2}{e} \left( 1 + o\left(\frac{e}{R_1}\right) \right)$$

Cela correspond à l'expression de la capacité surfacique d'un condensateur plan d'épaisseur  $e$  :

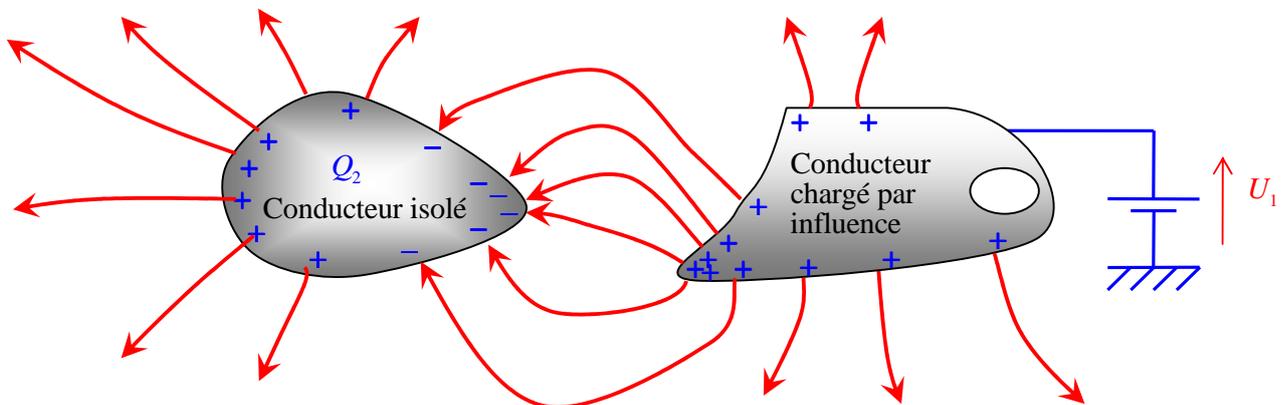
$$C \approx \epsilon_0 \frac{4\pi R_1^2}{e} = \epsilon_0 \frac{S}{e}$$

**4.4. Exemples de conducteurs en équilibre électrostatique**

**Étude qualitative**

**Conducteur isolé, conducteur chargé par influence**

Un conducteur peut être isolé et sa charge électrique globale est alors constante, ce qui ne signifie en aucun cas que sa charge surfacique soit nécessairement nulle en tout point. Dans un environnement électrostatique donné, ce conducteur définira à l'équilibre un volume équipotentiel.



Un conducteur peut aussi se voir imposer un potentiel en étant relié à un générateur de charges électriques. Dans un environnement électrostatique donné, ce conducteur acquerra une charge électrique qui se répartira à sa surface de telle sorte que le potentiel imposé soit établi dans tout son volume : on dit alors que le conducteur se charge par influence.

**Unicité de la solution**

Dans les espaces entre les conducteurs, vides de toute charge, le potentiel électrostatique est une solution de l'équation de Laplace  $\Delta V = 0$  satisfaisant aux conditions aux limites à la surface des conducteurs. Ces surfaces doivent chacune être équipotentielles, porteuses d'une charge totale égale à la charge constante du conducteur dans le cas de conducteurs isolés ou de potentiels égaux aux potentiels imposés dans le cas d'une charge par influence.

Nous admettrons l'unicité de la solution de l'équation de Laplace compatible avec les conditions aux limites imposées. Aussi, dès lors que, par quelques considérations de symétries particulières, nous savons identifier une solution possible, nous pouvons prétendre avoir trouvé la solution.

**Propriétés générales des lignes de champ et des surfaces équipotentielles**

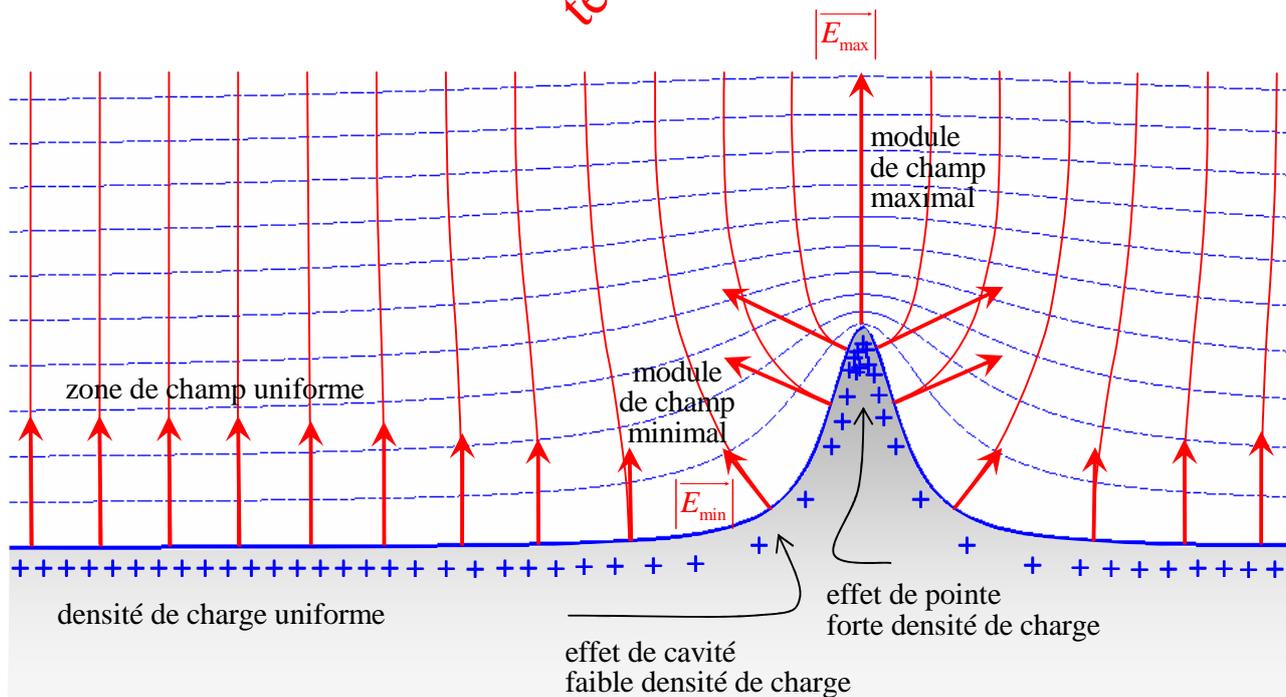
Dans tous les cas, les lignes de champ sont normales à la surface des conducteurs (avec une exception possible en certains points de surface où la densité de charge est nulle, et donc aussi le champ électrique).

Les lignes de champ, obéissant au théorème des éléments de surface correspondants, joignent toujours un point de densité surfacique positive à un point de densité surfacique négative. Attention cependant : un même conducteur peut être porteur en certains endroits de charges positives et en d'autres endroits de charges négatives.

De la même façon qu'une ligne de champ électrostatique ne peut se refermer sur elle-même, une ligne de champ quittant la surface d'un conducteur ne peut en aucun cas aboutir sur le même conducteur.

**Pouvoir des pointes. Effet de cavité**

Considérons le champ électrique quasi uniforme au voisinage de la surface localement plane d'un conducteur. À ce champ correspondent, pour des écarts de potentiels équidistants, des surfaces équipotentielles planes équidistantes.



Imaginons la présence d'une pointe métallique orthogonale à cette surface chargée. À grande distance, l'équilibre électrostatique ne sera pas perturbé, mais à courte distance, les surfaces équipotentielles se trouveront resserrées. Cela correspond à un gradient de potentiel particulièrement important dans la direction de la pointe et donc à une composante de champ électrique particulièrement importante dans cette direction : c'est ce phénomène que l'on baptise « *pouvoir des pointes* ».

*Application* : le paratonnerre fonctionne selon ce principe. La situation orageuse correspond à la création d'un effet capacitif entre la terre et les nuages. La tension devenant trop importante, le claquage est inévitable : c'est l'*éclair*, phénomène lumineux, et le *tonnerre*, phénomène sonore qui lui est associé.

Le fait d'installer une pointe métallique directement reliée au sol au plus haut point d'un village, par exemple au sommet du clocher de son église, crée un point d'accumulation de charges et de champ électrique extrême à partir duquel se déclenche préférentiellement l'éclair. La canalisation des charges électriques dans un fil conducteur dimensionné à cet effet permet d'éviter les destructions plus importantes qui se produisent lorsque la foudre « s'abat » n'importe où, dans des conditions non maîtrisées.

### Exemple de la polarisation d'une sphère conductrice isolée, non chargée, introduite dans une zone de champ uniforme

Une sphère conductrice, de charge globale nulle est introduite dans une région d'espace où le champ est uniforme. Par l'action de ce champ, la sphère se polarise. Des charges positives migrent dans le sens du champ tandis que des charges négatives migrent dans le sens opposé et ceci jusqu'à ce que le champ résultant soit nul à l'intérieur de la sphère.

Le champ uniforme  $\vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_z$  doit se retrouver comme condition aux limites à l'infini. Ce champ est associé à la fonction potentiel  $V_1 = -E_0 z$ , soit en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  d'axe polaire  $Oz$  :

$$V_1 = -E_0 r \cos \theta$$

La sphère métallique centrée en  $O$  dans ce champ uniforme constitue un système invariant par rotation autour de l'axe  $Oz$ . Nous connaissons une solution de l'équation de Laplace qui a cette symétrie, la fonction « potentiel dipolaire » faisant intervenir un paramètre scalaire  $p$  homogène à un moment dipolaire :

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

Nous allons montrer qu'une fonction potentiel  $V(r, \theta) = V_1 + V_2$ , somme de ces deux contributions, est compatible avec les conditions aux limites imposées au système, pourvu que l'on choisisse correctement la valeur du moment dipolaire  $p$ .

Le potentiel à la surface de la sphère doit être constant, et même nul puisque la sphère, électriquement isolée et initialement non chargée, doit rester de charge globale nulle. Cette condition nécessaire s'écrit :

$$V(R, \theta) = -E_0 R \cos \theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{R^2} = 0 \quad \forall \theta, \quad \text{soit } p = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^3$$

Avec une telle fonction potentiel, nous sommes assurés de retrouver le champ uniforme à très grande distance de la sphère métallique.

$$V(r, \theta) = -E_0 r \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta$$

Nous admettons l'unicité de la solution. Cette solution particulière satisfaisant à toutes les contraintes imposées est donc la solution unique du problème.

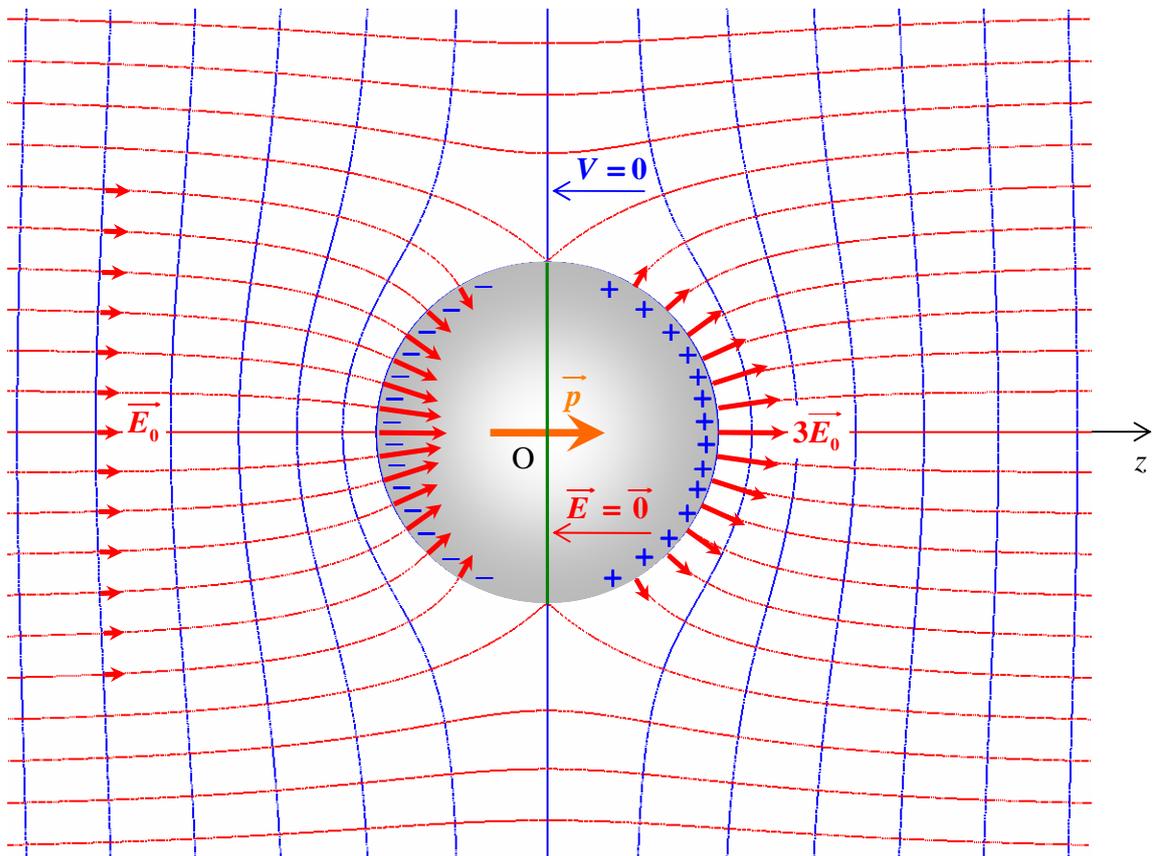
Exprimons, par dérivation en coordonnées sphériques<sup>1</sup>, le champ électrique associé à cette fonction potentiel :

$$\vec{E} \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = E_0 \left( 1 + 2\frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -E_0 \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta \\ E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \quad \text{et, en particulier, } \vec{E}(R, \theta) \begin{cases} E_r = 3E_0 \cos \theta \\ E_\theta = 0 \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

La valeur de  $E_r$  à la surface de la sphère définit la densité surfacique de charge :  $E_r = -3E_0 \cos \theta = \sigma/\epsilon_0$

Soit  $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$  avec  $\sigma_0 = 3\epsilon_0 E_0$ .

La figure ci-dessous représente les lignes de champ (en rouge) et les équipotentielles (en bleu) dans un plan méridien. On y voit de quelle façon les surfaces équipotentielles sont comprimées par l'intrusion de la sphère métallique. Ce plus fort gradient du potentiel correspond à une plus grande valeur du module du champ électrique.



*Remarque :* les points équatoriaux —représentés en vert— à la surface de la sphère conductrice semblent bien particuliers. En effet, les lignes de champ présentent des rebroussements en ces points. Cela n'est possible que parce que le champ électrique est alors nul.

<sup>1</sup> Le champ n'ayant pas de composante ortho méridienne  $E_\varphi$ , il s'agit en fait de la simple expression du gradient en coordonnées polaires dans le plan méridien.

### Exemple d'un conducteur cylindrique isolé, initialement chargé, introduit dans une zone de champ uniforme orthogonal à l'axe du cylindre

Le problème posé est typiquement un problème d'école : le conducteur chargé est infini et de plus, dans ce problème, la charge totale de l'univers n'est pas nulle. Le choix d'un potentiel nul à l'infini est donc impossible. Nous allons rechercher des solutions de l'équation de Poisson respectant les symétries du problème exprimées dans le système de coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  ayant pour axe  $Oz$  l'axe du conducteur cylindrique et pour axe polaire  $Ox$  la direction et le sens du champ uniforme  $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x$ .

Pour rendre compte de l'existence de ce champ uniforme à grande distance du conducteur, nous introduirons une première contribution au potentiel de la forme  $V_1 = -E_0 x = -E_0 \rho \cos \varphi$ .

Pour rendre compte de l'action de la charge linéique du conducteur, de densité linéique  $\lambda_0$ , nous y ajouterons une deuxième contribution de type « potentiel filaire » :  $V_2 = -\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{a}$

Le choix de la longueur  $a$  déterminera l'origine des potentiels.

Enfin, pour rendre compte de l'effet polarisant du champ électrique uniforme, nous allons introduire une troisième contribution au potentiel, solution de l'équation de Laplace  $\Delta V = 0$ , de la forme  $V_3 = K \frac{\cos \varphi}{\rho}$ .

Cette contribution est qualifiée de « potentiel bifilaire » : une telle fonction potentiel rend compte du comportement à grande distance d'un système de deux fils rectilignes infinis parallèles et porteurs de charges linéiques opposées.



**Attention** à ne pas confondre le potentiel *bifilaire*, exprimé ici **en coordonnées cylindriques**  $(\rho, \varphi, z)$  par la fonction  $\frac{\cos \varphi}{\rho}$ , avec le potentiel *dipolaire*, autre solution de l'équation de Laplace qui s'exprime, **en coordonnées sphériques**  $(r, \theta, \varphi)$ , par la fonction  $\frac{\cos \theta}{r^2}$ .

Nous recherchons donc si une solution de la forme  $V_1 + V_2 + V_3$  peut satisfaire à l'ensemble des contraintes imposées :

$$V(\rho, \varphi, z) = V_1 + V_2 + V_3 = -E_0 \rho \cos \varphi - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{a} + K \frac{\cos \varphi}{\rho}$$

Tout d'abord, la surface du cylindre de rayon  $R$  doit être équipotentielle : ceci impose la valeur de la constante  $K$ , c'est-à-dire le degré de polarisation du conducteur cylindrique :

$$V(R, \varphi, z) = -\left(E_0 R - \frac{K}{R}\right) \cos \varphi - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{a} \quad \text{indépendant de } \varphi \Rightarrow K = E_0 R^2$$

D'où l'expression possible de la fonction potentiel :

$$V(\rho, \varphi, z) = -E_0 \rho \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right) \cos \varphi - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{a}$$

Déterminons le champ électrique dérivant d'un tel potentiel par dérivation en coordonnées cylindriques et calculons en particulier la répartition surfacique de charges sur le conducteur cylindrique, pour  $\rho = R$ .

$$\overline{E} \begin{cases} E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = E_0 \left( 1 + \frac{R^2}{\rho^2} \right) \cos \varphi + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 \rho} \\ E_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -E_0 \left( 1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right) \sin \varphi \\ E_z = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{et, en particulier, } \overline{E}(R, \varphi) \begin{cases} E_\rho = 2E_0 \cos \varphi + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 R} \\ E_\varphi = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Le champ électrique est bien orthogonal à la surface du conducteur : c'est une première nécessité. Pour satisfaire la loi de Coulomb, nous en déduisons l'expression de la densité surfacique de charge :

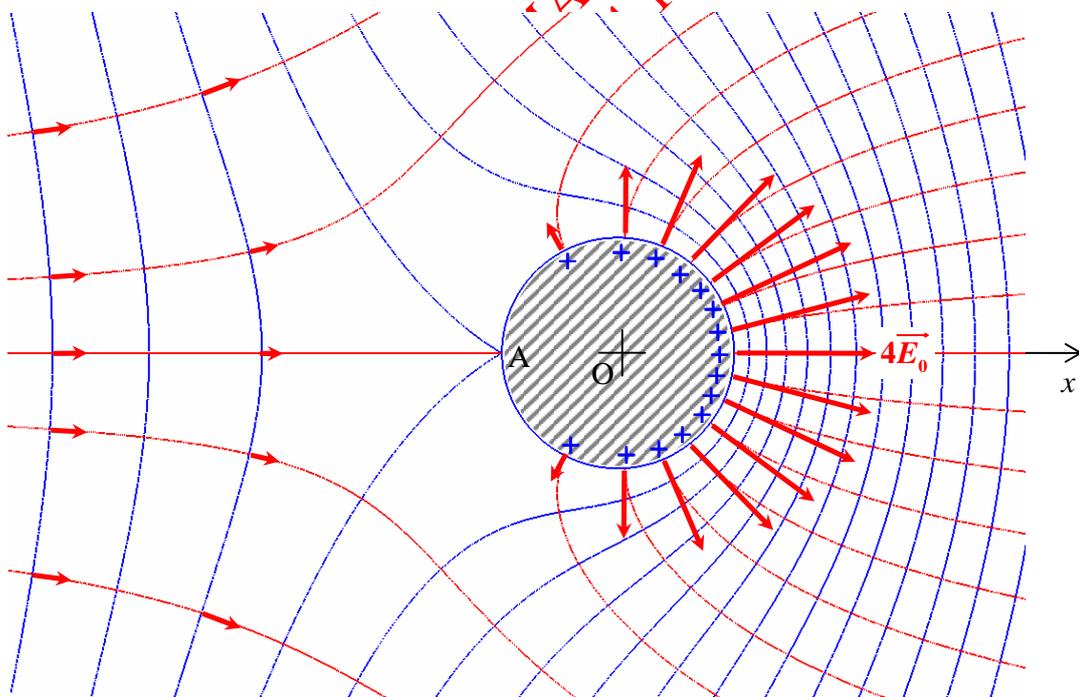
$$E_\rho = 2E_0 \cos \varphi + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma(\varphi) = 2\epsilon_0 E_0 \cos \varphi + \frac{\lambda_0}{2\pi R}$$

La sommation sur un tour de  $R\sigma(\varphi)$  nous donne bien la valeur de la charge linéique  $\lambda_0$  du conducteur :

$$\int_0^{2\pi} R\sigma(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( 2\epsilon_0 E_0 R \cos \varphi + \frac{\lambda_0}{2\pi} \right) d\varphi = \lambda_0$$

Toutes les conditions aux limites sont donc satisfaites et nous pouvons affirmer avoir mis en évidence la solution du problème posé.

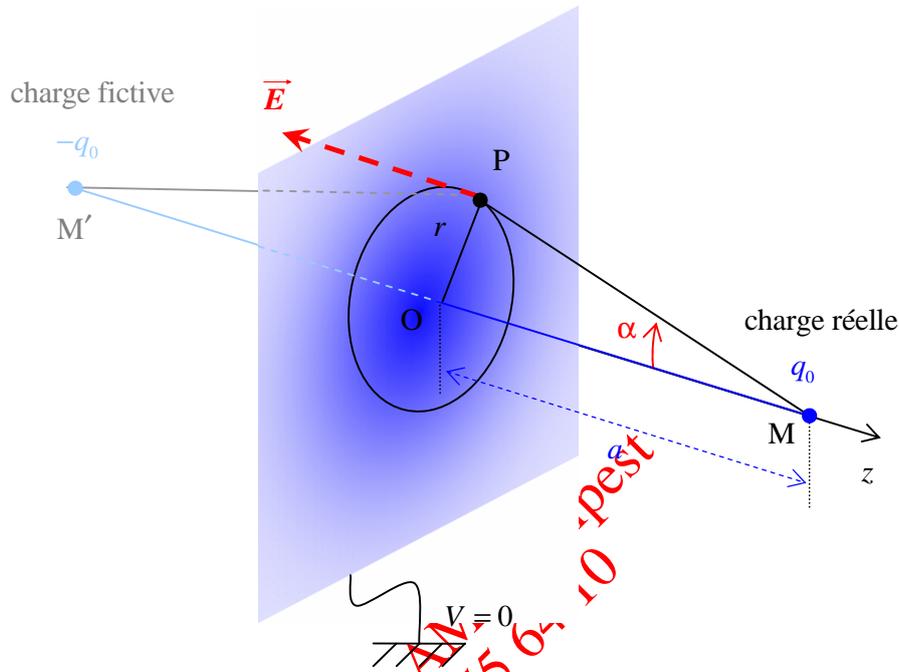
Le schéma ci-dessous correspond au cas particulier d'un cylindre chargé positivement, avec  $\lambda_0 = 4\pi\epsilon_0 E_0 R$ . Il s'agit bien sûr d'un plan de coupe orthogonal à l'axe du cylindre. Comme précédemment, les lignes de champ sont en rouge et les équipotentielles en bleu.



*Remarque :* cette figure est tracée à l'aide d'un logiciel de calcul formel (en l'occurrence, il s'agit de MAPLE). Le tracé des courbes à partir des expressions analytiques du champ et du potentiel n'est évidemment pas exigible en temps limité. Par contre, l'interprétation de ce schéma et la reconnaissance sur celui-ci de quelques lois de l'électrostatique est un bon exercice. Par exemple, au vu de la carte des champs et équipotentielles, que vaut le champ électrique au point A ?

**Exemple de la charge par influence d'un conducteur plan de potentiel nul à l'approche d'une charge ponctuelle**

Voici un dernier exemple de conducteur en équilibre électrostatique. Un plan métallique est relié à la masse, c'est-à-dire porté au potentiel de l'infini. De très loin, une charge électrique ponctuelle  $q_0$  est amenée en un point M à la distance  $a$  d'un point O de ce plan. Celui-ci, par influence, va se charger négativement d'une charge opposée  $-q_0$  et l'on se propose d'établir la loi de répartition surfacique des charges dans le plan.



Nous ne savons pas résoudre directement l'équation de Laplace  $\Delta V = 0$ , mais nous connaissons une solution satisfaisant à l'ensemble des conditions aux limites imposées. En effet, si nous considérons le dipôle constitué d'une charge  $q_0$  placée en M et d'une charge  $-q_0$  placée en M', symétrique de M par rapport au plan conducteur, nous savons que ce doublet de charges produirait un potentiel nul dans le plan médiateur du segment MM'.

La référence à l'unicité des solutions nous permet d'affirmer que le champ créé par le doublet dans le plan médiateur est orthogonal à ce plan et a pour valeur algébrique :

$$E_z(r) = -2 \times \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \alpha}{r^2 + a^2} = - \frac{q_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\sigma(r)}{\epsilon_0}$$

La charge électrique  $dq$  contenue dans une couronne de rayon compris entre  $r$  et  $r+dr$  a pour expression :

$$\text{avec } \sigma(r) = - \frac{q_0}{2\pi} \frac{a}{(r^2 + a^2)^{3/2}}, \quad dq = 2\pi r \sigma(r) dr = - q_0 \frac{ar}{(r^2 + a^2)^{3/2}} dr$$

Son intégrale étendue à la totalité de la surface du plan conducteur s'écrit :

$$q = \int_0^\infty 2\pi r \sigma(r) dr = - q_0 \int_0^\infty \frac{ar}{(r^2 + a^2)^{3/2}} dr = - q_0$$

Résultat sans surprise, non ?

# Rappels de magnétostatique

En 1819, le physicien danois Hans Christian Ørsted observe la déviation d'une boussole au voisinage d'un fil métallique parcouru par un courant continu. Les expériences ultérieures d'Ampère, Laplace, Biot et Savart dans les années 1820 précisent la notion de champ magnétique.

Ce chapitre a pour but de poser les bases de la magnétostatique, c'est-à-dire l'étude du champ magnétique en régime indépendant du temps.

## I Les distributions de courant

### I.1. Rappel sur le courant électrique

Un courant électrique est un mouvement d'ensemble de porteurs de charges (qui peuvent être des électrons dans les métaux ou des ions dans les solutions électrolytiques).

#### Propriété

Le courant électrique traversant une surface  $\Sigma$  est caractérisé par une intensité  $I_\Sigma$  définie par :

$$I_\Sigma = \frac{dQ_\Sigma}{dt}$$

où  $dQ_\Sigma$  est la charge traversant la surface  $\Sigma$  pendant  $dt$ .

$I_\Sigma$  s'exprime en ampère (A) dans le système d'unités international (S.I.).

En fonction de la géométrie des conducteurs, il est parfois préférable de décrire le courant électrique par une grandeur locale plutôt que par son intensité.

### I.2. Distribution volumique de courant

Dans le cas d'une distribution volumique de courant, les porteurs de charges peuvent se déplacer dans les trois directions de l'espace.

#### Exemple

*Courants dans un plasma ou dans le noyau de la Terre, particules chargées des aurores boréales, foudre, ...*

*A priori*, le courant électrique est caractérisé par une grandeur vectorielle qui dépend du mouvement des porteurs de charges.

On suppose qu'il n'existe qu'une seule sorte de porteurs de charges possédant :

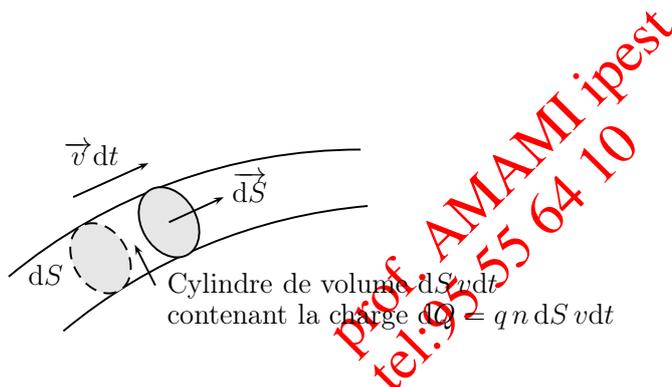
- une charge électrique  $q$  ;
- une densité numérique  $n$  (en  $\text{m}^{-3}$ ) ;
- une vitesse  $\vec{v}$ .

La densité volumique de charges vaut alors  $\rho = nq$ .

Considérons un tube de courant de petite section  $dS$  et déterminons l'intensité le traversant.



FIGURE 1 – La foudre correspond à un courant électrique réparti en volume.



La charge  $dQ$  qui traverse la section  $dS$  pendant  $dt$  est celle contenue initialement dans un volume  $dS \times v dt$  soit

$$dQ = nq v dt dS$$

L'intensité du courant qui traverse  $dS$  vaut donc

$$dI = \frac{dQ}{dt} = nq v dS = j dS$$

Lorsque  $dS$  n'est plus la section d'un tube de champ, on obtient la relation générale

$$dI = nq \vec{v} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

où  $d\vec{S}$  est le vecteur surface orienté conventionnellement.

Propriété

Une distribution volumique de courant est caractérisée par une **densité volumique de courant**  $\vec{j}$  définie par

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = n q \vec{v}$$

où  $\rho$  est la densité volumique de porteurs de charges mobiles et  $\vec{v}$  leur vitesse moyenne.

L'intensité  $I_\Sigma$  traversant une surface  $\Sigma$  est égale au flux de  $\vec{j}$  à travers  $\Sigma$  soit

$$I_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Remarque

Attention : la densité volumique de courant s'exprime en  $A.m^{-2}$

I.3. Distribution linéique de courant - Circuits filiformes

On parle de **distribution linéique de courant** lorsque le déplacement des porteurs de charges s'effectue le long d'un tube de courant de petite section, quasiment assimilable à un fil.

On parle de **circuit filiforme** lorsqu'un conducteur électrique possède des dimensions transversales petites devant sa longueur.

Exemple

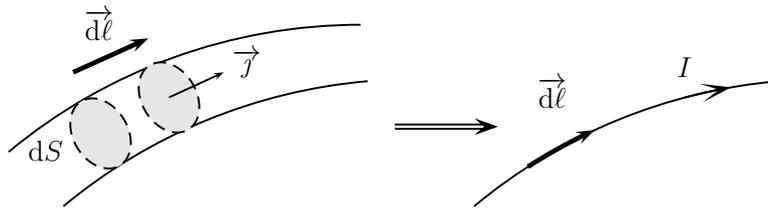
Étincelle électrique, fil de cuivre des circuits électriques, ...



FIGURE 2 – Un câble électrique est assimilable à un conducteur filiforme.

Propriété

Dans une modélisation linéique, le courant traversant un circuit filiforme est caractérisé par son intensité  $I$ .



#### Remarque

Une distribution linéique de courant correspond à une modélisation. Aux petites échelles, il n'est plus possible de négliger les dimensions transversales d'un tube de courant.

### I.4. Distribution surfacique de courant - Nappe de courant

On parle de **distribution surfacique de courant** lorsque les porteurs de charges se déplacent sur un tube de courant assimilable à une surface.

On parle de **nappe de courant** lorsqu'un conducteur électrique possède une dimension transversale très inférieure aux autres dimensions.

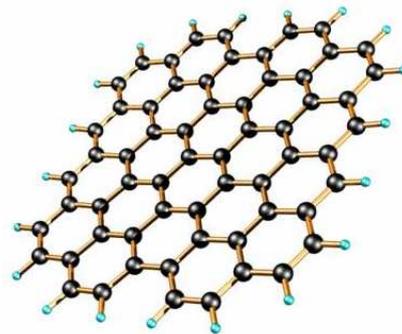
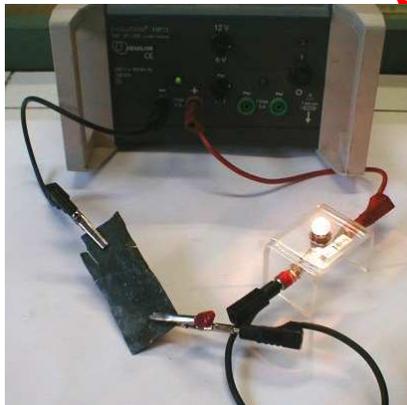
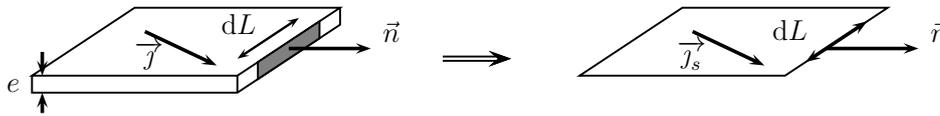


FIGURE 3 – À gauche, la plaque de zinc conduit le courant sous la forme d'un courant surfacique. À droite, une molécule de graphène, uniquement constituée d'atomes de carbone. Les électrons de conduction de la structure se déplacent sur une surface mono-atomique !

#### Exemple

Armatures d'un condensateur, poêle chauffée sur une plaque à induction, plaque métallique, feuille de graphène, ...



Notons  $e$  la petite épaisseur de la distribution de courant. L'intensité  $dI$  qui traverse une surface de section  $dS = e dL$  et de normale  $\vec{n}$  vaut

$$dI = \vec{j} \cdot (e dL \vec{n}) = (e \vec{j}) \cdot (dL \vec{n}) = \vec{j}_s \cdot (dL \vec{n})$$

**Propriété**

Une distribution surfacique de courant est caractérisée par un **vecteur densité surfacique de courant**  $\vec{j}_s$ .

L'intensité traversant une courbe  $C$  de la nappe de courant vaut

$$I = \int_C \vec{j}_s \cdot (dL \vec{n})$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire tangent à la nappe de courant et normal à  $C$ .

Remarque

Une densité surfacique de courant s'exprime en  $A.m^{-1}$

Remarque

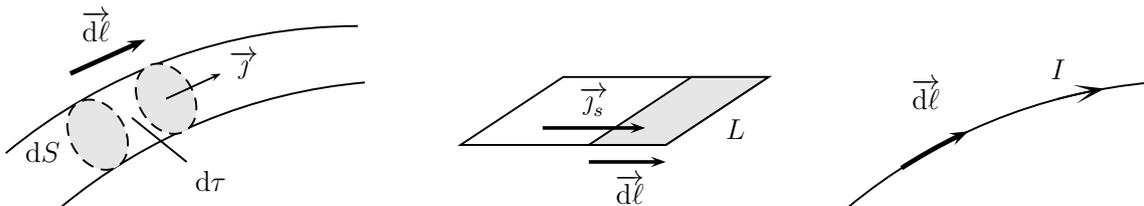
Une distribution surfacique de courant correspond à une modélisation. Aux petites échelles, il n'est plus possible de négliger l'épaisseur d'un tube de courant.

**I.5. Élément de courant**

Considérons une longueur  $d\ell$  d'un tube de courant de section  $dS$ . Cette portion du tube de courant possède un volume  $d\tau = d\ell dS$ .

Dans une modélisation linéique, ce tube de courant est assimilé à un fil parcouru par une intensité  $I$ . En notant  $\vec{d\ell}$  le vecteur de longueur  $d\ell$  tangent au tube de courant, c'est-à-dire colinéaire à  $\vec{j}$ , on obtient l'égalité :

$$\vec{j} d\tau = \vec{j} dS d\ell = j dS \vec{d\ell} = I \vec{d\ell}$$



De la même manière, si cette portion de tube de courant possède une épaisseur  $e$  petite devant sa largeur  $L$ , on peut adopter une modélisation surfacique, caractérisée par une densité surfacique de courant  $\vec{j}_s$ .

Dans ces conditions, on trouve :

$$\vec{j} d\tau = \vec{j} dS dl = \vec{j} e L dl = \vec{j}_s L dl$$

**Définition :**

On appelle élément de courant  $d\vec{C}$  le vecteur élémentaire défini par :

$$d\vec{C} = \vec{j} d\tau = \vec{j}_s L d\ell = I d\vec{\ell}$$

Prof. AMAL  
tel:95 55 64 11

## II Cadre de la magnétostatique

### II.1. Équation de conservation de la charge

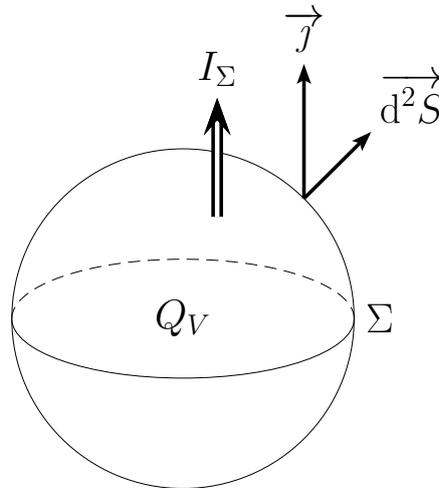
Considérons une surface fermée et fixe  $\Sigma$  contenant un volume  $V(\Sigma)$  et notons  $Q_V$  la charge électrique totale contenue dans ce volume à la date  $t$ .

La charge totale contenue dans  $V(\Sigma)$  ne peut varier que si des charges rentrent ou sortent de la surface  $\Sigma$ , c'est-à-dire s'il existe un courant électrique qui traverse la surface. Autrement dit, il n'y a pas de création spontanée de charge électrique.

On note  $I_\Sigma = I_{\text{sortant}} - I_{\text{entrant}}$  l'intensité du courant qui sort de la surface. On a alors

$$\frac{dQ_V}{dt} = -I_\Sigma$$

le signe "-" provenant du fait que la charge  $Q_V$  diminue lorsque  $I_\Sigma > 0$ .



Mais on peut exprimer  $I_\Sigma$  en fonction de la densité volumique de courant  $\vec{j}$  :

$$I = \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d^2\vec{S}$$

On en déduit une équation qui traduit la conservation de la charge électrique :

$$\frac{dQ_V}{dt} + \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d^2\vec{S} = 0$$

Cette équation possède un équivalent local. En effet, chacun des deux termes de cette équation peut être exprimé d'une façon différente.

En notant  $\rho(M, t)$  est la densité volumique de charges (à la date  $t$  et au point  $M$ ), on a :

$$Q_V(t) = \iiint_V \rho(M, t) d^3V \Rightarrow \frac{dQ_V}{dt} = \iiint_{V(\Sigma)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3V \quad \Sigma \text{ fixe}$$

Par ailleurs, le théorème de Green-Ostrogradsky permet d'écrire

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d^2\vec{S} = \iiint_{V(\Sigma)} \text{div}(\vec{j}) d^3V$$

L'équation de conservation de la charge conduit à

$$\iiint_{V(\Sigma)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3V + \iiint_{V(\Sigma)} \text{div}(\vec{j}) d^3V = 0$$

Cette équation est valable quelle que soit la surface fermée et fixe  $\Sigma$ . En faisant tendre cette surface vers un point, on obtient la relation locale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$$

**Propriété**

L'équation de conservation de la charge s'écrit, sous sa forme locale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0$$

où  $\rho = \rho(M, t)$  est la densité volumique de charge et  $\vec{j} = \vec{j}(M, t)$  est la densité volumique de courant, au point  $M$  et à la date  $t$ .

Cette équation s'écrit sous forme intégrale :

$$\frac{dQ_V}{dt} + \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d^2\vec{S} = 0$$

où  $\Sigma$  est une surface fermée et  $Q_V$  est la charge totale contenue dans  $\Sigma$ .

**Remarque**

Cette équation traduit le fait que la charge contenue dans un volume donné ne peut varier que si des charges entrent ou sortent du volume : il n'y a donc pas de création de charges.

**II.2. Approximation des régimes quasi-stationnaires (A.R.Q.S.)****a) Définition**

Considérons un circuit électrique de dimension caractéristique  $L$  et parcouru par un signal électrique (ou plutôt électromagnétique) de fréquence  $f$ . On note  $T = 1/f$  la période du signal électrique. Estimons les ordres de grandeur des différents termes dans l'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \sim \frac{\rho}{T}$$

$$\operatorname{div}(\vec{j}) \sim \frac{j}{L}$$

Mais  $j = \rho v \sim \rho c$  où  $v \approx c$  est la vitesse des porteurs de charge, que l'on identifie à la vitesse de propagation du signal électrique et  $c$  est la célérité de la lumière. Ainsi

$$\frac{j}{L} \sim \frac{\rho c}{L}$$

et

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \ll \operatorname{div}(\vec{j}) \Leftrightarrow \frac{\rho}{T} \ll \frac{\rho c}{L} \Leftrightarrow T \gg \frac{L}{c}$$

Mais  $\frac{L}{c} \sim \tau_p$  s'identifie au temps de propagation du signal le long du circuit électrique. Ainsi on peut parler de régime "lentement variable" si

$$T \gg \tau_p \quad (\text{temps de propagation négligé})$$

Par ailleurs,  $cT = \lambda$  s'identifie à distance parcourue par le signal pendant une période  $T$ . Le régime "lentement variable" correspond donc aussi à

$$\lambda \gg L \quad (\text{circuit de petite dimension})$$

**Définition :**

L'approximation des régimes quasi-stationnaires (A.R.Q.S.) consiste à négliger le temps de propagation  $\tau_p$  d'un signal électromagnétique devant sa période  $T$  ( $\tau_p \ll T$ ).

De façon équivalente, l'A.R.Q.S. consiste à négliger les dimensions  $L$  d'un circuit devant la quantité  $\lambda = cT$  où  $c$  est la vitesse de propagation d'un signal électromagnétique et  $T$  sa durée caractéristique d'évolution.

Les signaux sont donc transmis instantanément à l'échelle du circuit.

**b) Conséquences**

En régime lentement variable, la charge contenue à l'intérieur d'une surface fermée varie lentement de sorte que

$$\frac{dQ_V}{dt} \simeq 0$$

On en déduit que le courant sortant de cette surface est quasiment nul

$$I = \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d^2\vec{S} \simeq 0 \quad \text{soit} \quad \text{div}(\vec{j}) \simeq 0$$

La relation

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d^2\vec{S} \simeq 0$$

indique que le flux entrant de  $\vec{j}$  est égal au flux sortant à travers la surface  $\Sigma$ . On dit que le vecteur  $\vec{j}$  est à flux conservatif.

**Propriété**

Dans l'A.R.Q.S., le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  est à flux conservatif :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d^2\vec{S} = 0 \iff \text{div}(\vec{j}) = 0$$

En particulier, si la surface enlace un nœud de circuit électrique, on retrouve la loi de Kirchhoff encore appelée loi des nœuds.

**Loi de Kirchhoff ou loi des nœuds**

Dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires A.R.Q.S., la somme des courants algébriques arrivant à un nœud de circuit électrique est nulle.

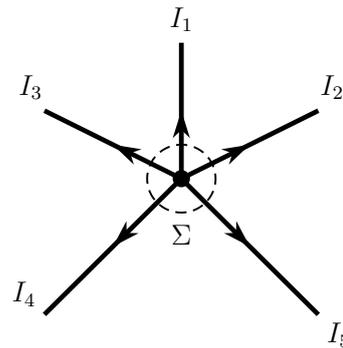


FIGURE 4 – Dans l'A.R.Q.S., l'équation de conservation de la charge s'identifie à la loi des nœuds :  $\sum_i I_i = 0$ .

Remarque

Pour un circuit de taille  $L = 1$  m, l'A.R.Q.S. est vérifiée si

$$L \ll cT \quad \text{soit} \quad T \gg \frac{L}{c} = \frac{1}{3 \cdot 10^8} \approx 3 \text{ ns}$$

où  $T$  est la période des signaux. La loi des nœuds est donc valide jusqu'à des fréquences

$$f \ll \frac{1}{T} = 300 \text{ MHz}$$

pour un circuit au laboratoire.

### II.3. Cadre de la magnétostatique

Définition :

On appelle magnétostatique l'étude des champs magnétiques créés par des courants dans le cadre de l'A.R.Q.S. .

Dans la pratique, la magnétostatique s'applique si les courants sont lentement variables, correspondant à des signaux de basses fréquences, la distribution de charge étant quasiment indépendante du temps.

### III Loi de Biot et Savart

#### III.1. Énoncé

Considérons un circuit filiforme parcouru par un courant d'intensité  $I$  constante.

##### Loi de Biot et Savart

Le champ magnétostatique infinitésimal  $\vec{dB}(M)$  créé au point  $M$  par un petit élément de courant  $\vec{dC} = I\vec{d\ell}$  centré au point  $P$  est donné par la loi de Biot et Savart

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\vec{d\ell} \wedge \vec{u}_{PM}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\vec{d\ell} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

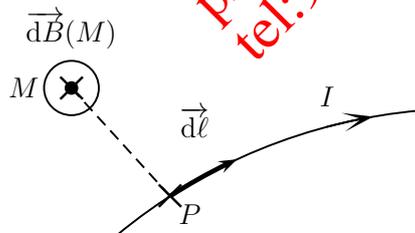
où  $r = PM$  et  $\vec{u}_{PM} = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|}$  est le vecteur unitaire orienté de  $P$  vers  $M$ .  
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  est la perméabilité du vide.

##### Remarque

Si le circuit n'est pas filiforme, la loi de Biot et Savart prend la forme

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{dC} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

où  $\vec{dC}$  est l'élément de courant centré au point  $P$ .



Mais il n'est pas possible d'isoler expérimentalement un élément de courant d'un circuit : dans ce cas,  $\vec{j}$  ne serait plus à flux conservatif. On applique alors le principe de superposition.

##### Principe de superposition

Le champ magnétostatique total  $\vec{B}(M)$  créé en un point  $M$  par une distribution  $\mathcal{D}$  de courant est la somme des champs magnétostatiques créés par chacun des éléments de courants de  $\mathcal{D}$  :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{I\vec{d\ell} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

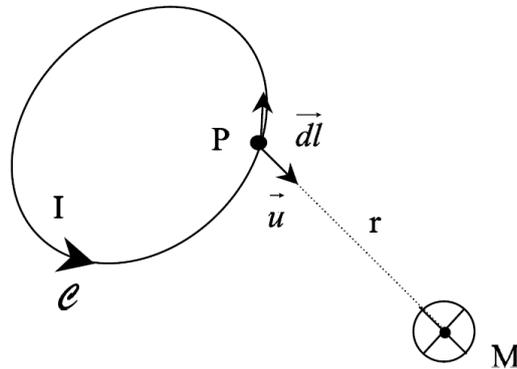


FIGURE 5 –

Remarque

C'est cette expression qui est vérifiée expérimentalement.

Remarque

Le champ magnétique s'exprime en tesla (T) dans le système d'unités international (S.I.).

On donne ci-dessous quelques ordres de grandeurs des champs magnétiques :

- champ magnétique terrestre  $B \simeq 10^{-5}$  T ;
- aimant courant  $B \simeq 10$  mT ;
- électroaimant ordinaire  $B \simeq 1$  T ;
- bobine supraconductrice  $B \simeq 20$  T ;
- champ magnétique interstellaire  $B \simeq 10^{-12}$  T ;
- champ magnétique dans une tache solaire  $B \simeq 0,1$  T ;
- champ magnétique d'une étoile à neutrons  $B \simeq 10^8$  T .

**III.2. Application : champ créé par un fil - limite du fil infini**

On considère un segment  $S_1S_2$  parcouru par un courant d'intensité  $I$  constante. On souhaite déterminer le champ magnétique créé en un point  $M$ , situé à la distance  $R$  du fil.

Champ élémentaire

Soit un élément  $d\vec{\ell} = dz \vec{u}_z$  centré en  $P$ . Le champ magnétique élémentaire créé par cet élément est :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I dz \vec{u}_z \wedge \vec{PM}}{4\pi ||\vec{PM}||^3} = \frac{\mu_0 I dz R \vec{u}_\theta}{4\pi PM^3}$$

De plus,  $PM = \frac{R}{\cos \psi}$  et  $z = R \tan \psi$  donc  $dz = \frac{R}{\cos^2 \psi} d\psi$  ce qui donne :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I \cos \psi}{4\pi R} \vec{u}_\theta$$

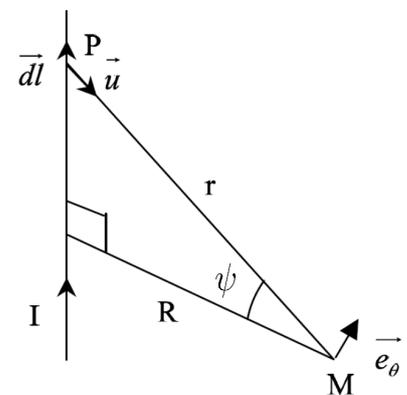


FIGURE 6 –

**Champ total**

On intègre entre  $\psi_1$  et  $\psi_2$  :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I (\sin \psi_2 - \sin \psi_1)}{4\pi R} \vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad \sin \psi = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

**Cas du fil infini**

On a  $\psi_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$  et  $\psi_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  donc

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{u}_\theta$$

**IV Symétries et invariances du champ magnétostatique****IV.1. Existence d'un plan de symétrie pour les sources**

Supposons que la distribution de courant soit symétrique par rapport à un plan  $\Pi_s$ .

Rappel : Un plan  $\Pi_s$  est dit plan de symétrie si l'opération de symétrie laisse invariante la distribution de courant.

Exemple

Deux fils conducteurs rectilignes, parallèles entre eux et parcourus par le même courant.

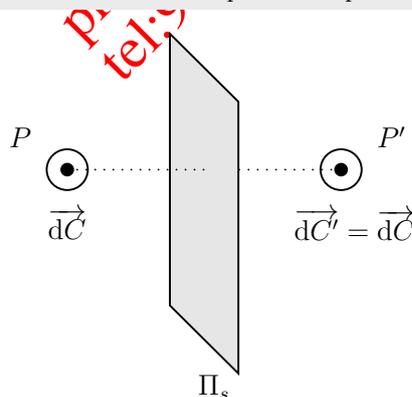


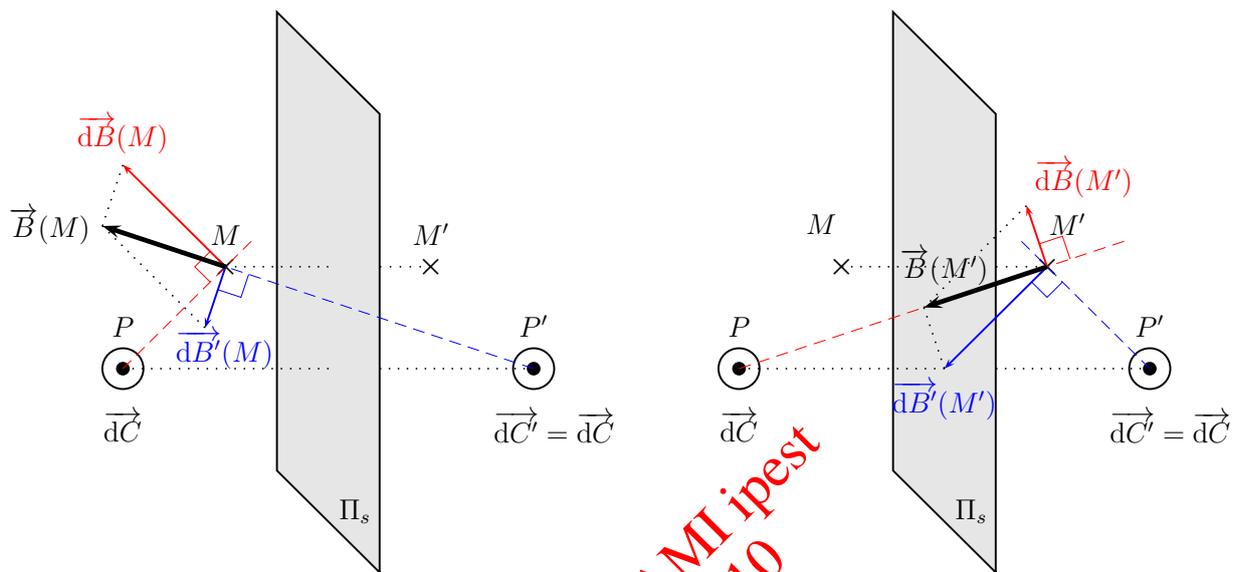
FIGURE 7 – Le plan  $\Pi_s$  est un plan de symétrie pour la distribution de courants.

On choisit un point  $M$  quelconque et l'on note  $M'$  son symétrique par rapport au plan de symétrie  $\Pi_s$ . On s'intéresse au champ total créé par deux éléments de courant,  $\vec{dC}$  et  $\vec{dC}'$ , symétriques par rapport à  $\Pi_s$ . On note :

- \*  $\vec{dB}(M)$  le champ magnétostatique créé en  $M$  par  $\vec{dC}$  ;
- \*  $\vec{dB}'(M)$  le champ magnétostatique créé en  $M$  par  $\vec{dC}'$  ;
- \*  $\vec{dB}(M')$  le champ magnétostatique créé en  $M'$  par  $\vec{dC}$  ;
- \*  $\vec{dB}'(M')$  le champ magnétostatique créé en  $M'$  par  $\vec{dC}'$  .

Le champ total en  $M$  est  $\vec{B}(M) = \overrightarrow{dB}(M) + \overrightarrow{dB}'(M)$  tandis que le champ total en  $M'$  vaut  $\vec{B}(M') = \overrightarrow{dB}(M')$

On cherche graphiquement la relation entre  $\vec{B}(M)$  et  $\vec{B}(M')$ . Pour ce faire, il suffit d'appliquer la loi de Biot et Savart, respectivement au points  $M$  et  $M'$ .



Au bilan, les champs magnétostatiques en  $M$  et  $M'$  sont représentés sur la figure 8.

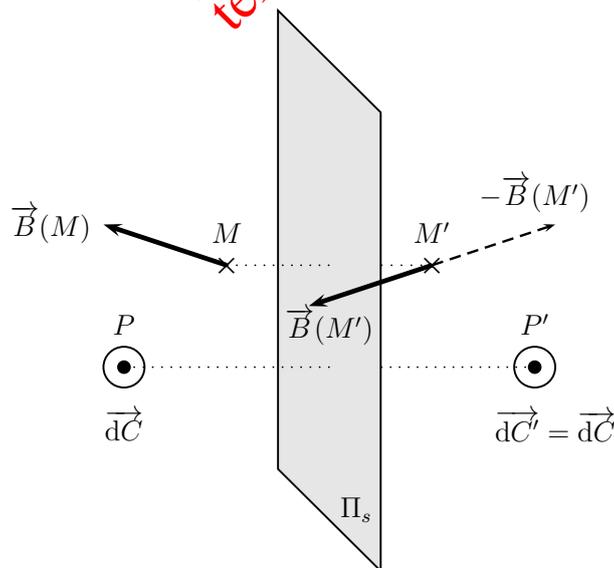


FIGURE 8 – Champs magnétostatiques créés en  $M$  et  $M'$  par la distribution de courant, symétrique par rapport à  $\Pi_s$ .

**Propriété**

Le champ magnétostatique n'est pas un vrai vecteur car son image par un plan de symétrie  $\Pi_s$  est l'opposé de son symétrique

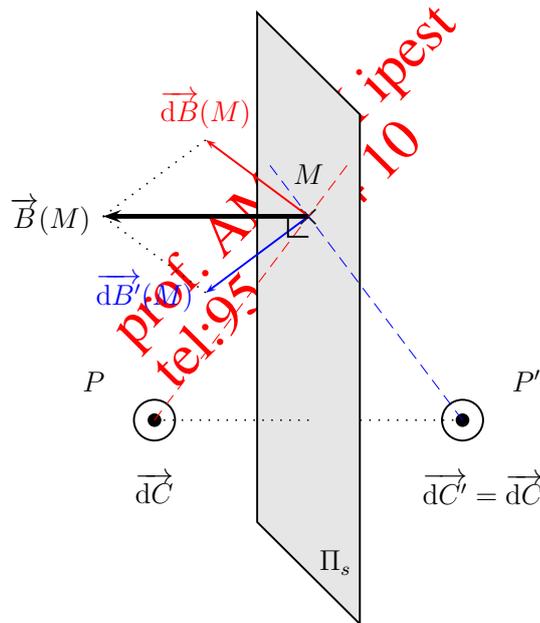
$$\vec{B}(M') = -Sym_{\Pi_s} [\vec{B}(M)]$$

où  $M' = Sym_{\Pi_s}(M)$ . On dit que  $\vec{B}$  est un vecteur axial ou un pseudo-vecteur.

Si le point  $M$  appartient au plan  $\Pi_s$  de symétrie,  $\vec{B}(M) = -Sym_{\Pi_s} [\vec{B}(M)]$  : le champ magnétostatique en  $M$  est égal à l'opposé de son symétrique, ce qui n'est possible que si  $\vec{B}(M)$  est orthogonal au plan de symétrie.

**Propriété**

En un point d'un plan de symétrie  $\Pi_s$  pour la distribution de courant, le champ magnétostatique est orthogonal à ce plan.



Remarque

On retrouve cette propriété dans le cas du champ magnétostatique créé par un fil rectiligne infini. En effet, en un point  $M$  donné, le plan passant par  $M$  et contenant le fil est un plan de symétrie. Le champ  $\vec{B}(M)$  en  $M$ , porté par  $\vec{u}_\theta$ , est bien orthogonal à ce plan.

**IV.2. Existence d'un plan d'antisymétrie pour les sources**

Supposons que la distribution de courant soit antisymétrique par rapport à un plan  $\Pi_a$ .

Rappel : Un plan  $\Pi_a$  est dit plan d'antisymétrie si l'opération de symétrie change le sens des courants.

Exemple

Deux fils conducteurs rectilignes, parallèles entre eux et parcourus par des courants opposés.

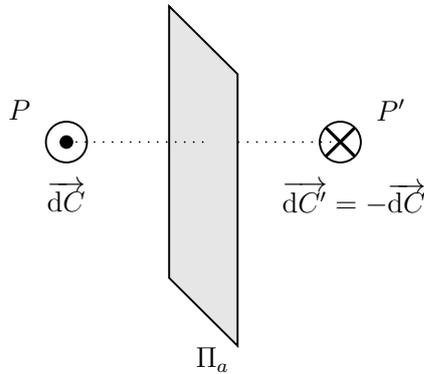
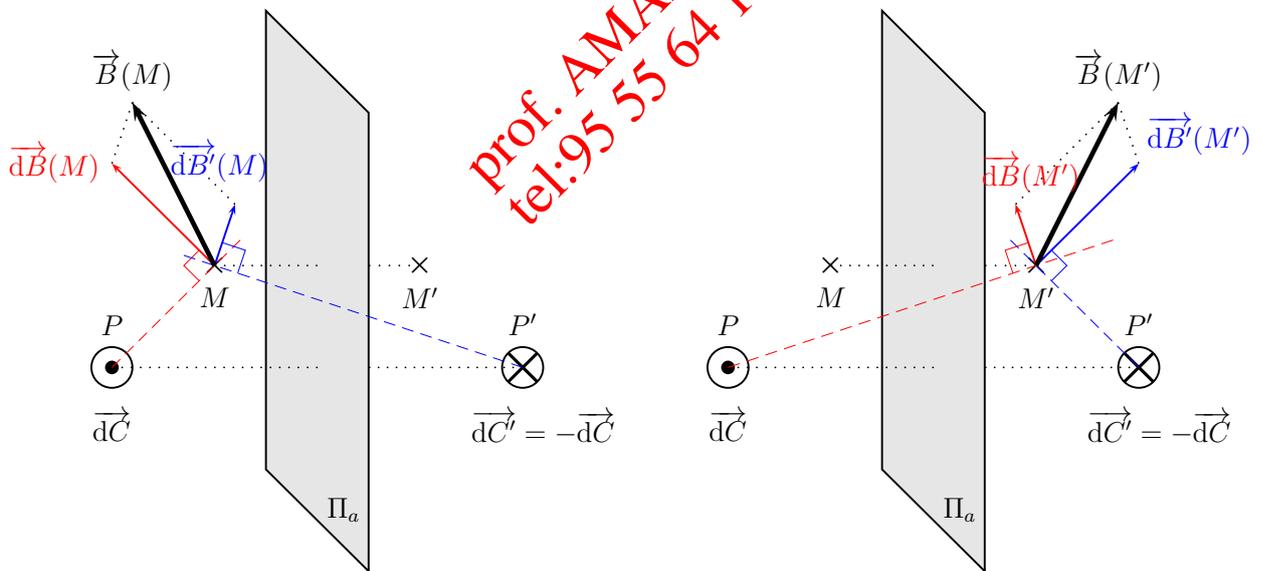


FIGURE 9 – Le plan  $\Pi_a$  est un plan d’antisymétrie pour la distribution de courants.

On choisit un point  $M$  quelconque et l’on note  $M'$  son symétrique par rapport au plan d’antisymétrie  $\Pi_a$ . On s’intéresse au champ total créé par deux éléments de courant,  $\vec{dC}$  et  $\vec{dC}'$ , antisymétriques par rapport à  $\Pi'$ . On conserve les notations de la partie précédente.

On cherche graphiquement la relation entre  $\vec{B}(M)$  et  $\vec{B}(M')$ . Pour ce faire, il suffit d’appliquer la loi de Biot et Savart, respectivement au points  $M$  et  $M'$ .



Au bilan, les champs magnétostatiques en  $M$  et  $M'$  sont représentés sur la figure 10.

Propriété

Le champ magnétostatique est symétrique par rapport à un plan d’antisymétrie  $\Pi_a$  pour les courants

$$\vec{B}(M') = Sym_{\Pi_a} [\vec{B}(M)]$$

où  $M' = Sym_{\Pi_a}(M)$ .

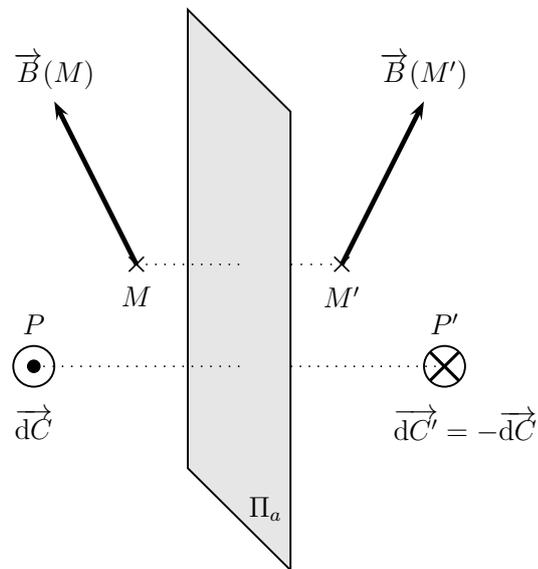
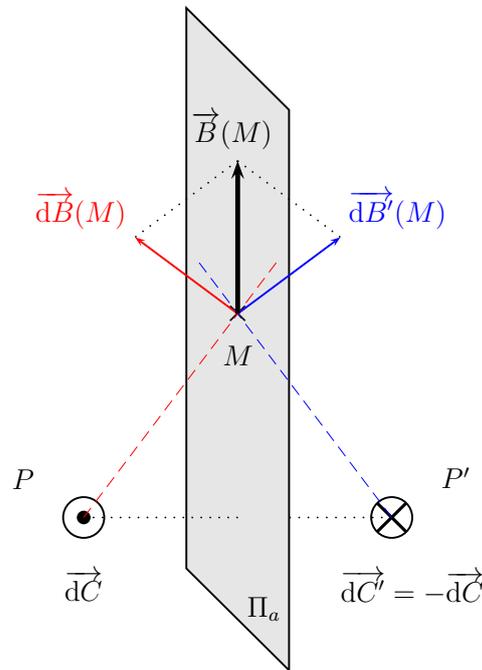


FIGURE 10 – Champs magnétostatiques créés en  $M$  et  $M'$  par la distribution de courant, antisymétrique par rapport à  $\Pi_a$ .

Si le point  $M$  appartient au plan  $\Pi_a$  d'antisymétrie,  $\vec{B}(M) = \text{Sym}_{\Pi_a} [\vec{B}(M)]$  : le champ magnétostatique en  $M$  est égal à son symétrique, ce qui n'est possible que si  $\vec{B}(M)$  appartient au plan de symétrie.

### Propriété

En un point d'un plan d'antisymétrie  $\Pi_a$  pour la distribution de courant, le champ magnétostatique appartient à ce plan.



Remarque

On retrouve cette propriété dans le cas du champ magnétostatique créé par un fil rectiligne infini. En effet, en un point  $M$  donné, le plan passant par  $M$  et orthogonal au fil est un plan d'antisymétrie. Le champ  $\vec{B}(M)$  en  $M$ , porté par  $\vec{u}_\theta$ , appartient bien à ce plan.

**IV.3. Invariances du champ magnétostatique**

D'après le principe de Curie, le champ magnétostatique possède les mêmes propriétés d'invariance que la distribution qui le crée.

a) Invariance par translation

Propriété

Si une distribution de courant est invariante par translation suivant un vecteur  $\vec{u}_x$ , alors le champ magnétostatique ne dépend pas de la variable  $x$  associée.

b) Invariances par rotation

Propriété

Si une distribution de courant est invariante par rotation, repérée par un angle  $\theta$ , autour d'un axe  $\Delta$ , alors la norme du champ magnétostatique ne dépend pas de  $\theta$ .

Remarque

Attention : la direction du champ magnétostatique peut dépendre de l'angle  $\theta$ .

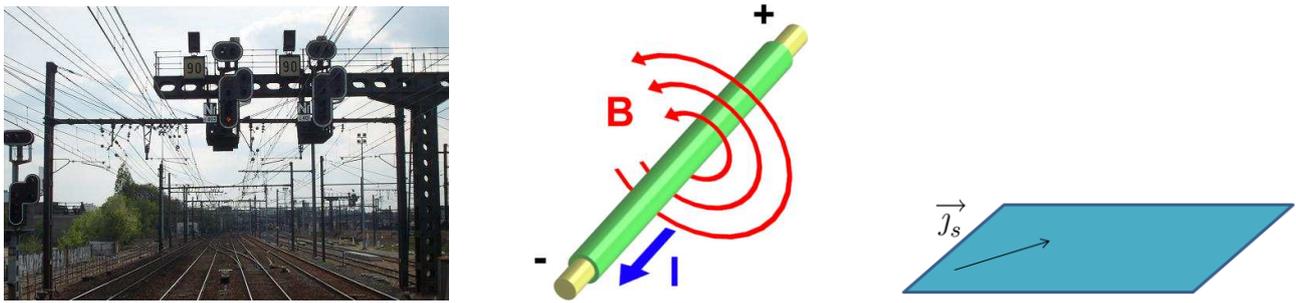


FIGURE 11 – À gauche : les caténaies des lignes ferroviaires à grande vitesse sont, en bonne approximation, invariantes par translation suivant l’axe des rails. Au centre, le fil rectiligne infini parcouru par un courant permanent est un exemple de distribution invariante par translation suivant l’axe du fil. À droite, un plan infini est invariant par translation suivant tout vecteur contenu dans le plan.

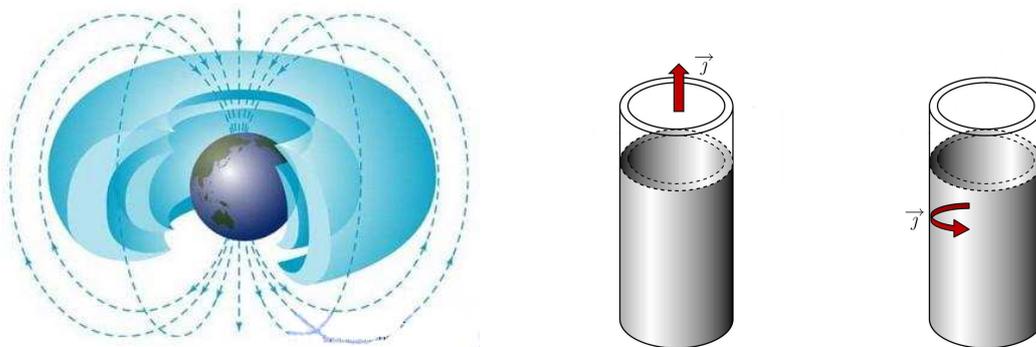


FIGURE 12 – À gauche : en l’absence de vent solaire, les particules chargées, piégées par la ceinture de Van Allen, sont à l’origine d’une courant invariant par rotation autour de l’axe des pôles. Les deux autres figures représentent des distributions de courant invariantes par rotation autour de l’axe du cylindre.

## V Applications

### V.1. Champ créé par un spire de courant sur son axe

On considère une spire circulaire de courant, de rayon  $R$ , d’axe  $Oz$ , parcourue par un courant permanent d’intensité  $I$ . Calculons le champ magnétostatique créé en un point  $M$  de l’axe  $Oz$ , d’altitude.

#### 1. Invariances et symétries

Soit  $M$  un point de l’axe. Tout plan contenant l’axe de la spire est plan d’antisymétrie. Le champ  $\vec{B}$  étant un vecteur axial, il appartient, au point  $M$ , à tout plan d’antisymétrie passant par  $M$ . Ici  $\vec{B}(M)$  appartient à l’intersection des plans d’antisymétrie soit :

$$\vec{B}(M) = B(M)_z \vec{u}_z$$

La distribution de courant est invariante par rotation autour de  $(Oz)$  donc  $B_z(M)$  ne dépend pas de  $\theta$  (coordonnées cylindriques). De plus, la distance à l’axe est fixée à  $r = 0$  pour un point de l’axe

$$B(M)_z = B_z(z) \quad \text{pour un point de l’axe}$$

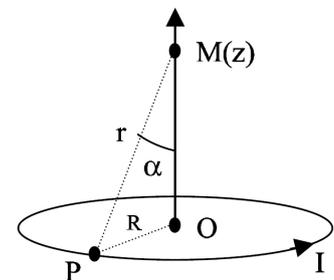


FIGURE 13 –

## 2. Champ élémentaire

Soit un élément  $d\vec{\ell} = R d\theta \vec{u}_\theta$  centré en  $P$ . Le champ magnétique élémentaire créé par cet élément est :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I R d\theta \vec{u}_\theta \wedge \overrightarrow{PM}}{4\pi \|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{\mu_0 I R d\theta (R \vec{u}_z + z \vec{u}_r)}{4\pi PM^3}$$

On s'intéresse uniquement à la projection du champ élémentaire sur  $\vec{u}_z$  et comme  $PM = \frac{R}{\sin \alpha} = cte$  quel que soit le point  $P$ , on obtient :

$$d\vec{B}_z = \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha d\theta}{4\pi R}$$

## 3. Champ total

On intègre sur toute la spire :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

*Remarque*

On vérifie l'orientation du champ à l'aide de la règle du tire-bouchon.

## V.2. Champ créé par un solénoïde circulaire sur son axe

### Définition :

**On appelle solénoïde circulaire un enroulement régulier de fil conducteur sur un cylindre.**

On considère un solénoïde circulaire de longueur  $L$ , d'axe  $(Oz)$  constitué d'un grand nombre  $N$  de spires identiques traversées par le même courant d'intensité  $I$ . Déterminons le champ créé en un point  $M$  de l'axe par le solénoïde circulaire.

### 1. Invariances et symétries

Soit  $M$  un point de l'axe. Tout plan contenant l'axe du solénoïde est plan d'antisymétrie. Le champ  $\vec{B}$  étant un vecteur axial, il appartient, au point  $M$ , à tout plan d'antisymétrie passant par  $M$ . Ici  $\vec{B}(M)$  appartient à l'intersection des plans d'antisymétrie soit :

$$\vec{B}(M) = B(M)_z \vec{u}_z$$

La distribution de courant est invariante par rotation autour de  $(Oz)$  donc  $B_z(M)$  ne dépend pas de  $\theta$  (coordonnées cylindriques). De plus, la distance à l'axe est fixée à  $r = 0$  pour un point de l'axe

$$B(M)_z = B_z(z) \quad \text{pour un point de l'axe}$$

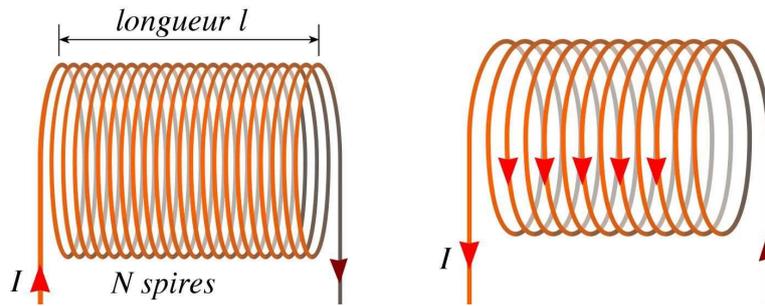


FIGURE 14 –

2. Champ élémentaire

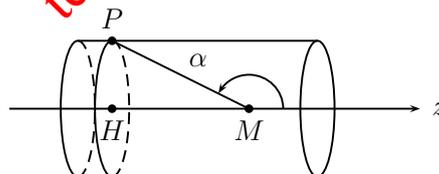
Décomposons le solénoïde en une multitude de spires élémentaires supposées plates et parcourues par un courant  $I$ . Sur une épaisseur  $dz$ , il y a  $n dz$  spires où  $n = \frac{N}{L}$  est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde.

Chaque spire élémentaire crée, au point  $M$ , un champ élémentaire sur  $\vec{u}_z$  :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n dz I}{2R} \sin \alpha \vec{u}_z$$

L'angle  $\alpha$  est l'angle sous lequel la spire est vue depuis le point  $M$ . Le champ  $\vec{B}$  étant invariant que l'on considère  $\alpha$  ou l'angle supplémentaire  $\pi - \alpha$ , on choisit conventionnellement d'orienter les angles  $\alpha$  de sorte que

$$\alpha = (\vec{u}_z, \overrightarrow{PM}) \text{ où } P \text{ est un point de la spire}$$



Appelons  $H$  le centre de la spire de largeur  $dz$  :

$$\tan \alpha = \frac{R}{MH} \text{ soit } \overline{MH} = \frac{R}{\tan \alpha}$$

On en déduit

$$dz = d(\overline{MH}) = d\left(\frac{R}{\tan \alpha}\right) = -\frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

d'où

$$d\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin \alpha d\alpha \vec{u}_z$$

3. Champ total

On intègre sur tout le solénoïde, c'est-à-dire pour  $z$  variant entre  $z_1$  et  $z_2$  et  $\alpha$  variant entre  $\alpha_1$  (pour  $z = z_1$ ) et  $\alpha_2$  (pour  $z = z_2$ ) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \vec{u}_z$$

4. Cas du solénoïde infini

Pour le solénoïde infini,  $\alpha_1 = \pi$  et  $\alpha_2 = 0$ . On en déduit

$$\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

Propriété

Pour un solénoïde infiniment long, le champ magnétostatique en un point  $M$  de l'axe vaut :

$$\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

où  $n = \frac{N}{L}$  est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde.

Remarque

On vérifie l'orientation du champ à l'aide de la règle du tire-bouchon.

VI Topographie du champ magnétostatiqueVI.1. DéfinitionsDéfinition :

On appelle ligne de champ magnétostatique une courbe tangente en chacun de ses points au champ magnétostatique et orientée dans le sens du champ.

Propriété

Une écriture mathématique de cette définition est :

$$d\vec{\ell}_C \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

avec  $d\vec{\ell}_C$  un petit élément de la ligne de champ.

Remarque

On peut visualiser les lignes de champ magnétostatique en plaçant de petites boussoles réparties dans l'espace et pouvant prendre toutes les orientations. Les boussoles s'orientent naturellement dans le sens du champ magnétostatique.

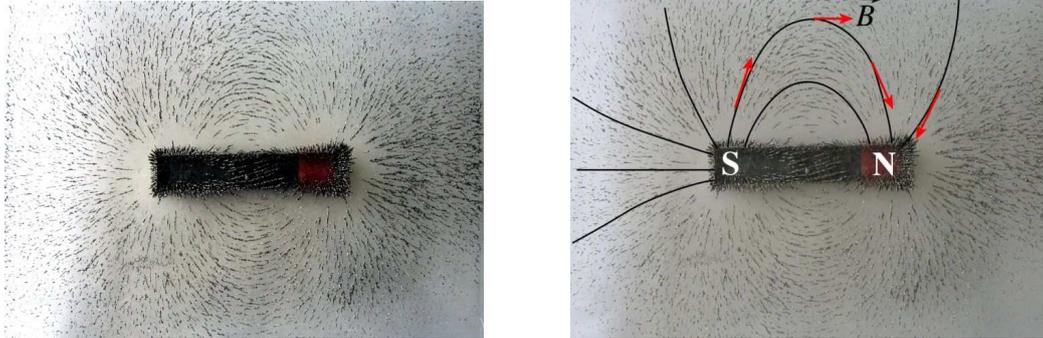


FIGURE 15 – Les aimants génèrent un champ magnétostatique au même titre que les distributions de courants. Les lignes de champ sont visualisées à l'aide de limaille de fer.

Définition :

On appelle tube de champ l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée.

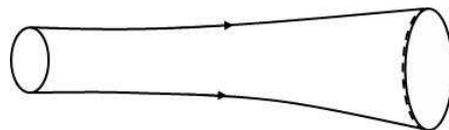
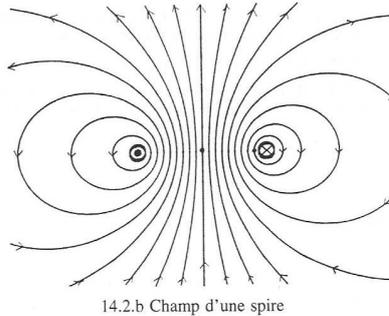


FIGURE 16 – Tube de champ.

## VI.2. Cartes de champ magnétostatique

### a) Champ créé par une spire circulaire

La figure 17 représente les lignes de champ magnétique créé par une spire circulaire parcourue par un courant permanent.



14.2.b Champ d'une spire

FIGURE 17 –

Plusieurs points sont à noter :

- ★ Le plan  $\Pi_s$  contenant la spire est un plan de symétrie pour la distribution de courant. On vérifie qu'en chacun des points de ce plan de symétrie, le champ magnétostatique est orthogonal à  $\Pi_s$ . Par ailleurs, le champ est bien antisymétrique par rapport au plan  $\Pi_s$ . On retrouve ainsi le caractère axial du champ magnétostatique.
- ★ Tout plan perpendiculaire au plan de la spire et passant par son centre est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courants. En particulier, le plan médian perpendiculaire au plan de la figure est un plan d'antisymétrie. On vérifie que le champ est bien symétrique par rapport à ce plan d'antisymétrie, comme cela était prévisible à partir du caractère axial du champ magnétostatique.
- ★ Les lignes de champ encerclent les sources de courant et se referment sur elles-mêmes.

### b) Champ créé par un ensemble de spires coaxiales

La figure 18 représente les lignes de champ magnétostatique créé par un ensemble de 4 spires (à gauche) et par un solénoïde circulaire (à droite).

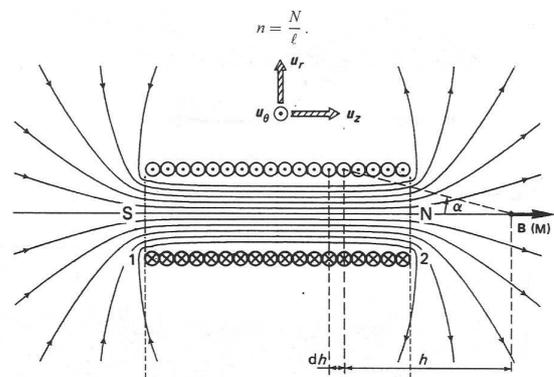
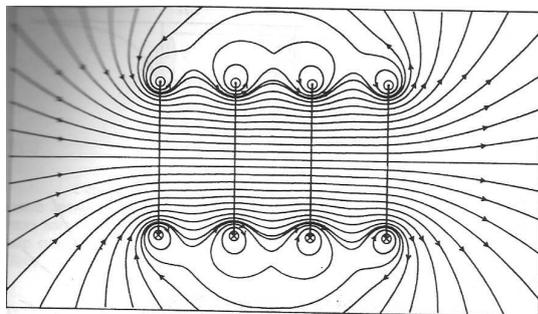


FIGURE 18 –

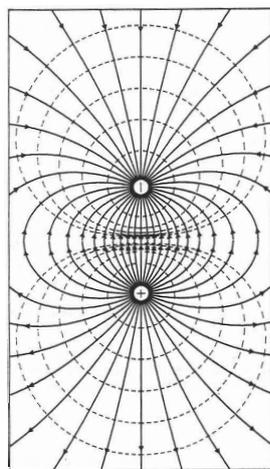
Plusieurs points sont à noter :

- ★ Le plan  $\Pi_s$  médian de la distribution de courant et orthogonal à l'axe des spires est un plan de symétrie pour la distribution de courant. On vérifie que le champ est bien antisymétrique par rapport au plan  $\Pi_s$ . On retrouve ainsi le caractère axial du champ magnétostatique.
- ★ Tout plan contenant l'axe de la distribution de courant est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courants. En particulier, le plan perpendiculaire au plan de la figure et contenant l'axe des spires est un plan d'antisymétrie. On vérifie que le champ est bien symétrique par rapport à ce plan d'antisymétrie, comme cela était prévisible à partir du caractère axial du champ magnétostatique.
- ★ Les lignes de champ encerclent les sources de courant et se referment sur elles-mêmes. Dans le cas du solénoïdes, les lignes de champ ne peuvent se refermer qu'à l'extérieur du dispositif.

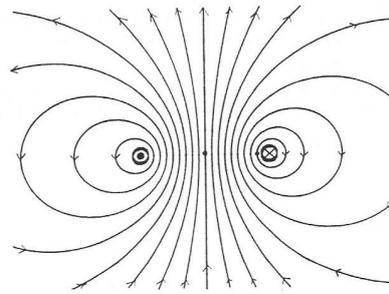
### c) Comparaison des lignes de champ électrostatique et magnétostatique

Comparons les lignes de champ électrostatique créé par un doublet de charges et les lignes de champ magnétostatique créé par une spire circulaire.

La figure 19 représente les lignes de champ proches des sources tandis que la figure 20 représente les lignes de champ loin des sources.



prof. AMAMI ipest  
 tel 5 55 64 10



14.2.b Champ d'une spire

FIGURE 19 – À gauche : lignes de champ électrostatique créé par un doublet de charges. À droite, lignes de champ magnétostatique créé par une spire circulaire.

La figure 20 montre que la structure des deux champs est sensiblement la même à grande échelle, c'est-à-dire loin des sources. Cependant, au voisinage des sources, les champs se comportent différemment :

- ★ le champ électrostatique converge ou diverge à partir des charges qui lui donnent naissance ;
- ★ le champ magnétostatique encercle les courants qui lui donnent naissance.

Cette différence provient du fait que le champ électrostatique est un vecteur polaire tandis que le champ magnétostatique est un vecteur axial.

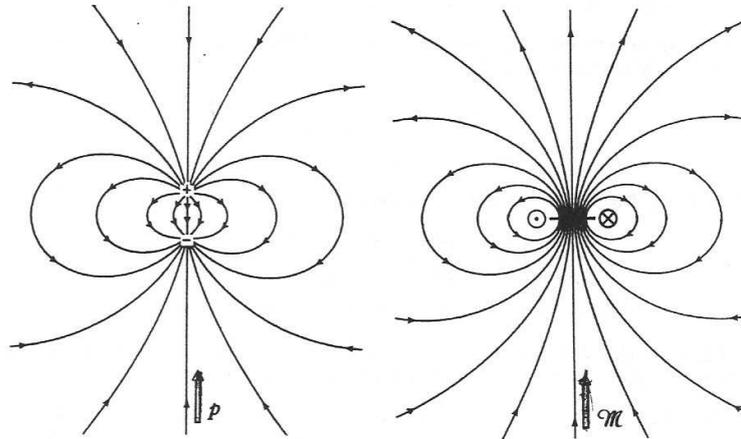


Fig. 18.1 – E d'un doublet

Fig. 18.2 – B d'une spire circulaire

FIGURE 20 – À gauche : lignes de champ électrostatique créé par un doublet de charges. À droite, lignes de champ magnétostatique créé par une spire circulaire.

### VI.3. Bilan

#### Propriété

Contrairement aux lignes de champ électrostatique, les lignes de champ magnétostatique :

1. se referment sur elles-mêmes en encerclant les sources de courant ;
2. ne divergent pas ni ne convergent à partir des sources ;
3. deux lignes de champ peuvent se croiser en un point  $M$ , appelé point singulier, si et seulement si :
  - le champ est nul en ce point  $M$  ou
  - le champ n'est pas défini en ce point  $M$ , c'est-à-dire si ce point est situé sur une distribution surfacique ou linéique de courant ( $\|\vec{j}\| \rightarrow \infty$ ).

#### Remarque

À partir de ces propriétés, on peut s'attendre à ce que :

- ★  $\text{div}(\vec{B}) = 0$  (les lignes de champs ne divergent pas ni ne convergent) ;
- ★  $\text{rot}(\vec{B}) \neq \vec{0}$  (les lignes de champ tourbillonnent autour des sources).

# Lois locales de magnétostatique

En électrostatique, nous avons déduit de la loi de Coulomb :

- ★ le théorème de Gauss;
- ★ l'existence d'un potentiel scalaire électrostatique issu de la conservation de la circulation du champ électrostatique.

La résolution de problèmes d'électrostatique en a été rendu plus aisée.

Dans ce chapitre, nous procédons de la même manière afin d'établir les théorèmes importants issus de la loi de Biot et Savart.

## I Circulation et flux du champ magnétostatique

### I.1. Flux du champ magnétostatique

#### a) Première approche

Calculons le flux sortant du champ magnétostatique  $\vec{B}$  à travers une surface fermée sur un exemple. Nous connaissons l'expression du champ  $\vec{B}$  créé par un fil rectiligne infini, d'axe  $(Oz)$  et parcouru par un courant permanent d'intensité  $I$  :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

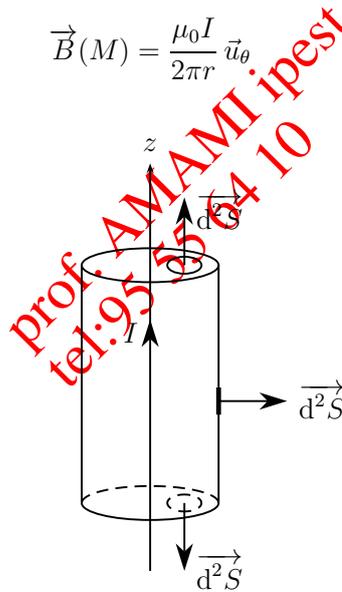


FIGURE 1 –

Choisissons comme surface fermée un cylindre  $\Sigma$  d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ . Notons  $S_{\text{inf}}$ ,  $S_{\text{sup}}$  et  $S_L$  respectivement les surfaces inférieure, supérieure et latérale du cylindre. Les normales sortantes  $\vec{n}$  associées à chacune de ces surfaces sont telles que

$$\begin{aligned} S_{\text{inf}} &\longleftrightarrow \vec{n} = -\vec{u}_z \\ S_{\text{sup}} &\longleftrightarrow \vec{n} = +\vec{u}_z \\ S_L &\longleftrightarrow \vec{n} = \vec{u}_r \end{aligned}$$

Le flux sortant du champ magnétostatique à travers ce cylindre vaut donc

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = \iint_{S_{inf}} \underbrace{\vec{B} \cdot d^2\vec{S}}_{=0} + \iint_{S_{sup}} \underbrace{\vec{B} \cdot d^2\vec{S}}_{=0} + \iint_{S_L} \underbrace{\vec{B} \cdot d^2\vec{S}}_{=0} = 0$$

Le flux sortant du champ magnétostatique est nul!

**b) Conservation du flux magnétique**

Le résultat précédent peut être généralisé à toute géométrie, pour toute distribution de courant.

**Propriété**

Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est toujours nul :

$$\oint_{\text{surface fermée}} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = 0$$

**Remarque**

Par analogie avec le théorème de Gauss pour le champ magnétique, cette relation montre qu'il n'existe pas de "charge" (ou monopôle) magnétique.

Considérons un tube de champ. L'ensemble {section initiale  $S_1$  + section finale  $S_2$  + surface latérale  $S_L$ } constitue une surface fermée  $\Sigma$ . On peut donc écrire

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} + \iint_{S_L} \underbrace{\vec{B} \cdot d^2\vec{S}}_{=0}$$

Le dernier terme est nul car le champ magnétostatique est tangent aux lignes de champ ce qui implique  $\vec{B} \perp d^2\vec{S}$  sur la surface latérale.

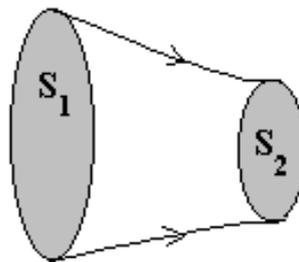


FIGURE 2 – Tube de champ magnétique.

Appelons  $\Phi_{S_1}$  et  $\Phi_{S_2}$  les flux du champ magnétostatique à travers  $S_1$  et  $S_2$  compté algébriquement dans le sens des lignes de champ :

$$\Phi_{S_1} = - \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d^2\vec{S}$$

$$\Phi_{S_2} = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d^2\vec{S}$$

Le flux de  $\vec{B}$  à travers  $\Sigma$  étant nul, on a

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = 0 \implies \Phi_{S_1} = \Phi_{S_2}$$

**Définition :**

**Le flux du champ magnétostatique se conserve le long d'un tube de champ. On dit que le champ magnétique est à flux conservatif.**

Si on considère un tube de champ de section  $S_1$  et  $S_2 \ll 1$ , normales au champ magnétostatique, on trouve

$$B_1 S_1 = B_2 S_2 \quad \text{soit} \quad B_2 = B_1 \frac{S_1}{S_2} \gg B_1$$

où  $B_1$  et  $B_2$  sont les valeurs du champ magnétostatique respectivement sur les section  $S_1$  et  $S_2$ .

**Propriété**

**Le champ magnétostatique est d'autant plus intense que les lignes de champ se resserrent et vice-versa.**

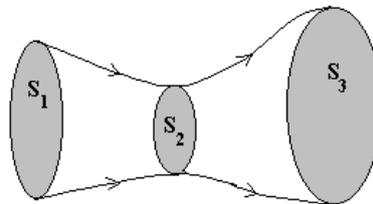


FIGURE 3 – Tube de champ magnétique. La conservation du flux magnétique impose  $B_3 < B_1 < B_2$ .

## I.2. Circulation du champ magnétostatique

### a) Première approche

Calculons la circulation du champ magnétostatique  $\vec{B}$  le long d'un contour fermé sur un exemple. Nous connaissons l'expression du champ  $\vec{B}$  créé par un fil rectiligne infini, d'axe  $(Oz)$  et parcouru par un courant permanent d'intensité  $I$  :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Choisissons deux contours orientés quelconques :

- ★ un contour  $\mathcal{C}_1$  encerclant le fil ;
- ★ un contour  $\mathcal{C}_2$  n'encerclant pas le fil.



FIGURE 4 –

La circulation du champ  $\vec{B}$  le long d'un contour fermé  $\Gamma = C_1$  ou  $C_2$  vaut

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

où  $d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$  est un déplacement élémentaire le long de  $\Gamma$  exprimé en coordonnées cylindriques.

En remplaçant  $\vec{B}$  par son expression (cas du fil rectiligne infini), on trouve

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\vec{u}_\theta}{r} \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{\Gamma} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\theta_f - \theta_i)$$

où l'angle  $\theta$  est l'angle de rotation autour de l'axe  $(Oz)$ , variant entre  $\theta_i$  et  $\theta_f$ .

**Le long de  $C_1$ ,** l'angle  $\theta$  varie de  $+2\pi$  car  $C_1$  fait le tour de l'axe  $(Oz)$  dans le sens positif. On en déduit

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

**Le long de  $C_2$ ,** l'angle  $\theta$  prend les mêmes valeurs finale et initiale  $\theta_i = \theta_f$  car  $C_2$  ne fait pas le tour de l'axe  $(Oz)$ . On en déduit

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

**b) Théorème d'Ampère**

Le résultat précédent se généralise à toute configuration géométrique pour les sources.

**Théorème d'Ampère**

La circulation du champ magnétostatique  $\vec{B}$  le long d'un contour fermé  $\Gamma$  est égale au produit de  $\mu_0$  par l'intensité enlacée par  $\Gamma$  :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

Remarque

Une fois choisie l'orientation de  $\Gamma$ , l'intensité enlacée  $I_{enlacée}$  est comptée algébriquement suivant la règle du tire-bouchon :

- ★ si tourner le long de  $\Gamma$  fait visser dans le sens du courant,  $I_{enlacée} > 0$  ;
- ★ si tourner le long de  $\Gamma$  fait visser dans le sens opposé au courant,  $I_{enlacée} < 0$ .

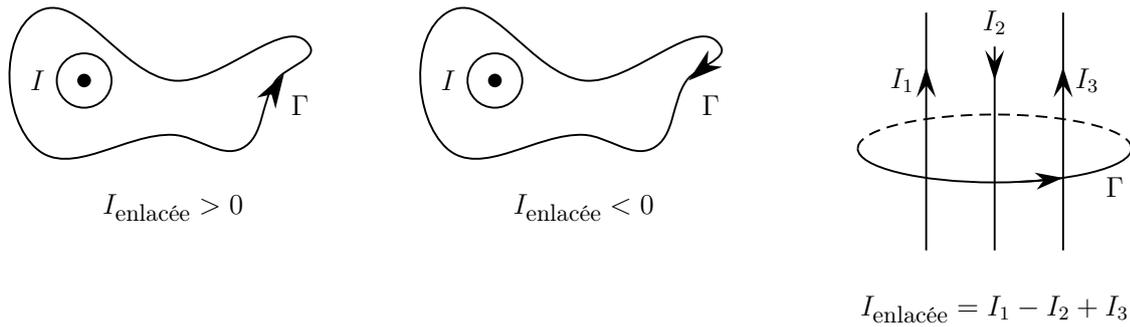


FIGURE 5 –

Remarque

Si la distribution de courant n'est pas filiforme,  $I_{enlacée}$  correspond au flux du vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  à travers une surface définie par le contour :

$$I_{enlacée} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{j} \cdot \vec{d^2S}$$

où  $\Sigma(\Gamma)$  est une surface s'appuyant sur  $\Gamma$  et  $\vec{d^2S}$  est un vecteur élément de surface orienté à partir de  $\Gamma$  suivant la règle du tire-bouchon.



$$I_{enlacée} = \iint_{\Sigma_1(\Gamma)} \vec{j} \cdot \vec{d^2S} = \iint_{\Sigma_2(\Gamma)} \vec{j} \cdot \vec{d^2S}$$

FIGURE 6 –

Remarque

Si le contour  $\Gamma$  choisi enlace  $N$  fois un conducteur traversé par l'intensité  $I$

$$I_{\text{enlacée}} = NI \quad \text{et} \quad \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 NI$$

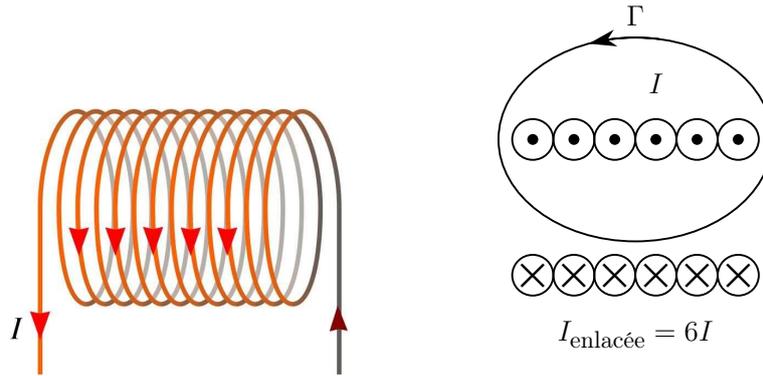


FIGURE 7 -

## II Applications

### II.1. Choix d'un contour d'Ampère

Afin d'appliquer le théorème d'Ampère, il faut choisir un contour orienté  $\mathcal{C}$ . Bien qu'en principe, une infinité de contours conviennent, seuls quelques-uns permettent de mener les calculs aisément à leur terme. En particulier, le calcul de la circulation du champ  $\vec{B}$  le long de  $\mathcal{C}$ ,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell},$$

se calcule aisément si  $\vec{B} \perp d\vec{\ell}$  ou  $\vec{B} // d\vec{\ell}$ .

Remarque

On choisira un contour d'Ampère de sorte que son vecteur tangent, donné par  $d\vec{\ell}$ , soit parallèle ou perpendiculaire aux lignes de champ.

### II.2. Champ magnétostatique créé par un solénoïde en tout point

On considère un solénoïde circulaire infini d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ , parcouru par un courant d'intensité  $I$  constante et comportant  $n$  spires par unité de longueur.

À l'aide du théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétostatique en tout point de l'espace.

1. Invariances et symétries

Tout plan perpendiculaire à l'axe  $(Oz)$  est plan de symétrie pour la distribution de courant : le champ en tout point est donc de la forme  $\vec{B}(M) = B_z \vec{u}_z$ .

Il y a invariance par translation parallèlement à  $(Oz)$  et par rotation autour de  $(Oz)$  donc  $B_z = B_z(r)$ .

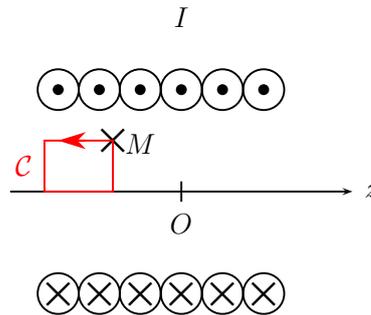


FIGURE 8 –

2. Choix d'un contour d'Ampère

Afin de traiter les différents cas possibles, nous choisissons trois contours d'Ampère :

- un contour  $C_1$  rectangulaire de longueur  $a$ , à l'intérieur du solénoïde ;
- un contour  $C_2$  rectangulaire de longueur  $a$ , à l'extérieur du solénoïde ;
- un contour  $C_3$  rectangulaire de longueur  $a$ , à cheval entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde.

3. Application du théorème d'Ampère

- Sur  $C_1$  :  $B_1(0) a - B_1(r) a = 0$  donc  $B_1(r) = B_1(0) = \mu_0 n I$  pour tout point à l'intérieur du solénoïde. Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde.
- Sur  $C_2$  :  $B_2(r) a - B_2(r+b) a = 0$  donc  $B_2(r) = B_2(r+b)$  pour tout point à l'extérieur du solénoïde. Le champ magnétique est uniforme à l'extérieur du solénoïde.
- Sur  $C_3$  :  $B_1 a - B_2 a = \mu_0 n a I$  donc  $B_2 = B_1 - \mu_0 n I = 0$  pour tout point à l'extérieur du solénoïde.

**II.3. Champ magnétostatique créé par un cylindre de courant**

On considère un conducteur cylindrique infini d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ , de section circulaire de rayon  $R$ . Le cylindre est parcouru par un courant de densité volumique homogène

$$\vec{j} = j \vec{u}_z$$

À l'aide du théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétostatique en tout point de l'espace.

1. Invariances et symétries

Tout plan contenant l'axe  $(Oz)$  est plan de symétrie pour la distribution de courant : le champ en tout point est donc de la forme  $\vec{B}(M) = B_\theta \vec{u}_\theta$ .

Il y a invariance par translation parallèlement à  $(Oz)$  et par rotation autour de  $(Oz)$  donc  $B_\theta = B_\theta(r)$ .

2. Choix d'un contour d'Ampère

Les lignes de champ sont des cercles centrés sur  $(Oz)$  et la norme du champ est la même en tout point d'une ligne de champ. On choisit donc comme contour d'Ampère un cercle d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $r$ .

La circulation s'écrit alors :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} B_\theta(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = B_\theta 2\pi r$$

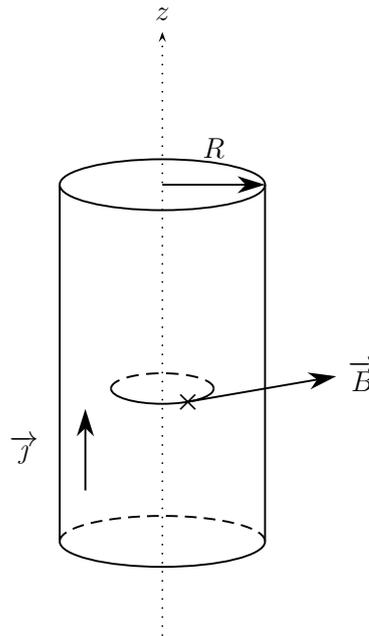


FIGURE 9

### 3. Application du théorème d'Ampère

- À l'intérieur du cylindre :

$$I_e = \iint_{\Sigma_{r_1}} \vec{j} \cdot d^2\vec{S} = j \pi r^2$$

On a alors  $B_\theta = \mu_0 j \frac{r}{2}$  pour tout point à l'intérieur du cylindre.

- À l'extérieur du cylindre :

$$I_e = \iint_{\Sigma_{r_2}} \vec{j} \cdot d^2\vec{S} = j \pi R^2$$

On a alors  $B_\theta = \mu_0 j \frac{R^2}{2r}$  pour tout point à l'extérieur du cylindre.

$$\vec{B}(r < R) = \mu_0 j \frac{r}{2} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(r > R) = \mu_0 j \frac{R^2}{2r} \vec{u}_\theta$$

#### Remarque

- Le champ est continu à la traversée du cylindre.
- A l'extérieur du cylindre, le champ s'identifie à celui créé par un fil rectiligne parcouru par un courant  $I = j\pi R^2$  et confondu avec l'axe (Oz).

### III Formulation locale de la magnétostatique

#### III.1. Formulation locale du théorème d'Ampère

Considérons une distribution de courant caractérisée par une densité volumique de courant  $\vec{j}$ . Choisissons un contour fermé orienté  $\mathcal{C}$  pour appliquer le théorème d'Ampère

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacée}} = \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \vec{j} \cdot d^2\vec{S}$$

où  $\Sigma(\mathcal{C})$  est une surface s'appuyant sur  $\mathcal{C}$  et  $d^2\vec{S}$  est un vecteur élément de surface orienté à partir de  $\mathcal{C}$  suivant la règle du tire-bouchon.

En utilisant le théorème de Stokes valable pour un champ de vecteurs dérivable, on transforme l'intégrale simple sur  $\mathcal{C}$  en une intégrale de surface sur  $\Sigma(\mathcal{C})$  :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \text{rot}(\vec{B}) \cdot d^2\vec{S}$$

Le théorème d'Ampère devient ainsi

$$\iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \text{rot}(\vec{B}) \cdot d^2\vec{S} = \mu_0 \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \vec{j} \cdot d^2\vec{S}$$

Cette relation est valable quel que soit le contour choisi. En faisant tendre le contour  $\mathcal{C}$  vers un point, on obtient

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

Propriété

Le théorème d'Ampère s'écrit sous sa forme locale

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

où  $\vec{j}$  est la densité volumique de courant au point considéré.

#### III.2. Conservation du flux du champ magnétique

Nous avons vu que le flux sortant du champ magnétique à travers une surface fermée quelconque  $\Sigma$  était nul :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = 0$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky, pour tout champ de vecteur dérivable à l'intérieur de  $\Sigma$  :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = \iiint_{V(\Sigma)} \text{div}(\vec{B}) d^3V = 0$$

Cette relation est valable quelle que soit la surface fermée  $\Sigma$  choisie. En faisant tendre cette surface vers un point, on obtient

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Propriété

La conservation du flux magnétique conduit à l'équation locale

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

### III.3. Potentiel vecteur

#### a) Existence d'un potentiel vecteur

Les formules d'analyse vectorielle montrent que, pour tout champ vecteur dérivable  $\vec{B}$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \iff \exists \vec{A} \text{ tel que } \vec{B} = \operatorname{rot}(\vec{A})$$

Comme  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , un tel vecteur  $\vec{A}$  existe.

#### Propriété

Le champ magnétostatique  $\vec{B}$  dérive d'un champ de vecteurs  $\vec{A}$  défini par

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$\vec{A}$  est appelé potentiel vecteur.

#### Remarque

Le potentiel vecteur n'est pas unique. En effet, si  $\vec{A}$  est un potentiel vecteur alors, pour toute fonction  $f$  dérivable :

$$\operatorname{rot}(\vec{A} + \operatorname{grad} f) = \operatorname{rot}(\vec{A}) + \underbrace{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)}_{=\nabla \wedge (\nabla f) = \vec{0}} = \operatorname{rot}(\vec{A}) = \vec{B}$$

Ainsi  $\vec{A} + \operatorname{grad} f$  est aussi un potentiel vecteur. Le potentiel vecteur est défini à un gradient près.

#### Propriété

L'unicité du potentiel vecteur n'est assurée que si l'on impose une contrainte particulière. On réalise alors un choix de jauge. En magnétostatique, on utilisera préférentiellement la jauge de Coulomb

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = 0$$

#### b) Équation de Poisson pour le potentiel vecteur

Cherchons une relation entre le potentiel vecteur et les sources de courant qui le créent.

Par définition du potentiel vecteur  $\vec{B} = \operatorname{rot}(\vec{A})$  et, d'autre part, la forme locale du théorème d'Ampère relie le champ  $\vec{B}$  aux sources  $\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ .

On en déduit

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

Mais le double rotationnel peut s'exprimer sous une autre forme, en utilisant une relation d'analyse vectorielle.

**Propriété**

Pour tout champ de vecteurs  $\vec{C} = C_x \vec{u}_x + C_y \vec{u}_y + C_z \vec{u}_z$  deux fois dérivable :

$$\overrightarrow{\text{rot}} [\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{C})] = \overrightarrow{\text{grad}} [\text{div}(\vec{C})] - \Delta \vec{C}$$

où  $\Delta \vec{C}$  est le laplacien vectoriel défini, en coordonnées cartésiennes, par

$$\Delta \vec{C} = \vec{\nabla}^2 \vec{C} = \frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial z^2} = \begin{pmatrix} \Delta C_x \\ \Delta C_y \\ \Delta C_z \end{pmatrix}$$

**Remarque**

Cette formule peut être obtenue facilement à l'aide de l'opérateur  $\vec{\nabla}$  et de l'expression du double produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad \forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{C}) &= \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{C}] - \vec{\nabla}^2 \vec{C} \end{aligned}$$

On rappelle également que pour une fonction scalaire  $f$  deux fois dérivable, le laplacien scalaire s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

On en déduit

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Dans la jauge de Coulomb, on impose

$$\text{div}(\vec{A}) = 0 \quad (\text{jauge de Coulomb})$$

ce qui fournit

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$$

**Propriété**

L'équation de Poisson pour le potentiel vecteur est de la forme

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$$

Cette équation n'est valable que dans la jauge de Coulomb dans laquelle  $\text{div}(\vec{A}) = 0$ .

L'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

a pour solution

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P)}{|\overrightarrow{PM}|}$$

où  $\mathcal{D}$  est la distribution de charges.

Chaque composante du potentiel vecteur vérifie une équation de Poisson analogue à celle du potentiel électrostatique. On en déduit

$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\overrightarrow{j}(P)}{|\overrightarrow{PM}|}$$

où  $\mathcal{D}$  est la distribution de charges.

Cette expression nous montre que  $\overrightarrow{A}$  possède les mêmes propriétés de symétrie que  $\overrightarrow{j}$  :  $\overrightarrow{A}$  est un vecteur polaire.

**Propriété**

$\overrightarrow{A}$  est un vecteur polaire : les symétries du champ magnétique sont des antisymétries pour le potentiel vecteur en inversement.

*Remarque*

Comme le potentiel vecteur est défini à un gradient près, la propriété précédente n'est pas vérifiée pour certains choix de potentiels vecteurs. On essaiera en général d'utiliser des potentiels vecteurs respectant ces propriétés de symétrie.

**c) Calcul du potentiel vecteur**

Il n'est pas évident d'inverser la relation  $\overrightarrow{B} = \text{rot}(\overrightarrow{A})$ . Afin de calculer le potentiel vecteur, on calcule généralement sa circulation le long d'un contour fermé.

Afin de choisir le contour, on étudie les symétries du problèmes et l'on en déduit la forme de  $\overrightarrow{A}$ .

En utilisant le théorème de Stokes, on obtient, le long d'un contour fermé orienté  $\mathcal{C}$  :

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \text{rot}(\overrightarrow{A}) \cdot d^2\vec{S} = \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \overrightarrow{B} \cdot d^2\vec{S}$$

Il est donc possible de calculer  $\overrightarrow{A}$  connaissant  $\overrightarrow{B}$ .

**IV Relation de passage à la traversée d'une nappe de courant**

**IV.1. Modélisation surfacique**

On considère une distribution volumique de courant de surface  $S$  et d'épaisseur  $e$ , petite devant les autres dimensions du conducteur. On note  $\overrightarrow{j}$  la densité volumique de courant.

L'intensité  $I$  qui traverse une largeur  $L$  de ce conducteur vaut

$$I = \overrightarrow{j} \cdot (eL\vec{n})$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire, contenu dans le conducteur et normal à la largeur  $L$ .

Dans une modélisation surfacique  $e \rightarrow 0$  tandis que l'intensité  $I$  reste fixée :

$$I = \overrightarrow{j}_s \cdot (L\vec{n}) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{j}_s \xrightarrow{e \rightarrow 0} e\overrightarrow{j} \quad \text{définie}$$

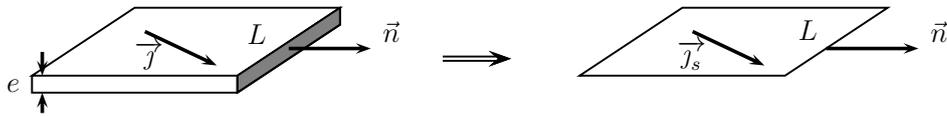


FIGURE 10 –

**Propriété**

Une modélisation surfacique d'une distribution volumique de courant, de densité volumique  $\vec{j}$  et d'épaisseur  $e$ , est obtenue dans la limite  $e \rightarrow 0$  et  $\vec{j}_s = e\vec{j}$  finie. Une modélisation surfacique correspond donc à  $\|\vec{j}\| \rightarrow \infty$ .

**Propriété**

Sur une nappe de courant, l'équation locale  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$  n'est plus valable car  $\vec{j}$  n'est plus définie sur la surface.

**IV.2. Discontinuité du champ magnétostatique**

Considérons une nappe de courant de densité surfacique de courant  $\vec{j}_s$  séparant deux milieux, notés 1 et 2 de perméabilité  $\mu_0$  et notons  $\vec{n}_{12}$  le vecteur unitaire normal à cette surface et orienté de 1 vers 2.

On appelle  $\vec{B}_1(P)$  et  $\vec{B}_2(P)$  les champ magnétostatiques en un point  $P$  de la nappe de courant, respectivement du côté du milieu 1 et du milieu 2.

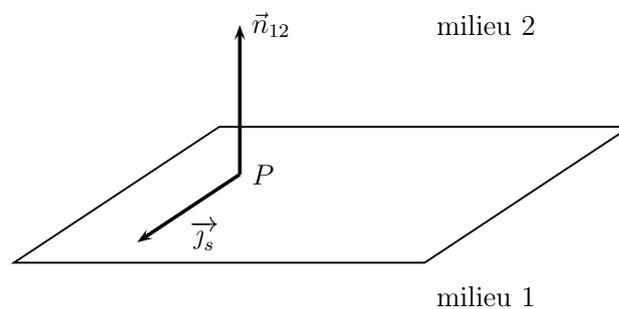


FIGURE 11 –

Relation de passage

On montre que le champ magnétostatique est discontinu à la traversée d'une nappe de courant et

$$\vec{B}_2(P) - \vec{B}_1(P) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

où  $\vec{n}_{12}$  est le vecteur unitaire normal à la surface au point  $P$  et orienté de 1 vers 2.

Si on projette la relation de passage sur  $\vec{n}_{12}$ , on obtient, en utilisant le fait que  $\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} \perp \vec{n}_{12}$

$$B_{2N} - B_{1N} = 0$$

où  $B_{1N} = \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{12}$  et  $B_{2N} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_{12}$  sont les composantes normales des champs  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$ .

Propriété

La composante **normale** du champ magnétostatique est **continue** à la traversée d'une nappe de courant :

$$B_{2N} = B_{1N}$$

Si on projette la relation de passage sur un vecteur  $\vec{t}$  tangent à la surface, colinéaire à  $\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$ , on obtient

$$|B_{2T} - B_{1T}| = \mu_0 j_s$$

où  $B_{1T}$  et  $B_{2T}$  sont les composantes tangentielles des champs  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$ .

Propriété

La composante **tangentielle** du champ magnétostatique est **discontinue** à la traversée d'une nappe de courant :

$$|B_{2T} - B_{1T}| = \mu_0 j_s$$

Remarque

- On montre également que le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est **continu** à la traversée d'une nappe de courant.
- Dans le modèle du solénoïde infini, la distribution de courant peut être assimilée à une distribution surfacique de densité uniforme  $\vec{j}_s = nI\vec{u}_\theta$ . La discontinuité du champ magnétostatique à la traversée de cette nappe de courant vaut bien

$$\vec{B}_{\text{ext}} - \vec{B}_{\text{int}} = -\mu_0 nI\vec{u}_z = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_r$$

IV.3. Champ magnétostatique créé par une nappe plane

Déterminons le champ magnétostatique créé par une nappe de courant infinie confondue avec le plan  $(xOy)$  et ayant une densité surfacique de courant  $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_x$ .

1. Invariances et symétries

Tout plan parallèle à  $(xOz)$  est plan de symétrie donc  $\vec{B} = B_y \vec{u}_y$ .  
 La distribution est invariante par translation parallèlement à  $(Ox)$  et  $(Oy)$  donc  $B_y = B_y(z)$ .  
 Le plan  $(xOy)$  est plan de symétrie donc, si  $M'$  est le symétrique de  $M$  par rapport à  $(xOy)$ , on a  $\vec{B}(M') = -\vec{B}(M)$  soit  $B_y(-z) = -B_y(z)$ .

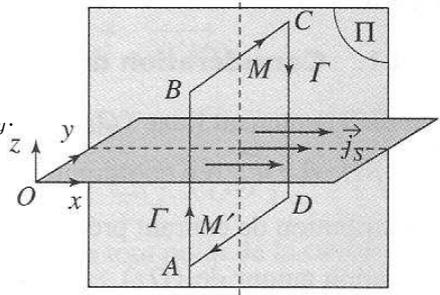


FIGURE 12 -

2. Choix d'un contour d'Ampère

On choisit un contour d'Ampère dont certains côtés sont orthogonaux au champ et d'autres parallèles au champ. Comme on connaît le lien entre  $B_y(z)$  et  $B_y(-z)$  on choisit un contour rectangulaire de longueur  $a$  selon  $\vec{u}_y$ , de hauteur  $2z$  selon  $\vec{u}_z$  et centré sur  $(xOy)$ .

La circulation s'écrit alors :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \underbrace{\vec{B} \cdot dz \vec{u}_z}_{=0} + \int_B^C B_y(z) \vec{u}_y \cdot dy \vec{u}_y + \int_C^D \underbrace{\vec{B} \cdot dz \vec{u}_z}_{=0} + \int_D^A B_y(-z) \vec{u}_y \cdot dy \vec{u}_y$$

$$= B_y(z) a + [-B_y(z) (-a)] = 2 B_y(z) a$$

3. Application du théorème d'Ampère

$$Ie = \int_0^a j_s \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x = \int_0^a j_s \vec{u}_x \cdot dx (-\vec{u}_x) = -j_s a$$

$$\vec{B}(z > 0) = -\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}(z < 0) = \frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_y$$

4. On vérifie la validité de la relation de passage pour le champ magnétostatique en  $z = 0$  :

$$\vec{B}(z > 0) - \vec{B}(z < 0) = -\mu_0 j_s \vec{u}_y = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$

## V Analogies entre les champs électrostatique et magnétostatique

Les principaux résultats concernant les champs électrostatique et magnétostatique sont reportés ci-dessous. Ce tableau met en valeur les grandes similarités qui existent entre ces deux champs.

	$\vec{E}$	$\vec{B}$
Symétries	vecteur polaire	vecteur axial
Champ élémentaire	$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{  \vec{PM}  ^3}$	$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \vec{PM}}{  \vec{PM}  ^3}$
Divergence	$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{div} \vec{B} = 0$
Rotationnel	$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$	$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
Potentiel	$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$	$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$
Équation de Poisson	$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$	$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$
Relation de passage	$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$	$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$

prof. AMAMI ipest  
tel:95 55 64 10

# Actions d'un champ magnétostatique sur la matière

Après avoir étudié les propriétés du champ magnétostatique, nous nous intéressons dans ce chapitre à son action sur la matière.

## I Particules chargées dans un champ électromagnétique

### I.1. Force de Lorentz

**Définition :**

Une particule de charge  $q$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  dans un champ électrique  $\vec{E}$  et un champ magnétique  $\vec{B}$  est soumise à la force de Lorentz :

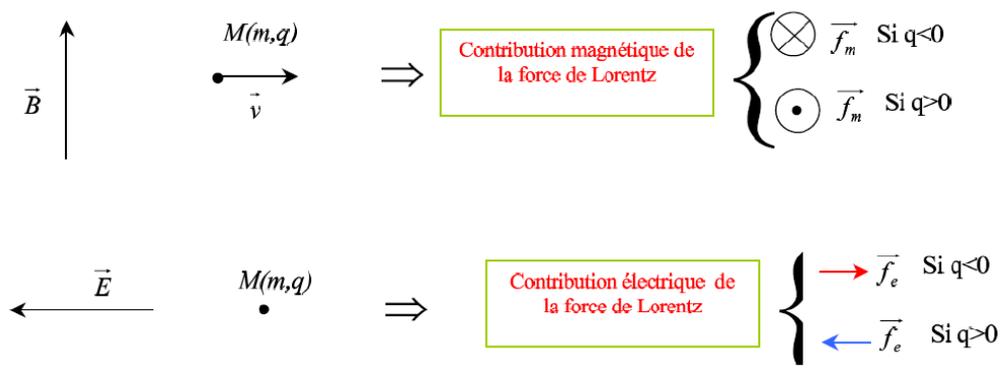
$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$


FIGURE 1 – Force de Lorentz s'exerçant sur une particule chargée.

Considérons une particule chargée, de charge  $q$ , se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  dans lequel règne un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ . La puissance reçue par la particule chargée dans le référentiel  $\mathcal{R}$  vaut

$$\mathcal{P} = \vec{F}_{\text{Lorentz}} \cdot \vec{v} = q \left( \vec{E} + \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\perp \vec{v}} \right) \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

La composante magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas : une particule chargée reçoit de l'énergie uniquement de la part du champ électrique.

Propriété

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , une particule chargée se déplaçant dans un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  reçoit la puissance

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

La puissance de la force magnétique est donc nulle.

I.2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniformea) Hypothèses

Considérons une particule chargée évoluant dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$  uniforme et permanent.

- Système : particule de charge  $q$  et de masse  $m$  ;
- Référentiel : du laboratoire, supposé galiléen
- Bilan des forces :
  - \* force magnétique  $\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$  avec  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$  ;
  - \* poids  $m \vec{g}$ .

Remarque

Pour un électron accéléré par une différence de potentiel de 1 V dans un champ magnétique d'intensité  $B = 0,1 \text{ T}$  :

$$\begin{cases} m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \end{cases} \implies \frac{m_e g}{F_m} \simeq \frac{m_e g}{qvB} \simeq 1,35 \cdot 10^{-15} \ll 1$$

Par conséquent, le poids des particules chargées sera supposé négligeable par rapport à la force magnétique.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la particule chargée dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Projetons le principe fondamental sur les vecteurs de base  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  d'un repère cartésien

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB_0}{m} v_y \quad (1)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB_0}{m} v_x \quad (2)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (3)$$

où l'on a utilisé le fait que  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ .

**b) Conservation de la norme de la vitesse**

Projetons le principe fondamental de la dynamique sur le vecteur  $\vec{v}$  :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \left( \underbrace{q \vec{v} \wedge \vec{B}}_{\perp \vec{v}} \right) \cdot \vec{v} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = 0}$$

On retrouve le théorème de la puissance cinétique dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \mathcal{P}(\vec{F}_m) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_c = \text{cste}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\|\vec{v}\| = \text{cste}}$$

**c) Vitesse initiale le long du champ magnétique**

Supposons qu'initialement  $\vec{v}(t = 0) = v_{//} \vec{u}_z$ . L'équation (3) fournit alors

$$v_z = \text{cste} = v_{//}$$

Comme

$$\|\vec{v}\|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \text{cste} = v_{//}^2$$

on a nécessairement

$$v_x = v_y = 0 \quad \forall t$$

Par intégration, on en déduit

$$\begin{cases} x = \text{cste} = x_0 \\ y = \text{cste} = y_0 \\ z = v_{//} t + z_0 \end{cases}$$

Le mouvement est rectiligne et uniforme.

**d) Vitesse initiale orthogonale au champ magnétique**

Supposons qu'initialement  $v_z(t = 0) = 0$ . L'équation (3) fournit alors

$$z = \text{cste} = z_0$$

Il suffit alors de résoudre le système pour  $v_x$  et  $v_y$

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{qB_0}{m} v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB_0}{m} v_x \end{cases}$$

Posons  $\underline{V} = v_x + i v_y$  avec  $i^2 = -1$ . Les deux équations précédentes fournissent une équation différentielle pour  $\underline{V}$

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = -i \frac{qB_0}{m} \underline{V}$$

dont la solution s'écrit

$$\underline{V} = \underline{V}_0 e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \omega = -\frac{qB_0}{m} \quad (\text{pulsation cyclotron})$$

Supposons qu'initialement  $v_x(t = 0) = v_{\perp}$  et  $v_y(t = 0) = 0$ , soit  $\underline{V}(t = 0) = \underline{V}_0 = v_{\perp}$ . On a donc

$$\underline{V} = v_{\perp} e^{i\omega t} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} v_x = v_{\perp} \cos(\omega t) \\ v_y = v_{\perp} \sin(\omega t) \end{cases}$$

Remarque

On vérifie que dans le plan normal à  $\vec{B}$ , la vitesse a une norme constante  $v_x^2 + v_y^2 = v_\perp^2 = \text{cste}$ .

En intégrant ces relations avec  $x(t=0) = 0$  et  $y(t=0) = 0$ , on obtient

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_\perp}{\omega} \sin(\omega t) \\ y(t) = \frac{v_\perp}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \end{cases}$$

Le mouvement est un mouvement circulaire uniforme de rayon  $R = v_\perp$ , de centre  $C \left( 0, -\frac{v_\perp}{\omega} \right)$

effectué à la pulsation  $\omega = \frac{qB_0}{m}$  autour de  $-\vec{B}$ .

Remarque

Dans le plan normal à  $\vec{B}$ , l'équation du mouvement s'écrit

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} \quad \text{avec} \quad \vec{\omega} = -\frac{q\vec{B}}{m}$$

$\vec{\omega}$  est le vecteur rotation associé au mouvement de la particule chargée.

### e) Cas général - Mouvement hélicoïdal

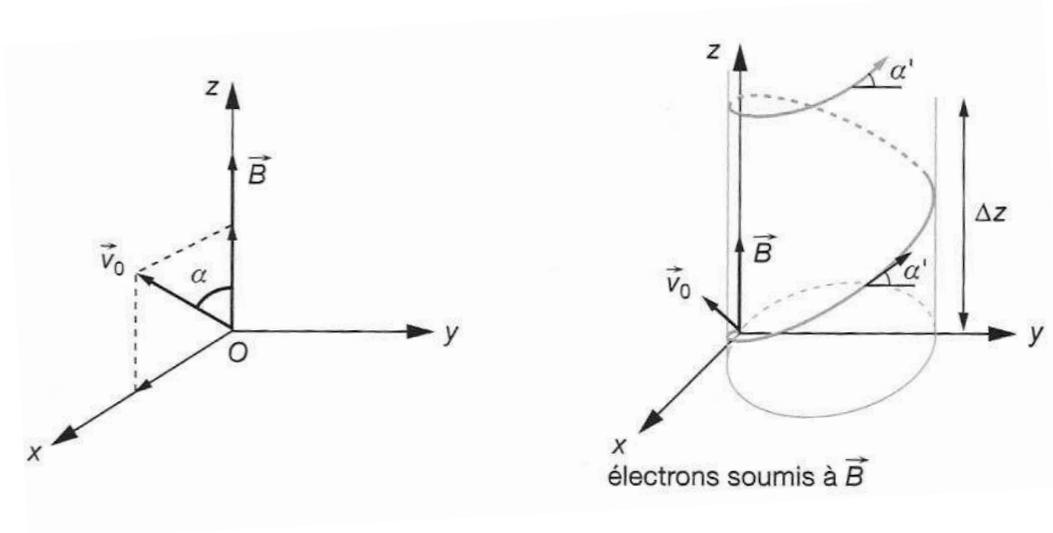
le mouvement général peut donc être décomposé en deux mouvements :

- un **mouvement rectiligne uniforme** le long de  $\vec{B}$  à la vitesse constante  $v_z = v_{//}$  ;
- un **mouvement circulaire uniforme** dans le plan normal à  $\vec{B}$  de vecteur rotation  $\omega = -\frac{q\vec{B}}{m}$  et de rayon  $R = \frac{v_\perp}{\omega}$ .

Par conséquent, les particules chargées soumises à l'action d'un champ  $\vec{B}$  uniforme d'orientation quelconque sont animées d'un **mouvement hélicoïdal uniforme**.

Le pas  $p$  de l'hélice est défini par la distance parcourue parallèlement à  $\vec{B}$  au bout d'une rotation complète dans le plan normal à  $\vec{B}$

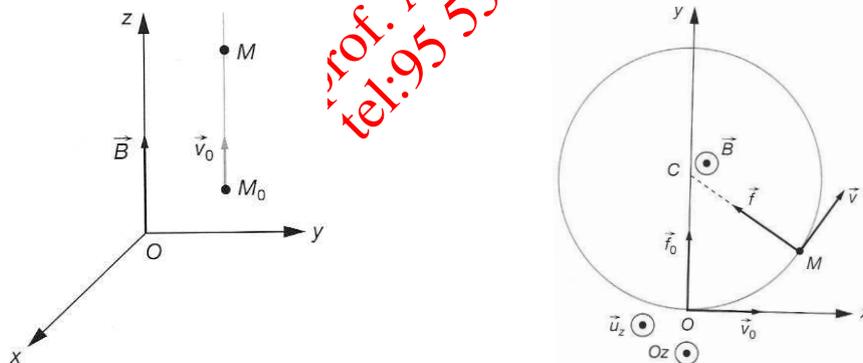
$$p = v_{//} \Delta t \quad \text{avec} \quad \omega \Delta t = 2\pi \Rightarrow \boxed{p = 2\pi \frac{v_{//}}{\omega}}$$



Remarque

Si initialement, la vitesse est colinéaire à  $\vec{B}$ , alors  $v_{\perp} = 0$  et le mouvement est rectiligne et uniforme suivant  $\vec{B}$ .

Si initialement, la vitesse est normale à  $\vec{B}$ , alors  $v_{\parallel} = 0$  et le mouvement est circulaire et uniforme dans un plan normal à  $\vec{B}$ .



prof. AMAMI ipesi  
 tel: 95 55 64 10

## II Effet Hall

### II.1. Principe

Considérons une plaque de conducteur (ou de semi-conducteur) parcourue par un courant d'intensité  $I$  selon  $\vec{u}_y$  et plongée dans un champ magnétique uniforme et permanent  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ .

Si le courant est homogène, l'intensité qui traverse une section de vecteur surface  $\vec{S}$  de la plaque vaut

$$I = \vec{j} \cdot \vec{S} \quad \text{avec} \quad \vec{j} = nq\vec{v}$$

où  $\vec{j}$  est la densité volumique de courant,  $n$  la densité numérique des porteurs de charge (en  $m^{-3}$ ),  $q$  leur charge et  $\vec{v}$  leur vitesse.

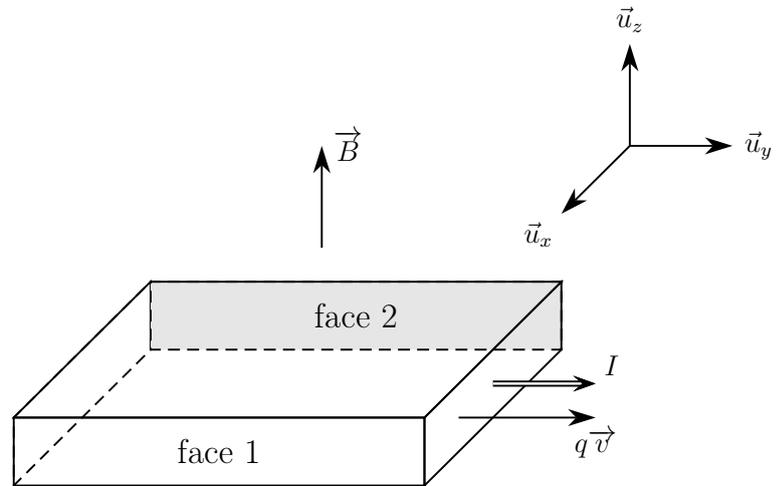


FIGURE 2 –

Remarque

Quelle que soit la charge  $q$  des porteurs de charge,  $\vec{j}$  est dans le sens de  $q\vec{v}$ .

Les porteurs de charge sont soumis à la composante magnétique<sup>1</sup> de la force de Lorentz à savoir

$$\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qvB \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = qvB \vec{u}_x$$

Sous l'action de la force  $f_m$ , les porteurs de charge s'accumulent sur la face 1 tandis que la face 2 se dégage de porteurs de charge.

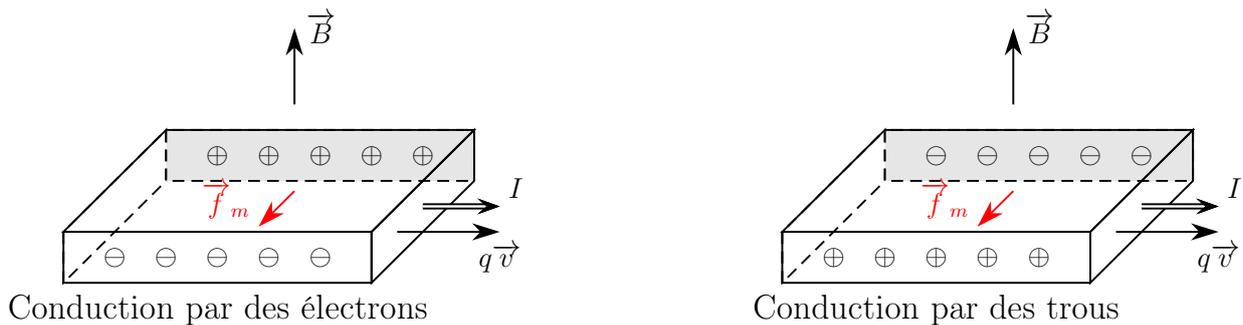


FIGURE 3 –

Les faces 1 et 2 portent une charge opposée et se comportent comme un condensateur plan. Il apparaît donc une différence de potentiel entre les faces latérales 1 et 2.

1. En fait, si un courant traverse le conducteur, c'est qu'une différence de potentiel a été appliquée à ses bornes. Il existe donc un champ électrique longitudinal qui provoque un mouvement d'ensemble des porteurs de charges. Nous ne tiendrons pas compte de ce champ longitudinal dans la suite.

**Propriété**

Un courant électrique traversant un matériau baignant dans un champ magnétique engendre une différence de potentiel dans une direction perpendiculaire à la fois au courant et au champ magnétique. Cet effet est connu sous le nom d'effet Hall<sup>a</sup>.

a. L'effet Hall, sous sa version classique, a été découvert en 1879 par le physicien américain Edwin Herbert Hall. Le Prix Nobel de physique a été attribué en 1985 pour l'effet Hall quantique entier et en 1998 pour l'effet Hall quantique fractionnaire.

a) Champ et tension de Hall

On note  $a$  la largeur de la plaque de conducteur et  $b$  sa dimension le long de  $\vec{B}$ .

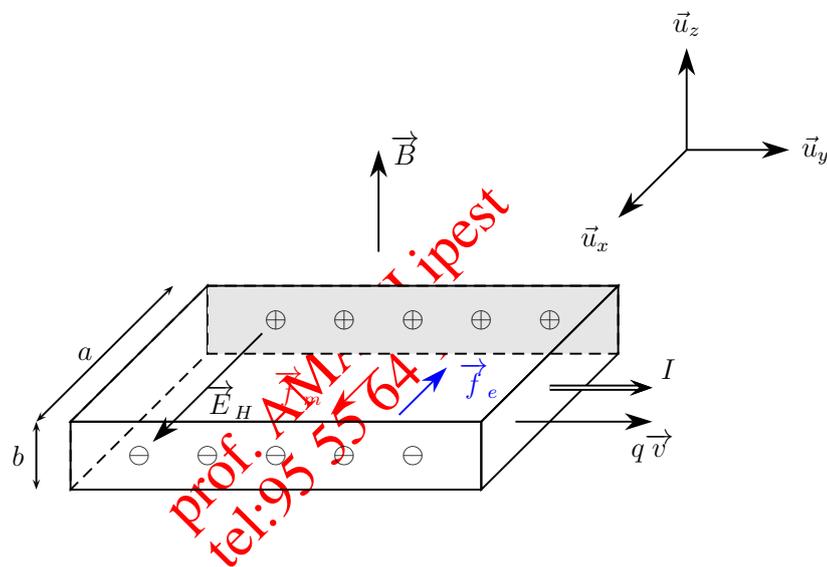


FIGURE 4 -

La différence de potentiel entre les faces latérales génère un champ électrique latéral  $\vec{E}_H$ , appelé champ de Hall, orienté dans le sens des potentiels décroissants (*i.e.* de la face chargée + vers la plaque chargée -). Les porteurs de charge sont alors soumis à la force magnétique  $\vec{f}_m$  et à la force électrique latérale  $\vec{f}_e = q\vec{E}_H$ .

En régime permanent, le courant s'écoule à nouveau suivant  $\vec{u}_y$  et les charges ne s'accumulent plus sur les faces latérales. Les forces électriques et magnétiques se compensent exactement de sorte que

$$\vec{f}_e + \vec{f}_m = \vec{0} \quad \text{soit} \quad q(\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$$

Or

$$\vec{v} = \frac{\vec{j}}{nq} = \frac{I}{nqab} \vec{u}_y$$

de sorte que

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = -\frac{1}{nq} \vec{j} \wedge \vec{B} = -\frac{IB}{nqab} \vec{u}_x$$

Propriété

Le champ de Hall vaut

$$\vec{E}_H = -R_H \vec{j} \wedge \vec{B}$$

où  $R_H = \frac{1}{nq}$  est la constante de Hall du matériau (positive ou négative) et  $\vec{j}$  est la densité volumique de courant

Remarque

Le champ de Hall est dirigé perpendiculairement au courant et au champ magnétique et vaut, en norme

$$\|\vec{E}_H\| = \frac{IB}{n|q|ab}$$

La différence de potentiel  $U_H$  entre la face 1 et la face 2, appelée **tension de Hall** vaut

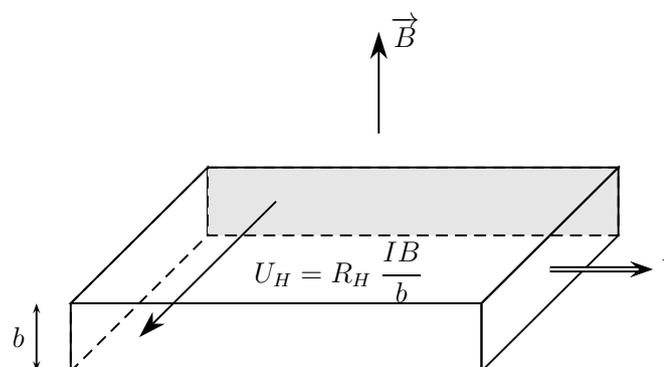
$$U_H = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}_H \cdot \vec{dl} = \int_0^a -\frac{IB}{nqab} \vec{u}_x \cdot (-dx \vec{u}_x) = \frac{IB}{nqb}$$

Propriété

La tension de Hall qui apparaît entre les faces latérales vaut

$$U_H = R_H \frac{IB}{b}$$

où  $b$  est la dimension du conducteur le long du champ  $\vec{B}$ .



$$U_H < 0 \Rightarrow q < 0$$

$$U_H > 0 \Rightarrow q > 0$$

FIGURE 5 –

## II.2. Applications de l'effet Hall

L'effet Hall possède deux applications importantes : il permet de caractériser des matériaux conducteurs ou semi-conducteurs mais il intervient aussi dans la mesure de champs magnétiques.

### a) Caractérisation de matériaux conducteurs ou semi-conducteurs

Plongeons un conducteur traversé par un courant d'intensité  $I$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . On note  $b$  l'épaisseur du matériau dans la direction de  $\vec{B}$ . On mesure alors la tension de Hall

$$U_H = R_H \frac{IB}{b} = \frac{1}{nq} \frac{IB}{b}$$

Le signe de  $U_H$  dépend de la charge  $q$  des porteurs de charge :

- ★ dans le cas d'une conduction par électrons (métal ou semi-conducteur dopé  $N$ ),  $U_H < 0$  ;
- ★ dans le cas d'une conduction par trous (semi-conducteur dopé  $P$ ),  $U_H > 0$ .

La valeur de  $U_H$  donne accès à la valeur de la constante de Hall  $R_H$  du conducteur puisque

$$R_H = U_H \frac{b}{IB}$$

Mais  $R_H = \frac{1}{nq}$ . Les porteurs de charge portant en général une charge  $q = \pm e$ , on détermine alors aisément la densité numérique de porteurs de charge  $n$ .

#### Propriété

L'effet Hall permet de déterminer le type et la densité des porteurs de charge dans un matériau.

### b) Mesure de champs magnétiques

Supposons que le matériau utilisé soit parfaitement connu ( $R_H$  et  $b$  connus). On impose alors un courant d'intensité  $I$  dans le matériau conducteur et on mesure la tension de Hallé  $U_H$ . Comme

$$U_H = R_H \frac{IB}{b} \quad \text{soit} \quad B = b \frac{U_H}{R_H I}$$

on détermine aisément la valeur du champ magnétique  $B$  car le champ magnétique est proportionnel à la tension de Hall !

On peut déterminer l'ordre de grandeur de la tension de Hall dans le cas d'un matériau d'épaisseur  $b = 0,1$  mm traversé par un courant de 1 A dans un champ magnétique de 1 tesla :

- ★ Pour un métal,  $n \approx 10^{28} \text{ m}^{-3}$  et  $q = -e$  d'où

$$R_H = -\frac{1}{ne} \approx -6.10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1} \quad \text{et} \quad U_H = R_H \frac{IB}{b} \approx -6 \mu\text{V}$$

- ★ Pour un semi-conducteur dopé  $P$ ,  $n \approx 10^{22} \text{ m}^{-3}$  et  $q = +e$  d'où

$$R_H = \frac{1}{ne} \approx 6.10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1} \quad \text{et} \quad U_H = R_H \frac{IB}{b} \approx 6 \text{ V}$$

Remarque

*La tension de Hall est plus élevée dans un semi-conducteur que dans un métal.*

Propriété

L'effet Hall permet de mesurer un champ magnétique. Compte-tenu des ordres de grandeurs pour la tension de Hall, on utilisera de préférence des matériaux semi-conducteurs.

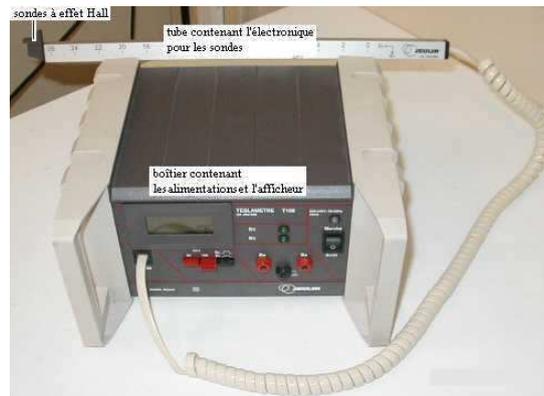


FIGURE 6

Remarque

*Un champ magnétique se mesure avec un teslamètre, relié à une sonde de Hall. La sonde de Hall est constituée d'un matériau semi-conducteur de dimensions connues. Le teslamètre impose un courant dans la sonde, mesure la tension de Hall au niveau de la sonde et affiche la valeur du champ magnétique.*

### III Actions de Laplace

#### III.1. Définition et expression

**Définition :**

**On appelle actions de Laplace l'ensemble des forces exercées par un champ électromagnétique sur un conducteur.**

Un conducteur est constitué :

- \* de charges mobiles (porteurs de charge);
- \* de charges fixes (appartenant au réseau).

La force qui s'exerce sur un élément de volume  $d\tau$  du conducteur en présence d'un champ magnétique  $\vec{B}$  vaut

$$d\vec{F} = d\vec{F}_{\text{mob}} + d\vec{F}_{\text{fix}}$$

avec

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\text{mob}} &= \rho_{\text{mob}} d\tau (\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}) \\ d\vec{F}_{\text{fix}} &= \rho_{\text{fix}} d\tau \vec{E}_H \end{aligned}$$

où  $d\vec{F}_{\text{mob}}$  est la force élémentaire exercée sur les charges mobiles et  $d\vec{F}_{\text{fix}}$  est la force élémentaire exercée sur les charges fixes. On a noté  $\rho_{\text{mob}}$  et  $\rho_{\text{fix}}$  respectivement les densités volumiques de charge des charges mobiles et fixes.

D'après l'étude du champ de Hall  $\vec{E}_H$ , on sait qu'à l'équilibre

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

D'autre part, le volume  $d\tau$  du matériau étant globalement neutre, on a

$$\rho_{\text{mob}} d\tau + \rho_{\text{fix}} d\tau = 0 \quad \text{soit} \quad \rho_{\text{fix}} = -\rho_{\text{mob}}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\text{mob}} &= \vec{0} \\ d\vec{F}_{\text{fix}} &= -\rho_{\text{mob}} d\tau (-\vec{v} \wedge \vec{B}) = \underbrace{\rho_{\text{mob}} \vec{v}}_{=\vec{j}} \wedge \vec{B} d\tau \end{aligned}$$

Ainsi  $d\vec{F} = \vec{0} + \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$

**Propriété**

La force élémentaire de Laplace exercée sur un volume  $d\tau$  de conducteur, soumis au champ magnétique  $\vec{B}$ , a pour expression

$$d\vec{F}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$

où  $\vec{j}$  est la densité volumique de courant.

Pour un conducteur filiforme,  $\vec{j} d\tau \rightarrow I d\vec{\ell}$ . On en déduit l'expression de la force élémentaire de Laplace exercée sur un élément de courant  $I d\vec{\ell}$  :

$$d\vec{F}_L = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Remarque

D'après le raisonnement précédent, on constate que les forces de Laplace résultent de l'action du champ de Hall sur le réseau cristallin du conducteur. Les porteurs de charge, quant à eux, sont soumis à deux forces qui se compensent : l'action du champ de Hall et la force magnétique.

Remarque

On en déduit la résultante  $\vec{F}_L$  et le moment  $\vec{M}_O$  en un point  $O$  des forces de Laplace :

$$\vec{F}_L = \iiint_{\text{conducteur}} \vec{j} \wedge \vec{B} \, d\tau$$

$$\vec{M}_O = \iiint_{M \in \text{conducteur}} \vec{OM} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{B}) \, d\tau$$

Pour un conducteur filiforme  $\mathcal{C}$ , ces expressions se simplifient en

$$\vec{F}_L = \int_{\mathcal{C}} I \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{M}_O = \int_{\mathcal{C}} \vec{OM} \wedge (I \vec{dl} \wedge \vec{B})$$

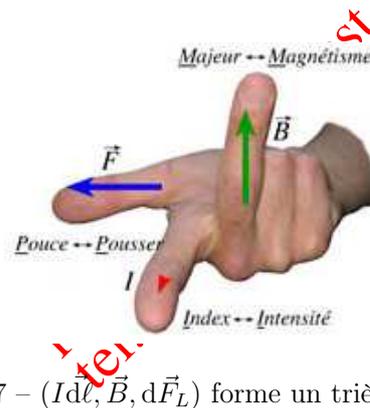


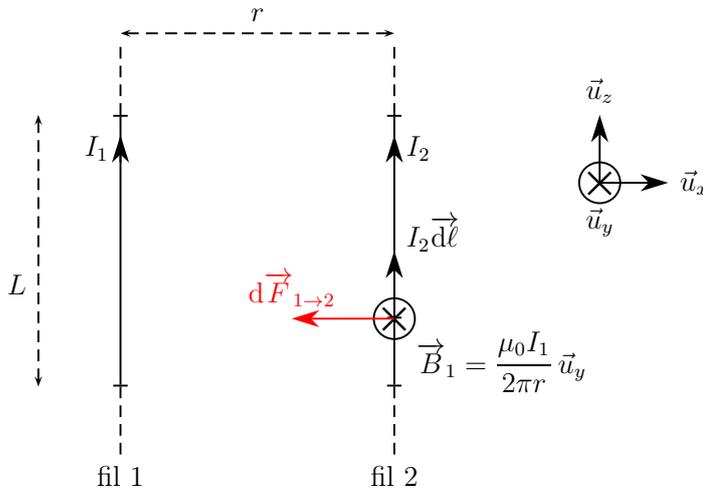
FIGURE 7 –  $(I \vec{dl}, \vec{B}, d\vec{F}_L)$  forme un trièdre direct.

Remarque

On remarque que  $(I \vec{dl}, \vec{B}, d\vec{F}_L)$  forme un trièdre direct. Il est donc possible de retrouver l'orientation de la force en utilisant la règle des trois doigts de la main droite ou celle du tire-bouchon.

### III.2. Définition de l'Ampère

On considère deux fils rectilignes infinis, parallèles entre eux et distants de  $r = 1$  m, traversés par le même courant, de même sens et de même intensité constante  $I_1 = I_2 = I$ . Déterminer la force de Laplace exercée par un fil sur une longueur  $L = 1$  m de l'autre si  $I = 1$  A.



Le champ magnétostatique créé par le fil 1 en un point  $M$  du fil 2 vaut

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \vec{u}_y$$

où le trièdre  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est représenté sur la figure ci-dessus.

La force élémentaire de Laplace exercée par le fil 1 sur un élément de courant  $I_2 d\vec{\ell} = I_2 dl \vec{u}_z$  du fil 2 vaut donc

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dl \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dl \vec{u}_x$$

La force de Laplace qui s'exerce sur une longueur  $L$  du fil 2 vaut donc

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} L \vec{u}_x$$

On remarque que la force de Laplace entre deux fils parcourus par un courant de même sens est une force attractive!

Pour  $I_1 = I_2 = I = 1 \text{ A}$ ,  $r = 1 \text{ m}$  et  $L = 1 \text{ m}$  et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  :

$$\|\vec{F}_{1 \rightarrow 2}\| = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

La valeur de cette force permet de définir l'ampère (A), qui est l'une des unités fondamentales du système d'unités international (S.I.).

**Définition :**

**L'ampère est l'intensité d'un courant continu qui, maintenu dans deux fils distants de 1 m, produit entre eux une force de  $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$  par unité de longueur.**

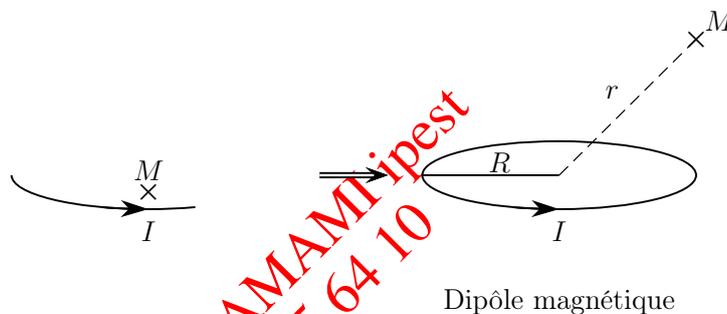
## IV Dipôle magnétique

### IV.1. Définition

**Définition :**

On appelle dipôle magnétique un ensemble de courants permanents circulant dans un volume petit devant la distance d'observation.

En particulier, une "petite" boucle de courant est assimilable à un dipôle magnétique.



Approximation dipolaire : la spire se comporte comme un dipôle à grande distance.

FIGURE 8 –

Remarque

Une spire de rayon  $R$ , observée à une distance  $r > R$  se comporte comme un dipôle.  
Un aimant est constitué de courants permanents microscopiques et se comporte comme un dipôle.

**Définition :**

Le moment dipolaire magnétique  $\vec{M}$  d'un circuit filiforme est défini par

$$\vec{M} = I \vec{S}$$

où  $I$  est l'intensité du courant et  $\vec{S} = S\vec{n}$  est le vecteur surface de la distribution, orienté à partir de  $I$  d'après la règle du tire-bouchon.

Exemple

Le moment dipolaire magnétique d'une spire circulaire de rayon  $R$ , d'axe  $(O, \vec{u}_z)$  et parcourue par un courant d'intensité  $I$  vaut

$$\vec{\mathcal{M}} = IS \vec{u}_z = I \pi R^2 \vec{u}_z$$

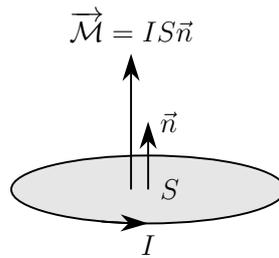


FIGURE 9 –

Exercice

Un électron de charge  $-e$  et de masse  $m_e$  décrit, dans une représentation classique, une trajectoire circulaire d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $r$  autour du noyau ponctuel en  $O$ .

On admet que le moment cinétique de l'électron par rapport à l'axe  $(Oz)$  est :  $L_z = \hbar = \frac{h}{2\pi}$ .

Calculer le moment magnétique associé à ce mouvement orbital de l'électron.

L'électron tournant à une vitesse  $v$  constante dans le sens positif autour de  $(Oz)$ , le moment cinétique par rapport à  $(Oz)$  est :  $L_z = m_e r v = \hbar$  donc  $v = \frac{\hbar}{m_e r}$ .

L'électron décrit  $N = \frac{v}{2\pi r}$  tours par unité de temps et l'intensité associée à un tel mouvement est :

$$I = qN = -\frac{ev}{2\pi r} = -\frac{e\hbar}{2\pi m_e r^2}$$

Le moment magnétique correspondant, projeté sur  $(Oz)$  est alors :

$$\mathcal{M}_z = \pi r^2 I = -\frac{e\hbar}{2m_e}$$

Ce calcul fait apparaître le magnéton de Bohr :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \simeq 9,26 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$$

qui sert d'unité de mesure des moments magnétiques en physique atomique.

Remarque : les électrons possèdent également un moment magnétique intrinsèque associé à leur spin.

Remarque

Le moment dipolaire permet de définir un pôle nord et un pôle sud magnétique,  $\vec{\mathcal{M}}$  étant orienté du sud vers le nord. Au niveau microscopique, il existe des boucles de courants assimilables à des dipôles magnétiques.

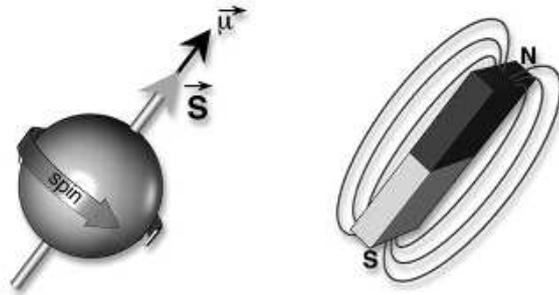


FIGURE 10 –

### IV.2. Champ et potentiel créés par un dipôle magnétique

On admet les expressions suivantes pour le potentiel vecteur et le champ magnétique créé par un dipôle magnétique de moment dipolaire  $\vec{M}$ .

**Propriété**

Le potentiel vecteur créé en un point  $M$  par un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{M}$  est :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

Le champ magnétique vaut alors :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{M}}{r^3}$$

où  $\vec{OM} = r \vec{u}_r$  est le vecteur position du point  $M$  repéré à partir du centre du dipôle.

On note les analogies avec les expressions du champ et du potentiel électrostatique créés par un dipôle électrostatique

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}$$

où  $\vec{p}$  est le moment dipolaire électrique.

Remarque

On retrouve les formules du dipôle électrostatique en changeant  $\epsilon_0$  et  $1/\mu_0$  et  $\vec{p}$  en  $\vec{M}$ . Le produit vectoriel dans l'expression de  $\vec{A}$  est cohérent avec le fait que  $\vec{A}$  est un vecteur polaire tandis que  $\vec{M}$  est un vecteur axial.

Remarque

Dans les deux cas, le potentiel et le champ décroissent respectivement en  $1/r^2$  et  $1/r^3$ .

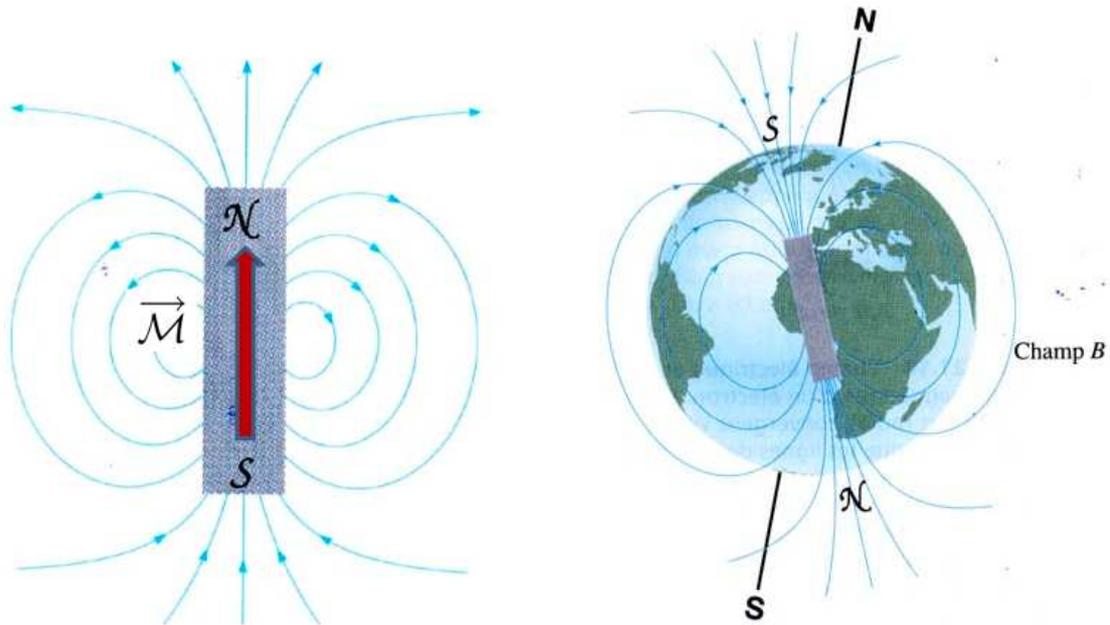
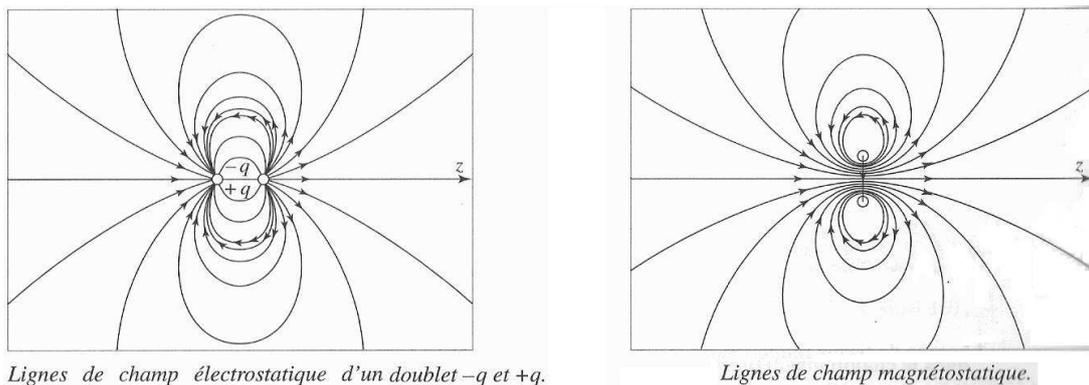


FIGURE 11 – Les aimants sont constitués d'un très grand nombre de dipôles magnétiques microscopiques dont les moments magnétiques sont alignés. En première approximation, un aimant peut être assimilé à un dipôle. De même les mouvements de convection dans le noyau métallique terrestre génèrent une distribution de courant dipolaire à grande distance du noyau.

### IV.3. Analogie avec le dipôle électrique

En comparant les cartes de champ à grande distance obtenues avec un dipôle électrique (doublet de charges  $+q$  et  $-q$ ) et une spire de courant, on remarque une forte analogie dans les lignes de champ à grande distance.



Lignes de champ électrostatique d'un doublet  $-q$  et  $+q$ .

Lignes de champ magnétostatique.

FIGURE 12 – Comparaison des lignes de champ créées par un doublet de charges (à gauche) et par une spire circulaire (à droite).

L'analogie entre les comportements des dipôles électrique et magnétique est si troublante qu'historiquement les physiciens ont d'abord cherché à mettre en évidence des causes similaires pour interpréter les champs créés.

Une distribution de courant se comportant comme un dipôle magnétique doit-elle son existence, par analogie, à un doublet de "charges magnétiques" ?

En réalité, il n'existe pas de charges magnétiques et les propriétés magnétiques de la matière sont correctement interprétées par le modèle de boucles de courant à l'échelle microscopique. Ainsi, les sources ultimes (élémentaires) du magnétisme de la matière sont des dipôles magnétiques.

## V Action d'un champ magnétique sur un dipôle magnétique

### V.1. Résultante et moment résultant des efforts de Laplace

On admet le résultat suivant.

**Propriété**

Les actions de Laplace exercées par un champ magnétique uniforme sur un dipôle de moment magnétique dipolaire  $\vec{M}$  sont caractérisées par :

★ Une résultante nulle :

$$\vec{F}_L = \vec{0}$$

★ Un moment résultant :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

qui tend à orienter le moment dipolaire  $\vec{M}$  dans le sens de  $\vec{B}$ .

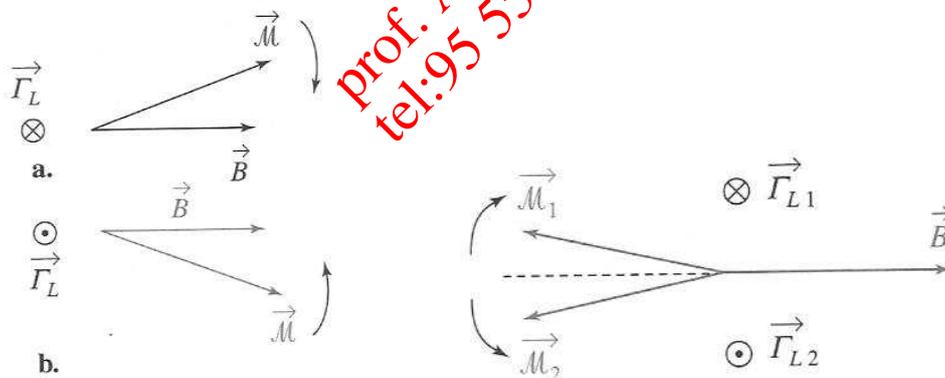


FIGURE 13 – (À gauche) Le couple tend à aligner  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  pour atteindre une position d'équilibre stable. (À droite) La position d'équilibre est instable : une petite perturbation induit un couple qui écarte  $\vec{M}$  de sa position d'équilibre.

**Remarque**

C'est le principe de fonctionnement des boussoles. La boussole est un petit dipôle qui s'oriente dans le sens du champ magnétique terrestre et repère le pôle nord magnétique.

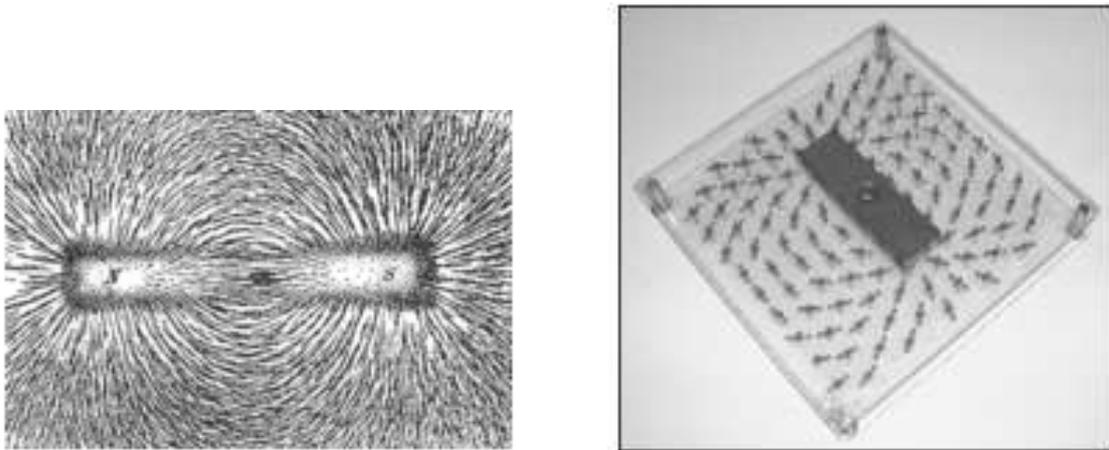


FIGURE 14 – La limaille de fer ayant des propriétés magnétiques (moment dipolaire non nul), elle s’oriente le long du champ magnétique et permet d’observer les lignes de champ magnétique. C’est sur ce principe que fonctionne les boussoles, qui possèdent un moment magnétique permanent.

Remarque

On montre que la résultante des efforts exercés par un champ extérieur non uniforme  $\vec{B}$  sur un dipôle magnétique de moment dipolaire  $\vec{M}$  s’écrit :

$$\vec{F}_L = (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B}$$

La force tend à entraîner le dipôle vers les régions de champ intense.

prof. AMAN ipesi  
tel: 95 55 64 10

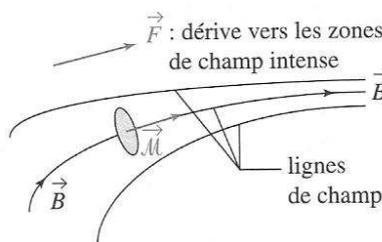
**V.2. Énergie potentielle d’interaction**

Les actions de Laplace peuvent également être étudiées du point de vue énergétique. Nous admettrons la propriété suivante.

**Propriété**

L’énergie potentielle d’interaction entre un dipôle magnétique permanent de moment magnétique  $\vec{M}$  et un champ magnéostatique  $\vec{B}$  s’écrit :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$



Remarque

*Le dipôle tend à s'aligner avec le champ magnétique et se rapproche des zones de champ intense, c'est-à-dire des zones où les lignes de champ se resserrent.*

prof. AMAMI ipest  
tel:95 55 64 10

# Induction électromagnétique

Un courant électrique est généralement imposé par une différence de potentiel, c'est-à-dire par un champ électrique qui met des porteurs de charge en mouvement. Un champ magnétique peut-il lui aussi générer un courant électrique ?

La réponse à cette question fut apportée suite aux travaux de Michaël Faraday en 1831 et de Heinrich Lenz en 1834.

L'objet de ce chapitre est d'étudier la possibilité d'induire des courants électriques à l'aide d'un champ magnétique. On parle alors de phénomène d'**induction**.

Bien qu'un champ magnétique exerce des efforts sur un courant, la composante magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas au niveau microscopique et ne peut donc pas mettre en mouvement des porteurs de charge. Si des courants sont générés par un champ magnétique, c'est qu'il existe un lien entre les champs  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$ . Les champs électriques et magnétiques ne peuvent pas être dissociés : on parle de **champ électromagnétique**.

## I Le phénomène d'induction

### I.1. Observations expérimentales

Approchons ou éloignons un aimant d'une bobine immobile reliée à un oscilloscope (voir figure 1) :

- \* lorsque l'aimant est fixe, il n'y a pas de différence de potentiel aux bornes de la bobine ;
- \* lorsqu'on approche l'aimant, on observe, au cours du déplacement, un pic de tension aux bornes de la bobine ;
- \* lorsqu'on éloigne l'aimant, on observe, au cours du déplacement, un pic de tension de signe opposé ;
- \* l'amplitude du pic est d'autant plus grande que le déplacement est rapide.

Laissons désormais l'aimant immobile et déplaçons la bobine au voisinage de l'aimant :

- \* lorsque la bobine est fixe, il n'y a pas de différence de potentiel aux bornes de la bobine ;
- \* lorsque l'on approche la bobine, il apparaît, au cours du déplacement, un pic de tension aux bornes de la bobine ;
- \* lorsque l'on éloigne la bobine, il apparaît, au cours du déplacement, un courant de signe opposé dans la bobine.
- \* l'amplitude du pic est d'autant plus grande que le déplacement est rapide.

De même, si l'on relie la bobine à un galvanomètre, on réalise les observations suivantes :

- \* lorsque l'aimant est fixe, il n'y a pas de courant dans la bobine ;
- \* lorsque l'on approche l'aimant, il apparaît un courant dans la bobine ;
- \* lorsque l'on éloigne l'aimant, il apparaît un courant de signe opposé dans la bobine.

Les observations sont similaires si le circuit est mobile et l'aimant est fixe.

Ces expériences illustrent le phénomène d'induction.

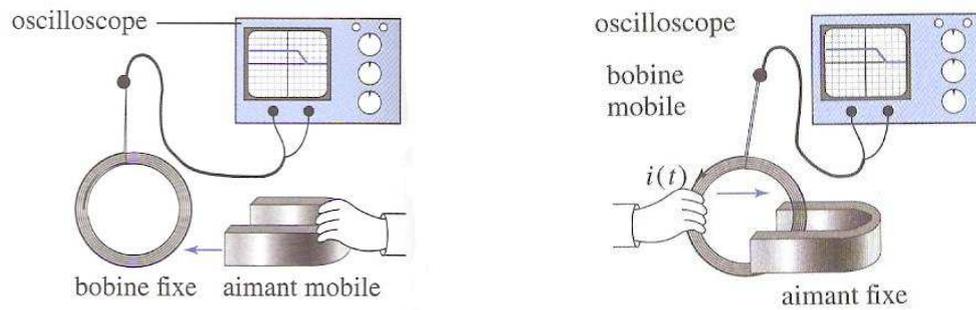


FIGURE 1 – On observe la création d'une tension aux bornes de la bobine quand on déplace l'aimant (à gauche) ou quand on déplace la bobine (à droite).

### Définition :

Le phénomène au cours duquel une force électromotrice (f.e.m.) est générée par l'action d'un champ électromagnétique est appelé induction électromagnétique.

Ce phénomène se présente sous deux formes :

- \* l'induction de Neumann correspond à l'action d'un champ magnétique variable sur un conducteur fixe ;
- \* l'induction de Lorentz correspond à l'action d'un champ magnétique permanent sur un conducteur en mouvement.

## I.2. Loi de Faraday

L'expérience précédente montre qu'une force électromotrice (f.e.m.) apparaît dans un circuit lorsque le flux du champ magnétique varie. La f.e.m. est d'autant plus importante que le flux du champ magnétique à travers le circuit varie rapidement. Michaël Faraday énonça en 1831 la loi qui permet de relier les variations de flux du champ magnétique à la valeur de la f.e.m. .

### Loi de Faraday

Lorsqu'un circuit subit une variation de flux  $d\Phi$  du champ magnétique pendant un intervalle de temps  $dt$ , il apparaît dans le circuit une force électromotrice (f.e.m.)  $e$  telle que

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Le signe du flux  $\Phi$  et de la force électromotrice  $e$  sont déterminés par le choix d'orientation du circuit (et de sa normale d'après la règle du tire-bouchon).

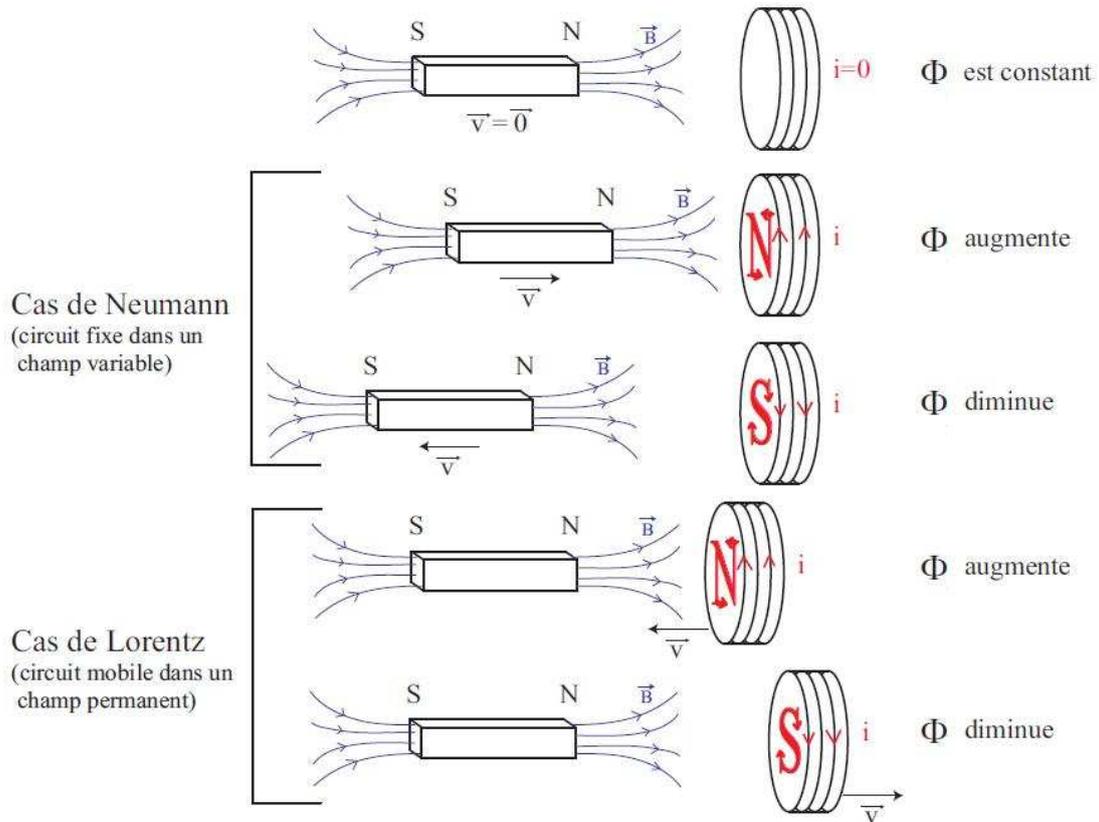


FIGURE 2 – Interprétation de l'apparition de courant induit dû à la variation du flux du champ magnétique.

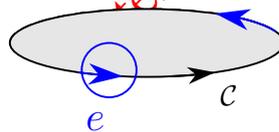


FIGURE 3 – Convention d'orientation.

### I.3. Loi de Lenz

Considérons un circuit filiforme  $\mathcal{C}$  orienté dans un sens conventionnel arbitraire. On note  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface du circuit, orienté d'après la règle du tire-bouchon (à partir du sens conventionnel choisi). On suppose que ce circuit est purement résistif et l'on note  $R$  sa résistance équivalente.

On impose brusquement un champ magnétique  $\vec{B}$  dans le sens de  $\vec{n}$ . Le flux du champ magnétique à travers le circuit augmente donc brusquement, passant d'une valeur nulle à une valeur positive :

$$\Phi = \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} \quad \text{augmente}$$

où l'on a noté  $\Sigma(\mathcal{C})$  la surface définie par le circuit, d'élément de surface  $\vec{d^2S} = d^2S \vec{n}$ .

Pendant la durée  $dt$ , le flux a varié de  $d\Phi > 0$ . Il apparaît alors dans le circuit une force électromotrice

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} < 0$$

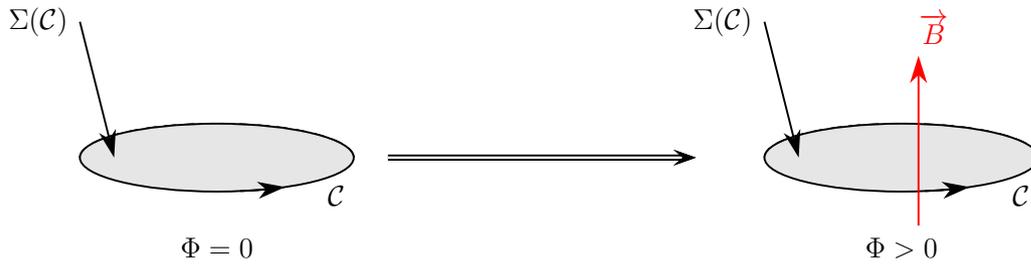


FIGURE 4 – Augmentation du flux du champ magnétique.

La force électromotrice est opposée au sens conventionnel choisi.

On en déduit le courant "induit" qui circule dans  $\mathcal{C}$  :  $i = \frac{e}{R} < 0$ .  
 Le courant "induit" circule dans le sens opposé au sens conventionnel choisi.

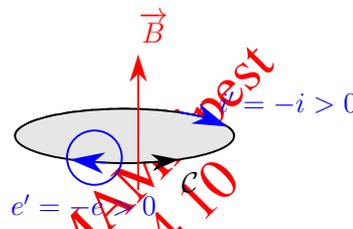


FIGURE 5 – Sens du courant induit.

Ce courant génère un champ magnétique "induit", orienté suivant la règle du tire-bouchon. Le champ "induit" est donc orienté suivant  $-\vec{n}$  ce qui tend à diminuer le flux du champ magnétique à travers  $\Sigma(\mathcal{C})$ . Ainsi, le phénomène d'induction tend à limiter l'augmentation du flux magnétique.

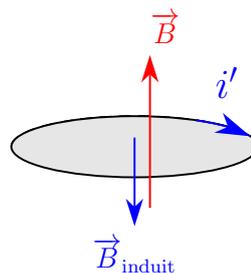


FIGURE 6 – Sens du champ magnétique s'opposant à l'augmentation du flux.

Ce résultat est en fait général et constitue la loi de Lenz<sup>1</sup>.

**Loi de Lenz**

Les effets (magnétiques, électrocinétiques et mécaniques) de l'induction se produisent de façon à s'opposer à ses causes.

1. Lenz était contemporain de Faraday, de sorte que la loi de Faraday est parfois également appelée loi de Lenz-Faraday.

Remarque

- ★ La loi de Lenz se retrouve dans le signe "−" de la loi de Faraday. Aussi parlera-t-on de la loi de Lenz-Faraday.
- ★ On peut également interpréter la loi de Lenz avec l'apparition d'une force de Laplace s'opposant à l'approche de l'aimant. Le sens de parcours du courant induit dans le circuit rend ce dernier équivalent à un aimant dont le pôle nord est orienté vers le pôle nord de l'aimant permanent, comme le montre la figure précédente ; il y a donc répulsion.

## II Applications

### II.1. Cas de l'induction de Neumann : chauffage par induction

La présence d'un champ magnétique variable (généralisé par un enroulement de fils parcourus par un courant alternatif sous la plaque en vitro-céramique), vertical, donné par  $\vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{u}_z$ , donne naissance à des boucles de courants induits appelés *courants de Foucault* dans un disque conducteur (fond d'une casserole par exemple).

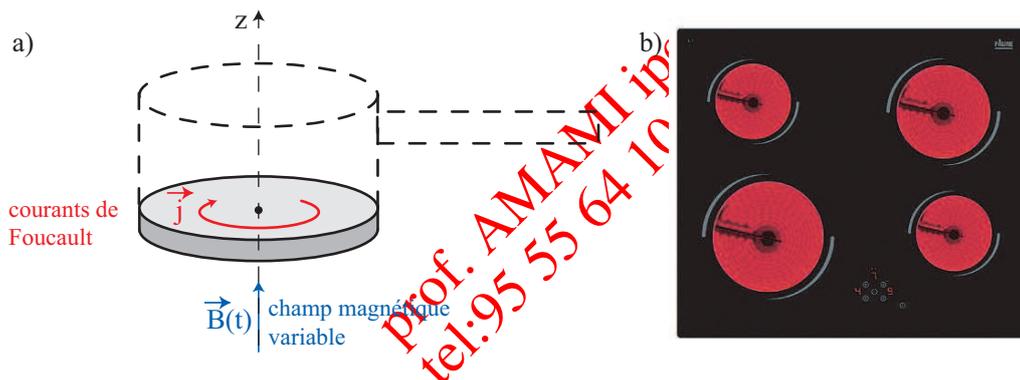


FIGURE 7 – Principe du chauffage à induction.

Ces courants circulant dans le fond de la casserole cèdent de l'énergie au milieu sous forme d'effet Joule par l'intermédiaire de la puissance de la force de Lorentz. Le fond de la casserole peut ainsi être porté à très haute température et permettre la cuisson des aliments.

Intéressons-nous à une spire "découpée" dans le fond de la casserole. Cette spire de centre  $O$ , d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $a$  et de résistance  $R$  est plongée dans un champ magnétique **extérieur**, uniforme et dépendant du temps

$$\vec{B}(t) = B(t) \vec{u}_z = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

On cherche l'intensité du courant traversant la spire ainsi que la puissance dissipée par effet Joule.

Remarque

La spire est fixe et le champ magnétique variable : la spire est le siège d'un phénomène d'induction de Neumann.

Orientons la spire dans le sens conventionnel positif représenté sur le schéma. La normale à la surface est donc orientée suivant  $+\vec{u}_z$ , d'après la règle du tire-bouchon.

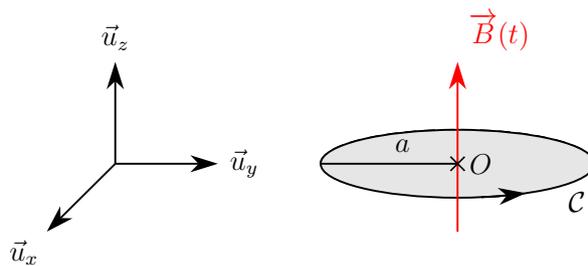


FIGURE 8 –

Le flux du champ magnétique à travers la spire vaut

$$\Phi = \iint_{\Sigma(C)} \vec{B}(t) \cdot d^2\vec{S} = \vec{B}(t) \cdot \iint_{\Sigma(C)} d^2\vec{S} = \vec{B}(t) \cdot (S \vec{u}_z)$$

où l'on a utilisé le fait que le champ était uniforme sur la surface  $\Sigma(C)$ . On en déduit

$$\Phi = B_0 \cos(\omega t) \pi a^2$$

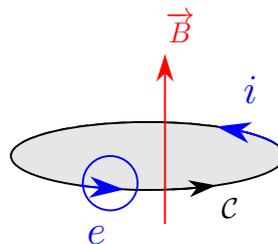
D'après la loi de Lenz-Faraday, la force électromotrice induite dans le circuit vaut

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi a^2 \omega B_0 \sin(\omega t)$$

où  $e$  est orientée dans le sens conventionnel choisi.

On en déduit l'intensité parcourant la spire

$$i(t) = \frac{e}{R} = \frac{\pi a^2 \omega B_0}{R} \sin(\omega t)$$



Orientation conventionnelle de  $e$  et  $i$ .

La spire se comporte comme un générateur de tension. La puissance fournie par un tel générateur est entièrement dissipée par effet Joule et vaut

$$\mathcal{P}_J = e(t)i(t) = Ri(t)^2 = \frac{(\pi a^2)^2 \omega^2 B_0^2}{R} \sin^2(\omega t)$$

En valeur moyenne, la puissance dissipée par effet Joule vaut

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\pi^2 a^4 \omega^2 B_0^2}{2R}$$

où l'on a utilisé la relation  $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2$ .

Ce modèle simple illustre donc le principe du chauffage à induction. Un conducteur ohmique est placé dans un champ magnétique. Le phénomène d'induction de Neumann est à l'origine de courants induits dans le conducteur, appelés courant de Foucault. Ces courants entraînent un échauffement du conducteur par effet Joule. L'effet est d'autant plus important que :

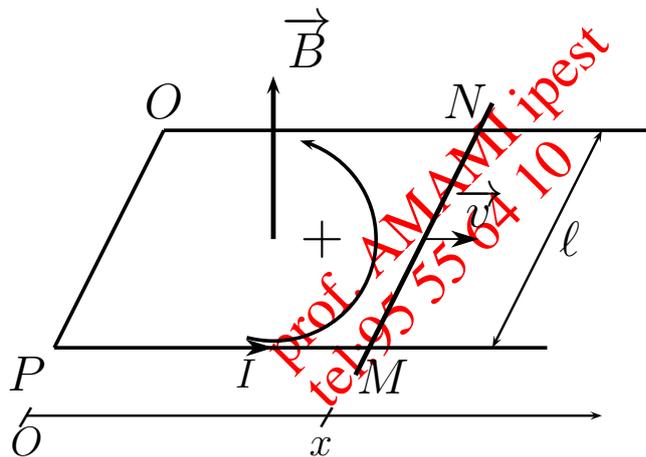
- ★ la fréquence est élevée ( $P_J$  varie en  $\omega^2$ ) ;
- ★ que le champ magnétique est intense ( $P_J$  varie en  $B_0^2$ ) ;
- ★ que le conducteur est grand ( $P_J$  varie en  $S^2$  où  $S$  est la surface de la spire).

### II.2. Cas de l'induction de Lorentz : rails de Laplace

On considère un barreau conducteur mobile, de longueur  $\ell$ , posé sur un ensemble de deux rails parallèles. Le circuit est fermé par un barreau fixe, perpendiculaire aux rails.

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et permanent, perpendiculaire au plan des rails  $\vec{B} = \vec{B}_0$ .

On suppose de plus que les rails sont sans résistance, tandis que le barreau possède une résistance  $R$ .



À  $t = 0$ , on lance le barreau parallèlement aux rails à la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$  dans le référentiel du laboratoire. On cherche à décrire le mouvement ultérieur du barreau.

#### a) Équation électrique

Orientons le circuit dans le sens positif indiqué sur la figure. Le flux du champ magnétique à travers le circuit déformable vaut :

$$\Phi = \iint_{MNOP} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} = BS = Blx$$

où l'on a utilisé les conventions d'orientation et où  $x$  repère la position du rail mobile.

On en déduit

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bl\dot{x}$$

Le barreau est le siège d'un phénomène d'induction de Lorentz. D'après la loi de Faraday, il apparaît une force électromotrice  $e$  dans le circuit

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\dot{x}$$

où  $e$  est orientée dans le sens conventionnel choisi.

Remarque

Seul le barreau est en mouvement dans le champ magnétique permanent. La force électromotrice reste donc localisée sur le barreau mobile.

En utilisant la loi d'Ohm dans le circuit, on obtient une équation électrique

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{B\ell}{R} \dot{x} \quad (1)$$

où le courant d'intensité  $i$  est compté algébriquement dans le sens  $MNOP$ .

### b) Équation mécanique

Un conducteur parcouru par un courant d'intensité  $i$  et plongé dans un champ magnétique est soumis aux efforts de Laplace. Ici, la résultante des efforts de Laplace exercés sur le barreau mobile vaut

$$\vec{F} = \int_M^N i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i\ell B \vec{u}_x$$

La tige mobile est soumise :

- \* à la réaction du support, supposée verticale  $\vec{R}$  en l'absence de frottements solides ;
- \* à son poids  $m\vec{g}$  compensé par la réaction  $\vec{R}$  ;
- \* à la résultante des efforts de Laplace  $\vec{F}$ .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au barreau dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, conduit à une équation mécanique

$$m\ddot{x} = i\ell B \quad (2)$$

où l'on a projeté sur le vecteur  $\vec{u}_x$ .

### c) Mouvement de la barre

L'équation électrique (1) fournit l'expression de  $i$ . En remplaçant cette expression dans l'équation mécanique (2), on obtient

$$m\ddot{x} = -\frac{B^2\ell^2}{R} \dot{x} = -\lambda \dot{x} \quad (3)$$

La force de Laplace est de la forme

$$\vec{F} = -\frac{B^2\ell^2}{R} \dot{x} \vec{u}_x$$

On retrouve une force de frottement fluide du type  $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$  où  $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x$  est la vitesse du barreau et où

$$\lambda = \frac{B^2\ell^2}{R} > 0$$

est le coefficient de frottement fluide.

La force de frottement est d'autant plus intense que le champ magnétique est intense, que le barreau est long et que sa résistance est faible (fort courant induit).

Remarque

1. Le barreau métallique en mouvement dans un champ magnétique permanent est soumis à l'induction de Lorentz. Il apparaît donc un courant induit dans le barreau métallique.
2. Le barreau métallique, parcouru par un courant et plongé dans un champ magnétique, subit les efforts de Laplace. Ces efforts génèrent une force de frottement fluide qui s'oppose au mouvement du pendule.

On retrouve bien la loi de Lenz : les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

L'intégration de cette équation du mouvement (3) immédiate et fournit

$$\dot{x} = K e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\lambda}$$

où  $K$  est une constante d'intégration. À la date  $t = 0$ ,  $\dot{x} = v_0 = K$ . On en déduit

$$\dot{x} = v_0 e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\lambda}$$

La barre freine mais ne s'arrête pas. La durée caractéristique du freinage est de l'ordre de  $\tau = m/\lambda$ . Cette durée est d'autant plus courte que le barreau est léger et le coefficient de frottement est grand (grand champ magnétique, petite résistance électrique).

Ce système peut être utilisé pour ralentir un véhicule mais pas pour l'arrêter. L'arrêt total d'un véhicule nécessite la présence de frottements solides (freins à disques ou à tambour).

#### d) Évolution du courant

L'évolution de l'intensité dans le circuit s'obtient aisément à partir de l'équation électrique (1)

$$i = -\frac{Bl}{R} \dot{x} \Rightarrow i = -\frac{Bl v_0}{R} e^{-t/\tau}$$

L'intensité est maximale initialement et tend exponentiellement vers 0 avec une durée caractéristique  $\tau$ .

#### e) Aspect énergétique

Rassemblons les équations électrique et mécanique

$$\begin{aligned} Ri &= e = -Bl \dot{x} \\ m\ddot{x} &= F_L = i\ell B \end{aligned}$$

En multipliant par  $i$  la première équation, on obtient un bilan de puissance électrique

$$Ri^2 = ei = -Bl \dot{x} i \quad (4)$$

La puissance dissipée par effet Joule  $Ri^2$  est égale à la puissance électrique  $ei$  fournie par la force électromotrice induite.

En multipliant l'équation mécanique par la vitesse  $\dot{x}$  de la barre, on obtient un bilan de puissance mécanique

$$m\ddot{x} \dot{x} = F_L \dot{x} = i Bl \dot{x} \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = F_L \dot{x} = i Bl \dot{x} \quad (5)$$

La puissance cinétique de la barre est égale à la puissance des efforts qu'elle subit : on retrouve le théorème de la puissance cinétique.

On constate que

$$ei = -iBl\dot{x} = -F_L\dot{x}$$

La puissance mécanique fournie par la tige pour s'opposer aux forces de Laplace  $\mathcal{P}_{\text{meca}} = -F_L\dot{x}$  est égale à la puissance électrique qu'elle reçoit  $\mathcal{P}_{\text{elec}} = ei$ . Il y a une **conversion électromécanique** avec un rendement de 100%.

*Remarque*

*Ce résultat est en fait général : les phénomènes d'induction sont caractérisés par une conversion électromécanique parfaite.*

En sommant les deux équations (4) et (5) relatives au bilan de puissance électrique et mécanique, on obtient

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) + Ri^2 = F_L \dot{x} + ei = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = -Ri^2 < 0$$

La variation d'énergie cinétique est égale à l'énergie dissipée par effet Joule. L'énergie cinétique de la barre est intégralement dissipée par effet Joule.

### III Champ électromoteur

#### III.1. Force motrice et champ électromoteur

Nous avons vu qu'un circuit  $\mathcal{C}$ , soumis à un phénomène d'induction, était le siège d'un courant électrique *en l'absence de générateur*. Les porteurs de charge sont donc soumis à une force motrice, notée  $\vec{f}_m$  qui permet leur déplacement.

Cette force motrice s'oppose aux frottements que subissent les porteurs de charge de la part du réseau (ces frottements se manifestent par l'effet Joule). Ainsi, l'énergie reçue par les porteurs de charge compense l'énergie dissipée par frottements. On en déduit que le travail reçu par les porteurs de charge de la part de la force motrice  $\vec{f}_m$  le long d'un circuit  $\mathcal{C}$  est non nul, soit

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}_m \cdot d\vec{\ell} \neq 0$$

*Remarque*

*Cette relation est vraie, quel que soit le contour  $\mathcal{C}$ . La force motrice  $\vec{f}_m$  est donc à circulation non conservative.*

Cette force étant d'origine électromagnétique, elle s'identifie à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Mais, au niveau microscopique, la composante magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas car, le long de la trajectoire  $\Gamma$  des porteurs de charge

$$\int_{\Gamma} \vec{f}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + q \underbrace{\int_{\Gamma} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}}_{=0 \text{ car } d\vec{\ell} // \vec{v}} = q \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

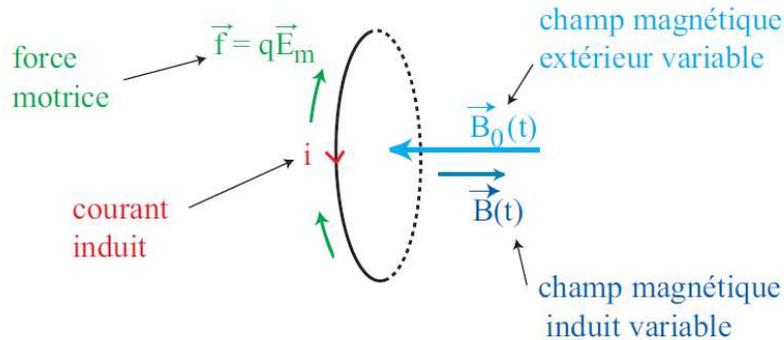


FIGURE 9 – Force motrice mettant en mouvement les électrons.

En particulier, si  $\Gamma = C$  est un contour fermé,

$$\oint_C \vec{f}_m \cdot d\vec{\ell} \neq 0 \Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$$

ce qui prouve que le champ électrique est à circulation non-conservative !

Bien entendu, ce résultat s'applique lorsque le champ électromagnétique est variable ou lorsqu'un conducteur est en mouvement dans un champ électromagnétique, ce qui est le cas lors des phénomènes d'induction.

Remarque

Nous avons établi, dans le cours d'électrostatique, la relation  $\vec{E} = -\text{grad } V$ , qui implique

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \oint_C \text{grad } V \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \forall C$$

En régime variable,  $\vec{E} \neq -\text{grad } V$ . Le champ électrique ne dérive d'un potentiel scalaire qu'en régime statique !

**Définition :**

En régime variable, il existe une composante du champ électrique, appelée champ électromoteur  $\vec{E}_m$ , dont la circulation le long d'un contour fermé est non nulle. On peut donc écrire :

$$\vec{E} = -\text{grad } V + \vec{E}_m$$

avec

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} \neq 0$$

### III.2. Force électromotrice

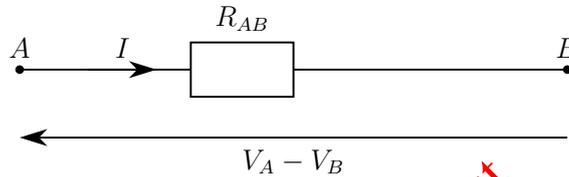
On cherche à faire le lien entre la force électromotrice et le champ électromoteur.

- ★ **En régime statique**  $\vec{E} = -\text{grad} V$ . Intégrons cette relation sur une portion de circuit filiforme, comprise entre les point  $A$  et  $B$ , de résistance  $R_{AB}$  et parcourue par un courant  $I$ .

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B \text{grad} V \cdot d\vec{\ell} = V_A - V_B$$

La différence de potentiel entre les points  $A$  et  $B$  est reliée à la circulation du champ électrique de  $A$  vers  $B$ . Avec  $V_A - V_B = R_{AB} I$ , on trouve

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = R_{AB} I$$



- ★ **En régime variable**  $\vec{E} = -\text{grad} V + \vec{E}_m$ . En extrapolant la relation précédente, on peut écrire :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = R_{AB} I$$

Mais

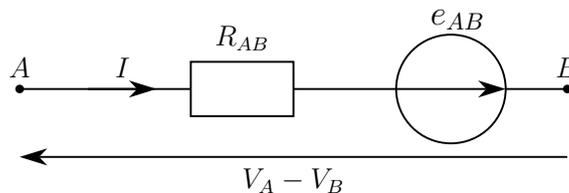
$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B (-\text{grad} V + \vec{E}_m) \cdot d\vec{\ell} = V_A - V_B + \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$$

On en déduit

$$V_A - V_B = R_{AB} I - \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$$

Mais du fait d'un phénomène d'induction, il apparaît une f.e.m.  $e_{AB}$  dans le conducteur. Comparons alors le résultat précédent à l'expression de la tension aux bornes d'un dipôle  $AB$ , caractérisé par une f.e.m.  $e_{AB}$  et une résistance  $R_{AB}$  :

$$V_A - V_B = R_{AB} I - e_{AB}$$



Par identification, on trouve

$$e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$$

**Propriété**

La force électromotrice  $e_{AB}$  générée dans une portion  $AB$  de circuit et orientée de  $A$  vers  $B$ , est égale à la circulation du champ électromoteur de  $A$  à  $B$  :

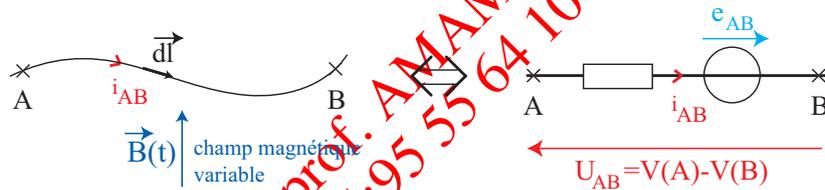
$$e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$$

Si le phénomène d'induction concerne la totalité du circuit fermé  $\mathcal{C}$

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$$

**Remarque**

- ★ La présence d'un champ électromoteur, et donc d'une f.e.m. induite modifie le courant électrique par rapport au cas stationnaire : on retrouve bien que le champ est électromoteur, c'est à dire qu'il met en mouvement les électrons et modifie le courant.
- ★ Un fil se comporte comme une source de Thévenin en présence d'un champ magnétique variable.



prof. AMAMI ipest  
 tel:95 55 64 10

## IV Champ électromoteur de Lorentz

### IV.1. Changement de référentiel pour le champ électromagnétique

Examinons tout d'abord la force de Lorentz s'appliquant sur une charge mobile de charge  $q$  et de vitesse  $\vec{v}$  de la bobine en présence d'un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  :

$$\underbrace{\vec{F}}_{\text{indép du réf}} = \underbrace{q}_{\text{indép du réf}} \left( \underbrace{\vec{E}}_{\text{dép du réf}} + \underbrace{\vec{v}}_{\text{dép du réf}} \wedge \underbrace{\vec{B}}_{\text{dép du réf}} \right)$$

Le champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  dépend donc nécessairement du référentiel.

Considérons 2 référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  correspondant respectivement au référentiel lié aux sources du champ électromagnétique et au référentiel du circuit (mobile) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \mathcal{R}_{\text{sources}} \\ \mathcal{R}' &= \mathcal{R}_{\text{circuit}} \quad (\text{mobile par rapport à } \mathcal{R}) \end{aligned}$$

On se restreindra au cas *non relativiste*, c'est-à-dire pour lequel la vitesse du référentiel mobile est très inférieure à la vitesse de la lumière.

D'après la loi de composition galiléenne des vitesses, la vitesse d'un porteur de charge dans le circuit s'écrit :

$$\vec{v}_{/R} = \vec{v}_{/R'} + \vec{v}_{R'/R}$$

Notons avec des ' toutes les grandeurs dans le référentiel mobile  $R'$ .

L'invariance de la charge et de la force de Lorentz par changement de référentiel<sup>2</sup> permet d'écrire :

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'$$

Et en utilisant la loi de composition des vitesses, on obtient la relation suivante qui doit être vérifiée quelles que soient  $\vec{v}'$  et  $\vec{v}_{R'/R}$  :

$$\vec{E} + \vec{v}' \wedge \vec{B} + \vec{v}_{R'/R} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'$$

Dans le cas particulier où les particules sont immobiles dans le référentiel en mouvement  $\vec{v}' = \vec{0}$  et  $\vec{v}_{R'/R} \neq 0$ , on obtient directement :

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_{R'/R} \wedge \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} \end{cases}$$

Remarque

*La distinction entre champ électrique et champ magnétique dépend en partie du référentiel étudié. Seul le couple  $(\vec{E}, \vec{B})$  a une importance physique. C'est pour cette raison que l'on parle de champ électromagnétique.*

Les transformations des champs obtenues par les lois de composition des vitesses (appelées transformation de Galilée) conduisent à des incohérences. En effet, un circuit fixe traversé par un courant génère un champ magnétique  $\vec{B}' \neq \vec{0}$  (référentiel  $R'$  lié au circuit). Dans le référentiel lié aux charges en mouvement, on n'observe aucun courant donc aucun champ  $\vec{B} = \vec{0}$ . Ce résultat est en contradiction avec la relation  $\vec{B}' = \vec{B}$  des transformations de Galilée.

Ce sont ces incohérences qui ont amené Einstein à développer la théorie de la relativité restreinte en 1905. Afin de conserver des lois invariantes par changement de référentiel galiléen, il faut modifier les formules de changement de référentiel et utiliser la transformation de Lorentz.

Cette approche révolutionna la physique classique puisqu'elle aboutit :

- à la disparition de l'axiome du temps universel ;
- à la remise en cause de la notion de longueur indépendante du référentiel.

### IV.2. Champ électromoteur de Lorentz

Considérons un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  indépendant du temps dans le référentiel lié aux sources qui le génèrent (référentiel  $R$ ).

Notons  $\vec{v}_e$  la vitesse d'entraînement d'un circuit  $C$  par rapport au champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ .

Dans le référentiel mobile  $R'$  lié au circuit, le champ électrique a pour expression

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

2. On rappelle que les forces non-inertielles sont invariantes par changement de référentiel.

La partie supplémentaire du champ électrique est à circulation non conservative puisque  $\vec{v}_e$  est absolument quelconque. Par conséquent, le long du circuit  $\mathcal{C}$  en mouvement :

$$\oint_{\mathcal{C}} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \neq 0$$

Cette composante supplémentaire du champ électrique est susceptible de mettre en mouvement les charges par rapport au circuit  $\mathcal{C}$ , de sorte qu'il apparaît dans le circuit une force électromotrice d'induction.

Ainsi, si un circuit électrique est en mouvement dans un champ magnétique indépendant du temps (induction de Lorentz), le champ électromoteur s'écrit :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} \quad \text{champ électromoteur de Lorentz}$$

### Propriété

Dans le cas de l'induction de Lorentz ( $\vec{B}$  permanent et conducteur mobile), le champ électromoteur, appelé champ électromoteur de Lorentz, vaut

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

où  $\vec{v}_e$  est la vitesse du conducteur.

La force électromotrice générée entre les point  $A$  et  $B$  d'un conducteur mobile vaut

$$e_{AB} = \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

### IV.3. Application : fonctionnement de la roue de Barlow

La Roue de Barlow fut le premier moteur électrique rotatif à courant continu. Elle fut imaginée et mise en œuvre par le mathématicien et physicien anglais Peter Barlow en 1828. Compte tenu de son manque de puissance, son utilité n'est qu'historique (et pédagogique!).

Une roue de Barlow est un disque conducteur dont un rayon est relié à un circuit parcouru par un courant  $i$ , tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  et placé dans un champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B}$  orienté normalement au disque.

Notons  $O$  le centre du disque,  $a$  son rayon et  $J$  son moment d'inertie par rapport à l'axe ( $Oz$ ). On suppose que le courant arrive en  $O$  et qu'il quitte la roue en un point  $A$  situé sur sa circonférence. Le circuit est alimenté par un générateur de tension continue  $U$  et on note  $R$  la résistance totale du circuit.

Le vecteur rotation et le champ magnétique sont portés par le vecteur  $\vec{u}_z$  :  $\vec{B} = B \vec{u}_z$  et  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$  et le champ magnétique est supposé permanent.

On cherche à décrire le mouvement de la roue.

#### a) Approche qualitative

Le circuit est traversée par un courant d'intensité  $i$ . Lorsque le courant arrive en  $O$ , il se disperse dans le circuit avant de se re-concentrer en  $A$ . Chaque ligne de courant, plongée dans un champ magnétique, est le siège d'efforts de Laplace qui vont mettre la roue en mouvement.

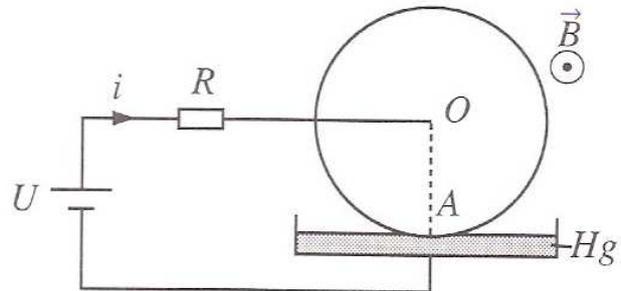


FIGURE 10 –

La roue étant en mouvement dans un champ magnétique permanent, elle est le siège d'un phénomène d'induction de Lorentz. Il apparaît donc dans le circuit une force électromotrice  $e$ .

Cette force électromotrice va modifier l'intensité  $i$  du circuit en fonction de la vitesse de rotation de la roue.

**b) Équation électrique**

Le disque étant en mouvement dans un champ magnétique uniforme, il est le siège d'un phénomène d'induction de Lorentz.

Lorsque le courant arrive en  $O$ , il se disperse dans le circuit avant de se re-concentrer en  $A$ . Considérons une ligne de courant  $C$  quelconque parcourue par une intensité  $di$ .

La force électromotrice induite sur cette ligne de courant est de la forme

$$e_{OA} = \int_C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} \quad (\text{champ électromoteur de Lorentz})$$

où  $\vec{v}_e$  est la vitesse d'entraînement du disque et  $d\vec{\ell}$  un élément de courant de la ligne de courant.

En coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ , on a

$$\begin{aligned} \vec{v}_e &= \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \omega \vec{u}_z \wedge r \vec{u}_r = r\omega \vec{u}_\theta \\ d\vec{\ell} &= dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} e_{OA} &= \int_C (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_C (r\omega B \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z) \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_C r\omega B \vec{u}_r \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_O^A \omega B r dr \end{aligned}$$

$\omega$  et  $B$  étant uniformes, on a

$$e_{OA} = \frac{Ba^2}{2} \omega$$

Remarque

La force électromotrice est indépendante de la ligne de courant choisie. On peut donc calculer son expression en choisissant une ligne de courant confondue avec le segment  $[OA]$ .

On en déduit l'équation électrique

$$Ri = U + e_{OA} = E + \frac{Ba^2}{2} \omega \quad (1)$$

Remarque

L'application de la loi de Faraday  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$  est délicate ici puisque le flux du champ magnétique ne varie pas sur la surface du disque. Il faut utiliser le "flux coupé", c'est-à-dire le flux à travers la surface décrite par une ligne de courant fixe dans le référentiel de la roue.

### c) Équation mécanique

Considérons une ligne de courant  $\mathcal{C}$  quelconque parcourue par une intensité  $di$ . Cette ligne de courant est soumise aux actions de Laplace. Un élément de courant  $di \vec{d\ell}$  de cette ligne de courant est soumis à la force élémentaire

$$d^2 \vec{F} = di \vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$

Le moment par rapport à  $O$  de cette force élémentaire s'écrit

$$d^2 \vec{\Gamma}_O = \vec{OM} \wedge d^2 \vec{F} = \vec{OM} \wedge (di \vec{d\ell} \wedge \vec{B})$$

On en déduit, en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} d^2 \vec{\Gamma}_O &= di B r \vec{u}_r \wedge [(dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z) \wedge \vec{u}_z] \\ &= di B r \vec{u}_r \wedge (-dr \vec{u}_\theta + r d\theta \vec{u}_r) \\ &= -di B r dr \vec{u}_z \end{aligned}$$

Le moment résultant des efforts qui s'exercent sur la ligne de courant  $\mathcal{C}$  est obtenu par intégration sur  $r \in [0, a]$

$$d \vec{\Gamma}_O = \int_{\mathcal{C}} d^2 \vec{\Gamma} = - \int_0^a di B r dr \vec{u}_z$$

soit

$$d \vec{\Gamma}_O = -\frac{Ba^2}{2} di \vec{u}_z$$

Le moment résultant qui s'exerce sur l'ensemble des courants dispersés dans la roue est égal à la somme des moments agissant sur chaque ligne de courant

$$\vec{\Gamma}_O = \int_{\text{courants}} d \vec{\Gamma}_O$$

soit

$$\vec{\Gamma}_O = -\frac{Ba^2}{2} i \vec{u}_z$$

Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, la roue est soumise :

- ★ aux efforts de Laplace de moment résultant  $\vec{\Gamma}_O$  en  $O$  ;
- ★ aux efforts résistants dus aux frottements fluides exercés par l'air  $\vec{\Gamma}_f = -f\vec{\omega}$  ;

L'équation mécanique est obtenue en appliquant, au point fixe  $O$ , le théorème du moment cinétique à la roue dans le référentiel terrestre (supposé galiléen) :

$$J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\Gamma}_f + \vec{\Gamma}_O$$

En projection sur  $\vec{u}_z$ , on obtient

$$J \frac{d\omega}{dt} = -f\omega + \Gamma_0 = -f\omega - \Gamma_r - \frac{Ba^2}{2} i \quad (2)$$

#### d) Bilan de puissance

Multiplions l'équation électrique (1) par  $i$

$$Ri^2 = Ui + ei = Er + \frac{Ba^2}{2} \omega i \quad (3)$$

Cette équation traduit un bilan de puissance électrique : l'énergie électrique fournie par les sources (générateur et f.e.m. induite par le phénomène d'induction) est intégralement transmise à la résistance  $R$ .

Multiplions l'équation mécanique (2) par  $\omega$

$$J \frac{d\omega}{dt} \omega = -f\omega^2 + \Gamma_0 \omega = -f\omega^2 - \Gamma_r \omega - \frac{Ba^2}{2} i \omega$$

soit

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \omega^2 \right) = -f\omega^2 - \frac{Ba^2}{2} i \omega \quad (4)$$

Cette équation traduit un bilan de puissance mécanique : l'énergie cinétique du disque ( $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J \omega^2$ ) varie du fait :

- ★ de la puissance reçue de la part des efforts de Laplace  $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{\omega} = -\frac{Ba^2}{2} i \omega$  ;
- ★ de la puissance dissipée par frottements fluides  $\mathcal{P}_f = \vec{\Gamma}_f \cdot \vec{\omega} = -f\omega^2$  .

On remarque que  $ei = \frac{Ba^2}{2} \omega i = -\Gamma_0 \omega$ . En sommant les équations (3) et (4), on obtient un bilan de puissance global

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \omega^2 \right) = -f\omega^2 - Ri^2 + Ui$$

La variation d'énergie cinétique de la roue résulte :

- ★ de la puissance dissipée par frottements fluides  $\mathcal{P}_f = \vec{\Gamma}_f \cdot \vec{\omega} = -f\omega^2$ ;
- ★ de la puissance absorbée par la résistance  $\mathcal{P}_J = -Ri^2$  et dissipée sous forme de chaleur par effet Joule;
- ★ de la puissance reçue de la part du générateur  $\mathcal{P}_g = Ui$ .

e) Équation du mouvement

Dans les équations électrique (1) et mécanique (2), apparaît la même quantité  $\Phi_0$  telle que

$$e = \Phi_0 \omega \quad \text{et} \quad \Gamma_0 = -\Phi_0 i \quad \text{avec} \quad \Phi_0 = \frac{Ba^2}{2}$$

On note que  $\Phi_0$  est bien homogène à un flux magnétique.

L'équation électrique (1) fournit l'expression de  $i$  en fonction de  $\omega$  :

$$i = \frac{U}{R} + \frac{\Phi_0}{R} \omega$$

En remplaçant cette expression dans l'équation mécanique (2), on obtient

$$J \frac{d\omega}{dt} = -f\omega - \Phi_0 i = -f\omega - \frac{\Phi_0^2}{R} \omega - \frac{\Phi_0}{R} U$$

soit

$$J \frac{d\omega}{dt} + \left( f + \frac{\Phi_0^2}{R} \right) \omega = -\frac{\Phi_0}{R} U$$

On constate que les efforts de Laplace agissent comme un couple de frottement fluide en  $\Phi_0^2/R \omega$  qui se superpose au couple résistant exercé par l'air. On retrouve ainsi la loi de Lenz : les effets de l'induction tendent à s'opposer à leurs causes.

Les solutions sont donc de la forme

$$\omega(t) = K e^{-t/\tau} - \frac{\Phi_0}{R} \frac{U}{f + \frac{\Phi_0^2}{R}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{J}{f + \frac{\Phi_0^2}{R}}$$

où  $K$  est une constante d'intégration.

Si la roue est initialement immobile  $\omega(t=0) = 0$  et l'on a

$$K - \frac{\Phi_0}{R} \frac{U}{f + \frac{\Phi_0^2}{R}} = 0$$

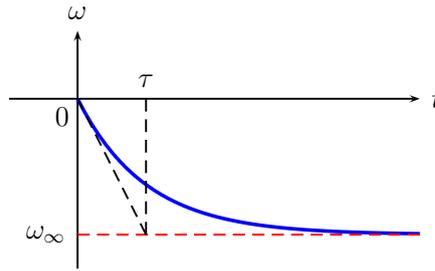
d'où

$$\omega(t) = \omega_\infty (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec} \quad \omega_\infty = -\frac{\Phi_0}{R} \frac{U}{f + \frac{\Phi_0^2}{R}}$$

La roue se met donc en mouvement sur un temps caractéristique  $\tau$ , le vecteur rotation étant de sens opposé au champ magnétique. La vitesse de rotation limite vaut

$$\omega_{\text{lim}} = \omega_\infty = -\frac{\Phi_0}{R} \frac{U}{f + \frac{\Phi_0^2}{R}}$$

Cette vitesse de rotation limite est directement proportionnelle à la f.e.m. du générateur.

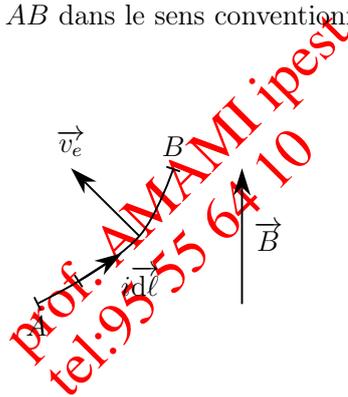


### IV.4. Bilan énergétique et conversion électromécanique

Les exemples précédents semblent montrer que, lorsqu'un circuit est soumis à un phénomène d'induction de Lorentz, la puissance électrique est l'opposé de la puissance des actions de Laplace. Ce résultat est général et nous le démontrons dans la suite.

Considérons un conducteur  $AB$  parcouru par un courant d'intensité  $i$  et se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}_e$  dans un champ magnétique uniforme et permanent. Réalisons un bilan énergétique appliqué au conducteur.

Avant tout, orientons le conducteur  $AB$  dans le sens conventionnel  $i > 0$ .



- ★ Le conducteur est soumis aux efforts de Laplace. Un élément de longueur  $d\vec{\ell}$  du conducteur est en effet soumis à la force élémentaire

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

La puissance mécanique reçue par le conducteur vaut donc

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \int_A^B (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_e$$

- ★ Le conducteur reçoit de l'énergie électrique. En effet, tout se passe comme si le phénomène d'induction était équivalent à un générateur, de force électromotrice

$$e = \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

Le conducteur reçoit donc la puissance électrique

$$\mathcal{P}_{\text{el}} = ei = i \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B (\vec{B} \wedge i d\vec{\ell}) \cdot \vec{v}_e$$

où l'on a utilisé le fait que le produit mixte  $(\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$  prenait la même valeur pour toute permutation circulaire des trois vecteurs  $(\vec{v}_e, \vec{B}, d\vec{\ell})$ .

On a donc

$$\mathcal{P}_{el} = - \int_A^B (i \vec{d\ell} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_e = -\mathcal{P}_{Laplace}$$

Ce résultat est particulièrement important et montre tout l'intérêt de la conversion électromécanique, sur laquelle s'appuie le fonctionnement des moteurs.

- ★ Si  $\mathcal{P}_{Laplace} < 0$ , le travail des forces de Laplace est résistant puisque le conducteur perd de l'énergie à se déplacer. D'après le résultat précédent,  $\mathcal{P}_{el} = -\mathcal{P}_{Laplace} > 0$ . La force électromotrice agit comme un générateur. Le conducteur reçoit de l'énergie électrique. On constate même que l'énergie perdue sous forme mécanique est gagnée sous forme électrique, avec un rendement de 100%.
- ★ Si  $\mathcal{P}_{Laplace} > 0$ , le travail des forces de Laplace est moteur puisque le conducteur gagne de l'énergie au cours de son déplacement. D'après le résultat précédent,  $\mathcal{P}_{el} = -\mathcal{P}_{Laplace} < 0$ . Le conducteur consomme de l'énergie électrique afin de se déplacer à courant constant. On constate même que l'énergie perdue sous forme électrique est entièrement convertie sous forme mécanique, avec un rendement de 100%.

**Propriété**

La conversion électro-mécanique possède un rendement de 100% de sorte que

$$\mathcal{P}_{Laplace} + \mathcal{P}_{el} = 0$$

## V Induction de Neumann

### V.1. Équation locale de Maxwell-Faraday

Plaçons-nous dans le référentiel lié à un circuit  $\mathcal{C}$  fermé dans lequel règne un champ électromagnétique variable  $(\vec{E}, \vec{B})$ . Le circuit étant fixe dans un champ magnétique variable, il est le siège d'un phénomène d'induction de Neumann.

*Remarque*

Dans le référentiel lié au circuit  $\mathcal{C}$ , le champ électromoteur de Lorentz est nul.

Du fait du phénomène d'induction, il apparaît un champ électromoteur  $\vec{E}_m$  dont la circulation n'est pas conservative. En particulier sur le circuit fixe  $\mathcal{C}$  :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} \neq 0$$

L'application de la loi de Lenz-Faraday au circuit fermé et fixe  $\mathcal{C}$  conduit à

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} \\ \Phi = \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} \end{cases}$$

Mais d'après le théorème de Stokes

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \text{rot}(\vec{E}) \cdot \vec{d^2S}$$

tandis que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d^2\vec{S}$$

puisque le contour  $\mathcal{C}$  est fixe. On a noté  $\Sigma(\mathcal{C})$  une surface définie par le contour  $\mathcal{C}$ , la normale étant obtenue à partir de l'orientation de  $\mathcal{C}$  d'après la règle du tire-bouchon.

La loi de Lenz-Faraday devient donc

$$\iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \text{rot}(\vec{E}) \cdot d^2\vec{S} = - \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d^2\vec{S}$$

Cette relation est valable pour tout contour  $\mathcal{C}$  fermé et fixe. En faisant tendre ce contour vers un point, on obtient une relation locale

$$\text{rot}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

### Propriété

L'équation locale  $\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$ , valable en régime statique, est remplacée en régime variable par l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

### Remarque

Si le champ magnétique est indépendant du temps, on a

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

et on retrouve bien

$$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$$

### Remarque

L'équation de Maxwell-Faraday n'est valable qu'en un point fixe du référentiel d'étude. Le champ électromoteur de Lorentz n'intervient donc pas dans cette équation.

## V.2. Champ électromoteur de Neumann

Considérons un champ électromagnétique variable  $(\vec{E}, \vec{B})$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . En un point fixe d'un référentiel  $\mathcal{R}$ , l'équation locale de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\text{rot}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Par définition du potentiel vecteur

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$$

L'équation de Maxwell-Faraday devient donc

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{A})$$

Si le point d'étude est un point fixe, les dérivées spatiales et temporelles commutent et l'on peut écrire

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\text{rot}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \quad \text{soit} \quad \text{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

Le champ de vecteur  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  est irrotationnel. Or tout champ de vecteur irrotationnel est un champ de gradient

$$\text{rot} \vec{C} = \vec{\nabla} \wedge \vec{C} = \vec{0} \iff \exists f \quad \text{telle que} \quad \vec{C} = \vec{\nabla} f = \overrightarrow{\text{grad}} f$$

Il existe donc un champ de scalaire  $V$  tel que

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{soit} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Dans le cas statique  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$  et l'on retrouve la relation

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{en régime statique}$$

$V$  est donc le potentiel scalaire. En régime variable, le terme supplémentaire s'identifie au champ électromoteur.

### Propriété

Dans le cas de l'induction de Neumann ( $\vec{B}$  variable et conducteur fixe), le champ électromoteur, appelé champ électromoteur de Neumann, vaut

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

La force électromotrice générée entre les point  $A$  et  $B$  d'un conducteur mobile vaut

$$e_{AB} = \int_A^B \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\ell}$$

## VI Bilan sur le phénomène d'induction

### VI.1. Champ électromoteur et équation de Maxwell-Faraday

Considérons un conducteur mobile dans un référentiel d'étude et supposons qu'il règne dans ce référentiel un champ magnétique variable. Le circuit est alors le siège d'un phénomène d'induction à la fois de Lorentz et de Neumann. On admet alors que le champ électromoteur est la somme des champs électromoteurs de Lorentz et de Neumann.

**Propriété**

En toute généralité, le champ électromoteur dans un référentiel en mouvement à la vitesse  $\vec{v}_e$  par rapport au référentiel d'étude est

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

Toutefois, il faut noter que l'équation de Maxwell-Faraday a été établie dans le cas où le phénomène d'induction de Lorentz n'était pas pris en compte.

**Propriété**

L'équation de Maxwell-Faraday est valable en un point fixe du référentiel d'étude

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{où} \quad \vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Le champ électromoteur de Lorentz  $\vec{v}_e \wedge \vec{B}$  n'intervient pas dans cette équation ( $\vec{v}_e = \vec{0}$ ).

**VI.2. Loi d'Ohm locale**

Dans un conducteur en mouvement dans un champ magnétique variable, on admet la validité de la loi d'Ohm dans l'A.R.Q.S.

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}_{\text{tot}}$$

où  $\gamma$  est la conductivité du matériau et  $\vec{E}_{\text{tot}}$  est le champ électrique total.  $\vec{E}_{\text{tot}}$  est la somme :

- \* du champ électrique  $-\text{grad} V$  créé par une différence de potentiel;
- \* du champ électromoteur de Neumann  $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  si le champ magnétique est variable;
- \* du champ électromoteur  $\vec{v}_e \wedge \vec{B}$  de Lorentz si le conducteur se déplace à la vitesse  $\vec{v}_e$  dans le champ magnétique  $\vec{B}$ .

On en déduit

$$\vec{j} = \gamma \left( -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B} \right)$$

**Conséquence**

La loi d'Ohm locale dans un circuit soumis à un phénomène d'induction est de la forme

$$\vec{j} = \gamma \left( -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right) \quad \text{pour un conducteur usuel}$$

où  $\gamma$  est la conductivité du matériau

Remarque

Dans un semi-conducteur, l'action de la composante magnétique de la force de Lorentz n'est plus négligeable

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \left( \frac{\vec{j}}{nq} \wedge \vec{B} \right)$$

Il faut alors tenir compte de l'effet Hall dans l'expression de la loi d'Ohm

$$\vec{j} = \gamma \left( -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B} \right)$$

où  $R_H = \frac{1}{nq}$  est la constante de Hall du matériau.

**VI.3. Résoudre un problème d'induction**

Afin de résoudre un problème d'induction, on suivra les étapes suivantes :

1. On oriente le circuit dans un sens conventionnel arbitraire.
2. On calcule la force électromotrice  $e$  générée dans le circuit.
3. On en déduit une équation électrique.
4. Si, de plus, le circuit est mobile :
  - (a) on calcule les efforts de Laplace exercés sur le conducteur ;
  - (b) On en déduit une équation mécanique en utilisant le principe fondamental de la dynamique ou le théorème du moment cinétique ;
  - (c) On vérifie la conversion électromécanique  $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + ei = 0$  ;
  - (d) On résout le système couplé constitué des équations électrique et mécanique.

Le point fondamental est le calcul de la f.e.m. d'induction.

Propriété

Il est équivalent de calculer une force électromotrice d'induction :

★ en appliquant la loi de Lenz-Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

★ en calculant la circulation du champ électromoteur

$$e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_m = \begin{cases} \vec{v}_e \wedge \vec{B} & \text{induction de Lorentz} \\ -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} & \text{induction de Neumann} \end{cases}$$

Remarque

*Dans certains cas, la loi de Faraday est difficilement applicable, notamment lorsque la vitesse d'un circuit est discontinue en certains points de contact (cas de la roue de Barlow par exemple). On utilisera alors à profit l'expression du champ électromoteur.*

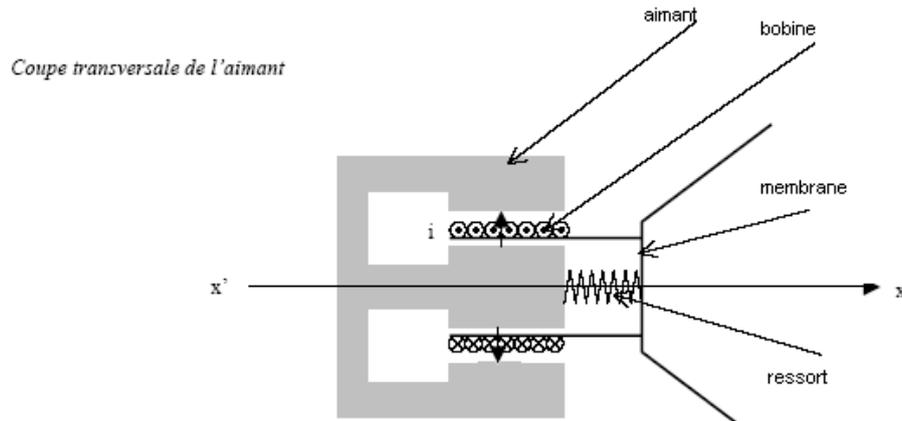
prof. AMAMI ipest  
tel:95 55 64 10

# Application de l'induction

## I Le haut-parleur électrodynamique (induction de Lorentz)

### I.1. Présentation du dispositif

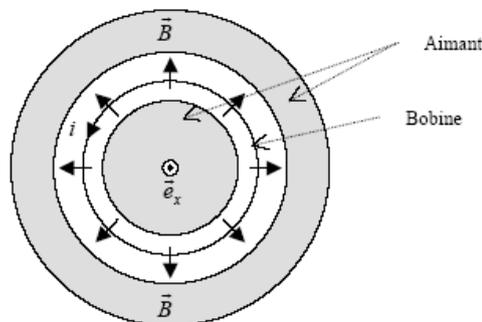
Un haut-parleur électrodynamique est constitué :



- ★ d'un aimant permanent annulaire fixe, d'axe horizontal  $x'x$  qui crée un champ magnétique  $\vec{B}$  radial et de norme constante  $B$  dans la région utile de l'entrefer ;
- ★ d'une bobine mobile indéformable, de même axe  $x'x$ , comportant  $N$  spires circulaires de rayon  $a$ , placée dans l'entrefer de l'aimant.
- ★ d'une membrane solidaire de la bobine et pouvant effectuer des déplacements axiaux de faible amplitude. La membrane est ramenée vers sa position d'équilibre par une force élastique modélisée par un ressort de raideur  $k$ , solidaire de l'aimant à une extrémité et solidaire de la membrane à l'autre extrémité.

De plus, on notera  $R$  la résistance équivalente et  $L$  l'inductance propre de l'ensemble du circuit mobile.

Vue de face de l'aimant



### I.2. Analyse qualitative

La bobine, alimentée par un générateur délivrant la tension  $E(t)$ , est parcourue par un courant  $i(t)$ .

Comme la bobine est plongée dans le champ magnétique créé par l'aimant, elle est soumise aux forces de Laplace qui la mettent en mouvement.

Si  $E(t)$  est variable, le déplacement de l'ensemble {bobine + membrane} est aussi variable. La couche d'air située à proximité de la membrane est donc mise en mouvement par la membrane ce qui donne ainsi naissance à une onde sonore.

Le circuit étant mobile dans un champ magnétique permanent, il est le siège d'un phénomène d'induction de Lorentz. Il apparaît donc au niveau de la partie mobile du circuit une force électromagnétique d'induction  $e(t)$  qui va s'opposer à la cause qui lui a donnée naissance, c'est-à-dire à  $E(t)$ .

Le principe général permet de convertir l'énergie électrique fournie par le générateur en énergie mécanique par les vibrations de l'air. C'est donc un dispositif de **couplage électromécanique**.

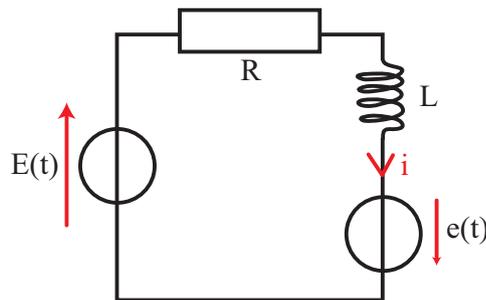
*Remarque :* On notera que le principe est réversible, de sorte qu'une onde sonore générée à l'extérieur du dispositif peut mettre en mouvement la membrane et créer par induction une f.e.m. mesurable dans la bobine. c'est le principe du **microphone électrodynamique**<sup>1</sup>.

### I.3. Équation électrique

Un conducteur mobile se déplaçant dans un champ magnétique permanent est le siège d'un phénomène d'induction de Lorentz. Le champ électromoteur de Lorentz est de la forme  $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse du conducteur.

Orientons conventionnellement le conducteur dans le sens de  $+\vec{u}_\theta$ , (qui est le sens  $i > 0$  sur la figure). La force électromotrice (comptée positivement dans le sens de  $i > 0$ ) qui apparaît dans la bobine vaut alors

$$e = \int_{\text{bobine}} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_{\text{bobine}} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \int_{\text{bobine}} vB \underbrace{(\vec{u}_x \wedge \vec{u}_r)}_{=\vec{u}_\theta} \cdot (d\ell \vec{u}_\theta)$$



Finalement

$$e = vB 2\pi Na = vB\ell$$

La f.e.m. induite se comporte comme une source de tension supplémentaire de sorte que la loi des mailles fournit, avec l'orientation choisie pour  $e$

$$Ri + L \frac{di}{dt} - e = E$$

1. Il existe également d'autres types de microphones, comme les microphones à condensateur, couramment utilisés.

soit

$$\boxed{Ri + L \frac{di}{dt} - Blv = E} \quad (\text{équation électrique}) \quad (1)$$

### I.4. Équation mécanique

L'ensemble mobile {membrane + bobine} de masse  $m$  et repéré par son abscisse  $x(t)$  lorsqu'il est en mouvement, est soumis aux forces suivantes :

- ★ son poids et la réaction du support, verticale et opposée au poids ;
- ★ la force de rappel du ressort de raideur  $k$  ;
- ★ la résultante des forces de Laplace exercées par l'aimant sur la bobine lorsqu'elle est parcourue par un courant d'intensité  $i(t)$  ;
- ★ une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse :  $\vec{F} = -\mu \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$ .

La position  $x = 0$  correspond à la position de repos du système quand  $i = 0$ .

La force de Laplace élémentaire exercée sur un élément de courant  $i d\vec{\ell}$  vaut

$$d\vec{f} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d\vec{\ell} = dl \vec{u}_\theta \\ \vec{B} = B \vec{u}_r \end{cases}$$

On en déduit

$$d\vec{f} = -iBdl \vec{u}_x$$

car  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_x)$  est une base orthonormée directe.

La force totale exercée sur la bobine est obtenues par intégration sur la longueur  $\ell = 2\pi Na$  du conducteur

$$\boxed{\vec{f} = \int_{\text{bobine}} d\vec{f} = -iBl \vec{u}_x}$$

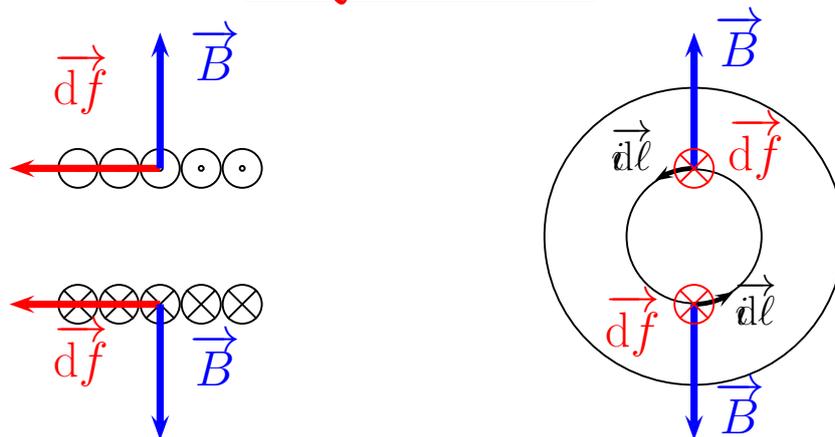


FIGURE 1 – Représentation de la force de Laplace exercée sur un élément de courant en présence d'un champ magnétique radial.

On étudie la bobine dans le référentiel terrestre supposé galiléen. L'application du principe fondamental de la dynamique à la bobine conduit à

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{R} - kx \vec{u}_x - iBl \vec{u}_x - \mu \dot{x} \vec{u}_x$$

En projetant cette relation sur l'axe ( $x'x$ ), on trouve l'équation mécanique

$$m\ddot{x} = -kx - iBl - \mu\dot{x}$$

soit

$$\boxed{m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = -iBl} \quad (\text{équation mécanique}) \quad (2)$$

### I.5. Bilan de puissance

Multiplions l'équation électrique (1) par  $i$  :

$$Ri^2 + L \frac{di}{dt} i = Ei + ei$$

soit

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) = Ei + Bl \dot{x} i - Ri^2 \quad (3)$$

Chacun des termes a une interprétation claire

{	$\mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{1}{2} Li^2$	énergie stockée sous forme magnétique
	$\mathcal{P}_g = Ei$	puissance fournie par le générateur
	$\mathcal{P}_{\text{el}} = ei = Bl \dot{x} i$	puissance électrique reçue grâce au phénomène d'induction
	$\mathcal{P}_J = -Ri^2$	puissance dissipée par effet Joule

Cette équation traduit un bilan de puissance électrique : la puissance électrique fournie au circuit par le générateur ( $Ei$ ) et par le phénomène d'induction ( $ei$ ) est en partie dissipée par effet Joule et en partie stockée dans la bobine

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{magn}}}{dt} = \mathcal{P}_g + \mathcal{P}_{\text{el}} + \mathcal{P}_J$$

Multiplions l'équation mécanique (2) par  $v$  :

$$m\ddot{x}\dot{x} + \mu\dot{x}^2 + kx\dot{x} = f \dot{x}$$

soit

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = -\mu\dot{x}^2 - iBl\dot{x}} \quad (4)$$

Chacun des termes a une interprétation claire

{	$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$	énergie cinétique
	$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} kx^2$	énergie potentielle élastique
	$\mathcal{P}_{\text{frott}} = -\mu\dot{x}^2$	puissance dissipée par frottements mécaniques
	$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = f \dot{x} = -iBl\dot{x}$	puissance des efforts de Laplace

Cette équation traduit un bilan de puissance mécanique : la variation de l'énergie mécanique est égale au travail des efforts non conservatifs : forces de frottements et forces de Laplace. D'après la loi de Lenz, les actions de Laplace s'opposent au mouvement et se comportent comme une force de frottements : c'est

donc bien une force non-conservative ici. L'équation (4) est l'application du théorème de la puissance mécanique.

On remarque que  $ei = Bl \dot{x} i = -f \dot{x}$ . En sommant les équations (3) et (4), on obtient un bilan de puissance global

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) = Ei - \mu \dot{x}^2 - Ri^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{d}{dt} (\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_{\text{magn}}) = \mathcal{P}_g + \mathcal{P}_{\text{frott}} + \mathcal{P}_J} \quad (5)$$

Cette équation indique que la puissance totale stockée par le circuit, sous forme mécanique ou sous forme magnétique, est égale à la puissance reçue de la part du générateur ( $Ei$ ) à laquelle on ôte la puissance dissipée par frottements ( $\mu \dot{x}^2$ ) et par effet Joule ( $Ri^2$ ).

Remarque

Comme dans l'exemple du rail de Laplace, nous remarquons que ni la puissance des forces de Laplace, ni celle de la f.e.m. induite n'interviennent dans le bilan énergétique global. Ceci est dû au fait que ces deux grandeurs se compensent exactement

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + \mathcal{P}_{\text{elec}} = 0$$

Le couplage électromécanique est parfait.

**I.6. Régime sinusoïdal forcé : réponse électrique**

Le signal électrique appliqué au haut-parleur peut s'interpréter comme une superposition de signaux sinusoïdaux. Le système étant régi par des équations différentielles linéaires, l'étude d'une excitation sinusoïdale simple permet de déduire les propriétés globales du système.

Supposons alors que l'alimentation délivre une tension sinusoïdale de la forme :

$$E(t) = E_0 \cos \omega t$$

Utilisons les notations complexes et posons

$$\begin{aligned} \underline{E}(t) &= E_0 e^{j\omega t} \\ \underline{i}(t) &= \underline{I} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{I} = I_0 e^{j\varphi_I} \\ \underline{x}(t) &= \underline{X} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{X} = X_0 e^{j\varphi_X} \end{aligned}$$

On cherche à déterminer  $\underline{i}(t)$  et  $\underline{x}(t)$  pour en déduire  $i(t) = \text{Re} [\underline{i}(t)]$  et  $x(t) = \text{Re} [\underline{x}(t)]$ .

Les grandeurs complexes vérifient les mêmes équations que les grandeurs réelles. Les équations électrique (1) et mécanique (2) pour les grandeurs complexes s'écrivent donc

$$\begin{aligned} E_0 &= (R + jL\omega) \underline{I} - j\omega Bl \underline{X} \\ -m\omega^2 \underline{X} &= -k \underline{X} - j\omega \mu \underline{X} - Bl \underline{I} \end{aligned}$$

On tire de la seconde équation :

$$\underline{X} = -\frac{Bl \underline{I}}{-m\omega^2 + k + j\omega \mu}$$

et en remplaçant dans l'équation électrique, on obtient :

$$E_0 = \underline{I} \left( R + jL\omega + \frac{j\omega B^2 \ell^2}{-m\omega^2 + k + j\omega\mu} \right) = \underline{I} \left( R + jL\omega + \frac{1}{\frac{\mu}{B^2 \ell^2} + j\omega \frac{m}{B^2 \ell^2} + \frac{1}{j\omega} \frac{k}{B^2 \ell^2}} \right)$$

On en déduit la fonction de transfert complexe

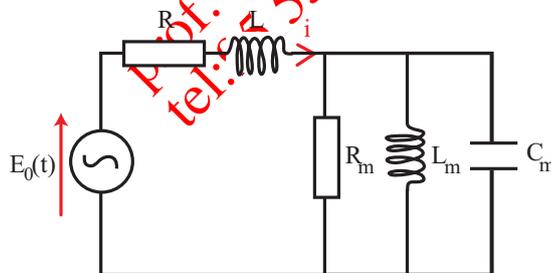
$$\frac{\underline{i}(t)}{\underline{E}(t)} = \frac{\underline{I}}{E_0} = \underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Z}_m$$

où  $\underline{Z}_m$  est de la forme

$$\underline{Z}_m = \frac{1}{\frac{1}{R_m} + jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R_m = \frac{B^2 \ell^2}{\mu} \\ C_m = \frac{m}{B^2 \ell^2} \\ L_m = \frac{B^2 \ell^2}{k} \end{cases}$$

L'impédance  $\underline{Z}_m$  est appelé **impédance motionnelle** du haut-parleur et ne dépend que des grandeurs mécaniques.

Le schéma électrique équivalent au haut-parleur en régime sinusoïdal est représenté ci-dessous



On en déduit

$$\underline{i}(t) = \underline{Z} \underline{E} = |\underline{Z}| e^{j\varphi_z} E_0 e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad \varphi_z = \arg(\underline{Z})$$

On en déduit la relation entre les grandeurs réelles

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_z) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} I_0 = |\underline{Z}| E_0 \\ \varphi_z = \arg(R + jL\omega + \underline{Z}_m) \end{cases}$$

### I.7. Régime sinusoïdal forcé : réponse mécanique

De la relation

$$\underline{X} = -\frac{Bl \underline{I}}{k + j\omega\mu - m\omega^2} = -\frac{\underline{I}}{Bl} \frac{1}{\frac{k}{B^2 \ell^2} + j\omega \frac{\mu}{B^2 \ell^2} - \omega^2 \frac{m}{B^2 \ell^2}}$$

on déduit les réponses en position et en vitesse à l'aide des fonctions de transfert

$$\frac{x(t)}{i(t)} = \frac{X}{I} = -\frac{1}{j\omega} \frac{Z_m}{B\ell}$$

$$\frac{v(t)}{i(t)} = j\omega \frac{X}{I} = \frac{Z_m}{B\ell}$$

En posant

$$Z_m = |Z_m| e^{j\varphi_m} \quad \text{avec} \quad \varphi_m = \arg(Z_m)$$

on obtient les relations entre les grandeurs réelles

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{|Z_m|}{B\ell} \frac{I_0}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi_z + \varphi_m - \frac{\pi}{2}\right) \\ v(t) = -\frac{|Z_m|}{B\ell} I_0 \cos(\omega t + \varphi_z + \varphi_m) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \varphi_m = \arg(Z_m)$$

### I.8. Rendement du haut-parleur

En toute généralité, un rendement est défini par

$$\eta = \frac{\langle \mathcal{P}_{\text{utile}} \rangle}{\langle \mathcal{P}_{\text{fournie}} \rangle}$$

Ici, la puissance utile est celle qui permet de mettre l'air en mouvement, c'est donc la puissance des forces de frottement fluide :

$$\mathcal{P}_{\text{utile}} = \mu v^2$$

La puissance fournie est celle délivrée par le générateur :

$$\mathcal{P}_{\text{fournie}} = Ei$$

Le rendement prend donc la forme :

$$\eta = \frac{\langle \mu v^2 \rangle}{\langle Ei \rangle}$$

Mais d'après l'équation traduisant le bilan de puissance global

$$\langle Ei \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) + Ri^2 + \mu v^2 \right\rangle \tag{6}$$

En régime sinusoïdal permanent, la valeur moyenne d'une dérivée totale est nulle

$$\left\langle \frac{dg}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dg}{dt} dt = g(T) - g(0) = 0$$

On en déduit

$$\langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \mu v^2 \rangle$$

Le rendement est donc de la forme

$$\eta = \frac{\langle \mu v^2 \rangle}{\langle Ei \rangle} = \frac{\langle \mu v^2 \rangle}{\langle Ri^2 \rangle + \langle \mu v^2 \rangle} = \frac{1}{1 + \frac{\langle Ri^2 \rangle}{\langle \mu v^2 \rangle}} < 1$$

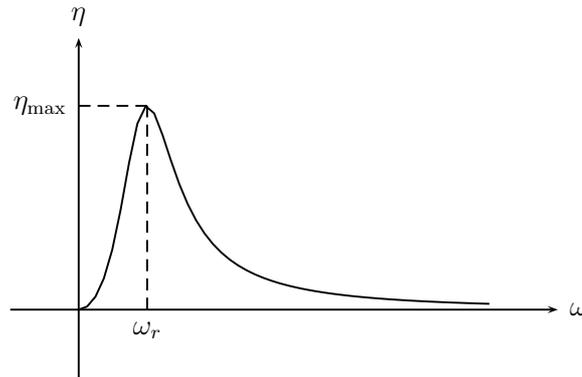


FIGURE 2 – Allure de la courbe  $\eta = \eta(\omega)$ .

Le rendement est bien inférieur à 100%. Avec

$$\langle Ri^2 \rangle = \frac{1}{2} R I_0^2 \quad \text{et} \quad \langle \mu v^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\mu}{B^2 \ell^2} |Z_m|^2 I_0^2 = \frac{1}{2} \frac{|Z_m|^2}{R_m} I_0^2$$

on obtient l'expression du rendement

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{1 + R R_m \frac{1}{|Z_m|^2}} \\ &= \frac{1}{1 + R R_m \left[ \frac{1}{R_m^2} + \left( C_m \omega - \frac{1}{L_m \omega} \right)^2 \right]} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m} + R R_m \left( C_m \omega - \frac{1}{L_m \omega} \right)^2} \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m}} \frac{1}{1 + \frac{R R_m}{R + R_m} R_m \left( C_m \omega - \frac{1}{L_m \omega} \right)^2}$$

Le rendement est maximal pour  $L_m C_m \omega^2 = 1$

$$\eta = \eta_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m}} = \frac{B^2 \ell^2}{\mu R + B^2 \ell^2} \quad \text{pour} \quad \omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

### I.9. Applications numériques

On considère une bobine de longueur totale  $\ell = N 2\pi a = 20$  m, la résistance électrique du circuit valant  $R = 2 \Omega$ .

La masse totale de l'ensemble mobile vaut  $m = 0,12 \text{ kg}$ , la constante de rappel élastique  $k = 43.10^3 \text{ N.m}^{-1}$  et le coefficient de frottement vaut  $\mu = 6 \text{ kg.s}^{-1}$ .

L'aimant crée un champ magnétique  $B = 0,2 \text{ T}$  dans son entrefer.

On en déduit les valeurs numériques suivantes

$$\begin{cases} R_m = \frac{B^2 \ell^2}{\mu} = 2,67 \Omega \\ L_m = \frac{B^2 \ell^2}{k} = 0,372 \text{ mH} \\ C_m = \frac{m}{B^2 \ell^2} = 7,5 \text{ mF} \end{cases} \quad \text{et} \quad \eta_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m}} = 57,1\% \quad \text{pour} \quad f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_m C_m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 95 \text{ Hz}$$

L'impédance motionnelle est du même ordre de grandeur que les impédances du circuit. On constate que le rendement maximal est obtenu pour une très basse fréquence. La fréquence de résonance peut être augmentée en augmentant la constante de raideur  $k$ .

Le comportement du haut-parleur dépend donc de la fréquence. Un tel dispositif ne peut donc transcrire parfaitement un signal électrique. Dans la pratique, on utilise plusieurs haut-parleurs dans des enceintes, chacun étant adapté à la restitution d'une gamme de fréquence (tweeter pour les aigus, boomer pour les basses). On peut jouer avec les caractéristiques physiques ( $k, m, R, \ell$ ) du haut-parleur pour faire varier sa réponse fréquentielle.

## II Inductance propre (induction de Neumann)

### II.1. Expérience

Réalisons le montage de la figure ci-dessous et observons, à l'aide d'un oscilloscope, l'intensité du courant qui traverse la résistance.

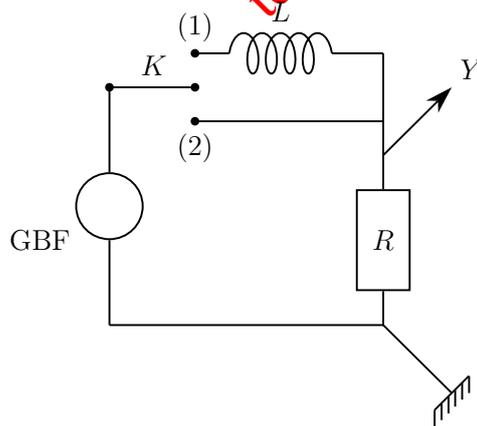


FIGURE 3 –

On note les observations suivantes :

1. Lorsque le GBF impose un échelon de tension :
  - ★ si l'interrupteur est en position (2), l'intensité du courant évolue rapidement vers une valeur constante ;

# Equations de Maxwell

L'étude de l'électromagnétisme statique et des phénomènes d'induction nous ont permis d'établir des équations locales pour le champ électromagnétique.

Ces équations, proposées par James Clerk Maxwell dans une série de publications s'étalant de 1856 à 1864, constituent l'expression même des lois fondamentales de l'électromagnétisme classique, permettant de décrire la structure du champ électromagnétique.

Grâce à cette théorie, Maxwell expose la possibilité de transmettre des signaux par ondes radio, prédiction confirmée par Hertz en 1888. Cette théorie permet également de décrire la propagation des ondes électromagnétiques.

Nous étudions dans ce chapitre la validité de ces équations, qui s'apparentent aux équations du mouvement pour le champ électromagnétique. Nous développerons également l'aspect énergétique associé au champ électromagnétique.

## I Équations de Maxwell dans le vide

### I.1. Équation de conservation de la charge et équations de Maxwell

#### a) Compatibilité des équations locales

Il existe un lien très fort entre les charges et les courants d'une part et les champs électrique et magnétique d'autre part. En effet, les charges et les courants peuvent tout aussi bien générer un champ électromagnétique que subir les effets d'un champ électromagnétique.

Nous avons déjà établi l'équation de conservation de la charge qui relie les densités volumiques de charges et de courants

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0 \quad (1)$$

Par ailleurs, nous avons obtenu les équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS, au cours des chapitres précédents :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad (4)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \quad (5)$$

Les équations de Maxwell relient les variations des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  aux sources qui, à la fois, les créent et subissent leurs actions.

Toutefois les équations de Maxwell sont incompatibles avec l'équation de conservation de la charge. En effet, prenons la divergence de l'équation (5) :

$$\operatorname{div}[\operatorname{rot}(\vec{B})] = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = 0 = \mu_0 \operatorname{div}(\vec{j})$$

On en déduit

$$\text{div}(\vec{j}) = 0 \quad \text{INCOMPATIBLE AVEC} \quad \text{div}(\vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

On aboutit à une contradiction puisque  $\rho$  peut très bien dépendre du temps dans le cas général. Il faut donc modifier l'équation de Maxwell-Ampère en régime variable.

Pour ce faire, introduisons dans l'équation (5) une grandeur  $\vec{j}_D$ , assimilable à une densité volumique de courant supplémentaire et sorte que :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) \quad \text{avec} \quad \text{div}(\vec{j} + \vec{j}_D) = 0$$

On doit donc avoir, d'après l'équation de conservation de la charge

$$\text{div}(\vec{j} + \vec{j}_D) = \text{div}(\vec{j}) + \text{div}(\vec{j}_D) = 0 \Rightarrow \text{div}(\vec{j}_D) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En utilisant l'équation  $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , on a

$$\rho = \epsilon_0 \text{div}(\vec{E}) = \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div}(\vec{j}_D) = \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \text{div} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

où l'on a permuté les dérivées temporelles et spatiales, puisque le point d'étude est fixe.

On peut donc choisir

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\vec{j}_D$  est équivalent à une densité volumique de courant. Ces courants équivalents sont appelés courants de déplacement.

b) Équations de Maxwell

Équations de Maxwell

Les équations du mouvement du champ électromagnétique sont appelées équations de Maxwell. Elles s'écrivent

(Maxwell-Gauss)  $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

(Maxwell-Faraday)  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(Maxwell-flux)  $\text{div}(\vec{B}) = 0$

(Maxwell-Ampère)  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

où

- $\rho = \rho(M, t)$  est la densité volumique de charge ;
- $\vec{j} = \vec{j}(M, t)$  est la densité volumique de courant de conduction ;
- $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est la densité volumique de courant de déplacement ;

Remarque

Ces équations sont à compléter par l'équation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0$$

Ces équations sont toujours valables. Toutefois, les densités volumiques de charges et de courants sont parfois difficiles à exprimer. En effet, le champ électromagnétique peut induire dans la matière des dipôles électriques et magnétiques microscopiques, qui, à leur tour, créent un champ électromagnétique. On distingue alors d'une part les véritables densités de charges et de courants  $\rho_{\text{libres}}$  et  $\vec{j}_{\text{libres}}$  et, d'autre part, les densités de charges et de courants induites  $\rho_{\text{pol}}$  et  $\vec{j}_{\text{aimant}}$  :

$$\rho = \rho_{\text{libres}} + \rho_{\text{pol}} \quad \text{et} \quad \vec{j} = \vec{j}_{\text{libres}} + \vec{j}_{\text{aimant}}$$

Propriété

Dans la matière, les densités volumiques de charges et de courants sont de la forme

$$\rho = \rho_{\text{libres}} + \rho_{\text{pol}} \quad \text{et} \quad \vec{j} = \vec{j}_{\text{libres}} + \vec{j}_{\text{aimant}}$$

où

- ★  $\rho_{\text{libres}}$  est la densité volumique de charges libres ;
- ★  $\rho_{\text{pol}}$  est la densité volumique de charges équivalente à la polarisation induite (dipôles électriques induits) ;
- ★  $\vec{j}_{\text{libres}}$  est la densité volumique de courants libres ;
- ★  $\vec{j}_{\text{aimant}}$  est la densité volumique de courants équivalente à l'aimantation induite (dipôles magnétiques induits).

I.2. Formulation intégrale des équations de Maxwella) Équation de Maxwell-Gauss

Considérons une surface fermée  $\Sigma$  délimitant un volume  $V(\Sigma)$  et notons  $\vec{d}^2S$  un élément de surface orienté suivant la normale sortante. Calculons le flux du champ électrique sortant de la surface  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{d}^2S &= \iiint_{V(\Sigma)} \operatorname{div}(\vec{E}) \, d^3V \quad (\text{théorème de Green-Ostrogradsky}) \\ &= \iiint_{V(\Sigma)} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, d^3V \quad (\text{équation de Maxwell-Gauss}) \\ &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

où  $Q_{\text{int}}$  est la charge contenue dans  $\Sigma$  :

$$Q_{\text{int}} = \iiint \rho \, d^3V$$

On retrouve le théorème de Gauss.

**Théorème de Gauss**

Le théorème de Gauss peut s'écrire

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{forme locale})$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{d}^2S = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad (\text{forme intégrale})$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\rho(M, t)$  est la densité volumique de charges,  $\Sigma$  est une surface fermée dont la normale est sortante et  $Q_{\text{int}}$  est la charge électrique contenue dans  $\Sigma$ .

**Remarque**

Le théorème de Gauss, valable en électrostatique, reste valable en régime dépendant du temps.

**b) Équation de Maxwell-Faraday**

Soit un contour  $\mathcal{C}$  fermé et fixe et notons  $\Sigma(\mathcal{C})$  une surface (fixe) s'appuyant sur le contour  $\mathcal{C}$  et dont la normale est orientée, à partir de l'orientation de  $\mathcal{C}$ , suivant la règle du tire-bouchon. Calculons la circulation sur  $\mathcal{C}$  du champ électrique  $\vec{E}$  :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{d}\ell &= \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) \cdot \vec{d}^2S \quad (\text{théorème de Stokes}) \\ &= \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{d}^2S \quad (\text{équation de Maxwell-Faraday}) \\ &= -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot \vec{d}^2S \quad (\Sigma \text{ fixe}) \\ &= -\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

où  $\Phi$  est le flux du champ magnétique à travers le contour fermé et orienté  $\mathcal{C}$ . Par ailleurs,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{d}\ell = e$$

est la force électromotrice induite le long du contour  $\mathcal{C}$ .

Finalement, on retrouve la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

**Loi de Faraday**

La loi de Faraday prend les formes suivantes :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{forme locale})$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{forme intégrale})$$

où  $e$  est la f.e.m. généré par un contour fermé  $\mathcal{C}$  et  $\Phi$  est le flux du champ magnétique à travers  $\mathcal{C}$ .

c) Équation de Maxwell-flux

Considérons une surface fermée  $\Sigma$  délimitant un volume  $V(\Sigma)$  et notons  $\vec{d^2S}$  un élément de surface orienté suivant la normale sortante. Calculons le flux du champ magnétique sortant de la surface  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} &= \iiint_{V(\Sigma)} \text{div}(\vec{B}) d^3V \quad (\text{théorème de Green-Ostrogradsky}) \\ &= 0 \quad (\text{équation de Maxwell-flux}) \end{aligned}$$

On retrouve la conservation du flux magnétique.

Conservation du flux magnétique

La conservation du flux magnétique est traduite par les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{B}) &= 0 \quad (\text{forme locale}) \\ \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} &= 0 \quad (\text{forme intégrale}) \end{aligned}$$

où  $\Sigma$  est une surface fermée.

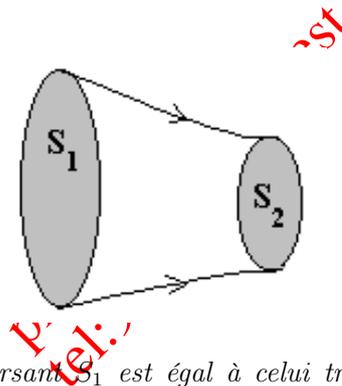


FIGURE 1 – Le flux magnétique traversant  $S_1$  est égal à celui traversant  $S_2$  si les deux surfaces sont orientées dans le même sens.

Remarque

La conservation du flux magnétique, établi en magnétostatique, reste valable en régime dépendant du temps.

d) Équation de Maxwell-Ampère

Soit un contour  $\mathcal{C}$  fermé et fixe et notons  $\Sigma(\mathcal{C})$  une surface (fixe) s'appuyant sur le contour  $\mathcal{C}$  et dont la normale est orientée, à partir de l'orientation de  $\mathcal{C}$ , suivant la règle du tire-bouchon. Calculons la circulation sur  $\mathcal{C}$  du champ électrique  $\vec{B}$  :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \text{rot}(\vec{B}) \cdot \vec{d^2S} \quad (\text{théorème de Stokes}) \\ &= \mu_0 \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \vec{j} \cdot \vec{d^2S} + \mu_0 \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \vec{j}_D \cdot \vec{d^2S} \quad (\text{équation de Maxwell-Ampère}) \\ &= \mu_0 I_{\text{enlacée}} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{d^2S} \end{aligned}$$

On retrouve l'équivalent du théorème d'Ampère, généralisé à un régime variable.

### Théorème d'Ampère généralisé

Le théorème d'Ampère généralisé prend les formes suivantes :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{forme locale})$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacée}} + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d^2\vec{S} \quad (\text{forme intégrale})$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\mu_0$  est la perméabilité du vide,  $\vec{j} = \vec{j}(M, t)$  est la densité volumique de courant,  $\mathcal{C}$  est un contour fermé enlaçant l'intensité  $I_{\text{enlacée}}$  et où  $\Sigma(\mathcal{C})$  est une surface s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ .

### Remarque

Par rapport au théorème d'Ampère appliqué en magnétostatique, il apparaît un terme supplémentaire dû aux courants de déplacement.

## II Potentiel électromagnétique

### II.1. Existence des potentiels

À partir des équations de Maxwell dans le vide, il est possible d'établir un lien entre, d'une part, les champs électrique et magnétique, et d'autre part le potentiel électrique et le potentiel vecteur.

L'équation de Maxwell-flux

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

conduit naturellement à l'existence d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  tel que

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}}(\vec{A}) \quad \vec{A} \text{ potentiel vecteur}$$

En effet, on rappelle que  $\text{div}[\vec{\text{rot}}(\vec{C})] = \vec{\nabla} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{V}}_{\perp \vec{\nabla}}) = 0 \quad \forall \vec{C}$ .

De l'équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

on déduit

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}}(\vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}}(\vec{A}) \\ &= -\vec{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) + \vec{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{\text{rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

Le vecteur  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  dérive donc d'un potentiel scalaire  $V$  de sorte que

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \quad \text{soit} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

En effet, on rappelle que  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}f) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}f) = \vec{0} \quad \forall f$ .

**Propriété**

En régime variable, les potentiels scalaire  $V$  et vecteur  $\vec{A}$  sont définis par

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Remarque

On retrouve le champ électromoteur de Neumann lorsque le champ magnétique est variable

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{champ électromoteur de Neumann}$$

**II.2. Notion de jauge**

Les potentiels  $V$  et  $\vec{A}$  ne sont pas uniques. Les seules grandeurs physiques sont les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dont l'action sur la matière peut être étudiée directement.

Supposons que  $V$  et  $\vec{A}$  soient des potentiels vérifiant

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Dans ces conditions, le vecteur

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\Psi$$

où  $\Psi$  est une fonction dérivable quelconque, est aussi un potentiel vecteur. En effet

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}') = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) + \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\Psi)}_{=\vec{0}} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{B}$$

Afin que le champ électrique reste le même, le potentiel scalaire  $V$  doit être transformé en

$$V' = V - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

de sorte que

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V') - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{grad}}\Psi) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Propriété

Il existe une infinité de couples de potentiels  $(V, \vec{A})$  déduits les uns des autres par une transformation, appelée transformation de jauge :

$$(V, \vec{A}) \xrightarrow{\Psi} (V', \vec{A}')$$

avec

$$\begin{aligned} V' &= V - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \text{grad} \Psi \end{aligned}$$

où  $\Psi$  est une fonction dérivable quelconque.

Remarque

Afin de fixer de manière unique les potentiels, on impose généralement un jauge. La jauge généralement choisie est la jauge de Lorentz pour laquelle

$$\text{div}(\vec{A}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

En régime stationnaire, on retrouve la jauge de Coulomb

$$\text{div}(\vec{A}) = 0$$

III Distributions surfaciquesIII.1. Modélisation surfacique

Les équations des Maxwell font intervenir des distributions volumiques de charges et de courants. Lorsque l'épaisseur de ces distributions est très faible, on peut les assimiler à des distributions surfaciques. Dans ce cas, on définit des densités surfaciques de charges et de courants

$$\begin{aligned} \sigma &= \lim_{e \rightarrow 0} \rho e && \text{densité surfacique de charges} \\ \vec{j}_s &= \lim_{e \rightarrow 0} \vec{j} e && \text{densité surfacique de courants} \end{aligned}$$

où  $e$  est l'épaisseur de la distribution.

Les densités surfaciques de charges et de courants étant finie et non nulle, on en déduit que, dans une modélisation surfacique, les densités volumiques divergent

$$\rho \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \|\vec{j}\| \rightarrow \infty \quad \text{pour} \quad e \rightarrow 0$$

Propriété

Les équations de Maxwell ne sont pas valables sur une surface chargée ou sur une nappe de courant.

Remarque

Afin de déterminer les champs et potentiel au voisinage de la surface, on utilise les relations de passage qui traduisent leurs continuités et leurs discontinuités.

**III.2. Relations de passage pour  $\vec{E}$  et  $V$** 

Considérons une surface chargée de densité surfacique de charges  $\sigma$ . Cette surface sépare deux milieux, notés 1 et 2 et possède une normale portée par le vecteur unitaire  $\vec{n}_{12}$ , orienté de 1 vers 2.

Nous admettons les relations de passage pour le champ électrique à la traversée de la surface chargée.

**Relations de passage pour le champ électrique**

À la traversée d'une surface chargée

★ La composante tangentielle du champ électrique est continue

$$\vec{E}_{2T}(P, t) = \vec{E}_{1T}(P, t)$$

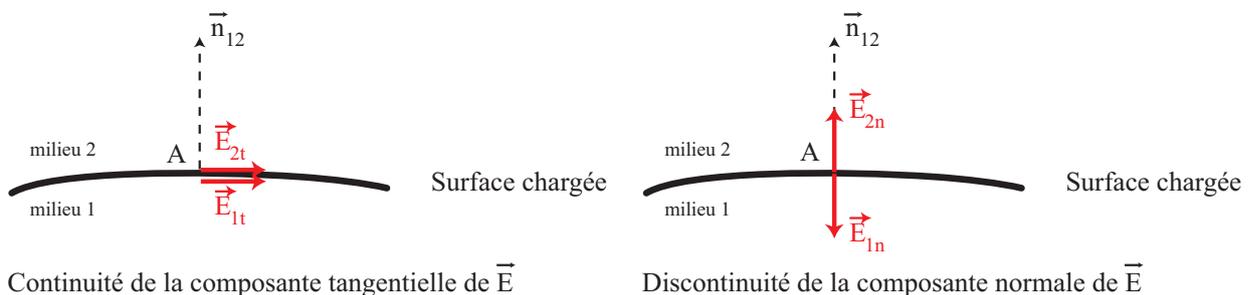
★ La composante normale du champ électrique est discontinue

$$\vec{E}_{2N}(P, t) - \vec{E}_{1N}(P, t) = \frac{\sigma(P, t)}{\epsilon_0}$$

Ces relations sont résumées par la relation vectorielle

$$\vec{E}_2(P, t) - \vec{E}_1(P, t) = \frac{\sigma(P, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}(P, t)$$

où  $P$  est un point de la surface chargée.

Remarque

Sur une surface chargée, les relations de passage se substituent aux équations de Maxwell dont elles découlent.

Propriété

Le potentiel scalaire  $V$  est continu à la traversée d'une surface chargée

$$V_2(P, t) = V_1(P, t)$$

### III.3. Relations de passage pour $\vec{B}$ et $\vec{A}$

Considérons une nappe de courant de densité surfacique de courants  $\vec{j}_s$ . Cette surface sépare deux milieux, notés 1 et 2 et possède une normale portée par le vecteur unitaire  $\vec{n}_{12}$ , orienté de 1 vers 2.

Nous admettons les relations de passage pour le champ magnétique à la traversée de la nappe de courant.

Relations de passage pour le champ magnétique

À la traversée d'une nappe de courant

- \* La composante normale du champ magnétique est continue

$$\vec{B}_{2N}(P, t) = \vec{B}_{1N}(P, t)$$

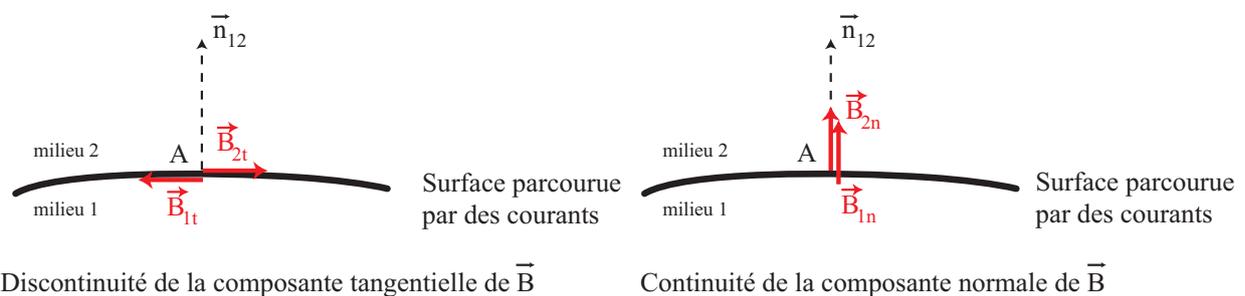
- \* La composante tangentielle du champ magnétique est discontinue

$$\vec{B}_{2T}(P, t) - \vec{B}_{1T}(P, t) = \mu_0 \vec{j}_s(P, t) \wedge \vec{n}_{12}(P, t)$$

Ces relations sont résumées par la relation vectorielle

$$\vec{B}_2(P, t) - \vec{B}_1(P, t) = \mu_0 \vec{j}_s(P, t) \wedge \vec{n}_{12}(P, t)$$

où  $P$  est un point de la surface chargée.

Remarque

Sur une nappe de courant, les relations de passage se substituent aux équations de Maxwell dont elles découlent.

Propriété

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est continu à la traversée d'une nappe de courant

$$\vec{A}_2(P, t) = \vec{A}_1(P, t)$$

## IV Description énergétique du champ électromagnétique

### IV.1. Puissance reçue par des porteurs de charge

Considérons une charge  $q$  en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$  dans un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ . Cette charge est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

La puissance reçue par cette charge ponctuelle vaut

$$\mathcal{P}_{\text{Lorentz}} = \vec{F}_{\text{Lorentz}} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v} + q \underbrace{(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}}_0 = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Considérons désormais un conducteur de volume  $d\tau$  de densité volumique de charge mobile  $\rho$ . La charge mobile contenue dans ce volume vaut

$$dq = \rho d\tau$$

La puissance reçue par ce volume chargé vaut donc

$$\mathcal{P}_{\text{Lorentz}} = dq \vec{E} \cdot \vec{v}$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse des porteurs de charge. On en déduit

$$\mathcal{P}_{\text{Lorentz}} = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} d\tau = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

où  $\vec{j}$  est la densité volumique de courant.

Propriété

La puissance volumique reçue par un conducteur fixe dans un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  vaut

$$\frac{d\mathcal{P}_{\text{Lorentz}}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

La puissance totale reçue par un volume  $\mathcal{V}$  de conducteur vaut

$$\mathcal{P}_{\text{Lorentz}} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d^3V$$

Remarque

Cette puissance est fournie par le champ électromagnétique au conducteur. La puissance volumique  $\mathcal{P}_{\text{vol}}$  est donc perdue par le champ électromagnétique.

Remarque

On retrouve le fait que le champ magnétique ne communique pas d'énergie aux porteurs de charge : la composante magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas.

**IV.2. Densité volumique d'énergie**

Dans les chapitres précédents, nous avons établi les expressions des densités volumiques d'énergie électrique  $u_e$  et magnétique  $u_m$  :

$$u_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad \text{et} \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Ces expressions sont valables, même en régime dépendant du temps, dans tout milieu de permittivité  $\varepsilon_0$  et de perméabilité  $\mu_0$ .

La densité volumique d'énergie électromagnétique est alors la somme des contributions électriques et magnétiques

$$u_{em} = u_e + u_m = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

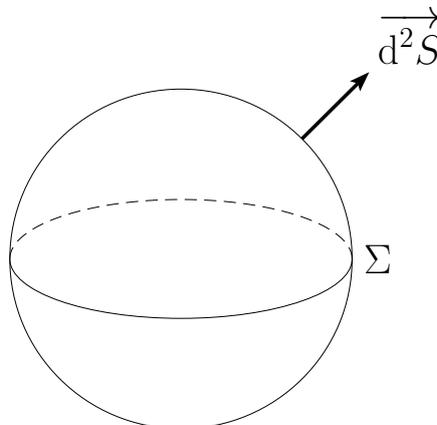
Propriété

La densité volumique d'énergie électromagnétique dans le vide vaut

$$u_{em} = u_e + u_m = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

**IV.3. Vecteur de Poynting**

Considérons une surface fermée et fixe  $\Sigma$  délimitant un volume  $V(\Sigma)$ .



L'énergie électromagnétique totale  $U_{em}$  contenue dans  $V(\Sigma)$  vaut

$$U_{em} = \iiint_{V(\Sigma)} u_{em} d\tau$$

où  $u_{em}$  est la densité volumique d'énergie électromagnétique.

Déterminons la variation de l'énergie  $U_{em}$  par rapport au temps

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V(\Sigma)} u_{em} d\tau = \iiint_{V(\Sigma)} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} d\tau$$

où l'on a permuté la dérivée temporelle et l'intégrale car le volume  $V(\Sigma)$  est fixe.

En utilisant l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique  $u_{em}$ , on obtient

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

et d'après les équations de Maxwell

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{j} + \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\vec{B}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot}(\vec{E})$$

on a finalement

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} [\vec{E} \cdot \text{rot}(\vec{B}) - \vec{B} \cdot \text{rot}(\vec{E})]$$

Cette expression peut être transformée à l'aide d'une formule d'analyse vectorielle

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot}(\vec{E}) - \vec{E} \cdot \text{rot}(\vec{B})$$

On en déduit

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \text{div}(\vec{\Pi}) \quad \text{avec} \quad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Le vecteur  $\vec{\Pi}$  est appelé vecteur de Poynting.

### Définition :

On définit le vecteur de Poynting par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

### IV.4. Bilan énergétique pour le champ électromagnétique

Reprenons le bilan énergétique sur le volume  $V(\Sigma)$  en utilisant le vecteur de Poynting :

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \iiint_{V(\Sigma)} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} d\tau = - \iiint_{V(\Sigma)} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau - \iiint_{V(\Sigma)} \text{div}(\vec{\Pi}) d\tau \tag{6}$$

Cette relation est valable pour tout volume  $V(\Sigma)$ . En particulier, en faisant tendre la surface  $V(\Sigma)$  vers un point, cette relation est valable localement et l'on obtient

$$\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = -\vec{j} \cdot \vec{E}}$$

Afin d'interpréter les différents termes de cette équation, revenons à l'équation (6). On reconnaît dans le premier terme du membre de droite l'opposé de la puissance reçue par les porteurs de charge

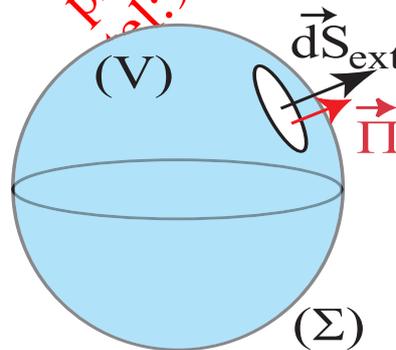
$$\mathcal{P}_{Lorentz} = \iiint_{V(\Sigma)} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

Le signe  $-$  provient du fait que cette énergie est cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.

Le second terme n'a pas d'interprétation claire sous la forme d'une intégrale de volume. Cependant, le théorème de Green-Ostrogradsky permet de l'exprimer sous la forme d'une intégrale de surface

$$\iiint_{V(\Sigma)} \text{div}(\vec{\Pi}) d\tau = \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d^2\vec{S}$$

Ce terme, homogène à une puissance, s'interprète comme le flux de  $\vec{\Pi}$  à travers la surface  $\Sigma$  : c'est la puissance rayonnée à travers  $\Sigma$  par le champ magnétique.



On en déduit le bilan de puissance suivant, pour un volume quelconque

$$\frac{dU_{em}}{dt} = -\mathcal{P}_{Lorentz} - \mathcal{P}_{ray}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{Lorentz} &= \iiint_{V(\Sigma)} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \quad \text{puissance reçue par les porteurs de charges} \\ \mathcal{P}_{ray} &= \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d^2\vec{S} \quad \text{puissance rayonnée à travers } \Sigma \end{aligned}$$

Propriété

La puissance rayonnée par un champ électromagnétique à travers une surface  $\Sigma$  est égale au flux du vecteur de Poynting à travers  $\Sigma$  :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d^2\vec{S}$$

$\|\vec{\Pi}\|$  est une densité de flux d'énergie et s'exprime en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ .

Propriété

La variation d'énergie électromagnétique dans un volume donné est due :

- ★ à la puissance cédée à la matière ;
- ★ à la puissance rayonnée vers l'extérieur.

Le bilan de puissance électromagnétique est décrit par l'équation de Poynting :

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (\text{forme locale})$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(\Sigma)} u_{\text{em}} d\tau + \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d^2\vec{S} = - \iiint_{V(\Sigma)} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \quad (\text{forme intégrale})$$

où  $\Sigma$  est une surface fermée.

Remarque

On note l'analogie entre les équations de conservation de la charge et l'équation traduisant le bilan de puissance pour le champ électromagnétique. L'équation

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$$

traduit la conservation de la charge : la variation temporelle de la charge ne peut être due qu'à un flux de porteurs de charge.

L'équation

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = 0 \quad (\text{en l'absence de porteurs de charge})$$

traduit la conservation de l'énergie : en l'absence de porteurs de charge, la variation temporelle de l'énergie électromagnétique ne peut être due qu'à un flux d'énergie.

Le terme en  $-\vec{j} \cdot \vec{E}$  correspond à un terme de source (ou de dissipation) qui ne peut pas apparaître dans l'équation de conservation de la charge. L'énergie électromagnétique peut être convertie en une autre forme d'énergie alors que la charge ne peut être ni créée, ni absorbée.

# cable coaxial I

## I. Equation d'ondes

### 1) Description d'un câble coaxial

#### Paramètres de la ligne :

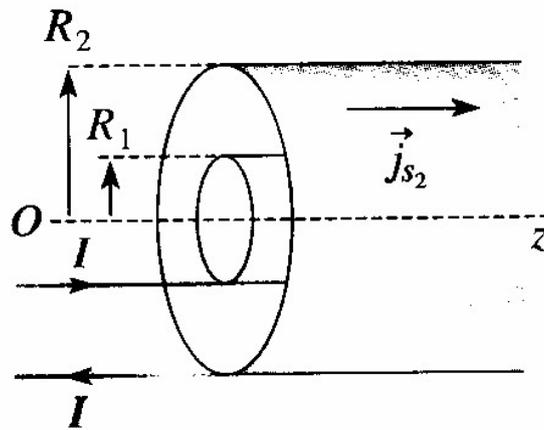
Pour une longueur de ligne élémentaire  $dx$ , on suppose que

- L'inductance élémentaire est  $dL = \Lambda dx$  avec  $\Lambda$  l'inductance linéique (en  $H.m^{-1}$ )

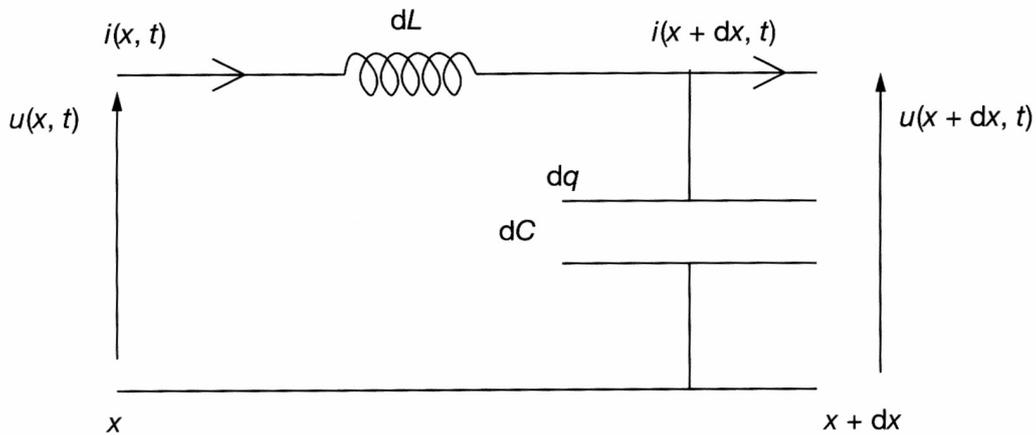
- La capacité élémentaire est  $dC = \Gamma dx$  avec  $\Gamma$  la capacité linéique (en  $F.m^{-1}$ )

#### Rappels :

On a précédemment établi que :  $\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$  et  $\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(R_2/R_1)$



#### Schéma équivalent :



#### Variables du problème :

Recherche des grandeurs électriques :  $u(x, t)$  et  $i(x, t)$

## 2) Equations couplées

La D.D.P. aux bornes de l'inductance  $dL = \Lambda dx$  donne :

$$u(x+dx) - u(x) = -\Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}$$

Or on sait que en développant à l'ordre 1 en  $dx$  :  $u(x+dx) - u(x) = \frac{\partial u}{\partial x} dx$

En simplifiant, on obtient une première équation :  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$  (1)

La loi des nœuds appliquée au condensateur élémentaire  $dC = \Gamma dx$  donne :

$$i(x) - i(x+dx) = i' = \frac{\partial(dq)}{\partial t}$$

Or on sait que :  $dq = dC.u = \Gamma dx u$

D'où en développant à l'ordre 1 et en reportant la relation précédente :

$$i(x) - i(x+dx) = -\frac{\partial(i)}{\partial x} dx = i' = \frac{\partial(dq)}{\partial t} = \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}$$

En simplifiant, on obtient une seconde équation couplant  $u$  et  $i$  :  $\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$  (2)

**Conclusion :** les grandeurs électriques  $u(x,t)$  et  $i(x,t)$  vérifient le système d'équations couplées :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

## 3. Equation de propagation

### Découplage des variables :

#### Equation en tension :

On effectue les manipulations suivantes :

$$\text{L'opération } \frac{\partial}{\partial x} (1) \text{ donne : } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \quad (1')$$

$$\text{L'opération } \frac{\partial}{\partial t} (2) \text{ donne : } \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2')$$

En injectant (2') dans (1') on obtient :  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

#### Equation en intensité :

On effectue les manipulations suivantes :

$$\text{L'opération } \frac{\partial}{\partial t} (1) \text{ donne : } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (1')$$

$$\text{L'opération } \frac{\partial}{\partial x} (2) \text{ donne : } \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \quad (2')$$

En injectant (1') dans (2') on obtient :  $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$

## Conclusion : obtention d’une équation de propagation (appelée aussi équation d’onde ou encore équation de D’Alembert)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \text{ avec } \Psi(x,t) = u(x,t) \text{ ou } \Psi(x,t) = i(x,t) \text{ et } \Lambda\Gamma = \frac{1}{c^2}$$

**Rappels :** on a précédemment établi que :  $\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}$  et  $\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$

Par conséquent,  $\Lambda\Gamma = \epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$  où c s’identifie dans ce précis à la célérité ou vitesse de la lumière !!!

**Remarque :**  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$  est une équation linéaire. Par conséquent, cette équation satisfait au principe de superpositions des solutions.

## II. Solution de l’équation de propagation à 1D

### 1. Solution de l’équation de propagation en ondes progressives

On rappelle l’équation de D’Alembert appelée aussi équation d’onde ou équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Nous verrons ultérieurement que le paramètre c s’interprète comme la vitesse de propagation ou célérité de l’onde

#### a) Aspect technique :

Chercher une solution de l’équation de propagation en ondes progressives revient à considérer le changement de variable

$$\begin{cases} p = t - \frac{x}{c} \\ q = t + \frac{x}{c} \end{cases} \text{ suivant :}$$

En effectuant ce changement de variable, on peut alors exprimer la dérivée partielle première par rapport à la coordonnée d’espace x :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial p} \left(-\frac{1}{c}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial q} \left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = \frac{1}{c} \left(-\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right)(\psi)$$

On obtient alors la dérivée partielle seconde par rapport à la coordonnée d’espace x :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{1}{c} \left(-\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right)^2 (\psi) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q}\right)$$

En effectuant ce changement de variable, on peut alors exprimer la dérivée partielle première par rapport à la coordonnée temporelle t :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial p} \cdot 1 + \frac{\partial \psi}{\partial q} \cdot 1 = \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial q} = \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right)(\psi)$$

On obtient alors la dérivée partielle seconde par rapport à la coordonnée temporelle t :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right)^2 (\psi) = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q}\right)$$

On injecte ces expressions dans l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \text{ soit } \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right) = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right)$$

En simplifiant, il ne reste que :  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q} = 0$

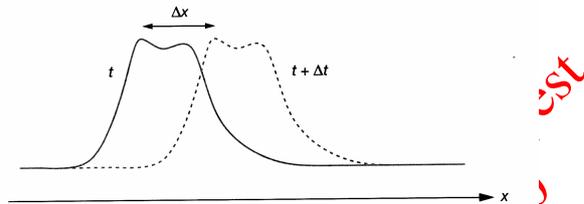
Cette équation s'intègre rapidement et on obtient :  $\psi = f(p) + g(q) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$  où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions.

On retiendra que la solution de l'équation de propagation (ou équation de D'Alembert) à 1D s'écrit :  $\psi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$

**b) Interprétation :**

Supposons que  $\psi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ .

On remarque alors que :  $\psi(x, t) = \psi(x + \Delta x, t + \Delta t)$  à la condition que  $\Delta x = c \Delta t$ . Cela signifie donc que l'onde mesurée à l'instant  $t$  et à l'abscisse  $x$  est identique à l'onde mesurée à l'instant  $t + \Delta t$  et à l'abscisse  $x + \Delta x$  (voir fig.).



Par conséquent, une onde de la forme  $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$  se propage sans se déformer à la vitesse  $c$ , selon la direction des  $x$  croissants. Le paramètre  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde appelée aussi célérité.

**c) Notion d'ondes planes :**

La grandeur qui se propage dépend des variables d'espace et de temps. Pour une onde de la forme  $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$  qui se propage, si on cherche les point où l'amplitude de l'onde est constante à un instant  $t$  donné, on aboutit à l'équation  $x = Cte$ , qui n'est autre que l'équation d'un plan. On parle alors d'onde plane.

On retiendra que la solution de l'équation de propagation (ou équation de D'Alembert) à 1D s'écrit :  $\psi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ . Ceci correspond à une superposition d'une onde plane progressive dans le sens des  $x$  croissants avec une onde plane progressive dans le sens des  $x$  décroissants.

**d) Notion d'onde plane progressive harmonique monochromatique :**

On peut étudier le cas particulier très important des ondes planes progressives harmoniques monochromatiques (OPPHM) où :

$$\psi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \psi_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Dans cette expression, le paramètre  $\omega$  est la pulsation de l'onde reliée à la période  $T$  et à la fréquence  $\nu$  par les relations :  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  et  $\nu = \frac{1}{T}$

On peut poser  $k = \frac{\omega}{c}$  et ainsi on obtient :

$$\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \psi_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$k = \frac{\omega}{c}$  est alors la norme du vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{u}_x$ .

Il est à noter que la norme du vecteur d'onde est homogène à une longueur et est reliée à la période spatiale de l'onde donnée par la longueur d'onde  $\lambda$  par :  $k\lambda = 2\pi$

On obtient une autre expression de  $k$  en fonction de la longueur d'onde :  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Relation entre longueur d'onde et période :  $\lambda = cT$

Si on reprend l'expression de  $\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \psi_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$ ,

le terme à l'intérieur du cosinus  $\Phi(x,t) = \left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) = \omega t - kx + \varphi$  est appelé phase de l'OPPHM,  $\varphi$  étant la phase à l'origine.

On constate alors que les surfaces d'ondes qui sont les plans équi-phases ( $\Phi(x,t) = Cte$ ) dans le cas d'une OPPHM se propagent de telle sorte que :  $d\Phi = \omega dt - k dx$ . La vitesse de

propagation des plans d'ondes est appelée vitesse de phase  $v_\varphi$  et  $v_\varphi = \left.\frac{dx}{dt}\right|_\Phi = \frac{\omega}{k}$ .

### e) Décomposition d'une onde en superposition d'ondes planes progressives harmoniques monochromatiques

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$  est une équation linéaire. Elle satisfait au principe de superposition. Il est alors possible de décomposer toute onde en somme continue ou discrète d'ondes planes progressives harmoniques monochromatiques qui sont des solutions particulières de cette équation. L'intérêt d'une telle décomposition, en superposant des OPPHM, est d'obtenir des équations plus simples tout en ne perdant rien sur la généralité de la solution. La décomposition en OPPHM est un intermédiaire de calcul commode pour résoudre une équation aux dérivées partielles dont la solution est en général compliquée puisqu'il suffit de sommer une série d'OPPHM.

Il est à noter qu'une OPPHM est un cas limite idéal car l'extension spatiale et temporelle d'une OPPHM est infini : ce qui est bien entendu physiquement impossible !!!

On démontrera dans la suite que l'énergie associée à une OPPHM est infini : ce qui est là encore physiquement impossible.

### f) Notation complexe pour l'onde plane progressive harmonique :

A l'onde plane progressive harmonique monochromatique (OPPHM) dont l'expression est :

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \text{ on peut associer une onde complexe } \underline{\psi}(x,t) = \underline{\psi}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

avec l'amplitude complexe reliée à l'amplitude de l'onde et à la phase à l'origine par  $\underline{\psi}_0 = \psi_0 e^{i\varphi}$ .

Pour obtenir l'onde réelle, il suffit de prendre la partie réelle de l'expression complexe :

$$\psi(x,t) = \text{Re}\{\underline{\psi}(x,t)\} = \frac{\underline{\psi}(x,t) + \underline{\psi}^*(x,t)}{2}$$

Il est à noter que l'on aurait pu prendre l'expression complexe conjuguée

$$\underline{\psi}^*(x,t) = \underline{\psi}_0^* e^{-i(\omega t - kx)} = \underline{\psi}_0^* e^{-i(kx - \omega t)} \text{ car on obtient la même partie réelle.}$$

En notation complexe, les opérations se simplifient considérablement puisque :

$$\frac{\partial}{\partial t}[\dots] = i\omega[\dots] \text{ et } \frac{\partial}{\partial t^2}[\dots] = (i\omega)^2[\dots] = -\omega^2[\dots]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\dots] = -ik[\dots] \text{ et } \frac{\partial}{\partial x^2}[\dots] = (-ik)^2[\dots] = -k^2[\dots]$$

Par conséquent, l'équation d'onde  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$  devient en notation complexe :  $-k^2 \psi = -\frac{\omega^2}{c^2} \psi$ .

On aboutit alors à une relation entre  $k$  et  $\omega$  appelée relation de dispersion :  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

Pour une onde satisfaisant à l'équation de propagation, et ce d'après la relation de dispersion, on a :

$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$ . La vitesse de phase s'identifie à la célérité de l'onde : il n'y a pas de dispersion dans ce cas particulier.

## 2. Solution de l'équation de propagation en onde stationnaire

### a) Séparation des variables d'espace et de temps :

On cherche des solutions de la forme :  $\psi(x, t) = f(x)g(t)$ . En injectant cette solution dans

l'équation de propagation,  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$  on obtient :  $\frac{d^2 f}{dx^2}(x) \cdot g(t) = \frac{1}{c^2} f(x) \cdot \frac{d^2 g}{dt^2}(t)$ .

$$\text{Soit : } \frac{c^2}{f(x)} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = \frac{1}{g(t)} \cdot \frac{d^2 g}{dt^2}(t)$$

Le premier terme ne dépend que du temps  $t$  alors que le deuxième de dépend que de  $x$ . par conséquent, les deux membres sont constants et l'on peut poser :

$$\frac{c^2}{f(x)} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = \frac{1}{g(t)} \cdot \frac{d^2 g}{dt^2}(t) = C = \text{Cte}$$

#### Cas où $C > 0$ :

La solution est  $g(t) = Ae^{\sqrt{C}t} + Be^{-\sqrt{C}t}$ . Le premier terme est divergent donc physiquement, on ne peut avoir que  $A=0$ . Le second terme décrit un transitoire disparaissant au cours du temps. Il n'y a donc aucune solution physiquement intéressante en physique ondulatoire.

#### Cas où $C < 0$ : on pose $C = -\omega^2$

La solution est  $g(t) = A \cos(\omega t + \varphi_1)$ .

L'équation satisfaite par  $f$  est alors :  $\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0$  d'où la solution :

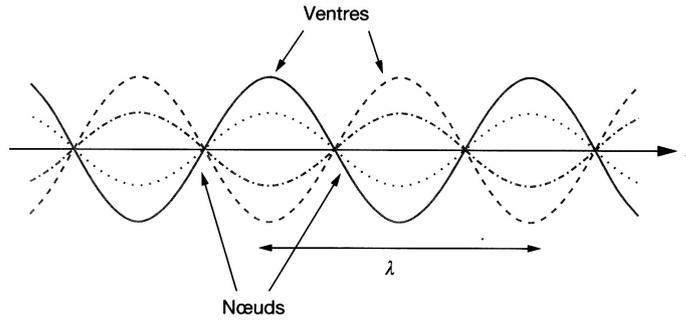
$$f(x) = B \cos\left(\frac{\omega}{c} x + \varphi_2\right) = B \cos(kx + \varphi_2) \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}$$

On obtient donc une solution globale sous la forme d'une onde stationnaire monochromatique :

$$\psi(x, t) = f(x)g(t) = AB \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(kx + \varphi_2) = \psi_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(kx + \varphi_2) \text{ avec } \psi_0 = AB$$

### b) Interprétation physique

Certains points de l'onde stationnaire ne vibrent jamais : ce sont des nœud de vibration. D'autres points vibrent avec une amplitude maximale : ce sont les ventres de vibrations. Enfin, on note que l'onde ne se propage plus, tout se passe comme si l'onde était stationnaire. Dans une onde stationnaire les variables d'espace et de temps sont entièrement découplés au contraire de la solution en onde progressive.



**c) Lien entre les ondes stationnaires et progressives**

On développe :

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(kx + \varphi_2) = \frac{\psi_0}{2} (\cos(\omega t - kx + \varphi_1 - \varphi_2) - \cos(\omega t + kx + \varphi_1 + \varphi_2))$$

**L'onde stationnaire comme somme de deux ondes progressives se contre propageant**

### III. Compléments sur le câble coaxial

#### 1. Impédance caractéristique

Considérons une onde de courant dans le câble coaxial qui soit une onde plane progressive se déplaçant dans le sens des  $x$  croissants :  $i(x,t) = i_+(x,t) = f(t - x/c)$

L'onde de tension correspondante s'écrit  $u(x,t) = a(t - x/c)$

On injecte  $i(x,t) = f(t - x/c)$  dans le système d'équations couplées :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

On obtient alors en notant que  $f'(p) = \frac{df}{dp}$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} = -\Lambda f'(t - x/c) \quad (1'')$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{\Gamma c} f'(t - x/c) \quad (2'')$$

En intégrant (1''), on obtient :  $u(x,t) = \Lambda c f(t - x/c) + A(t)$ . On reporte cette expression dans

(2'') et l'on trouve que :  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Lambda c f'(t - x/c) + A'(t) = \frac{1}{\Gamma c} f'(t - x/c)$ .

On en déduit que  $A'(t) = 0$ . Par conséquent,  $A(t) = Cte = 0$  car on ne se préoccupe que des phénomènes dépendant du temps. On aboutit donc à :  $u(x,t) = \Lambda c f(t - x/c) = \Lambda c i_+(x,t)$

En remarquant que  $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$  et que  $\Lambda c = \frac{1}{\Gamma c} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_c$ , on a donc :  $u(x,t) = Z_c i_+(x,t)$

Considérons une onde de courant dans le câble coaxial qui soit une onde plane progressive se déplaçant dans le sens des  $x$  décroissants :  $i(x,t) = i_-(x,t) = g(t + x/c)$

L'onde de tension correspondante s'écrit  $u(x,t) = b(t + x/c)$ .

On démontre de façon analogue que :  $u(x,t) = -Z_c i_-(x,t)$

**Conclusion :** On a donc :  $u(x,t) = Z_c (i_+(x,t) - i_-(x,t))$

Avec l'impédance caractéristique (réelle) du câble  $Z_c = \Lambda c = \frac{1}{\Gamma c} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$

## 2. Conditions aux limites : influence de l'impédance en bout de ligne

En bout de ligne, on met une impédance  $Z_l$ , de telle sorte qu'en bout de ligne, pour  $x=L$ , on ait en régime sinusoïdal :  $u(L,t) = Z_l i(L,t) = Z_l (i_+(L,t) + i_-(L,t))$

Par ailleurs, on a déjà établi que  $u(L,t) = Z_c (i_+(L,t) - i_-(L,t))$ . En identifiant les deux équations, on obtient :  $Z_l (i_+(L,t) + i_-(L,t)) = Z_c (i_+(L,t) - i_-(L,t))$

On définit le coefficient de réflexion :  $r = \frac{i_-(L,t)}{i_+(L,t)}$  qui n'est autre que le rapport du courant réfléchi (se contre propageant) sur le courant incident.

On obtient :  $Z_l(1+r) = Z_c(1-r)$

D'où le coefficient de réflexion,  $r = \frac{Z_c - Z_l}{Z_c + Z_l} Z_l(1+r) = Z_c(1-r)$

Cas particuliers :

i) La ligne est fermée sur son impédance caractéristique  $Z_l = Z_c$ , alors  $r = 0$ . Il n'y a pas d'onde réfléchi. Toute l'onde incidente est absorbée en terminaison du câble : on parle d'adaptation d'impédance.

ii) La ligne est fermée en court circuit :  $Z_l = 0$  et alors  $r = 1$ . Il y a formation d'une onde stationnaire dans le câble.

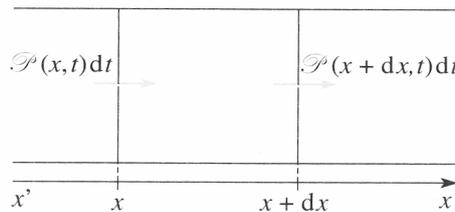
iii) La ligne est ouverte en terminaison :  $Z_l = +\infty$  et alors  $r = -1$ . Il y a formation d'une onde stationnaire dans le câble.

## 3. Aspects énergétiques

### a) Bilan d'énergie local

Densité linéique d'énergie :  $e(x,t) = \frac{1}{2} \Lambda v^2(x,t) + \frac{1}{2} \Gamma u^2(x,t)$

Puissance :  $p(x,t) = u(x,t).i(x,t)$



En effectuant un bilan d'énergie sur une durée  $dt$  sur la tranche de câble comprise entre  $x$  et  $x+dx$ , on obtient :  $(p(x,t) - p(x+dx,t))dt = \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} dt dx$ . Or, on sait que :  $p(x,t) - p(x+dx,t) = -\frac{\partial p}{\partial x} dx$ . Il

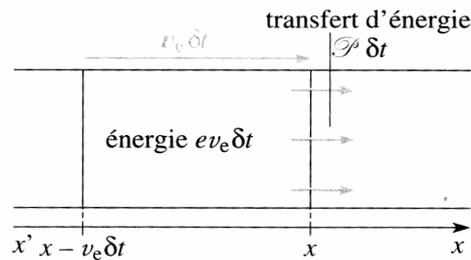
vient donc :  $-\frac{\partial p}{\partial x} dt dx = \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} dt dx$ . On obtient alors l'équation locale traduisant la conservation de

l'énergie dans le câble coaxial :  $\frac{\partial e(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

### b) Vitesse de propagation de l'énergie pour une onde plane progressive.

On considère une onde plane progressive de telle sorte que :  $i_+(x,t) = i(x,t)$ .

On effectue un bilan d'énergie de deux façons différentes pendant une durée  $dt$ .



Toute l'énergie contenue dans le cylindre de longueur  $v_e dt$  traverse la surface située à l'abscisse  $x$  :  $dE = e(x,t)v_e dt$ .

Cette énergie est par ailleurs égale à :  $dE = p(x,t)dt$

Par conséquent, l'identification des deux expressions donne  $p(x,t) = e(x,t)v_e$  soit :  $v_e = \frac{p(x,t)}{e(x,t)}$

Sachant que  $p(x,t) = u(x,t)i(x,t)$  et que pour une onde plane progressive dans le sens des  $x$  croissant,

on a :  $u(x,t) = Z_c i_+(x,t) = Z_c i(x,t)$ , on obtient :  $p(x,t) = Z_c i^2(x,t)$  avec  $Z_c = \Lambda c = \frac{1}{\Gamma c} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ .

Pour une onde plane progressive, la densité linéique d'énergie peut s'écrire comme :

$$e(x,t) = \frac{1}{2} \Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2} \Gamma u^2(x,t) = \frac{1}{2} \Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2} \Gamma Z_c^2 i^2(x,t) = \frac{1}{2} \Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2} \Gamma Z_c^2 i^2(x,t)$$

$$e(x,t) = \frac{1}{2} \Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\Lambda}{\Gamma} i^2(x,t) = \frac{1}{2} \Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2} \Lambda i^2(x,t) = \Lambda i^2(x,t).$$

$$\text{Ce qui permet de calculer : } v_e = \frac{p(x,t)}{e(x,t)} = \frac{Z_c i^2(x,t)}{\Lambda i^2(x,t)} = \frac{Z_c}{\Lambda} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} = c$$

# cable coaxial II

Nous avons vu dans les chapitres précédents qu'un grand nombre de phénomènes de propagation étaient régis par une équation de d'Alembert.

Nous avons qualifié ce type de propagation de *non-dispersive*, c'est à dire que la *relation de dispersion*, c'est à dire la relation entre la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$ , était chaque fois linéaire car  $k = \frac{\omega}{c}$ . Nous avons montré que les solutions se propageaient sans déformation lors de leur propagation.

Le but de ce chapitre est de généraliser l'étude des phénomènes de propagation unidimensionnels (on se placera dans ce cas dans tout le chapitre) à toutes des équations de propagation linéaires. Les résultats seront établis sur l'exemple de la propagation d'un signal électrique dans un câble coaxial.

## I Propagation d'une onde électromagnétique dans un câble coaxial avec pertes

### I.1. Présentation et modélisation

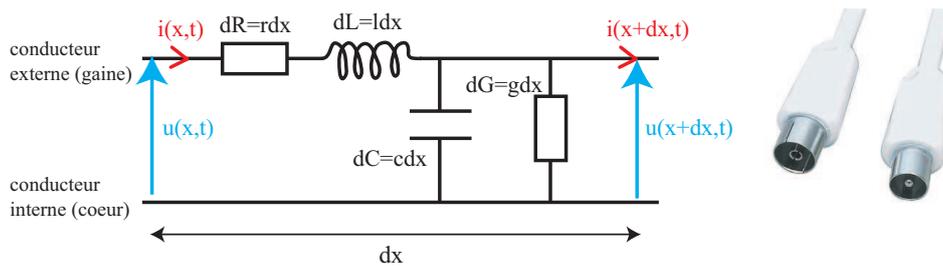
Un câble coaxial est composé de 2 cylindres conducteurs concentriques de rayons respectifs  $a$  et  $b$ , séparés par du vide ou un milieu de comportement similaire (de l'air ou un diélectrique par exemple).

Dans l'A.R.Q.S., il est possible de négliger les temps de propagation des signaux électriques (ou des champs électrique et magnétique) devant leurs durée caractéristique. Toutefois, pour des câbles suffisamment longs, il faut prendre en compte le retard dû à la propagation du signal.

Dans ce cas, on adopte un modèle, appelée **modèle à constantes réparties**, dans lequel le câble est "découpé" en tronçons élémentaires de longueur  $dx$  tels que les retards dus à la propagation soient négligeables sur chaque tronçon. Cette condition revient à poser

$$dx \ll \lambda \quad \text{où } \lambda \text{ est la longueur d'onde des signaux électriques}$$

On se place alors dans le cadre de l'approximation des milieux continus dans lequel chaque élément de longueur  $dx$  de câble est modélisé par le schéma électrique suivant, appelé *ligne bifilaire* :



On tient compte ici du caractère :

- *inductif du câble* :  $l$  correspond au coefficient d'auto-induction par unité de longueur de câble ;
- *capacitif du câble* :  $c$  correspond à la capacité par unité de longueur de câble ;
- *résistif des conducteurs* :  $r$  correspond à la résistance des conducteurs par unité de longueur de câble ;

- résistif de l'isolant entre les deux conducteurs :  $g$  est la conductance du milieu isolant par unité de longueur.

*Remarque*

*L'ARQS est vérifiée localement sur une longueur  $dx$ , mais elle ne l'est pas sur toute la longueur du câble.*

## I.2. Équation de propagation

D'après la loi des mailles :

$$u(x + dx) - u(x) = -\ell \frac{\partial i}{\partial t} dx - ri dx$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\ell \frac{\partial i}{\partial t} - ri$$

D'après la loi des nœuds :

$$i(x + dx) - i(x) = -c \frac{\partial u}{\partial t} dx - gu dx$$

d'où

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -c \frac{\partial u}{\partial t} - gu$$

En combinant les deux équations précédentes, on obtient pour le courant  $i$  et la tension  $u$ , en utilisant le théorème de Schwarz :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \ell c \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (rc + \ell g) \frac{\partial i}{\partial t} - rgu = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \ell c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (rc + \ell g) \frac{\partial u}{\partial t} - rgu = 0 \end{cases}$$

**Equation de propagation**

On obtient deux équations aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants, identiques pour  $i(x, t)$  et  $u(x, t)$ .

*Remarque*

*Pour une ligne sans pertes ( $r = g = 0$ ), on retrouve une équation de d'Alembert*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \ell c \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \ell c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

*caractérisée par une célérité  $v = \frac{1}{\sqrt{\ell c}}$ . Les solutions d'une telle équation s'expriment comme une superposition d'ondes planes progressives.*

Si  $r \neq 0$  ou  $g \neq 0$ , les ondes planes progressives ne sont plus solutions particulières de l'équation de propagation. En particulier, on note que l'équation n'est pas invariante sous la transformation  $t \rightarrow -t$  ce qui est caractéristique des phénomènes dissipatifs.

### I.3. Solutions en OPPM

L'équation obtenue étant **linéaire**, on peut tout de même rechercher des solutions sous la forme d'OPPM. Dans le cas unidimensionnel, on recherchera donc les solutions en posant :

$$\underline{i} = \underline{i}_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

En ré-injectant cette expression de  $i$  dans l'équation différentielle, on obtient, pour  $\underline{i}_0 \neq 0$  :

$$-k^2 + \ell c \omega^2 - j\omega(rc + \ell g) - rg = 0$$

La **relation de dispersion**, qui correspond à la relation entre  $k$  et  $\omega$  s'écrit dans ce cas :

$$k^2 = \ell c \omega^2 - j\omega(rc + \ell g) - rg$$

Remarque

En l'absence de dissipation,  $r = g = 0$  et l'on retrouve

$$k = \omega \sqrt{\ell c} \quad \text{soit} \quad k = \frac{\omega}{v}$$

où  $v = \frac{1}{\sqrt{\ell c}}$  correspond à la célérité obtenue précédemment.

D'après la relation de dispersion, dans le cas où  $r \neq 0$  ou  $g \neq 0$ ,  $k$  et  $\omega$  ne peuvent plus simultanément être réels.

Remarque

Nous supposons  $\omega \in \mathbb{R}$ . On s'interdit ainsi les régimes transitoires dans lesquels on observerait un amortissement (terme en  $e^{-t/\tau}$ ) ou une amplification exponentielle au cours du temps (terme en  $e^{t/\tau}$ ).

Si  $\omega$  est réel, c'est que le vecteur d'onde est complexe : on le notera donc  $\underline{k}$  par la suite. On pose alors

$$\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega) \quad \text{où} \quad \begin{cases} k' = \text{Re} [\underline{k}] \\ k'' = \text{Im} [\underline{k}] \end{cases}$$

En injectant l'expression de  $\underline{k}$  dans l'expression complexe du courant, on obtient :

$$\underline{i} = \underline{i}_0 e^{k''(\omega)x} e^{j[\omega t - k'(\omega)x]}$$

On obtient donc finalement une solution particulière de l'équation aux dérivées partielle en prenant la partie réelle de la solution précédente, soit :

$$i(x, t) = i_0 \underbrace{e^{k''(\omega)x}}_{\text{atténuation ou amplification}} \underbrace{\cos [\omega t - k'(\omega)x]}_{\text{propagation en OPPM}}$$

L'amplitude de l'onde dépend de façon exponentielle de la coordonnée  $x$ , de sorte que :

- Si  $k''(\omega) < 0$  : le milieu est **absorbant**. Au cours de sa propagation dans le sens des  $x$  croissants (si  $k' > 0$ ), l'onde s'atténue exponentiellement sur une distance caractéristique  $\delta$  telle que :

$$\delta = \frac{1}{|k''(\omega)|}$$

- Si  $k''(\omega) > 0$  : le milieu est **amplificateur**. Au cours de sa propagation dans le sens des  $x$  croissants (si  $k' > 0$ ), l'amplitude de l'onde croît exponentiellement sur une distance typique  $\delta$ . Ce type de milieu est très rare, mais est par exemple utilisé dans les lasers pour amplifier la lumière présente dans la cavité laser et ainsi générer un faisceau intense.

Remarque

Une onde de la forme

$$i(x, t) = i_0 e^{k''(\omega)x} \cos [\omega t - k'(\omega)x]$$

est une onde :

- ★ **plane**, car elle ne dépend que de la coordonnée spatiale  $x$  ;
- ★ **progressive** car, du fait de sa dépendance en  $t - \frac{x}{c}$  (soit ici  $\omega t - k'x$ ), cette onde se propage dans le sens des  $x$  croissants (si  $k' > 0$ ) ;
- ★ **monochromatique** car elle dépend sinusoidalement du temps ;
- ★ si  $k'' < 0$ , on parle d'onde **évanescence** car son amplitude décroît au cours de sa propagation. L'onde est amplifiée si  $k'' > 0$ .

Remarque

L'interprétation des signes de  $k'$  et  $k''$  est relative à la convention choisie pour la phase dans l'exponentielle. Ainsi, avec  $\underline{k} = k' + jk''$

$$\begin{aligned} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} &\longmapsto e^{k''(\omega)x} e^{j[\omega t - k'(\omega)x]} \\ e^{j(\underline{k}x - \omega t)} &\longmapsto e^{-k''(\omega)x} e^{j[k'(\omega)x - \omega t]} \end{aligned}$$

Si  $k' > 0$ , l'onde est progressive dans le sens des  $x$  croissants dans les deux cas. Mais  $k'' > 0$  possède une interprétation différente dans les deux cas. On veillera donc à choisir une convention de signe de la phase et à s'y tenir sous peine d'obtenir des résultats incohérents.

### I.4. Dispersion et absorption de la ligne bifilaire

Considérons plus en détail les solutions de la relation de dispersion pour la ligne bifilaire avec pertes. On peut mettre la relation de dispersion sous la forme :

$$\underline{k}^2 = \ell c \omega^2 \left[ 1 + j \left( \frac{r}{\ell \omega} + \frac{g}{c \omega} \right) - \frac{r g}{\ell c \omega^2} \right] = \omega^2 \ell c \left( 1 + j \frac{r}{\ell \omega} \right) \left( 1 + j \frac{g}{c \omega} \right)$$

- **Cas 1** : On se place tout d'abord dans le cas simple pour lequel  $\frac{r}{\ell} = \frac{g}{c}$ , et donc pour lequel :

$$\underline{k} = \pm \omega \sqrt{\ell c} \left( 1 + j \frac{r}{\ell \omega} \right)$$

La partie réelle et la partie imaginaire de  $\underline{k}$  sont données par :

$$k'(\omega) = \pm \omega \sqrt{\ell c} \quad \text{et} \quad k''(\omega) = \pm r \sqrt{\frac{c}{\ell}}$$

La solution pour l'intensité du courant se met sous la forme

$$\underline{i}(x, t) = \underline{i}_0 e^{k''\omega} e^{j[\omega t - k'x]} \quad \text{soit, en notations réelles} \quad i(x, t) = i_0 e^{k''\omega} \cos[\omega t - k'x]$$

L'expression de la *phase* de l'onde :

$$\varphi(x, t) = \omega t - k'(\omega)x$$

montre que l'onde est progressive, dans la direction  $\vec{u}_x$  et se propage à la vitesse  $\frac{\omega}{|k'(\omega)|}$  dans le sens des  $x$  croissants si  $k'(\omega) > 0$ , et dans le sens des  $x$  décroissants si  $k'(\omega) < 0$ .

Les surfaces d'onde, définies comme l'ensemble des points  $M$  tels que, à  $t$  fixé,  $i(x, t) = cste$  sont également des surfaces équiphasés, c'est à dire pour lesquelles la phase  $\varphi(x, t) = \omega t - k'(\omega)x$  est constante.

Les plans équiphasés sont donc définis ici par l'équation :  $x = \frac{\omega}{k'}t + x_0$  où  $x_0$  est une constante, et se déplacent à la vitesse suivante, appelée **vitesse de phase** :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k'(\omega)|}$$

**Propriété**

Pour une onde de la forme

$$i(x, t) = i_0 e^{k''(\omega)x} \cos[\omega t - k'(\omega)x]$$

la vitesse de phase  $v_\varphi$  est définie comme la vitesse de propagation de la phase de sorte que

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k'|} = \frac{\omega}{|\text{Re}[\underline{k}]|}$$

Ici la vitesse de phase est égale à :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k'(\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{\ell c}}$$

et ne dépend pas de  $\omega$ . On retrouve la vitesse de propagation d'une ligne sans pertes.

Le phénomène d'amplification n'étant pas physique, le signe de  $k''$  est ici imposé et

$$k''(\omega) = -r \sqrt{\frac{c}{\ell}}$$

L'amplitude d'une onde monochromatique décroît alors exponentiellement sur une longueur caractéristique

$$\delta = \frac{1}{|k''(\omega)|} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\ell}{c}}$$

Le milieu est ici **absorbant**.

**Définition :**

Un milieu est dit absorbant si l'amplitude d'une onde monochromatique décroît au cours de sa propagation.  
La distance caractéristique d'atténuation est

$$\delta = \frac{1}{|\text{Im}[k]|}$$

Remarque

On vérifie bien que  $\delta$  diminue lorsque la résistance augmente, c'est-à-dire lorsque les pertes par effet Joule sont plus importantes.

• **Cas 2 :** On se place maintenant dans le cas où  $\omega$  est suffisamment grand pour qu'on puisse négliger le terme  $rg$  dans la relation de dispersion ( $\frac{r}{l\omega}$  et  $\frac{g}{c\omega}$  sont ainsi des infiniment petits d'ordre 1), de sorte que cette dernière est maintenant donnée par :

$$\underline{k}^2 = lc\omega^2 \left[ 1 + \frac{j}{\omega} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right) \right]$$

En faisant un développement limité au second ordre :

$$\underline{k} = \pm \sqrt{lc}\omega \left[ 1 + \frac{j}{\omega} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right) \right]^{1/2} = \pm \sqrt{lc}\omega \left[ 1 + \frac{j}{2\omega} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right) - \frac{1}{8\omega^2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right)^2 \right]$$

La partie réelle et la partie imaginaire de  $\underline{k}$  sont données par :

$$k'(\omega) = \pm \sqrt{lc}\omega \left[ 1 - \frac{1}{8\omega^2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right)^2 \right] \quad \text{et} \quad k''(\omega) = \pm \frac{\sqrt{lc}}{2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right)$$

La vitesse de phase est donnée par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k'|} = \frac{1}{\sqrt{lc} \left[ 1 - \frac{1}{8\omega^2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right)^2 \right]} \simeq \frac{1}{\sqrt{lc}} \left[ 1 + \frac{1}{8\omega^2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right)^2 \right]$$

Des ondes monochromatiques de pulsations différentes ne se propagent donc pas à la même vitesse. On parle de milieu dispersif.

**Définition :**

Un milieu est dispersif si la vitesse de phase dépend de la pulsation de l'onde.

Remarque

Le caractère dispersif intervient lors de la "dispersion" de la lumière par un prisme en verre. En effet, dans le verre, la vitesse de propagation d'une radiation lumineuse, donc l'indice du milieu, dépend de la fréquence de la radiation. La loi de Descartes montre alors qu'au niveau du dioptre air/verre, les radiations lumineuses ne sont pas réfractées de façon identiques. C'est donc le phénomène de dispersion qui permet la séparation des différentes longueurs d'onde d'une lumière polychromatique.

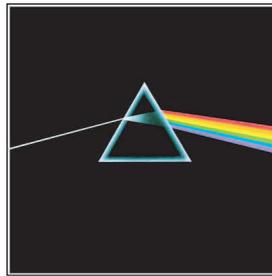


FIGURE 1 – Dispersion d'un faisceau de lumière blanche par un prisme.

Le milieu est donc cette fois **dispersif** puisque la vitesse de phase dépend de  $\omega$ . De plus, le milieu est **absorbant**, puisque comme précédemment,  $k''$  est non nul.

La figure ci-dessous montre bien l'influence de la propagation d'une impulsion dans un câble coaxial : le milieu est bien à la fois dispersif et absorbant

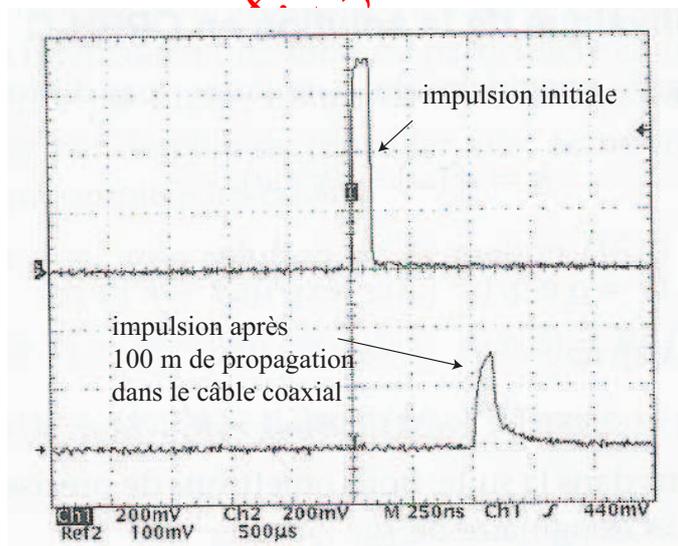


FIGURE 2 – Caractérisation expérimentale de l'effet de l'absorption et de la dispersion d'un câble coaxial sur une impulsion, après 100 m de propagation.

Nous avons trouvé des solutions sous la forme d'OPPM. Toutefois, l'intérêt des OPPM reste limité car  
\* une onde plane seule est non physique car, comme nous l'avions vu précédemment, elle a une extension infinie dans l'espace et transporte une énergie infinie ;

- ★ l'information qui peut être transportée par une onde plane est très faible puisqu'elle ne peut être contenue que dans  $\omega$  et dans  $\vec{k}$ .

## II Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif

### II.1. Propagation de deux OPPM de pulsations voisines

L'onde résultant de la superposition de 2 OPPM de pulsations voisines  $\omega_1$  et  $\omega_2$  et de même amplitude  $u_0$  est donnée par :

$$u(x, t) = u_0 [\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)]$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont respectivement reliés à  $\omega_1$  et  $\omega_2$  par la relation de dispersion du milieu.

On peut réécrire l'expression précédente sous la forme :

$$u(x, t) = 2u_0 \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

Et en posant :  $\delta k = k_1 - k_2$ ,  $k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$ ,  $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2$  et  $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , on obtient :

$$u(x, t) = 2u_0 \cos\left(\frac{\delta k}{2} x - \frac{\delta\omega}{2} t\right) \cos(k_0 x - \omega_0 t)$$

On obtient un signal modulé en amplitude constitué :

- ★ d'un signal de porteuse à la pulsation  $\omega_0$  élevée. Cette onde est en  $\cos(k_0 x - \omega_0 t)$  et correspond à une onde progressive se propageant dans le sens des  $x$  croissants à la vitesse  $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$ ;
- ★ d'un signal modulant de la forme de faible pulsation  $\delta\omega$ . Cette onde est en  $2u_0 \cos\left(\frac{\delta k}{2} x - \frac{\delta\omega}{2} t\right)$  et correspond à une onde progressive se propageant dans le sens des  $x$  croissants à la vitesse  $v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}$ .

Dans le cas d'une transmission d'un signal par modulation d'amplitude, c'est le signal enveloppe qui transporte l'information, la porteuse n'étant qu'un support de l'information. On constate sur cet exemple que le signal de porteuse et le signal "informatif" ne se propagent pas à la même vitesse. Si  $\delta\omega$  et  $\delta k$  sont suffisamment faibles, on peut considérer que la vitesse de propagation de l'information se fait à la vitesse

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{pour la superposition d'OPPM de pulsations voisines de } \omega_0$$

#### Définition :

On définit la vitesse de groupe d'une superposition d'OPPM de pulsations voisines de  $\omega_0$  par

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega=\omega_0}$$

La vitesse de groupe traduit généralement la vitesse de propagation de l'information.

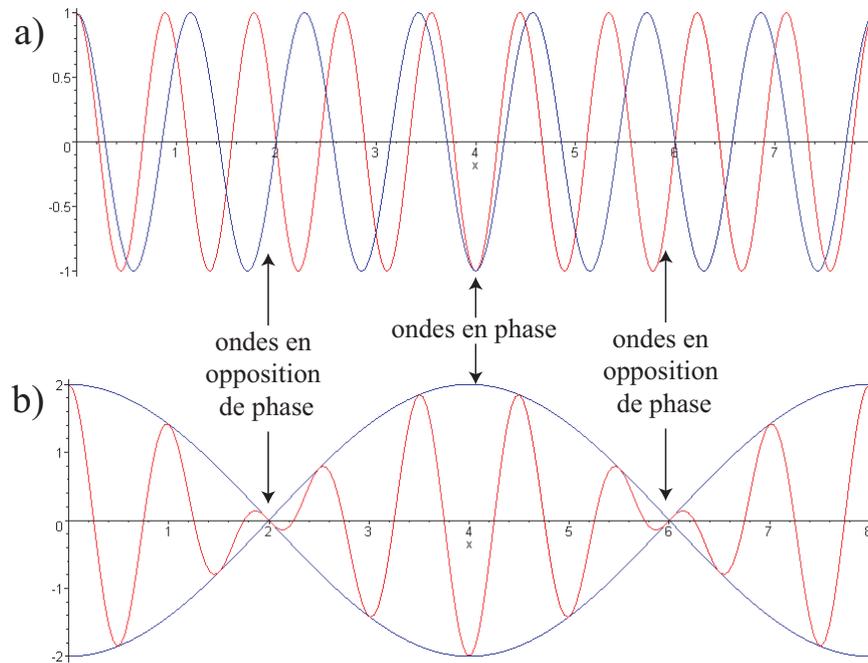


FIGURE 3 – Superposition de deux OPPM de pulsations voisines. a) Ondes représentées séparément. b) Représentation de la somme des deux ondes et de l’enveloppe du signal.

Si le milieu dans lequel se propagent les deux signaux est non-dispersif, la pulsation et le vecteur d’onde sont proportionnels :  $\omega = kv_\varphi$ , où  $v_\varphi$  est une constante. On en déduit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\varphi \text{ dans un milieu non dispersif}$$

**Propriété**

Dans un milieu non-dispersif, la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont égales.

Au contraire dans un milieu dispersif,  $v_\varphi$  dépend de  $\omega$  et  $v_g \neq v_\varphi$ . L’onde globale se déforme au cours de la propagation et ne se déplace pas "en bloc" avec les autres ondes monochromatiques.

**II.2. Paquet d’ondes**

En pratique, aucun signal n’est purement monochromatique, car cela lui imposerait une durée infinie. Le spectre d’un signal réel est donc nécessairement étendu, de sorte qu’il possède une largeur caractéristique  $\Delta\omega$ .

On se limitera dans la suite au cas unidimensionnel pour simplifier, mais la généralisation à trois dimensions ne présente aucune difficulté supplémentaire.

De plus, on se limitera à l’étude de milieux dispersifs, mais non-absorbant, de sorte que le nombre d’onde  $k$  sera toujours réel, comme la pulsation  $\omega$ .

a) Construction par superposition discrète d'OPPM

Cherchons à construire un signal réel à partir d'une superposition d'OPPM. La figure ci-dessous montre la distribution temporelle d'un signal composé d'un nombre croissant d'OPPM de pulsations légèrement différentes.

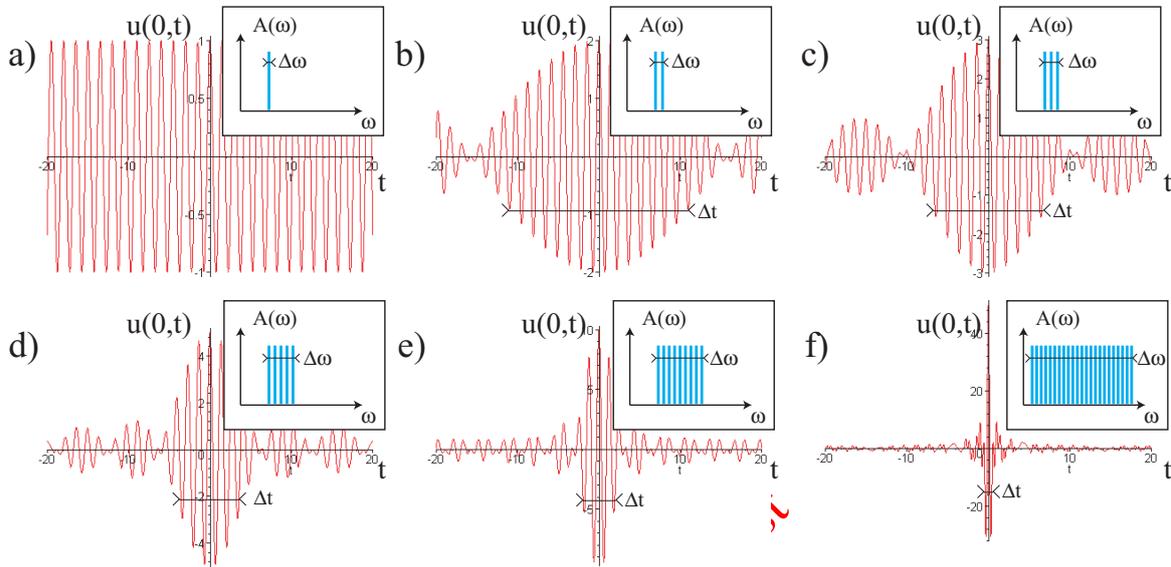


FIGURE 4 – Évolution temporelle d'une superposition d'OPPM de pulsations voisines en  $x = 0$  avec une seule (a), 2 (b), 3 (c), 5 (d), 10 (e), 50 ondes (f). Les encadrés correspondent à leurs spectres respectifs  $A(\omega)$ .

On constate que plus le nombre d'OPPM est important, plus l'onde devient localisée et ressemble à un "paquet d'ondes".

On peut également remarquer que plus l'écart  $\Delta\omega$  entre les pulsations extrêmes du signal est important, plus l'extension temporelle  $\Delta t$  du signal est faible.

*Remarque :* La formation d'un paquet d'onde par superposition d'ondes permet d'expliquer le phénomène des *vagues scélérates* : en pleine mer, lors d'une tempête, des vagues se propageant dans la même direction et ayant des longueurs d'ondes différentes peuvent ponctuellement se retrouver en phase et donner naissance à des vagues de plus de 20 m de haut.

b) Construction par superposition continue d'OPPM - Transformée de Fourier

Dans le cas le plus général, en notant  $u(x, t)$  l'amplitude d'une onde réelle, on peut écrire, en utilisant l'analyse de Fourier :

$$u(x, t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{\text{superposition continue}} \underbrace{e^{j(\omega t - k(\omega)x)}}_{\text{onde plane}} \underbrace{A(\omega)}_{\text{amplitude de chaque composante}} d\omega \quad (1)$$

L'onde réelle correspond ainsi à une superposition continue d'OPPM dont les pulsations s'étendent de  $-\infty$  à  $+\infty$  dans le cas général. On admettra que le fait de sommer les contributions d'ondes de pulsations négatives permet d'assurer que la fonction  $u(x, t)$  reste réelle<sup>1</sup>, malgré les termes complexes  $e^{j(\omega t - k(\omega)x)}$  et  $A(\omega)$ .

1. On peut montrer simplement que cela implique que  $k(-\omega) = -k(\omega)$  et  $A(-\omega) = A^*(\omega)$ .

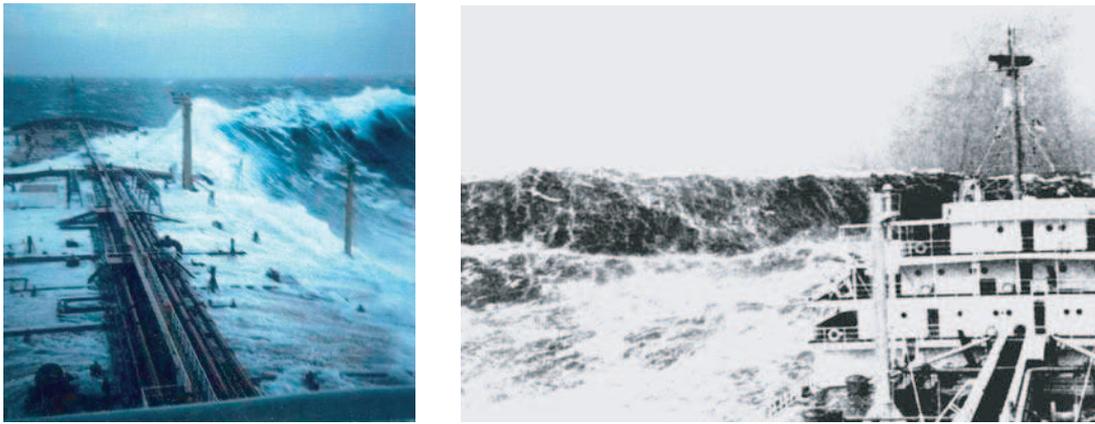


FIGURE 5 – Vagues scélérates lors d’une tempête en pleine mer.

L’analyse de Fourier permet de faire le lien entre représentation temporelle d’une onde et son spectre. L’amplitude  $\underline{A}(\omega)$  peut être obtenue à l’aide d’une transformée de Fourier inverse de  $u(x = 0, t)$  :

$$\underline{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} u(0, t) dt$$

On donne ci-dessous les spectres des 2 ondes réelles les plus couramment rencontrées :

- *Signal rectangulaire* :

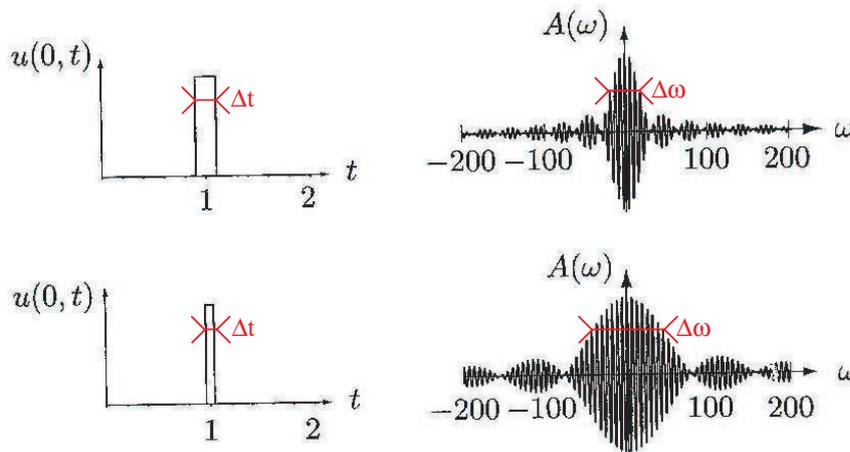


FIGURE 6 – Signal rectangulaire et son spectre pour deux largeurs différentes de signaux.

- *Signal gaussien* :

Dans les deux cas, on vérifie toujours que plus l’impulsion - ou l’onde - est brève, c’est-à-dire plus  $\Delta t$  est petit, plus son spectre est large, c’est-à-dire plus  $\Delta \omega$  est grand.

Ceci est lié à une propriété fondamentale de la transformée de Fourier. En effet pour deux variables

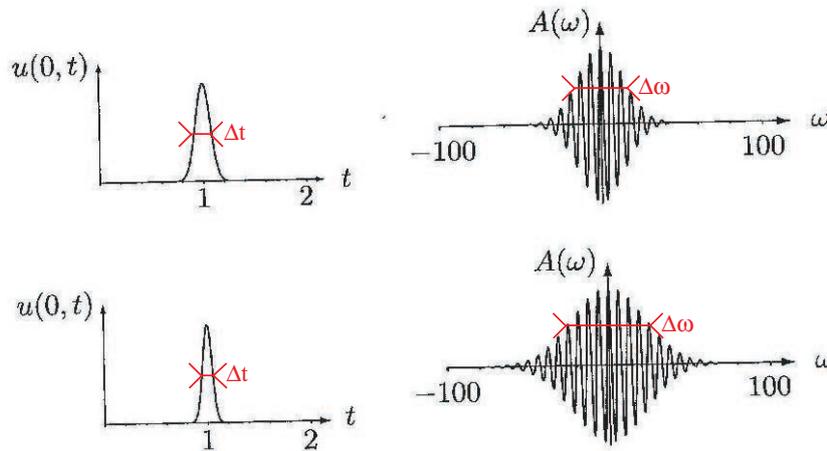


FIGURE 7 – Signal gaussian et son spectre pour deux largeurs différentes de signaux.

conjuguées comme  $t$  et  $\omega$ , cela entraîne :

$$\Delta t \Delta \omega \gtrsim \frac{1}{2}$$

On retrouve bien qu'une OPPM composée d'une seule fréquence, donc ayant un spectre de largeur nulle, c'est-à-dire  $\Delta \omega \rightarrow 0$ , est non-physique car cela imposerait  $\Delta t = \frac{1}{\Delta \omega} \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire une extension temporelle infinie.

*Remarque*

De la même façon,  $k$  et  $x$  sont des variables conjuguées, de sorte que :

$$\Delta x \Delta k \gtrsim 1$$

**Définition :**

On appelle paquet d'ondes la superposition continue d'OPPM de différentes fréquences.  
 Un paquet d'ondes est localisé dans le temps et dans l'espace.

**II.3. Propagation d'un paquet d'ondes : dispersion et absorption**

a) Étalement du paquet d'ondes

Considérons un paquet d'ondes se propageant dans un milieu non-dispersif et non-absorbant. Toutes les composantes monochromatiques du paquet d'ondes se propageant à la même vitesse et conservant la

même amplitude, le paquet d'onde conserve la même forme.

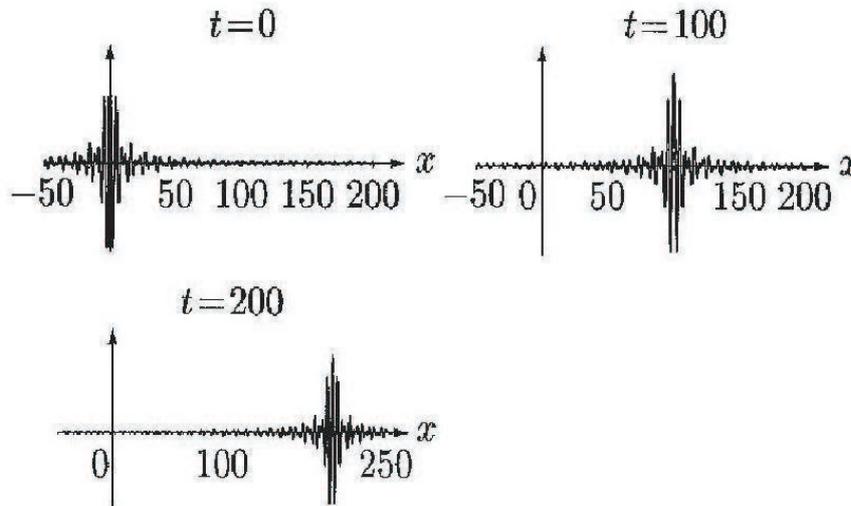


FIGURE 8 – Dans un milieu non dispersif, un paquet d'ondes se propage sans se déformer.

Considérons maintenant le même paquet d'ondes dans un milieu toujours non-absorbant mais dispersif. Toutes les composantes monochromatiques du paquet d'ondes se propageant à des vitesses de phases différentes, le paquet d'ondes va se déformer et s'étaler :

- ★ les signaux les plus lents prennent du retard par rapport au maximum du paquet d'ondes ;
- ★ les signaux les plus rapides prennent de l'avance par rapport au maximum du paquet d'ondes.

La conservation de l'énergie impose alors que l'amplitude maximale du paquet d'onde diminue. En effet, l'énergie d'une onde est une grandeur quadratique et s'obtient par intégration sur tout l'espace de la grandeur d'intérêt  $\psi(x, t)$  de sorte que

$$\mathcal{E} \propto \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x, t) dx \quad \text{pour un paquet d'ondes planes caractérisée par } \psi$$

Remarque

Dans le cas de la propagation de l'intensité  $i(x, t)$  dans un câble coaxial en l'absence de pertes, l'énergie stockée dans un tronçon élémentaire de largeur  $dx$  vaut

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{2} li^2 dx + \frac{1}{2} cu^2 dx$$

et l'énergie totale est de la forme

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} li^2 + \frac{1}{2} cu^2 \right] dx$$

L'énergie s'exprime donc comme le produit

$$\mathcal{E} = \text{amplitude}^2 \times \text{largeur}$$

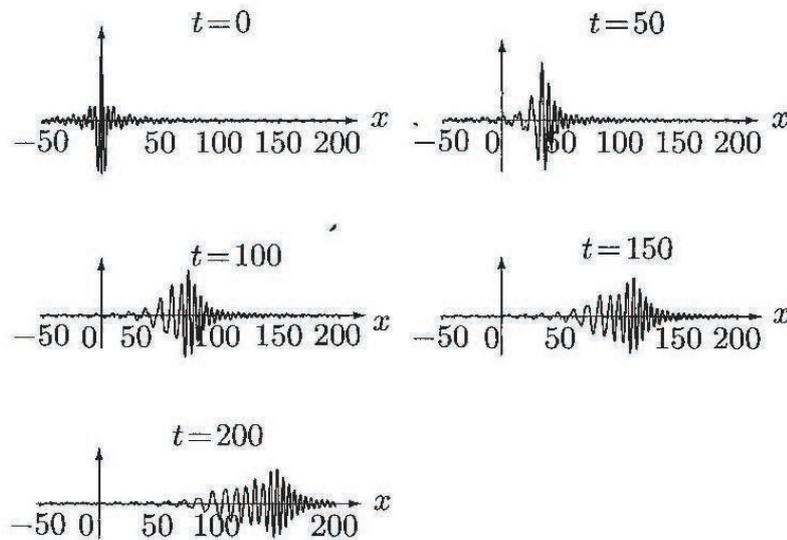


FIGURE 9 – Dans un milieu dispersif, un paquet d’ondes se déforme au cours de sa propagation.

Pour un milieu non-absorbant, l’énergie est conservée. L’augmentation de la largeur du paquet d’ondes correspond à une diminution de l’amplitude du signal.

#### b) Absorption

Dans un milieu absorbant non-dispersif, le paquet d’ondes conserve sa largeur mais son amplitude décroît au cours de la propagation.

#### Propriété

Dans un milieu dispersif et absorbant, un paquet d’onde se déforme au cours de sa propagation :

- ★ la dispersion conduit à un étalement du paquet d’onde et à une diminution de son amplitude ;
- ★ l’absorption conduit à une diminution supplémentaire de son amplitude.

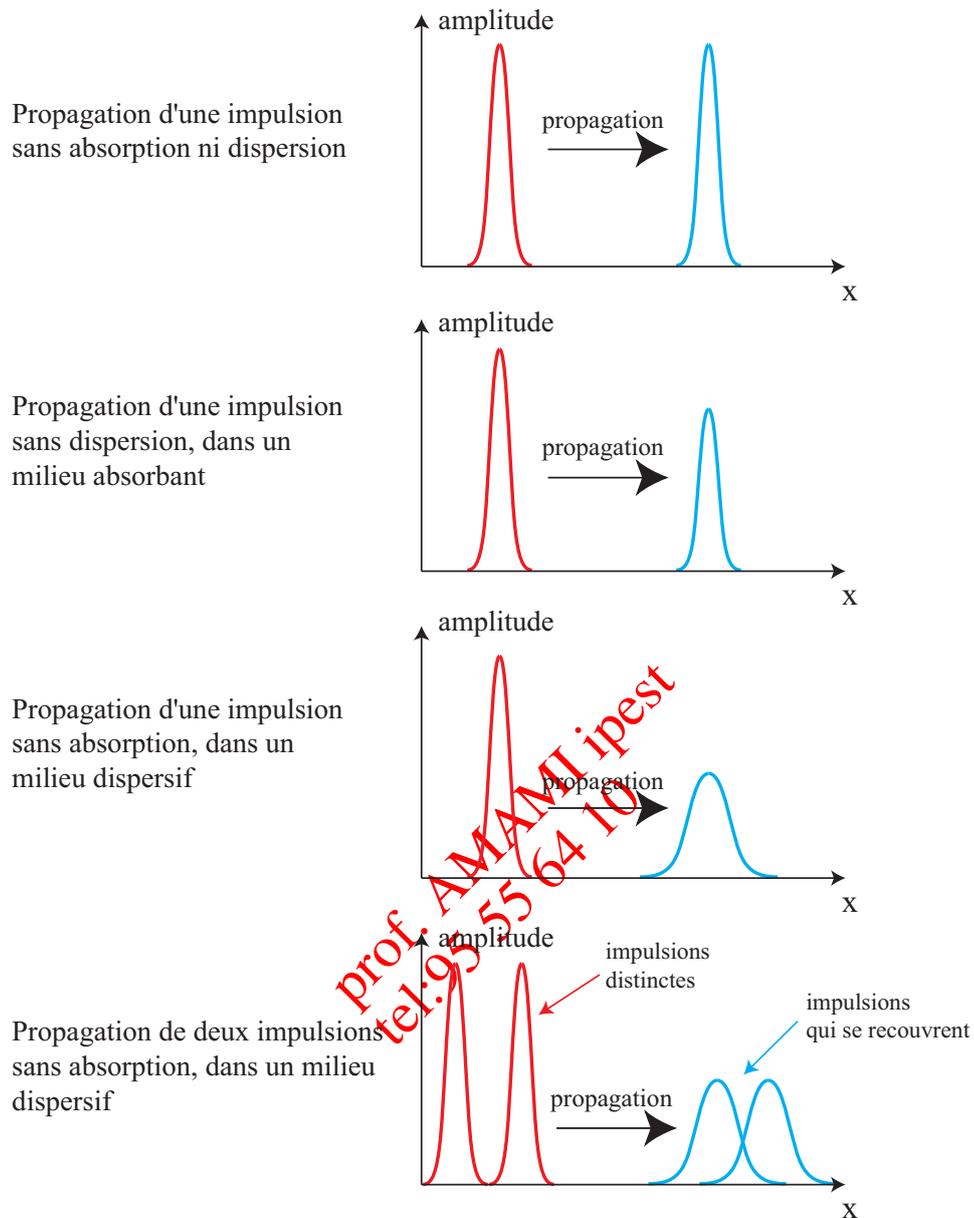


FIGURE 10 – Effet de l'absorption et de la dispersion sur la forme d'impulsions se propageant dans une fibre optique.

# Ondes électromagnétiques dans le vide

Les équations de Maxwell, que nous avons étudiées dans un précédent chapitre, sont l'équivalent des équations du mouvement pour le champ électromagnétique. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à la résolution de ces équations dans un milieu vide de charge et de courant.

Nous verrons alors que les solutions s'interprètent en termes d'ondes électromagnétiques dont nous étudierons les caractéristiques.

## I Équation de propagation des champs électrique et magnétique dans le vide

### I.1. Équations de Maxwell de le vide

On rappelle que les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Dans une région vide de charge et de courant, qui correspond à du véritable vide :

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j} = \vec{0}$$

On en déduit les équations de Maxwell dans une région vide de charge et de courant :

$\operatorname{div}(\vec{E}) = 0$	$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$
$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

On remarque la structure "relativement" symétrique des équations de Maxwell dans le vide. Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont à flux conservatif et il existe un couplage entre leur rotationnel et leur dérivée temporelle.

Dans toute la suite, nous nous placerons dans la situation  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ .

### I.2. Équation pour le champ électrique

Afin d'établir une équation ne faisant intervenir que le champ électrique, prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\text{rot}} \left[ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) \right] &= \overrightarrow{\text{rot}} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (\text{équation de Maxwell-Faraday}) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) \quad (\text{permutation des dérivées}) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{équation de Maxwell-Ampère avec } \vec{j} = \vec{0}) \\
 &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

Mais le double rotationnel peut s'exprimer sous une autre forme, en utilisant une relation d'analyse vectorielle

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left[ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{C}) \right] = \overrightarrow{\text{grad}} \left[ \text{div}(\vec{C}) \right] - \Delta \vec{C} \quad \forall \vec{C}$$

En appliquant cette relation au champ électrique, on obtient

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}} \left[ \text{div}(\vec{E}) \right]}_{=\rho/\varepsilon_0=0} - \Delta \vec{E} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
 -\Delta \vec{E} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{équation de Maxwell-Gauss avec } \rho = 0)
 \end{aligned}$$

Cette équation relie les variations spatiales et temporelles du champ électrique.

### Propriété

Dans le vide, le champ électrique  $\vec{E}$  vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

où  $c$  est la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.

### Remarque

L'application numérique avec  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  et  $\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$  conduit à

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

La célérité des ondes électromagnétiques dans le vide s'identifie à la célérité de la lumière.

### I.3. Équation pour le champ magnétique

Afin d'établir une équation ne faisant intervenir que le champ magnétique, prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\begin{aligned}
 \vec{\text{rot}} \left[ \vec{\text{rot}}(\vec{B}) \right] &= \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\text{rot}} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) && \text{(équation de Maxwell-Ampère avec } \vec{j} = \vec{0} \text{)} \\
 &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}}(\vec{E}) && \text{(permutation des dérivées)} \\
 &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) && \text{(équation de Maxwell-Faraday)} \\
 &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\vec{\text{rot}} \left[ \vec{\text{rot}}(\vec{B}) \right] = \underbrace{\vec{\text{grad}} \left[ \text{div}(\vec{B}) \right]}_{=0} - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$$

On en déduit

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

#### Propriété

Dans le vide, le champ magnétique  $\vec{B}$  vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

#### Remarque

On retrouve la même équation vectorielle que pour le champ électrique.

#### Remarque

L'équation de d'Alembert s'écrit parfois

$$\square f = 0 \quad \text{avec} \quad \square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

où l'opérateur  $\square$  est appelé d'Alembertien.

### I.4. Équation de propagation des potentiels $V$ et $\vec{A}$ dans le vide

En utilisant la condition de jauge de Lorentz dont on rappelle l'expression :

$$\text{div } \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

on peut montrer facilement que les potentiels scalaire  $V$  et vecteur  $\vec{A}$  vérifient également les mêmes équations :

$$\begin{cases} \Delta V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{cases}$$

### I.5. Solutions de l'équation de d'Alembert : ondes planes et ondes sphériques

#### a) Ondes planes

Supposons pour simplifier que les champs électrique et magnétique ne dépendent que d'une coordonnée cartésienne d'espace, par exemple  $x$ , et du temps :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, t) \quad \text{et} \quad \vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}(x, t) \quad \text{onde plane de vecteur } \vec{u}_x$$

Le champ électrique prend alors la même valeur  $\forall (y, z)$ , c'est-à-dire en tout point d'un plan perpendiculaire à  $\vec{u}_x$ . On dit que l'évolution du champ électrique est celle d'une onde plane d'axe  $\vec{u}_x$ .

*Remarque*

Attention : a priori, on ne dispose d'aucune indication sur la direction du champ. En effet, pour une onde plane d'axe  $\vec{u}_x$ , on écrit, en composantes :

$$\vec{E}(x, t) = E_x(x, t) \vec{u}_x + E_y(x, t) \vec{u}_y + E_z(x, t) \vec{u}_z$$

et le champ n'est ni nécessairement suivant  $\vec{u}_x$ , ni orthogonal à  $\vec{u}_x$  (voir figure 1).

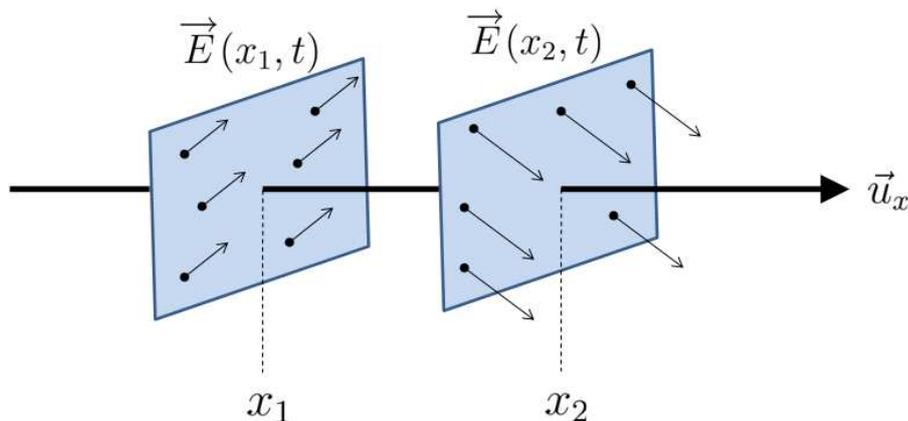


FIGURE 1 – Une onde plane correspond à un champ qui ne dépend que d'une coordonnée cartésienne d'espace. Les surfaces d'onde sont des plans orthogonaux à la direction de propagation.

Remarque

On rappelle qu'une surface d'onde est une surface sur laquelle, à une date donnée, chaque composante du champ (électrique ou magnétique) est uniforme. Pour une onde plane de vecteur  $\vec{u}_x$ , les surfaces d'onde sont des plans orthogonaux à  $\vec{u}_x$ .

Les équations de propagation pour les champs électrique et magnétique prennent la forme d'une équation de d'Alembert unidimensionnel

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Les solutions s'écrivent comme une superposition d'ondes planes par progressives se propageant dans des sens différents

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_1(x - ct) + \vec{E}_2(x + ct)$$

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_1(x - ct) + \vec{B}_2(x + ct)$$

où  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  sont des champs de vecteurs  $\mathcal{C}^2$  quelconques qui ne dépendent que de  $x \pm ct$ .

Remarque

Plus généralement, une onde plane de vecteur  $\vec{u}$  s'écrit sous la forme

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_1(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) + \vec{E}_2(\vec{u} \cdot \vec{r} + ct)$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_1(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) + \vec{B}_2(\vec{u} \cdot \vec{r} + ct)$$

avec  $\vec{r} = \vec{OM}$ ,  $O$  étant une origine quelconque.

Remarque

Le modèle de l'onde plane n'est pas physique car c'est une onde d'extension spatiale infinie dans les direction  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$ . L'énergie transportée par une onde plane est donc infinie.

**b) Ondes sphériques**

Les champs électromagnétiques sont généralement émis par des atomes, passant d'un niveau d'énergie à un niveau d'énergie plus faible. À l'échelle d'un observateur, ces atomes apparaissent ponctuels ce qui suggèrent de considérer que les champs électrique et magnétique, sont émis depuis un un point. En supposant de plus l'émission isotrope, on peut considérer que les champs ne dépendent, en norme, que de la distance  $r$  à un point origine  $O$ . On écrit donc, en coordonnées sphériques de centre  $O$  :

$$\vec{E}(M, t) = E_r(r, t) \vec{u}_r + E_\theta(r, t) \vec{u}_\theta + E_\varphi(r, t) \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{B}(M, t) = B_r(r, t) \vec{u}_r + B_\theta(r, t) \vec{u}_\theta + B_\varphi(r, t) \vec{u}_\varphi$$

Les surfaces d'onde sont alors des sphères concentriques de rayon  $r$ . On parle d'onde sphérique.

**Définition :**

On parle d'onde électromagnétique sphérique lorsque les composantes du champ électromagnétique ne dépendent que du temps et de la distance  $r$  à une origine  $O$ .

Le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

L'expression du laplacien vectoriel est compliqué et son calcul doit être fait en utilisant la relation

$$\Delta \vec{E} = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{E})$$

Intéressons-nous par exemple à la projection de l'équation de d'Alembert sur  $\vec{u}_\theta$ . Tout calcul fait, on obtient

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r E_\theta)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2} = 0$$

soit, en multipliant par  $r$

$$\frac{\partial^2 (r E_\theta)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r E_\theta)}{\partial t^2} = 0$$

Les solutions sont donc de la forme

$$E_\theta(r, t) = \frac{1}{r} f(r - ct) + \frac{1}{r} g(r + ct) \quad \text{solutions en ondes sphériques}$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^2$  quelconques

Remarque

Le terme en  $f(r - ct)$  correspond à une onde se propageant dans le sens des  $r$  croissants, c'est-à-dire à une onde divergente.

Au contraire, le terme en  $g(r + ct)$  correspond à une onde convergente.

Par rapport à une onde plane, on constate que l'amplitude du champ décroît en  $\frac{1}{r}$ .

## II Ondes planes progressives monochromatiques

### II.1. Expression des champs

Comme nous l'avons vu, l'équation de d'Alembert admet des solutions en ondes planes progressives. Il est alors possible de décomposer toute onde plane progressive en somme d'ondes dépendant sinusoidalement du temps, ou plutôt de  $t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}$ . On parle alors d'onde plane progressive monochromatique (OPPM).

Le champ électrique d'une OPPM est alors de la forme, en coordonnées cartésiennes

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_x) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_y) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_z) \end{cases}$$

où  $\varphi_x, \varphi_y$  et  $\varphi_z$  sont des déphasages *a priori indépendants* et  $E_{0x}, E_{0y}$  et  $E_{0z}$  sont les amplitudes des composantes du champ électrique suivant  $\vec{u}_x, \vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$ . Le vecteur d'onde  $\vec{k} = k_x \vec{u}_x + k_y \vec{u}_y + k_z \vec{u}_z$  indique la direction et le sens de propagation de l'onde au point  $M$  de vecteur position  $\vec{r} = \vec{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$ .

Le vecteur d'onde  $\vec{k}$  et la pulsation de l'onde  $\omega$  sont indépendants des variables d'espace.

Remarque

Le champ magnétique d'une OPPM se décompose de la même manière.

Ces notations sont particulièrement lourdes, notamment en raison des déphasages qui interviennent dans chacune des composantes. Il est plus aisé de manipuler les grandeurs complexes  $\underline{\vec{E}}(M, t)$  et  $\underline{\vec{B}}(M, t)$ , de sorte que

$$\vec{E}(M, t) = \text{Re} \left[ \underline{\vec{E}}(M, t) \right] \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \text{Re} \left[ \underline{\vec{B}}(M, t) \right]$$

Notations complexes

Une onde électromagnétique plane progressive monochromatique (O.P.P.M.) se propageant dans le sens des  $x$  croissants est décrite, en notations complexes, par des champs électrique et magnétique complexes :

$$\underline{\vec{E}}(x, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}(x, t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

où

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}}_0 &= E_{0x} e^{j\varphi_x} \vec{u}_x + E_{0y} e^{j\varphi_y} \vec{u}_y + E_{0z} e^{j\varphi_z} \vec{u}_z \\ \underline{\vec{B}}_0 &= B_{0x} e^{j\phi_x} \vec{u}_x + B_{0y} e^{j\phi_y} \vec{u}_y + B_{0z} e^{j\phi_z} \vec{u}_z \end{aligned}$$

sont les amplitudes complexes des champs électrique et magnétique.

Les champs physiques sont obtenus en prenant la partie réelle des champs complexes :

$$\vec{E}(x, t) = \text{Re} \left[ \underline{\vec{E}}(x, t) \right] \quad \text{et} \quad \vec{B}(x, t) = \text{Re} \left[ \underline{\vec{B}}(x, t) \right]$$

Remarque

La notation complexe est utilisable ici car les équations de Maxwell sont **linéaires**. Cependant, on veillera à ne **JAMAIS** utiliser la notation complexe pour les aspects énergétiques car nous verrons par la suite qu'il faut intervenir des expressions quadratiques, donc non linéaires, des champs.

Remarque

On rappelle qu'en notations complexes

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\longleftrightarrow i\omega \\ \vec{\nabla} &\longleftrightarrow -i\vec{k} \end{aligned}$$

avec la convention de phase utilisée.

## II.2. Description du spectre électromagnétique

La décomposition spectrale des ondes électromagnétiques permet de distinguer plusieurs gammes de fréquences. Dans le sens des fréquences décroissantes, on distingue : les rayons  $\gamma$ , les rayons X, l'ultraviolet, le visible, l'infrarouge, les micro-ondes.

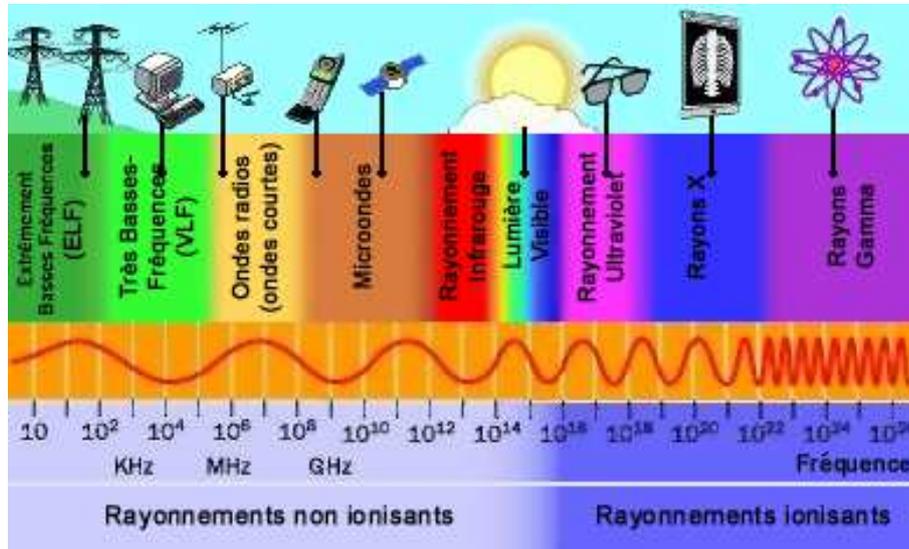


FIGURE 2 – Spectre des ondes électromagnétiques.

Une OPPM est caractérisée par une double périodicité : une périodicité temporelle et une périodicité spatiale. En notant  $T$  la période spatiale et  $\lambda$  la période spatiale, appelée longueur d'onde, on a

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ et } \lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|}$$

Les domaines du spectre électromagnétique sont souvent classés en termes de longueur d'onde. Ainsi, la lumière visible correspond à des OPPM de longueurs d'onde comprises entre 400 nm et 800 nm et n'occupe qu'une toute petite "fenêtre" dans le spectre électromagnétique.

### Exercice

Déterminer le domaine de fréquence associé à la lumière visible.

Afin de déterminer la relation entre  $T$  et  $\lambda$ , il faut connaître la relation entre  $\omega$  et  $k$ . D'après la définition de la vitesse de phase  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ . On en déduit la fréquence d'une onde de longueur d'onde  $\lambda$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{k v_\varphi}{2\pi} = \frac{v_\varphi}{\lambda}$$

Avec  $v_\varphi = c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ , on obtient l'intervalle de fréquences du domaine visible :

$$3,75.10^{14} \text{ Hz} \leq f \leq 7,5.10^{14} \text{ Hz}$$

Remarque

La fréquence d'une onde est un caractère intrinsèque de l'onde mais sa longueur d'onde dépend du milieu puisque

$$\lambda = \frac{v_\varphi}{f}$$

Par exemple, pour un milieu d'indice optique  $n$ , la vitesse de la lumière est  $v_\varphi = \frac{c}{n}$  et la longueur d'onde devient

$$\lambda = n \frac{c}{f} = n \lambda_0$$

où  $\lambda_0 = \frac{c}{f}$  est la longueur d'onde dans le vide.

On parle abusivement de longueur d'onde pour décrire le domaine spectral du visible. Il faut en principe utiliser la fréquence ou la longueur d'onde **dans le vide**.

### II.3. Structure des OPPM

Considérons une onde électromagnétique, plane progressive monochromatique de vecteur d'onde  $\vec{k}$ , de champs électrique et magnétique complexes  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  et  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ .

Les équations de Maxwell dans le vide, en l'absence de charge et de courant s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

En utilisant la notation complexe, il vient

$$\begin{aligned} -j \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 & -j \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \\ -j \vec{k} \wedge \vec{E} &= -j \omega \vec{B} & -j \vec{k} \wedge \vec{B} &= j \omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \end{aligned}$$

On en déduit les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 & (\text{Champ électrique transverse}) \\ \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 & (\text{Champ magnétique transverse}) \\ \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} & (\text{Relation de structure}) \\ \vec{E} &= -c^2 \frac{\vec{k} \wedge \vec{B}}{\omega} & (\text{Autre expression de la relation de structure}) \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle de ces équations :

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 & (\text{Champ électrique transverse}) \\ \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 & (\text{Champ magnétique transverse}) \\ \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} & (\text{Relation de structure}) \\ \vec{E} &= -c^2 \frac{\vec{k} \wedge \vec{B}}{\omega} & (\text{Autre expression de la relation de structure}) \end{aligned}$$

Les champs électrique et magnétique sont donc orthogonaux à  $\vec{k}$ , c'est-à-dire à la direction de propagation. La relation de structure montre également que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux entre eux.

**Propriété**

Pour une O.P.P.M. dans le vide, de vecteur d'onde  $\vec{k}$  :

★ les champs électrique et magnétique sont transverses

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

★ la relation de structure s'écrit

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Le système de vecteurs  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  forme donc un trièdre direct.

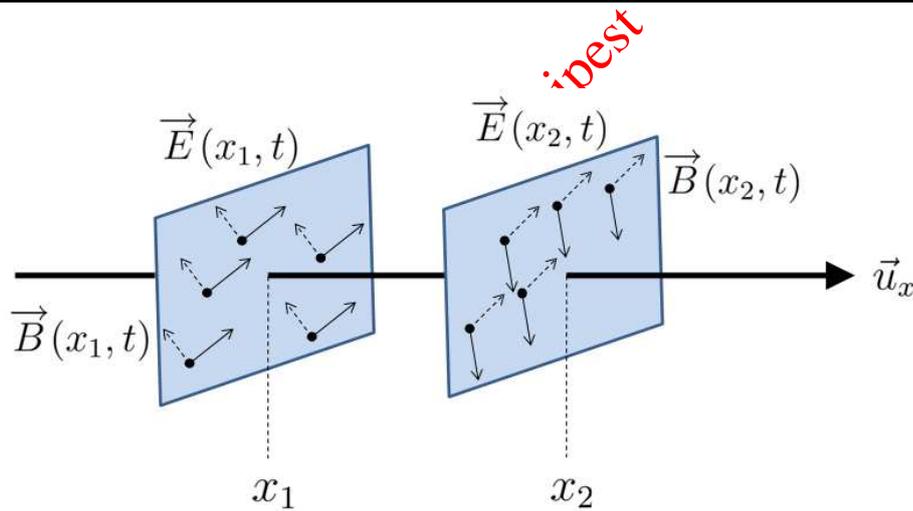


FIGURE 3 – Dans le vide, les champs électrique et magnétique d'Une onde plane sont transverses.

**Remarque**

Avec

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$$

la relation de structure devient :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

La relation de structure est valable pour toute onde plane progressive se propageant dans le sens de  $\vec{u}$ .

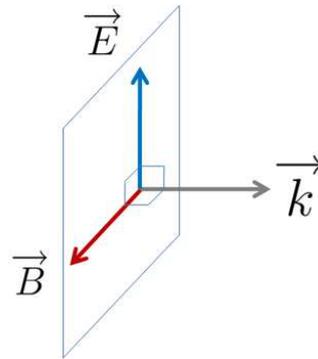


FIGURE 4 – Les champs électrique et magnétique d'une O.P.P.M. appartiennent à un plan d'onde, sont orthogonaux entre eux et orthogonaux au vecteur d'onde qui indique le sens de propagation de l'onde. Les vecteurs  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  forment un trièdre direct.

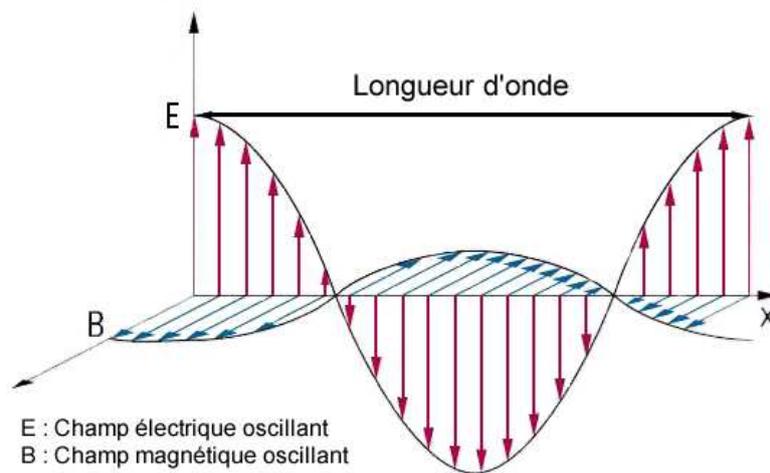


FIGURE 5 – Représentation d'une O.P.P.M. se propageant suivant  $\vec{u}_x$ . La longueur d'onde est la période spatiale de l'onde.

### III Polarisation des ondes planes progressives monochromatiques

#### III.1. Définition

Nous avons étudié la périodicité spatiale et temporelle des ondes électromagnétiques mais nous n'avons pas encore étudié l'amplitude et la direction des champs électrique et magnétique.

Considérons une O.P.P.M. se propageant dans le sens des  $x$  croissants. Le champ électrique est transverse il est donc de la forme :

$$\vec{E}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \end{pmatrix}$$

Remarque

Pour une O.P.P.M. décrite par

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

★ le vecteur d'onde  $\vec{k}$  définit la direction et le sens de la propagation de l'onde ;

★ le vecteur  $\vec{E}_0$  définit l'amplitude et l'orientation du champ électrique.

Par ailleurs, la direction et l'amplitude du champ magnétique sont obtenues à l'aide de la relation de structure

$$\vec{B} = \frac{k \vec{u}_x \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Toute l'information sur l'amplitude et la direction des champs est donc codée par les deux composantes du champ  $\vec{E}$ , orthogonales à la direction de propagation.

**Définition :**

**La direction du champ électrique d'une O.P.P.M. est appelée direction de polarisation.**

Plaçons-nous dans le plan d'onde  $x = 0$  et changeons l'origine des temps en faisant la transformation

$$t \mapsto t - \frac{\varphi_y}{\omega}$$

En posant  $\varphi = \varphi_z - \varphi_y$ , on a :

$$\vec{E}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$

Dans le plan  $x = 0$ , les composantes  $E_y$  et  $E_z$  vérifient :

$$\begin{cases} E_y = E_{0y} \cos(\omega t) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Si  $E_{0y}$  et  $E_{0z}$  sont constants,  $\vec{E}$  décrit une ellipse dans le cas général.

**Propriété**

**Dans un plan d'onde donné, le vecteur champ électrique d'une O.P.P.M. décrit une ellipse au cours du temps. On parle de polarisation elliptique.**

Les propriétés de l'ellipse dépendent des valeurs relatives de  $E_{0y}$ ,  $E_{0z}$  et  $\varphi$ . Intéressons-nous à quelques cas particuliers.

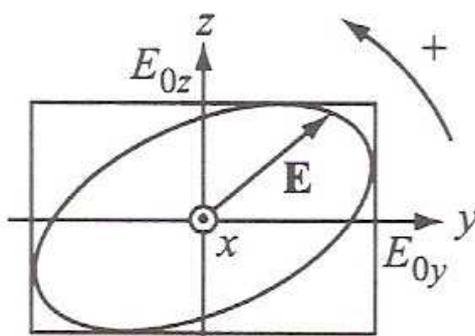


FIGURE 6 – Polarisation d'une O.P.P.M. dans le cas général : la polarisation est elliptique.

prof. AMAMI ipest  
tel:95 55 64 10

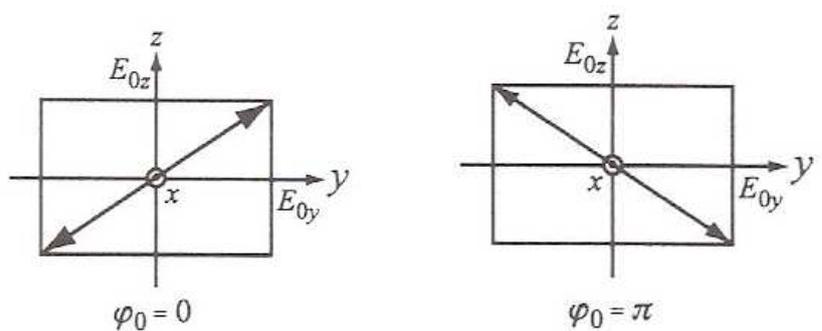


FIGURE 7 – Polarisation rectiligne dans le cas où  $\varphi = 0$  (gauche) et où  $\varphi = \pi$  (droite).

### III.2. Polarisation rectiligne

Supposons que les composantes  $E_y$  et  $E_z$  du champ électrique soient en phase ou en opposition de phase :

$$\varphi = \varphi_z - \varphi_y = 0 [\pi]$$

Dans ce cas, les composantes du champ électrique vérifient

$$\begin{cases} E_y = E_{0y} \cos(\omega t) \\ E_z = \pm E_{0z} \cos(\omega t) \end{cases}$$

On en déduit

$$E_z = a E_y \quad \text{avec} \quad a = \pm \frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \text{cste}$$

Le champ décrit alors un segment de droite. On parle de polarisation rectiligne.

#### Propriété

Si les composantes du champ électrique sont en phase  $\varphi = 0 [2\pi]$  ou en opposition de phase  $\varphi = \pi [2\pi]$ , la polarisation est dite rectiligne car, dans un plan d'onde donné, le champ électrique décrit un segment de droite. Le vecteur  $\vec{E}$  garde une direction fixe quels que soient  $x$  et  $t$ .

L'expression d'un tel champ est alors :

$$\vec{E} = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

Ce champ est bien polarisé rectilignement car il peut être réécrit sous la forme suivante, en utilisant  $\vec{u} = \cos \alpha \vec{u}_y + \sin \alpha \vec{u}_z$  :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}$$

Le champ oscille donc bien selon une direction fixe lors de la propagation de l'onde (voir figure 8).

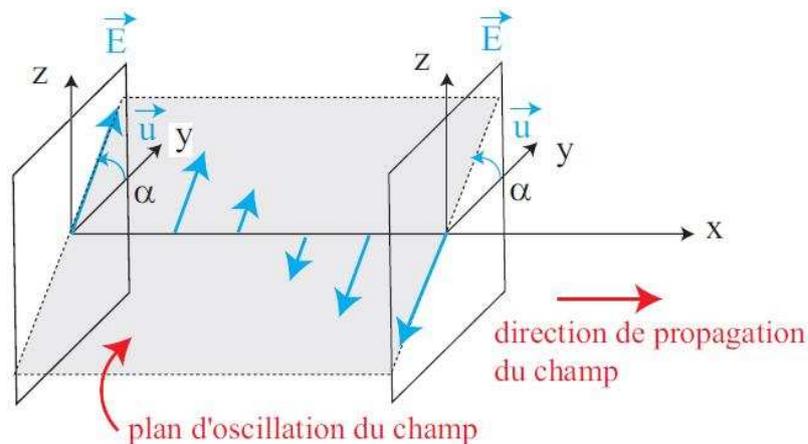


FIGURE 8 – Structure d'une OEPPH polarisée rectilignement : le champ électrique oscille suivant une direction fixe de l'espace au cours de la propagation.

Remarque

- ★ Pour une telle onde, en vertu des équations de Maxwell dans le vide, le champ magnétique  $\vec{B}$  est également défini par une O.P.P.M. polarisée rectilignement suivant la direction perpendiculaire à  $\vec{E}$  et à la direction de polarisation.
- ★ L'O.P.P.M. polarisée rectilignement constitue le maillon élémentaire à partir duquel, par simple superposition, on peut reconstituer toute onde électromagnétique, d'amplitude, de phase, de polarisation quelconque.

**III.3. Polarisation circulaire**

Supposons que les composantes  $E_y$  et  $E_z$  du champ électrique soient en quadrature de phase :

$$\varphi = \varphi_z - \varphi_y = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

Dans ce cas, les composantes du champ électrique vérifient

$$\begin{cases} E_y = E_{0y} \cos(\omega t) \\ E_z = \pm E_{0z} \sin(\omega t) \end{cases}$$

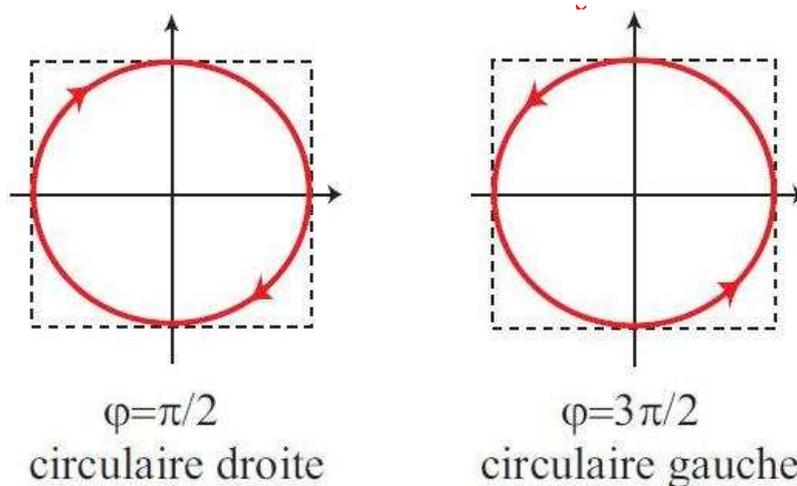


FIGURE 9 – Polarisation circulaire gauche (à gauche) et circulaire droite (à droite).

C'est l'équation d'une ellipse dont les axes coïncident avec les axes ( $Oy$ ) et ( $Oz$ ).

De plus, si les amplitudes sont égales,  $E_{0y} = E_{0z} = E_0$ , les composantes du champ électrique vérifient

$$\begin{cases} E_y = E_0 \cos(\omega t) \\ E_z = \pm E_0 \sin(\omega t) \end{cases}$$

C'est l'équation paramétrique d'un cercle de rayon  $E_0$ .

**Propriété**

Si les composantes du champ électrique :

- ★ sont en quadrature de phase  $\varphi = \frac{\pi}{2} [\pi]$  ;
- ★ possèdent la même amplitude  $E_0$  ,

la polarisation est dite circulaire car, dans un plan d'onde donné, le champ électrique décrit un cercle.

Remarque

On distingue parfois le caractère droit ou gauche d'une polarisation elliptique ou circulaire, en fonction du sens de rotation du champ électrique.

Pour un observateur qui reçoit l'onde, la polarisation est dite :

★ gauche si le champ électrique tourne dans le sens trigonométrique ;

★ droite si le champ électrique tourne dans le sens horaire.

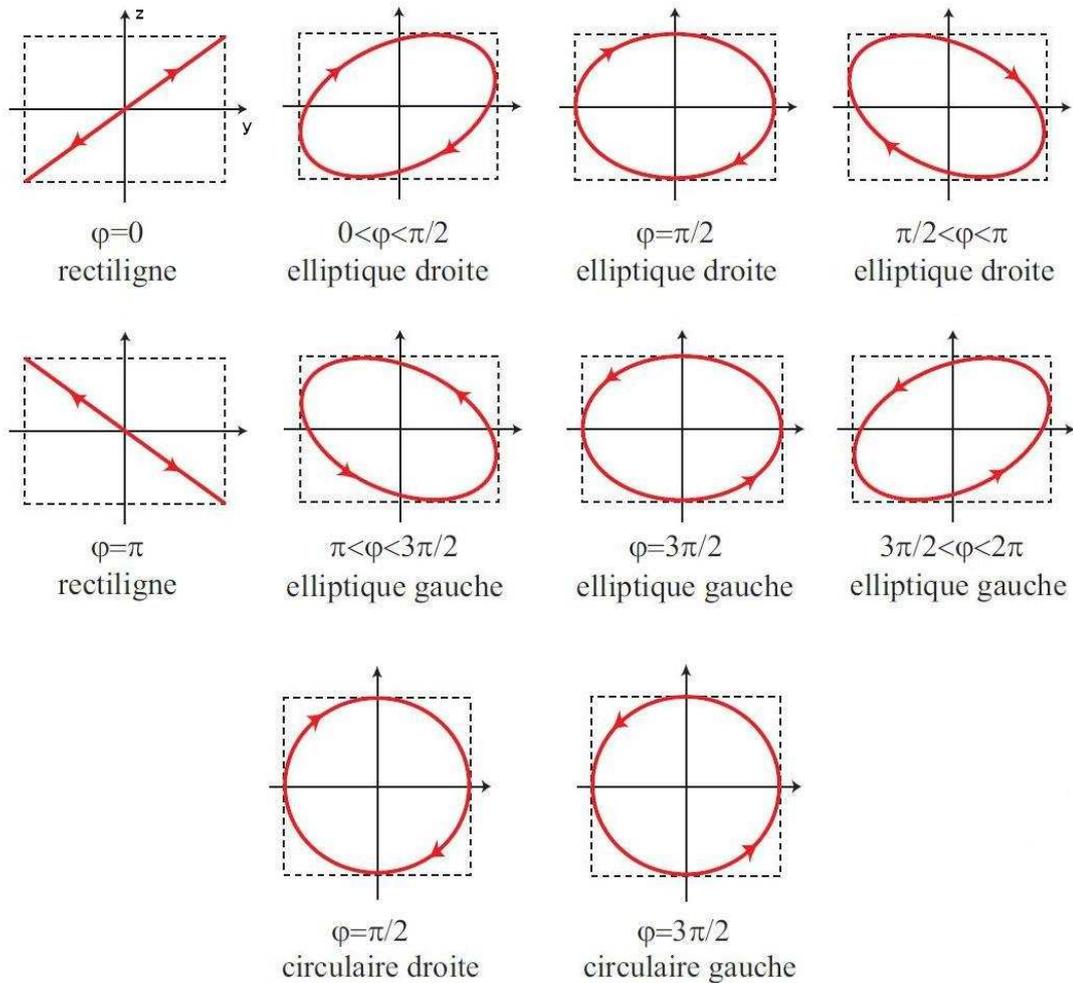


FIGURE 10 – Les différents types de polarisations dans le cas général, en fonction de la phase  $\varphi$  dans l'expression suivante :  $\vec{E} = E_{0y} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_z$ .

### III.4. Lumière naturelle et phénomènes de polarisation

La lumière naturelle, celle produite par le soleil par exemple, est émise par des processus aléatoires, c'est-à-dire qu'elle contient une superposition aléatoire de toutes les polarisations ; on dit alors qu'elle est **non polarisée**.

Remarque

Ce n'est pas le cas pour le laser par exemple, dans lequel l'émission peut être anisotrope, de sorte que le champ électrique d'un laser peut être émis dans une direction privilégiée.

Il est toutefois possible d'agir sur la polarisation d'une onde en utilisant par exemple un polariseur.

Un polariseur est un matériau anisotrope, c'est-à-dire dont les propriétés dépendent de son orientation dans l'espace, qui ne laisse passer qu'une seule direction de polarisation rectiligne.

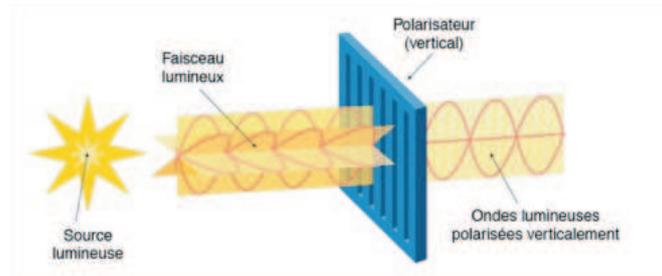


FIGURE 11 – Lumière naturelle non polarisée incidente sur un polariseur. L'onde transmise est polarisée rectilignement suivant la direction privilégiée déterminée par l'orientation du polariseur.

Remarque

L'œil humain n'est sensible qu'à la valeur moyenne du carré du champ électrique  $\langle E^2 \rangle$ , et ne fait donc aucune différence entre une lumière naturelle non polarisée et une lumière polarisée. En revanche, l'œil de l'abeille permet de faire la différence entre les différentes polarisations, ce qui lui apporte davantage d'information sur son environnement.

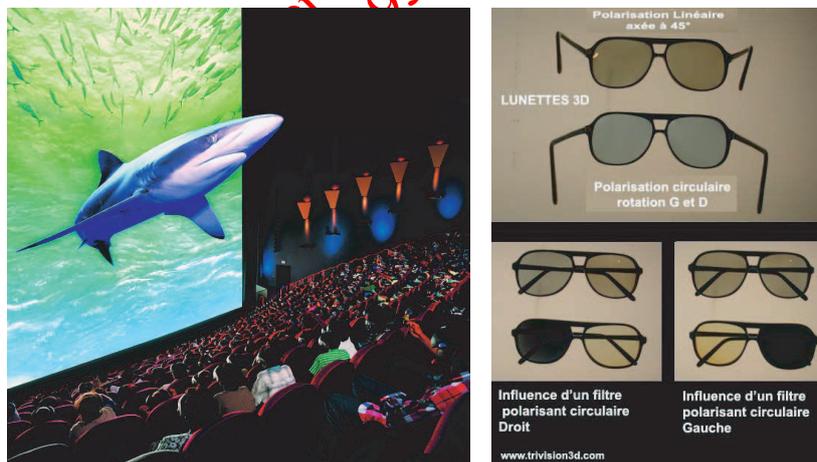


FIGURE 12 – Principe du "cinéma 3D" : deux images polarisées différemment (soit deux polarisations rectilignes orthogonales, soit deux polarisations circulaires droite et gauche) sont soit émises soit réfléchies par l'écran du cinéma. L'utilisation de polariseurs différents sur les verres de lunettes spéciales permet au spectateur de recevoir sélectivement une image sur l'œil droit et l'autre sur l'œil gauche. Un léger décalage spatial entre les deux prises de vue permet alors d'avoir une impression de relief dans l'image (principe de la stéréo). Sans lunettes, un spectateur voit deux images superposées et légèrement décalées.

## IV Énergie des ondes planes progressives (O.P.P.)

### IV.1. Densité d'énergie électromagnétique d'une O.P.P.

Considérons une onde électromagnétique plane progressive (O.P.P.), de vecteur d'onde  $\vec{k} = k \vec{u}$ . On rappelle que la densité volumique d'énergie électromagnétique est donnée par :

$$u_{em} = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

La relation de structure pour une O.P.P. se propageant suivant  $\vec{u}$  impose

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

En utilisant le fait que les vecteur  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux deux à deux, on obtient

$$\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|$$

On en déduit

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 c^2 B^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} = u_m$$

#### Propriété

Il y a équipartition de l'énergie électrique et de l'énergie magnétique d'une onde électromagnétique plane progressive :

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} = u_m = \frac{u_{em}}{2}$$

Dans le cas d'une O.P.P.M. se propageant, par exemple, dans le sens des  $x$  croissants, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = E_{0y} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_z$$

La moyenne temporelle de la densité d'énergie électrique s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} \langle u_e \rangle &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 [E_{0y}^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle + E_{0z}^2 \langle \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \rangle] \\ &= \frac{1}{4} \epsilon_0 (E_{0y}^2 + E_{0z}^2) = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2 \end{aligned}$$

On peut en déduire la valeur moyenne de densité d'énergie électromagnétique :

$$\langle u_{em} \rangle = \langle u_e \rangle + \langle u_m \rangle = 2 \times \langle u_e \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2$$

**Propriété**

La valeur moyenne de la densité d'énergie électromagnétique d'une onde plane progressive monochromatique est :

$$\langle u_{em} \rangle = \langle u_e \rangle + \langle u_m \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

où  $E_0$  est l'amplitude du champ électrique.

**Remarque**

Afin de calculer les grandeurs énergétiques précédentes, on prendra garde à ne pas utiliser la notation complexe sans précautions. Avec l'expression complexe du champ électrique :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

il faut utiliser les expressions suivantes, où \* indique le complexe conjugué :

$$\langle u_e \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right] = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2$$

$$\langle u_m \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{1}{2\mu_0} \vec{B} \cdot vB^* \right] = \frac{1}{4\mu_0} B_0^2 = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2$$

**IV.2. Vecteur de Poynting**

Soit une OPP se propageant selon le vecteur unitaire  $\vec{u}$ . Le vecteur de Poynting associé s'écrit :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{E} \wedge \left( \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{\mu_0 c} \right) = \frac{1}{\mu_0 c} \left( E^2 \vec{u} - \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{E}}_0 \right) = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}$$

**Propriété**

Le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie d'une OPP sont liés par la relation :

$$\vec{\Pi} = c u_{em} \vec{u}$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire indiquant la direction et le sens de propagation.

Considérons une surface élémentaire orienté  $\vec{d^2S}$ . L'énergie électromagnétique qui traverse  $\vec{d^2S}$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est égale au produit de la puissance rayonnée par  $dt$  :

$$\mathcal{E} = \vec{\Pi} \cdot \vec{d^2S} dt$$

D'après le théorème de Poynting, en l'absence de puissance dissipée par effet Joule, l'énergie rayonnée à travers  $\vec{d^2S}$  pendant  $dt$  est égale à l'énergie électromagnétique contenue dans le cylindre de section  $dS$  et de longueur  $\vec{v} dt$  où  $\vec{v}_e$  est la vitesse de propagation de l'énergie soit

$$d\mathcal{E} = u_{em} \vec{d^2S} \cdot \vec{v}_e dt$$

Par identification entre ces deux expressions, on peut définir la vitesse de propagation de l'énergie par  $\vec{\Pi} = u_{em} \vec{v}_e$ .

### Propriété

L'énergie d'une O.P.P. dans le vide se propage à la célérité de la lumière  $c$ .

## V Réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait

Pourquoi un faisceau laser traverse-t-il une vitre mais ne traverse pas un miroir recouvert d'une fine couche d'aluminium ?

Le faisceau laser est assimilable, au moins localement, à une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le direction  $\vec{k}_i$ .

Le champ électromagnétique à l'interface génère des courants induits négligeables dans le cas du verre (faible conductivité) mais très importants dans le cas d'un métal (conductivité très grande).

Ces courants créent alors un champ électromagnétique qui s'ajoute au champ électromagnétique incident.

### V.1. Conducteur ohmique et effet de peau

On rappelle qu'un conducteur ohmique est un conducteur vérifiant la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

où  $\gamma$  est la conductivité électrique du conducteur. Pour le cuivre,  $\gamma \simeq 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ .

Cette formulation de la loi d'Ohm locale (dite statique) reste valable pour une large gamme de fréquence ( $f \ll \frac{1}{\tau} = 10^{14} \text{ Hz}$ , avec  $\tau$  le temps séparant deux collisions pour un électron).

Au-delà, la conductivité diminue et un déphasage entre le champ et le courant apparaît (les électrons n'arrivent plus à "suivre" les oscillations trop rapides du champ).

#### Remarque

On rappelle l'équation différentielle vérifiée par un électron dans le modèle de Drüde :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

ce qui donne, en notations complexes :

$$\underline{j} \left( \frac{1}{\tau} + i\omega \right) = \frac{ne^2}{m} \underline{E} \Rightarrow \frac{ne^2\tau}{1 + i\omega\tau} \underline{E} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \underline{E} = \underline{\gamma} \underline{E}$$

où  $\gamma_0$  est la conductivité statique du conducteur et  $\underline{\gamma}$  sa conductivité complexe.

On voit bien que  $\underline{\gamma} \simeq \gamma_0$  pour  $f \ll \frac{1}{\tau}$ .

Écrivons les équations de Maxwell dans un conducteur ohmique

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \operatorname{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Remarque

L'équation différentielle vérifiée par  $\rho$  dans un conducteur ohmique s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad ; \quad \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \vec{j} = \gamma_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{\epsilon_0} \rho = 0$$

On en déduit que  $\rho \rightarrow 0$  au bout d'un temps de l'ordre de  $\tau' = \frac{\epsilon_0}{\gamma_0} \simeq 10^{-17}$  s. Pour des fréquences  $f \ll \frac{1}{\tau'}$ , la densité volumique de charge pourra être prise nulle dans le conducteur. De plus, aux fréquences envisagées :

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\|\vec{j}_D\|} \simeq \frac{\gamma_0}{\epsilon_0 \omega} \simeq \frac{1}{\tau' \omega} \gg 1$$

le courant de conduction est très grand devant le courant de déplacement.

Dans l'approximation basse-fréquence ( $f < 10^{17}$  Hz), les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}) &= 0 & \operatorname{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \gamma_0 \vec{E} \end{aligned}$$

En prenant le double rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

On en déduit l'équation de propagation dans le conducteur ohmique

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

En utilisant la notation complexe  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ , on détermine la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = -i \mu_0 \gamma_0 \omega \quad \text{soit} \quad \underline{k} = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm \frac{1-i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

$\delta$  est homogène à une longueur, appelée épaisseur de peau.

L'onde dans le métal décroît donc exponentiellement et est atténuée au bout d'une distance de l'ordre de l'épaisseur de peau.

Remarque

Pour le cuivre, avec une onde de l'ordre du GHz, on a une épaisseur de peau de l'ordre du  $\mu\text{m}$ , donc très faible.

Propriété

La propagation d'une onde électromagnétique de période grande devant le temps de relaxation du matériau ( $f \ll 10^{14}$  Hz) est caractérisée par l'effet de peau : l'onde ne pénètre dans le milieu que sur une distance de l'ordre de l'épaisseur de peau  $\delta$ .

Cette distance est d'autant plus faible que la conductivité du matériau et la fréquence de l'onde sont élevées.

Propriété

Un conducteur est dit parfait si  $\gamma \rightarrow \infty$ .

L'épaisseur de peau dans un conducteur parfait est quasi-nulle,  $\delta \rightarrow 0$ , et aucune onde ne pénètre dans le matériau.

V.2. Réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait

On considère une onde incidente plane progressive monochromatique, polarisée rectilignement, se propageant dans l'air selon  $\vec{u}_z$  telle que :

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= E_{0i} e^{j(\omega t - k_i z)} \vec{u}_x & \text{avec } \vec{k}_i &= \frac{\omega}{c} \vec{u}_z \\ \vec{B}_i &= \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{E_{0i}}{c} e^{j(\omega t - k_i z)} \vec{u}_y\end{aligned}$$

On suppose que cette onde arrive en incidence normale sur un conducteur parfait : l'interface air/conducteur est représentée par le plan  $z = 0$ .

À l'interface, on a les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \vec{E}_{\text{air}} - \vec{E}_{\text{cond}} = \vec{E}_{\text{air}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (-\vec{u}_z) \\ \vec{B}_{\text{air}} - \vec{B}_{\text{cond}} = \vec{B}_{\text{air}} = \mu_0 \vec{J}_s \wedge (-\vec{u}_z) \end{cases}$$

La composante tangentielle du champ électrique est continue et la composante normale du champ magnétique est continue.

Pour que les conditions aux limites soient vérifiées, il faut que la composante tangentielle du champ électrique dans l'air, au voisinage du conducteur ( $z = 0$ ) soit nulle. Ceci n'est possible que si une autre onde, appelée onde réfléchie, se superpose à l'onde incidente.

Remarque

Dans le cas général, il existe une onde réfléchie et une onde transmise. Comme aucune onde ne peut exister dans un conducteur parfait, il n'y a pas d'onde transmise ici.

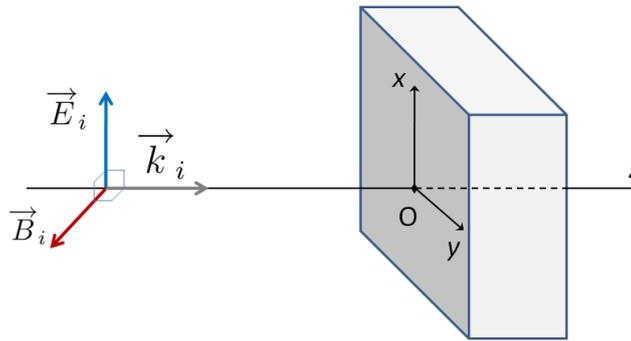


FIGURE 13 – Onde électromagnétique incidente arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait.

Les champs électrique et magnétique de l'onde réfléchie ont pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= \underline{\vec{E}}_{0r} e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \\ \vec{B}_r &= \frac{\vec{k}_r \wedge \underline{\vec{E}}_r}{\omega_r} = \frac{\vec{k}_r \wedge \underline{\vec{E}}_{0r}}{\omega} e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \end{aligned}$$

Dans l'air ( $z < 0$ ), l'onde réfléchie se superpose à l'onde incidente. Les champs électrique et magnétique valent donc

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}}_{\text{air}} &= \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r \\ \underline{\vec{B}}_{\text{air}} &= \underline{\vec{B}}_i + \underline{\vec{B}}_r \end{aligned}$$

Appliquons les conditions aux limites pour les champs électrique et magnétique :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}}_{\text{air}}(z=0, t) &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\vec{u}_z) \\ \underline{\vec{B}}_{\text{air}}(z=0, t) &= \mu_0 \underline{\vec{j}}_s \wedge (-\vec{u}_z) \end{aligned}$$

En remplaçant les champs par leurs expressions complexes, on trouve

$$E_{0i} e^{i\omega t} \vec{u}_x + \underline{\vec{E}}_{0r} e^{i(\omega_r t - k_{rx}x - k_{ry}y)} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z \tag{1}$$

$$\frac{E_{0i}}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y + \frac{\vec{k}_r \wedge \underline{\vec{E}}_{0r}}{\omega_r} e^{i(\omega_r t - k_{rx}x - k_{ry}y)} = -\mu_0 \underline{\vec{j}}_s \wedge \vec{u}_z \tag{2}$$

où  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\vec{j}}_s$  sont les grandeurs complexes associées à la densité surfacique de charge  $\sigma$  et à la densité surfacique de courant  $\vec{j}_s$ .

1. Projétons l'équation (1) sur les vecteurs  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  :

$$E_{0i} e^{i\omega t} + \underline{\vec{E}}_{0r} \cdot \vec{u}_x e^{i(\omega_r t - k_{rx}x - k_{ry}y)} = 0 \tag{3}$$

$$\underline{\vec{E}}_{0r} \cdot \vec{u}_y e^{i(\omega_r t - k_{rx}x - k_{ry}y)} = 0 \tag{4}$$

$$\underline{\vec{E}}_{0r} \cdot \vec{u}_z e^{i(\omega_r t - k_{rx}x - k_{ry}y)} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{5}$$

2. En multipliant l'équation (3) par  $e^{-i\omega t}$ , on obtient :

$$E_{0i} + \underline{\vec{E}}_{0r} \cdot \vec{u}_x e^{i((\omega_r - \omega)t - k_{rx}x - k_{ry}y)} = 0$$

Le membre de droite est indépendant de  $x$ ,  $y$  et  $t$ . Le membre de gauche est donc une fonction explicite de  $x$ ,  $y$  et  $t$  qui ne dépend ni de  $x$ , ni de  $y$ , ni de  $t$ . On en déduit :

$$\begin{aligned}\omega_r &= \omega \\ k_{rx} &= 0 \\ k_{ry} &= 0\end{aligned}$$

Le vecteur d'onde  $\vec{k}_r$  de l'onde réfléchie ne possède qu'une composante suivant  $\vec{u}_z$ . La propagation de l'onde réfléchie se faisant dans le sens des  $z$  décroissants, on en déduit

$$\vec{k}_r = -\frac{\omega}{c} \vec{u}_z$$

Remarque

Avec une incidence quelconque, on retrouverait les lois de Descartes : l'onde réfléchie est dans le plan d'incidence et symétrique de l'onde incidente par rapport à la normale au dioptre.

Par ailleurs, la fréquence de l'onde réfléchie est identique à celle de l'onde incidente.

3. Les équations de passage pour le champ électrique se simplifient en

$$\begin{aligned}E_{0i} + \vec{E}_{0r} \cdot \vec{u}_x &= 0 \\ \vec{E}_{0r} \cdot \vec{u}_y &= 0 \\ \vec{E}_{0r} \cdot \vec{u}_z e^{i\omega t} &= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Comme l'onde réfléchie est transverse (OPPM dans le vide) :  $\vec{E}_{0r}$  ne possède des composantes que sur  $\vec{u}_x$  et sur  $\vec{u}_y$ . Or la projection de  $\vec{E}_{0r}$  sur  $\vec{u}_y$  est nulle. On en déduit

$$\vec{E}_{0r} = E_{0rx} \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad E_{0rx} = -E_{0i}$$

On en déduit le champ électrique réfléchi

$$\vec{E}_r = -E_{0i} e^{i(\omega t + k_i z)} \vec{u}_x$$

On obtient l'expression du champ magnétique à l'aide de la relation de structure

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{-E_{0i}}{c} e^{i(\omega t + k_i z)} (-\vec{u}_z) \wedge \vec{u}_x \Rightarrow \vec{B}_r = \frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t + k_i z)} \vec{u}_y$$

Remarque

Par rapport à l'onde incidente :

- ★ le champ électrique réfléchi est déphasé de  $\pi$  :  $\vec{E}_{0r} = -\vec{E}_{0i}$  ;
- ★ le champ magnétique réfléchi n'est pas déphasé :  $\vec{B}_{0r} = \vec{B}_{0i} = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_{0i}}{c}$ .

Propriété

Lors de la réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait, l'onde réfléchie a la même pulsation et se propage en sens inverse de l'onde incidente.

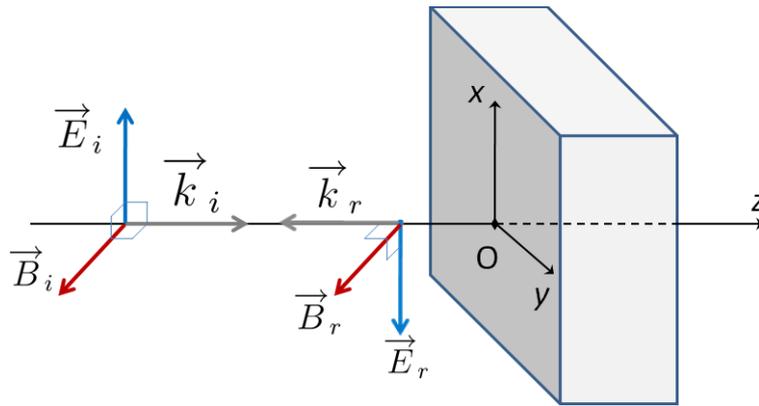


FIGURE 14 –

### V.3. Densités surfaciques

En utilisant l'équation de passage pour le champ électrique projetée sur  $\vec{u}_z$ , on trouve :

$$\vec{E}_{0r} \cdot \vec{u}_z e^{i\omega t} = 0 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\sigma = 0}$$

Utilisons la relation de passage pour le champ magnétique

$$\vec{B}_i(z = 0, t) + \vec{B}_r(z = 0, t) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$

soit

$$\frac{E_{0i}}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y + \frac{E_{0r}}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$

On en déduit

$$\vec{j}_s = \frac{2E_{0i}}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \vec{u}_x = \frac{2\vec{E}_i(z = 0, t)}{\mu_0 c}$$

En notations réelles :

$$\boxed{\vec{j}_s = \frac{2\vec{E}_i}{\mu_0 c}}$$

#### Propriété

Une O.P.P.M. arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait génère au niveau de la surface du conducteur :

★ une densité surfacique de charge nulle

$$\sigma = 0$$

★ une densité surfacique de courant proportionnelle au champ électrique incident au niveau de la surface

$$\vec{j}_s = \frac{2\vec{E}_i}{\mu_0 c}$$

Remarque

Ce sont les courants surfaciques qui sont à l'origine du champ réfléchi. Cela explique pourquoi l'onde réfléchie a même pulsation que l'onde incidente : des courants oscillants à la pulsation  $\omega$  engendrent en régime permanent un champ électromagnétique de pulsation  $\omega$ .

**V.4. Structure de l'onde résultante : onde stationnaire**

Déterminons les expressions des champs électrique et magnétique total dans le demi-espace  $z < 0$ .  
 Pour le champ électrique :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{tot}}(z, t) &= \vec{E}_i(z, t) + \vec{E}_r(z, t) \\ &= E_{0i} [e^{i(\omega t - kz)} - e^{i(\omega t + kz)}] \vec{u}_x \\ &= E_{0i} e^{i\omega t} [e^{-ikz} - e^{+ikz}] \vec{u}_x \\ &= -2iE_{0i} e^{i\omega t} \sin(kz) \vec{u}_x \end{aligned}$$

Pour le champ magnétique :

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{tot}}(z, t) &= \vec{B}_i(z, t) + \vec{B}_r(z, t) \\ &= \frac{E_{0i}}{c} [e^{i(\omega t - kz)} + e^{i(\omega t + kz)}] \vec{u}_y \\ &= \frac{E_{0i}}{c} e^{i\omega t} [e^{+ikz} + e^{-ikz}] \vec{u}_y \\ &= 2 \frac{E_{0i}}{c} e^{i\omega t} \cos(kz) \vec{u}_y \end{aligned}$$

Les champs réels sont donc de la forme

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{tot}} &= \text{Re} [\vec{E}_{\text{tot}}(z, t)] = 2E_{0i} \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{u}_x \\ \vec{B}_{\text{tot}} &= \text{Re} [\vec{B}_{\text{tot}}(z, t)] = 2 \frac{E_{0i}}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{u}_y \end{aligned}$$

Cette onde :

- ★ est une onde plane puisque les champs ne dépendent que de la coordonnée cartésienne  $z$  ;
- ★ n'est pas une onde progressive car les champs ne dépendent pas de  $z \pm ct$ .

En revanche, les champs s'écrivent comme le produit d'une fonction du temps par une fonction d'espace. On parle d'onde stationnaire.

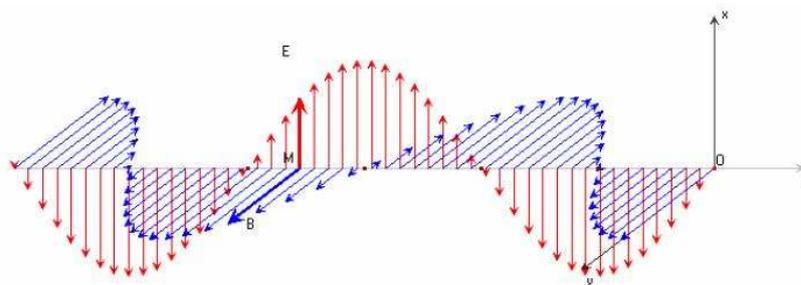


FIGURE 15 –

**Propriété**

L'onde résultant de la superposition des O.P.M. incidente et réfléchi est une onde plane stationnaire, dont les champs électriques et magnétiques sont orthogonaux entre eux et oscillent en quadrature.

Le champ électrique total s'annule pour

$$\sin(kz) = 0 \quad \text{soit} \quad z_n = n \frac{\pi}{k} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

Mais  $\pi/k = \lambda/2$ . Le champ électrique total s'annule pour

$$z_n = n \frac{\lambda}{2} \quad n \in \mathbb{N}$$

Ces positions ne dépendent pas du temps. On parle de nœuds pour le champ électrique.

Le champ électrique total est extrémal quand

$$\sin(kz) = \pm 1 \quad \text{soit} \quad z_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2k} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

Avec  $\pi/k = \lambda/2$ , on voit que le champ électrique total est extrémal pour

$$z_n = \frac{2n + 1}{2} \frac{\lambda}{2} \quad n \in \mathbb{N}$$

Ces positions ne dépendent pas du temps. On parle de ventre pour le champ électrique.

En comparant les expressions des champs électrique et magnétique, on constate que les nœuds pour le champ électrique correspondent aux ventres pour le champ magnétique et vice-versa.

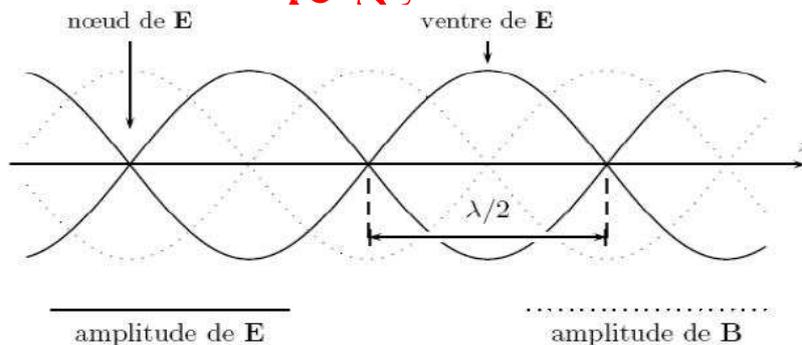


FIGURE 16 –

**V.5. Aspect énergétique**

On cherche à exprimer les vecteurs de Poynting des ondes incidente et réfléchi.

Les champs électrique et magnétique de l'onde incidente s'écrivent, en notations réelles :

$$\vec{E}_i(z, t) = \text{Re} \left[ \vec{E}_i(z, t) \right] = E_{0i} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_i(z, t) = \text{Re} \left[ \vec{B}_i(z, t) \right] = \frac{E_{0i}}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$$

Le vecteur de Poynting de l'onde incidente vaut

$$\vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_{0i}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

Pour l'onde réfléchie :

$$\begin{aligned} \vec{E}_r(z, t) &= \text{Re} [\vec{E}_r(z, t)] = -E_{0i} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x \\ \vec{B}_r(z, t) &= \text{Re} [\vec{B}_r(z, t)] = \frac{E_{0i}}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y \end{aligned}$$

Le vecteur de Poynting associé à l'onde réfléchie s'écrit :

$$\vec{\Pi}_r = \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} = -\frac{E_{0i}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + kz) \vec{u}_z$$

On constate que le vecteur de Poynting est dans le sens de la propagation.  
En valeur moyenne, la puissance surfacique associée à l'onde incidente vaut

$$\langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

En valeur moyenne, la puissance surfacique associée à l'onde réfléchie vaut

$$\langle \|\vec{\Pi}_r\| \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

**Définition :**

On définit le coefficient de réflexion en puissance  $R$  par

$$R = \frac{\langle \|\vec{\Pi}_r\| \rangle}{\langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle}$$

Dans le cas d'une O.P.P.M. arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait :

$$R = \frac{\langle \|\vec{\Pi}_r\| \rangle}{\langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle} = 1$$

Remarque

Toute l'énergie incidente est réfléchie par le conducteur parfait.

Les champs, dans le demi-espace  $z < 0$ , ont pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{tot}} &= \text{Re} \left[ \vec{E}_{\text{tot}}(z, t) \right] = 2E_{0i} \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{u}_x \\ \vec{B}_{\text{tot}} &= \text{Re} \left[ \vec{B}_{\text{tot}}(z, t) \right] = 2 \frac{E_{0i}}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{u}_y\end{aligned}$$

Le vecteur de Poynting associé à l'onde stationnaire s'écrit

$$\begin{aligned}\vec{\Pi}_{\text{tot}} &= \frac{\vec{E}_{\text{tot}} \wedge \vec{B}_{\text{tot}}}{\mu_0} \\ &= 4 \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \sin(kz) \sin(\omega t) \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{u}_z \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \sin(2kz) \sin(2\omega t) \vec{u}_z\end{aligned}$$

En valeur moyenne, on trouve

$$\langle \vec{\Pi}_{\text{tot}} \rangle = \vec{0}$$

#### Propriété

Une onde stationnaire ne transporte aucune énergie en moyenne.

Prof. AMAMI  
tel:95 55 64 10

# champs dans les conducteurs Effet de peau

## I Équations de Maxwell dans l'A.R.Q.S.

### I.1. Rappels sur l'A.R.Q.S.

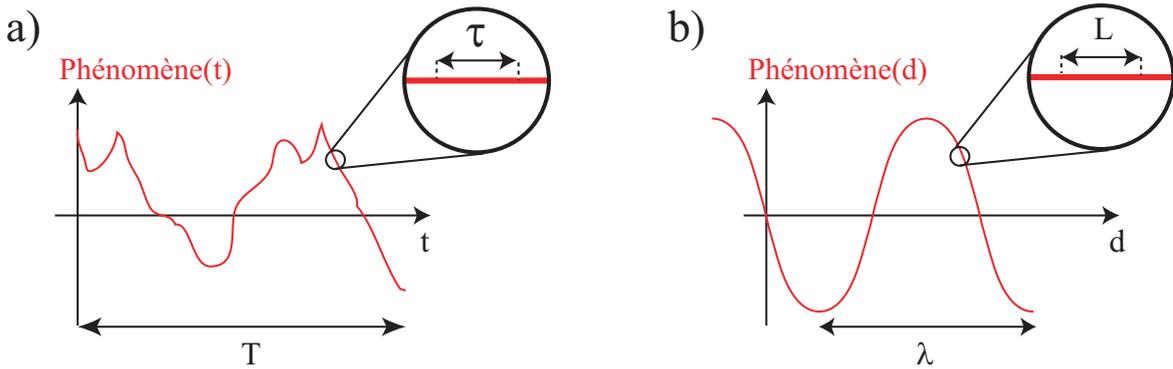
Lors de l'étude du champ magnétostatique, nous avons vu que le cadre de l'A.R.Q.S. correspondait aux cas où les dimensions  $L$  du circuit étaient faibles devant la distance caractéristique  $\lambda$  des variations des champs ou, de façon équivalente, que les temps de propagation  $\tau$  pouvaient être négligés par rapport aux variations temporelles  $T$  des champs.

**Définition :**

L'approximation des régimes quasi-stationnaires (A.R.Q.S.) consiste à négliger le temps de propagation  $\tau_p$  d'un signal électromagnétique devant sa période  $T$  ( $\tau_p \ll T$ ).

De façon équivalente, l'A.R.Q.S. consiste à négliger la distance de propagation  $L$  devant la longueur d'onde  $\lambda = cT$  du signal électromagnétique ( $L \ll \lambda$ ).

$$\underbrace{\tau}_{\text{temps de propagation}} \ll \underbrace{T}_{\text{durée du phénomène}}$$



$$\underbrace{\lambda}_{\text{longueur d'onde du signal}} \gg \underbrace{L}_{\text{longueur caractéristique de propagation du signal}}$$

## I.2. Courants de déplacement dans l'A.R.Q.S.

### a) Courants de déplacement

On se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Par conséquent, le temps caractéristique  $T$  de variation des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  est très long devant le temps de propagation sur la longueur caractéristique  $L$  de l'expérience, soit :

$$T \gg \tau = \frac{L}{c} \quad \text{ou} \quad L \ll \lambda = cT$$

L'équation de Maxwell-Faraday permet de déterminer l'ordre de grandeur relatif des champs électriques et magnétiques :

$$\|\vec{\text{rot}} \vec{E}\| \simeq \frac{E}{L} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\| \simeq \frac{B}{T}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{E}{L} \simeq \frac{B}{T}$$

Comparons maintenant les ordres de grandeur des termes  $\vec{\text{rot}} \vec{B}$  et  $\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\|\vec{\text{rot}} \vec{B}\| \simeq \frac{B}{L} \simeq \frac{TE}{L^2} \quad \text{et} \quad \epsilon_0 \mu_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \simeq \frac{E}{c^2 T}$$

Le rapport de ces deux termes a donc pour ordre de grandeur :

$$\frac{\epsilon_0 \mu_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\|\vec{\text{rot}} \vec{B}\|} \simeq \left( \frac{L}{cT} \right)^2$$

C'est donc un infiniment petit d'ordre 2 dans l'A.R.Q.S. . Dans le cadre de l'ARQS, on se place au premier ordre en  $\frac{L}{cT}$ , et on négligera donc le terme  $\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  dans l'équation de Maxwell-Ampère.

### Propriété

Dans l'A.R.Q.S., les courants de déplacement sont négligeables devant les courants de conduction

$$\epsilon_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \|\vec{j}\|$$

### b) Loi des nœuds

Prenons la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \implies \text{div} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = 0 = \mu_0 \left( \text{div} \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{E} \right)$$

Dans l'A.R.Q.S., les courants de déplacement sont négligeables devant les courants de conduction. On en déduit

$$\operatorname{div}(\vec{j}) \approx 0$$

La relation  $\operatorname{div}(\vec{j}) = 0$ , valable dans l'A.R.Q.S. indique que  $\vec{j}$  est à flux conservatif.

En effet, considérons une surface fermée fixe  $\Sigma$ . Le théorème de Green-Ostrogradsky permet d'écrire

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d^2\vec{S} = I_{\text{sortante}} = \iiint_{V(\Sigma)} \operatorname{div}(\vec{j}) d^3V = 0$$

Si la surface  $\Sigma$  enlace un nœud de circuit électrique, on retrouve la loi des nœuds.

### Loi de Kirchhoff ou loi des nœuds

Dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires A.R.Q.S., le vecteur densité volumique de courant est à flux conservatif

$$\operatorname{div}(\vec{j}) = 0$$

On en déduit que la somme des courants algébriques arrivant à un nœud de circuit électrique est nulle.

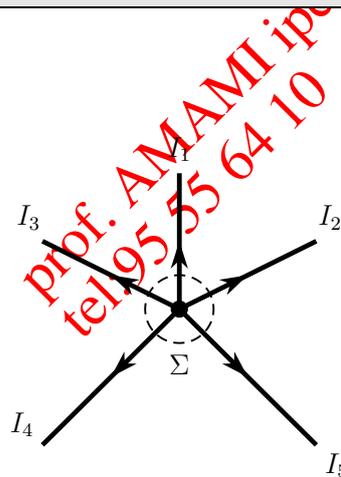


FIGURE 1 – Dans l'A.R.Q.S., l'équation de conservation de la charge s'identifie à la loi des nœuds :  $\sum_i I_i = 0$ .

### c) Distribution de charges

Par comparaison avec l'équation de conservation de la charge

$$\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

on en déduit que  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  est négligeable dans l'A.R.Q.S. .

Propriété

Dans l'A.R.Q.S., les variations temporelles de la densité volumique de charge sont négligées

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$$

Remarque

L'A.R.Q.S. correspond à un régime lentement variable.

I.3. Équations de Maxwell dans l'A.R.Q.S.

Dans l'A.R.Q.S., les courants de déplacement peuvent être négligés. On retrouve les équations de Maxwell dans l'A.R.Q.S. .

Équations de Maxwell dans le vide et dans l'A.R.Q.S.

Dans l'A.R.Q.S., les courants de déplacements peuvent être négligés et les équations de Maxwell deviennent

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Remarque

Le théorème d'Ampère sous la forme

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

est valable à condition de ne négliger les courants de déplacement. L'application du théorème d'Ampère sous cette forme fournit des résultats très proche des mesures expérimentales réalisées en TP.

Remarque

Le phénomène d'induction reste valable dans l'A.R.Q.S. : l'équation de Maxwell-Faraday reste valable.

De l'équation de Maxwell-flux, on déduit, dans l'A.R.Q.S. :

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$$

L'équation de Maxwell-Faraday montre que, dans l'A.R.Q.S. :

$$\text{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \implies \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad}(V)$$

### Propriété

Dans l'A.R.Q.S., la relation entre les champs et les potentiels reste valable

$$B = \text{rot}(\vec{A}) \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\text{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

## II Champ électromagnétique dans les conducteurs ohmiques

### II.1. Loi d'Ohm locale et A.R.Q.S.

Lorsqu'un champ électrique est appliqué dans un milieu possédant des porteurs de charge mobiles un courant électrique apparaît. Un tel milieu est qualifié de **conducteur**. Les deux principaux types de conducteurs sont les *métaux* (cuivre, fer ...) et les *solutions électrolytiques* (solutions contenant des ions).

On constate expérimentalement, pour une très grande variété de matériaux, que la densité de courant  $\vec{j}$  est proportionnelle au champ électrique  $\vec{E}$  appliqué. Cette propriété reste vraie pour des valeurs de champ électrique variant dans une très large gamme. La constante de proportionnalité dépend notamment du milieu conducteur et de la température.

#### Définition :

Dans un conducteur ohmique, la densité volumique de courant  $\vec{j}$  et le champ électrique  $\vec{E}$  vérifient la loi d'Ohm locale

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

où  $\gamma$  est la conductivité électrique.

Pour autant qu'on puisse l'expérimenter en travaux pratiques, où les durées caractéristiques des phénomènes détectables sont supérieures à la centaine de nanoseconde, l'établissement de la densité de courant dans un métal ou dans un électrolyte est *instantanée*. On pourra donc négliger les temps de propagation des signaux à l'intérieur du matériau, et utiliser le cadre de l'ARQS.

Exercice

On considère un champ électrique variant à la pulsation  $\omega$  à l'intérieur d'un métal, de conductivité  $\gamma = 10^8 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . Déterminer une condition sur  $\omega$  pour que l'A.R.Q.S. reste valable.

L'A.R.Q.S. est valable si l'on peut négliger les courants de déplacement, c'est-à-dire si

$$\frac{\varepsilon_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \vec{j} \right\|} \ll 1 \quad \text{soit} \quad \frac{\omega \varepsilon_0 \left\| \vec{E} \right\|}{\gamma \left\| \vec{E} \right\|}$$

On doit donc avoir

$$\frac{\omega \varepsilon_0}{\gamma} \ll 1 \Rightarrow \omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0} = 10^8 \times 36\pi \cdot 10^9 = 1,1 \cdot 10^{19} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Cette valeur correspond à une fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi} = 1,8 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$ , soit une longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = \frac{c}{f} = 10^{-10} \text{ m}^{-1}$ .

L'A.R.Q.S. pourra être utilisée dans les conducteurs ohmiques métalliques.

Remarque

En solution aqueuse, les conductivités sont de l'ordre de  $\gamma = 1 \text{ } \mu\text{S} \cdot \text{cm}^{-1} = 10^{-4} \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . On en déduit la condition sur la pulsation du champ

$$\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0} = 10^{-4} \times 36\pi \cdot 10^9 = 1,1 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'A.R.Q.S. sera généralement vérifiée dans les solutions électrolytiques.

Propriété

- L'A.R.Q.S. est généralement vérifiée dans les conducteurs ohmiques.
- ★ Dans les métaux, l'A.R.Q.S. est valable si les champs varient peu sur une durée de l'ordre de  $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} = 10^{-19} \text{ s}$ ;
  - ★ Dans les solutions électrolytiques, l'A.R.Q.S. est valable si les champs varient peu sur une durée de l'ordre de  $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} = 10^{-7} \text{ s}$ .

II.2. Densité volumique de charge dans un conducteur ohmique

Recherchons l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge  $\rho$  dans un conducteur. L'équation de Maxwell-Gauss et la loi d'Ohm locale permettent d'écrire :

$$\text{div} \left( \begin{array}{c} \vec{j} \\ \gamma \end{array} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Or l'équation locale de conservation de la charge permet d'obtenir une autre expression de  $\text{div } \vec{j}$  :

$$\text{div}(\vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Donc en identifiant les deux expressions de  $\text{div } \vec{j}$ , on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0$$

En tout point  $M$ , la solution de cette équation s'écrit

$$\rho(M, t) = \rho(M, t_0) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\gamma}{\epsilon_0}$$

Le calcul de  $\tau$  pour un conducteur métallique ( $\gamma \sim 10^8 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ) fournit

$$\tau \approx 10^{-19} \text{ s}$$

Cette expression prouve donc, compte-tenu de la valeur très faible de  $\tau$ , que la densité volumique de charge dans un conducteur tend quasiment instantanément vers zéro.

**Propriété**

Un conducteur ohmique reste localement neutre en tout point à tout instant :

$$\rho(M, t) = 0$$

**II.3. Équations de Maxwell dans un conducteur ohmique**

Compte-tenu des résultats précédents, les équations de Maxwell dans un conducteur ohmique s'écrivent

$$\begin{cases} \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 & \text{équation de Maxwell-Gauss} \\ \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{équation de Maxwell-Faraday} \\ \text{div}(\vec{B}) = 0 & \text{équation de Maxwell-flux} \\ \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E} & \text{équation de Maxwell-Ampère} \end{cases}$$

**Propriété**

Dans un conducteur ohmique et dans l'A.R.Q.S., les équations de Maxwell prennent la forme

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{E}) &= 0 & \text{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \text{rot}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \gamma \vec{E} \end{aligned}$$

Remarque

Les équations pour les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont couplées.

## II.4. Équations de diffusion pour les champs

Cherchons des équations découplées en  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

### a) Champ électrique

Prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = -\vec{\text{rot}}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\text{rot}}(\vec{B})$$

L'équation de Maxwell-Ampère permet d'exprimer le rotationnel de  $\vec{B}$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\gamma\vec{E})$$

Or

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = \vec{\text{grad}}\left(\underbrace{\text{div}\vec{E}}_{=0}\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$$

On en déduit une équation découplée pour  $\vec{E}$

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

### b) Champ magnétique

Prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = \mu_0\gamma\vec{\text{rot}}(\vec{E})$$

L'équation de Maxwell-Faraday permet d'exprimer le rotationnel de  $\vec{E}$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = \mu_0\gamma\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0\gamma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Or

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = \vec{\text{grad}}\left(\underbrace{\text{div}\vec{B}}_{=0}\right) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$$

On en déduit une équation découplée pour  $\vec{B}$

$$\Delta\vec{B} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

Remarque

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vérifient la même équation dans le conducteur. Cette équation, reliant les dérivées secondes spatiales et la dérivée temporelle du champ est appelée équation de diffusion.

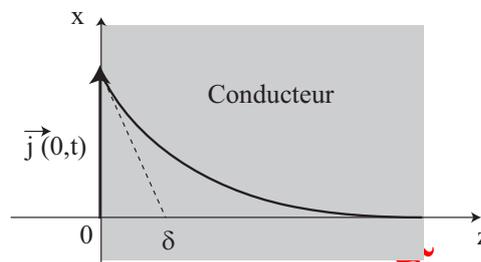
### III Application : effet de peau dans un conducteur ohmique

#### III.1. Position du problème

Recherchons la solution de l'équation différentielle précédente dans un cas particulier. On étudie un conducteur occupant le demi-espace  $z > 0$ , comme le montre la figure ci-dessous.

Appliquons, à la surface du conducteur, un champ électrique uniforme (c'est-à-dire indépendant de  $x$  et  $y$ ), tangent à la surface et variant sinusoidalement avec le temps. Un tel champ peut être généré, par exemple, par une onde électromagnétique atteignant le conducteur. Le champ en  $z = 0$  sera pris de la forme

$$\vec{E}(z = 0, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$$



Le champ électrique à l'intérieur du conducteur vérifie l'équation

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

Le problème est invariant par translation suivant  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ . D'autre part, le champ variant de façon sinusoidale avec le temps en  $z = 0$ , il est légitime de chercher une solution, en tout point intérieur au conducteur, sous la forme :

$$\vec{E}(z, t) = E(z, t) \vec{u}_x = E_0(z) \cos[\omega t - \varphi(z)] \vec{u}_x$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$E_0(z = 0) = E_0 \quad \text{et} \quad \varphi(z = 0) = 0$$

L'équation pour le champ électrique devient en projection sur  $\vec{u}_x$

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} - \mu_0 \gamma \frac{\partial E(z, t)}{\partial t} = 0$$

#### III.2. Champ électrique dans le conducteur

L'équation différentielle étant linéaire, on peut utiliser la notation complexe en posant :

$$\underline{E}(z, t) = E_0(z) e^{i[\omega t - \varphi(z)]} = \underline{E}_0(z) e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{E}_0(z) = E_0(z) e^{-i\varphi(z)}$$

L'équation différentielle précédente devient, en notations complexes :

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_0(z)}{\partial z^2} - i \omega \mu_0 \gamma \underline{E}_0(z) = 0$$

$\underline{E}_0(z)$  vérifie donc une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, d'équation caractéristique :

$$r^2 - i \mu_0 \gamma \omega = 0 \quad \text{soit} \quad r^2 - e^{i\pi/2} \omega \gamma \mu_0 = 0$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont de la forme

$$r_{\pm} = \pm e^{i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \pm \frac{1+i}{\delta} \quad \text{où} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Les solutions de l'équation sont donc de la forme

$$\underline{E}_0(z) = \underline{A} e^{r_+ z} + \underline{B} e^{r_- z} = \underline{A} e^{(1+i)z/\delta} + \underline{B} e^{-(1+i)z/\delta}$$

où  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  sont des constantes d'intégration complexes.

Or, pour  $z \rightarrow +\infty$ , la densité volumique de courant  $j(z, t) = \text{Re} [j(z, t)]$  reste bornée donc

$$E(z, t) = \frac{j(z, t)}{\gamma} \quad \text{borné} \quad \text{pour} \quad z \rightarrow \infty$$

On en déduit nécessairement  $\underline{A} = 0$ . En  $z = 0$ ,  $\underline{E}_0(z) = E_0$  de sorte que  $\underline{E}_0(z = 0) = E_0 = \underline{B}$ .

On en déduit la solution complexe

$$\underline{E}_0(z) = E_0 e^{-(1+i)z/\delta} = E_0(z) e^{i\varphi(z)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_0(z) = E_0 e^{-z/\delta} \\ \varphi(z) = -\frac{z}{\delta} \end{cases}$$

La solution compète pour le champ électrique s'écrit donc

$$\vec{E}(z, t) = \underline{E}_0(z) e^{i\omega t} \vec{u}_x = E_0 e^{-z/\delta} e^{i[\omega t - z/\delta]} \vec{u}_x$$

soit, en notations réelles

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$$

Les variations temporelles de  $\vec{E}(z, t)$  sont ressenties à la cote  $z$  avec le retard  $\frac{z}{\omega\delta}$  et leur amplitude est atténuée du facteur exponentiel  $e^{-\frac{z}{\delta}}$ .

Ainsi, le champ électrique pénètre dans le conducteur sur une distance caractéristique  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ . On parle d'épaisseur de peau  $\delta$  et d'effet de peau.

### III.3. Champ magnétique dans le conducteur

De l'expression du champ électrique, on déduit le champ magnétique à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Or

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) &= \vec{\nabla} \wedge [E(z, t) \vec{u}_x] \\ &= \frac{\partial E(z, t)}{\partial z} \vec{u}_y \\ &= E_0 e^{-z/\delta} \left[ -\frac{1}{\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \frac{1}{\delta} \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right] \vec{u}_y\end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{E_0}{\delta} e^{-z/\delta} \left[ \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right] \vec{u}_y$$

En intégrant par rapport au temps, on obtient l'expression du champ magnétique

$$\vec{B}(z, t) = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{-z/\delta} \left[ \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right] \vec{u}_y$$

soit

$$\boxed{\vec{B}(z, t) = \frac{E_0 \sqrt{2}}{\delta \omega} e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_y}$$

Ainsi, tout comme le champ électrique, le champ magnétique pénètre dans le conducteur sur une distance caractéristique  $\delta$ . Toutefois, le champ magnétique est déphasé de  $\frac{\pi}{4}$  par rapport au champ électrique.

### III.4. Densité volumique de courant

La loi d'Ohm locale permet de déterminer la densité volumique de courant à l'intérieur du conducteur

$$\boxed{\vec{j}(z, t) = \gamma \vec{E}(z, t) = \gamma E_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x}$$

### III.5. Description énergétique

Faisons un bilan énergétique dans le conducteur.

#### a) Densité volumique d'énergie électromagnétique

La densité volumique d'énergie électromagnétique  $u_{em}$  peut être décomposée en deux termes  $u_{em} = u_e + u_m$ , où :

$$u_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad \text{et} \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

En remplaçant les champs par leurs expressions

$$\begin{aligned}u_e &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} e^{-2z/\delta} \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \\ u_m &= \frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta^2 \omega^2} e^{-2z/\delta} \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

En prenant les moyennes temporelles de ces expressions, on obtient

$$\langle u_e \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} e^{-2z/\delta} \quad \text{et} \quad \langle u_m \rangle = \frac{E_0^2}{4} \frac{\gamma}{\omega} e^{-2z/\delta}$$

Le rapport de ces deux contributions vaut

$$\frac{\langle u_e \rangle}{\langle u_m \rangle} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma}$$

Dans l'A.R.Q.S.,  $\varepsilon_0 \omega \ll \gamma$  d'où

$$\frac{\langle u_e \rangle}{\langle u_m \rangle} \ll 1 \quad \text{pour un conducteur ohmique dans l'A.R.Q.S.}$$

Dans l'A.R.Q.S., l'énergie électromagnétique contenue dans un conducteur ohmique est principalement sous forme magnétique.

### b) Puissance dissipée par effet Joule

Considérons une portion du conducteur ohmique de section constante  $S$  normale à  $\vec{u}_z$ .

La puissance volumique moyenne cédée par le champ aux porteurs de charge vaut

$$\left\langle \frac{d\mathcal{P}_J}{d\tau} \right\rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \gamma E_0^2 e^{-2z/\delta} \underbrace{\langle \cos^2 \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right) \rangle}_{=1/2} = \gamma \frac{E_0^2}{2} e^{-2z/\delta}$$

La puissance électromagnétique totale cédée à la portion de conducteur étudiée vaut donc

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \gamma \int_0^{+\infty} e^{-2z/\delta} S dz = \frac{\gamma \delta}{2} \frac{E_0^2}{2} S$$

### c) Puissance électromagnétique reçue par le conducteur

Calculons la puissance électromagnétique moyenne entrant une portion du conducteur ohmique de section constante  $S$  normale à  $\vec{u}_z$ .

Cette puissance est égale au flux du vecteur de Poynting à travers la surface  $S$  située en  $z = 0$

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \vec{\Pi}(z = 0, t) \cdot (S \vec{u}_z) \quad \text{soit, en valeur moyenne} \quad \langle \mathcal{P}_{\text{ray}} \rangle = \langle \vec{\Pi}(z = 0, t) \rangle \cdot (S \vec{u}_z)$$

Le vecteur de Poynting est donnée par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \delta \omega} e^{-2z/\delta} \left[ \cos^2 \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right) + \cos \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right) \sin \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right) \right] \vec{u}_z$$

d'où la valeur moyenne du vecteur de Poynting

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0 \delta \omega} \frac{E_0^2}{2} e^{-2z/\delta}$$

La puissance moyenne entrant dans le volume étudié vaut :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{ray}} \rangle = \langle \vec{\Pi}(z = 0, t) \cdot S \vec{u}_z \rangle = \frac{1}{\mu_0 \delta \omega} \frac{E_0^2}{2} S$$

Mais

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \implies \frac{1}{\mu_0 \delta \omega} = \frac{\gamma \delta}{2}$$

On en déduit

$$\langle \mathcal{P}_{\text{ray}} \rangle = \langle \mathcal{P}_J \rangle$$

Ce résultat était prévisible. En effet, **en moyenne**, l'énergie électromagnétique dans le conducteur ne varie pas :

$$\left\langle \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_{\text{em}} dt = 0 \quad \text{car } u_{\text{em}} \text{ est T-périodique}$$

Il n'y a donc pas d'accumulation d'énergie au sein du conducteur : toute la puissance moyenne entrant dans le conducteur est fournie aux porteurs de charge conformément au bilan de puissance électromagnétique

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

### III.6. Bilan

#### a) Effet de peau

L'amplitude des champs et des courants dans le conducteur décroît en  $e^{-\frac{z}{\delta}}$ . La longueur caractéristique de cet amortissement est :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

On l'appelle l'*épaisseur de peau*. Elle représente le profondeur de pénétration du champ électromagnétique et des courants à l'intérieur d'un conducteur : à une distance supérieure à quelques fois  $\delta$  de l'interface entre le conducteur et le milieu extérieur, les champs et les courants peuvent être considérés comme nuls.

Ce phénomène est appelé *effet de peau* parce que  $\delta$  prend des valeurs très faibles pour un bon conducteur aux fréquences moyennes et élevées. Pour le cuivre, dont la conductivité vaut  $\gamma = 6 \times 10^7 \text{S.m}^{-1}$  :

- à  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $\delta = 9 \text{ mm}$  ;
- à  $f = 1 \text{ MHz}$ ,  $\delta = 65 \text{ }\mu\text{m}$  ;
- à  $f = 5 \text{ GHz}$ ,  $\delta = 0.9 \text{ }\mu\text{m}$ .

Remarque

*Les résultats établis ici pour une géométrie particulière se généralisent à un conducteur de forme quelconque, lorsque l'épaisseur de peau reste faible devant le rayon de courbure du conducteur.*

**Propriété**

Dans l'A.R.Q.S., les champs électromagnétiques et la densité volumique de courant à l'intérieur d'un conducteur ohmique s'atténuent sur une distance caractéristique  $\delta$  appelée épaisseur de peau. On parle d'effet de peau.

Pour des champs oscillants à la pulsation  $\omega$ , l'épaisseur de peau est donnée par

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité du vide et  $\gamma$  la conductivité électrique du matériau.

**Remarque**

Plus la fréquence du champ est élevée (à condition de respecter l'A.R.Q.S), plus l'épaisseur de peau diminue.

**Conséquence**

Le champ électromagnétique à l'intérieur d'un conducteur parfait ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) est nul

$$\gamma \rightarrow \infty \implies \delta \rightarrow 0$$

Les courants sont alors uniquement surfaciques.

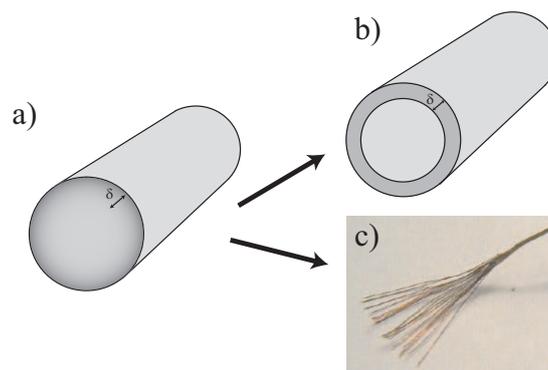
**b) Conséquences**

FIGURE 2 – a) Epaisseur de peau  $\delta$  dans un fil cylindrique. b) Epaisseur de peau dans un fil tubulaire. c) Conducteur multi-brin.

- ★ Dans un conducteur ohmique, le courant ne se propage qu'en surface à haute fréquence. L'utilisation d'un fil plein est alors inutile, et des fils tubulaires sont donc souvent utilisés afin d'économiser le matériau conducteur.

Cependant, la diminution de la section efficace du conducteur entraîne une augmentation de sa résistance car la résistance d'une portion de conducteur de longueur  $\ell$  et de section  $S$  vaut

$$R = \frac{\ell}{\gamma S}$$

Afin d'éviter ces pertes, on utilise un conducteur multi-brins.

- ★ La profondeur de peau permet également de prévoir la gravité des accidents électriques. En effet, en assimilant le corps à un conducteur ohmique, le courant pénètre dans le corps sur une distance caractéristique  $\delta$ .
  - On parle de **brûlures** lorsque la peau est en contact avec des courants de l'ordre de 100 MHz. En prenant une conductivité de l'ordre de  $\gamma = 3,5 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  pour la peau, on trouve

$$\delta \approx 1 \text{ cm}$$

- on parle d'**électrocution** pour des accidents avec le secteur ( $f = 50 \text{ Hz}$ ). L'épaisseur de peau est alors de l'ordre de

$$\delta \approx 10 \text{ m}$$

Le courant pénètre dans le corps et peut entraîner une fibrillation des muscles, notamment du cœur.

prof. AMAMI ipest  
tel:95 55 64 10

# Reflexion sur un métal - Guide d'onde

## 3. Réflexion sous incidence normale sur un conducteur plan parfait

### 3.1. Hypothèse du conducteur parfait

Un conducteur serait parfait s'il n'opposait aucune résistance au passage du courant électrique. Nous dirons qu'un conducteur réel peut être modélisé par le conducteur parfait lorsque sa conductivité est assez grande pour qu'elle puisse être considérée comme infinie :  $\gamma \rightarrow \infty$ . La puissance volumique transférée par

le champ électromagnétique au conducteur  $\frac{\delta P}{\delta \tau} = \gamma \bar{E}^2$  étant nécessairement

**finie**, le champ électrique dans un conducteur parfait est nul.

(Un modèle plus précis du conducteur permet de conclure que le champ électrique reste localisé au voisinage de la surface du conducteur, sur une épaisseur  $\delta$  d'autant plus faible que la fréquence est élevée, c'est l'effet de peau ; dans le volume du conducteur le champ électrique est nul).

Le champ magnétique est donné par l'intégration de l'équation de Maxwell

Faraday :  $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\text{rot} \bar{E} = \bar{0}$ . Le **champ magnétique** est nécessairement

**permanent** dans le volume du conducteur.

En conclusion, nous retiendrons que le champ électromagnétique non permanent est nul dans le volume d'un conducteur parfait, ce qui est le cas du champ d'une onde électromagnétique.

Par la suite, sauf mention contraire, nous excluons la présence d'un champ électromagnétique permanent.

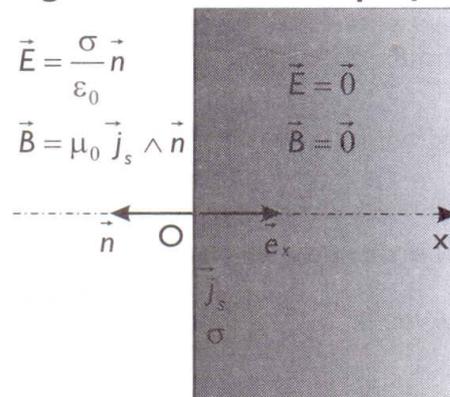
Notons que l'équation de Maxwell Gauss implique que  $\rho = 0$  et que l'équation de Maxwell Ampère implique que  $\bar{j} = \bar{0}$  : les charges et les courants sont nuls dans le volume d'un **conducteur parfait**, les éventuels charges et courants sont **localisés sur la surface** limitant le conducteur.

### 3.2. Champ électromagnétique au voisinage d'un conducteur parfait

Notons  $\sigma$  et  $\vec{j}_s$  les densités superficielles des charges et des courants localisés, dans le conducteur, sur une couche de très faible épaisseur, à l'interface métal - vide. Avec les notations de la figure ci-contre, le champ électromagnétique **dans le vide, au voisinage immédiat du conducteur**, s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

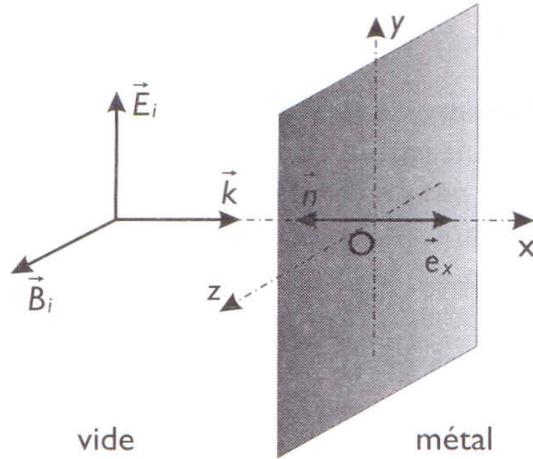
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$$



Le champ électrique dans le vide au voisinage d'un conducteur parfait est orthogonal à l'interface conducteur - vide.

### 3.3. Réflexion sous incidence normale d'une OPPH

Considérons une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement, de pulsation  $\omega$ , se propageant dans le vide selon la direction de vecteur unitaire  $\vec{e}_x$  perpendiculaire à l'interface vide – conducteur supposée assimilable à un plan infini. Choisissons comme axe Oy la direction de polarisation de l'onde, le champ électromagnétique de cette onde incidente a donc pour expression :



$$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_i = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}_i = \frac{E_0}{c} \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_z, \quad \text{avec}$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_x.$$

D'après le paragraphe précédent, le champ électrique dans le vide, au voisinage du métal, ne doit pas avoir de composante tangentielle. Il faut donc postuler, ce que justifie l'expérience, l'existence d'une onde réfléchie dont le champ électrique compense celui de l'onde incidente :  $\vec{E}_r(0^-, t) = -\vec{E}_i(0^-, t)$ .

### 3.4. Expression de l'onde réfléchie

Pour préciser la structure de cette onde réfléchie, utilisons des considérations de symétrie : pour l'onde incidente, le plan xOz, perpendiculaire au champ électrique, est plan d'antisymétrie et le plan xOy, perpendiculaire au champ magnétique, est plan de symétrie. L'onde réfléchie possède au moins les propriétés de symétrie de l'onde incidente qui en est la cause, donc le champ électrique réfléchi est perpendiculaire au plan xOz et le champ magnétique est perpendiculaire au plan xOy.

Ces résultats nous amènent à considérer pour l'onde réfléchie la structure d'une OPPH polarisée rectilignement suivant  $\vec{e}_y$  se propageant selon Ox, vers les x décroissants :  $\vec{E}_r(x, t) = E'_0 \exp i(\omega' t + k' x) \vec{e}_y$  avec  $\vec{k}' = -k' \vec{e}_x = -\frac{\omega'}{c} \vec{e}_x$ .

La relation de passage en O impose  $E'_0 \exp(i\omega' t) = -E_0 \exp(i\omega t), \forall t$  ; alors  $\omega' = \omega$  et  $E'_0 = -E_0$ .

L'onde réfléchie a la même pulsation que l'onde incidente. Ce résultat est assez intuitif : le champ électrique incident met en mouvement les électrons du métal au niveau de l'interface ; ceux-ci, animés d'un mouvement sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , émettent une onde électromagnétique de même pulsation (voir le chapitre suivant sur le rayonnement dipolaire). Nous avons, de plus,  $k' = \frac{\omega}{c} = k$ .

Le champ électrique de l'onde réfléchie a donc même pulsation et même amplitude que celui de l'onde incidente ; cependant il change de sens lors de la réflexion (ou subit un déphasage de  $\pi$ ) :  $\vec{E}_r(0^-, t) = -E_0 \exp(i\omega t) \vec{e}_y$  ou  $\vec{E}_r(0^-, t) = E_0 \exp i(\omega t + \pi) \vec{e}_y$ .

Le champ électromagnétique de l'onde réfléchi s'écrit alors :

$$\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \exp i(\omega t + kx) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_r = \frac{-\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}_r = \frac{E_0}{c} \exp i(\omega t + kx) \vec{e}_z.$$

**Remarque 1 :** le champ électrique dans le vide au voisinage du conducteur n'ayant pas de composante normale, la relation de passage du § 3.2. indique qu'il n'y a pas de charge superficielle sur le conducteur ( $\sigma = 0$ ). Le vecteur densité de courant est nécessairement selon Oy puisqu'il possède les mêmes propriétés de symétrie que le champ électrique ; il est donné par  $\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$ , avec

$$\vec{B}(0^-, t) = \vec{B}_i(0^-, t) + \vec{B}_r(0^-, t) = 2 \frac{E_0}{c} \exp i(\omega t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{n} = -\vec{e}_x, \quad \text{d'où}$$

$$\vec{j}_s = 2 \frac{E_0}{\mu_0 c} \exp i(\omega t) \vec{e}_z.$$

**Remarque 2 :** l'amplitude du champ électrique réfléchi étant la même que celle du champ électrique incident, l'OPPH réfléchi a la même énergie que l'OPPH incidente ; ce résultat peut paraître paradoxal dans la mesure où l'onde réfléchi est due à la mise en mouvement des électrons du conducteur sous l'effet du champ électrique incident ; notons toutefois que nous sommes dans l'hypothèse où la résistivité du métal est nulle et que donc le courant  $\vec{j}_s$  ne dissipe aucune énergie.

## 4. Onde stationnaire

### 4.1. Superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchi

Le champ électromagnétique dans le vide, en tout point M et à tout instant t, est le résultat de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchi.

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) \quad \text{avec} \quad \vec{E}_i(x, t) = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad (\text{nous choisissons l'origine des phases en O, ainsi l'amplitude complexe } E_0 \text{ est réelle})$$

et  $\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \exp i(\omega t + kx) \vec{e}_y$ .

$$\text{Donc } \vec{E} = E_0 (\exp(-ikx) - \exp(ikx)) \exp(i\omega t) \vec{e}_y = -2iE_0 \sin(kx) \exp(i\omega t) \vec{e}_y.$$

$$\text{Et } \vec{B}(M, t) = \vec{B}_i(M, t) + \vec{B}_r(M, t) \quad \text{avec} \quad \vec{B}_i(x, t) = \frac{E_0}{c} \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_z \quad \text{et}$$

$$\vec{B}_r(x, t) = \frac{E_0}{c} \exp i(\omega t + kx) \vec{e}_z.$$

$$\text{Donc } \vec{B} = \frac{E_0}{c} (\exp(-ikx) + \exp(ikx)) \exp(i\omega t) \vec{e}_z = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) \exp(i\omega t) \vec{e}_z.$$

En notation réelle, nous obtenons le champ électromagnétique dans le vide :

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

Une composante quelconque du champ électromagnétique s'écrit sous la forme d'un produit d'une fonction des variables d'espace et d'une fonction du temps :

$\psi(x, t) = f(x)g(t)$  ; il s'agit, par définition, d'une onde stationnaire.

Contrairement à l'onde plane progressive caractérisée par une fonction d'onde

$\psi(x, t) = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$ , il n'y a pas propagation : le signal « oscille sur place ».

### 4.2. Description de l'onde stationnaire

En un point d'abscisse donnée ( $x = x_0$ ), le champ électrique et le champ magnétique vibrent en quadrature :

$$\vec{E} = E_0(x_0) \sin(\omega t) \vec{e}_y \text{ avec } E_0(x_0) = 2E_0 \sin(kx_0)$$

$$\vec{B} = B_0(x_0) \cos(\omega t) \vec{e}_z \text{ avec } B_0(x_0) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx_0)$$

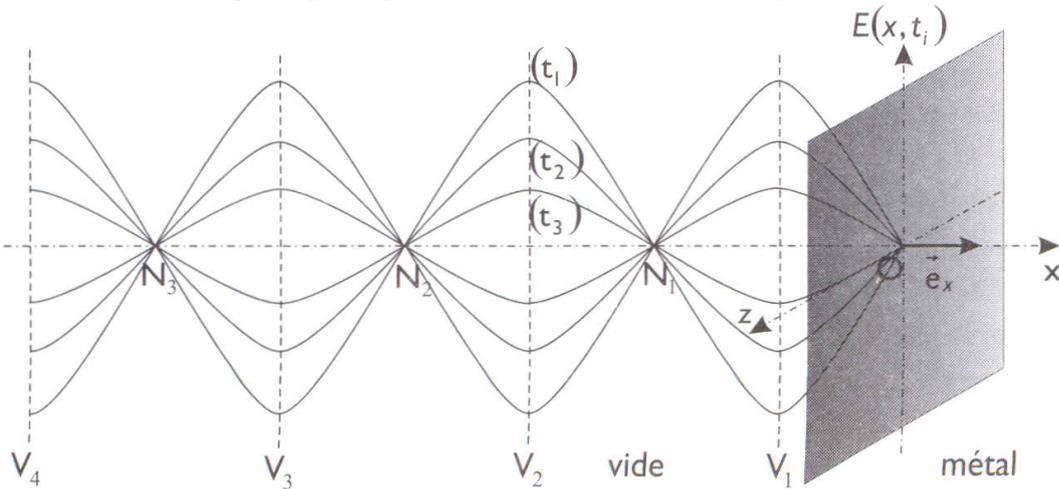
L'amplitude des vibrations ne dépend que de l'abscisse  $x$ . Les points où celle-ci est nulle sont appelés nœuds de vibration et les points où elle est maximale sont appelés ventres de vibration.

Pour le champ électrique : les nœuds sont donnés par  $\sin(kx) = 0$ , c'est-à-dire

$$kx_N = -n\pi \text{ où } n \in \mathbb{N}, \text{ soit } x_N = -n \frac{\pi}{k} = -n \frac{\lambda}{2}; \text{ les ventres sont donnés par}$$

$$\sin(kx) = \pm 1, \text{ c'est-à-dire } kx_V = -\frac{\pi}{2} - n\pi \text{ où } n \in \mathbb{N}, \text{ soit } x_V = -n \frac{\pi}{k} = -n \frac{\lambda}{2}.$$

Les nœuds du champ magnétique sont les ventres du champ électrique et les ventres du champ magnétique sont les nœuds du champ électrique.



Pour un champ donné, les plans nodaux successifs sont équidistants de  $\frac{\lambda}{2}$  ; le

plan de l'interface est, conformément aux relations de passage, un nœud de champ électrique et un ventre de champ magnétique.

### 4.3. Aspect énergétique

Le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c} \sin kx \cos kx \sin \omega t \cos \omega t \vec{e}_x$  s'annule sur

tous les plans nodaux de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , d'abscisses  $x = -n \frac{\lambda}{4}$ . Sa moyenne temporelle

est nulle :  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$ . Ces résultats manifestent le caractère stationnaire de l'onde ; aucune énergie ne traverse donc les plans nodaux : les flux d'énergie restent limités aux intervalles séparant deux plans nodaux consécutifs.

La densité volumique d'énergie est donnée par :  $\varpi_{em} = \varpi_e + \varpi_m = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$ ,

avec  $\varpi_e = 2\epsilon_0 E_0^2 \sin^2 kx \sin^2 \omega t$  et  $\varpi_m = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2 kx \cos^2 \omega t$ . La moyenne

temporelle de l'énergie électrique est  $\langle \varpi_{\dot{e}} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 kx$  et celle de l'énergie magnétique est  $\langle \varpi_m \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2 kx = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 kx$  puisque  $\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = c^2$ .

Ainsi la moyenne temporelle de l'énergie volumique de l'onde stationnaire  $\langle \varpi_{\dot{e}m} \rangle = \langle \varpi_{\dot{e}} \rangle + \langle \varpi_m \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$  est indépendante de l'abscisse  $x$  : l'énergie moyenne de l'onde stationnaire est uniformément répartie.

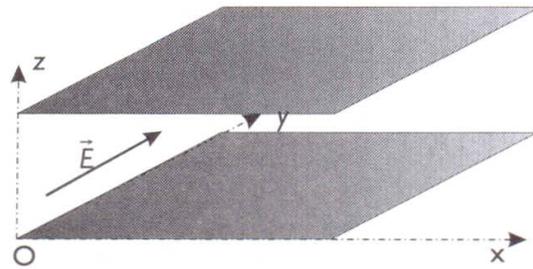
## 5. Propagation guidée

D'après ce qui précède, il n'est pas possible d'obtenir une onde progressive se propageant perpendiculairement à un plan conducteur : la seule propagation envisageable est celle d'une onde dont la direction de propagation est parallèle au plan conducteur. Le plan conducteur imposant à l'onde une direction de propagation qui lui est parallèle, il « guide » la propagation de l'onde.

### 5.1. Propagation guidée entre deux plans conducteurs parallèles

#### 5.1.1. Onde transverse électrique

Considérons deux plans conducteurs parfaits, illimités, parallèles et distants de  $a$ . Nous envisageons la propagation d'une onde progressive de pulsation  $\omega$  parallèlement à ces plans dans la direction  $Ox$ .



Nous limitons notre étude à une onde telle que le champ électrique  $\vec{E}$  reste perpendiculaire à la direction de propagation, une telle onde est dite « transverse électrique (TE) ». De plus nous choisissons  $\vec{E}$  parallèle aux plans conducteurs :  $\vec{E} = E_0(z) \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$ . Nous prenons l'origine des phases en  $O$ , l'amplitude  $E_0(z)$  est donc réelle.

#### 5.1.2. Conditions aux limites

Cette amplitude dépend nécessairement de la variable  $z$  ; en effet, les relations de passage imposent au champ électrique (tangential ici) d'être nul en  $z = 0$  et  $z = a$  :  $E_0(z = 0) = 0$  et  $E_0(z = a) = 0$ . Si l'amplitude  $E_0$  ne dépendait pas de  $z$ , elle serait nulle partout et l'onde ne pourrait exister.

Notons que l'amplitude  $E_0$  ne dépend pas de la variable  $y$  pour des raisons d'invariance (les plans conducteurs sont supposés illimités) et ne dépend pas de la variable  $x$  parce que nous faisons l'hypothèse que l'onde ne s'atténue pas au cours de sa propagation (absence de phénomènes dissipatifs).

#### 5.1.3. Modes $TE_n$

Dans l'espace séparant les deux plans conducteurs, où il n'y a ni charges ni courants, le champ électrique vérifie l'équation de propagation dans le vide :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}, \text{ soit, en projection sur } \vec{e}_y, \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

En simplifiant par  $\exp i(\omega t - kx)$ , nous obtenons l'équation différentielle vérifiée

$$\text{par l'amplitude } E_0(z) : \frac{d^2 E_0(z)}{dz^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_0(z) = 0.$$

Trois cas se présentent :

- $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$  : alors  $\frac{d^2 E_0(z)}{dz^2} = 0$  donc  $E_0(z) = Az + B$  ; les conditions aux limites en  $z = 0$  et  $z = a$  imposent clairement que  $A = B = 0$  donc  $\vec{E} = \vec{0}$ .
- $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0$  : alors  $\frac{d^2 E_0(z)}{dz^2} - H^2 E_0(z) = 0$ , où  $H^2$  est une constante réelle positive, donc  $E_0(z) = A \exp(Hz) + B \exp(-Hz)$  ; les conditions aux limites en  $z = 0$  et  $z = a$  conduisent également à la seule solution  $A = B = 0$  donc  $\vec{E} = \vec{0}$ .
- $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$  : alors  $\frac{d^2 E_0(z)}{dz^2} + K^2 E_0(z) = 0$ , où  $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$  est une constante réelle positive, donc  $E_0(z) = A \sin(Kz) + B \cos(Kz)$  ; la condition  $E_0(z = 0) = 0$  impose immédiatement que  $B = 0$  et, en excluant la solution nulle pour  $\vec{E}$ , la condition  $E_0(z = a) = 0$  impose  $\sin Ka = 0$ , soit  $K = n \frac{\pi}{a}$  où  $n$  est un entier non nul.

En conclusion, la propagation n'est possible que lorsque la relation  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = n^2 \frac{\pi^2}{a^2}$  est vérifiée ; c'est la *relation de dispersion* :  $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + n^2 \frac{\pi^2}{a^2}$ .

Comme  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - n^2 \frac{\pi^2}{a^2} > 0$ ,  $\omega > n \frac{\pi c}{a}$  où  $n$  est un entier strictement positif : seules peuvent se propager les ondes dont la pulsation  $\omega$  est supérieure à la pulsation  $\omega_c = \frac{\pi c}{a}$  appelée pulsation de coupure.

Cette pulsation correspond à la longueur d'onde dans le vide :  $\lambda_c = \frac{2\pi}{\omega_c} c = 2a$  ;

nous trouvons la condition  $\lambda < \lambda_c = 2a$  ; en effet, les plans conducteurs étant des plans nodaux, la distance  $a$  qui les séparent est nécessairement un multiple de  $\frac{\lambda}{2}$ , soit  $a > \frac{\lambda}{2}$ .

Il existe donc plusieurs solutions possibles, correspondant aux différentes valeurs de l'entier positif  $n$ , ce sont les différents *modes* ; le mode correspondant à  $n = 1$  est appelé mode *fondamental* ou mode *dominant*, les suivants sont les *harmoniques* d'ordre  $n$ . Le champ électrique du mode  $TE_n$ , « transverse électrique d'ordre  $n$  », s'écrit :  $\vec{E}_{TE_n} = A_n \sin\left(n \frac{\pi z}{a}\right) \exp i(\omega t - k_n z) \vec{e}_y$ , avec

$$k_n = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - n^2 \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2 a^2}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - n^2 \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}.$$

L'onde n'est pas plane car l'amplitude du champ électrique n'est pas uniforme dans un plan quelconque perpendiculaire à  $Ox$  ; un tel plan est équiphasé mais ce n'est pas une surface d'onde.

**5.1.4. Dispersion**

La vitesse de phase  $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - n^2 \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$  dépend de la pulsation  $\omega$ , il y a donc

dispersion. Il faut noter que cette dispersion n'est pas due à la nature du milieu de propagation (cf. propagation dans un plasma) puisque l'onde se propage dans le vide. Elle est due aux conditions aux limites imposées par les conducteurs limitant le domaine de l'espace accessible à l'onde.

La vitesse de phase, comme dans le cas du plasma, est supérieure à  $c$  ; l'onde décrite n'a pas d'existence isolée, elle est l'une des composantes d'un paquet d'ondes dont la vitesse de groupe est  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ .

En différenciant la relation de dispersion  $\omega^2 = k^2 c^2 + n^2 \frac{\pi^2 c^2}{a^2}$ , il vient

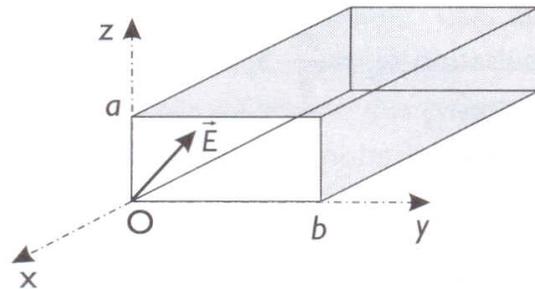
$2\omega d\omega = 2kdkc^2$ , soit  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega} c^2 = \frac{c^2}{v_\phi}$ . Alors, avec  $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - n^2 \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$ , nous

obtenons  $v_g = c \sqrt{1 - n^2 \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$ . Cette vitesse est inférieure à la vitesse  $c$  de la lumière dans le vide.

**5.2. Guide d'onde infini à section rectangulaire**

**5.2.1. Onde transverse électrique**

Le guide est un cylindre conducteur d'axe  $Ox$  et de section droite rectangulaire. L'onde se propage suivant  $Ox$  dans le domaine défini par  $y \in ]0; b[$  et  $z \in ]0; a[$  comme l'indique la figure ci-contre.



Nous étudions l'onde TE, le champ électrique est perpendiculaire à la direction de propagation  $Ox$  :  $\vec{E} = \vec{E}_0(y, z) \exp i(\omega t - kx)$ . Les équations de Maxwell et les conditions aux limites sur les parois conductrices conduisent à une expression :

$$\vec{E} = \left( E_{0y} \cos\left(m \frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(n \frac{\pi z}{a}\right) \vec{e}_y + E_{0z} \sin\left(m \frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(n \frac{\pi z}{a}\right) \vec{e}_z \right) \cos(\omega t - kx).$$

Ce mode est appelé mode  $TE_{mn}$ .

Les amplitudes  $E_{0y}$  et  $E_{0z}$  sont liées par la relation imposée par  $\text{div} \vec{E} = 0$ , à savoir  $m \frac{E_{0y}}{b} + n \frac{E_{0z}}{a} = 0$ .

Les conditions aux limites, composantes tangentielles de  $\vec{E}$  nulles au voisinage des conducteurs ( $\vec{E}_y(z=0) = \vec{E}_y(z=a) = \vec{0}$  et  $\vec{E}_z(y=0) = \vec{E}_z(y=a) = \vec{0}$ ), sont vérifiées.

La relation de dispersion  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)$  généralise la relation de dispersion établie au paragraphe précédent.

Nous limitons une description plus détaillée au mode  $TE_{01}$  pour lequel  $m = 0$  et  $n = 1$ .

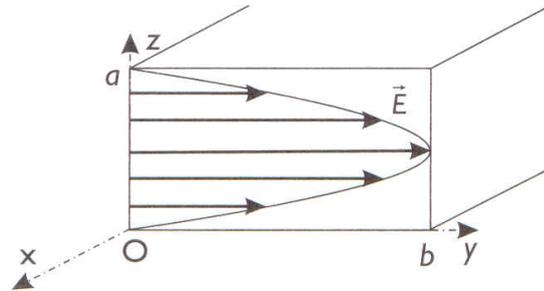
**5.2.2. Analyse du mode  $TE_{01}$**

**Structure**

L'expression du champ électrique est

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y.$$

Elle s'identifie avec le mode  $TE_1$  décrit au paragraphe précédent.



L'expression du champ magnétique se déduit de l'équation de Maxwell Faraday :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E} = \frac{\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_x - k E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

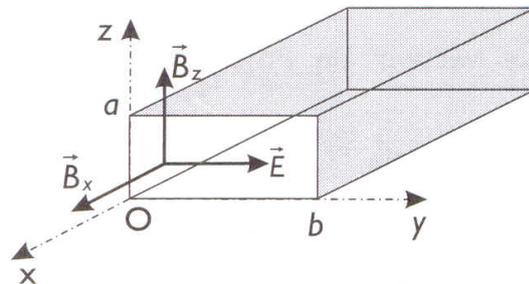
et par intégration  $\vec{B} = \frac{\pi}{a\omega} E_0 \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \vec{e}_x + \frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ , en

excluant la présence d'un éventuel champ magnétique permanent.

Il est important de noter que le champ magnétique possède une composante

$$\vec{B}_x = \frac{\pi}{a\omega} E_0 \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \vec{e}_x$$

parallèle à la direction de propagation, l'onde n'est donc pas transverse magnétique (TM). Ce résultat est général : une onde transverse électrique et magnétique (TEM) ne peut se propager dans un guide d'onde, quelle que soit la forme de sa section droite.



Il est à noter que la composante transversale  $\vec{B}_z$  du champ magnétique est en phase avec le champ électrique et que, conformément aux résultats établis antérieurement, les plans  $z = 0$  et  $z = a$  correspondent à des ventres de  $\vec{B}_z$ .

La composante longitudinale  $\vec{B}_x$  du champ magnétique vibre en quadrature avec le champ électrique.

**Dispersion**

L'équation de propagation  $\Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$  conduit directement à la relation

de dispersion :  $k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$  : seules se propagent les ondes dont la

pulsation  $\omega$  est supérieure à la pulsation de coupure  $\omega_c = \frac{\pi c}{a}$  ; le guide d'onde joue le rôle d'un filtre passe-haut. La vitesse de phase dépend de la pulsation de

l'onde,  $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$  et la vitesse de groupe est  $v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$ . L'origine de

la dispersion n'est pas le milieu de propagation mais les conditions aux limites imposées par le guide conducteur

### Charges et courants dans les conducteurs

La densité superficielle de charges est donnée par la composante normale  $\vec{E}_n$  du champ  $\vec{E}$  dans le vide au voisinage du conducteur  $\vec{E}_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$  et la densité

superficielle de courants est donnée par la composante tangentielle  $\vec{B}_t$  du champ  $\vec{B}$  dans le vide au voisinage du conducteur  $\vec{B}_t = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$ ,  $\vec{n}$  étant orienté du conducteur vers le vide.

Sur les conducteurs  $z = 0$  et  $z = a$ , il n'y a pas de charge ( $\sigma = 0$ ) et le courant est donné par  $\vec{B}_x$  :  $\vec{j}_s(z = 0) = \vec{j}_s(z = a) = \frac{\pi}{\mu_0 a \omega} E_0 \sin(\omega t - kx) \vec{e}_y$ .

Sur les conducteurs  $y = 0$  et  $y = b$ , nous obtenons des densités de charges :

$\sigma(y = 0) = -\sigma(y = a) = \epsilon_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx)$  et des courants superficiels :

$\vec{j}_s(y = 0) = -\vec{j}_s(y = b) = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx)$ .

### Aspect énergétique

Le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$  a deux composantes ; sa composante

transversale  $\vec{\Pi}_z = -\frac{\pi}{\mu_0 a \omega} E_0^2 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$  a une

valeur moyenne temporelle nulle. L'expression de sa composante longitudinale

est :  $\vec{\Pi}_x = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x$ . En moyenne, l'énergie se propage

suit  $Ox$  :  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{k}{2\mu_0 \omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) \vec{e}_x$ .

La puissance moyenne transportée par le guide d'onde est le flux de  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  à

travers une section droite :  $P = \int_{y=0}^b \int_{z=0}^a \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}$ , soit :

$$P = \int_{y=0}^b \int_{z=0}^a \langle \Pi \rangle dy dz = \frac{k E_0^2 b}{2\mu_0 \omega} \int_{z=0}^a \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) dz = ab \frac{k}{4\mu_0 \omega} E_0^2$$

La densité volumique moyenne d'énergie dans le guide d'onde a pour expression

$\langle w_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \langle \vec{E}^2 \rangle + \frac{1}{2\mu_0} \langle \vec{B}^2 \rangle$ , avec  $\langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)$  et,

$$\langle \bar{B}^2 \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \left( \left( \frac{\pi}{a\omega} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{\pi z}{a} \right) + \left( \frac{k}{\omega} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{\pi z}{a} \right) \right). \text{ Comme } \varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}, \text{ il vient :}$$

$$\langle u_{ém} \rangle = \frac{E_0^2}{4\mu_0} \left( \left( \frac{\pi}{a\omega} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{\pi z}{a} \right) + \left( \frac{1}{c^2} + \frac{k^2}{\omega^2} \right) \sin^2 \left( \frac{\pi z}{a} \right) \right).$$

Calculons l'énergie électromagnétique moyenne localisée à l'intérieur du guide d'onde sur une longueur  $dx$  de celui-ci :  $\delta W_{ém} = dx \int_{y=0}^b \int_{z=0}^a \langle u_{ém} \rangle dydz$ . Nous

obtenons  $\delta W_{ém} = \frac{E_0^2}{8\mu_0} \left( \left( \frac{\pi}{a\omega} \right)^2 + \frac{1}{c^2} + \frac{k^2}{\omega^2} \right) abdx$ . La relation de dispersion

$$k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \text{ permet de simplifier cette expression : } \delta W_{ém} = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} abdx.$$

Pour déterminer la vitesse de propagation de l'énergie  $v_e$ , exprimons de deux manières différentes l'énergie traversant une section droite du guide pendant l'intervalle de temps  $dt$  (cf. § 3.2.4. du chapitre précédent) : cette énergie est celle contenue dans le cylindre de section droite  $ab$  de longueur  $dx = v_e dt$  donc

$$\delta W_{ém} = P dt = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} ab v_e dt \text{ avec } P = ab \frac{k}{4\mu_0 \omega} E_0^2, \text{ d'où } v_e = \frac{k}{\omega} c^2 = \frac{c^2}{v_\phi} = v_g.$$

La vitesse de groupe est donc, ici, la vitesse de propagation de l'énergie.

# Ondes électromagnétiques dans un plasma

Le but de ce cours est d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu comportant des charges, qu'elles soient libres ou liées.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à la propagation dans les plasmas dilués, milieux neutres formés d'ions positifs et d'électrons libres. Nous verrons que l'interaction entre l'onde et les charges entraîne une dispersion et une absorption des ondes électromagnétiques.

Nous étudierons ensuite la propagation des ondes électromagnétiques dans les diélectriques transparents, linéaires, homogènes et isotropes et établirons les lois de Descartes à l'interface entre deux de ces diélectriques.

## I Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

### I.1. Définition d'un plasma

**Définition :**

Un plasma est un gaz ionisé, constitué d'ions positifs (cations), et d'électrons, qui reste globalement neutre.

Ce type de gaz est très courant puisqu'il représente 99% de la matière connue : les flammes, les éclairs, les aurores boréales, la haute atmosphère - l'ionosphère - et les nuages interstellaires ou intergalactiques sont des plasmas naturels.

Les plasmas sont également utilisés dans des applications courantes comme les "tubes à néon" et les "écrans plasmas".

Enfin, en réalisant un plasma de très forte densité à très haute température, les physiciens espèrent amorcer des réactions de fusions nucléaire.

Comme le montre la figure 1, on peut classer les différents types de plasmas en fonction de deux paramètres caractéristiques : leur température électronique<sup>1</sup> et leur densité.

### I.2. Densité volumique de courant dans un plasma dilué

Afin d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma, nous utiliserons le modèle simplifié suivant :

- le plasma est totalement ionisé et constitué de cations de charge  $+e$  et de masse  $M$ , et d'électrons, de charge  $-e$  et de masse  $m$  avec  $m \ll M$  ;
- le plasma est neutre et comporte donc  $n$  ions et  $n$  électrons par unité de volume ;

1. Cette température est définie thermodynamiquement à partir de l'énergie cinétique des électrons. Elle est telle que :  $k_B T = E_c$ . Ces gaz sont très énergétiques, ce qui explique que les températures électroniques soient très élevées, et que la définition habituelle de la température ne soit plus adaptée.

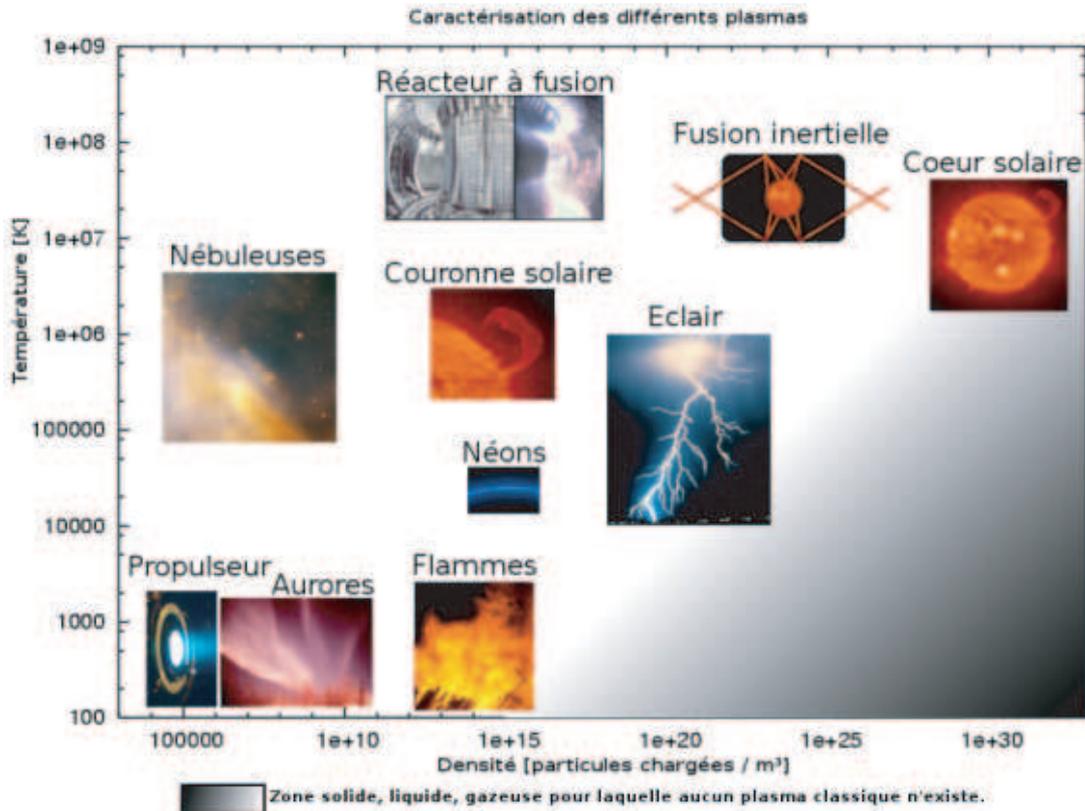


FIGURE 1 – Classification des différents types de plasmas.

- le plasma est homogène, peu dense ou dilué de sorte que les interactions entre les charges électriques puissent être négligées.

On note  $\vec{V}$  et  $\vec{v}$  les vitesses moyennes respectives des ions et des électrons. Ces particules chargées sont soumises :

- \* à l'action des champs électrique et magnétique de l'onde (force de Lorentz) :  $\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$  ;
- \* à l'action de la pesanteur, négligeable devant les forces électromagnétiques ;
- \* à l'action électromagnétique des autres particules chargées. Si le plasma est suffisamment dilué, ces interactions sont négligeables.

Nous négligerons dans la suite la composante magnétique de la force de Lorentz. En effet, pour une onde  $B/E \sim 1/c$  et, pour des particules de charge  $q$  et de vitesse  $v \ll c$  :

$$\frac{\|q \vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|q \vec{E}\|} \sim \frac{vB}{E} \sim \frac{v}{c} \ll 1$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à un ion et à un électron, dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = e \vec{E} \quad , \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}$$

Par conséquent

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{m}{M} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

soit, à une constante près :

$$\vec{V} = -\frac{m}{M} \vec{v}$$

Comme  $\frac{m}{M} \ll 1$ , la vitesse des ions positifs est négligeable par rapport à celle des électrons. On ne prendra en compte que le mouvement des électrons.

La densité volumique du plasma est :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} + ne\vec{V} \simeq -ne\vec{v}$$

Cette densité volumique de courant est reliée au champ électrique par

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$$

### Propriété

Dans un plasma dilué, la densité volumique de courant n'est due qu'à la mobilité des électrons.  $\vec{j}$  est reliée au champ électrique d'une onde électromagnétique par

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$$

où  $n$  est la densité volumique d'électrons,  $\vec{v}$  leur vitesse et  $m$  leur masse.

### Remarque

Les équations étant linéaires, on peut utiliser les notations complexes de sorte que  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  où  $\vec{k}$  est a priori complexe. On a donc

$$i\omega \underline{\vec{j}} = \frac{ne^2}{m} \underline{\vec{E}} \Rightarrow \underline{\vec{j}} = \frac{ne^2}{i\omega m} \underline{\vec{E}}$$

On fait ainsi apparaître une conductivité complexe  $\underline{\gamma}$  telle que

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \underline{\vec{E}} \quad \text{avec} \quad \underline{\gamma} = \frac{ne^2}{im\omega}$$

La conductivité est imaginaire pure, de sorte  $\underline{\vec{j}}$  et  $\underline{\vec{E}}$  sont déphasés de  $\frac{\pi}{2}$ .

### Remarque

Si l'amplitude du mouvement des électrons est faible devant la longueur d'onde de l'onde électromagnétique, on peut supposer que le champ prend approximativement la même valeur. On pourra donc écrire

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$$

### I.3. Structure des OPPM dans un plasma dilué

Écrivons les équations de Maxwell dans le plasma dilué, assimilé à un milieu neutre, de permittivité  $\epsilon_0$  et de perméabilité  $\mu_0$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}) &= 0 & \operatorname{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$$

Afin de déterminer la structure des ondes qui peuvent se propager dans un plasma dilué, on suppose que les solutions des équations de propagation s'écrivent sous la forme d'une onde plane progressive monochromatique. Ainsi, en notations complexes

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}(M, t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

où le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est *a priori* complexe.

Les équations de Maxwell dans le plasma localement neutre deviennent, en notations complexes

$$\begin{aligned} -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} &= 0 & -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} &= 0 \\ -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} &= -i\omega \underline{\vec{B}} & -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} &= \mu_0 \underline{\vec{j}} + i\omega \mu_0 \epsilon_0 \underline{\vec{E}} \end{aligned}$$

Les deux premières équations montrent que les champs électrique et magnétique sont transverses. L'équation de Maxwell-Faraday montre que la relation de structure est valable dans le plasma, en notations complexes

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

où  $\vec{k}$  est *a priori* complexe.

#### Propriété

Les champs électrique et magnétique d'une onde plane progressive monochromatique dans un plasma peu dense sont transverses et vérifient la relation de structure

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} &= 0 \\ \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} &= 0 \\ \underline{\vec{B}} &= \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} \end{aligned}$$

où  $\vec{k}$  est *a priori* complexe.

### I.4. Équation de propagation des champs et relation de dispersion

#### a) Équation de propagation des champs

Prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

En utilisant le lien entre  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$ , on trouve

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\mu_0 \frac{ne^2}{m} \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Par ailleurs  $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\delta \vec{E}$ . On en déduit l'équation de propagation pour le champ électrique dans le plasma dilué

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{ne^2}{m} \vec{E} = \vec{0}$$

Cette équation n'est pas une équation de d'Alembert : la présence d'un terme proportionnel à  $\vec{E}$  en fait une équation dite de "Klein-Gordon".

En négligeant la présence d'un champ magnétique statique, on obtient, de la même manière, une équation de Klein-Gordon pour le champ magnétique

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{ne^2}{m} \vec{B} = \vec{0}$$

Remarque

*L'équation de Klein-Gordon se retrouve en physique des particules (mécanique quantique relativiste), le terme proportionnel au champ étant induit par une masse effective. Le champ électromagnétique décrivant le mouvement d'un photon, on en déduit que, dans un plasma dilué, tout se passe comme si les photons acquéraient une masse effective ...*

**b) Relation de dispersion**

Afin d'obtenir l'équation de dispersion, on cherche les solutions de l'équation de propagation sous la forme d'une OPPM. En notations complexes, le champ électrique prend la forme  $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ . L'équation de propagation devient

$$\left( -k^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \mu_0 \frac{ne^2}{m} \right) \underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

et l'on en déduit l'équation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} \\ c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \end{cases}$$

où  $\omega_p$  est appelée pulsation plasma.

**Propriété**

Dans un plasma dilué, la relation de dispersion s'écrit

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

où  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$  est appelée pulsation plasma et  $c$  est la célérité de la lumière.

### I.5. Pulsation de coupure et onde évanescente

#### a) Comportement passe-haut d'un plasma

L'équation de dispersion indique que  $k$  peut être réel ou complexe en fonction des valeurs de  $\omega$ .

- Si  $\omega < \omega_p$  :  $k^2 < 0$  et le nombre d'onde est imaginaire pur :

$$k = \pm i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$$

Afin d'interpréter ce cas, revenons à l'expression réelle du champ électrique d'une OPPM se propageant dans le sens des  $x$  croissants :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \Rightarrow \vec{E}(x, t) = \text{Re} [\vec{E}] = \vec{E}_0 e^{\pm |k|x} \cos(\omega t)$$

Les variables spatiales et temporelles sont découplées, de sorte que la vitesse de phase est nulle. L'onde ne se propage pas : on parle d'onde stationnaire. De plus cette onde décroît exponentiellement avec  $x$  : on parle d'onde évanescente.

**Définition :**

On appelle onde évanescente une onde stationnaire qui décroît exponentiellement avec une coordonnée de l'espace.

- Si  $\omega > \omega_p$  :  $k^2 > 0$  et le nombre d'onde est réel

$$k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

Les ondes sont progressives et peuvent se propager.

Remarque

Les ondes électromagnétiques ayant une pulsation inférieure à  $\omega_p$  ne peuvent pas se propager : un plasma peut être considéré comme un filtre passe-haut ne laissant passer que les pulsations supérieures à la pulsation de plasma, qui agit donc comme une pulsation de coupure.

Propriété

Seules des ondes électromagnétiques de pulsation supérieure à la pulsation plasma peuvent se propager dans un plasma. Dans le cas contraire, les ondes sont stationnaires et dites évanescentes. :

- $\omega < \omega_p$  : pas de propagation, onde évanescente
- $\omega > \omega_p$  : propagation

Le plasma agit comme un filtre passe-haut de pulsation de coupure  $\omega_p$ .

Exercice

Calculer le champ magnétique et le vecteur de Poynting moyen associés à une onde évanescente dont le champ électrique complexe est de la forme  $\vec{E} = E_0 e^{-k''z} e^{i\omega t} \vec{u}_x$ .

La relation de structure reste valable dans le plasma, que l'onde soit évanescente ou non. On en déduit, avec  $\vec{k} = -ik'' \vec{u}_z$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \underbrace{-i}_{=e^{-i\pi/2}} k'' \frac{E_0}{\omega} e^{-ik''z} e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

En notations réelles, on a donc

$$\vec{B} = \frac{k'' E_0}{\omega} e^{-k''z} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_y = \frac{k'' E_0}{\omega} e^{-k''z} \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

Le vecteur de Poynting vaut donc, en revenant aux notations réelles pour les champs :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \left[ E_0 e^{-k''z} \cos(\omega t) \vec{u}_x \right] \wedge \left[ \frac{k'' E_0}{\mu_0 \omega} e^{-k''z} \sin(\omega t) \vec{u}_y \right] = \frac{k'' E_0^2}{\mu_0 \omega} e^{-2k''z} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

Avec  $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 1/2 \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$ , on vérifie que la valeur moyenne du vecteur de Poynting est nulle

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$$

AMAN  
15 64 10

Propriété

Dans un plasma dilué, une onde évanescente ne transporte aucune énergie en moyenne.

b) Application à la transmission des ondes radio

L'ionosphère est la couche de l'atmosphère située à plus de 50 km d'altitude. Sous l'effet des rayonnements très énergétiques issus principalement du soleil (rayons UV et rayons X dits *rayonnements ionisants*), les atomes de la haute atmosphère sont ionisés, de sorte que l'ionosphère peut être considérée comme un plasma de densité  $n = 10^{12}$  électrons.m<sup>-3</sup>. La pulsation plasma correspondante est  $\omega_p = 5,6.10^7$  rad.s<sup>-1</sup>, et la fréquence associée de  $f_p = 9$  MHz.

Les ondes électromagnétiques de fréquence inférieure à 9 MHz ne se propagent donc pas dans l'ionosphère. Pour ces ondes, qui comprennent les *grandes ondes*, le sol et l'ionosphère se comportent comme des miroirs et, par réflexions multiples entre les deux, l'onde peut être reçue à plusieurs milliers de kilomètres de l'endroit où elle est émise<sup>2</sup>.

Les ondes de fréquences supérieures, les ondes radio FM et les ondes de la téléphonie mobile par exemple, dont les fréquences sont respectivement de l'ordre de 100 MHz et de 1 GHz, sont transmises par l'ionosphère, et ont donc une portée plus courte, sauf si elles sont relayées par des satellites<sup>3</sup>.

2. Ceci explique qu'on puisse recevoir des stations étrangères sur la bande AM.

3. Les ondes des stations FM ne sont reçues qu'à une centaine de kilomètres de leur lieu d'émission, alors que les ondes utilisées pour les téléphones mobiles sont maintenant reçues presque dans le monde entier grâce à l'utilisation de satellites.

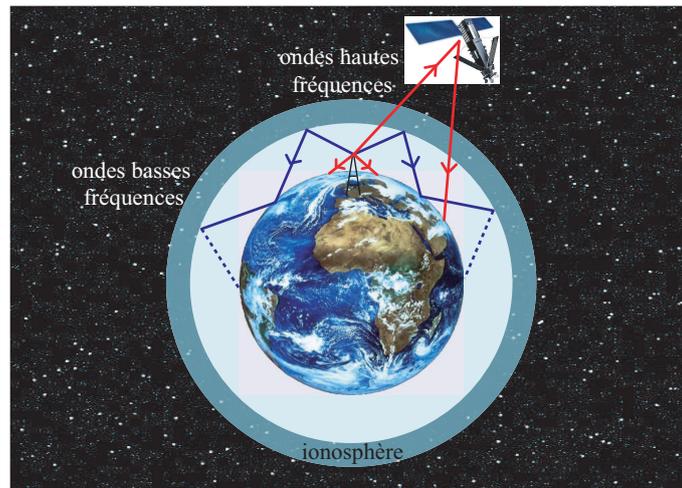


FIGURE 2 – Transmission des ondes radio. Les basses fréquences sont réfléchies sur l’ionosphère, alors que les hautes fréquences sont transmises.

### I.6. Indice complexe d’un milieu : dispersion et absorption

#### a) Indice complexe

**Définition :**

On définit l’indice complexe  $\underline{n}$  par :

$$\underline{k} = \underline{n} \frac{\omega}{c} = \underline{n} k_0$$

où  $k_0 = \omega/c$  est le nombre d’onde dans le vide.

*Remarque*

Dans le vide,  $n = 1$  pas définition.

$\underline{n}$  est complexe, de sorte qu’on sera amené à utiliser les notations suivantes :  $\underline{n} = n' + in''$ , avec :

$$\begin{cases} n' = \frac{\text{Re}[\underline{k}]}{\omega} c = \frac{c}{v_\varphi} \\ n'' = \frac{\text{Im}[\underline{k}]}{\omega} c = \frac{c}{\omega \delta} \end{cases}$$

où  $v_\varphi = \frac{\text{Re}[\underline{k}]}{\omega}$  est la vitesse de phase et où  $\delta = \frac{1}{\text{Im}[\underline{k}]}$  est la distance caractéristique d’absorption (ou d’amplification).

Un milieu est dit dispersif si la vitesse de phase dépend de  $\omega$ . Ainsi, pour un milieu dispersif, la partie réelle de l’indice dépend de  $\omega$ .

**Propriété**

En posant  $\underline{n} = n' + in''$ , on a

$$\begin{cases} n' = \frac{\operatorname{Re}[\underline{k}]}{\omega} c = \frac{c}{v_\varphi} \\ n'' = \frac{\operatorname{Im}[\underline{k}]}{\omega} c = \frac{c}{\omega \delta} \end{cases}$$

où  $v_\varphi = \frac{\operatorname{Re}[\underline{k}]}{\omega}$  est la vitesse de phase et où  $\delta = \frac{1}{\operatorname{Im}[\underline{k}]}$  est la distance caractéristique d'absorption (ou d'amplification).  
 $n'$  est appelé indice de dispersion.  
 $n''$  est appelé indice d'absorption.

**Propriété**

Un milieu est dit :

- dispersif si  $n'$  ou  $v_\varphi$  dépendent de  $\omega$  ;
- transparent (non absorbant) si  $n'' = 0$ , c'est-à-dire si  $k$  est réel.

**Remarque**

On retrouve, pour un milieu transparent pour lequel  $n'' = 0$ , la même définition que celle déjà vue en cours d'optique en première année. La vitesse qui intervient en fait dans la définition de l'indice est donc la vitesse de phase. Ainsi, l'indice de dispersion  $n'$  doit être identifié à l'indice lumineux  $n$  d'un milieu transparent tel qu'il a été défini en optique.

**Remarque**

Pour un milieu transparent, la longueur d'onde est définie par

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{n k_0} = \frac{\lambda_0}{n}$$

où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide. La longueur d'onde d'une onde électromagnétique dépend du milieu dans lequel elle se propage.

**b) Application au plasma**

Considérons une onde électromagnétique monochromatique, de pulsation  $\omega$ , dans un plasma dilué.

- Si  $\omega < \omega_p$ , l'onde est évanescente et le nombre d'onde est imaginaire pur :

$$\underline{k} = \pm i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$$

L'indice complexe est alors imaginaire pur :  $n = in''$  avec

$$n'' = \frac{\operatorname{Im}[\underline{k}]}{\omega} c = \pm \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega}$$

- Si  $\omega > \omega_p$ , l'onde peut se propager et le nombre d'onde est réel :

$$k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

L'indice complexe est donc lui-aussi réel

$$n = n' = \frac{k}{\omega} c = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega}$$

L'indice dépend de  $\omega$  : le milieu est dispersif.

**Propriété**

Pour des OPPM de pulsation supérieure à  $\omega_p$ , un plasma se comporte comme un milieu dispersif ( $v_\varphi$  ou  $n'$  dépendent de  $\omega$ ) et non-absorbant (le vecteur d'onde ou  $n''$  est réel). La vitesse de phase vaut alors

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k|} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

**Remarque**

La vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière  $c$ . Il n'y a ici aucun paradoxe, car une O.P.P.M. unique n'a pas de réalité physique : la vitesse de phase ne représente pas la vitesse de propagation de l'information.

La grandeur physique permettant de caractériser la vitesse de propagation d'une information dans le milieu est la vitesse de groupe  $v_g$  qu'aurait un paquet d'onde dans le plasma. On peut son expression en différenciant la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \Rightarrow 2k dk c^2 = 2\omega d\omega \quad \text{soit} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

**Propriété**

Dans un plasma peu dense, la vitesse de groupe d'une paquet d'onde centré sur  $\omega > \omega_p$  vaut

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

**Remarque**

On vérifie bien que cette vitesse est bien inférieure à  $c$ .

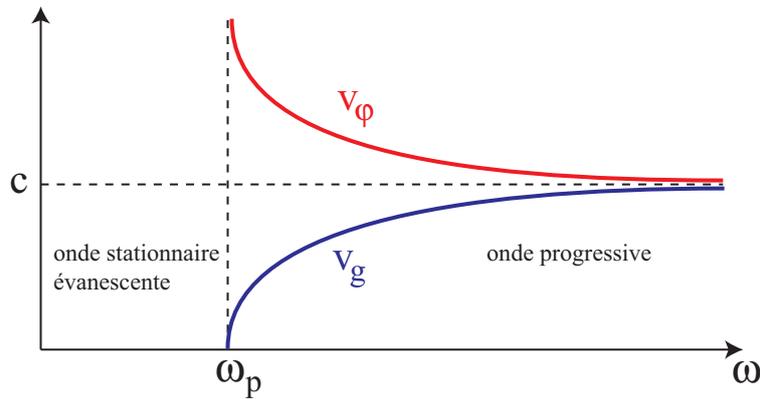


FIGURE 3 – Représentation de la vitesse de phase  $v_\phi$  et de la vitesse de groupe  $v_g$ . Le plasma agit comme un filtre passe-haut puisqu’aucune onde ne peut se propager pour des pulsations inférieures à la pulsation de plasma  $\omega_p$ .

## II Réflexion et réfraction d’une onde électromagnétique sur un dioptre

### II.1. Cadre de l’étude et expressions des champs

Considérons deux milieux *transparents*, c’est-à-dire dont les indices  $n_1$  et  $n_2$  sont réels, séparés par une surface ( $\Sigma$ ) : l’ensemble est appelé **dioptr**e en optique.

En supposant les longueurs d’onde très faibles devant les dimensions caractéristiques du problème, on peut confondre ( $\Sigma$ ) avec un dioptre plan, et choisir un repère cartésien de sorte que son équation soit  $x = 0$ . On note  $\vec{N} = \vec{u}_x$  un vecteur unitaire tangent normal à la surface.

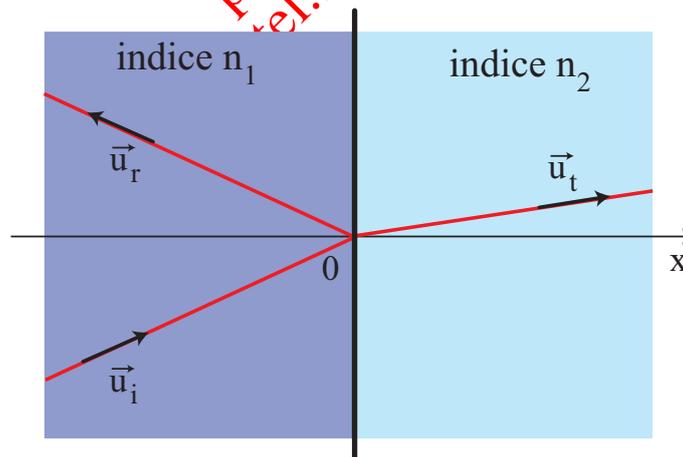


FIGURE 4 – Dioptre plan entre deux milieux transparents d’indice  $n_1$  et  $n_2$ . Une OPPM incidente, polarisée rectilignement, donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise au niveau de ce dioptre.

On considère une onde électromagnétique plane progressive monochromatique incidente, polarisée rectilignement, de pulsation  $\omega_i$ , se propageant dans le milieu (1) dans une direction  $\vec{u}_i$ .

Cette onde donne naissance à une OPPH transmise de pulsation  $\omega_t$  se propageant dans le milieu (2)

dans une direction  $\vec{u}_t$ , et à une OPPM réfléchie de pulsation  $\omega_r$  se propageant dans le milieu (1) dans une direction  $\vec{u}_r$ .

En notation complexe, les champs électriques dans les deux milieux sont donc de la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0i} e^{i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} + \vec{E}_{0r} e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \\ \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0t} e^{i(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \end{cases}$$

avec  $\vec{k}_i = k_i \vec{u}_i$ ,  $\vec{k}_r = k_r \vec{u}_r$  et  $\vec{k}_t = k_t \vec{u}_t$ .

Les champs magnétiques associés s'obtiennent en utilisant la relation de structure des ondes planes progressives dans un milieu d'indice réel  $n$  pour chacune des trois ondes :

$$\vec{B}_i = \frac{n_1}{c} \vec{u}_i \wedge \vec{E}_i \quad , \quad \vec{B}_r = \frac{n_1}{c} \vec{u}_r \wedge \vec{E}_r \quad \text{et} \quad \vec{B}_t = \frac{n_2}{c} \vec{u}_t \wedge \vec{E}_t$$

## II.2. Relations de continuité

Nous pouvons relier ces expressions en utilisant les relations de continuité des champs à l'interface :

- Continuité de  $\vec{E}_{\parallel}$  (composante tangentielle) :

$$\vec{E}_{1\parallel} = \vec{E}_{2\parallel}$$

- Continuité de  $\vec{B}_{\perp}$  (composante normale) :

$$\vec{B}_{1\perp} = \vec{B}_{2\perp}$$

La continuité de la composante tangentielle du champ électrique sur le plan  $x = 0$  conduit à :

$$\underline{E}_{0i\parallel} e^{i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} + \underline{E}_{0r\parallel} e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} = \underline{E}_{0t\parallel} e^{i(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$$

Cette relation devant être vérifiée à tout instant et en tout point du plan  $x = 0$ , ceci doit également être vrai en  $O$  à tout instant, donc :

$$\underline{E}_{0i\parallel} e^{i\omega_i t} + \underline{E}_{0r\parallel} e^{i\omega_r t} = \underline{E}_{0t\parallel} e^{i\omega_t t}$$

En multipliant les deux membres par  $e^{-i\omega_t t}$ , on obtient

$$\underline{E}_{0i\parallel} e^{i(\omega_i - \omega_t)t} + \underline{E}_{0r\parallel} e^{i(\omega_r - \omega_t)t} = \underline{E}_{0t\parallel}$$

Le membre de gauche est une fonction de  $t$  qui ne dépend pas de  $t$ . Ceci ne peut être réalisé que si

$$\begin{cases} \omega_i = \omega_t \quad \text{et} \quad \omega_r = \omega_t \\ \underline{E}_{0i\parallel} + \underline{E}_{0r\parallel} = \underline{E}_{0t\parallel} \end{cases}$$

On en déduit

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega$$

### Remarque

On a utilisé le fait que les fonctions exponentielles  $e^{i\omega t}$  forment une famille libre.

### II.3. Lois de Descartes

La relation de continuité pour le champ électrique s'écrit en un point  $M_0$  ( $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ ) du plan  $x = 0$ , en simplifiant par  $e^{i\omega t}$  :

$$\underline{E}_{0i\parallel} e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}_0} + \underline{E}_{0r\parallel} e^{-i\vec{k}_r \cdot \vec{r}_0} = \underline{E}_{0t\parallel} e^{-i\vec{k}_t \cdot \vec{r}_0}$$

Multiplions les deux membres de cette équation par  $e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}_0}$  :

$$\underline{E}_{0i\parallel} + \underline{E}_{0r\parallel} e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_0} = \underline{E}_{0t\parallel} e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{r}_0}$$

Cette relation est vérifiée pour tout point  $M_0$  tel que  $\vec{r}_0 = y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$ . On en déduit que les différences de phases  $(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_0$  et  $(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{r}_0$  sont indépendantes de  $\vec{r}_0$ , les fonctions exponentielles formant une famille libre. Ceci n'est possible que si

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_0 = (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{r}_0 = 0$$

Ainsi, les vecteur  $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$  et  $(\vec{k}_i - \vec{k}_t)$  doivent être orthogonaux à  $\vec{r}_0$ , c'est-à-dire colinéaires à  $\vec{N}$ , vecteur unitaire normal au dioptre.

On en déduit

$$\vec{k}_r = \vec{k}_i + \alpha \vec{N} \quad \text{et} \quad \vec{k}_t = \vec{k}_i + \beta \vec{N}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes réelles.

On retrouve la première loi de Descartes.

**Première loi de Descartes**

Les vecteurs d'ondes des ondes réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence, défini par le vecteur d'onde incident et la normale au dioptre.

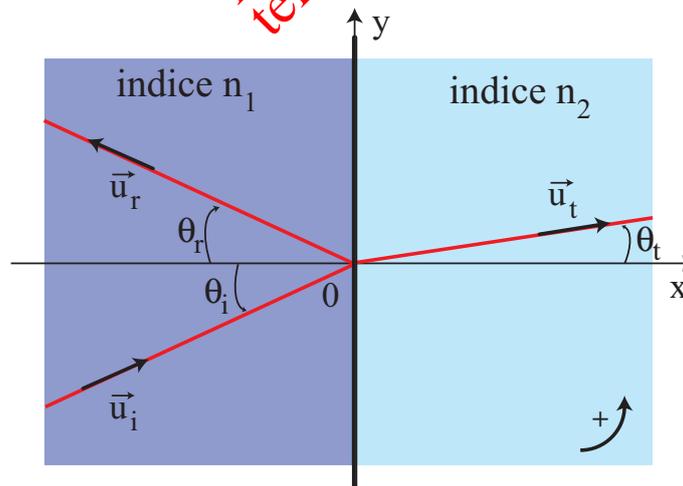


FIGURE 5 – Illustration des lois de Descartes.

En projetant les relations pour les vecteurs d'onde sur un vecteur tangent à la surface, on obtient

$$\vec{k}_{i\parallel} = \vec{k}_{r\parallel} = \vec{k}_{t\parallel}$$

Propriété

Les composantes tangentielles des vecteurs d'onde des ondes incidente, réfléchie et transmise sont égales :

$$\vec{k}_{i\parallel} = \vec{k}_{r\parallel} = \vec{k}_{t\parallel}$$

La continuité des composantes tangentielles des vecteurs d'onde implique :

$$k_i \sin \theta_i = -k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t$$

En remplaçant les vecteurs d'ondes par leurs expressions en fonction de l'indice lumineux, on obtient :

$$\frac{n_1 \omega \sin \theta_i}{c} = -\frac{n_1 \omega \sin \theta_r}{c} = \frac{n_2 \omega \sin \theta_t}{c}$$

soit

$$\theta_i = -\theta_r \quad \text{et} \quad n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

On retrouve la deuxième et la troisième loi de Descartes.

Deuxième loi de Descartes

L'onde réfléchie est symétrique de l'onde incidente par rapport à la normale au dioptre.

Troisième loi de Descartes

La direction de propagation de l'onde transmise fait un angle  $\theta_t$  avec la normale au dioptre de sorte que

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

où  $\theta_i$  est l'angle que fait la direction de propagation de l'onde incidente avec la normale au dioptre.

Remarque

Le modèle de la propagation des ondes électromagnétiques permet d'interpréter les lois de Descartes, qui constituent le fondement de l'optique géométrique.

Nous n'avons utilisé pour cette démonstration que la continuité des composantes tangentielles des vecteurs d'onde. Toutefois, nous pouvons également utiliser la continuité des champs pour en déduire les amplitudes des champs dans les deux milieux, et ainsi en déduire la répartition de la puissance lumineuse de l'onde incidente entre les ondes réfléchie et transmise.

**II.4. Coefficients de réflexion et de transmission sous incidence normale**

Déterminons les amplitudes des champs réfléchis et transmis en fonction de celle du champ incident dans le cas particulier de l'incidence normale. On aura donc  $\theta_i = 0$  et d'après les lois de Descartes  $\theta_r = \theta_t = 0$ . Le dioptre, situé en  $x = 0$ , a pour vecteur unitaire normal  $\vec{N} = \vec{u}_x$ .

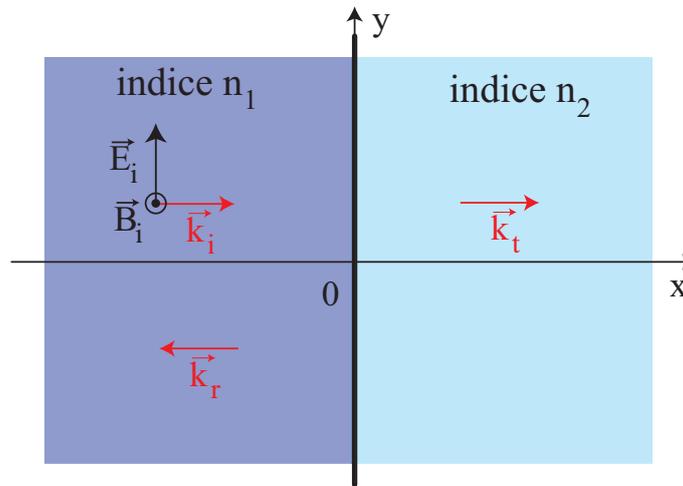


FIGURE 6 – Onde incidente, onde réfléchiée et onde transmise dans le cas de l’incidence normale.

a) Coefficients de réflexion et de transmission pour le champ électrique

Dans le cas de deux diélectriques d’indice  $n_1$  et  $n_2$  séparés par le plan d’équation  $x = 0$ , les champs électromagnétiques s’écrivent

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= \vec{E}_{0i} e^{i(\omega t - k_1 x)} & \vec{B}_i &= \frac{n_1}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_{0i} e^{i(\omega t - k_1 x)} & (\text{onde incidente}) \\ \vec{E}_r &= \vec{E}_{0r} e^{i(\omega t + k_1 x)} & \vec{B}_r &= \frac{n_1}{c} (-\vec{u}_x) \wedge \vec{E}_{0r} e^{i(\omega t + k_1 x)} & (\text{onde réfléchiée}) \\ \vec{E}_t &= \vec{E}_{0t} e^{i(\omega t - k_2 x)} & \vec{B}_t &= \frac{n_2}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_{0t} e^{i(\omega t - k_2 x)} & (\text{onde transmise}) \end{aligned}$$

La transversalité du champ électromagnétique impose que les champs sont tangents à l’interface. Dans le cas de milieux diélectriques isolants, il n’y a pas de courants surfaciques au niveau du dioptre, et on peut écrire la continuité des composantes tangentiellées du champ électrique et du champ magnétique :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 \quad \text{et} \quad \vec{B}_1 = \vec{B}_2 \quad (\text{en } x=0)$$

soit, en simplifiant par  $e^{i\omega t}$  :

$$\begin{cases} \vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t} \\ n_1 \vec{u}_x \wedge \vec{E}_{0i} - n_1 \vec{u}_x \wedge \vec{E}_{0r} = n_2 \vec{u}_x \wedge \vec{E}_{0t} \end{cases}$$

En utilisant la transversalité du champ électrique, la seconde relation devient

$$\vec{u}_x \wedge (n_1 \vec{E}_{0i} - n_1 \vec{E}_{0r} - n_2 \vec{E}_{0t}) = \vec{0} \quad \text{soit} \quad n_1 \vec{E}_{0i} - n_1 \vec{E}_{0r} - n_2 \vec{E}_{0t}$$

La résolution du système vérifié par  $\vec{E}_{0i}$ ,  $\vec{E}_{0r}$  et  $\vec{E}_{0t}$  conduit à

$$\begin{aligned} \vec{E}_{0r} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \vec{E}_{0i} \\ \vec{E}_{0t} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \vec{E}_{0i} \end{aligned}$$

**Définition :**

On définit les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour le champ électrique par

$$\begin{aligned}\vec{E}_{0r} &= r_{1 \rightarrow 2} \vec{E}_{0i} \\ \vec{E}_{0t} &= t_{1 \rightarrow 2} \vec{E}_{0i}\end{aligned}$$

**Propriété**

Entre deux milieux diélectriques, linéaires, homogènes et isotropes d'indices  $n_1$  et  $n_2$  :

$$r_{1 \rightarrow 2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad t_{1 \rightarrow 2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

L'onde transmise est en phase avec l'onde incidente au niveau du dioptre ( $t_{1 \rightarrow 2} > 0$ ) mais la réflexion provoque un déphasage de  $\pi$  lorsque  $n_1 < n_2$ .

On retrouve bien des expressions similaires à celles obtenues lors de l'étude de la propagation d'une onde acoustique sous incidence normale sur un dioptre. De même que pour les ondes sonores, on obtient deux coefficients réels.

**b) Coefficients de réflexion et de transmission des puissances**

Comme pour les ondes sonores, on définit les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude sont difficiles à interpréter, et on définit les coefficients de réflexion et de transmission de la puissance électromagnétique.

**Définition :**

On définit les coefficients réflexion et de transmission de la puissance électromagnétique par :

$$R_{1 \rightarrow 2} = \frac{\|\langle \vec{\Pi}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|} \quad \text{et} \quad T_{1 \rightarrow 2} = \frac{\|\langle \vec{\Pi}_t \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|}$$

Pour une OPPM incidente se propageant suivant  $+\vec{u}_x$  polarisée rectilignement selon  $\vec{u}_y$ , les champs électrique et magnétique s'écrivent, en notation réelle :

$$\vec{E}_i = E_{0i} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_i = \frac{n_1}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_i = \frac{n_1}{c} E_{0i} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

Le vecteur de Poynting de l'onde incidente vaut alors

$$\vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{n_1}{\mu_0 c} E_{0i}^2 \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

soit, en moyenne dans le temps

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{n_1}{2\mu_0 c} E_{0i}^2 \vec{u}_x$$

De la même manière

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{n_1}{2\mu_0 c} E_{0i}^2 \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{n_2}{2\mu_0 c} E_{0i}^2 \vec{u}_x$$

On en déduit :

$$R_{1 \rightarrow 2} = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2} = r_{1 \rightarrow 2}^2 \quad \text{et} \quad T_{1 \rightarrow 2} = \frac{E_{0t}^2}{E_{0i}^2} = \frac{n_2}{n_1} t_{1 \rightarrow 2}^2$$

soit en remplaçant les expression des coefficients en amplitude :

$$R_{1 \rightarrow 2} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad T_{1 \rightarrow 2} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

**Propriété**

Entre deux milieux diélectriques isolants, linéaires, homogènes et isotropes d'indices  $n_1$  et  $n_2$  :

$$R_{1 \rightarrow 2} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad T_{1 \rightarrow 2} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

La conservation de l'énergie électromagnétique impose

$$R_{1 \rightarrow 2} + T_{1 \rightarrow 2} = 1$$

Remarque

Numériquement, pour une interface air/verre, avec  $n_1 \simeq 1$  et  $n_2 \simeq 1,5$ , on obtient  $R_{1 \rightarrow 2} = 0,04$ , ce qui est cohérent avec les observations : les reflets dans une vitre sont faibles. De même, on obtient  $T_{1 \rightarrow 2} = 0,96$  : cette valeur étant proche de 1, la transmission d'une onde lumineuse à travers un dioptre air-verre n'induit une perte de puissance lumineuse importante que si de nombreux dioptres sont traversés.

Exemple

Dans un bon appareil photo, l'objectif est complexe et nécessite souvent une vingtaine de lentilles. La transmission ne représenterait alors que  $0,96^{20} = 44\%$ , ce qui est beaucoup trop faible. Cependant, pour éviter cet affaiblissement, il est possible de réaliser des couches antireflet à l'interface air-verre.

# Rayonnement dipolaire électrique

Le champ électromagnétique rayonné par un dipôle oscillant possède la structure d'une onde progressive, moyennant certaines hypothèses.

## I. Dipôle oscillant

### I.1. Modélisation

Le conducteur d'une antenne émettrice peut être modélisé par un ensemble d'électrons libres (charge  $-e$ ) dans un réseau de cations fixes (charge  $+e$ ). Lorsque ce conducteur est parcouru par un courant sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , chaque couple cation - électron est assimilable à un dipôle électrique de moment dipolaire  $\vec{p}_i = -e\vec{r}_i = -e\vec{a}_i \cos \omega t$  ( $\vec{r}_i$  étant le vecteur position de l'électron, l'origine étant prise au centre du cation). La source, supposée de dimension suffisamment petite, peut être modélisée par un dipôle de moment  $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_0 \cos \omega t$  (avec  $\vec{p}_0 = \sum_i -e\vec{a}_i$ ) : c'est un dipôle oscillant.

### I.2. Hypothèses

- **Approximation dipolaire**

La distribution est assimilable à un dipôle électrique, de moment  $\vec{p}$ , placé au point O choisi comme origine, lorsque ses effets sont étudiés en un point M situé à une distance  $r$  très grande devant l'extension de la distribution dipolaire : si  $a$  est une distance caractéristique de cette distribution,  $r \gg a$ .

L'approximation dipolaire consiste à considérer :  $\frac{r}{a} \gg 1$ .

- **Approximation non relativiste**

La vitesse de vibration de chaque électron est faible devant la vitesse de la lumière. Pour l'électron  $i$ ,  $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = -\omega\vec{a}_i \sin \omega t$ , donc  $\|\vec{v}_i\| = \omega\|\vec{a}_i\| < \omega a$ .

La condition  $\|\vec{v}_i\| \ll c$  est vérifiée lorsque  $\omega a \ll c$ , soit  $a \ll \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi} < \lambda$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le vide associée à la vibration de pulsation  $\omega$ .

L'approximation non relativiste consiste à considérer :  $\frac{\lambda}{a} \gg 1$ .

- **Zone de rayonnement**

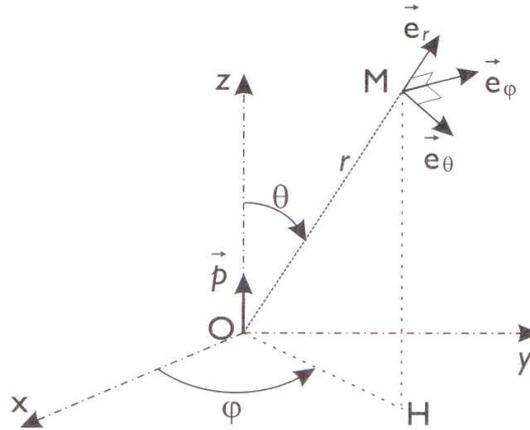
Le champ électromagnétique rayonné par le dipôle oscillant est étudié dans une région de l'espace assez éloignée de la source pour que  $\frac{r}{\lambda} \gg 1$ . Cette propriété définit la « zone de rayonnement ».

Notons que dans l'hypothèse non relativiste l'approximation dipolaire est nécessairement vérifiée dans la zone de rayonnement.

## 2. Champ rayonné

L'objectif est de déterminer en M, à tout instant, le champ électromagnétique créé par le dipôle oscillant de moment  $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t$  placé en O.

Le point M est repéré par les coordonnées sphériques, précisées sur la figure ci-contre,  $\vec{p} = p_0 \cos \omega t \vec{e}_z$ .



### 2.1. Potentiel vecteur

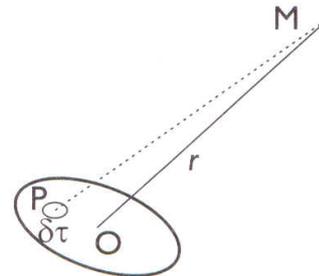
Nous admettons l'expression du potentiel vecteur créé en M par un élément de courant  $\vec{j}(P, t) \delta\tau$  en P (potentiel retardé) : 
$$d\vec{A}(\vec{M}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P, t - PM/c)}{PM} \delta\tau.$$

Le terme  $t_p = \frac{PM}{c}$  correspond à la durée de propagation entre le point source P et le point M.

Pour la distribution dipolaire D, nous avons

$$\vec{A}(\vec{M}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{j}(P, t - PM/c)}{PM} \delta\tau.$$

Par hypothèse,  $\|\vec{OP}\| < a \ll \|\vec{OM}\| = r$  donc  $PM \simeq r$ . De plus  $\frac{PM}{c} \simeq \frac{r}{c}$  car  $\frac{a}{c} \ll T = \frac{\lambda}{c}$  en vertu de l'approximation non relativiste ( $a \ll \lambda$ ).



Alors  $\vec{A}(\vec{M}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_D \vec{j}(P, t - r/c) \delta\tau$ . Par définition, la vitesse moyenne des électrons de la particule mésoscopique  $\delta\tau$  étant  $\vec{v}$  et leur charge étant  $\delta q = \rho \delta\tau$ ,  $\vec{j} \delta\tau = \rho \vec{v} \delta\tau = \delta q \vec{v}$ . Alors, pour la distribution D :

$$\iiint_D \vec{j} \delta\tau = \sum_i q_i \vec{v}_i = \sum_i -e \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \dot{\vec{p}}.$$

Le potentiel vecteur s'écrit :  $\vec{A}(\vec{M}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)$  ou  $\vec{A}(\vec{M}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}_{ret}$ .

### 2.2. Champ magnétique

Le champ magnétique est donné par  $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ , avec

$$\vec{A}(\vec{M}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_z = A(r, t) \vec{e}_z, \text{ soit } \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} (A(r, t) \vec{e}_z) = \overrightarrow{\text{grad}} A(r, t) \wedge \vec{e}_z$$

puisque  $\vec{\nabla} \wedge (U\vec{a}) = \vec{\nabla}U \wedge \vec{a} + U\vec{\nabla} \wedge \vec{a}$  et que  $\vec{\nabla} \wedge \vec{e}_z = \vec{0}$ . Donc  $\vec{B} = \frac{\partial A}{\partial r} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_z$ .

Avec  $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = -\sin\theta \vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{B} = -\frac{\partial A}{\partial r} \sin\theta \vec{e}_\varphi$ .

Or  $\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{p}}{\partial r} \right)$  avec  $\frac{\partial \dot{p}}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \dot{p}}{\partial t} = -\frac{\ddot{p}}{c}$  donc  $\frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \left( \frac{\dot{p}}{r} + \frac{\ddot{p}}{c} \right)$ .

Comparons les ordres de grandeurs :  $|\dot{p}|$  est de l'ordre  $\omega|p_0|$  et  $|\ddot{p}|$  est de l'ordre  $\omega^2|p_0|$  donc  $\frac{|\ddot{p}|/c}{|\dot{p}|/r}$  est de l'ordre de  $\frac{\omega r}{c} = 2\pi \frac{r}{\lambda}$ .

Dans la zone de rayonnement ( $\frac{r}{\lambda} \gg 1$ ), le terme  $\frac{\dot{p}}{r}$  est négligeable devant le terme  $\frac{\ddot{p}}{c}$ . Alors  $\frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{\mu_0}{4\pi r c} \ddot{p}$ .

Le champ magnétique a donc pour expression :  $\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r c} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\varphi$ .

### 2.3. Champ électrique

Le champ électrique  $\vec{E}$  est donné par  $\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ , le potentiel électrique

$V$  étant calculé à partir de la jauge de Lorentz  $\frac{\partial V}{\partial t} = -c^2 \text{div} \vec{A}$ .

Avec  $\text{div} \vec{A} = \text{div} (A \vec{e}_z) = \overline{\text{grad}} A \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial A}{\partial r} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z$ ,  $\frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{\mu_0}{4\pi r c} \ddot{p}$  et  $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \cos\theta$ , il

vient  $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\mu_0 c}{4\pi r} \ddot{p} \cos\theta$ . En intégrant par rapport au temps et en excluant la présence éventuelle d'un potentiel permanent, nous obtenons l'expression du

potentiel électrique :  $V(M, t) = \frac{\mu_0 c \cos\theta}{4\pi r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)$ .

Alors  $\overline{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$  avec  $\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\mu_0 c \cos\theta}{4\pi r} \left( \frac{\dot{p}}{r} + \frac{\ddot{p}}{c} \right) = -\frac{\mu_0 \cos\theta}{4\pi r} \ddot{p}$  et

$\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\mu_0 c \sin\theta}{4\pi r^2} \dot{p}$ . D'autre part  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{p} \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{p} (\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta)$ .

Nous en déduisons  $\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 c \sin\theta}{4\pi r} \left( \frac{\dot{p}}{r} + \frac{\ddot{p}}{c} \right) \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r} \ddot{p} \vec{e}_\theta$ , soit

$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\theta$ .

### 2.4. Structure de l'onde émise

- Chaque composante du champ électromagnétique

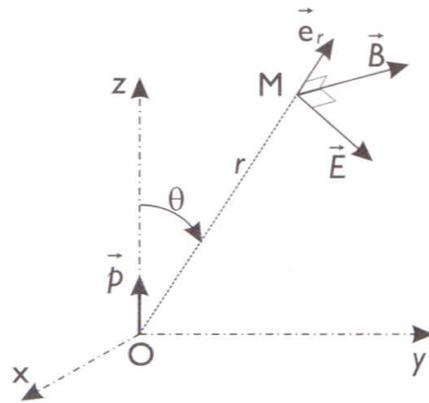
$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\theta$ ,  $\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r c} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\varphi$  peut s'écrire sous la

forme  $\psi(M, t) = \psi_0(r, \theta) \cos\omega \left( t - \frac{r}{c} \right)$  ou  $\psi(M, t) = \psi_0(r, \theta) \cos\omega \left( t - \frac{\overline{OM} \cdot \vec{e}_r}{c} \right)$ ,

caractéristique d'une onde progressive, se propageant dans la direction et le sens de  $\vec{e}_r$ , à la vitesse  $c$ .

- Les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires à la direction de propagation  $\vec{e}_r$ , sont perpendiculaires entre eux et le trièdre  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_r)$  est direct. Leurs normes vérifient la relation  $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ , d'où la relation  $\vec{B} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}}{c}$ .
- Le champ rayonné à grande distance par le dipôle oscillant possède donc la structure de l'onde progressive monochromatique décrite au chapitre 8. Mais l'amplitude des champs dépend des variables d'espace  $r$  et  $\theta$  ; du fait de cette dépendance, l'onde n'est pas la même, à un instant  $t$  donné, en tout point d'un plan perpendiculaire à  $\vec{e}_r$  : l'onde n'est pas plane. Cependant dans une région limitée de l'espace, telle que  $r$  et  $\sin\theta$  varient très peu, les amplitudes peuvent être considérées comme constantes et l'onde possède toutes les propriétés de l'onde plane progressive harmonique : nous dirons que l'onde est « localement plane ».

En conclusion, l'onde électromagnétique émise par un dipôle oscillant dans la zone de rayonnement possède « localement » la structure de l'OPPH.



### 3. Puissance rayonnée

#### 3.1. Intensité rayonnée

La puissance traversant un élément de surface  $\delta\vec{S}$  est par définition  $\delta P = \vec{\Pi} \cdot \delta\vec{S}$ , où  $\vec{\Pi}$  est le vecteur de Poynting dont l'expression est ici :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2 c} \ddot{p}^2 \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_r.$$

Nous choisissons comme élément de surface un élément de la sphère de centre O et de rayon  $r$  :  $\delta\vec{S} = \delta S \vec{e}_r$ . Alors

$$\delta P = \Pi \delta S \text{ et, par définition, l'intensité énergétique moyenne est } I = \frac{\langle \delta P \rangle}{\delta S} = \langle \Pi \rangle.$$

$$\text{Ainsi } I = \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2 c} \langle \ddot{p}^2 \rangle = \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{32\pi^2 r^2 c} (\omega^2 p_0)^2.$$

L'intensité décroît en  $\frac{1}{r^2}$  ; nous verrons que cette atténuation n'est pas liée à un phénomène d'absorption, la propagation dans le vide exclut tout phénomène dissipatif.

L'intensité est une fonction de l'angle  $\theta$ , le rayonnement n'est pas isotrope. Cette anisotropie peut être décrite par l'indicatrice de rayonnement.

#### 3.2. Indicatrice de rayonnement

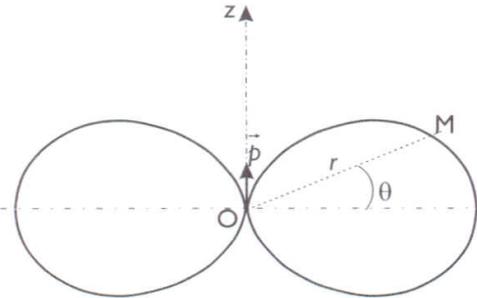
Définissons le vecteur  $\vec{V} = \vec{OM} = I \vec{e}_r$ . L'ensemble des points M correspondant à une intensité  $I$  donnée définit une surface appelée indicatrice de rayonnement.

L'axe Oz du dipôle est un axe de symétrie de révolution du système ( $I$  ne dépend pas de la variable  $\varphi$ ), la surface est donc une surface de révolution autour de cet axe ; nous représentons sa méridienne (intersection avec un plan méridien, contenant Oz) : son équation en coordonnées polaires est  $r = r_0 \sin^2 \theta$ , la constante  $r_0$  étant fixée par la valeur choisie pour  $I$ .

L'ensemble des courbes obtenues pour différentes valeurs de l'intensité rayonnée  $I$  constitue le diagramme de rayonnement.

La fonction caractéristique du rayonnement (f.c.r.) est  $f(\theta, \varphi) = \frac{I}{I_{\max}}$ . Elle

vaut ici  $f(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta$ .



Il est à noter que l'intensité rayonnée est nulle dans la direction de l'axe Oz du dipôle et qu'elle est maximale dans le plan équatorial, perpendiculaire en O à cet axe.

### 3.3. Puissance totale rayonnée

Calculons la puissance rayonnée à travers une sphère  $\Sigma$  de centre O et de rayon  $r$  :

$$P = \iint_{\Sigma} \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2 c} \ddot{p}^2 \delta S, \quad \text{avec} \quad \delta S = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad \text{soit}$$

$$P = \frac{\mu_0}{16\pi^2 r^2 c} \ddot{p}^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi. \quad \text{Avec} \quad \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}, \quad \text{il vient} \quad P = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2.$$

Cette dernière expression montre que la puissance est indépendante du rayon  $r$  de la sphère  $\Sigma$  ; il n'y a pas de dissipation de puissance au cours de la propagation : aucune matière n'interagit avec le champ électromagnétique pour en absorber de l'énergie.

La puissance ainsi calculée est donc la puissance émise par le dipôle oscillant. En conclusion, la puissance rayonnée par un dipôle oscillant à la pulsation  $\omega$  a pour

$$\text{expression} \quad \langle P \rangle = \frac{\mu_0}{6\pi c} \langle \ddot{p}^2 \rangle = \frac{\mu_0}{6\pi c} \langle (-\omega^2 p_0 \cos \omega t)^2 \rangle \quad \text{soit} \quad \langle P \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c}.$$

Cette puissance est proportionnelle à la quatrième puissance de la pulsation.

Ce résultat explique la couleur bleue du ciel : les molécules de l'atmosphère soumises à l'action du rayonnement solaire peuvent être modélisées par des dipôles oscillants de même pulsation  $\omega$  que la pulsation du champ excitateur (diffusion Rayleigh) ; le violet ( $\lambda = 0,4 \mu\text{m}$ ) a une pulsation double de celle du rouge ( $\lambda = 0,8 \mu\text{m}$ ), il est donc 16 fois plus diffusé, ce qui explique le décalage du spectre de la lumière diffusée par l'atmosphère vers le bleu.

## partie II : Optique ondulatoire

prof. F. MI ipest  
tel:95 55 6410

# Introduction à l'optique ondulatoire

## I La lumière : une onde électromagnétique

### I.1. La lumière dans le spectre électromagnétique

La propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu isotrope est décrite par la propagation de deux grandeurs vectorielles transverses : le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$ , perpendiculaires à la direction  $\vec{u}$  de propagation de l'onde.

Parmi les ondes électromagnétiques, la lumière correspond aux ondes électromagnétiques visibles. La lumière est caractérisée par une longueur d'onde dans le vide est comprise entre 400 et 750 nm

$$400 \text{ nm} < \lambda_0 < 800 \text{ nm}$$

soit, des fréquences  $f = \frac{c}{\lambda_0}$  comprises dans l'intervalle

$$8.10^{14} \text{ Hz} > f > 4.10^{14} \text{ Hz}$$

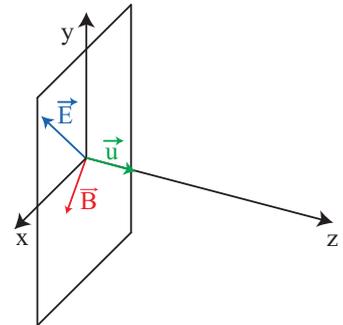


FIGURE 1 -

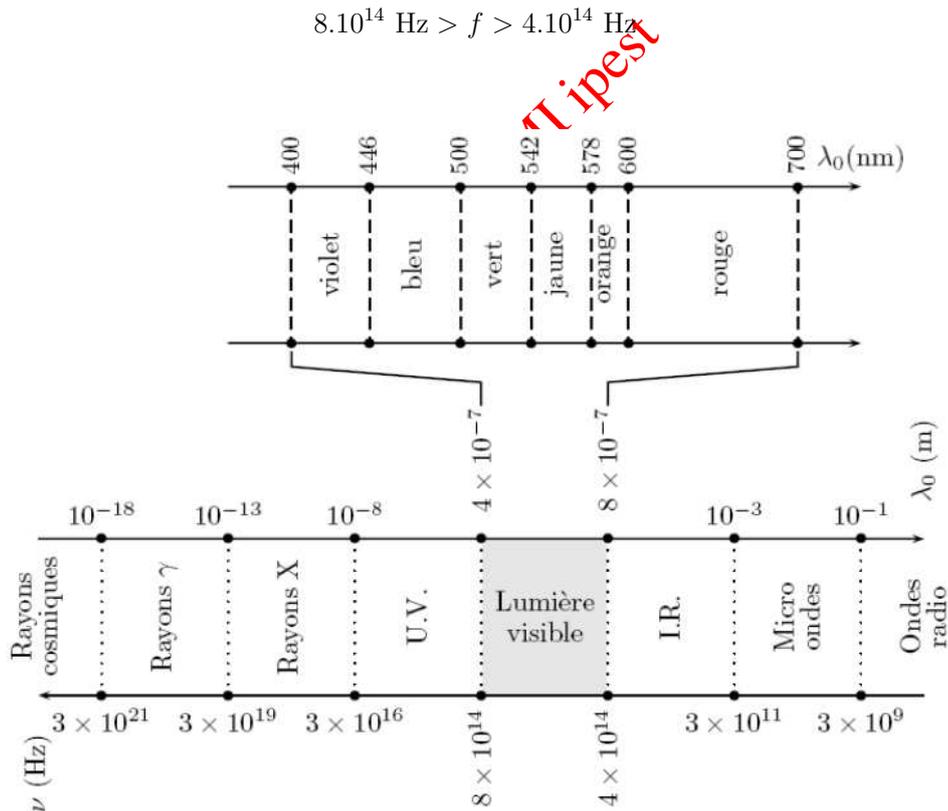


FIGURE 2 - La lumière visible au sein des ondes électromagnétiques.

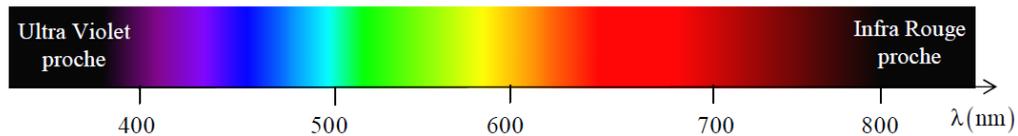


FIGURE 3 – Spectre de la lumière visible.

## I.2. Sources de lumière

Il existe différentes sources lumineuses, présentant des différences importantes, notamment concernant la largeur spectrale de leur émission.

### a) Lumière blanche

Parmi les sources de lumière blanche, on peut citer : le Soleil, les lampes à incandescence à filament de tungstène, les lampes à arc électrique. Ces sources émettent un rayonnement qui contient toutes les radiations du spectre visible (la densité spectrale d'énergie dépend essentiellement de la température de la source).

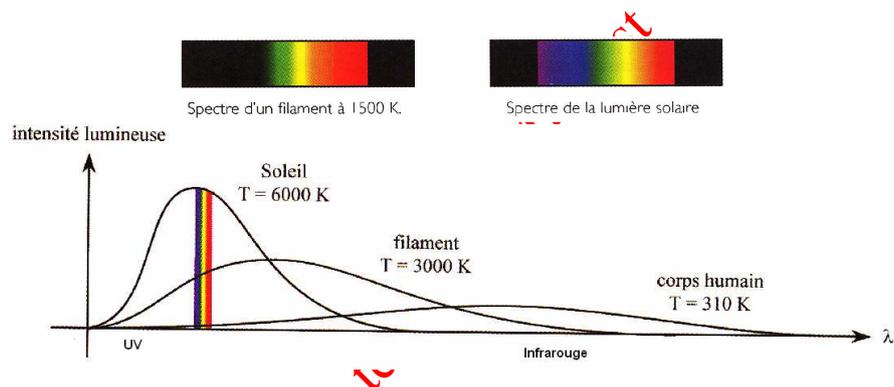


FIGURE 4 – Spectres d'émission de corps ayant des températures différentes.



FIGURE 5 – Dispersion de la lumière du Soleil à travers un prisme : le spectre est continu.

### b) Lampes spectrales

Les principales lampes spectrales utilisées sont les lampes à vapeur de sodium (Na), de mercure (Hg), d'hélium (He), de néon (Ne). Elles émettent un spectre de raies obtenu par un régime permanent de décharges électriques dans la vapeur ou le gaz. Les électrons entrent en collision avec les atomes qui sont alors excités. La désexcitation des atomes provoque l'émission de certaines longueurs d'onde sous la forme d'un spectre de raie.

Les raies émises sont fines : on parle de radiation quasi-monochromatique. La largeur des raies s'exprime en terme de longueur d'onde dans le vide  $\Delta\lambda_0$  ou de fréquence  $\Delta f$ . Typiquement, pour une lampe spectrale

$$\Delta\lambda_0 \sim 0,01 \text{ nm à } 0,1 \text{ nm} \quad \text{soit} \quad \Delta f = \Delta \left( \frac{c}{\lambda_0} \right) \sim \frac{c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda \sim 10^9 \text{ Hz à } 10^{10} \text{ Hz}$$

Cet élargissement des raies est dû principalement :

- ★ à l'effet Doppler : en raison de l'agitation thermique, les atomes sont en mouvement dans le référentiel de l'observateur. Par effet Doppler, leur émission est décalée vers le bleu lorsqu'ils se rapprochent de l'observateur et vers le rouge lorsqu'ils s'en éloignent. L'élargissement Doppler est d'autant plus important que la température à l'émission est élevée.
- ★ aux collisions : les interactions entre les atomes modifient leurs niveaux énergétiques et donc la fréquence de leur émission. L'élargissement collisionnel est d'autant plus important que la pression est élevée.

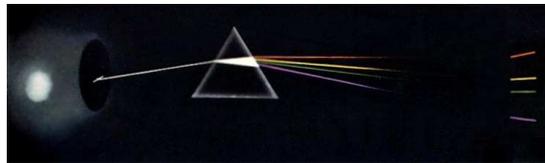


FIGURE 6 – Dispersion de la lumière d'une lampe spectrale à travers un prisme : le spectre est discontinu.

### c) Lasers

Dans un laser l'émission d'un photon n'est pas spontanée mais induite par un photon incident. Le photon émis possède alors la même fréquence, la même direction de propagation et la même phase que le photon incident.

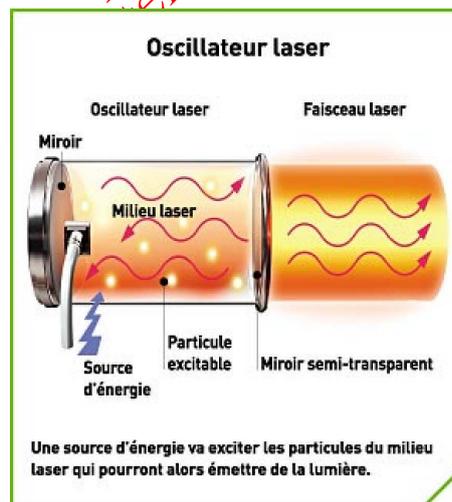


FIGURE 7 – Fonctionnement de principe d'un laser.

De plus, la présence d'une cavité résonante, formée de miroirs et de miroirs semi-réfléchissant permet :

- ★ de sélectionner, en fonction de la longueur  $L$  de la cavité, la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde émise de sorte que  $L = n \lambda/2$  où  $n \in \mathbb{N}$ ;

- ★ d'accroître le nombre des photons, c'est-à-dire d'amplifier l'intensité de la lumière émise, en provoquant davantage d'émissions stimulées.

La largeur spectrale du rayonnement est très faible et son intensité très élevée. L'onde émise peut être traitée comme un faisceau de lumière parallèle quasiment monochromatique. Pour un laser He-Ne au laboratoire,  $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$ . La surface du faisceau est typiquement de  $1 \text{ mm}^2$  pour une puissance de quelques mW. Dans un lecteur de CD, on trouve des diodes laser, dont le rayonnement est beaucoup moins monochromatique que celui des lasers à gaz.

### I.3. Les récepteurs

Les ondes lumineuses peuvent être étudiées à l'aide de différents capteurs, ou récepteurs, le plus immédiat étant l'œil.

Les champs électromagnétiques dans le domaine optique, vibrent à des fréquences de l'ordre de  $6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ , ce qui correspond à  $6 \cdot 10^{14}$  oscillations par seconde. Les détecteurs n'ont généralement pas un temps de réponse suffisamment court pour obtenir une "image" instantanée de l'onde.

Tout récepteur est caractérisé par un temps de réponse  $\tau_r$  : il n'est sensible à des variations que sur des durées supérieures à  $\tau_r$ .

#### Remarque

*L'observation à l'œil d'un mouvement très rapide fait intervenir le phénomène de persistance rétinienne : plusieurs images correspondant à des instants différents se superposent. L'œil n'"actualise" pas l'image suffisamment rapidement : il n'est sensible qu'à des variations moyennes.*

#### a) L'œil

La rétine d'un œil humain comporte environ 130 millions de cellules sensibles à la lumière (photorécepteurs) : 125 millions de bâtonnets et 5 millions de cônes. Les deux types de photorécepteurs sont complémentaires et transmettent l'information lumineuse à des cellules de traitement de l'information lumineuse qui vont permettre au cerveau d'interpréter l'image formée sur la rétine<sup>1</sup>

Le temps de réponse de l'œil (+ le cerveau) est très long, typiquement de l'ordre de  $\tau_r \simeq 0,1 \text{ s}$ . L'œil est donc insensible à des phénomènes de fréquence supérieure à  $10 \text{ Hz}$ .

#### b) Film photographique

Dans un film photographique, des cristaux de bromure d'argent exposés à la lumière et après développement forment des grains d'argent métallique. Le nombre de cristaux exposés dépend du temps d'exposition.

---

1. Les bâtonnets sont responsables de la vision nocturne (vision scotopique) et possèdent un maximum de sensibilité vers  $510 \text{ nm}$ . Leur sensibilité est liée à un colorant, la rhodopsine, qui blanchit à la lumière du jour, expliquant par là leur insensibilité la journée.

- ★ Les bâtonnets ne fournissent qu'une réponse photométrique et ne permettent donc pas de déterminer les couleurs : la nuit, tous les chats sont gris.
- ★ Les cônes fournissent une réponse photométrique et chromatique, grâce à des pigments dont les maximums d'absorption se situent dans le bleu, le vert ou le rouge. C'est là la base de la vision des couleurs et son aspect trichromatique.

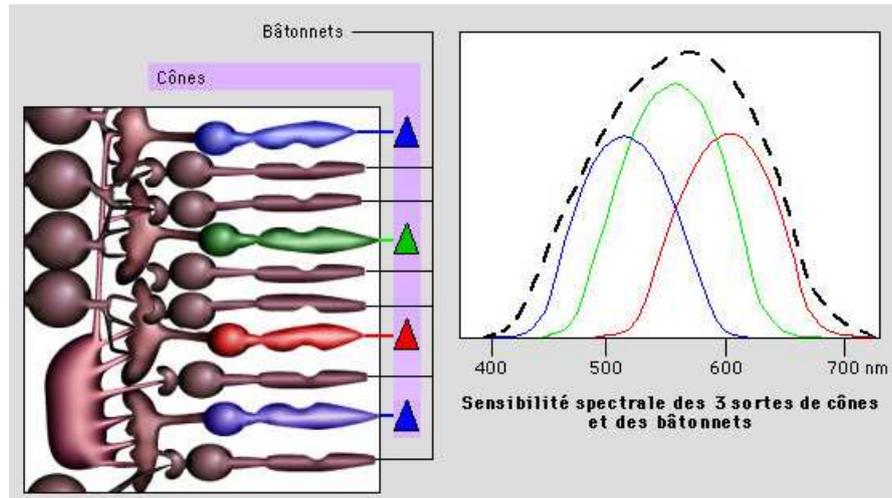


FIGURE 8 – Aspect des photorécepteurs de l’oeil et sensibilité chromatique des cônes.

c) Photodiodes

Les photodiodes sont des diodes polarisée en inverse qui deviennent passantes lorsqu’on les éclaire. Les photodiodes peuvent supporter des puissances lumineuses importantes mais sont assez peu rapide, leur temps de réponse étant de l’ordre de  $\tau_r \simeq 10^{-5}$  s.

Actuellement, des photodiodes organisées en matrices forment les capteurs CCD des appareils photo numériques.

d) Photomultiplicateurs

Les photomultiplicateurs sont constitués d’une photocathode qui, éclairée, émet des électrons. Ces électrons sont ensuite accélérés par une succession d’anodes leur arrachent d’autres électrons et on mesure l’amplification en courant. Les photomultiplicateurs sont très sensibles et très rapides, leur temps de réponse étant de l’ordre de  $\tau_r \simeq 10^{-9}$  s.

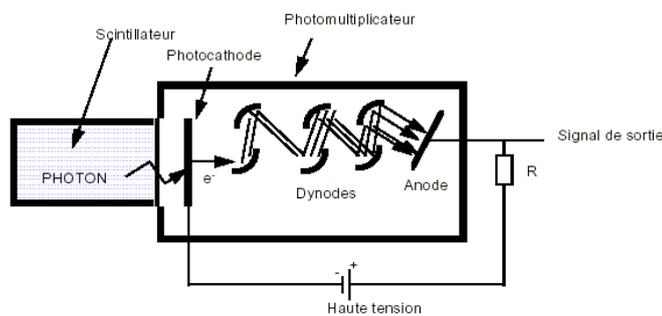


FIGURE 9 – Principe de fonctionnement d’un photomultiplicateur.

## I.4. Insuffisance de l'optique géométrique

### a) Rayon lumineux et diffraction

En optique géométrique, un rayon lumineux peut être vu comme la limite d'un pinceau lumineux infiniment fin.

Toutefois, le phénomène de diffraction montre que cette définition du rayon lumineux n'est pas applicable lorsque la lumière rencontre des obstacles d'une taille comparable à la longueur d'onde. Ainsi, la figure de diffraction d'un faisceau laser par une fente est représentée sur la figure 10.

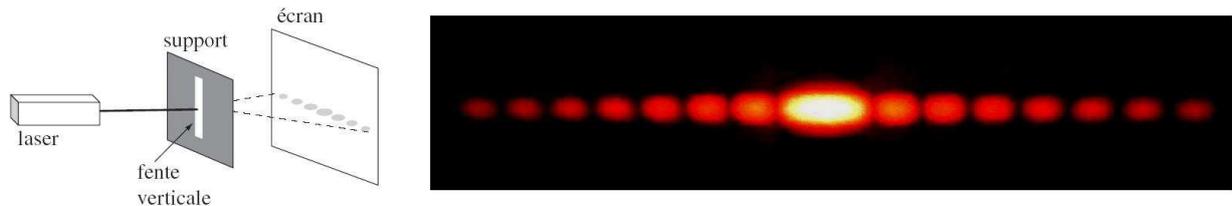


FIGURE 10 – (À gauche) Dispositif expérimental. La largeur de la fente est petite devant la longueur d'onde. (À droite) Figure de diffraction obtenue.

#### Définition :

L'approximation de l'optique géométrique consiste à supposer que la longueur d'onde dans le vide de l'onde lumineuse est très inférieure à toutes les dimensions du problème :

$$\lambda_0 \ll a \quad \text{où } a \text{ est une dimension caractéristique du problème}$$

#### Remarque

Cette dimension peut être la dimension des obstacles rencontrés ou la distance caractéristique de variation de l'indice du milieu.

À l'aide de l'approche ondulatoire de l'électromagnétique, il est possible d'introduire une nouvelle définition du rayon lumineux, tout en restant dans le cadre de l'optique géométrique.

#### Propriété

Un rayon lumineux est une ligne de champ du vecteur de Poynting moyen  $\langle \vec{\Pi} \rangle$ .

#### Remarque

Dans l'approximation de l'optique géométrique, un rayon lumineux matérialise donc la direction de propagation de l'énergie électromagnétique.

**b) Intensité lumineuse et interférences**

Éclairons à l'aide d'une source monochromatique deux fentes très fines et parallèles entre elles. Sur un écran, placé de l'autre côté des fentes, on observe une succession de franges alternativement brillantes et sombres. L'intensité résultant de la superposition de deux ondes lumineuses n'est donc pas la somme des intensités !

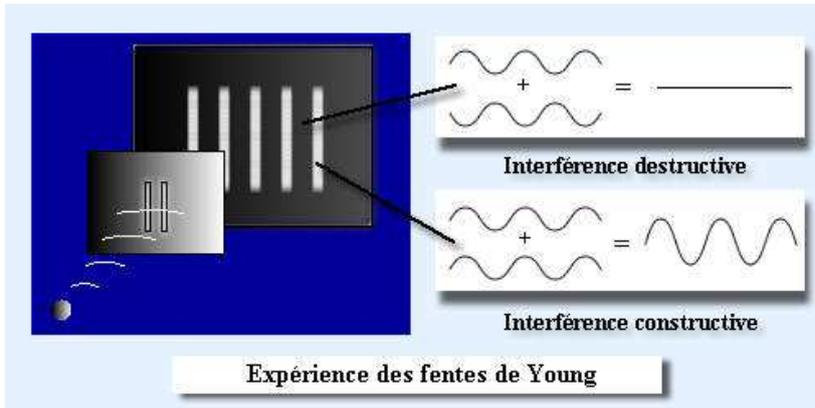


FIGURE 11 – (À gauche) Mise en évidence du phénomène d'interférence dans l'expérience des fentes d'Young. (À droite) Irisations dues au phénomène d'interférence sur une lame de savon.

On peut comprendre ce résultat en s'intéressant au fonctionnement des récepteurs. En effet, les récepteurs optiques sont sensibles à la puissance qu'ils reçoivent. Or la puissance transportée par une onde électromagnétique est égale au flux du vecteur de Poynting.

L'intensité  $I$  reçue par un détecteur peut se définir comme la puissance reçue par unité de surface pour une onde en incidence normale. Toutefois, les champs électromagnétiques dans le domaine optique, vibrent à des fréquences de l'ordre de  $6.10^{14}$  Hz. Les détecteurs ne mesurent donc généralement qu'une puissance moyenne sur une durée  $\tau_r$  égale à leur temps de réponse.

**Définition :**

**L'intensité d'une onde lumineuse est égale à la norme du vecteur de Poynting, moyennée sur le temps de réponse du détecteur :**

$$I = \langle ||\vec{\Pi}|| \rangle_{\tau_r}$$

**L'intensité lumineuse s'exprime en  $W.m^{-2}$  .**

Remarque

On définit l'éclairement  $\mathcal{E}$  d'une surface éclairée sous une incidence  $\alpha$  par

$$\mathcal{E} = \langle ||\vec{\Pi}|| \rangle_{\tau_r} \cos(\alpha)$$

Considérant la superposition de deux ondes électromagnétiques de champs  $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$  et  $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ . Les vecteurs de Poynting associés à chaque onde valent

$$\vec{\Pi}_1 = \frac{\vec{E}_1 \wedge \vec{B}_1}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{\Pi}_2 = \frac{\vec{E}_2 \wedge \vec{B}_2}{\mu_0}$$

Or, le vecteur de Poynting total vaut

$$\vec{\Pi} = \frac{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)}{\mu_0} = \frac{\vec{E}_1 \wedge \vec{B}_1}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_2 \wedge \vec{B}_2}{\mu_0} + \underbrace{\frac{\vec{E}_1 \wedge \vec{B}_2}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_2 \wedge \vec{B}_1}{\mu_0}}_{\vec{\Pi}_{12}} = \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{\Pi}_{12}$$

Le vecteur de Poynting total n'est donc pas la somme des vecteurs de Poynting dans le cas général. L'intensité lumineuse d'une superposition d'ondes n'est donc pas la somme des intensités lumineuses

$$I = I_1 + I_2 + I_{12} \neq I_1 + I_2$$

On parle de phénomène d'interférences.

Remarque

Seul l'aspect ondulatoire permet d'interpréter l'existence des interférences.

## II Approximation scalaire

### II.1. Approximation scalaire

Une onde électromagnétique possède une structure vectorielle, définie par les vecteurs champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$ .

Pour de la lumière non polarisée, la direction du champ électrique change de manière aléatoire au cours du temps, de sorte qu'en moyenne sur le temps d'observation, toutes les composantes du champ électrique dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation sont parfaitement équivalentes.

On appelle alors vibration lumineuse une composante quelconque du champ électromagnétique par rapport à un axe perpendiculaire à la direction de propagation.

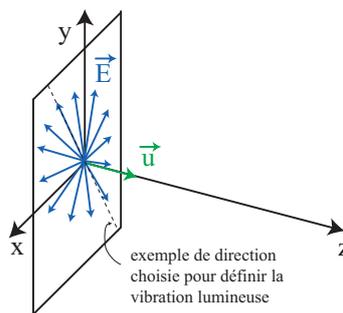


FIGURE 12 – Lumière naturelle non polarisée, dans le cas d'une onde plane.

#### Approximation scalaire

En l'absence de phénomènes liés à la polarisation, il est possible d'associer, à toute onde lumineuse, une grandeur scalaire  $s(M, t)$ , appelée vibration lumineuse, qui s'identifie à une composante quelconque du champ électrique.

Comme en physique des ondes, on raisonnera très souvent sur le maillon élémentaire que constitue l'onde *monochromatique*, dont la vibration est donnée par :

$$s(M, t) = A(M) \cos [\omega t - \varphi(M)] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A(M) & \text{amplitude} \\ \varphi(M) & \text{retard de phase en } M \end{cases}$$

#### Remarque

La notion de vibration lumineuse permettra ainsi de décrire de nombreux phénomènes lumineux à partir d'un modèle scalaire de la lumière, et non plus vectoriel.

#### Remarque

★ On utilisera parfois la vibration lumineuse complexe  $\underline{s}(M, t)$  de sorte que :

$$s(M, t) = \text{Re} [\underline{s}(M, t)]$$

★ Pour des ondes se propageant dans la même direction ou dans des directions faisant un angle faible entre elles, on pourra utiliser le théorème de superposition car les équations de Maxwell sont linéaires :

$$s(M, t) = \sum_i s_i(M, t)$$

#### Propriété

La modélisation scalaire n'est plus valable :

- lors de l'utilisation de lumière polarisée.
- lorsque l'on veut utiliser le théorème de superposition avec des ondes dont les directions sont différentes.

Dans ces cas, on reviendra au champ électrique vectoriel pour interpréter les phénomènes observés.

#### Exemple

Pour une onde plane progressive monochromatique de vecteur d'onde  $\vec{k}$  (source à l'infini) :

$$s(M, t) = s_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

où  $s_0$  est une amplitude constante.

En notations complexes :

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

où  $\underline{s}_0 = s_0 e^{j\varphi}$  est l'amplitude complexe de l'onde.

La phase indique que le rayon lumineux est dirigé par  $\vec{k}$  !

#### Remarque

- ★ L'approximation scalaire permet d'étudier l'optique d'un point de vue ondulatoire, tout en utilisant la notion de rayon lumineux !
- ★ On peut assimiler une onde lumineuse aux ondes apparaissant à la surface d'un liquide. La vibration lumineuse représenterait alors l'amplitude des rides à la surface du liquide.

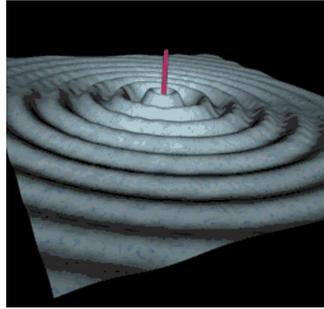


FIGURE 13 – On peut se représenter la propagation d'une onde lumineuse comme la propagation des rides à la surface d'un liquide.

## II.2. Théorème de Malus

### a) Définitions

On s'intéresse à la propagation de la lumière dans un milieu transparent, linéaire et isotrope mais pas nécessairement homogène. On rappelle les définitions de ces adjectifs ci-dessous.

#### Définition :

Un milieu est dit :

- \* transparent s'il est non-absorbant (vecteur d'onde ou indice réel) ;
- \* linéaire si son indice (ou vecteur d'onde) est indépendant de l'amplitude des champs ;
- \* homogène si son indice est identique en tout point ;
- \* isotrope si son indice est indépendant de la direction de propagation de l'onde et de sa polarisation.

#### Remarque

Un milieu transparent, linéaire, homogène et isotrope sera appelé TLHI en reprenant les initiales de chaque adjectif.

### b) Propagation dans un milieu TLI

Un rayon lumineux étant correctement décrit par le vecteur de Poynting, calculons le vecteur de Poynting pour une onde plane progressive monochromatique de vecteur d'onde  $\vec{k}$ , se propageant dans un milieu transparent, linéaire et isotrope d'indice  $n$ . Nous supposons de plus le milieu homogène.

Le champ électrique complexe s'écrit sous la forme  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  où  $\vec{E}_0$  est réel (polarisation rectiligne) et où  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  est le vecteur position du point  $M$  à partir d'une origine quelconque. L'indice optique est tel que  $\vec{k} = n \vec{k}_0$  où  $\vec{k}_0$  est le vecteur d'onde dans le vide.

On détermine le champ magnétique à l'aide de la relation de structure

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_0}{\omega} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Pour calculer le vecteur de Poynting, on doit utiliser les notations réelles :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{Re} [\underline{\vec{E}}] = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ \vec{B} &= \text{Re} [\underline{\vec{B}}] = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_0}{\omega} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \end{aligned}$$

Le vecteur de Poynting est donc de la forme

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}_0 \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}_0)}{\mu_0 \omega} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

La formule du double produit vectoriel

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

permet de réécrire :

$$\vec{E}_0 \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}_0) = \vec{k}(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0(\vec{k} \cdot \vec{E}_0)$$

Mais le champ électrique d'une O.P.P.M. est transverse de sorte que  $\vec{k} \perp \vec{E}_0$ . On en déduit

$$\vec{E}_0 \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}_0) = E_0^2 \vec{k}$$

Finalement

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \omega} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{k} = \frac{E^2}{\mu_0 \omega} \vec{k}$$

Le vecteur de Poynting est proportionnel à  $E^2$  et porté par le vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

#### Remarque

En posant  $\varphi(M) = \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ , on voit que

$$\vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

et le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 \omega} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

Il est donc possible de définir "localement" un vecteur d'onde, à condition que le milieu ne soit pas trop inhomogène à l'échelle de la longueur d'onde.

**Propriété**

Soit un milieu transparent, linéaire et isotrope tel que l'indice varie peu à l'échelle de la longueur d'onde. Le vecteur de Poynting est alors de la forme

$$\vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 \omega} \vec{k}$$

Le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  est :

- \* proportionnel à  $E^2$  ;
- \* porté par le vecteur d'onde  $\vec{k}$  défini localement par

$$\vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(M)$$

où  $\varphi(M)$  est le retard de phase en  $M$ .

On en déduit que, dans un milieu TLI, les rayons lumineux sont portés par le vecteur d'onde  $\vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(M)$ . Or  $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$  est perpendiculaire aux surface  $\varphi(M) = \text{cste}$ , qui sont les surfaces équiphasés ou surfaces d'onde.

**Théorème de Malus**

Dans un milieu LHI, les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde définies par  $\varphi(M) = \text{cste}$ .

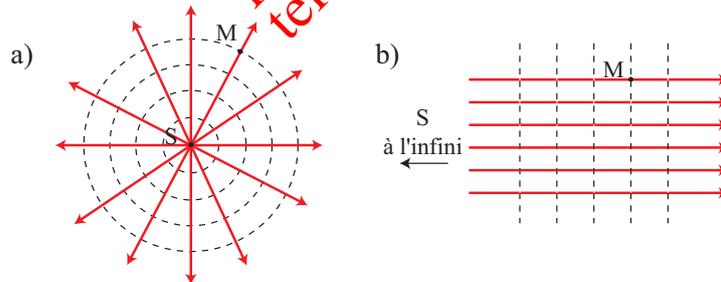


FIGURE 14 – Surfaces d'onde et rayons lumineux pour a) une onde sphérique, et b) une onde plane.

**II.3. Intensité lumineuse**

Pour une O.P.P.M., l'intensité lumineuse vérifie  $I = \langle ||\vec{\Pi}|| \rangle_{\tau_r} \propto \langle E^2 \rangle_{\tau_r}$  où  $\tau_r$  est le temps de réponse du détecteur, généralement grand devant la période de l'onde lumineuse.

Dans le cadre de l'approximation scalaire, la vibration lumineuse est proportionnelle à  $E : s(M, t) \propto E(M, t)$ . On adopte alors la définition suivante de l'intensité lumineuse :

**Définition :**

L'intensité lumineuse en un point  $M$  est définie par

$$I(M) = 2\langle s^2(M, t) \rangle_{\tau_r}$$

où  $\langle \cdot \rangle_{\tau_r}$  représente une moyenne sur le temps de réponse du détecteur et où  $s(M, t)$  est la vibration lumineuse associée à l'onde.

En notations complexes :

$$I(M) = \langle \underline{s}(M, t) \underline{s}(M, t)^* \rangle_{\tau_r} = \langle |\underline{s}(M, t)|^2 \rangle_{\tau_r}$$

où  $\underline{s}^*$  représente le complexe conjugué de  $\underline{s}$ .

Exemple

Pour une onde plane progressive monochromatique de vecteur d'onde  $\vec{k}$  :

$$s(M, t) = s_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad \text{et} \quad I(M) = s_0^2 = \text{cste}$$

En notations complexes :

$$\underline{s}(M, t) = s_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)} \quad \text{et} \quad I(M) = s_0^2 = \text{cste}$$

L'intensité lumineuse est indépendante du point  $M$ .

Remarque

En optique, on s'intéresse davantage aux variations d'intensité qu'à la valeur de l'intensité. On trouvera parfois la définition suivante :

$$I(M) = K \langle s^2(M, t) \rangle_{\tau_r}$$

où la constante  $K$  n'aura aucun intérêt dans quasi-totalité des cas.

**II.4. Exemple : description d'une onde sphérique****a) Vibration lumineuse**

Considérons une onde lumineuse se propageant dans un milieu TLHI. Tout comme les composantes du champ électrique, la vibration lumineuse  $s(M, t)$  vérifie l'équation de d'Alembert

$$\Delta s - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

où  $n$  est l'indice du milieu.

On cherche les solutions sous la forme d'onde sphérique  $s(M, t) = s(r, t)$  où  $r = OM$  est la distance du point  $M$  à un point origine quelconque  $O$ .

En utilisant un formulaire d'analyse vectorielle, l'équation de d'Alembert se ré-écrit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial s}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial s}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 r s}{\partial t^2} = 0$$

La fonction  $r \times s(r, t)$  vérifie l'équation de d'Alembert unidimensionnelle dont les solutions s'écrivent comme la superposition d'une fonction de  $r + ct$  et de  $r - ct$ . On a donc

$$s(r, t) = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r}$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions dérivables quelconques.

Les ondes en  $g(r + ct)$  se propagent dans la direction des  $r$  décroissants et correspondent à une onde sphérique convergente vers le point  $O$ . Les ondes en  $f(r - ct)$  se propagent dans la direction des  $r$  croissants et correspondent à une onde sphérique divergente depuis le point  $O$ .

Dans le cas d'une onde sphérique divergente monochromatique, la vibration lumineuse est de la forme

$$s(r, t) = \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0) \quad \text{onde sphérique divergente monochromatique}$$

où  $a_0$  est une constante,  $\varphi_0$  une phase à l'origine et où  $k = n \frac{2\pi}{\lambda_0}$ .

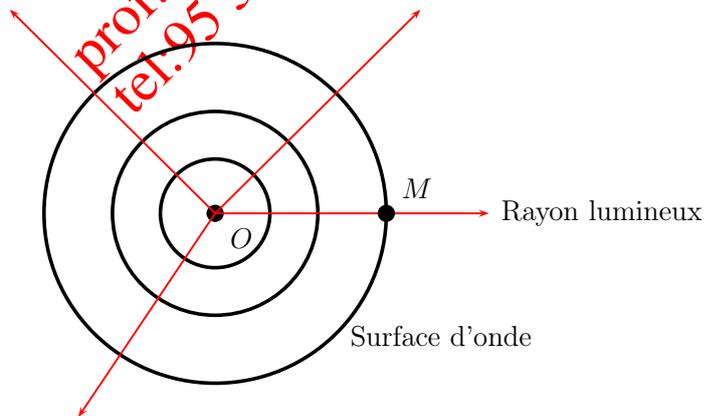


FIGURE 15 –

Remarque

*D'après le théorème de Malus, les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde. Ici, les surfaces d'onde sont les surfaces  $r = \text{cste}$ , c'est-à-dire des sphères de centre  $O$ . Les rayons lumineux sont donc des droites issues de  $O$ .*

### b) Intensité lumineuse

L'intensité lumineuse vaut, en un point  $M$  situé à la distance  $r$  de  $O$  :

$$I(M) = 2\langle s^2(r, t) \rangle = \frac{a_0^2}{r^2}$$

L'intensité d'une onde sphérique varie en  $1/r^2$ . Par conséquent, la puissance moyenne traversant une sphère  $\Sigma$  de rayon  $r$  vaut

$$\mathcal{P} = \iint_{\Sigma} I \, dS = 4\pi r^2 \times \frac{a_0^2}{r^2} = 4\pi a_0^2 = \text{cste}$$

La puissance moyenne rayonnée est donc conservée et indépendante de  $r$ . Le terme en  $1/r$  dans l'expression de la vibration lumineuse traduit simplement la conservation de l'énergie.

### c) Variations de l'amplitude

L'amplitude et la phase de la vibration lumineuse dépendent de  $r$ . Afin d'estimer le terme dont les variations sont prépondérantes, on dérive  $s$  par rapport à  $r$  :

$$\frac{\partial s}{\partial r} = -\frac{a_0}{r^2} \cos(\omega t - kr + \varphi_0) - \frac{a_0 k}{r} \sin(\omega t - kr + \varphi_0)$$

Comparons l'amplitude des différents termes

$$\frac{a_0/r^2}{a_0 k/r} = \frac{1}{kr} = \frac{\lambda_0}{2\pi n r} \ll 1 \quad \text{si } r \ll \lambda$$

On pourra donc négliger les variations spatiales en  $1/r$  de l'amplitude par rapport aux variations induites par le terme de phase en  $kr$  à condition que la distance à la source soit très grande devant la longueur d'onde.

### d) Bilan

#### Propriété

- ★ Dans un milieu TLHI, une onde sphérique monochromatique divergente de centre  $O$  est décrite par une vibration lumineuse de la forme

$$s(M, t) = \frac{a_0}{r} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} nr + \varphi_0\right)$$

où  $a_0$  est une amplitude constante,  $\varphi_0$  est la phase à l'origine et  $r = OM$ .

- ★ La variation de l'amplitude en  $1/r$  traduit la conservation de l'énergie et pourra être négligée devant les variations spatiales de la phase.
- ★ Les rayons lumineux associés sont des droites passant par  $O$ .

### III Chemin optique

#### III.1. Chemin optique et retard de phase

Considérons une onde monochromatique, caractérisée par une pulsation  $\omega$  ainsi qu'un rayon lumineux associé à cette onde, issu de  $S$  et passant par les points  $M$  et  $M'$ .

La vibration lumineuse en  $M$  est de la forme :

$$s(M, t) = s_0(M) \cos[\omega t - \varphi(M)]$$

où  $s_0(M)$  est une amplitude dépendant du point  $M$  et  $\varphi(M)$  est la partie spatiale de la phase au point  $M$ .



Rayon lumineux pris entre  $M$  et  $M'$

FIGURE 16

#### Exemple

Pour une onde plane se propageant selon  $\vec{u}_x$ , de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$

$$s(M, t) = s_0 \cos(\omega t - kx - \varphi_0)$$

où  $k = n \frac{2\pi}{\lambda_0}$  est le nombre d'onde et  $\varphi_0$  est une phase à l'origine, constante. Ainsi  $\varphi(M) = kx + \varphi_0$ .

Déterminons la vibration lumineuse au point  $M'$ .

L'onde au point  $M'$  à la date  $t$  est identique, à l'amplitude près (phénomène d'atténuation par exemple) à celle située au point  $M$  mais un peu plus tôt, à la date  $t - \Delta t$  où  $\Delta t$  représente la durée de propagation entre les points  $M$  et  $M'$  de sorte que

$$s(M', t) = s_0(M') \cos[\omega(t - \Delta t) - \varphi(M)]$$

On a, pour  $M$  et  $M'$  suffisamment proches

$$\Delta t = \frac{\widehat{MM'}}{v_\varphi} = n \frac{\widehat{MM'}}{c}$$

Si  $M$  et  $M'$  ne sont pas infiniment proches :

$$\Delta t = \int_M^{M'} dt = \int_M^{M'} \frac{d\ell}{v_\varphi} = \int_M^{M'} n \frac{d\ell}{c}$$

**Définition :**

On appelle chemin optique entre les points  $M$  et  $M'$ , la quantité

$$L_{MM'} = (MM') = \int_M^{M'} n \, d\ell$$

où l'intégrale est calculée le long du rayon lumineux et  $n$  est l'indice du milieu.

On en déduit

$$c\Delta t = L_{MM'} = (MM')$$

**Propriété**

Le chemin optique représente la distance  $c\Delta t$  que parcourrait la lumière dans le vide pendant la durée  $\Delta t$  de la propagation :

$$(MM') = c\Delta t$$

Finalement, la vibration lumineuse au point  $M'$  s'écrit

$$s(M', t) = s_0(M') \cos[\omega t - (\varphi(M) + \omega\Delta t)] \quad \text{avec} \quad \omega\Delta t = \omega \frac{(MM')}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (MM')$$

où l'on a utilisé la relation  $\frac{\omega}{c} = k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ .

**Propriété**

La propagation d'une onde lumineuse monochromatique entre deux points  $M$  et  $M'$  se traduit par un retard de phase de la vibration lumineuse donné par

$$\Delta\varphi = \varphi(M') - \varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (MM')$$

où  $(MM')$  est le chemin optique entre  $M$  et  $M'$ .

Ainsi, les vibrations lumineuses s'écrivent

$$\begin{aligned} s(M, t) &= s_0(M) \cos[\omega t - \varphi(M)] \\ s(M', t) &= s_0(M') \cos\left[\omega t - \varphi(M) - \frac{2\pi}{\lambda_0} (MM')\right] \end{aligned}$$

Exercice

Soit un rayon lumineux joignant les points  $S$  et  $M$ , séparés par une distance  $d = e_1 + e_2 + e_3$  où les distances  $e_1$  et  $e_3$  sont parcourues dans le vide et  $e_2$  est parcourue dans une lame de verre d'indice  $n$ . On note  $\lambda_0$  la longueur d'onde dans le vide de la radiation.

1. Déterminer le chemin optique entre  $S$  et  $M$ .
2. Déterminer le retard de phase associé.
3. Si l'onde étudiée est plane, exprimer la vibration lumineuse au point  $M$  en fonction de  $\varphi_S$  (phase à l'origine en  $S$ ) et du chemin optique ( $SM$ ).

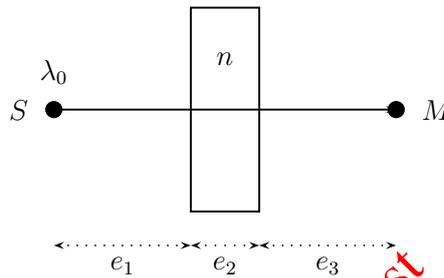


FIGURE 17

Le chemin optique ( $SM$ ) vaut

$$(SM) = \int_S^M n ds = e_1 + ne_2 + e_3$$

Le retard de phase associé vaut

$$\Delta\varphi = \varphi_M - \varphi_S = \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (e_1 + ne_2 + e_3)$$

Si l'onde est plane :

$$s(M, t) = s_0 \cos \left[ \omega t - \varphi_S - \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM) \right]$$

### III.2. Chemin optique et surface d'onde

#### a) Surface d'onde

Considérons une onde lumineuse monochromatique émise par une source  $S$ . La vibration lumineuse est de la forme

$$s(M, t) = s_0(M) \cos [\omega t - \varphi(M)] \quad \text{avec} \quad \varphi(M) = \varphi_S + \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)$$

où  $(SM)$  est le chemin optique entre  $S$  et  $M$ .

Dans le cadre de l'optique géométrique, l'amplitude des champs varie peu de sorte que l'on peut identifier les surfaces d'onde  $s = \text{cste}$  aux surfaces équiphasées  $\varphi(M) = \text{cste}$ . Les surfaces d'onde correspondent donc à  $(SM) = \text{cste}$ .

**Propriété**

Les surface d'onde relative à un point  $S$  sont les surfaces définies par l'ensemble des points  $M$  tels que  $(SM) = \text{cste}$  :

$$\text{surface d'onde} \longleftrightarrow (SM) = \text{cste}$$

**Remarque**

On parle :

- ★ d'onde plane lorsque les surfaces d'onde sont des plans parallèles entre eux ;
- ★ d'onde sphérique lorsque les surfaces d'onde sont des sphères concentriques.

**b) Application à la description d'une onde plane****Exercice**

Considérons une onde plane émise par une source ponctuelle  $S$  située à l'infini.

1. Représenter les rayons lumineux et les surfaces d'onde.
2. Exprimer la vibration lumineuse  $\varphi_O$  en un point  $O$  d'un rayon lumineux en fonction de la phase  $\varphi_S$  de l'onde à l'émission et du chemin optique  $(SO)$ .
3. Soit  $H$  un point du rayon lumineux passant par  $O$  et  $M$  un point quelconque appartenant au plan d'onde passant par  $H$ . Exprimer le retard de phase  $\varphi_M$  au point  $M$  en fonction de  $x = \overline{OH}$  et de  $\varphi_O$ . En déduire l'expression de la vibration lumineuse.

1. Pour une onde plane, les rayons lumineux sont tous parallèles entre eux et perpendiculaires aux plans d'onde.
2. Prenons l'exemple de la figure 18. La vibration lumineuse au point  $O$  est de la forme

$$s(O, t) = s_0 \cos(\omega t - \varphi_O) \quad \text{avec} \quad \varphi_O = \varphi_S + \frac{2\pi}{\lambda_0} (SO) \quad (\text{Chemin optique } (SO) \text{ infini})$$

3. Les points  $H$  et  $M$  appartenant au même plan d'onde

$$(SM) = (SH)$$

On en déduit la phase au point  $M$  :

$$\begin{aligned} \varphi_M &= \varphi_S + \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM) \\ &= \varphi_S + \frac{2\pi}{\lambda_0} (SH) \\ &= \underbrace{\varphi_S + \frac{2\pi}{\lambda_0} (SO)}_{\varphi_O} + \frac{2\pi}{\lambda_0} (OH) \quad \text{car} \quad (SH) = (SO) + (OH) \\ &= \varphi_O + \frac{2\pi}{\lambda_0} n x \quad \text{car} \quad (OH) = n \overline{OH} = n x \end{aligned}$$

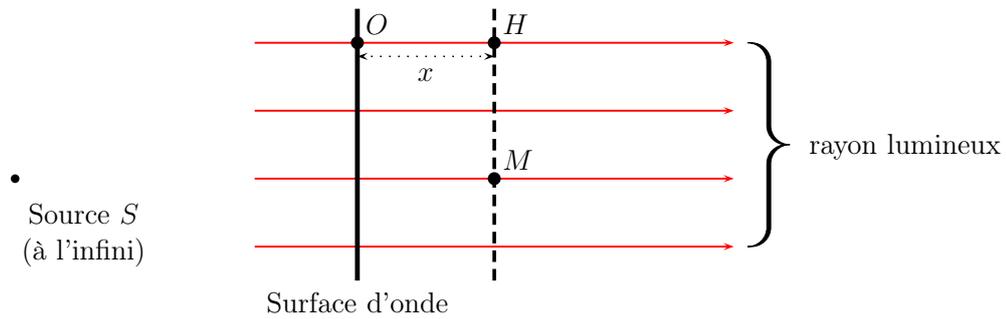


FIGURE 18 –

Finalement la vibration lumineuse pour une onde plane se propageant suivant les  $x$  croissants est de la forme

$$s(M, t) = s_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} n x - \varphi_0 \right) \quad (\text{onde plane})$$

où  $O$  est l'origine des  $x$ .

## IV Applications : systèmes optiques et optique ondulatoire

### IV.1. Lois de Descartes

Le Hollandais Christiaan Huygens propose dans son Traité de la lumière en 1690 une interprétation des lois de Snell-Descartes basée sur une théorie ondulatoire. Huygens considère la lumière comme un phénomène vibratoire dont l'aspect alternatif nous échappe du fait de la fréquence trop élevée de la vibration.

Il propose une méthode de construction géométrique du rayon réfracté basée sur le principe suivant, tout à fait équivalent au théorème de Malus : un plan perpendiculaire au rayon lumineux doit être un plan de phase ou surface d'onde. Cela veut dire qu'à un même instant, la vibration doit avoir la même valeur en tout point d'un tel plan.

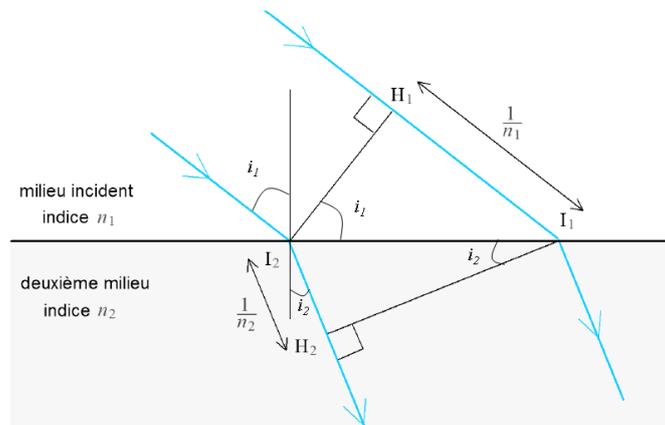


FIGURE 19 –

On a donc :

$$\begin{aligned} (SI_1) - (SI_2) &= (SI_1) - (SH_1) = (H_1I_1) = n_1 H_1 I_1 = n_1 I_1 I_2 \sin i_1 \\ (SI_1) - (SI_2) &= (SH_2) - (SI_2) = (I_2H_2) = n_2 I_2 H_2 = n_2 I_1 I_2 \sin i_2 \end{aligned}$$

Par conséquent  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$  : on retrouve bien la loi de Descartes.

### IV.2. Calcul de chemin optique

Exercice

On considère une lentille mince convergente, plongée dans l'air, et éclairée par une source ponctuelle  $S$  placée dans son plan focal objet mais hors du foyer. Soit  $P$  un point appartenant à un rayon émergent. On appelle  $Q$  le projeté orthogonal de  $P$  sur un autre rayon et  $M$  l'intersection de ce rayon avec la perpendiculaire à l'axe optique passant par  $P$ . On note  $PM = a$ .

Déterminer les différences de chemin optique  $(SP) - (SQ)$  et  $(SM) - (SP)$ .

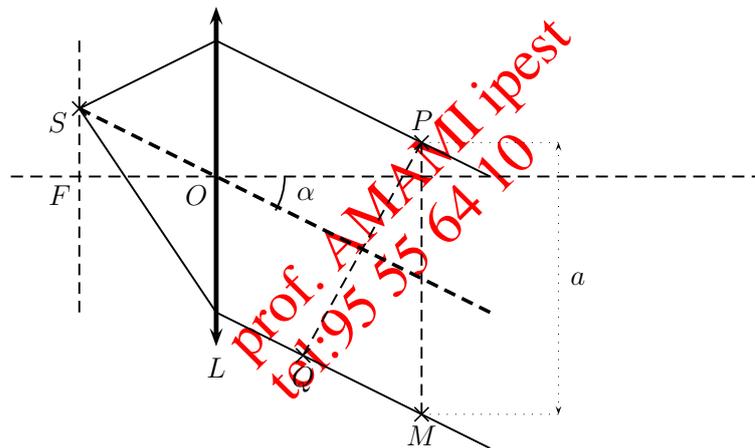


FIGURE 20 –

La droite  $(PQ)$  est perpendiculaire aux rayons lumineux issus de  $S$ . D'après le théorème de Malus, la droite  $(PQ)$  appartient à un plan d'onde. Comme les deux rayons sont issus de la même source  $S$ , le chemin optique est constant dans ce plan et

$$(SP) = (SQ) \Rightarrow \boxed{(SP) - (SQ) = 0}$$

Par ailleurs  $(SM) - (SP) = (SM) - (SQ)$ . Or les points  $M$  et  $Q$  appartiennent au même rayon lumineux de sorte que

$$(SM) - (SQ) = (QM) = n QM = QM \quad \text{car } n = 1 \text{ dans l'air.}$$

Avec  $QM = PM \sin \alpha = a \sin \alpha$ , on a

$$\boxed{(SM) - (SP) = a \sin \alpha}$$

### IV.3. Stigmatisme

#### Définition :

Un système est dit stigmatique pour un couple de point  $(A, A')$  si tous les rayons passant par  $A$  convergent au point  $A'$  après passage par le système optique.

Plaçons une source ponctuelle en  $A$  : avant la traversée du système optique, les surfaces d'onde sont sphériques (d'après le théorème de Malus).

Après la traversée du système optique, l'onde converge vers  $A'$  : les surfaces d'onde sont des sphères de centre  $A'$  (toujours d'après le théorème de Malus).

Toutes les surfaces d'onde se rejoignent au point  $A'$  : quel que soit le rayon lumineux choisi joignant  $A$  et  $A'$ , le déphasage entre  $A$  et  $A'$  est le même.

#### Remarque

Le système optique n'a fait que changer la forme des surfaces d'onde.

#### Propriété

Un système stigmatique pour les points  $A$  et  $A'$  est tel que

$$(AA') = \text{cste} \quad \text{quel que soit le rayon lumineux joignant } A \text{ et } A'$$

La figure ci-dessous représente les surfaces d'onde associées à l'onde issues de  $A$  et convergent en  $A'$ .

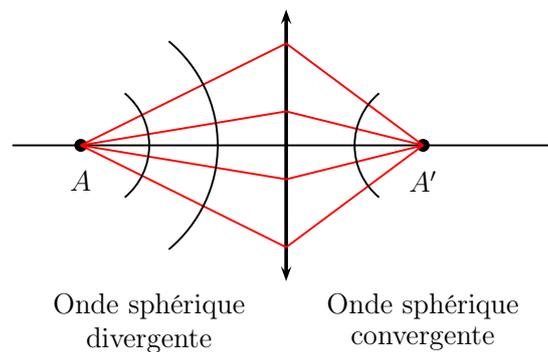


FIGURE 21 –

# Interférences à 2 ondes

## I Interférences à deux ondes

### I.1. Première approche

Excitons la surface d'un liquide à l'aide d'une pointe très fine oscillant périodiquement. Il se forme à la surface du liquide des rides circulaires concentriques (voir figure 1).

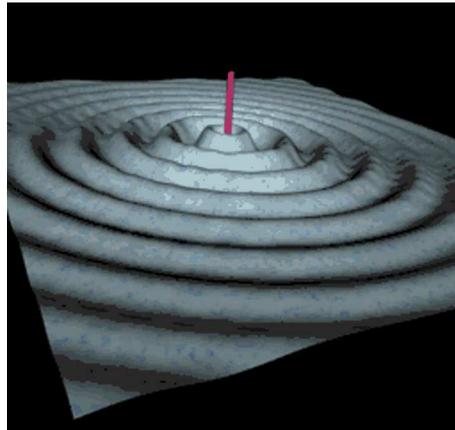


FIGURE 1

Excitons désormais la surface du liquide à l'aide de deux pointes distinctes, oscillant à la même fréquence. Il se forme à la surface du liquide deux systèmes de rides circulaires concentriques.



FIGURE 2 –

Dans la zone de superposition de ces rides, on voit apparaître une figure particulière, formée de segments de droites (voir figure 2). Ce phénomène, lié à la superposition de deux ondes, est appelé phénomène d'interférences.

Étudions la possibilité d'observer des interférences en optique mais intéressons-nous tout d'abord à l'émission des ondes lumineuses par une source réelle.

### I.2. Modèle d'émission par trains d'ondes

Considérons une source lumineuse ponctuelle et monochromatique. L'émission lumineuse peut être décrite par la désexcitation d'un électron, d'un niveau d'énergie  $E_2$  à un niveau d'énergie  $E_1$  (voir figure 3).

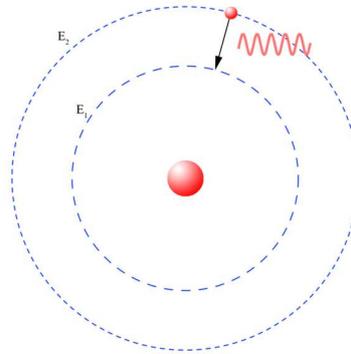


FIGURE 3 – Modèle d'émission à deux niveaux. L'électron, en se désexcitant, émet un photon dont la fréquence  $\nu$  est donnée par  $\Delta E = E_2 - E_1 = h\nu$ .

L'émission d'une source ponctuelle monochromatique  $S$  est caractérisée par :

- ★ une longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ , définie par  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$  ;
- ★ la durée  $\tau_c$  de la désexcitation, appelée **temps de cohérence**.

On peut donc représenter l'émission de  $S$  par une succession de "salves de lumière", appelés trains d'onde, de longueur d'onde  $\lambda_0$  de longueur  $L_c = c\tau_c$ , appelée longueur de cohérence.

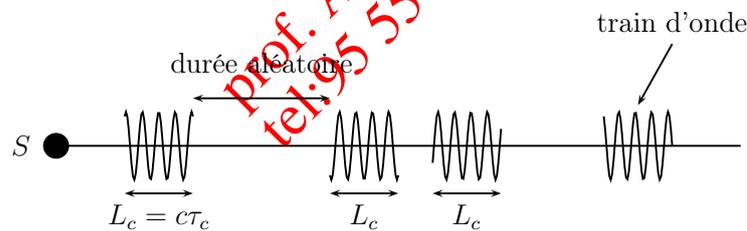


FIGURE 4 – Modèle d'émission par trains d'onde : il n'y a aucun lien entre les phases à l'origine des différents trains d'onde.

**Définition :**

On appelle **train d'onde** l'émission d'une onde quasi-sinusoïdale sur une durée finie  $\tau_c$ , appelée **temps de cohérence**.

On appelle **longueur de cohérence**  $L_c$  la distance que parcourt la lumière dans le vide pendant  $\tau_c$  :

$$L_c = c\tau_c$$

$L_c$  correspond à l'extension spatiale, dans le vide, des trains d'onde émis par une source.

Remarque

L'équivalent corpusculaire d'un train d'onde est le photon.

Les photons - ou trains d'ondes - émis sont généralement indépendants les uns des autres : en effet, l'instant d'émission, la polarisation de l'onde et son amplitude sont soumis à des fluctuations aléatoires.

Propriété

L'amplitude, la phase et la polarisation varient aléatoirement d'un train d'onde à l'autre de sorte que ces grandeurs ne pourront être considérées comme constantes que sur une durée moyenne  $\tau_c$ .

Remarque

Dans le cas de l'onde sphérique émise par une source ponctuelle  $\varphi_O$ , la vibration lumineuse s'écrit :

$$s(M, t) = \frac{a_0}{r} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} nr + \varphi_O \right)$$

où  $\varphi_O$  varie aléatoirement à l'échelle de  $\tau_c$ .

On donne ci-dessous des exemples de temps de cohérence associés à différentes sources afin de mieux connaître les ordres de grandeurs mis en jeu.

Source	$\tau_c$	$L_c$
Laser He-Ne	$10^{-9}$ s	0,3 m
Raie rouge de l'hydrogène	$10^{-11}$ s	4 mm
Lumière blanche + filtre étroit	$3 \cdot 10^{-14}$ s	10 $\mu\text{m}$
Lumière du Soleil	$2 \cdot 10^{-15}$ s	0,6 $\mu\text{m}$

Remarque

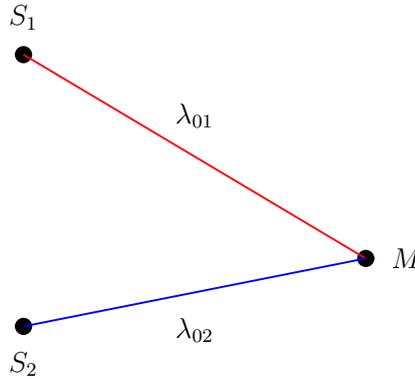
Dans le modèle des trains d'onde, les ondes émises, même par un unique atome, ne sont pas parfaitement sinusoïdales puisqu'elles ont un début et une fin. Les ondes émises ne sont donc jamais parfaitement monochromatiques : la largeur spectrale des raies d'émission est limitée par la durée  $\tau_c$  de désexcitation. D'après les propriétés de la transformée de Fourier liant la variation temporelle et le spectre fréquentiel d'une grandeur, on peut en déduire que la durée d'un train d'onde  $\tau_c$  est reliée à la largeur spectrale de la raie d'émission par :

$$\Delta\nu \simeq \frac{1}{\tau_c}$$

Ainsi pour une durée d'émission infinie ( $\tau_c \rightarrow \infty$ ), l'onde émise est parfaitement monochromatique ( $\Delta\nu \rightarrow 0$ ).

### I.3. Superposition de deux ondes lumineuses

Considérons deux sources ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$ , monochromatiques, de pulsations respectives  $\omega_1$  et  $\omega_2$  et de longueurs d'onde dans le vide  $\lambda_{01}$  et  $\lambda_{02}$ .



Les vibrations lumineuses en un point  $M$  s'écrivent, en notations complexes :

$$\underline{s}_1(M, t) = s_{01} e^{j(\omega_1 t - \varphi_{1M})} \quad \text{avec} \quad \varphi_{1M} = \frac{2\pi}{\lambda_{01}} (S_1 M) + \varphi_{01}$$

$$\underline{s}_2(M, t) = s_{02} e^{j(\omega_2 t - \varphi_{2M})} \quad \text{avec} \quad \varphi_{2M} = \frac{2\pi}{\lambda_{02}} (S_2 M) + \varphi_{02}$$

où  $\varphi_{01}$  et  $\varphi_{02}$  sont les déphasages à l'origine pour chacune des ondes et où les amplitudes  $s_{01}$  et  $s_{02}$  sont supposées réelles et indépendantes de la position du point  $M$ .

Remarque

Dans le cadre de l'optique géométrique, il est légitime de négliger les variations d'amplitude devant les variations de la phase.

Au point  $M$ , la vibration lumineuse totale est la somme des vibrations lumineuses :

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) + \underline{s}_2(M, t)$$

L'intensité lumineuse au point  $M$  vaut donc

$$I(M) = \langle \underline{s}(M, t) \underline{s}^*(M, t) \rangle_{\tau_r}$$

où  $\tau_r$  est le temps de réponse du détecteur.

En remplaçant les vibrations lumineuses par leurs expressions, on trouve

$$\begin{aligned} I(M) &= \langle \underline{s}(M, t) \underline{s}^*(M, t) \rangle \\ &= \langle [s_{01} e^{j(\omega_1 t - \varphi_{1M})} + s_{02} e^{j(\omega_2 t - \varphi_{2M})}] [s_{01} e^{-j(\omega_1 t - \varphi_{1M})} + s_{02} e^{-j(\omega_2 t - \varphi_{2M})}] \rangle \\ &= \left\langle s_{01}^2 + s_{02}^2 + s_{01} s_{02} [e^{j(\omega_1 t - \omega_2 t - \varphi_{1M} + \varphi_{2M})} + e^{-j(\omega_1 t - \omega_2 t - \varphi_{1M} + \varphi_{2M})}] \right\rangle \end{aligned}$$

Or l'intensité liée à la source  $S_1$  seule vaut :

$$I_1 = \langle \underline{s}_1(M, t) \underline{s}_1^*(M, t) \rangle = s_{01}^2$$

De même, l'intensité liée à la source  $S_2$  seule vaut :

$$I_2 = s_{02}^2$$

Par ailleurs, en utilisant la relation  $e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos(x)$ , on obtient

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos [(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_{2M} - \varphi_{1M}] \rangle$$

*Remarque*

Dans le cas général, l'intensité résultante n'est pas égale à la somme des intensités associées à chacune des ondes :

$$I(M) = I_1 + I_2 + I_{12}$$

où  $I_{12}$  est un terme d'interférence.

**Définition :**

Soient plusieurs ondes lumineuses atteignant un point  $M$  donné. On parle d'interférences lumineuses au point  $M$  lorsque l'intensité totale en  $M$  n'est pas égale à la somme des intensités de chaque onde.

Il reste désormais à évaluer le terme d'interférences.

#### I.4. Conditions d'obtention des interférences

Essayons de produire des interférences lumineuses en éclairant un écran à l'aide de deux sources monochromatiques (lampe à vapeur de sodium par exemple) et quasi-ponctuelles. À l'intersection des faisceaux, l'intensité est plus élevée mais aucune modulation spatiale d'intensité n'est observée.

L'obtention des interférences lumineuses nécessite donc des conditions particulières sur les sources. Étudions ces conditions à partir de l'expression du terme d'interférences.

L'intensité résultant de la superposition de deux ondes lumineuses est de la forme

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos [(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_{2M} - \varphi_{1M}] \rangle_{\tau_r}$$

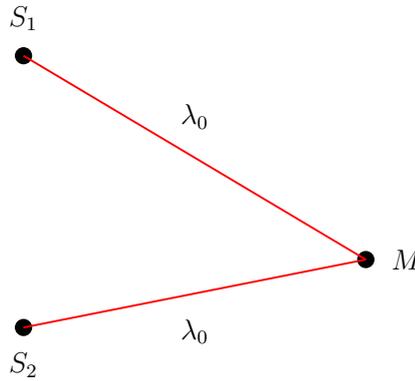
##### a) Sources isochrones

La valeur moyenne d'un terme en  $\cos(\omega t + \varphi)$  est généralement nulle sauf si  $\omega = 0$ . On en déduit

$$\langle \cos [(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_{2M} - \varphi_{1M}] \rangle_{\tau_r} = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \\ \langle \cos(\varphi_{2M} - \varphi_{1M}) \rangle & \text{si } \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

où l'on a supposé que la période  $T$  des oscillations temporelles est très petite à l'échelle du temps de réponse  $\tau_r$  du détecteur

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \ll \tau_r$$



Par conséquent, le terme d'interférence est non-nul si les pulsations sont identiques, c'est-à-dire si les longueurs d'onde dans le vide sont identiques :

$$\lambda_{01} = \lambda_{02} = \lambda_0 \quad \text{ondes isochrone}$$

L'intensité lumineuse prend alors la forme

$$\begin{cases} I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi_{2M} - \varphi_{1M}) \rangle_{\tau} & \text{si } \omega_1 = \omega_2 \\ I(M) = I_1 + I_2 & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases}$$

où la différence de phase vaut

$$\varphi_{2M} - \varphi_{1M} = \frac{2\pi}{\lambda_0} [(S_2M) - (S_1M)] + \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

Remarque

Pour observer des interférences lumineuses, il faut que les ondes aient la même fréquence mais cette condition est non suffisante comme le prouve l'expérience réalisée avec deux sources monochromatiques de même fréquence.

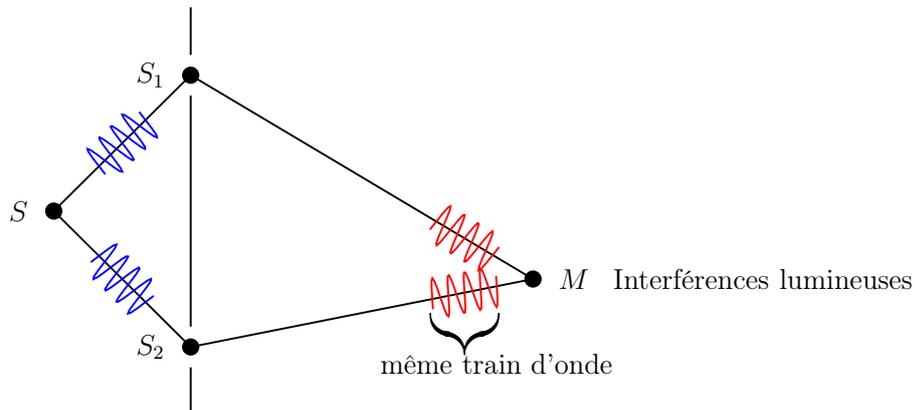
prof: AMAMM ipest  
tel: 95 55 64 10

**b) Condition sur les trains d'onde**

Mais les phases à l'origine varient aléatoirement et n'ont pas de corrélation *a priori*, sauf si les ondes atteignant le point *M* sont issues du même train d'onde, c'est-à-dire de la même source !

$$\langle \cos(\varphi_{2M} - \varphi_{1M}) \rangle \neq 0 \iff \text{Les 2 vibrations proviennent du même train d'onde}$$

Si les vibrations proviennent du même train d'onde, c'est qu'elle proviennent d'une même et unique source primaire *S*. Dans ces conditions,  $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ .



L'intensité prend alors la forme

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda_0} [(SS_2M) - (SS_1M)] \right\}$$

où  $(SS_1M)$  et  $(SS_2M)$  sont les chemins optiques entre la source  $S$  et le point  $M$  en passant respectivement par  $S_1$  et  $S_2$ , qui jouent le rôle de sources secondaires.

### c) Influence de la polarisation

Plaçons des polariseurs respectivement aux points  $S_1$  et  $S_2$ . Lorsque les directions des polariseurs sont parallèles, on observe une modulation spatiale de l'intensité. Mais, lorsque les polariseurs sont croisés, les interférences disparaissent et l'éclairement est uniforme.

Afin d'interpréter cette observation, il faut revenir à la description vectorielle des ondes lumineuses, car le modèle scalaire est incapable de rendre compte de la polarisation. Dans un modèle simple, les vibrations lumineuses sont reliées aux champs électriques par

$$\vec{E}_1 = s_1 \vec{u}_1 \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = s_2 \vec{u}_2$$

où  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont des vecteurs unitaires représentant la direction de polarisation de l'onde.

L'intensité lumineuse étant proportionnelle à la valeur quadratique moyenne du champ électrique, on obtient l'intensité totale, résultant de la superposition de deux ondes lumineuses :

$$I = K \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \rangle = K \langle \vec{E}_1^2 \rangle + K \langle \vec{E}_2^2 \rangle + 2K \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = I_1 + I_2 + 2K \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$$

où  $K$  est une constante.

Le terme d'interférences est donc nul si  $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$ .

### d) Ondes mutuellement cohérentes et interférences

#### Définition :

On dit que deux ondes lumineuses monochromatiques sont cohérentes entre elles si :

1. elles ont la même longueur d'onde dans le vide (cohérence temporelle) ;
2. elles sont issues de la même source primaire (cohérence spatiale).
3. elles ont la même polarisation (cohérence de polarisation).

Dans le cas contraire, on dit que les ondes sont incohérentes entre elles.

#### Propriété

Les interférences lumineuses ne peuvent avoir lieu qu'entre deux sources cohérentes entre elles.

## I.5. Formule des interférences à deux ondes

### a) Différence de marche et déphasage entre deux ondes

Soient deux ondes cohérentes entre elles. Si leur phase à l'origine est la même :  $\varphi_{0S_1} = \varphi_{0S_2}$  et l'intensité prend la forme :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda_0} [(S_2 M) - (S_1 M)] \right\}$$

L'intensité de l'onde résultant de leur superposition dépend alors uniquement de  $(S_2 M) - (S_1 M)$ .

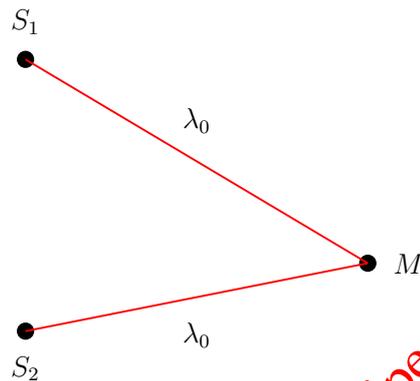


FIGURE 5-

#### Définition :

La différence de marche au point  $M$  entre deux rayons issus de  $S_1$  et  $S_2$  est définie par :

$$\delta(M) = (S_2 M) - (S_1 M)$$

où  $(S_1 M)$  et  $(S_2 M)$  sont des chemins optiques.

Le déphasage au point  $M$  entre deux ondes cohérentes entre elles, de longueur d'onde  $\lambda_0$  et de différence de marche  $\delta(M)$ , vaut :

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi \delta(M)}{\lambda_0}$$

### b) Intensité lumineuse

Considérons deux ondes émises par les sources  $S_1$  et  $S_2$ , cohérentes entre elles. L'intensité lumineuse prend alors la forme

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda_0} [(S_2 M) - (S_1 M)] \right\}$$

**Propriété**

Soient deux ondes lumineuses monochromatiques, d'intensités respectives  $I_1$  et  $I_2$ , atteignant le point  $M$ .

\* si les ondes sont incohérentes entre elles, on n'observe pas d'interférences et

$$I(M) = I_1 + I_2$$

\* si les ondes sont cohérentes entre elles, on observe des interférences. L'intensité est donnée par l'expression :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi \delta}{\lambda_0}\right) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi)$$

où  $\delta = \delta(M)$  est la différence de marche entre les deux rayons,  $\Delta\varphi$  leur déphasage et  $\lambda_0$  la longueur d'onde dans le vide des deux ondes.

On note le cas particulier important pour lequel les intensités  $I_1$  et  $I_2$  sont égales :

$$I = 2I_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi \delta}{\lambda_0}\right) \right] \quad \text{si } I_1 = I_2 = I_0.$$

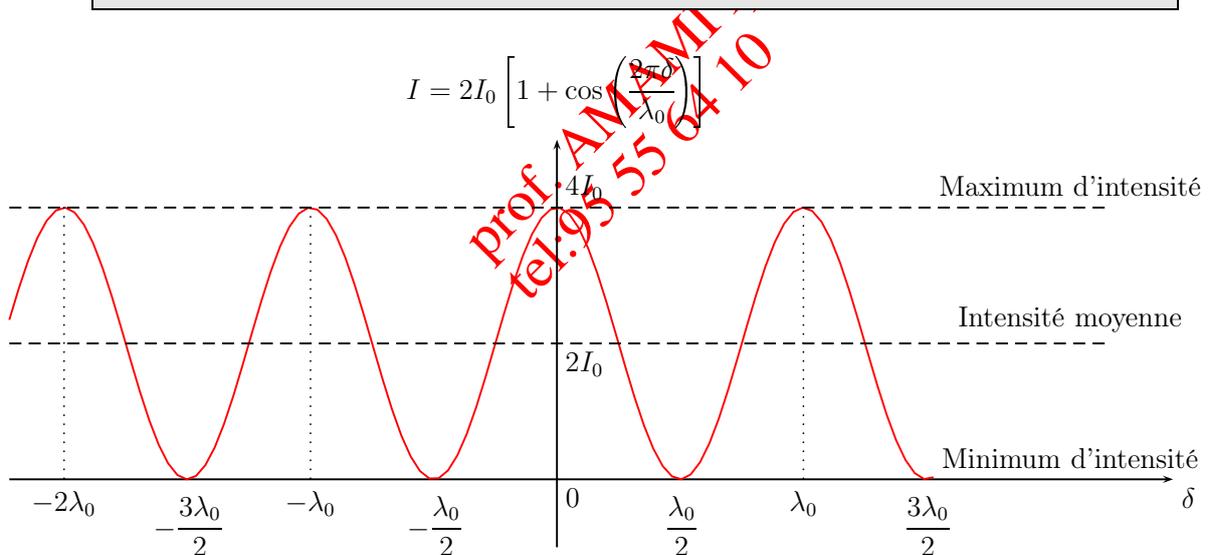


FIGURE 6 – Intensité résultant de la superposition de deux ondes cohérentes entre elles.

**Remarque**

*Afin de connaître la répartition de l'intensité lumineuse dans tout l'espace, il faut calculer la différence de marche  $\delta$  dans des configurations particulières.*

Soient deux ondes cohérentes entre elles et d'intensités respectives  $I_1$  et  $I_2$ . On peut faire les remarques suivantes :

- ★ il existe des zones où l'intensité résultante est minimale. Ces zones sont caractérisées par un entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\frac{2\pi \delta(M)}{\lambda_0} = (2n + 1) \pi \quad \text{soit} \quad \delta(M) = \frac{2n + 1}{2} \lambda_0$$

Dans le cas où les intensités  $I_1$  et  $I_2$  sont égales ( $I_1 = I_2 = I_0$ ) :  $I_{\min} = 0$ .

- ★ il existe des zones où l'intensité résultante est maximale. Ces zones sont caractérisées par un entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\frac{2\pi \delta(M)}{\lambda_0} = 2n \pi \quad \text{soit} \quad \delta(M) = n \lambda_0$$

Dans le cas où les intensités  $I_1$  et  $I_2$  sont égales ( $I_1 = I_2 = I_0$ ) :  $I_{\max} = 4I_0 = 2 \times (I_0 + I_0)$ . On obtient alors une intensité double.

- ★ l'intensité lumineuse totale est, **en moyenne dans l'espace**, égale à la somme des intensités, c'est-à-dire  $I_1 + I_2$ .

**Définition :**

**On appelle ordre d'interférence au point  $M$ , le rapport  $p$  défini par**

$$p = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \quad \text{au point } M$$

**L'intensité est maximale si  $p$  est un entier. On parle d'interférences constructives au point  $M$ .**

**L'intensité est minimale si  $p$  est un demi-entier. On parle alors d'interférences destructives au point  $M$ .**

**Remarque**

*L'ordre d'interférence représente le nombre de longueurs d'onde correspondant à la différence de marche  $\delta$ .*

*Lorsque  $\delta(M)$  est un multiple demi-entier de la longueur d'onde, c'est qu'au point  $M$ , le maximum d'une vibration lumineuse correspond au minimum de l'autre : en ce point l'intensité est minimale.*

*Au contraire, lorsque  $\delta$  est un multiple de la longueur d'onde, les maxima des vibrations lumineuses coïncident ce qui conduit à une intensité maximale.*

## **I.6. Dispositifs interférentiels**

Afin de pouvoir observer des interférences, les sources doivent être cohérentes entre elles, au moins à l'échelle du temps de réponse du détecteur.

Les dispositifs interférentiels utilisent généralement deux sources secondaires issues d'une même source primaire. Pour ce faire, il suffit de séparer en deux les rayons issus d'une même source primaire, puis à les

recombinaison ensuite. Les rayons peuvent alors interférer puisqu'ils sont de même longueur d'onde et sont mutuellement cohérents.

Deux types de dispositifs peuvent générer ces sources secondaires cohérentes entre elles : les dispositifs à division du front d'onde et les dispositifs à division d'amplitude.

### a) Dispositifs à division du front d'onde

On isole spatialement deux parties de l'onde issues de la source primaire  $S$  pour jouer le rôle de sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$ , grâce aux phénomènes de diffraction ou de réflexion. La superposition des rayons issus de ces sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  permet de créer une zone d'interférence.

On notera que les trajets des rayons interférant sont différents dès la source primaire. On a donc séparé les fronts d'onde en deux dès la source primaire, et on parle donc de *division du front d'onde*.

#### Remarque

Parmi les dispositifs à division du front d'onde, on peut citer : les trous (ou fentes) d'Young, les miroirs de Fresnel, le miroir de Lloyd, le, le biprisme de Fresnel . . .

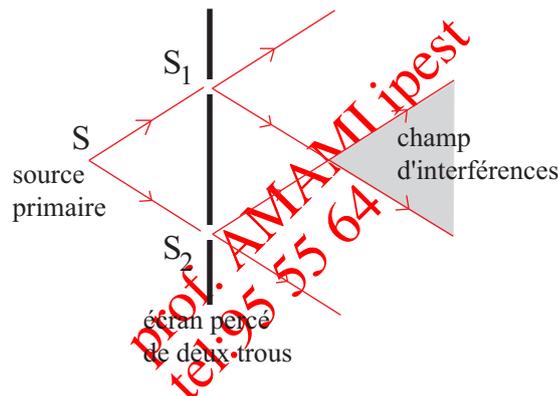


FIGURE 7 – Un exemple d'interférences par division du front d'onde : le dispositif des trous d'Young.

L'avantage de ce type de dispositif est sa simplicité, et le fait que les interférences soient non-localisées, c'est-à-dire que les interférences apparaissent quelle que soit la position de l'écran dans le champ d'interférences.

Le principal inconvénient de ce type de dispositif est que la source primaire doit avoir une extension spatiale très limitée pour éviter un *brouillage des franges*.

### b) Dispositifs à division d'amplitude

On sépare l'onde à l'aide d'une *lame semi-réfléchissante*, et on superpose ensuite les ondes transmises et réfléchies.

L'amplitude des ondes est réduite lors de la traversée ou de la réflexion sur la lame, et on parle donc de *division d'amplitude*.

L'exemple type d'interférences par division d'amplitude est l'**interféromètre de Michelson** que nous détaillerons dans le prochain chapitre. Nous avons représenté ci-dessous l'interféromètre à division d'amplitude le plus simple : l'association d'une lame semi-réfléchissante et d'un miroir.

L'avantage de ce type de dispositif est que les interférences restent visibles lorsque la source est étendue, ce qui permet en général d'obtenir une bonne *luminosité* de la figure d'interférence.

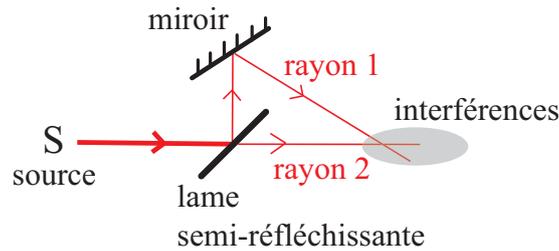


FIGURE 8 – Un exemple d’interférences par division du front d’amplitude : l’association d’une lame semi-réfléchissante et d’un miroir.

Les principaux inconvénients de ce type de dispositif résident dans sa complexité, et dans le fait que les interférences soient en général *localisées*, c’est-à-dire que les interférences ne peuvent être observées que dans un domaine précis de l’espace. Il faut donc utiliser un dispositif d’imagerie annexe afin de pouvoir observer la figure d’interférences.

#### Propriété

Deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  issues d’une même source primaire  $S$  sont généralement cohérentes entre elles. Ces sources secondaires sont obtenues :

- ★ soit par division du front d’onde : les rayons lumineux passant par  $S_1$  et  $S_2$  sont issus de deux rayons distincts provenant de  $S$  ;
- ★ soit par division d’amplitude : les rayons lumineux passant par  $S_1$  et  $S_2$  sont issus du même rayon provenant de  $S$ , ce rayon ayant été séparé par une lame semi-réfléchissante.

## II Expérience des trous d’Young

### II.1. Présentation du dispositif

Éclairons deux trous de très petit diamètre, séparés par une distance  $a$ , par une source  $S$  ponctuelle et monochromatique de longueur d’onde dans le vide  $\lambda_0$ . On suppose que  $S$  est située à égale distance des deux trous. Un écran, parallèle à l’axe des trous est placé à une distance  $D$  des trous. Le dispositif expérimental est représenté sur le schéma de la figure 9.

Sur une zone réduite de l’écran, on observe des **variations spatiales de l’intensité**. Plus précisément, on observe :

- ★ des franges rectilignes régulièrement espacées,
- ★ alternativement brillantes et sombres,
- ★ orientées perpendiculairement à l’axe des trous.

Cette figure disparaît lorsqu’on masque un des trous.

### II.2. Interprétation qualitative

Au niveau de chaque trou, se produit un phénomène de diffraction. Chaque trou se comporte alors comme une source secondaire émettant une onde assimilable à une onde sphérique dans un cône d’ouverture  $\theta$  (voir figure 10).

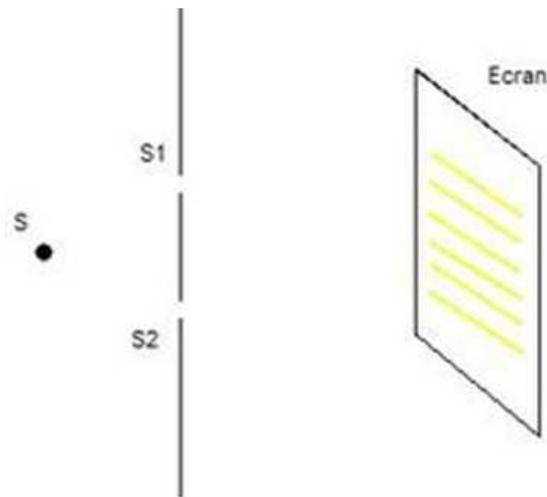


FIGURE 9 – Schéma du dispositif des trous d'Young

Remarque

Si le trou possède un diamètre  $b$ , l'ouverture angulaire du faisceau émergent vaut

$$\theta \sim \frac{\lambda}{b}$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la radiation étudiée.

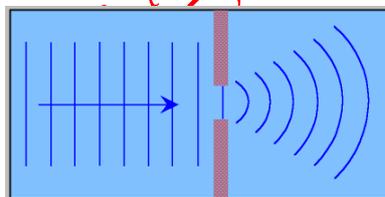


FIGURE 10 – Diffraction d'une onde par un trou circulaire

Dans la zone de recouvrement des faisceaux lumineux, appelée **champ d'interférences**, on observe des interférences lumineuses puisque les ondes issues des trous  $S_1$  et  $S_2$  sont cohérentes entre elles. Hors du champ d'interférences, on n'observe pas d'interférences.

La répartition spatiale de l'intensité lumineuse forme ce que l'on appelle une **figure d'interférences**.

Définition :

On appelle **champ d'interférences**, la zone de recouvrement des faisceaux émergents d'un dispositif interférentiel.

C'est la zone dans laquelle il est possible d'observer une figure d'interférences.

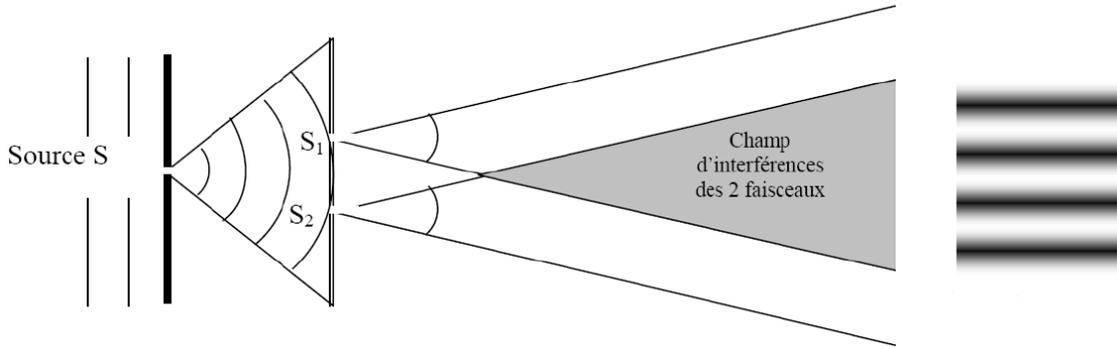
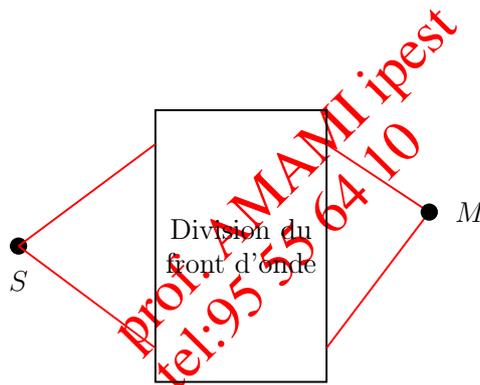


FIGURE 11 – Dispositif des trous d’Young

Remarque

*Un dispositif des trous d’Young sépare le front d’onde issu de S en deux fronts d’onde, issus respectivement de S<sub>1</sub> et S<sub>2</sub>. On observe alors des interférences entre les rayons issus de S passant respectivement par les trous S<sub>1</sub> et S<sub>2</sub>. On parle de dispositif à division du front d’onde.*



Si l’intensité des ondes est la même sur les deux voies, l’intensité totale en un point  $M$  du champ d’interférences vaut

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi \delta}{\lambda_0} \right) \right] \quad \text{avec} \quad \delta = (S_2M) - (S_1M)$$

Il ne reste plus qu’à déterminer la différence de marche  $\delta$  en fonction de la position sur l’écran.

**II.3. Calcul de la différence de marche**

Notons  $a$  la distance entre les trous  $S_1$  et  $S_2$  et  $O$  le milieu du segment  $[S_1S_2]$ . Un écran, perpendiculaire à l’axe optique, est placé à une distance  $D$  des trous. On note  $O'$  le point de l’écran appartenant à l’axe optique (voir la figure 12).

On repère la position d’un point  $M$  sur l’écran par ses coordonnées  $x$  et  $y$  dans un repère  $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ , où  $\vec{u}_x$  est un vecteur unitaire orienté le long du vecteur  $\overrightarrow{S_2S_1}$ . On repère également la position du point  $M$  par l’angle  $\theta$  que fait le rayon  $OM$  avec l’axe optique.

Considérons deux rayons lumineux, issus respectivement des trous  $S_1$  et  $S_2$ , s’intersectant en un point  $M$  de l’écran et notons  $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) = d_2 - d_1$ , leur différence de marche en  $M$ .

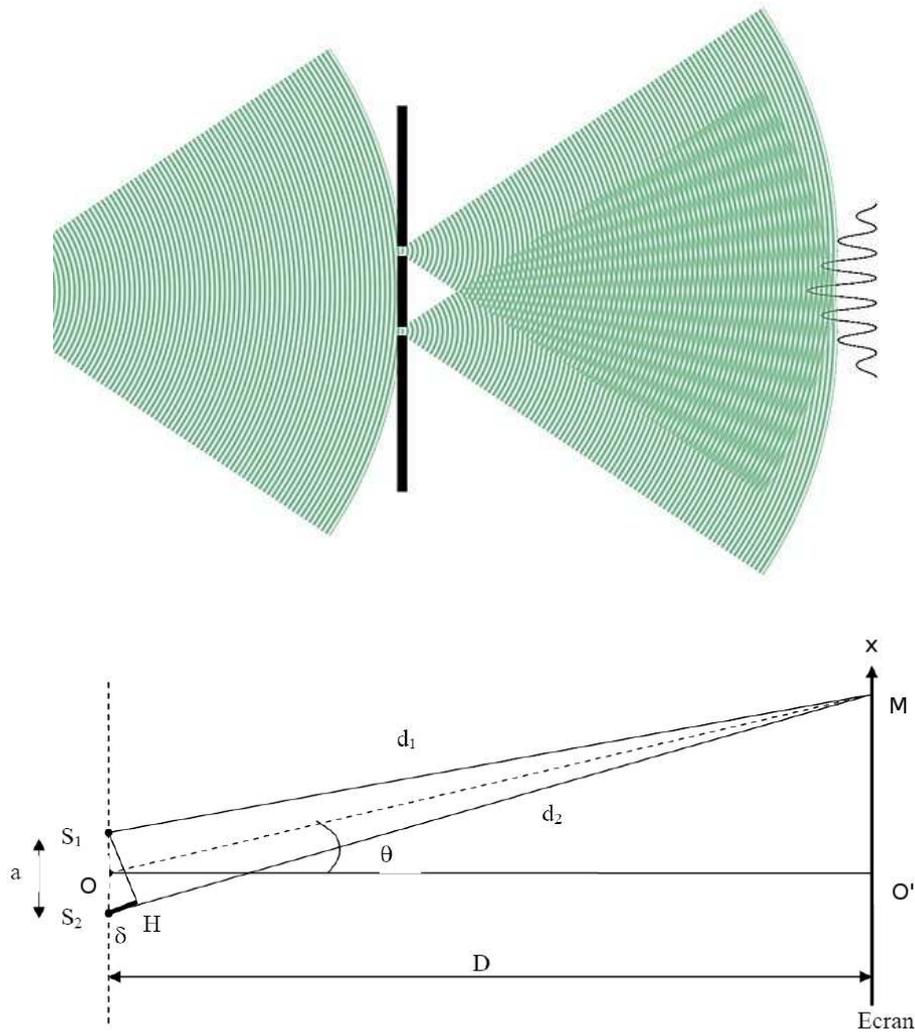


FIGURE 12 –

### a) Approche géométrique

Si la distance  $D$  est suffisamment grande devant  $a$ ,  $x$  et  $y$ , on a, dans le triangle  $OO'M$  :

$$\tan \theta \simeq \theta = \frac{x}{D}$$

Par ailleurs si  $D$  est suffisamment grand, on peut assimiler les surfaces d'onde sphériques issues de  $M$  à leurs plans tangents. Ainsi, en notant  $H$  le projeté orthogonal de  $S_1$  sur le rayon  $S_2M$  :

$$(S_1M) = (HM) \quad \text{d'où} \quad \delta = (S_2M) - (S_1M) = (S_2M) - (HM) = (S_2H)$$

Dans le triangle  $S_1S_2H$

$$\sin \theta \simeq \theta = \frac{S_2H}{S_1S_2} = \frac{\delta}{a}$$

On en déduit la différence de marche  $\delta$  et le déphasage  $\Delta\varphi$  :

$$\boxed{\delta = \frac{ax}{D}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi ax}{\lambda D}}$$

### b) Approche analytique

On peut également retrouver ce résultat en utilisant un développement limité au premier ordre de l'expression exacte de  $\delta$ , sachant que  $D \gg |x|, |y|, a$  :

$$\begin{aligned} \delta &= (S_1M) - (S_2M) \\ &= \left[ \left( x + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left[ \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= D \left[ 1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} + \frac{ax}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} \right]^{\frac{1}{2}} - D \left[ 1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} - \frac{ax}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= D \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} + \frac{ax}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} \right) \right] - D \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} - \frac{ax}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Finalement, on retrouve le même résultat :  $\delta = \frac{ax}{D}$

## II.4. Description de la figure d'interférences

L'intensité au point  $M$  est donc de la forme

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi \delta}{\lambda} \right) \right] \quad \text{d'où} \quad I(x) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right]$$

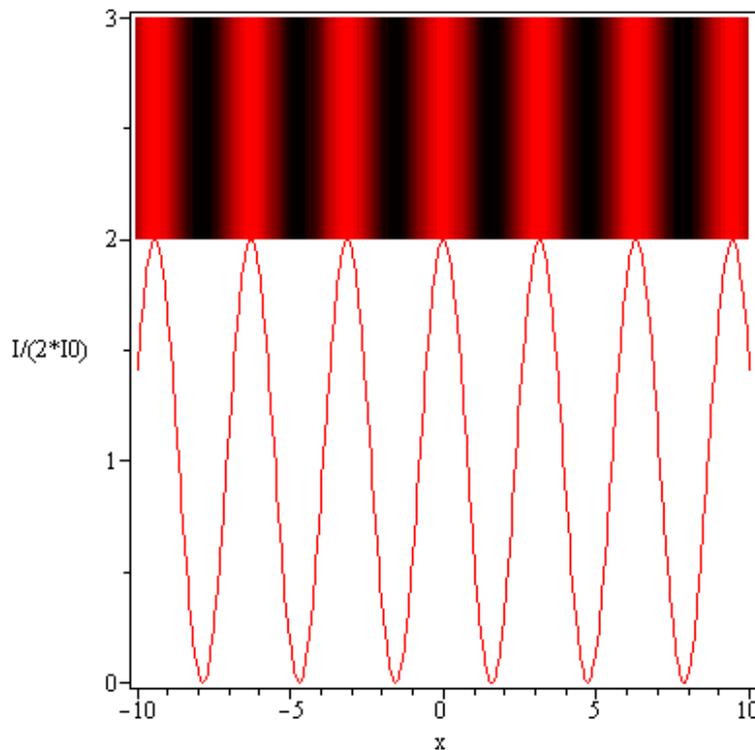


FIGURE 13 – Répartition de la source en fonction de la position  $x$  sur l'écran

L'intensité est donc une fonction sinusoïdale de la position  $x$  sur l'écran.

Remarque

La différence de marche, et par conséquent l'intensité, ne dépend pas de  $y$ . Tous les points  $M$  de même coordonnée  $y$  correspondent à la même intensité. La figure d'interférences est donc constituée de franges rectilignes  $y = \text{cste}$ .

Remarque

Expérimentalement, on utilise plutôt des fentes d'Young plutôt que des trous afin d'obtenir une figure d'interférences plus lumineuse.

La figure 13 représente les variations de l'intensité en fonction de la position  $x$  sur l'écran, pour la raie rouge du mercure. Les minima d'intensité correspondent à des franges sombres et les maxima à des franges brillantes (de la couleur de la source).

La figure d'interférences est définie par une période spatiale, appelée interfrange.

Définition :

On définit l'interfrange  $i$  par la distance entre deux franges successives de même intensité.

Soit  $x$  la position d'une frange d'intensité donnée. On retrouve la même intensité en  $x + i$  de sorte que le déphasage ait varié de  $2\pi$

$$I(x) = I(x + i) \quad \text{soit} \quad \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi a x}{\lambda D}}_{\Delta\varphi}\right) = \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi a (x + i)}{\lambda D}}_{\Delta\varphi + 2\pi}\right)$$

On a nécessairement

$$2\pi \frac{a i}{\lambda D} = 2\pi \quad \text{soit} \quad \boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

Remarque

L'interfrange est une fonction décroissante de  $a$  : plus les trous sont proches, plus l'interfrange est élevée.

Exercice

Soient deux trous d'Young séparés d'une distance  $a$  et éclairés par la laser hélium-néon de longueur d'onde  $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$ . Déterminer la valeur de l'interfrange à la distance  $D = 1 \text{ m}$  des trous :

1. pour  $a = 10 \text{ mm}$ .
2. pour  $a = 1 \text{ mm}$ .

En déduire la possibilité d'observer une figure d'interférence à l'œil nu.

L'application de l'expression précédente fournit

$$i = \frac{\lambda D}{a} = \begin{cases} 63,28 \mu\text{m} & \text{pour } a = 10 \text{ mm} \\ 0,6328 \text{ mm} & \text{pour } a = 1 \text{ mm} \end{cases}$$

Les franges rectilignes sont indiscernables à l'œil nu dans le premier cas car l'interfrange est trop petit. En revanche, pour  $a = 1 \text{ mm}$ , les franges sont visibles bien que très rapprochées.

### III Contraste d'une figure d'interférences

#### III.1. Définition

Une figure d'interférence est d'autant plus contrastée que la différence d'intensité entre les franges brillantes et sombres est grande.

##### Définition :

**Le contraste d'une figure d'interférences dans une zone donnée est défini par**

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

**où  $I_{\max}$  et  $I_{\min}$  sont les intensités respectivement maximale et minimale dans la zone considérée.**

##### Remarque

*Le contraste est un nombre sans dimension compris entre 0 et 1.*

- ★ *Si  $C = 0$ , l'intensité est uniforme  $I_{\max} = I_{\min}$ . On n'observe pas de figure d'interférences : on parle de contraste nul.*
- ★ *Si  $C = 1$ ,  $I_{\min} = 0$  et les franges sombres correspondent une intensité nulle. La figure d'interférence est bien contrastée et le contraste est maximum.*

#### III.2. Influence de l'intensité lumineuse sur chaque voie

La formule des interférences à deux ondes dans le cas général conduit à

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi \delta}{\lambda_0}\right)$$

où  $I_1$  et  $I_2$  sont les intensités des ondes qui interfèrent,  $\lambda_0$  est leur longueur d'onde dans le vide et  $\delta$  est la différence de marche.

L'intensité est maximale lorsque la différence de marche est un multiple entier de la longueur d'onde, c'est-à-dire lorsque l'ordre d'interférences est entier. Dans ces conditions :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} \in \mathbb{Z} \Rightarrow I = I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

L'intensité est minimale lorsque la différence de marche est un multiple demi-entier de la longueur d'onde, c'est-à-dire lorsque l'ordre d'interférences est demi-entier. Dans ces conditions :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2n + 1}{2} \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow I = I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Le contraste est donné par

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)} \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}}$$

Le contraste est nul ( $C = 0$ ) si et seulement si  $I_1 = 0$  ou  $I_2 = 0$ .  
Le contraste est maximum ( $C = 1$ ) si et seulement si

$$\frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = 1 \quad \text{soit} \quad I_1 + I_2 = 2\sqrt{I_1 I_2} \quad \text{d'où} \quad (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 = 0$$

**Propriété**

Considérons la figure d'interférences formée par deux ondes monochromatiques d'intensités  $I_1$  et  $I_2$ .  
Le contraste de la figure d'interférences est maximal si  $I_1 = I_2 = I_0$ .

**III.3. Figure d'interférence créée par un doublet**

Considérons une source  $S$ , émettant deux radiations, de mêmes intensités mais de longueurs d'onde dans le vide  $\lambda_{01}$  et  $\lambda_{02} = \lambda_{01} + \Delta\lambda$  différentes. Deux trous d'Young sont éclairés par cette source et la figure d'interférences est observée sur un écran. On suppose que les deux voies de l'interféromètre sont équilibrées ( $I_1 = I_2 = I_0$ ).

Les ondes de longueurs d'onde  $\lambda_{01}$  et  $\lambda_{02}$  étant incohérentes entre elles, elles ne peuvent pas interférer et leurs intensités s'ajoutent. On observe donc la superposition de deux figures d'interférence, l'une associée à la longueur d'onde  $\lambda_{01}$  et l'autre associée à la longueur d'onde  $\lambda_{02}$ .

On introduit les nombres d'onde  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  définis par

$$\sigma_1 = \frac{1}{\lambda_{01}} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma = \frac{1}{\lambda_{02}}$$

★ Pour la radiation de longueur d'onde  $\lambda_1$  :

$$I_{\lambda_1}(M) = 2I_0 [1 + \cos(2\pi \delta \sigma_1)]$$

★ Pour la radiation de longueur d'onde<sup>1</sup>  $\lambda_2$  :

$$I_{\lambda_2}(M) = 2I_0 [1 + \cos(2\pi \delta \sigma_2)]$$

1. On suppose que la différence de marche ne dépend pas de la longueur d'onde, autrement dit on néglige tout phénomène dispersif.

L'intensité résultante au point  $M$  vaut

$$I(M) = I_{\lambda_1}(M) + I_{\lambda_2}(M) = 2I_0 [2 + \cos(2\pi \delta \sigma_1) + \cos(2\pi \delta \sigma_2)]$$

En utilisant la formule de trigonométrie :

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

on obtient

$$I(M) = 4I_0 [1 + \cos(\pi \delta \Delta\sigma) \cos(2\pi \delta \bar{\sigma})] \quad \text{où} \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

La figure 14 représente l'intensité lumineuse en fonction de  $x$ , dans le cas du dispositif des trous d'Young. La figure d'interférences est représenté au-dessus de la courbe.

On observe **des battements** : la figure d'interférence est formée de franges alternativement brillantes et sombres mais le contraste varie en fonction du point d'observation. En certains points, le contraste s'annule et l'on observe **un brouillage des franges** à intervalles réguliers.

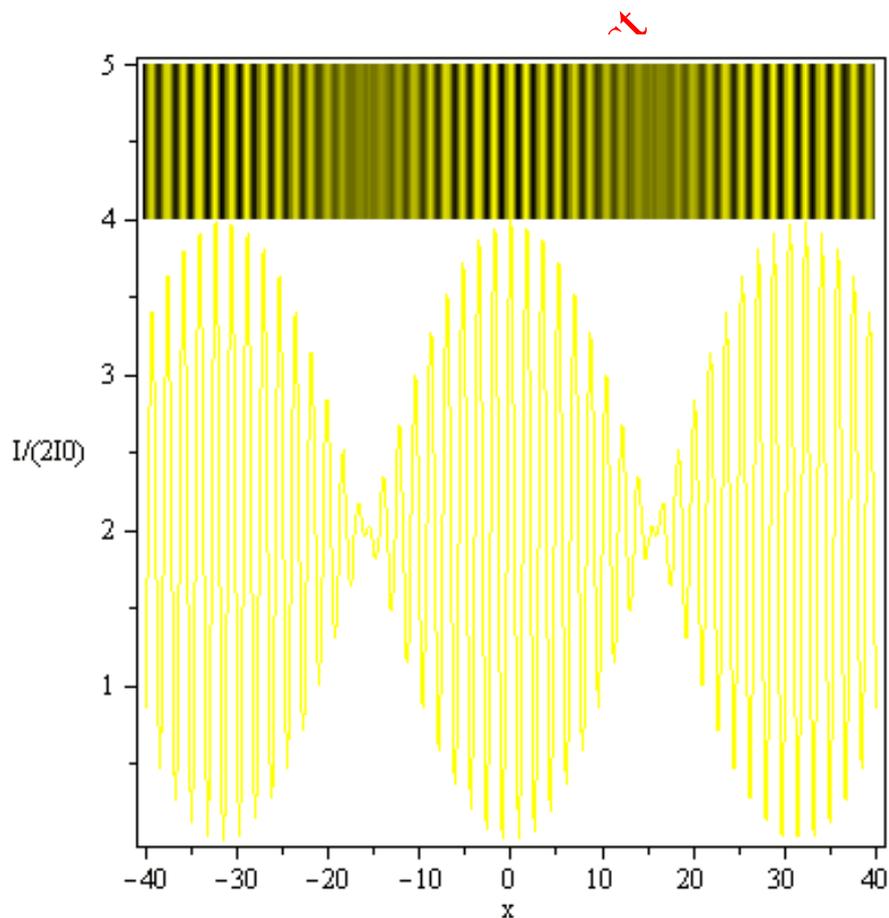
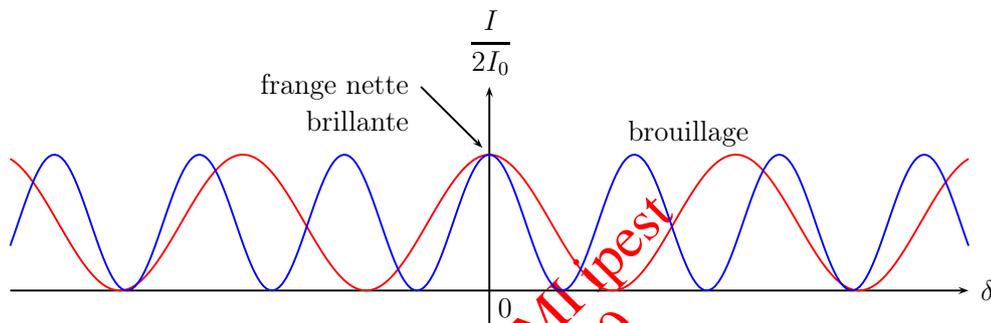


FIGURE 14 – Figure d'interférences issue de la superposition de deux systèmes de franges, associés à des longueurs d'onde différentes.

Remarque

La figure obtenue est la superposition de plusieurs systèmes d'interférences. Pour chaque longueur d'onde, l'intensité est une fonction sinusoïdale de la position ou de la différence de marche. En fonction de la position, les sinusoïdes se décalent progressivement.

- ★ Les franges sont bien contrastées lorsque les maxima d'intensité coïncident ;
- ★ il apparaît des **irisations** (des couleurs) lorsque les maxima d'intensité sont légèrement décalés ;
- ★ les franges sont brouillées lorsque le maximum d'intensité d'une figure d'interférences (par exemple pour  $\lambda_{01}$  correspond au minimum d'intensité pour l'autre. Les intensités se "compensent" et l'intensité résultante est une intensité moyenne qui varie peu.)



La sinusoïde en  $2\pi \Delta\sigma \delta$  varie plus rapidement avec  $\delta$  que celle en  $\Delta\sigma \delta$ . Écrivons l'intensité sous la forme :

$$I(M) = 4I_0 \left[ 1 + \underbrace{V(\delta)}_{\text{variation lente}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi \delta}{\bar{\lambda}}\right)}_{\text{variation rapide}} \right]$$

où  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sigma}$  est la longueur d'onde moyenne et

$$V(\delta) = \cos(2\pi \delta \Delta\sigma) \text{ est appelé visibilité}$$

Le contraste de la figure d'interférence dépend de la différence de marche et vaut

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{8I_0 |V|}{8I_0} = |V(\delta)|$$

Propriété

Lorsqu'un dispositif interférentiel est éclairé par un doublet, la figure d'interférence présente un phénomène de battements : le contraste évolue sinusoïdalement avec la différence de marche  $\delta$ .

Exercice

1. Déterminer le contraste de la figure d'interférences.
2. On éclaire des trous d'Young, séparés de  $a = 1 \text{ mm}$ , par une lampe à vapeur de sodium et on observe la figure d'interférences sur un écran situé à la distance  $D = 1 \text{ m}$  des trous. On modélise l'émission de la lampe par celle d'un doublet jaune dont l'une des longueurs d'onde vaut  $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ . On supposera que les deux longueurs d'onde du doublet sont très proches l'une de l'autre de sorte que

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda \quad \text{avec} \quad \Delta\lambda \ll \lambda_1$$

(a) Exprimer  $\Delta\sigma$  et  $\bar{\sigma}$  en fonction de  $\Delta\lambda$  et  $\lambda_1$ .

(b) On mesure une distance  $\Delta x = 57,8 \text{ cm}$  entre deux brouillages. En déduire la longueur d'onde  $\lambda_2$  et l'écart  $\Delta\lambda$  entre les longueurs d'onde du doublet.

1. Dans une zone donnée du champ d'interférences, l'intensité varie rapidement entre  $I_{\min}$  et  $I_{\max}$  tels que :

$$\begin{aligned} I_{\min} &= 4I_0 [1 - |V(\delta)|] \\ I_{\max} &= 4I_0 [1 + |V(\delta)|] \end{aligned}$$

Le contraste vaut

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |V(\delta)|$$

2. (a) Si les longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont proches :

$$\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1 + \Delta\lambda} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^2}$$

et

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \approx \sigma_1 = \frac{1}{\lambda_1}$$

- (b) La différence de marche est de la forme

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

L'intensité lumineuse prend donc la forme

$$I = 4I_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi ax}{\lambda_1 D} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_1 D}\right) \right]$$

Le terme de visibilité, donc le contraste, s'annule périodiquement de sorte que

$$\frac{\pi ax}{\lambda_1 D} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = \pi$$

On en déduit

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_1^2 D}{a \Delta x} = \frac{(589 \cdot 10^{-9})^2}{10^{-3} \times 57,8 \cdot 10^{-2}} = 0,6 \text{ nm}$$

et

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = 589,6 \text{ nm}$$

### III.4. Cohérence temporelle : influence de la largeur spectrale

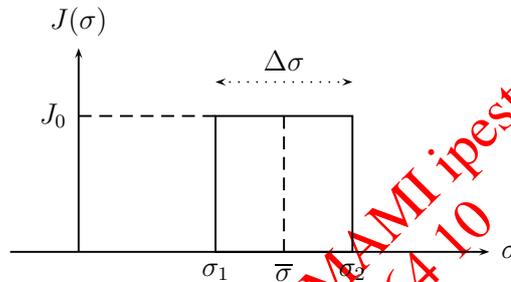
Considérons une figure d'interférences obtenue à partir d'une source ponctuelle polychromatique. La source est caractérisée par une densité spectrale  $J(\sigma)$  telle que l'intensité  $dI$  correspondant à une largeur spectrale  $d\sigma$  soit  $dI = J(\sigma) d\sigma$ .

Pour simplifier, on supposera que le spectre d'émission présente un profil rectangulaire en nombre d'onde compris entre  $\sigma_1$  et  $\sigma_2 > \sigma_1$  de sorte que

$$J(\sigma) = \begin{cases} J_0 & \text{si } \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On posera

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} & \text{nombre d'onde moyen} \\ \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 & \text{largeur spectrale (en nombre d'onde)} \\ I_0 = J_0(\sigma_2 - \sigma_1) & \text{intensité totale de la source} \end{cases}$$



Chaque émission monochromatique donne lieu à un système d'interférences qui lui est propre car les radiations de longueur d'onde différentes sont incohérentes entre elles. L'intensité totale est donc la somme des intensités associées à chaque longueur d'onde, ou de façon équivalente, à chaque nombre d'onde.

La radiation de nombre d'onde  $\sigma = 1/\lambda$  donne lieu à des interférences dont l'intensité est donnée par

$$dI_\lambda(M) = 2dI_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right] = 2J_0 [1 + \cos(2\pi\delta\sigma)] d\sigma$$

où  $dI_0 = J_0 d\sigma$  est l'intensité associée à la radiation de très faible largeur  $d\sigma$ .

L'intensité totale vaut donc

$$I(M) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dI_\lambda(M) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} 2J_0 [1 + \cos(2\pi\delta\sigma)] d\sigma = 2J_0 \left[ (\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{\sin(2\pi\delta\sigma_2) - \sin(2\pi\delta\sigma_1)}{2\pi\delta} \right]$$

où l'on a supposé que  $\delta$  était indépendant de la longueur d'onde dans le vide : on a donc négligé tout phénomène dispersif.

En utilisant la relation de trigonométrie suivante :

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

on trouve

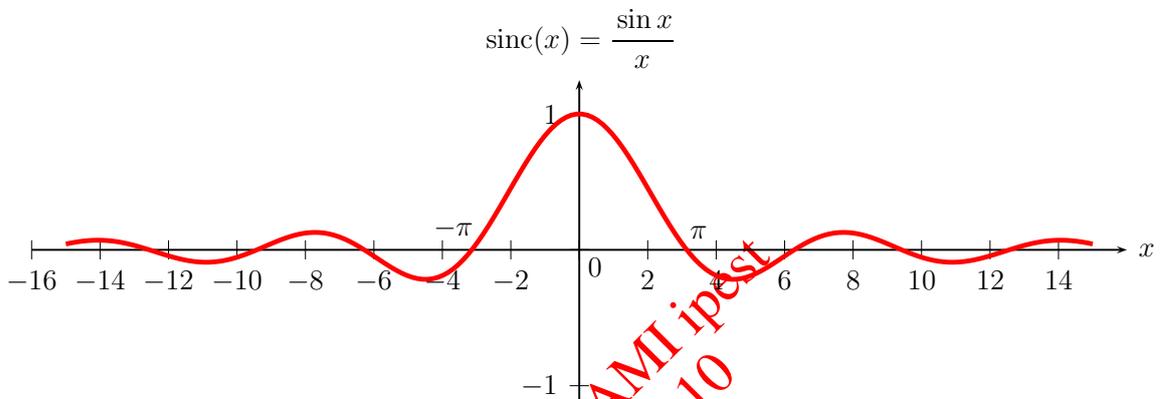
$$I(M) = 2J_0(\sigma_2 - \sigma_1) \left[ 1 + \frac{\sin(\pi\delta\Delta\sigma)}{\pi\delta\Delta\sigma} \cos(2\pi\delta\bar{\sigma}) \right]$$

**Définition :**

On définit la fonction sinc, appelée sinus cardinal, par

$$\begin{aligned} \text{sinc} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

dont la valeur en 0 vaut  $\text{sinc}(0) = 1$ .



Remarque

La fonction sinus cardinal est une fonction oscillante d'amplitude décroissante. Elle est maximale en 0 et s'annule en  $x = \pm\pi$ . La fonction  $\sin(x)$  a donc une largeur à mi-hauteur de l'ordre de  $\Delta x = \pi$ .

L'intensité prend donc la forme

$$I(M) = 2I_0 [1 + \text{sinc}(\pi\delta\Delta\sigma) \cos(2\pi\delta\bar{\sigma})]$$

La visibilité du système d'interférence vaut donc

$$V(\delta) = \text{sinc}(\pi\delta\Delta\sigma)$$

d'où l'on tire l'expression du contraste

$$C(\delta) = |V(\delta)| = |\text{sinc}(\pi\delta\Delta\sigma)|$$

Le contraste est donc maximal en  $\delta = 0$ , c'est-à-dire au centre du système d'interférences. La figure d'interférences est bien contrastée tant que  $\text{sinc}(\pi\delta\Delta\sigma)$  prend des valeurs non négligeables, c'est-à-dire tant que

$$\pi\delta\Delta\sigma < \pi \quad \text{soit} \quad \delta < \frac{1}{\Delta\sigma}$$

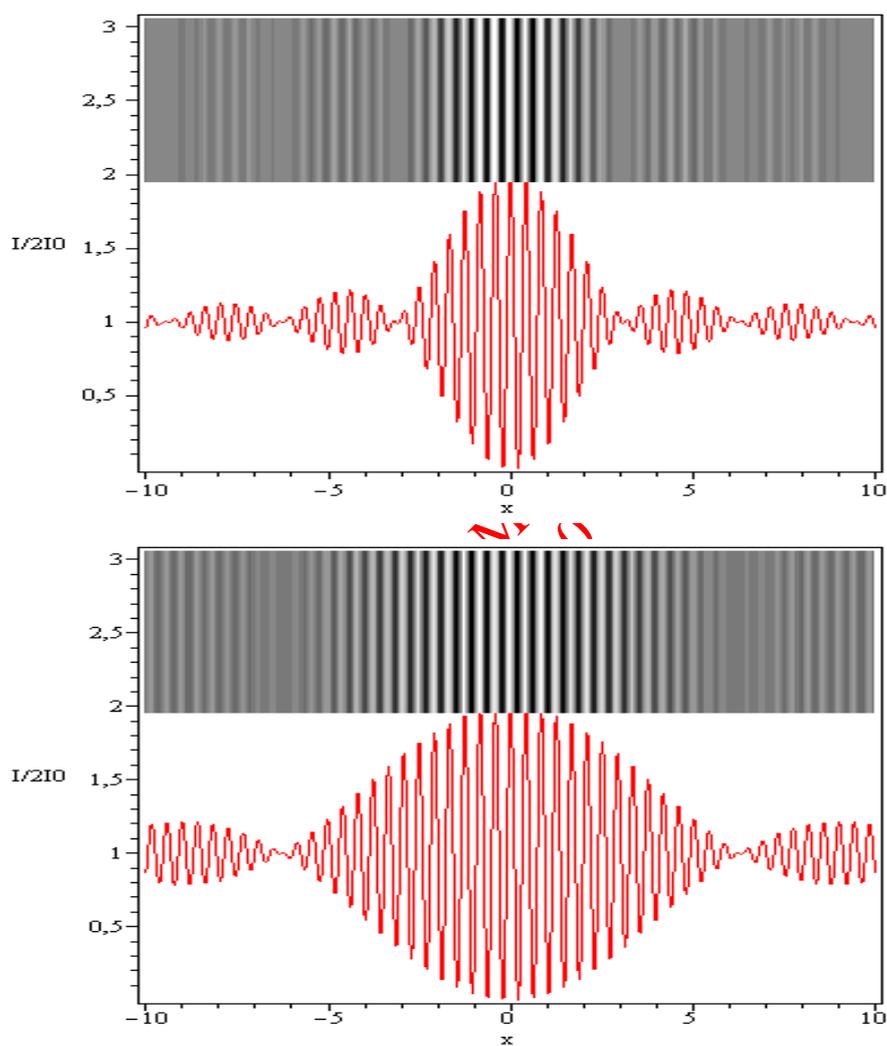


FIGURE 15 – Allure de la figure d'interférence et de l'intensité associée dans le cas d'un profil spectral rectangulaire. À gauche,  $\Delta\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{15}$  tandis qu'à droite  $\Delta\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{30}$ . Plus la largeur spectrale est faible, plus le nombre de franges visibles est grand.

Remarque

Plus le spectre est large, plus la zone dans laquelle les franges sont visibles est réduite. Ce résultat reste valable qualitativement pour tout type de profil spectral en remplaçant  $\Delta\sigma$  par la largeur à mi-hauteur.

Propriété

Augmenter la largeur spectrale de la source entraîne un brouillage des franges. Ce brouillage est dû à la superposition de système d'interférences d'interfranges différentes. Sur une figure d'interférences à deux ondes, le nombre de franges observables est d'autant plus élevé que le spectre est étroit.

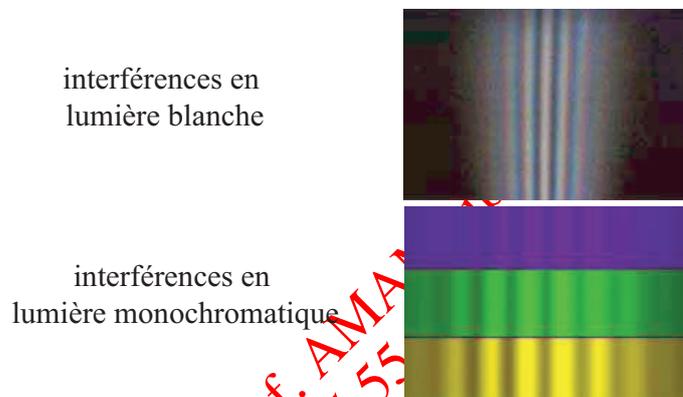


FIGURE 16 – Figure d'interférences pour le dispositif des trous d'Young dans le cas d'un éclairage avec une source blanche ponctuelle. Les systèmes de franges issus de chaque longueur d'onde sont décalés les uns par rapport aux autres. Lorsqu'on les superpose, ils se brouillent très rapidement du fait des différences entre les interfranges.

### III.5. Cohérence spatiale : influence de la largeur de la source

Dans l'expérience des trous d'Young, afin d'augmenter la luminosité de la figure d'interférences, on peut penser à utiliser une source large, c'est-à-dire étendue spatialement.

Afin de comprendre l'influence de la taille de la source, il suffit d'étudier les variations de la figure d'interférences lorsque l'on déplace la position du point source  $S$ . On pourra ensuite sommer les différentes contributions de chacun des points afin d'obtenir la contribution d'une source étendue car les ondes émises par chacun des points sont incohérentes entre elles.

#### a) Déplacement de la source perpendiculairement à l'axe des trous

Dans ce cas, les ondes issues de la source primaire et parvenant au niveau des trous ont toujours la même différence de marche, et la figure d'interférences est inchangée. On peut ainsi remplacer les trous  $S_1$  et  $S_2$  ainsi que  $S$  par des fentes parallèles à  $(Oy)$ .

Les phénomènes d'interférences provenant des différents points de la source  $S$  se juxtaposent sans se brouiller et l'on obtient des phénomènes plus lumineux.

**Propriété**

Augmenter la largeur de la source dans la direction orthogonale à l'alignement des trous ne modifie pas la répartition lumineuse sur l'écran et rend les franges plus lumineuses.

#### b) Déplacement de la source parallèlement à l'axe des trous

Dans ce cas, les chemins optiques entre la source primaire et les trous ne sont plus identiques. Une dissymétrie est introduite, qui rajoute un terme dans la différence de marche :

prof. YAMAMI ip  
tel: 95 55 64 10

$$\delta = \frac{ax'_S}{d} + \frac{ax}{D}$$

où  $x'_S$  est la position du point source sur l'axe vertical, et où  $d$  est la distance entre la source et l'écran percé des 2 trous.

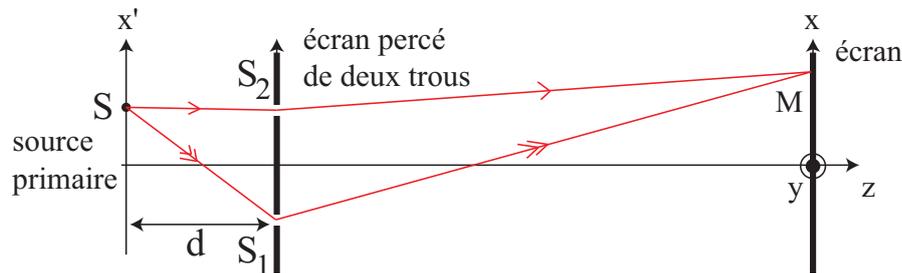


FIGURE 17 – Dispositif des trous d'Young avec une source ponctuelle non centrée.

**Remarque**

Le centre de la figure d'interférences correspond à  $\delta = 0$  soit  $x = -\frac{D}{d} x'_S$ . On constate que la figure d'interférences est centrée sur l'image géométrique de la source.

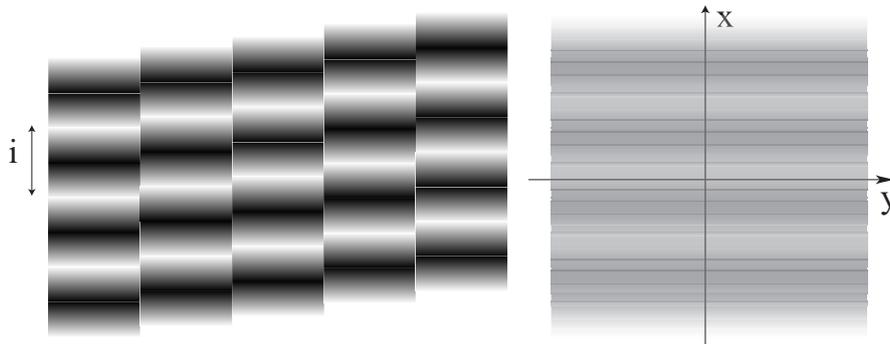


FIGURE 18 – Illustration du brouillage des franges avec une source spatialement étendue dans la direction de l’alignement des trous. Les systèmes de franges produits par chaque point source sont décalés les uns par rapport aux autres ce qui entraîne un brouillage des franges, bien que les interfranges soient identiques.

L’interfrange n’est pas modifié, mais les franges sont décalées les unes par rapport aux autres.

La figure d’interférences créée par deux sources ponctuelles  $S$  et  $S'$  incohérentes entre elles, respectivement situées en  $x' = 0$  et  $x' = x'_S$ , est la superposition des deux systèmes d’interférences associés à chacune des sources.

Lorsque la distance entre les deux sources  $S$  et  $S'$  correspond, au niveau d’un écran d’observation, à une variation de la différence de marche d’une demi-longueur d’onde, on observe un brouillage des franges. Ceci se produit pour

$$\frac{ax'_S}{d} = \frac{\lambda}{2} \text{ soit } x'_S = \frac{\lambda d}{2a}$$

On en déduit que les franges d’interférences sont brouillées lorsque la source possède une extension spatiale supérieure à

$$L = \frac{\lambda d}{2a}$$

Le brouillage de la figure d’interférences est illustré sur la figure 18.

Remarque

*Ce résultat est généralisable à tout dispositif à division du front d’onde.*

Propriété

Dans un dispositif à division du front d’onde, augmenter la largeur de la source entraîne généralement un brouillage des franges.  
Ce brouillage est dû à la superposition de franges d’interfranges identiques décalées les unes par rapport aux autres.

Remarque

*Ce phénomène de brouillage des franges avec une source étendue est utilisé en astronomie pour déterminer le diamètre angulaire d'une étoile<sup>a</sup> ou pour déterminer l'angle sous lequel sont vues les composantes d'une étoile double.*

*Ce principe est toujours à la base du fonctionnement de télescopes modernes comme le Very Large Telescope au Chili ou le Large Array Telescope aux Etats-Unis.*

*a. Cette méthode a été utilisée pour la première fois par Fizeau en 1868.*

prof. AMAMI ipest  
tel:95 55 64 10

# Interféromètre de Michelson

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des interférences produites par des dispositifs à division du front d'onde. Dans ce chapitre, nous allons maintenant étudier un dispositif à division d'amplitude : l'interféromètre de Michelson.

En 1907, Albert-Abraham Michelson (1852-1931) a reçu le prix Nobel de physique pour ses travaux d'optique de précision. Il a notamment mis au point un interféromètre qui porte son nom et qui lui a permis de mettre en évidence l'invariance de la célérité de la lumière vis-à-vis d'un changement de référentiel.

Le principe de fonctionnement de cet interféromètre est encore utilisé aujourd'hui. En particulier, l'expérience Virgo en Italie, a pour de détecter des ondes gravitationnelles à l'aide d'un interféromètre de Michelson dont les bras font plus de 3 km.



FIGURE 1 – Vue aérienne de l'interféromètre Virgo. Chaque bras de l'interféromètre fait 3 km.

L'interféromètre de Michelson n'est bien entendu pas le seul dispositif à division d'amplitude et certains objets de la vie courante nous permettent d'observer des interférences dans des conditions similaires. Ainsi, les taches d'huile ou les bulles de savon conduisent également à un phénomène d'interférences par division d'amplitude.

Une bulle de savon correspond à une lame d'eau stabilisée par deux couches d'acides gras possédant une partie hydrophile et une partie hydrophobe.

Elle peut donc être modélisée par une lame d'indice  $n_{\text{eau}}$  dans l'air. Une onde incidente sur la première interface va donner naissance à une onde réfléchi et à une onde transmise : c'est donc un dispositif à division d'amplitude. L'onde transmise va elle-même également donner naissance à deux ondes, comme l'illustre la figure 2.

Une onde incidente génère donc plusieurs ondes cohérentes qui vont pouvoir interférer.

Nous avons vu que l'utilisation d'une source étendue conduisait à un brouillage des franges avec le dispositif des trous d'Young. Cependant, une bulle de savon éclairée par la lumière blanche du soleil qui est une source étendue donne lieu à des interférences.

Nous allons voir, sur l'exemple de l'interféromètre de Michelson que les dispositifs à division d'amplitude permettent d'obtenir des interférences en source étendue.

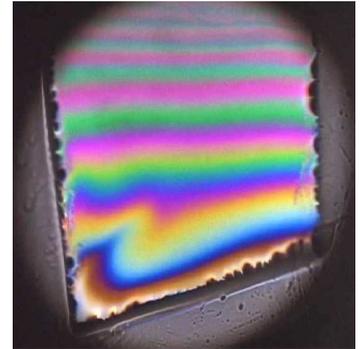
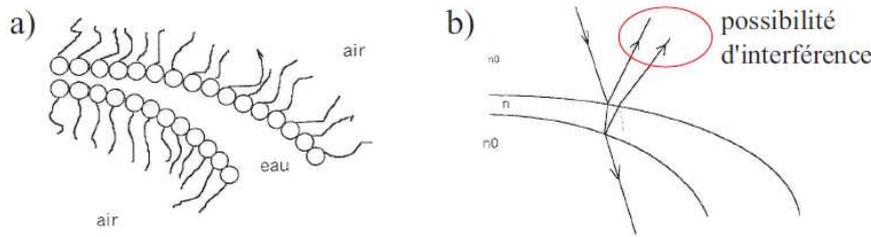


FIGURE 2 – À gauche) Bulle de savon et sa modélisation optique. (À droite) Irisations dans une lame de savon.

## I Principe de fonctionnement de l'interféromètre de Michelson

### I.1. Description de l'interféromètre

L'interféromètre de Michelson est constitué essentiellement :

- ★ d'une lame ( $S_p$ ), appelée séparatrice, rendue semi-réfléchissante par un traitement de surface ;
- ★ d'une lame de verre identique et parallèle à la séparatrice, mais non traitée, appelée compensatrice ;
- de deux miroirs plans  $M_1$  et  $M_2$  quasiment orthogonaux entre eux et inclinés d'environ  $45^\circ$  par rapport à la séparatrice.

Les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sont orientables à l'aide de vis micrométriques.

Le miroir  $M_2$  est monté sur un chariot, qui peut se déplacer perpendiculairement à  $M_2$ .

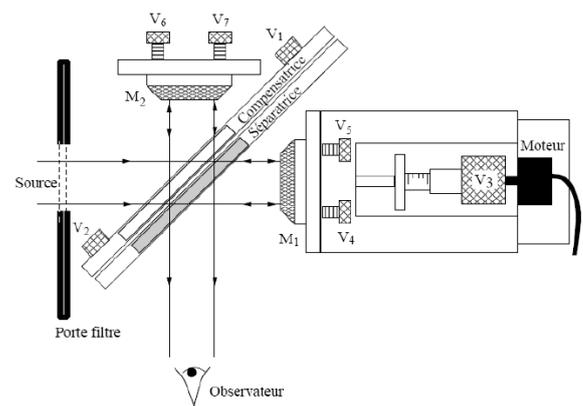
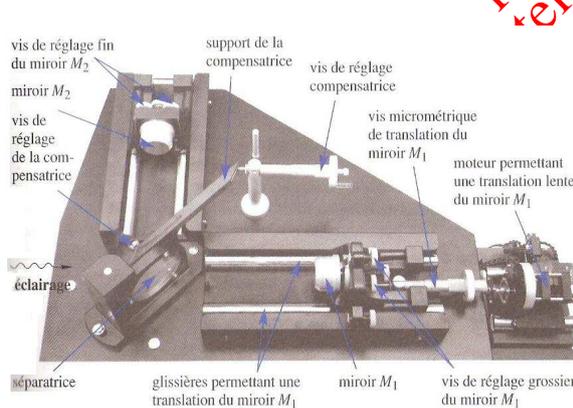


FIGURE 3 – (À gauche) Photographie d'un interféromètre de Michelson. (À droite) Schématisation de l'interféromètre.

Une onde lumineuse issue d'une source  $S$  arrive sur la séparatrice et donne naissance à deux ondes de même amplitude : une onde qui traverse la séparatrice et une onde qui est réfléchi sur la séparatrice.

L'onde transmise par la séparatrice, est ensuite réfléchi par le miroir  $M_1$  et atteint à nouveau la séparatrice. La séparatrice étant une lame semi-réfléchissante, une partie de cette onde est transmise en

direction de la source  $S$ , l'autre partie est réfléchi vers la sortie de l'interféromètre. On appellera voie 1 le trajet des rayons qui traversent la séparatrice et se réfléchissent sur  $M_1$ .

En revanche, l'onde réfléchi par la séparatrice est ensuite réfléchi sur le miroir  $M_2$ . En sortie de l'interféromètre, on observe l'onde transmise par la séparatrice après réflexion sur  $M_2$  : on appelle voie 2 le trajet de ces rayons.

Les deux ondes issues de la même source sont synchrones et cohérentes et vont pouvoir interférer à la sortie de l'interféromètre après avoir parcouru des chemins optiques différents. On est en présence d'un dispositif à division d'amplitude.

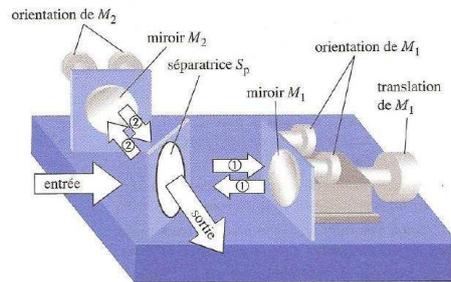


FIGURE 4 –

Le champ d'interférence est représenté sur la figure 5.

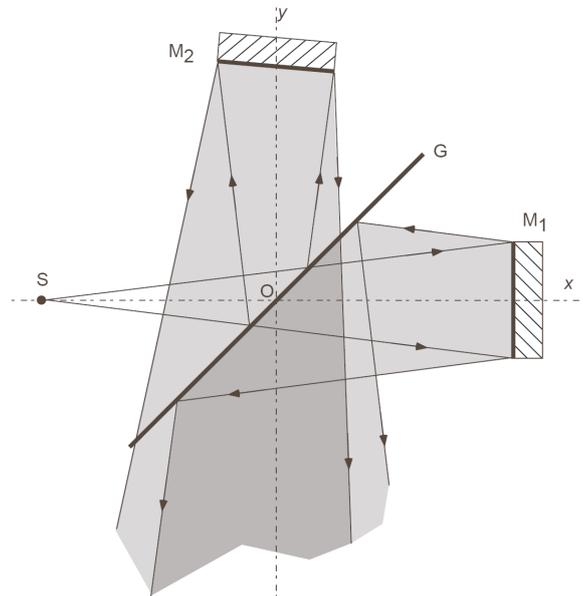


FIGURE 5 – Champ d'interférences avec un interféromètre de Michelson éclairé par une source ponctuelle dans une configuration quelconque.

### I.2. Trajet des rayons sur la voie 1

Étudions un rayon issu d'une source ponctuelle  $S$  et transmis par la séparatrice.

Le rayon réfléchi par  $M_1$  semble provenir de  $S'_1$ , symétrique de  $S$  par rapport à  $M_1$ .  
On note  $S'_1 = \text{Sym}_{M_1}(S)$ .

Le rayon est ensuite réfléchi par  $S_p$  et semble provenir de  $S_1$ , symétrique de  $S'_1$  par rapport à  $S_p$ .  
On note  $S_1 = \text{Sym}_{S_p}(S'_1) = \text{Sym}_{S_p \circ M_1}(S)$ .

On peut alors calculer le chemin optique  $(SM)_1$  :

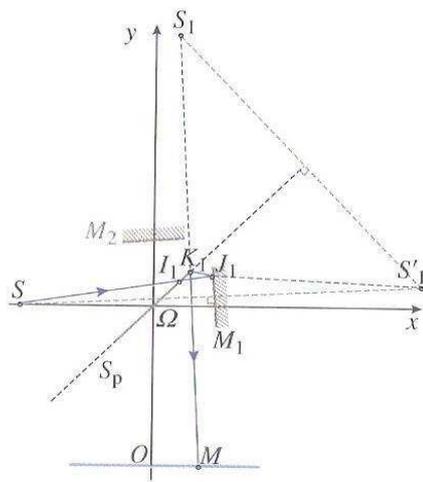
$$(SM)_1 = \underbrace{SI_1 + I_1J_1 + J_1K_1}_{=S'_1J_1} + K_1M = \underbrace{S'_1K_1}_{=S_1K_1} + K_1M = S_1K_1 + K_1M = S_1M$$

Le long de la voie 1, le chemin optique entre la source  $S$  et le point  $M$  d'observation est identique au chemin optique entre  $S_1$  et  $M$ , pour lequel aucune réflexion n'est à prendre en compte.  $S_1 = \text{Sym}_{S_p \circ M_1}(S)$  est l'image de  $S$  par la voie 1 de l'interféromètre.

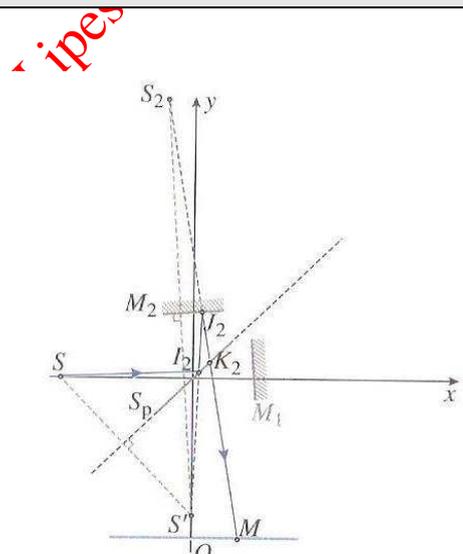
**Propriété**

Tout se passe comme si les rayons de la voie 1 étaient issus d'une source virtuelle  $S_1$  image de la source  $S$  par la voie 1 de l'interféromètre

$$S_1 = \text{Sym}_{S_p \circ M_1}(S)$$



a. Cheminement dans la voie ①.



b. Cheminement dans la voie ②.

FIGURE 6 – Trajet des rayons dans les deux voies.

**I.3. Trajet des rayons sur la voie 2**

Étudions un rayon issu de  $S$  et réfléchi par la séparatrice.

Le rayon réfléchi par  $S_p$  semble provenir de  $S'$  symétrique de  $S$  par rapport à  $S_p$ .  
On note  $S' = \text{Sym}_{S_p}(S)$  où  $\text{Sym}_{S_p}$  est la symétrie miroir par rapport à  $S_p$ .

Le rayon réfléchi par  $M_2$  semble provenir de  $S_2$  symétrique de  $S'$  par rapport à  $M_2$ .  
On note  $S_2 = \text{Sym}_{M_2}(S') = \text{Sym}_{M_2 \circ S_p}(S)$  où  $\text{Sym}_{M_2}$  est la symétrie miroir par rapport à  $M_2$  et  $\text{Sym}_{M_2 \circ S_p}$  est la symétrie miroir par rapport à  $S_p$  puis par rapport à  $M_2$ .

On peut alors calculer le chemin optique  $(SM)_2$  :

$$(SM)_2 = \underbrace{SI_2}_{=S'I_2} + I_2J_2 + J_2K_2 + K_2M = \underbrace{S'J_2}_{=S_2J_2} + J_2K_2 + K_2M = S_2K_2 + K_2M = S_2M$$

Le long de la voie 2, le chemin optique entre la source  $S$  et le point  $M$  d'observation est identique au chemin optique entre  $S_2$  et  $M$ , pour lequel aucune réflexion n'est à prendre en compte.  $S_2 = \text{Sym}_{M_2 \circ S_p}(S)$  est l'image de  $S$  par la voie 2 de l'interféromètre.

**Propriété**

Tout se passe comme si les rayons de la voie 2 étaient issus d'une source virtuelle  $S_2$  image de la source  $S$  par la voie 2 de l'interféromètre

$$S_2 = \text{Sym}_{M_2 \circ S_p}(S)$$

**I.4. Modèle équivalent de l'interféromètre**

Soit  $M'_1$  l'image de  $M_1$  par rapport à la séparatrice.  $M'_1$  est un miroir "virtuel". Alors par construction géométrique,  $S_1$  est obtenue par les symétries successives suivantes

$$S_1 = \text{Sym}_{S_p \circ M_1}(S) \quad \text{et} \quad S_1 = \text{Sym}_{M'_1 \circ S_p}(S)$$

Tout se passe comme si  $S_1 = \text{Sym}_{M'_1}[\underbrace{\text{Sym}_{S_p}(S)}_{S'}]$  était l'image de  $S' = \text{Sym}_{S_p}(S)$  par  $M'_1$ .

De même, en étudiant la voie 2, tout se passe comme si  $S_2 = \text{Sym}_{M_2}[\underbrace{\text{Sym}_{S_p}(S)}_{S'}]$  était l'image de  $S' = \text{Sym}_{S_p}(S)$  par  $M_2$ .

L'opération effectuée revient à réaliser une symétrie de tout le bras 1 de l'interféromètre et introduire le miroir  $M'_1$  symétrique de  $M_1$  par rapport à  $S_p$ .  $S_1$  est alors l'image de  $S'$ , symétrique de  $S$  par rapport à  $S_p$ , par rapport à  $M'_1$  (voir figure 7).

**Propriété**

L'interféromètre de Michelson éclairé par une source  $S$  est équivalent à :

- ★ deux miroirs, l'un réel  $M_2$ , l'autre virtuel  $M'_1$  symétrique de  $M_1$  par la séparatrice, tous deux situés sur le bras 2 ;
- ★ ces deux miroirs sont éclairés par une source  $S'$  image de  $S$  par la séparatrice.

**Remarque**

Les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sont orientables à l'aide de vis de réglage. Par conséquent, l'orientation de  $M'_1$  peut être modifiée par action sur  $M_1$ . D'autre part, le miroir  $M_1$ , et par conséquent son image  $M'_1$ , peut être translaté à l'aide du chariot.

**Remarque**

Il n'est plus utile de prendre en compte la séparatrice dans ce modèle équivalent.

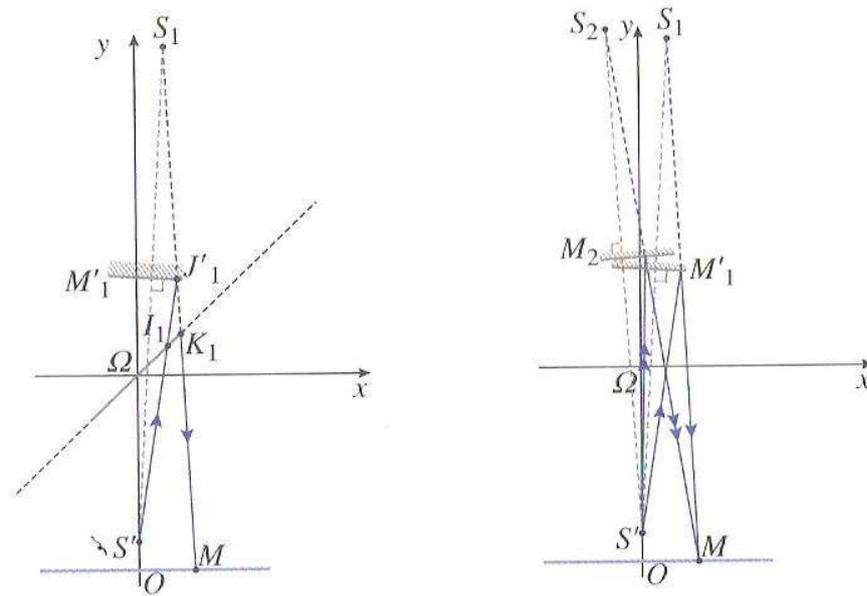


FIGURE 7 – "Repliement" de la voie 1 de l'interféromètre en utilisant le miroir virtuel  $M'_1$ .

### I.5. Rôle de la compensatrice

La lame séparatrice induit un défaut important pour l'interféromètre : elle engendre une dissymétrie entre les faisceaux. En effet, les rayons arrivant sur l'écran traversent trois fois la lame séparatrice s'ils se réfléchissent sur  $M_1$  alors qu'ils ne la traversent qu'une fois s'ils se réfléchissent sur  $M_2$ .

Cette dissymétrie introduit une différence de marche supplémentaire entre les deux ondes, qui dépend *a priori* de la longueur d'onde (le verre étant dispersif).

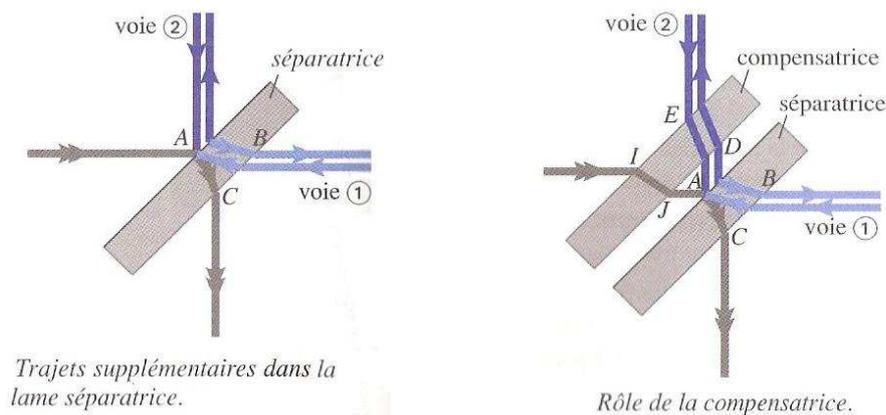


FIGURE 8 – Illustration de l'intérêt de la séparatrice.

Pour rétablir la symétrie, on ajoute une seconde lame de verre nommée *compensatrice*, identique à la première (à ceci près qu'elle ne comporte pas de dépôt métallique) et placée parallèlement à celle-ci. La figure ci-dessus montre que les rayons lumineux traversent alors quatre fois une épaisseur de lame, qu'ils se réfléchissent sur  $M_1$  ou sur  $M_2$ .

Remarque

Dans le schéma équivalent du Michelson, la séparatrice peut être oubliée, au même titre de que la compensatrice, à condition que la compensation soit parfaite.

## II Interféromètre de Michelson éclairé par une source ponctuelle à distance finie

Dans toute cette partie, l'interféromètre de Michelson est éclairé par une source ponctuelle  $S$  située à distance finie.

### II.1. Figures d'interférences observables

L'interféromètre de Michelson étant éclairé par une source ponctuelle  $S$ , le modèle équivalent permet de prévoir qu'on observera en sortie les rayons issus de  $S_1$  et  $S_2$ , image d'une source ponctuelle  $S'$  par les miroirs  $M_1'$  (virtuel) et  $M_2$ .

Les sources  $S_1$  et  $S_2$  étant issues d'une même source ponctuelle, elles sont cohérentes entre elles et peuvent donner lieu à des interférences.

Les déplacements des miroirs permettent de déplacer les sources  $S_1$  et  $S_2$  l'une par rapport à l'autre et d'observer les figures d'interférences correspondantes.

Propriété

L'interféromètre de Michelson éclairé par une source ponctuelle  $S$  est équivalent à deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  cohérentes entre elles.  
En sortie de l'interféromètre, on obtient une figure d'interférences à deux ondes caractérisée par l'éclairement :

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda} \right) \right] \quad \text{avec} \quad \delta(M) = S_2M - S_1M$$

Remarque

On a supposé que les réflexions et transmissions à travers les lames n'introduisaient pas de déphasage supplémentaire.

Les points d'égale intensité vérifient donc

$$\delta(M) = \text{cte} \quad \text{soit} \quad S_2M - S_1M = \text{cte}$$

Les surfaces définies par cette équation sont des hyperboloïdes de révolution autour de  $(S_1S_2)$ .  
En fonction de la position de l'écran par rapport à l'axe  $(S_1S_2)$ , on pourra observer :

- ★ des anneaux concentriques ;
- ★ des franges courbées ;
- ★ des franges quasi-rectilignes.

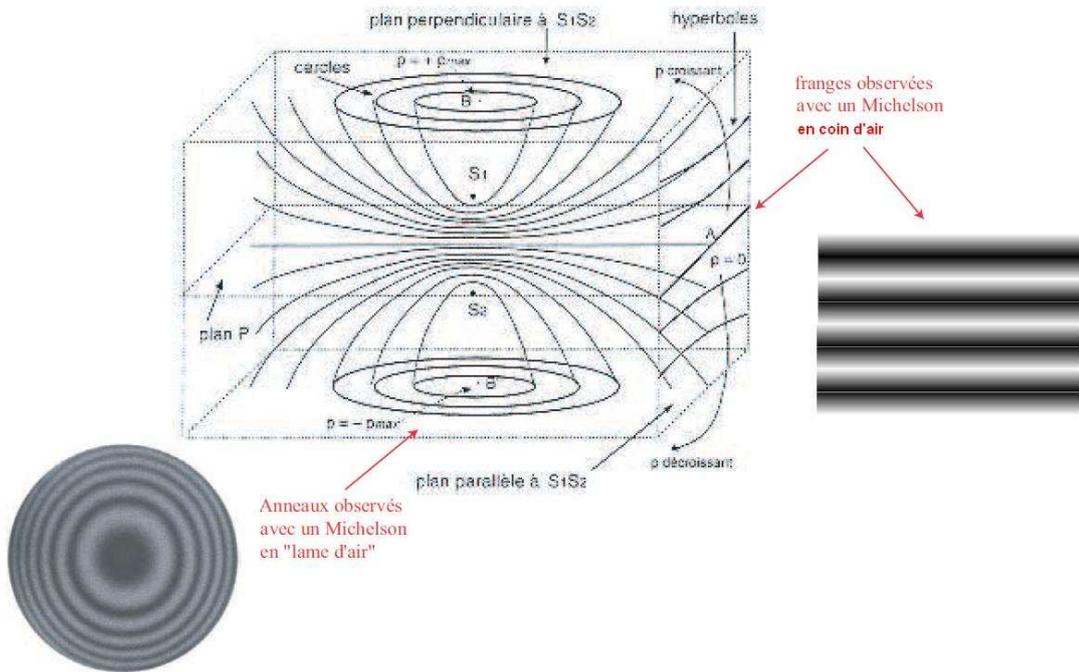


FIGURE 9 – Type de figure d’interférences observables en fonction de la position respectives des sources secondaires et de l’écran.

Les interférences sont observables dans tous l’espace (en théorie). On dit qu’elles sont non-localisées. En pratique, elles ne sont observables que dans la zone de recouvrement des faisceaux émergents.

**Propriété**

L’interféromètre éclairé par une source ponctuelle donne lieu à des interférences observables dans une vaste zone de l’espace : on parle d’interférences non-localisées. Les surfaces d’égale intensité sont alors des hyperboloïdes de révolution autour de l’axe des sources secondaires ( $S_1S_2$ ).

**II.2. Coin d’air et franges rectilignes**

**a) Réglage de l’interféromètre**

Cherchons à observer des franges rectilignes à la sortie de l’interféromètre. D’après la forme des hyperboloïdes de révolution, il faut donc que l’axe ( $S_1S_2$ ) soit parallèle à l’écran.

**Remarque**

On retrouve alors la configuration des trous d’Young, où  $S_1$  et  $S_2$  sont les sources secondaires issues d’une source primaire  $S$ .

Cette configuration est obtenue lorsque les miroirs  $M'_1$  et  $M_2$  sont à égale distance de la séparatrice et forment entre eux un angle  $\alpha$  relativement faible.

On parle alors de configuration en coin d’air car les miroirs  $M'_1$  et  $M_2$  forment un dièdre à l’intérieur duquel le milieu est de l’air (voir figure 10).

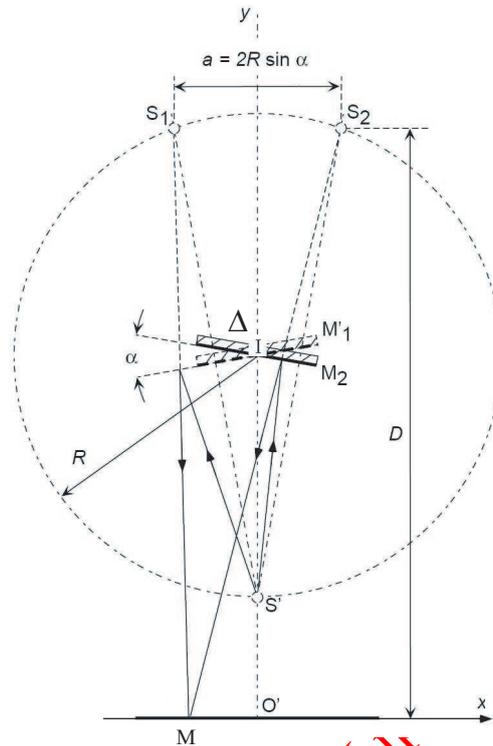


FIGURE 10 – Configuration de l’interféromètre de Michelson en "coin d’air".

Dans cette configuration, les distances  $d_1$  et  $d_2$  du centre des deux miroirs au point  $O$  sont identiques et on les note  $R$ . Nous supposons que chaque miroir fait le même angle  $\alpha/2$  avec un plan parallèle à l’écran (voir figure 10).

La position de l’écran par rapport à l’alignement des points source est identique au cas des trous d’Young et on peut en déduire directement qu’à une grande distance d’observation, on observe des **franges rectilignes parallèles à l’axe  $\Delta$  commun à  $M'_1$  et  $M_2$ .**

La frange centrale brillante est située sur la médiatrice de  $[S_1S_2]$ .

Remarque

Les interférences sont **non-localisées** : la position de l’écran est donc quelconque à condition qu’il intercepte la zone de recouvrement des faisceaux.

**Définition :**

L’interféromètre de Michelson réglé avec les miroirs inclinés et équidistants de la séparatrice est équivalent à un coin d’air.



FIGURE 11 – Franges rectilignes obtenues en coin d'air.

**Propriété**

L'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air et éclairé par une source ponctuelle monochromatique donne lieu à une figure d'interférence constituée de franges rectilignes.

**Remarque**

La source étant ponctuelle, les interférences sont non-localisées.

**b) Différence de marche**

En nommant  $x$  l'abscisse du point  $M$  sur l'écran d'observation, la différence de marche en  $M$  sera, si l'écran est placé à grande distance des sources ( $D \gg a$ ) :

$$\delta = \frac{ax}{D} = \frac{2R \sin \alpha}{D} x$$

où  $\alpha$  est l'angle que forment les miroirs entre eux et  $R$  est la distance des miroirs au centre de la séparatrice.

**Remarque**

L'intensité sur l'écran ne dépend que de  $x$  : on obtient donc des franges rectilignes parallèles  $x = \text{cste}$ , correspondant à une même différence de marche, c'est-à-dire à une même valeur de l'intensité.

La frange centrale ( $\delta = 0$ ) est positionnée en  $x = 0$ .

La figure d'interférence est caractérisée par un interfrange :

$$i = \frac{\lambda 2R \sin \alpha}{a}$$

### II.3. Lame d'air et anneaux concentriques

#### a) Réglage de l'interféromètre

Cherchons à observer des anneaux concentriques à la sortie de l'interféromètre. D'après la forme des hyperboloïdes de révolution, il faut donc que l'axe  $(S_1S_2)$  soit perpendiculaire à l'écran.

Cette configuration est obtenue lorsque les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sont parallèles entre eux et non-équidistants de la séparatrice. On parle de configuration en lame d'air car les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  forment une lame à faces parallèles n'induisant aucune réfraction, c'est-à-dire contenant de l'air. Cette configuration est représentée sur la figure 12.

*Remarque*

*La configuration en lame d'air implique que les miroirs réels  $M_1$  et  $M_2$  soient orthogonaux et non équidistants de la séparatrice.*

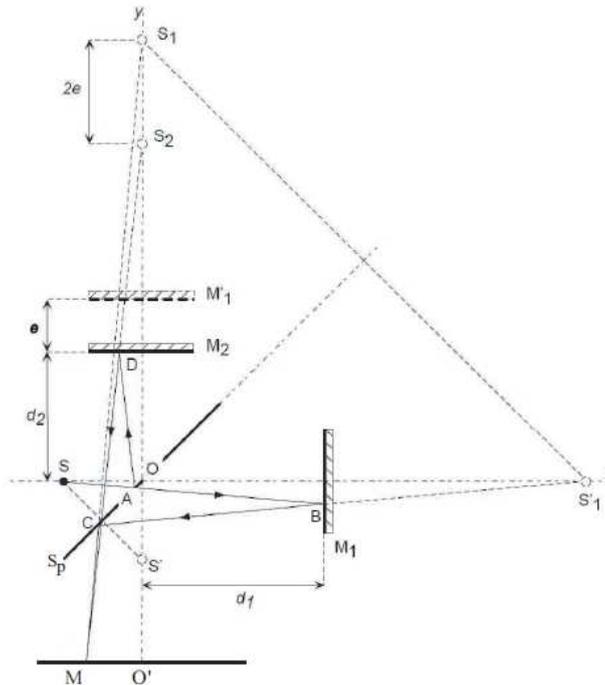


FIGURE 12 – Configuration de l'interféromètre de Michelson en "lame d'air".

Dans cette configuration,  $M_1$  est normal à  $Ox$  et  $M_2$  à  $Oy$ . Nous noterons  $d_1$  et  $d_2$  les distances de  $M_1$  et  $M_2$  au point  $O$ .

Si les deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sont distants de  $e = |d_1 - d_2|$ , les deux sources secondaires sont séparées de  $a = 2e$ . Si l'on place un écran d'observation normalement à l'axe  $Oy$  à la distance  $D$  des sources, on se trouve dans le cas d'un écran placé orthogonalement à deux sources  $S_1$  et  $S_2$  cohérentes.

Le problème étant à symétrie de révolution autour de l'axe des sources, la différence de marche  $\delta$  ne varie pas si l'on fait tourner le point  $M$  d'observation autour du point  $O'$  choisi comme origine des coordonnées sur l'écran. La figure d'interférence doit donc nécessairement présenter des **anneaux** centrés sur le point  $O'$ .

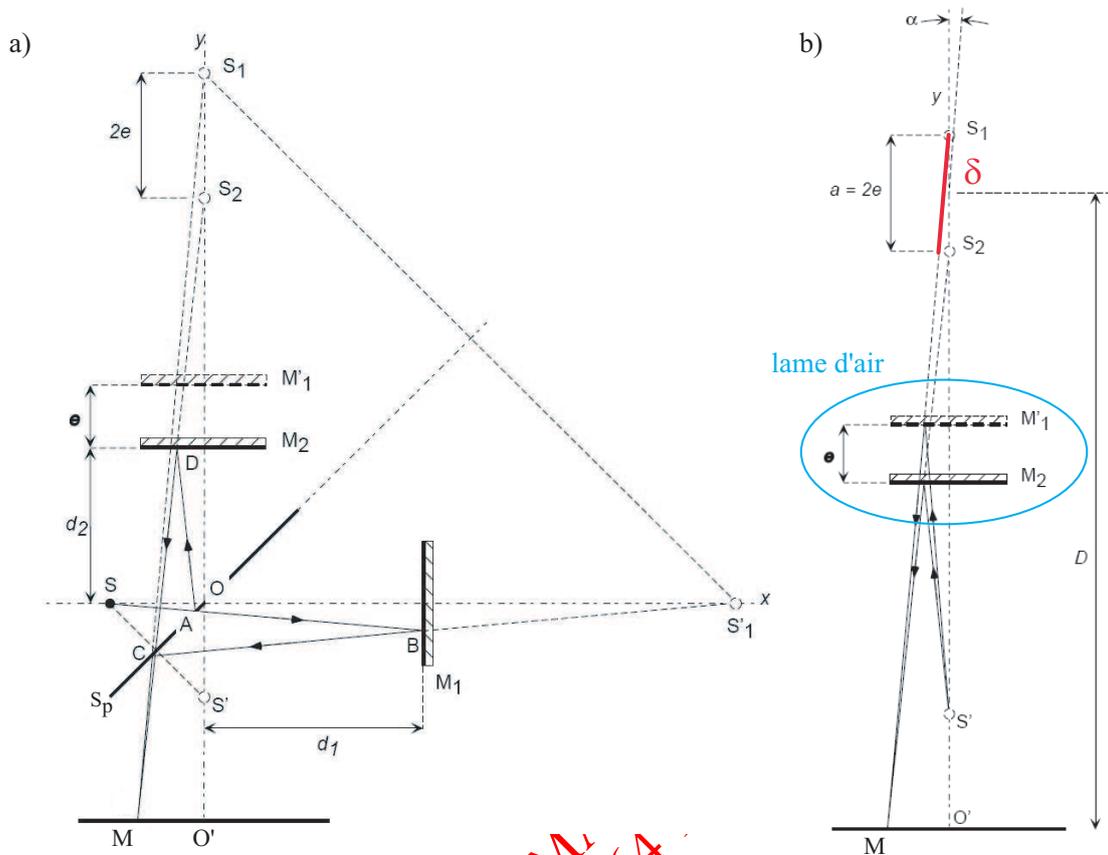


FIGURE 13 – Schéma équivalent de l'interféromètre de Michelson en configuration de lame d'air.

Remarque

Ces anneaux sont la projection des hyperboloïdes de révolution sur un écran perpendiculaire à l'axe des sources.

**Définition :**

L'interféromètre de Michelson réglé avec les miroirs parallèles et non-équidistants de la séparatrice est équivalent à une lame d'air.

**Propriété**

L'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et éclairé par une source ponctuelle monochromatique donne lieu à une figure d'interférence constituée d'anneaux concentriques.



FIGURE 14 – Anneaux concentriques obtenus en lame d'air.

Remarque

Nous n'avons fait aucune supposition sur la position du plan d'observation et les anneaux sont donc visibles quelle que soit la position de l'écran. Les interférences sont donc **non-localisées**, ce qui est compatible avec l'utilisation d'une source ponctuelle.

b) Différence de marche

Lorsque l'écran est placé à une distance  $D$  grande devant l'écart entre les sources  $a$ , le calcul de la différence de marche s'écrit simplement, en notant  $r$  le rayon de l'anneau considéré :

$$\delta = 2e \cos \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \simeq \frac{r}{D}$$

Remarque

Dans les deux cas étudiés dans cette partie, les rayons interférant au point  $M$  ne sont pas issus d'un même rayon divisé par la séparatrice, mais proviennent de deux rayons distincts issus de  $S$ . L'interféromètre de Michelson éclairé par une source ponctuelle est donc utilisé comme un dispositif à division du front d'onde.

### III Interféromètre de Michelson éclairé par une source étendue

#### III.1. Localisation des interférences

Une source ponctuelle est pratiquement irréalisable. De plus, l'intensité lumineuse qui en est issue est très faible. Pour toutes ces raisons, il est préférable d'utiliser une source étendue.

Toutefois une source étendue est constituée d'une infinité de sources ponctuelles incohérentes entre elles qui donnent chacune un système d'interférence. La superposition de ces figures d'interférence, en général décalées les unes par rapport aux autres, conduit généralement à un brouillage si la source est trop étendue.

En revanche, dans certaines configurations, il est possible que les figures d'interférences ne soient pas décalées les unes par rapport aux autres. La figure résultante n'est donc pas brouillée mais au contraire plus intense. Ceci n'est possible que si la différence de marche ne dépend pas de la position de la source primaire.

Cherchons donc les conditions pour lesquelles la différence de marche entre les faisceaux émergents ne varie pas lorsque la source ponctuelle  $S_0$  se déplace en  $S'_0$ .

a) Variation de chemin optique

Exercice

Soit un rayon lumineux rectiligne  $S_0M$  reliant un point source  $S_0$  à un point  $M$  quelconque. L'indice est supposé constant. La source est alors déplacée d'une petite quantité et se retrouve en  $S'_0$ . Déterminer la différence de chemin optique entre  $(S'_0M)$  et  $(S_0M)$ . On posera  $\vec{u} = \frac{\vec{S_0M}}{S_0M}$  le vecteur unitaire orientant le rayon  $S_0M$  et l'on supposera que l'indice vaut 1.

Le chemin optique  $L = (S_0M)$  vaut initialement

$$L = (S_0M) = n S_0M = n \overrightarrow{S_0M} \cdot \vec{u}$$

Sa variation est donnée par

$$dL = n d(\overrightarrow{S_0M}) \cdot \vec{u} + n \overrightarrow{S_0M} \cdot d\vec{u}$$

Mais  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire de sorte que  $\vec{u}^2 = 1$  ce qui impose

$$d(\vec{u}^2) = 0 = 2\vec{u} \cdot d\vec{u} \Rightarrow d\vec{u} \perp \overrightarrow{S_0M}$$

On en déduit

$$dL = n d(\overrightarrow{S_0M}) \cdot \vec{u} = n (\overrightarrow{S'_0M} - \overrightarrow{S_0M}) \cdot \vec{u} = n \overrightarrow{S'_0S_0} \cdot \vec{u}$$

Remarque

On admet que ce résultat se généralise même si le rayon subit des réfractions ou des réflexions entre  $S_0$  et  $M$ .

b) Théorème de localisation

Considérons le chemin optique  $(S_0M)_1$  le long de la voie 1 entre la source  $S_0$  et un point  $M$  quelconque. Notons  $\vec{u}_1$  le vecteur unitaire orientant le rayon issu de  $S_0$  et passant par la voie 1.

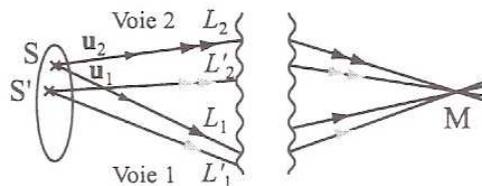


FIGURE 15 -

Lorsque  $S_0$  se déplace en  $S'_0$ , la variation du chemin optique  $(S_0M)_1$  vaut

$$(S'_0M)_1 - (S_0M)_1 = \overrightarrow{S'_0S_0} \cdot \vec{u}_1$$

où l'on a utilisé le résultat précédent avec  $n = 1$  dans l'air.

De la même manière, pour la voie 2

$$(S'_0M)_2 - (S_0M)_2 = \overrightarrow{S'_0S_0} \cdot \vec{u}_2$$

où  $\vec{u}_2$  est le vecteur unitaire orientant le rayon issu de  $S_0$  et passant par la voie 2.

La variation de la différence de marche vaut donc

$$\Delta [(S_0M)_2 - (S_0M)_1] = [(S'_0M)_2 - (S'_0M)_1] - [(S_0M)_2 - (S_0M)_1] = \overrightarrow{S'_0S_0}(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$$

On souhaite que la différence de marche ne dépende pas de la position de la source, c'est-à-dire que cette variation soit nulle pour tout déplacement de la source. Ceci n'est possible que lorsque  $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ , c'est-à-dire lorsque les rayons sont émis par la source selon la même direction. Autrement dit, ces rayons sont issus d'un même rayon incident.

#### Remarque

*Cette propriété n'est possible que si l'on utilise un dispositif à division d'amplitude. Seuls les dispositifs à division d'amplitude permettent d'observer des interférences en source étendue.*

Lorsque la source est étendue, seules les interférences entre les rayons issus d'un même rayon incident conduisent au même ordre d'interférence sur l'écran. Les interférences sont alors observables à l'intersection de ces rayons issus d'un même rayon incident.

#### Propriété

Les interférences en source étendue ne peuvent être observées qu'avec un interféromètre à division d'amplitude.  
 Les interférences ne sont alors visibles que dans une zone restreinte de l'espace : on dit qu'elles sont localisées.  
 Les interférences ne sont visibles que sur une surface dites de localisation, définie par l'intersection des rayons émergents issus d'un même rayon incident.

## III.2. Configuration en coin d'air

### a) Surface de localisation

Considérons l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air. Lorsque l'interféromètre est éclairé avec une source étendue, la figure d'interférence est observable sur la surface de localisation. Cette surface est constituée de l'ensemble des points d'intersection des rayons émergents issus d'un même rayon incident.

Particularisons un rayon issu de la source  $S$ . Afin de déterminer l'intersection des deux rayons issus du même rayon incident, utilisons le schéma équivalent de l'interféromètre pour lequel la source  $S'$ , image de  $S$  par la séparatrice  $S_p$ , éclaire les miroirs  $M'_1$  et  $M_2$ .

On constate que l'intersection des rayons émergents issus d'un même rayon incident se situe au voisinage des miroirs. On retiendra qu'en coin d'air, la surface de localisation se situe au voisinage des miroirs.

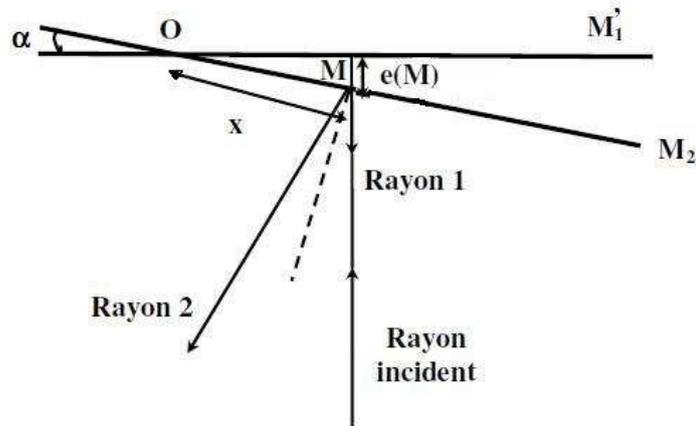


FIGURE 16 –

**Propriété**

Si l'interféromètre de Michelson, réglé en coin d'air, est éclairé par une source étendue, les franges sont localisées au voisinage des miroirs. Pour observer la figure d'interférences, il faut projeter, à l'aide d'une lentille, l'image des miroirs sur un écran ou observer à l'oeil le miroir  $M_2$ .

**b) Différence de marche**

Éclairons les miroirs en incidence quasi-normale. Jusqu'au premier miroir (point  $M$  sur la figure 16), le trajet des rayons dédoublés par la séparatrice est identique. Les rayons émergents 1 et 2 se coupent et interfèrent au point  $M$ . Appelons  $x$  l'abscisse du point  $M$  comptée à partir de l'arête du coin d'air.

La différence de marche s'écrit alors :

$$\delta(M) \approx 2e(M) \quad \text{avec} \quad e(M) \approx \alpha x \implies \delta(M) = 2\alpha x$$

On remarque que l'intensité sur l'écran ne dépend que de  $x$  donc la figure d'interférence est constituée de franges rectilignes parallèles à l'arête du coin d'air.

**Propriété**

Lorsque l'interféromètre de Michelson est réglé en coin d'air et éclairé en lumière monochromatique en incidence quasi-normale, la figure d'interférences est constituée de franges rectilignes, parallèles à l'arête commune aux deux miroirs. En un point  $M$  de la surface de localisation, la différence de marche vaut

$$\delta(M) = 2e(M) = 2\alpha x$$

où  $x$  est la position de  $M$  comptée à partir de l'arête du coin d'air.

**c) Interfrange**

L'interfrange  $i$  est défini par  $\delta(x + i) = \delta(x) + \lambda$ . D'après l'expression de la différence de marche, l'interfrange est donné par

$$2\alpha i = \lambda \quad \text{soit} \quad i = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

L'interfrange est constant, indépendant de la position sur la figure d'interférences.

### Propriété

En coin d'air, les franges rectilignes sont appelées franges d'égale épaisseur car l'interfrange

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

est constant.

### Remarque

On remarque que l'interfrange augmente à mesure que l'angle entre les miroirs diminue, c'est-à-dire à mesure que les sources secondaires se rapprochent.

### Exercice

Déterminer l'angle entre les miroirs pour que les franges soient observables à l'œil nu, c'est-à-dire avec un grandissement de 1.

Les franges sont visibles si l'interfrange n'est pas trop petit, par exemple  $i \sim 1$  mm. Pour une longueur d'onde  $\lambda = 500$  nm, l'angle entre les miroirs est de l'ordre de

$$\alpha = \frac{\lambda}{2i} = \frac{500 \cdot 10^{-9}}{2 \times 10^{-3}} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

C'est une valeur extrêmement faible.

### Remarque

L'interfrange sur l'écran est égal à l'interfrange réel multipliée par le grandissement dû à la lentille.

## d) Conditions expérimentales

Nous avons vu que nous pouvions observer des franges d'égale épaisseur, même avec une source étendue. Néanmoins, en un point donné, la différence de marche, donc l'ordre d'interférence, dépend de l'angle d'incidence. Si les rayons possèdent différentes incidences, la figure d'interférence a tendance à se brouiller et le contraste diminue. Il faut donc faire en sorte d'éclairer le coin d'air en incidence quasi-normale.

### Propriété

Lors de la réalisation expérimentale d'une figure d'interférences "en coin d'air" avec une source étendue, on éclaire l'interféromètre de Michelson en incidence quasi-normale.

### III.3. Configuration en lame d'air

#### a) Surface de localisation

Considérons l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air. Lorsque l'interféromètre est éclairé avec une source étendue, la figure d'interférence est observable sur la surface de localisation. Cette surface est constituée de l'ensemble des points d'intersection des rayons émergents issus d'un même rayon incident.

Particularisons un rayon issu de la source  $S$ . Afin de déterminer l'intersection des deux rayons issus du même rayon incident, utilisons le schéma équivalent de l'interféromètre pour lequel la source  $S'$ , image de  $S$  par la séparatrice  $S_p$ , éclaire les miroirs  $M'_1$  et  $M_2$ .

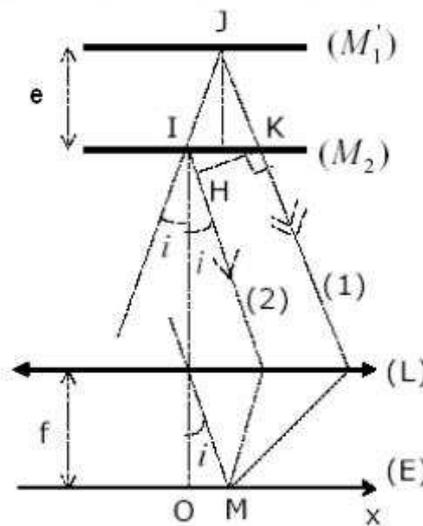


FIGURE 17 -

Dans la configuration en lame d'air, les rayons émergents issus d'un même incident sont parallèles entre eux. Leur intersection est donc rejetée à l'infini. On retiendra qu'en lame d'air, la surface de localisation se situe à l'infini.

#### Propriété

Si l'interféromètre de Michelson, réglé en lame d'air, est éclairé par une source étendue, la figure d'interférence est localisée à l'infini.

Pour observer la figure d'interférences, il faut l'observer dans le plan focal image d'une lentille convergente ou l'observer à l'oeil nu.

#### b) Différence de marche

Éclairons l'interféromètre avec une source étendue. Afin d'étudier la figure d'interférence formée, il faut calculer la différence de marche entre deux rayons émergents issus du même rayon incident.

Cette différence de marche vaut :

$$\delta = (IJK) - (IH) = IJ + JK - IH = \frac{2e}{\cos i} - IK \sin i = \frac{2e}{\cos i} - \frac{2e \sin^2 i}{\cos i} \Rightarrow \boxed{\delta = 2e \cos i}$$

Remarque

On retrouve la différence de marche introduite par une lame à face parallèle

$$\delta = 2ne \cos(r)$$

où  $r$  est l'angle de réfraction et  $n$  l'indice de la lame. Ici, la lame est constituée d'air : par conséquent,  $n = 1$  et  $r = i$ .

On remarque que l'intensité sur l'écran ne dépend que de l'angle d'incidence  $i$ , donc les franges d'interférences sont des anneaux concentriques.

Propriété

Lorsque l'interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air et éclairé en lumière monochromatique en incidence d'angle  $i$ , la figure d'interférences est constituée d'anneaux concentriques.

La différence de marche entre deux rayons qui interfèrent vaut

$$\delta(M) = 2e \cos(i)$$

où  $e$  est l'épaisseur de la lame d'air.

Propriété

En lame d'air, les anneaux sont appelés anneaux d'égale inclinaison car l'ordre d'interférence ne dépend que de l'angle d'incidence  $i$ .

c) Rayons des anneaux

Observons des anneaux d'égale inclinaison dans le plan focal image d'une lentille convergente de focale  $f'$ .

Le rayon d'un anneau d'ordre d'interférences  $p = \frac{\delta}{\lambda}$  vaut :

$$r = f' \tan i$$

En considérant l'angle d'incidence  $i$  petit, on a, à l'ordre 2 en  $i$  :

$$r = f' i$$

Or la différence de marche est de la forme

$$\delta = 2e \cos i \simeq 2e - ei^2 = p\lambda$$

où l'on a considéré  $i$  suffisamment petit pour faire un développement limité à l'ordre 2 en  $i$ .

★ Au centre  $i = 0$  et l'ordre d'interférence vaut  $p_0$  tel que  $2e = p_0\lambda$ . L'ordre d'interférence au centre  $p_0$  n'est pas nécessairement entier, ce qui signifie qu'il n'y a pas nécessairement d'anneaux brillant (intensité maximale) ou sombre (intensité minimale) au centre de la figure d'interférences).

\* Pour  $i$  quelconque, l'ordre d'interférence est relié à l'angle d'incidence par

$$ei^2 = (p_0 - p)\lambda \Rightarrow i = \sqrt{(p_0 - p) \frac{\lambda}{e}}$$

Le rayon de l'anneau d'ordre d'interférence  $p$  vaut

$$r_p = f' i = f' \sqrt{(p_0 - p) \frac{\lambda}{e}}$$

#### Remarque

L'ordre d'interférence est maximal au centre et diminue à mesure que l'on s'éloigne du centre.

#### Exercice

On considère un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et éclairé par une source monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 632 \text{ nm}$ . On projette la figure d'interférence sur un écran à l'aide d'une lentille convergente de focale  $f' = 1 \text{ m}$ . La distance entre les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  vaut  $e = 0,4 \text{ mm}$ .

1. Déterminer l'ordre d'interférence au centre.
2. Déterminer le rayon des 4 premiers anneaux brillants. Commenter.

1. La différence de marche au centre vaut  $\delta = 2e$ . On en déduit l'ordre d'interférence au centre

$$p_0 = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} \Rightarrow p_0 = \frac{2 \times 4.10^{-4}}{632.10^{-9}} = 1265,82$$

L'ordre d'interférence n'est ni entier, ni demi-entier : l'intensité n'est ni maximale, ni minimale au centre.

2. L'ordre d'interférence en un point donné de l'écran est de la forme

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e \cos i}{\lambda}$$

où  $i$  est l'angle d'incidence.

Si l'angle  $i$  est suffisamment petit

$$p = \frac{2e}{\lambda} \cos i \simeq \frac{2e}{\lambda} - \frac{e}{\lambda} i^2 = p_0 \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) \Rightarrow i = \sqrt{2 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)}$$

L'angle  $i$  correspond à un point sur l'écran situé à la distance  $r = f' i$  du centre de sorte que le rayon de l'anneau d'ordre  $p$  est

$$r = f' i = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)}$$

L'ordre d'interférence décroît à mesure que  $i$  augmente, c'est-à-dire à mesure que l'on s'éloigne du centre. Le rayon du premier anneau est obtenu lorsque  $p$  atteint la valeur entière la plus proche de  $p_0$  mais par valeur inférieure. On en déduit pour le premier anneau brillant :

$$p_1 = 1265,0 \quad \text{et} \quad r_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p_1}{p_0}\right)} = 3,6 \text{ cm}$$

De la même manière, on trouve

$$p_2 = 1264,0 \Rightarrow r_2 = 5,37 \text{ cm}$$

$$p_3 = 1263,0 \Rightarrow r_3 = 6,68 \text{ cm}$$

$$p_4 = 1262,0 \Rightarrow r_4 = 7,77 \text{ cm}$$

Les figures suivantes correspondent à l'observation en lumière monochromatique (dans le plan focal d'une lentille de distance focale  $f' = 1 \text{ m}$ ) d'anneaux d'égale inclinaison. La zone d'observation est un carré de côté 20 cm, centré sur la figure d'interférences. Les ordres d'interférences au centre ont été choisis ainsi :  $p_0 = 500, 1000, 2000$  et  $4000$ .

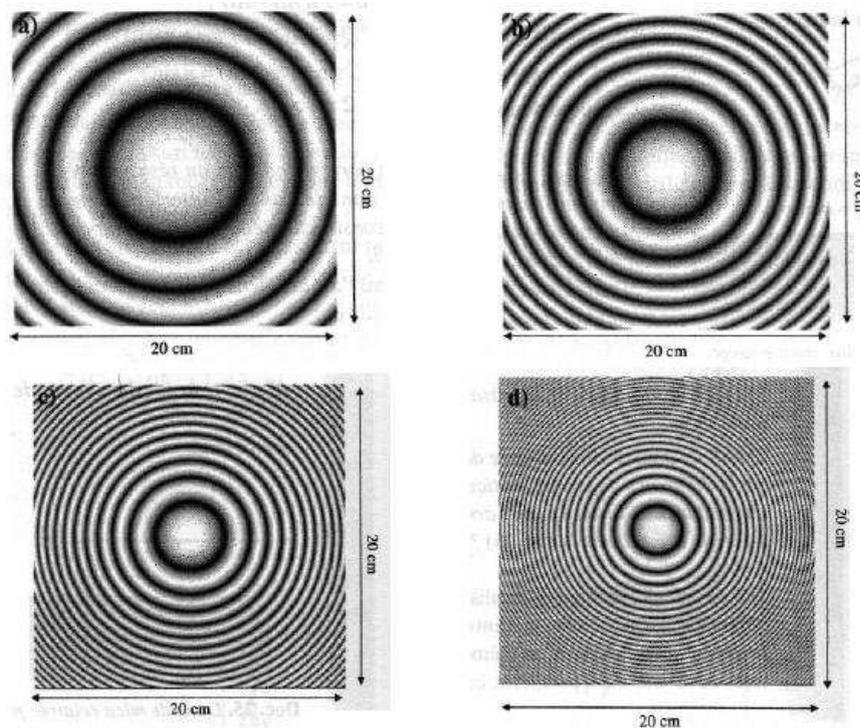


FIGURE 18 – Allure de la figure d'interférences pour différents ordres d'interférence au centre.

Remarque

*Le nombre d'anneaux dans le champ d'observation est d'autant plus grand que l'ordre d'interférences au centre est important, donc que l'épaisseur de la lame d'air est importante.*

d) Conditions expérimentales

On remarque que plus les incidences sont différentes, plus on peut observer d'anneaux.

Propriété

Lors de la réalisation expérimentale d'une figure d'interférences "en lame d'air" avec une source étendue, on éclaire l'interféromètre de Michelson avec des incidences très variées. Pour cela, on focalise un faisceau sur le miroir  $M_1$ .

### III.4. Contact optique et teinte plate

Réglons l'interféromètre de Michelson en coin d'air et éclairons le avec une source étendue et monochromatique. On observe alors des franges d'égale épaisseur dont l'interfrange est donné par

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

où  $\alpha$  est l'angle entre les deux miroirs. On constate que l'interfrange augmente lorsque  $\alpha$  diminue, c'est-à-dire lorsque les sources secondaires se rapprochent.

Considérons maintenant l'interféromètre, éclairé par la même source mais réglé en lame d'air. Les anneaux d'égale inclinaison sont observés dans le plan focal d'une lentille de distance focale  $f'$ .

L'anneau d'ordre d'interférence  $p$  a pour rayon

$$r = f'i \quad \text{avec} \quad \delta = p\lambda = 2e \cos i$$

où  $e$  est la distance entre les miroirs  $M'_1$  et  $M_2$ .

Si l'on fait tendre l'épaisseur  $e$  vers 0, seul l'ordre d'inférence nul est observable sur l'écran : lorsque les sources secondaires se rapprochent, le rayon des anneaux augmente.

#### Propriété

Lorsque les miroirs  $M'_1$  et  $M_2$  tendent à se superposer, les sources secondaires se superposent également et l'interfrange augmente indéfiniment.

#### Définition :

On appelle **contact optique** le réglage de l'interféromètre de Michelson pour lequel les miroirs  $M'_1$  et  $M_2$  sont confondus.

Au contact optique, aucune différence de marche n'est introduite entre deux rayons émergents issus du même rayon incident. Dans ces conditions,  $\delta = 0$  dans tout l'espace : les interférences sont constructives partout.

#### Propriété

On appelle **teinte plate**, la figure d'interférence uniforme observée au contact optique.

#### Remarque

Si l'interféromètre de Michelson, réglé au contact optique, est éclairé en lumière polychromatique, alors la teinte plate prend la couleur de la source.

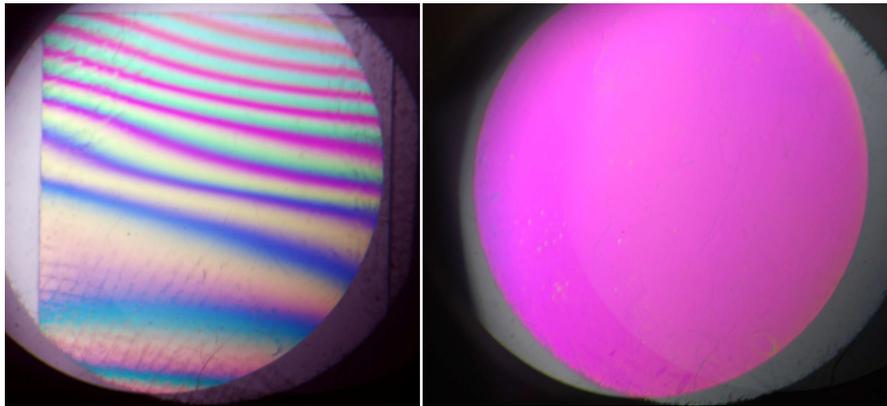


FIGURE 19 – Passage d’un réglage en coin d’air au contact optique.

**III.5. Interférences en lumière blanche**

La lumière blanche contient toutes les radiations du spectre visible, de  $0,4 \mu\text{m}$  (violet) à environ  $0,8 \mu\text{m}$  (rouge). Comme il n’y a pas d’interférences entre des sources de fréquences différentes, on obtient sur l’écran la superposition des phénomènes correspondant aux différentes longueurs d’onde. Ce sont donc les éclaircissements qui vont s’ajouter.

Pour la configuration en coin d’air, l’interfrange vaut  $\frac{\lambda}{2\alpha}$ . L’interfrange est donc proportionnel à la longueur d’onde  $\lambda$ . Si l’on superpose des systèmes de frange de périodes spatiales  $i$  différentes, la figure d’interférences va rapidement se brouiller.

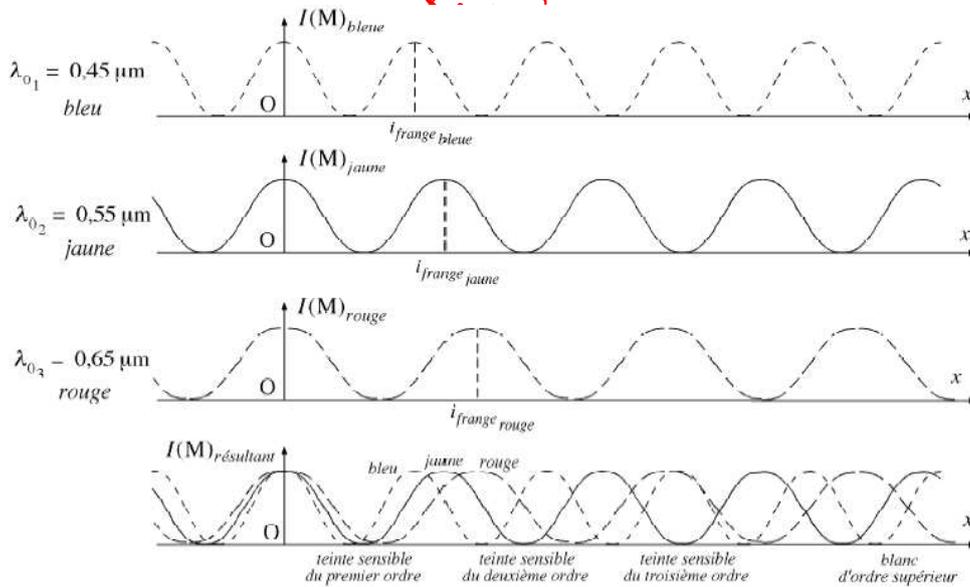


FIGURE 20 – Superposition de systèmes de franges de différentes longueurs d’onde.

En revanche, sur l’arête du coin d’air,  $\delta = 0$  pour toutes les couleurs : on obtient une frange centrale blanche.

De part et d'autre, les couleurs s'éteignent toutes une première fois approximativement pour la même différence de marche : la raie blanche est entourée de raies sombres.

Ensuite, en fonction de l'abscisse sur le coin d'air, certaines longueurs d'onde sont éteintes mais d'autres interfèrent constructivement. La succession de colorations obtenues forme l'échelle des teintes de Newton.

Enfin, si  $x$  augmente encore, la superposition des longueurs d'onde éteintes et brillantes est interprétée par l'œil comme de la lumière blanche, car la résolution spectrale de l'œil ne lui permet pas de distinguer les teintes de couleur trop subtiles. Ce blanc ne correspond pas un spectre continu : on l'appelle blanc d'ordre supérieur.

### Propriété

Les interférences en lumière blanche ne sont observables qu'au voisinage du contact optique.

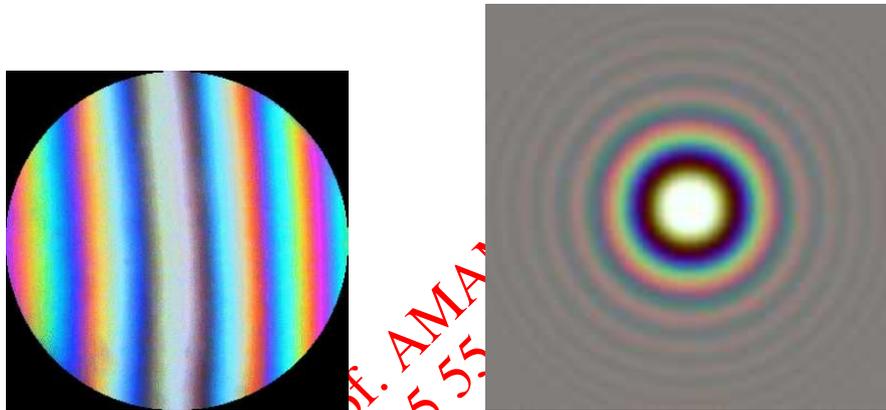


FIGURE 21 – Configuration en coin d'air (à gauche) et en lame d'air (à droite) en lumière blanche.

### Définition :

On appelle blanc d'ordre supérieur une lumière polychromatique :

- \* perçue comme du blanc par l'œil ;
- \* à laquelle il manque de nombreuses radiations monochromatiques.

Le spectre du blanc d'ordre supérieur est un spectre cannelé.

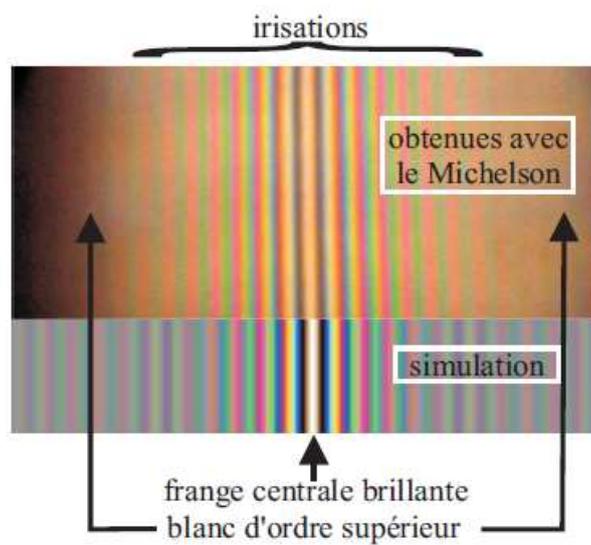


FIGURE 22 – Blanc d'ordre supérieur.

prof. AMAMI ipest  
tel:95 55 64 10

# Diffraction

Nous avons vu que les phénomènes d'interférences optiques sont assez rares dans la nature, la cause étant le défaut de cohérence, tant spatiale que temporelle, des sources lumineuses réelles. Par contre nous avons tous les jours l'occasion de constater très simplement que le modèle de propagation de la lumière en ligne droite le long de « rayons lumineux » est trop simpliste.

Regardons simplement passer la lumière à travers les mailles d'un rideau (fig 1). Nous constatons qu'elle se répartit selon des directions non prévues par l'optique géométrique : c'est le phénomène de diffraction que nous avons déjà évoqué à plusieurs reprises.

Nous allons étudier une théorie permettant de décrire quantitativement la diffraction.

Nous verrons ensuite l'importance de ce phénomène en optique et dans toute la physique ondulatoire.



FIGURE 1 –

## I Principe de Huygens-Fresnel

### I.1. Limitations de l'optique géométrique

#### a) Impossibilité d'isoler un rayon lumineux

Considérons un faisceau laser que l'on envoie à travers une fente. Quand la fente est assez large, elle n'a aucune influence et on observe un point lumineux sur l'écran, dans la direction de l'optique géométrique. En revanche, lorsque l'on ferme petit à petit la fente et que ses bords interceptent le faisceau laser, le point sur l'écran s'étale en une tache, nettement séparée d'autres taches.

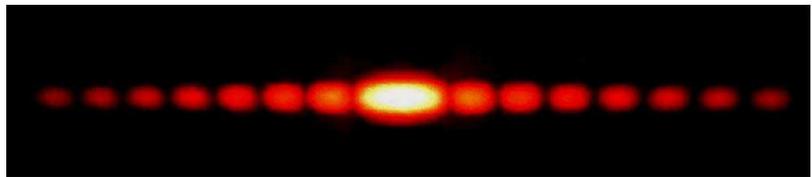
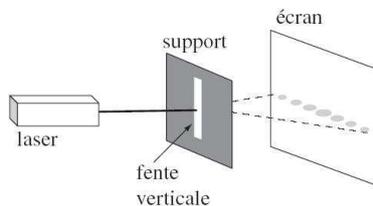
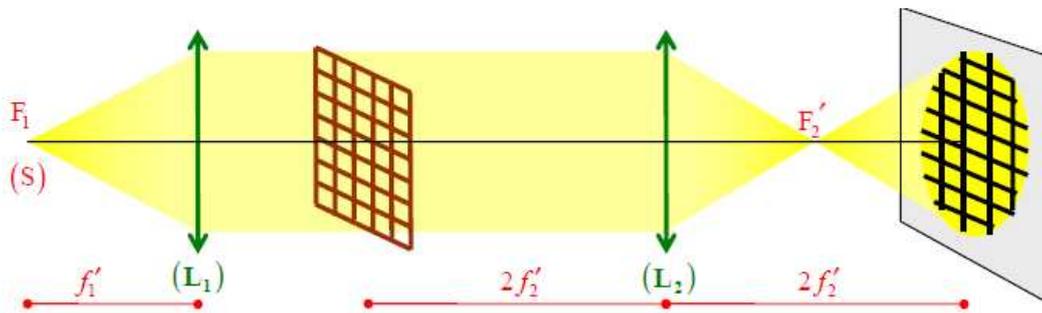


FIGURE 2 – (À gauche) Dispositif expérimental. La largeur de la fente est petite devant la longueur d'onde. (À droite) Figure de diffraction obtenue.

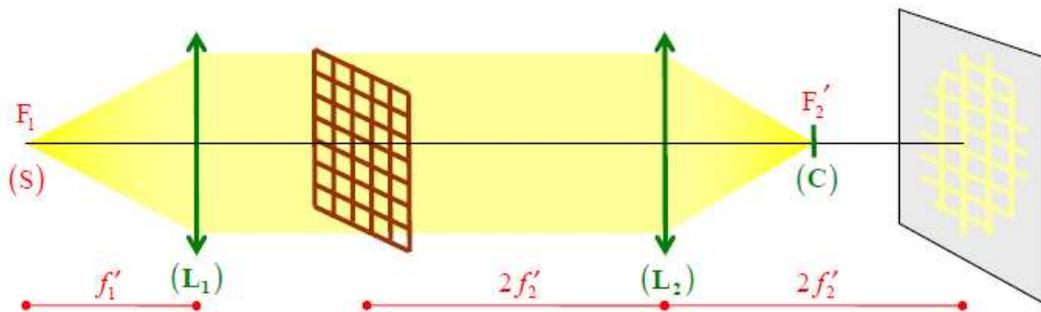
#### b) Strioscopie

Un obstacle très structuré (une grille serrée, une plume d'oiseau) est éclairé par un faisceau lumineux spatialement cohérent, par exemple un faisceau cylindrique issu d'une source ponctuelle ( $S$ ) placée au foyer d'une lentille  $L_1$ . À l'aide d'une deuxième lentille  $L_2$ , on forme l'image de l'obstacle sur un écran. Nous observons alors une image, conforme aux prévisions de l'optique géométrique, de l'ombre de l'objet grille sur l'écran.

Toujours selon les lois de l'optique géométrique, le faisceau lumineux passe par le foyer image  $F'_2$  de la lentille  $L_2$ , conjugué de la source ( $S$ ) à travers les deux lentilles  $L_1$  et  $L_2$ .



Expérience 1 : image de l'ombre d'une grille sur un écran



Expérience 2 : lumière diffractée par une grille sur un écran

FIGURE 3 -

Interposons en  $F_2'$  un cache (C) censé intercepter la totalité du flux lumineux. Nous constatons alors que la partie la plus importante du flux lumineux est effectivement absorbée par le cache et le cône de lumière n'éclaire plus l'écran. Cependant, il apparaît alors sur l'écran une trace lumineuse dessinant les contours de l'obstacle. Cette lumière, qui n'est pas passée par le foyer image  $F_2'$ , n'obéit donc pas aux lois de l'optique géométrique : nous dirons qu'il s'agit de lumière diffractée.

Cette expérience montre que les bords de l'obstacle éclairé par la source (S) deviennent eux-mêmes sources de lumière. Un examen plus attentif nous montre que cette lumière diffractée est aussi présente dans la première expérience, mais elle n'apparaissait pas de façon évidente du fait de l'éclairement intense du fond de l'écran : la lumière diffractée ne représente que quelques pour cent du flux lumineux total, l'essentiel du flux se retrouvant dans l'image géométrique.

De même, si l'on revient à l'expérience de la fente éclairée par un laser, on peut imaginer que chaque point éclairé de la fente émette à son tour une onde. Les ondes émises par les différents points interfèrent alors sur l'écran. Cela expliquerait les zones lumineuses et les zones sombres observées.

Remarque

Du point de vue de l'électromagnétisme, le champ électrique de l'onde lumineuse met en vibration les électrons libres au niveau de l'obstacle, générant ainsi des courants. Ces courants, génèrent à leur tour un champ électromagnétique qui se superpose au précédent. On observe alors la superposition de l'onde lumineuse incidente et de l'onde "émise" par l'obstacle : c'est l'onde diffractée.

## I.2. Modèle des ondelettes d'Huygens

### a) Historique

Huygens, astronome, physicien et mathématicien Hollandais du XVII<sup>e</sup> siècle se distingue particulièrement par ses désaccords exprimés avec Newton à propos de l'interprétation du phénomène lumineux. Newton était l'apôtre du modèle corpusculaire par lequel il expliquait avec succès les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière. Huygens lui opposa une interprétation ondulatoire dont il montra qu'elle permettait de rendre compte tout aussi bien de la réfraction tout en permettant une meilleure interprétation d'autres phénomènes et en particulier de la diffraction.

En 1690, Huygens publie son traité de la lumière où il énonce le principe selon lequel la lumière se propage de proche en proche, chaque point de l'espace atteint par l'onde de lumière devenant lui-même émetteur d'une ondelette, l'ensemble de ces ondelettes constituant le nouveau front d'onde.

### b) Analogie hydraulique

Huygens a observé des phénomènes de diffraction avec des ondes hydrauliques, comme celles générées par la chute d'un petit objet dans l'eau. Si la surface du liquide est déformée localement, elle tend à revenir à l'équilibre. Le retour à l'équilibre perturbe les points voisins qui, à leur tour, se retrouvent hors-équilibre.

Comme le mouvement de la surface se transmet de proche et proche, on peut supposer que l'on obtiendrait la même onde en supposant que les points atteints par l'onde incidente se comportent comme des sources secondaires émettant des "ondelettes" sphériques dont la superposition reconstitue l'onde réelle.

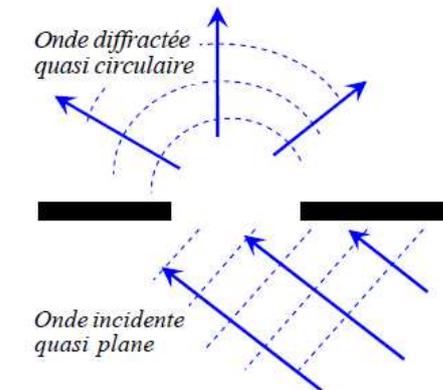
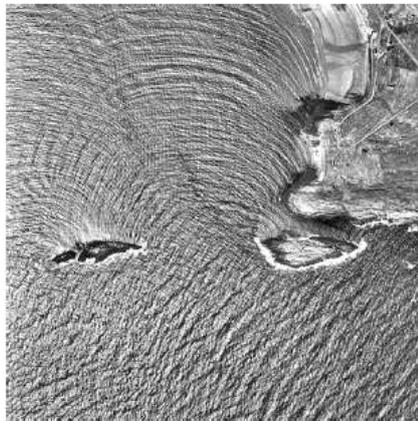


FIGURE 4 – Diffraction de vagues au passage entre une pointe et une île.

### c) Vers le principe de Huygens-Fresnel

L'idée d'Huygens a été étendue à ce domaine optique, en assimilant la lumière à une onde. Chaque point d'une surface d'onde atteinte par la lumière se comporte comme une source secondaire émettant une onde. L'enveloppe de ces ondes secondaires constitue alors une nouvelle surface d'onde et l'onde se propage de proche en proche.



FIGURE 5 –

Huygens ne possédait pas à cette époque d'outil mathématique suffisamment élaboré pour énoncer son principe en terme d'interférences : le concept de phase était absent dans son argumentaire.

*Remarque*

*Contrairement aux ondes à la surface de l'eau, les ondes électromagnétiques peuvent se propager dans le vide et aucun milieu matériel n'est mis en mouvement de vibration par le champ incident.*

Fort de la théorie ondulatoire de la lumière développée par Thomas Young, Fresnel publie en 1818 une théorie ondulatoire de la lumière dans laquelle il expose son interprétation des phénomènes de diffraction. Il retrouve les idées déjà énoncées par Huygens 130 ans plus tôt en y ajoutant l'idée que les ondelettes diffractées interfèrent entre elles constructivement ou destructivement selon leurs phases. Il a ainsi réussi à interpréter plusieurs résultats expérimentaux encore très mal compris.



FIGURE 6 –

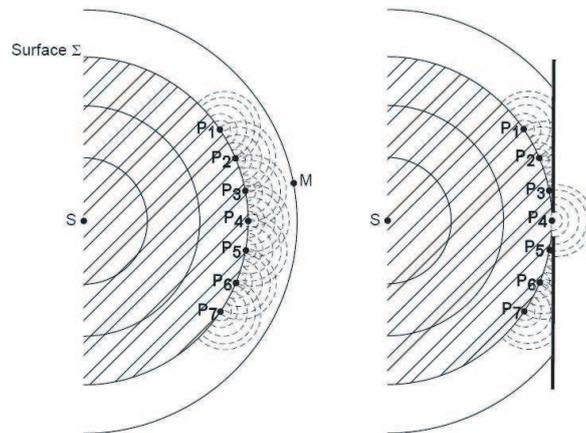


FIGURE 7 – Illustration du principe d'Huygens-Fresnel.

En particulier, Fresnel put prédire qu'en interposant un cache circulaire sur le trajet d'un rayon lumineux, il apparaîtrait un point lumineux au centre de la figure de diffraction. Poisson, convaincu du contraire, refit les calculs et démontra qu'il n'en était rien. L'expérience valida le raisonnement de Fresnel et souligna une erreur de calcul dans la démarche de Poisson. Ce point brillant fut alors appelé, peut-être par dérision, point de Poisson, et permit d'établir de façon sûre la théorie de la diffraction proposée par Fresnel.

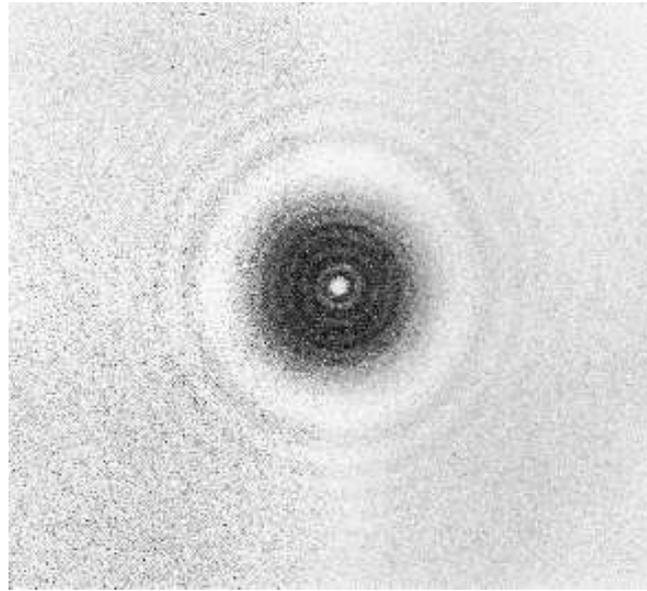


FIGURE 8 – Point de Poisson. Lorsqu'on interpose un cache circulaire sur le trajet d'un rayon lumineux, il apparaît un point lumineux au centre.

### I.3. Principe de Huygens-Fresnel

#### a) Énoncé

##### Principe de Huyens-Fresnel

1. Tout point  $P$  d'une surface  $\Sigma$ , réelle ou fictive, atteinte par la lumière issue d'une source ponctuelle monochromatique  $S$  peut être considérée comme une source secondaire émettant une onde sphérique.
2. L'amplitude de cette onde est proportionnelle à celle de l'onde incidente et à l'aire  $dS_P$  autour de  $P$ , sa phase et sa pulsation étant celles de l'onde incidente.
3. Les différentes sources secondaires atteintes par la lumière incidente sont cohérentes entre elles et interfèrent entre elles.

##### Remarque

*La diffraction est un phénomène d'interférences impliquant une infinité continue d'ondes.*

#### b) Expression de l'amplitude diffractée

L'expression de l'onde primaire émise par une source ponctuelle  $S$  est donnée en notation complexe par :

$$\underline{s}_i(P, t) = \frac{A}{SP} e^{i[\omega t - 2\pi(SP)/\lambda_0 - \varphi_S]} = s_0(P) e^{i(\omega t - \varphi_P)} = \underline{s}_0(P) e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{s}_0(P) = s_0(P) e^{-i\varphi_P}$$

Toute surface élémentaire  $dS_P$  de la surface d'onde  $\Sigma$  émise par le point source  $S$ , centrée en  $P$ , va donc ré-émettre une onde sphérique dont la contribution en un point  $M$  sera :

$$d\underline{s}_P(M, t) = K(P) \frac{\underline{s}_0(P)}{PM} e^{i[\omega t - 2\pi(PM)/\lambda_0]} dS_P$$

La vibration lumineuse en  $M$  est donc obtenue par sommation de toutes les contributions provenant de chaque point de  $\Sigma$ . Sachant que chacune des ondes sphériques émises par les sources secondaires de la surface d'onde  $\Sigma$  reste cohérente avec les autres d'après le principe de Huygens-Fresnel, ces ondes vont potentiellement donner lieu à des interférences, et la vibration lumineuse complexe est la somme des amplitudes complexes (et non pas des intensités, ce qui aurait été le cas si les sources secondaires avaient été incohérentes) :

$$\underline{s}(M, t) = \iint_{P \in \Sigma} d\underline{s}_P(M, t) = \iint_{P \in \Sigma} K(P) \frac{\underline{s}_0(P)}{PM} e^{i[\omega t - 2\pi(PM)/\lambda_0]} dS_P$$

où  $k = 2\pi/\lambda_0$ .

Dans le cas général, cette expression est complexe. Dans la pratique, on utilisera des rayons paraxiaux donc  $K(P) = K$ , indépendant de  $P$ .

**Propriété**

Le principe de Huygens-Fresnel permet d'écrire l'amplitude scalaire diffractée au point  $M$  sous la forme :

$$\underline{s}(M, t) = K \iint_{P \in \Sigma} \frac{\underline{s}_0(P)}{PM} e^{i[\omega t - 2\pi(PM)/\lambda_0]} dS_P$$

**Remarque**

En toute rigueur, l'amplitude de l'onde incidente peut être modifiée en traversant la surface diffractante. On définit alors une transparence complexe par :

$$\underline{t}(P) = \frac{\underline{s}_{P_{ap}}}{\underline{s}_{P_{av}}}$$

avec  $P_{av}$  un point proche de  $P$  juste avant la surface diffractante et  $P_{ap}$  un point juste après la surface diffractante. On doit alors remplacer  $\underline{s}_0(P)$  par  $\underline{t} \underline{s}_0(P)$ .

Pour un écran opaque :  $\underline{t} = 0$  ; pour un trou :  $\underline{t} = 1$  ; dans le cas général :  $\underline{t} = t_0 e^{i\varphi}$ .

Cette expression est délicate à calculer dans le cas général. Elle transforme un problème de diffraction en un problème d'interférences entre ondes sphériques. Nous allons donc nous placer dans un cas où le calcul se simplifie : la diffraction de Fraunhofer où source et point d'observation se situent à l'infini.

## II Diffraction de Fraunhofer (ou diffraction à l'infini)

### II.1. Conditions de Fraunhofer

#### Définition :

La diffraction a lieu dans les conditions de Fraunhofer lorsque :

1. la source  $S$  est ponctuelle et située à l'infini. Nous noterons  $-\vec{u}_S$  le vecteur unitaire pointant dans la direction de la source. Les surfaces d'ondes sont donc des plans perpendiculaires à  $\vec{u}_S$ .
2. Le point d'observation  $M$  est également à l'infini. Nous noterons  $\vec{u}_M$  le vecteur unitaire pointant vers le point  $M$ .

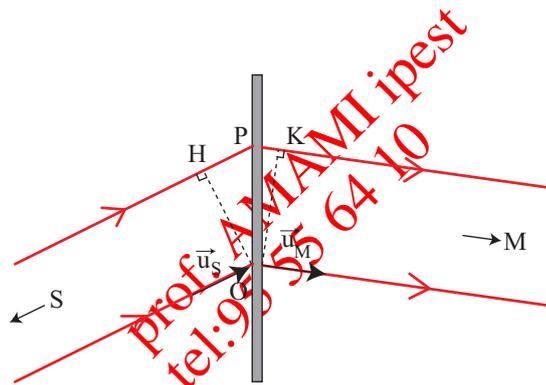


FIGURE 9 – Conditions de Fraunhofer : la source  $S$  et le point d'observation  $M$  sont situés à l'infini.

Afin de réaliser les conditions de Fraunhofer expérimentalement, il suffit :

- de placer une source ponctuelle dans le plan focal objet d'une lentille convergente : on obtient alors une source à l'infini.
- de placer un écran dans le plan focal image d'une lentille convergente : on obtient la projection de l'image à l'infini sur l'écran

### II.2. Expression de l'amplitude diffractée à l'infini

#### a) Simplification de l'amplitude

La source  $S$  et le point  $M$  étant à l'infini, les distances  $SP$  et  $PM$  restent pratiquement constantes pour tout point  $P$  de la surface d'onde  $\Sigma$ , et on peut donc poser :

$$C = K \frac{s_0(P)}{PM} = \frac{K}{PM} \frac{A}{SP} = \text{cte}$$

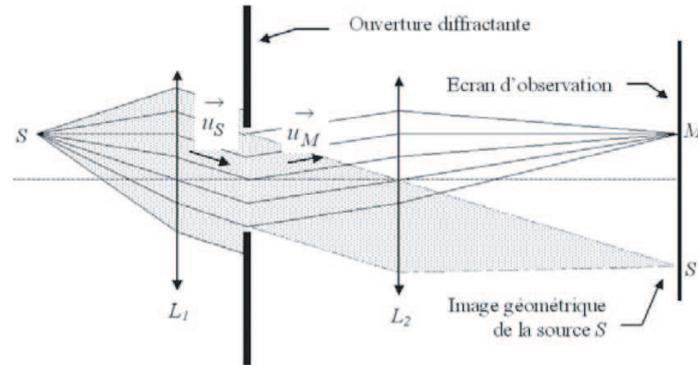


FIGURE 10 – Réalisation pratique des conditions de Fraunhofer.

**b) Simplification de la phase**

Le terme de phase peut s'écrire :

$$e^{i[\omega t - 2\pi(PM)/\lambda_0 - \varphi(P)]} = e^{i[\omega t - 2\pi(SPM)/\lambda_0 - \varphi(S)]}$$

Il n'est pas comme de choisir comme référence de phase la phase au point  $S$  puisque le point est à l'infini : le chemin optique ( $SP$ ) est donc infini. Nous allons donc choisir un point  $O$  fixe de la surface  $\Sigma$  qui servira de référence de phase.

Le principe de Huygens-Fresnel se ré-écrit alors sous la forme suivante, dans les conditions de Fraunhofer :

$$\underline{s}(M, t) = C \iint_{P \in \Sigma} e^{i[\omega t - 2\pi(SPM)/\lambda_0 - \varphi(S)]} dS_P = C e^{-i2\pi(SOM)/\lambda_0 - i\varphi_S} e^{i\omega t} \iint_{P \in \Sigma} e^{-i2\pi[(SPM) - (SOM)]/\lambda_0} dS_P$$

Et en posant  $\delta_{PM} = (SPM) - (SOM)$ , la différence de marche caractérisant l'état d'interférence en  $M$  depuis la source secondaire  $P$ , et en remarquant que

$$\frac{2\pi(SOM)}{\lambda_0} + \varphi_S = \frac{2\pi}{\lambda_0} (SO) + \frac{2\pi}{\lambda_0} (OM) + \varphi_S = \varphi_O + \frac{2\pi}{\lambda} (OM) = \varphi_O(M)$$

on peut finalement écrire :

$$\underline{s}(M, t) = C e^{i(\omega t - \varphi_O(M))} \iint_{P \in \Sigma} e^{-ik\delta_{PM}} dS_P$$

**c) Calcul de la différence de marche**

Le théorème de Malus permet de simplifier l'expression de la différence de marche  $\delta_{PM}$ . Appelons  $H$  et  $K$  respectivement les projetés orthogonaux de  $O$  sur les rayons incidents et émergents passant par le point  $P$  (voir figure 9). On a alors

$$\begin{aligned} \delta_{PM} &= (SPM) - (SOM) \\ &= [(SH) + (HP) + (PK) + (KM)] - [(SO) + (OM)] \\ &= (HP) + (PK) \\ &= (\vec{u}_S - \vec{u}_M) \cdot \vec{OP} \end{aligned}$$

Or  $(HP) = HP = \vec{OP} \cdot \vec{u}_S$  et  $(PK) = \vec{OP} \cdot \vec{u}_M$

d) Amplitude et intensité diffractées dans les conditions de Fraunhofer

Propriété

L'amplitude diffractée dans les conditions de Fraunhofer s'écrit :

$$\underline{s}(M, t) = C e^{i(\omega t - \varphi_0(M))} \iint_{P \in \Sigma} e^{i 2\pi/\lambda_0 (\vec{u}_M - \vec{u}_S) \cdot \vec{OP}} dS_P$$

L'intensité diffractée dans les conditions de Fraunhofer s'écrit :

$$I(M, t) = \langle \underline{s} \cdot \underline{s}^* \rangle = C^2 \left| \iint_{P \in \Sigma} e^{i 2\pi/\lambda_0 (\vec{u}_M - \vec{u}_S) \cdot \vec{OP}} dS_P \right|^2$$

### III Diffraction à l'infini par une ouverture rectangulaire

#### III.1. Position du problème

Nous étudions tout d'abord le cas d'une ouverture diffractante rectangulaire, c'est à dire un écran opaque percé d'une ouverture rectangulaire, de hauteur  $b$  et de largeur  $a$ , centrée en  $O$ .

Les autres notations sont précisées sur la figure ci-dessous. Notamment, on utilisera :

$$\vec{u}_S = \begin{pmatrix} \alpha_S \\ \beta_S \\ \gamma_S \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_M = \begin{pmatrix} \alpha_M \\ \beta_M \\ \gamma_M \end{pmatrix}$$

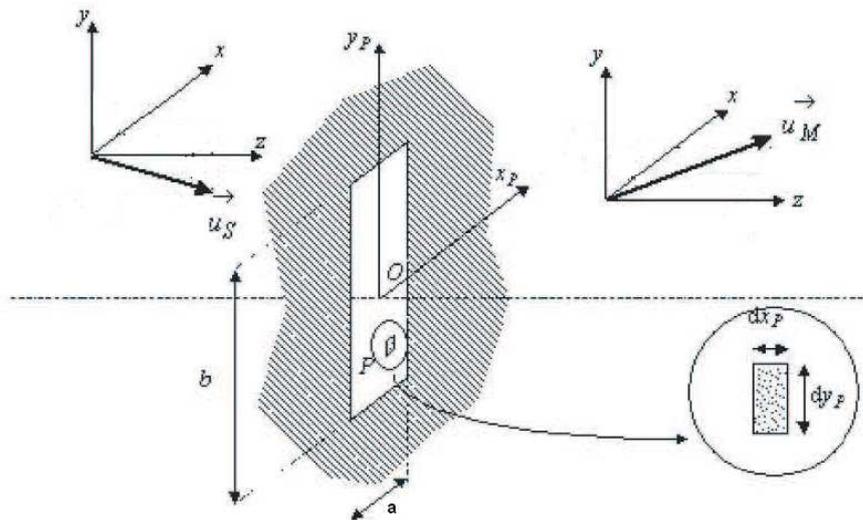


FIGURE 11 – Notations pour l'étude de la diffraction par une ouverture rectangulaire.

Dans la limite des rayons peu inclinés sur l'axe ( $Oz$ ),  $\alpha_i \ll 1$  et  $\beta_i \ll 1$ . Ces angles représentent respectivement les angles entre le rayon projeté sur les plans  $xOz$  et  $yOz$  et l'axe ( $Oz$ ).

Dans le cas du montage avec deux lentilles, on a  $\alpha_M \simeq \frac{x_M}{f'_2}$ ,  $\beta_M \simeq \frac{y_M}{f'_2}$ ,  $\alpha_S \simeq -\frac{x_S}{f'_1}$  et  $\beta_S \simeq -\frac{y_S}{f'_2}$  où  $(x_M, y_M)$  et  $(x_S, y_S)$  sont les coordonnées respectives des points  $M$  et  $S$ .

### III.2. Calcul de l'éclairement

a) Calcul de la différence de marche  $\delta_{PM}$

$$\begin{aligned} \delta_{PM} &= (\vec{u}_M - \vec{u}_S) \cdot \vec{OP} \\ &= \alpha_M x_P + \beta_M y_P + \gamma_M \times 0 - \alpha_S x_P - \beta_S y_P - \gamma_S \times 0 \\ &= (\alpha_M - \alpha_S) x_P + (\beta_M - \beta_S) y_P \end{aligned}$$

b) Calcul de la vibration lumineuse complexe en  $M$

$$\begin{aligned} \underline{s}(M, t) &= C e^{i(\omega t - \varphi_0(M))} \iint_{P \in \Sigma} e^{i 2\pi / \lambda_0 (\vec{u}_M - \vec{u}_S) \cdot \vec{OP}} dS_P \\ &= C e^{i(\omega t - \varphi_0(M))} \iint_{P \in \Sigma} e^{i 2\pi / \lambda_0 [(\alpha_M - \alpha_S)x_P + (\beta_M - \beta_S)y_P]} dx_P dy_P \\ &= C e^{i(\omega t - \varphi_0(M))} \int_{x_P = -a/2}^{x_P = a/2} e^{i 2\pi (\alpha_M - \alpha_S)x_P / \lambda_0} dx_P \int_{y_P = -b/2}^{y_P = b/2} e^{i 2\pi (\beta_M - \beta_S)y_P / \lambda_0} dy_P \end{aligned}$$

Prof. AMAMI-pest  
tel: 95 55 64 10

Remarque

La transformée de Fourier d'une fonction  $f$  est définie par

$$TF[f](u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixu} dx$$

On voit alors que la première intégrale

$$\int_{x_P = -a/2}^{x_P = a/2} e^{i 2\pi (\alpha_M - \alpha_S)x_P / \lambda_0} dx_P = TF[f](u)$$

est la transformée de la fonction  $f$

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } -a/2 < x < a/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

évaluée en  $u = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha_M - \alpha_S)$ .

De même pour l'intégrale en  $y$ .

La fonction  $f$  est appelée fonction fenêtre.

Calculons chacune des intégrales séparément

$$\begin{aligned} \int_{x_P=-a/2}^{x_P=a/2} e^{2i\pi(\alpha_M-\alpha_S)x_P/\lambda_0} dx_P &= \left[ \frac{e^{2i\pi(\alpha_M-\alpha_S)x_P/\lambda_0}}{2i\pi(\alpha_M-\alpha_S)/\lambda_0} \right]_{-a/2}^{a/2} \\ &= \frac{e^{i\pi(\alpha_M-\alpha_S)a/\lambda_0} - e^{-i\pi(\alpha_M-\alpha_S)a/\lambda_0}}{2i\pi(\alpha_M-\alpha_S)/\lambda_0} \\ &= a \frac{\sin \left[ \pi(\alpha_M-\alpha_S)\frac{a}{\lambda_0} \right]}{k(\alpha_M-\alpha_S)\frac{a}{\lambda_0}} \\ &= a \operatorname{sinc} \left[ \pi(\alpha_M-\alpha_S)\frac{a}{\lambda_0} \right] \end{aligned}$$

De même, en changeant  $a$  en  $b$  et  $\alpha$  en  $\beta$

$$\int_{y_P=-b/2}^{y_P=b/2} e^{2i\pi(\beta_M-\beta_S)y_P/\lambda_0} dy_P = b \operatorname{sinc} \left[ \pi(\beta_M-\beta_S)\frac{b}{\lambda_0} \right]$$

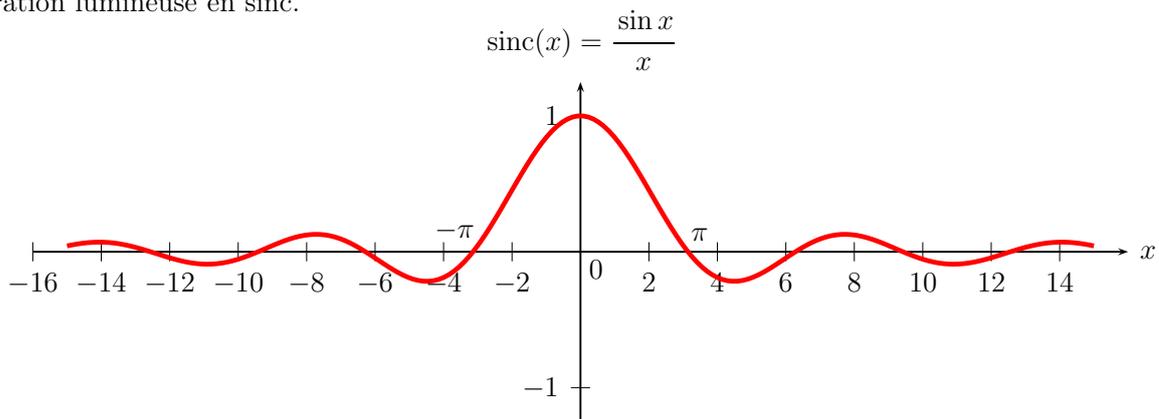
On en déduit

$$\underline{\underline{\underline{s}(M, t) = C e^{i(\omega t - \varphi_O(M))} ab \operatorname{sinc}(u) \operatorname{sinc}(v)}}}$$
 avec  $\begin{cases} u = \frac{\pi a(\alpha_M - \alpha_S)}{\lambda} \\ v = \frac{\pi b(\beta_M - \beta_S)}{\lambda} \end{cases}$

**c) La fonction sinus cardinal**

La fonction sinus cardinal a déjà été rencontrée dans le cas d'un dispositif interférentiel à deux ondes éclairé par une source polychromatique de spectre rectangulaire. Dans ce cas, la visibilité des interférences varie en sinc .

Ici aussi, le facteur de transmission de la fente a un profil rectangulaire et conduit à une répartition de la vibration lumineuse en sinc.



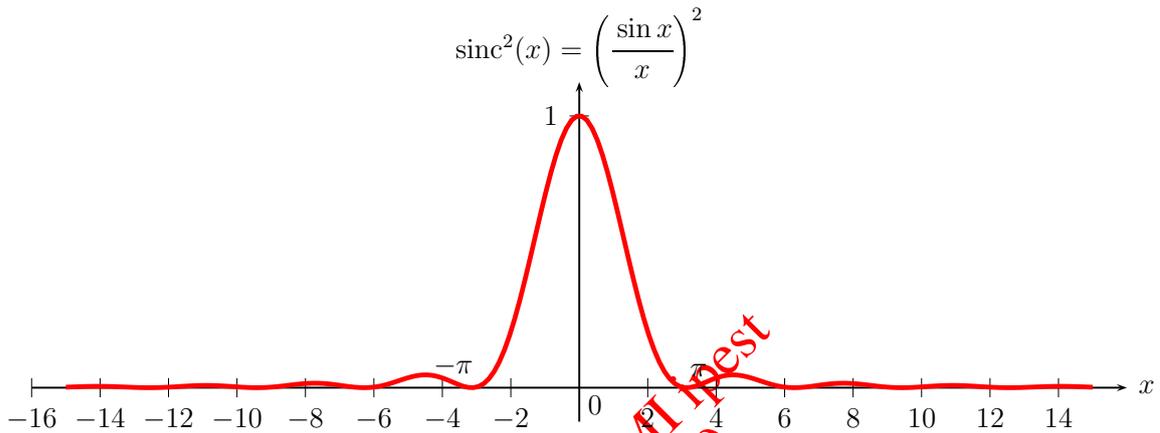
Remarque —————  
 La fonction sinc est la transformée de Fourier de la fonction fenêtre.

d) Calcul de l'intensité en M

L'intensité lumineuse sur l'écran s'obtient en calculant le module de la vibration lumineuse

$$\boxed{\mathcal{I}(M) = C^2 a^2 b^2 \frac{\sin^2(u)}{u^2} \frac{\sin^2(v)}{v^2}}$$
 avec 
$$\begin{cases} u = \frac{\pi a(\alpha_M - \alpha_S)}{\lambda} \\ v = \frac{\pi b(\beta_M - \beta_S)}{\lambda} \end{cases}$$

L'intensité lumineuse fait intervenir la fonction sinc<sup>2</sup> représentée ci-dessous :



III.3. Figure de diffraction

La figure de diffraction est donnée dans la figure ci-dessous dans le cas d'une ouverture carrée.

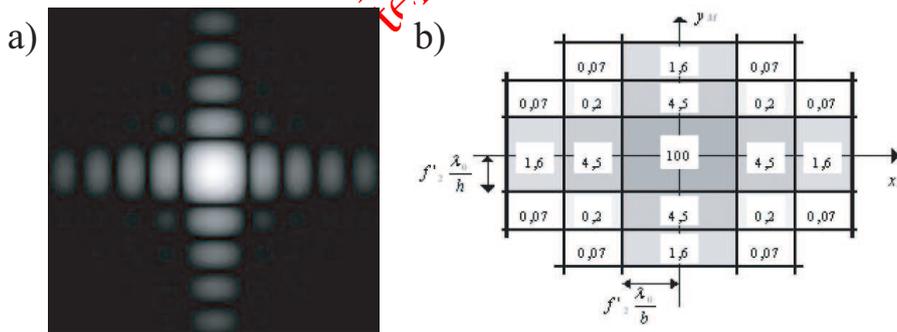


FIGURE 12 – (À gauche) Figure de diffraction dans le cas d'une ouverture rectangulaire. (À droite) Intensité normalisée pour les différentes zones de la figure de diffraction.

Le résultat obtenu est très différent de celui donné par l'optique géométrique. En raison de la diffraction, la lumière est émise dans une vaste gamme de directions.

Cependant, la majeure partie de la lumière est émise dans les directions correspondant au lobe central du sinus cardinal. En effet, le premier maximum secondaire de sinc<sup>2</sup> vaut 0,04, c'est-à-dire que son intensité n'est que 4% de celle du maximum principal. En effet, l'intensité du n<sup>ème</sup> pic secondaire est sensiblement proportionnelle à 1/n<sup>2</sup>.

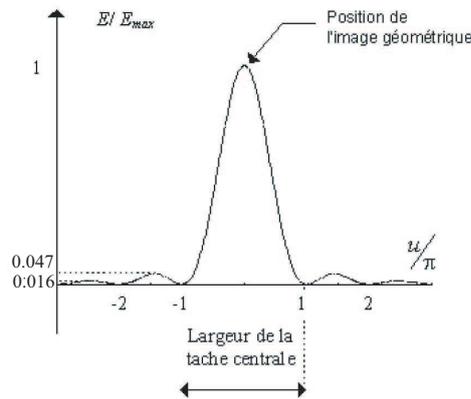


FIGURE 13 – Intensité normalisée suivant l’axe  $x$ .

L’essentiel de l’énergie lumineuse va ainsi dans la tache centrale définie par

$$\begin{cases} u = \frac{\pi a(\alpha_M - \alpha_S)}{\lambda} = 0 \\ v = \frac{\pi b(\beta_M - \beta_S)}{\lambda} = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha_M = \alpha_S \\ \beta_M = \beta_S \end{cases}$$

La tache centrale correspond à l’image géométrique de la source.

On notera que le premier zéro est obtenu sur l’axe horizontal lorsque :

$$\text{sinc}^2(u) = 0 \quad \text{soit} \quad u = \pi$$

On en déduit la position géométrique du premier zéro :

$$u = \frac{\pi a(\alpha_M - \alpha_S)}{\lambda} = \pi \Rightarrow \alpha_M = \alpha_S + \frac{\lambda}{a}$$

**Propriété**

La diffraction par une ouverture rectangulaire de côtés  $a$  et  $b$  fait apparaître une figure "en croix".

- ★ La tache centrale, centrée sur l’image géométrique, est caractérisé par les largeurs angulaires  $\frac{2\lambda}{a}$  et  $\frac{2\lambda}{b}$ .
- ★ Les taches secondaires, essentiellement localisées le long des axes  $x$  et  $y$ , sont deux fois moins larges que le pic central et leur intensité décroît rapidement.

**Remarque**

Dans le cas où  $a \ll \lambda$  : la valeur de  $\alpha_M$  pour laquelle l’éclairement s’annule ne peut être atteinte, et l’éclairement reste très proche de la valeur maximale. On parle alors de diffraction isotrope car l’éclairement diffracté est constant dans toutes les directions.

C’est le cas que nous avons considéré pour les trous d’Young.

Dans le cas où  $a \gg \lambda$  : les sinus cardinaux valent 0 dès que  $\alpha_M \neq \alpha_S$ . On retrouve donc que l’optique géométrique domine.

Exercice

Déterminer le rapport de l'intensité des taches secondaires sur l'intensité au centre de la figure de diffraction par une fente de largeur  $a$  et de longueur  $b$ .

L'intensité est de la forme

$$I = C^2 a^2 b^2 \frac{\sin^2(u)}{u^2} \frac{\sin^2(v)}{v^2} = I_{\max} \frac{\sin^2(u)}{u^2} \frac{\sin^2(v)}{v^2}$$

où  $I_{\max}$  est l'intensité au centre de la figure de diffraction.

Les maxima secondaires de la fonction  $\text{sinc}^2$  correspondent approximativement aux maxima de la fonction  $\sin^2$ . Ainsi  $\text{sinc}^2(x)$  sera maximale en  $x = x_n$  tel que

$$x_n = \frac{2n + 1}{2} \pi$$

Dans ces conditions

$$\text{sinc}^2(x_n) \approx \frac{\sin^2(x_n)}{x_n^2} \simeq \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2n + 1)^2}$$

Numérotions les taches de diffraction par un couple d'entier  $(n, m)$  où  $n$  représente le numéro de la tache selon l'axe  $\vec{u}_x$  et  $m$  le numéro de la tache selon  $\vec{u}_y$ .

numéro de la tache	$(\pm 1, 0)$	$(0, \pm 1)$	$(\pm 1, \pm 1)$	$(\pm 2, 0)$
$\frac{I}{I_{\max}}$	$\frac{4}{9\pi^2} = 4,5\%$	$\frac{4}{9\pi^2} = 4,5\%$	$\left(\frac{4}{9\pi^2}\right)^2 = 0,2\%$	$\frac{4}{25\pi^2} = 1,6\%$

**III.4. Cas d'une fente fine**

Dans le cas d'une fente fine :  $a \ll b$  : la diffraction est alors importante suivant la direction horizontale, et moins importante suivant la direction verticale.

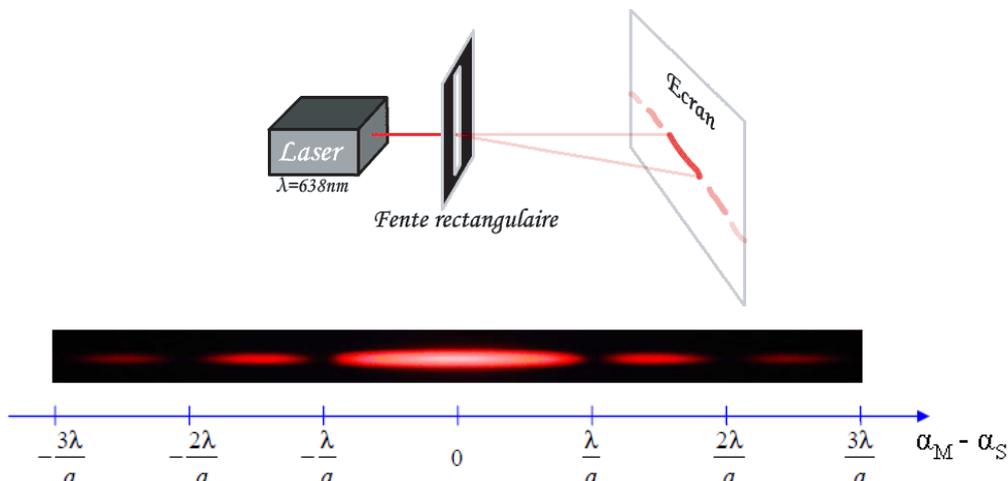


FIGURE 14 – Figure de diffraction obtenue avec une fente verticale.

Si  $b \gg \lambda$  (quelques millimètres en pratique), l'étalement le long de l'axe  $y$  devient négligeable et on obtient :

$$I(x, y) = \begin{cases} I_{\max} \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\pi a(\alpha_M - \alpha_S)}{\lambda_0} \right) & \text{si } \beta_M = \beta_S \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## IV Importance de la diffraction en physique

### IV.1. Diffraction à l'infini par une ouverture circulaire

Le calcul de l'amplitude diffractée par une ouverture circulaire de rayon  $R$  se mène en coordonnées polaires. Le calcul est particulièrement lourd. Cependant, d'après la symétrie du problème par rapport à l'axe *source-ouverture circulaire*, nous pouvons déjà déduire que la figure de diffraction s'apparente à des anneaux centrés sur l'image géométrique  $S'$  de la source  $S$ . Celle-ci est représentée ci-dessous.

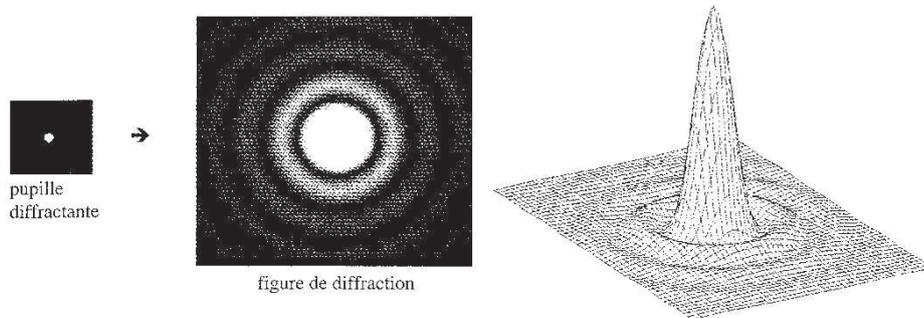


FIGURE 15 – Figure de diffraction obtenue avec une ouverture circulaire.

On admettra que l'essentiel de l'énergie lumineuse est concentrée dans la tache centrale appelée tache d'Airy de rayon angulaire :

$$\theta = \frac{1,22\lambda}{D}$$

c'est-à-dire dans un cône de demi-angle au sommet  $\theta$  et d'axe le rayon lumineux incident.

Remarque

Comme pour la diffraction par une fente, la largeur angulaire de la tache centrale est de l'ordre de

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{R}$$

Nous constatons donc qu'en ordre de grandeur, les résultats sont analogues à ceux obtenus pour une ouverture carrée de côté  $b$ ; en particulier, la limite de l'optique géométrique est obtenue pour  $\lambda \rightarrow 0$  et la limite de l'éclairage isotrope pour  $R \rightarrow 0$ . Le seul élément nouveau est la forme géométrique des franges, qui respecte l'invariance par rotation autour du rayon lumineux incident.

Propriété

La figure de diffraction à l'infini par une ouverture circulaire de diamètre  $D$  est constituée d'anneaux dont l'éclairement décroît très rapidement. Le pic central a un rayon angulaire :  $\theta = \frac{1,22\lambda}{D}$ . Cette figure de diffraction est appelé tache d'Airy.

IV.2. Pouvoir séparateur des instruments d'optique

Lors de l'utilisation d'une lentille pour faire l'image d'un objet, même sans placer de pupille diffractante dans le montage, le diamètre de la lentille va nécessairement limiter le champ optique et jouer le rôle d'ouverture diffractante de rayon  $R$ .

Propriété

L'image d'un point n'est donc jamais un point, mais une tache limitée par la diffraction.

Plus le rayon  $R$  de la lentille est grand, plus le rayon de la tache d'Airy est petit, et donc meilleures sont les conditions de stigmatisme de l'instrument utilisé (c'est notamment ce qui explique le diamètre important des télescopes utilisés pour faire de l'astronomie).

La diffraction joue un rôle déterminant dans la capacité d'un instrument à distinguer deux points lumineux séparés d'une distance angulaire  $\Delta\theta$ . Cette caractéristique est appelée le pouvoir séparateur d'un instrument d'optique.

Il existe un critère quantitatif permettant de caractériser la limite de résolution d'un instrument d'optique appelé le critère de Rayleigh : on peut distinguer deux points jusqu'à la limite où le premier zéro d'une tache d'Airy correspond avec le maximum de l'autre tache d'Airy.

Critère de Rayleigh

Deux points sont discernables ou résolus si la distance entre les deux taches d'Airy associées est supérieure à la distance entre le premier zéro d'une tache d'Airy et le maximum de l'autre.

Remarque

Lorsqu'on utilise un système optique, assimilable à une lentille de focale  $f'$ , deux images  $A$  et  $B$  sont discernables si :

$$AB > \Delta\alpha_{\text{lim}} f' = \frac{1,22\lambda f'}{D}$$

où  $\Delta\alpha$  est la largeur angulaire de la tache centrale de diffraction. Le rapport  $f'/D$  est généralement de l'ordre de 1. On en déduit que les dimensions des plus petits détails discernables avec un instrument d'optique sont de l'ordre de la longueur d'onde la lumière utilisée. Pour étudier des objets plus petits, il faut avoir recours à des rayonnements de plus faible longueur d'onde : rayons X, microscopie électronique ...

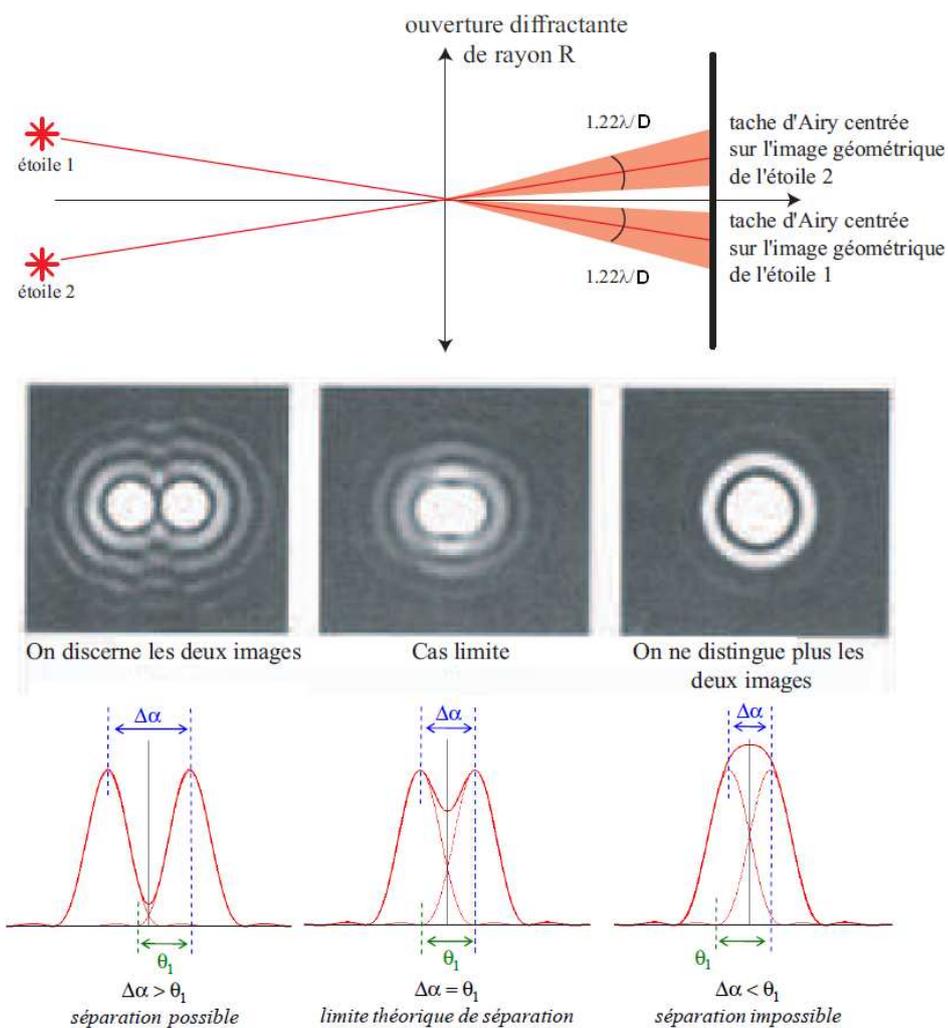


FIGURE 16 – Le pouvoir séparateur de tout instrument d'optique est limité par la diffraction.

### IV.3. Interférences et diffraction sur l'exemple des fentes d'Young

Nous avons précisé dans le chapitre sur les interférences par division du front d'onde que la diffraction jouait un rôle important pour permettre d'observer des interférences avec les fentes d'Young.

Nous cherchons maintenant à obtenir l'expression de l'intensité diffractée dans ce dispositif.

Considérons deux fentes d'Young écartée d'une distance  $d$  dans la direction  $Ox$  et très longues dans la direction  $Oy$ . Les fentes ont une largeur  $a$ .

Pour simplifier, on se placera dans le cas de l'incidence normale ( $\alpha_S = \beta_S = 0$ ) et on notera

$$\vec{u}_M = \alpha \vec{u}_x + \beta \vec{u}_y + \gamma \vec{u}_z$$

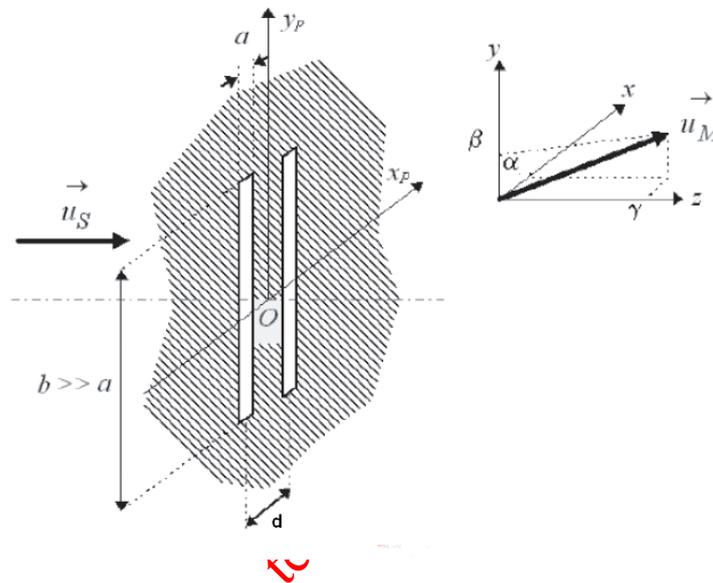


FIGURE 17 – Diffraction à l'infini par deux fentes fines.

Le principe de Huygens-Fresnel donne :

$$\begin{aligned} \underline{s}(M, t) &= \underline{C} \left[ \iint_{\text{fente 1}} e^{2i\pi/\lambda_0} \vec{u}_M \cdot \overrightarrow{OP_1} dS_{P_1} + \iint_{\text{fente 2}} e^{2i\pi/\lambda_0} \vec{u}_M \cdot \overrightarrow{OP_2} dS_{P_2} \right] \\ &= \underline{C} b \left[ \int_{-d/2-a/2}^{-d/2+a/2} e^{2i\pi/\lambda_0} \alpha x_{P_1} dx_{P_1} + \int_{d/2-a/2}^{d/2+a/2} e^{2i\pi/\lambda_0} \alpha x_{P_2} dx_{P_2} \right] \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable  $u = x_{P_1} + d/2$  dans la première intégrale et  $u = x_{P_2} - d/2$  dans la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned} \underline{s}(M, t) &= \underline{C} b \int_{-a/2}^{a/2} [e^{2i\pi/\lambda_0} \alpha(u-d/2) + e^{2i\pi/\lambda_0} \alpha(u+d/2)] du \\ &= \underline{C} b \left[ \int_{-a/2}^{a/2} e^{i2\pi\lambda_0} \alpha u du \right] [e^{i\pi\alpha d/\lambda_0} + e^{-i\pi\alpha d/\lambda_0}] \\ &= 2ab \underbrace{\underline{C} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda_0}\right)}_{\text{diffraction}} \underbrace{\cos\frac{\pi\alpha d}{\lambda_0}}_{\text{interférences}} \end{aligned}$$

Finalement,

$$I(M) = 2a^2b^2|\underline{C}|^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda_0}\right) \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\alpha d}{\lambda_0}\right)\right]$$

L'intensité correspond au produit de l'intensité diffractée par un des motifs multipliée par le terme d'interférences à deux ondes. Étant donné que les fentes sont fines, c'est à dire que  $\frac{1}{d} < \frac{1}{a}$ , c'est le phénomène de diffraction qui joue le rôle d'enveloppe dans la figure de l'éclairement puisque les premiers zéros sont obtenus pour chacune des contributions pour :

- \*  $\alpha_M = \frac{\lambda}{a}$  pour la diffraction.
- $\alpha_M = \frac{\lambda}{d}$  pour les interférences.

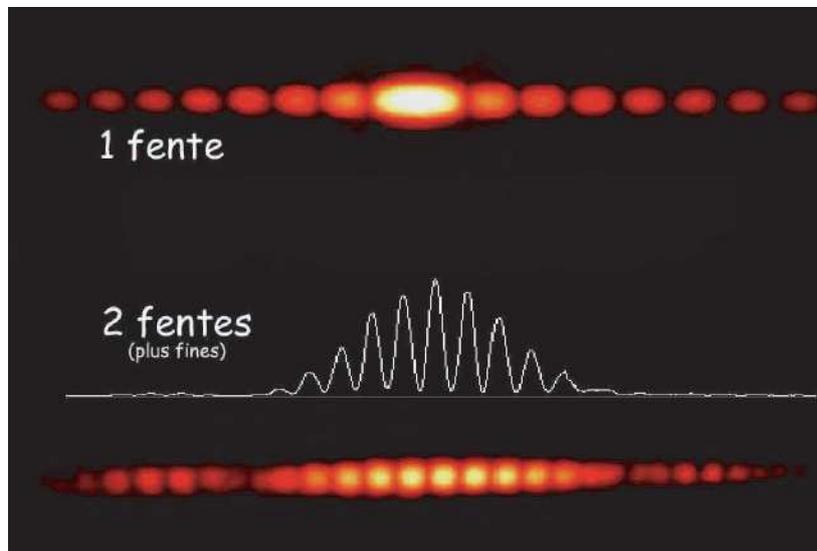


FIGURE 18 – Comparaison entre les figures de diffraction obtenues avec une et deux fentes fines.

On admettra que le résultat précédent se généralise à l'éclairement obtenu par diffraction par  $N$  motifs identiques translétés :

$$\mathcal{I}(M) = \underbrace{I(M)_{diff}}_{\text{diffraction pour un motif}} \times \underbrace{I_N(M)/I_0}_{\text{terme d'interférences à } N \text{ ondes}}$$

#### Propriété

Lorsqu'un motif diffractant est répété, l'intensité diffractée à l'infini est celle d'un seul motif multipliée par le terme d'interférences entre les différents motifs.

#### IV.4. Ondes non lumineuses

La diffraction est un phénomène très général qui concerne tout type d'onde :

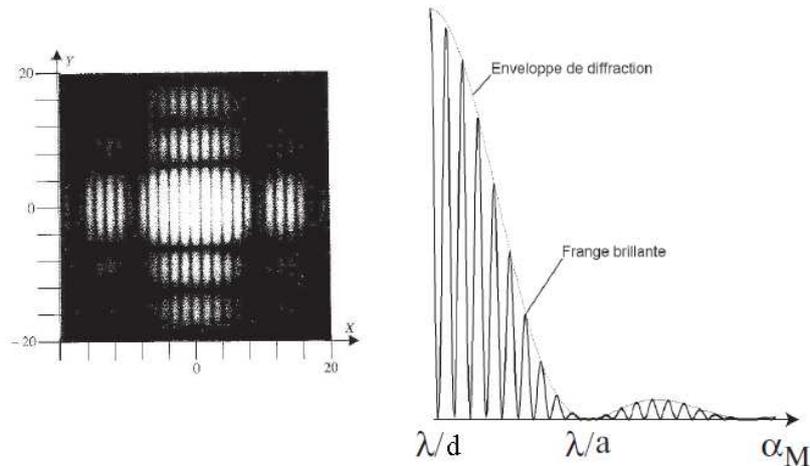


FIGURE 19 – (À gauche) Diffraction à l'infini par deux ouvertures rectangulaires. (À droite) Profil de l'éclairement suivant une des directions principales de la figure de diffraction par une ouverture rectangulaire.

- ★ Diffraction d'ondes sonores : quand une porte est entrouverte et qu'un bruit a lieu en dehors de la pièce, le bruit est entendu dans toute la pièce. Par contre, fermer la porte atténue grandement ce bruit. Lors du passage au niveau de la porte, l'onde sonore est diffractée et atteint une grande partie de la pièce. Le facteur adimensionné caractéristique de la diffraction  $\lambda/a$  est ici de l'ordre de 1, ce qui explique que la diffraction se fasse de façon isotrope.
- ★ Diffraction des rayons X dans la matière : la matière cristalline est constituée d'une disposition régulière de particules. Un rayonnement électromagnétique peut être diffracté par cette structure dans une direction différente de celle de l'optique géométrique si la longueur d'onde est de l'ordre de la distance entre deux particule, soit environ 1 nm. Ce domaine correspond aux rayons X.
- ★ Diffraction des ondes radio d'une longueur d'onde de l'ordre du km : ce type d'ondes est bien diffracté par le relief et les stations radio correspondantes (bande AM) peuvent être captées en des zones non directement couvertes par l'antenne. En revanche, les stations FM, de longueur d'onde de l'ordre du mètre, sont très peu diffractées par le relief et la présence d'une antenne est nécessaire pour les capter.

# Réseaux plans

Un réseau est constitué par la répétition périodique d'un motif diffractant, comme par exemple une fente. Les interférences entre les rayons issus des nombreux motifs successifs privilégient alors précisément certaines directions dans lesquelles l'énergie lumineuse est envoyée. Ce chapitre traite de la diffraction de la lumière par un réseau ainsi que de ses applications.

## I Réseaux de diffraction

### I.1. Définition

#### Définition :

On appelle réseau de diffraction une surface plane diffractante, soit par réflexion soit par transmission, constituée d'un motif reproduit périodiquement dans une des directions du plan.

#### Propriété

Un réseau est défini par son nombre total de traits  $N$  et par son pas  $a$  qui est la période spatiale du motif. La largeur totale du réseau a donc pour valeur  $Na$ .

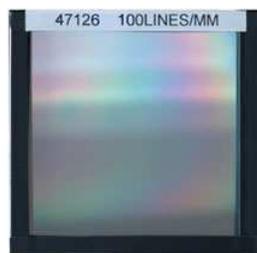


FIGURE 1 – Réseaux de diffraction à 100 traits par cm et à 80 traits par cm.

### I.2. Formule des réseaux

Nous nous limiterons à l'étude des réseaux par transmission constitués d'un très grand nombre  $N$  de fentes fines parallèles ("traits"), identiques et équidistantes. Les différentes ondes émises par ces  $N$  fentes interfèrent entre elles.

Pour pouvoir observer de la lumière dans une direction  $\theta_M$ , il faut que les ondes interfèrent constructivement dans cette direction. Pour cela, il faut que leur différence de marche soit un multiple de  $\lambda$ , c'est-à-dire que leur déphasage soit un multiple de  $2\pi$ .

Or le déphasage entre deux rayons successifs vaut, avec les notations de la figure ci-dessous

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi a [\sin(\theta_M) - \sin(\theta_S)]}{\lambda} \quad (\text{déphasage entre deux rayons successifs})$$

La lumière est essentiellement émise dans les directions telles que ce déphasage soit un multiple de  $2\pi$  soit :

$$\varphi = 2\pi p \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z} \quad (\text{interférences constructives entre deux rayons successifs})$$

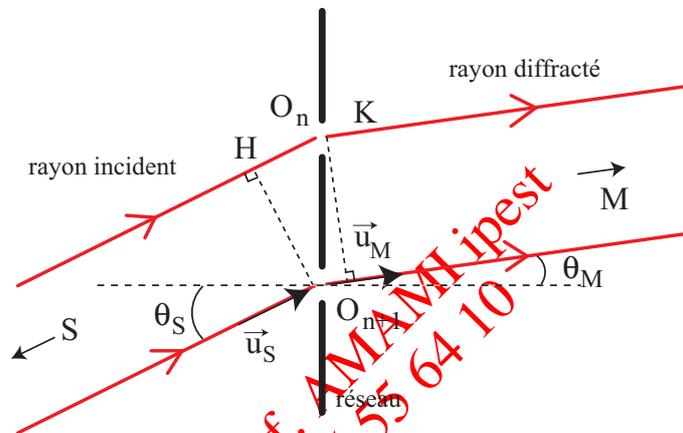


FIGURE 2 – Illustration de la formule des réseaux.

On obtient alors les principales directions d'émission de la lumière diffractée :

$$\sin(\theta_M) - \sin(\theta_S) = \frac{p\lambda}{a} \quad p \in \mathbb{Z}$$

**Formule des réseaux**

Pour que la lumière diffractée par un réseau dans une direction  $\theta_M$  soit observable, il faut que les interférences entre les ondes issues de deux motifs successifs soient constructives. On a alors :

$$\sin \theta_M - \sin \theta_S = \frac{p\lambda}{a} \quad p \in \mathbb{Z}$$

où  $p$  est appelé ordre d'interférences.

Remarque

- ★ En réalité, la figure d'interférence des réseaux est modulée par la diffraction par la fente élémentaire du réseau. Néanmoins, comme les fentes sont très fines, on supposera que la figure d'interférences est contenue dans une figure de diffraction très large.
- ★ Il existe également des réseaux par réflexion : la formule des réseaux est alors légèrement modifiée.
- ★ Les irisations observées en éclairant un CD ou un DVD sont des interférences obtenues avec un réseau par réflexion. Ces disques jouent le rôle de réseaux car l'information est enregistrée en spirale par des creux et des bosses sur des pistes de largeur très fine régulièrement espacées. On vérifie bien que seulement 3 ordres sont visibles avec un DVD alors qu'on peut en voir 5 dans le cas du CD puisque le pas d'un DVD est plus faible que celui d'un CD.

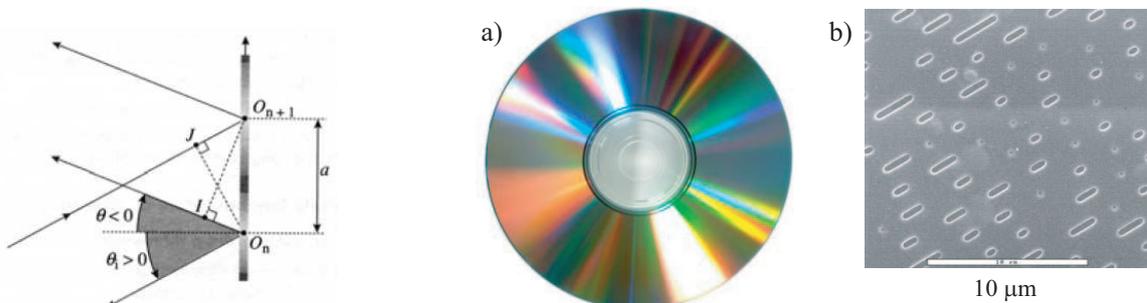


FIGURE 3 – (À gauche) Réseau par réflexion. (À droite) a) Compact disc. b) Vue au microscope à force atomique.

Prof. AM  
tel: 95 55 64

Exercice

1. Quelle est la direction correspondant à l'ordre 0, pour un réseau par réflexion ?
2. Que devient la formule fondamentale donnant l'ordre p pour un réseau par réflexion ?

1. La différence de marche entre les deux rayons n + 1 et n s'écrit :

$$\delta = JO_{n+1} - IO_n = a \sin \theta_i - a \sin(-\theta) = a(\sin \theta_1 + \sin \theta)$$

À l'ordre 0,  $\delta = 0$  donc  $\theta = -\theta_i$ , comme pour la lumière réfléchiée par un miroir plan.

2. Pour un ordre p quelconque, on a alors  $\delta = p\lambda$  donc  $\sin \theta + \sin \theta_i = p \frac{\lambda}{a}$

**I.3. Ordres du réseau**

L'entier relatif p est l'ordre d'interférence associé à la direction  $\theta_p$ .

On peut déterminer graphiquement les directions des différents ordres du réseau. Les directions des rayons émergents sont données par les intersections du cercle de rayon 1 et des droites perpendiculaires au plan du réseau, distantes de  $\frac{\lambda}{a}$  (voir figure 5).

Le nombre d'ordres est bien sûr limité par  $|\sin \theta_p| \leq 1$ .

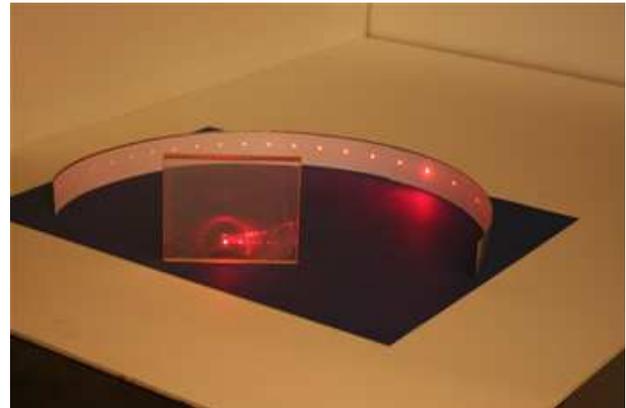
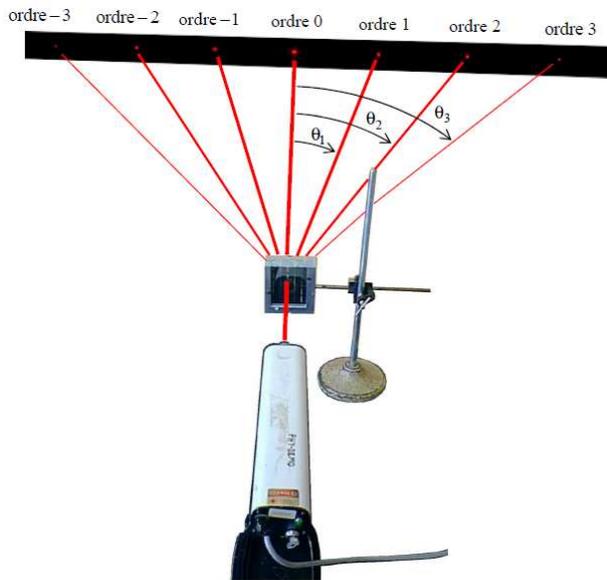


FIGURE 4 – Différents ordres d'un réseau observés au laser.

AMAMI ipost  
5 64 10

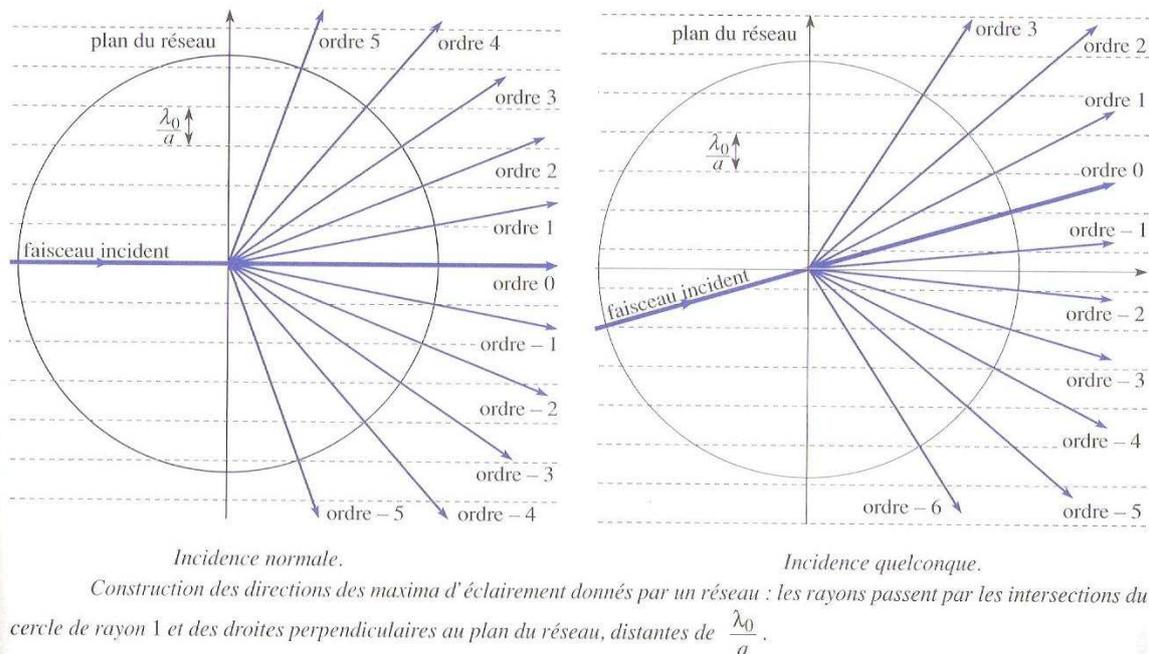


FIGURE 5 – Détermination graphique des directions des différents ordres.

### I.4. Fabrication des réseaux

La finesse de gravure dépend du domaine d'utilisation du réseau. Dans le domaine visible, un bon réseau atteint 2000 traits/mm.

La précision des mesures dépend également du nombre de traits disponibles. À un pas donné, un réseau plus large est plus performant.

Des réseaux précis sont obtenus par gravure mécanique sur une couche mince métallique déposée sur un support de verre poli. La machine à graver parvient à positionner le diamant qui réalise la gravure à 1 nm près. À raison de 1 s par trait, la durée de l'opération de gravure d'un réseau de 1000 traits par millimètres et de plusieurs centimètres de long est de l'ordre de la journée!

Une autre technique consiste à enregistrer des franges d'interférences entre deux ondes planes sur une résine photosensible de très faible grain : ce sont les réseaux holographiques.

Enfin, les réseaux les moins coûteux sont des diapositives obtenues par photographie d'un autre réseau

Qualité	$n$ (m <sup>-1</sup> )	$n$ (Lines Per Inch)	$a$ (μm)	Largeur	N
moyenne		10 <sup>3</sup>	30	2 cm	~2000
Classique	~4.10 <sup>5</sup>	10 <sup>4</sup>	~3	3 cm	~10 000
Excellente	~4.10 <sup>6</sup>	10 <sup>5</sup>	~0,3	4 cm	~40 000

FIGURE 6 – Caractéristiques de différents réseaux.

## II Application à la spectroscopie

### II.1. Minimum de déviation et applications

On remarque que l'angle de déviation de la lumière pour un ordre donné dépend de la longueur d'onde et du pas du réseau. Si l'on connaît le pas du réseau, on peut donc avoir accès à la valeur d'une longueur d'onde inconnue : le réseau joue le rôle d'un spectromètre.

Nous allons détailler les différentes mesures que l'on peut réaliser avec un réseau.

**Définition :**

**On définit l'angle de déviation pour l'ordre  $p$  par :**

$$D_p = \theta_p - \theta_i$$

**où  $\theta_i$  est l'angle de la lumière incidente.**

Expérimentalement, on remarque que si  $\theta_i$  augmente, la tache correspondant à l'ordre  $p$  se rapproche de celle de l'ordre 0 ( $\theta_p$  diminue) puis s'éloigne à nouveau : la déviation passe par un minimum.

Exprimons le minimum de déviation  $D_m$ .

Pour un ordre  $p$ , on a  $D_p = \theta_p - \theta_i$  et  $\sin \theta_p = \sin \theta_i + p \frac{\lambda}{a}$ . En différentiant, on obtient :

$$dD = d\theta_p - d\theta_i \quad \text{et} \quad \cos \theta_p d\theta_p = \cos \theta_i d\theta_i$$

On en déduit

$$dD = \left( \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_p} - 1 \right) d\theta_i$$

Au minimum de déviation,  $dD = 0$  donc  $\cos \theta_p = \cos \theta_i$  et, comme  $\theta_p = \theta_i$  correspond à l'ordre 0, on a  $\theta_p = -\theta_i$ .

On obtient finalement :

$$D_m = 2\theta_p = 2 \arcsin \left( \frac{p\lambda}{2a} \right)$$

### Propriété

À l'ordre  $p$ , la déviation passe par un minimum lorsque  $\theta_p = -\theta_i$  et s'écrit :

$$D_m = 2 \arcsin \left( \frac{p\lambda}{2a} \right)$$

### Remarque

Le minimum de déviation dépend non seulement de la longueur d'onde mais aussi de l'ordre d'interférences.

### Remarque

À partir de la mesure du minimum de déviation  $D_m$ , on peut :

- ★ déterminer le pas du réseau  $a$  connaissant la longueur d'onde  $\lambda$  et l'ordre d'interférences  $p$  ;
- ★ déterminer la longueur d'onde d'une radiation inconnue, connaissant le pas du réseau  $a$  et l'ordre d'interférences  $p$ .

## II.2. Dispersion de la lumière par un réseau

Comme la déviation dépend de la longueur d'onde, le réseau est un système dispersif qui va séparer les différentes longueurs d'onde de la lumière incidente.

En différentiant la formule des réseaux à angle d'incidence fixé, on obtient :

$$\frac{d \sin \theta_p}{d\lambda} = \cos \theta_p \frac{d\theta_p}{d\lambda} = \frac{p}{a}$$

On en déduit

$$\boxed{\frac{d\theta_p}{d\lambda} = \frac{p}{a \cos \theta_p}}$$

Comme  $\frac{d\theta_p}{d\lambda} > 0$  pour  $p > 0$ , on remarque que les grandes longueurs d'onde sont plus déviées : le rouge est donc plus dévié que le bleu.

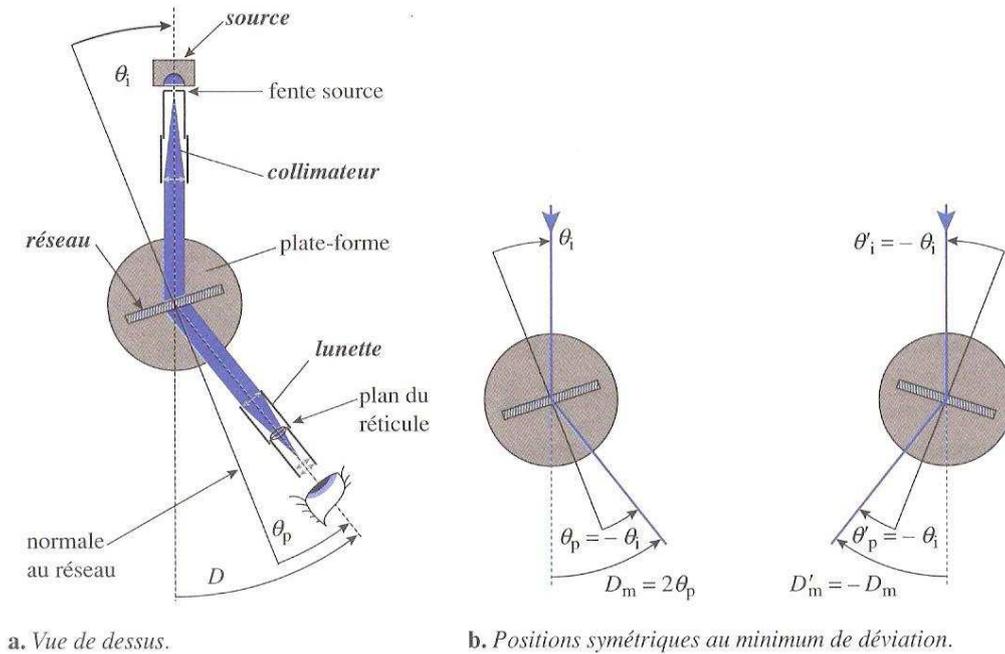


FIGURE 7 – Mesure du minimum de déviation au goniomètre.

Remarque

En spectroscopie à prisme, c'est l'inverse : le bleu est plus dévié que le rouge.

De plus, si  $p$  augmente,  $\frac{d\theta_p}{d\lambda}$  augmente donc les ordre élevés sont plus dispersifs.

Enfin, si  $a$  diminue,  $\frac{d\theta_p}{d\lambda}$  augmente donc un réseau plus fin est plus dispersif.

Propriété

- ★ Pour un réseau, la déviation de la lumière est d'autant plus importante que :
- ★ la longueur d'onde est élevée (rouge plus dévié que le bleu) ;
- ★ l'ordre d'interférences est élevé ;
- ★ le pas du réseau est faible.

Il se peut parfois que les ordres se recouvrent (un ordre commence alors que le précédent n'est pas achevé soit  $\theta_{min}(k+1) < \theta_{max}(k)$ ) : c'est le cas dans la figure ci-dessous pour les ordres  $m = -2$  et  $m = -3$ .

La photographie ci-dessous représente le spectre de l'étoile Véga de la constellation de la Lyre. Elle est réalisée avec un appareil de photographie numérique dont la cellule CCD est placée dans le plan focal de l'objectif d'un télescope. Un réseau de transmission de 100 traits par millimètre ( $a = 10$  nm) est inséré perpendiculairement à l'axe optique du télescope, immédiatement avant la formation de l'image dans le plan focal.

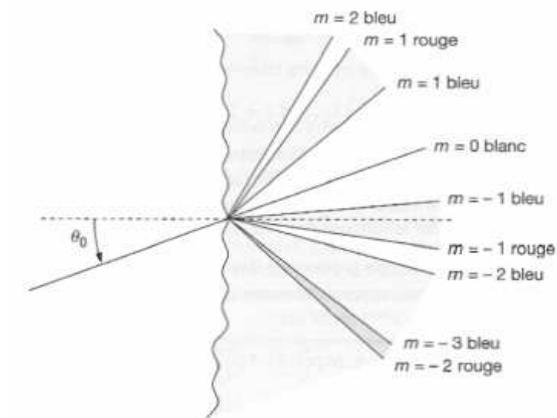


FIGURE 8 – Recouvrement des ordres.

prof. AMAMI ipesit  
tel:95 55 64 10

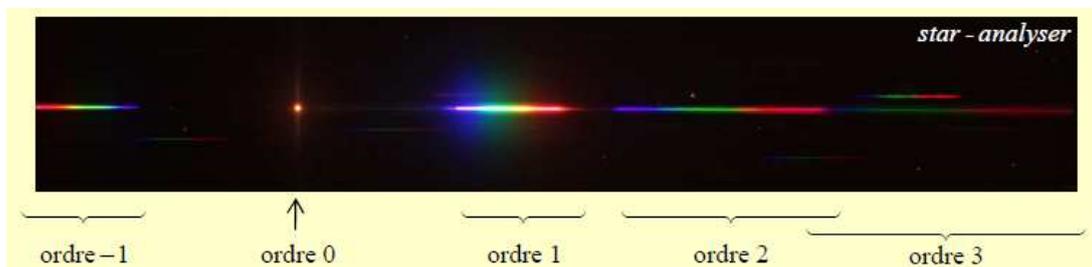


FIGURE 9 – Spectre de l'étoile Véga.

### II.3. Pouvoir séparateur d'un réseau

#### Définition :

La résolution d'un appareil mesure sa capacité à distinguer deux raies de longueurs d'onde proches  $\lambda$  et  $\lambda + \Delta\lambda$ . Si  $\Delta\lambda$  est l'écart minimal entre deux raies discernables, le pouvoir de résolution est défini par :

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Considérons un réseau de  $N$  traits éclairé sous l'incidence  $\theta_i$ . D'après la formule des réseaux, deux raies de longueurs d'onde  $\lambda$  et  $\lambda + \Delta\lambda$  sont séparées angulairement de  $\Delta\theta$  avec :

$$\cos \theta_p \Delta\theta = p \frac{\Delta\lambda}{a}$$

On peut montrer que la largeur angulaire  $\delta\theta$  d'un pic d'interférence vérifie :

$$\cos \theta_p \delta\theta = \frac{\lambda}{Np}$$

En appliquant le critère de Rayleigh, on obtient :

$$\Delta\theta > \delta\theta \Rightarrow Np > \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

#### Propriété

Le pouvoir de résolution théorique d'un réseau de  $N$  traits est, à l'ordre d'interférences  $p$  :

$$\mathcal{R} = Np$$

### II.4. Avantages du spectromètre à réseau

Le réseau est préféré au prisme en tant que spectromètre : en effet, la formule des réseaux permet de relier précisément l'angle  $\theta_p$  à la longueur d'onde, sans devoir utiliser une propriété d'un milieu. Pour le prisme, en effet, il est nécessaire de connaître la loi donnant la variation d'indice avec la longueur d'onde. Le pouvoir séparateur est également meilleur avec le réseau qu'avec le prisme.

## **partie III : Thermodynamique**

prof. F. MAMI ipest  
tel:95 55 6410

# Rappels de thermodynamique

La thermodynamique est une généralisation de la mécanique : en effet, cette discipline a pour objet l'étude des aspects mécaniques mais aussi thermiques de systèmes formés d'un très grand nombre d'entités élémentaires (gaz, liquide, plasma, ...).

## I Description d'un système physico-chimique

### I.1. Variables d'état

Considérons une pièce close remplie d'un gaz. Afin de décrire l'état du gaz :

- ★ ou bien on décrit la vitesse et la position de chacune des molécules constituant le gaz (domaine de la physique statistique) ;
- ★ ou bien on décrit le gaz à l'aide de grandeurs macroscopiques moyennes, appelées variables d'état (domaine de la thermodynamique).

#### Exemple

Parmi les variables d'état les plus fréquemment utilisées, on peut citer la température  $T$ , la pression  $P$ , le volume  $V$ , le nombre de particules  $N$ , la masse  $M$  du système, la charge électrique totale  $Q$ , le moment magnétique total  $\vec{M}$ , ...

#### Définition :

On appelle variable d'état d'un système une grandeur moyenne qui caractérise son état macroscopique. Pour un système homogène<sup>a</sup>, on distingue :

Les variables d'état intensives qui sont indépendantes de la taille du système ;

Les variables d'état extensives qui sont proportionnelles à la taille du système.

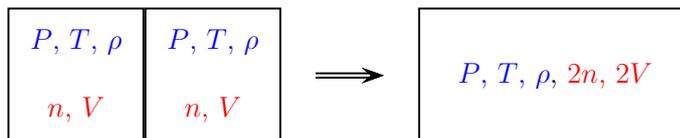
<sup>a</sup>. c'est-à-dire possédant les mêmes propriétés mésoscopiques en chacun de ses points

Exemple

Un récipient est séparé en deux volumes identiques par une cloison. Le même gaz se trouve dans chacun des compartiments et dans le même état (mêmes variables d'état) : pression  $P$ , température  $T$ , masse volumique  $\rho$ , quantité de matière  $n$ , volume  $V$ . On ôte la cloison. Dans l'état final, le système est caractérisé par :

- \* un volume  $2V$  ;
- \* une quantité de matière  $2n$  ;
- \* une pression  $P$  ;
- \* une température  $T$  ;
- \* une masse volumique  $\rho$ .

Le volume et la quantité de matière sont donc des variables extensives tandis que la pression, la température et la masse volumique sont des variables intensives.



## I.2. Équation d'état

Les variables d'état ne sont pas toutes indépendantes. En effet, si l'on chauffe un gaz contenu dans un récipient fermé, la température augmente tandis que le volume et la quantité de matière restent constantes. On constate alors une augmentation de la pression.

### Définition :

Les variables d'état sont reliées par une équation, appelée équation d'état de la forme

$$f(P, V, T, n, Q, \dots) = 0$$

Afin d'établir théoriquement l'équation d'état d'un système, on fait en général des hypothèses sur le type d'interaction microscopique. Pour les gaz, on distingue deux modèles importants : le modèle du gaz parfait et le modèle du gaz de Van der Waals

### a) Modèle du gaz parfait

Dans le modèle du gaz parfait, les molécules n'ont aucune interaction entre elles (en particulier, elles ne s'entrechoquent pas).

**Propriété**

L'équation d'état d'un gaz parfait est

$$PV = nRT \quad \text{équation d'état d'un gaz parfait}$$

où  $P$  est la pression,  $V$  le volume du gaz,  $n$  la quantité de matière (en moles),  $T$  la température et  $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$  la constante des gaz parfaits (constante universelle).

**Remarque**

Ce modèle permet de décrire la majorité des gaz à condition qu'ils soient suffisamment dilués.

**b) Modèle de Van der Waals**

Le modèle de Van der Waals est un modèle plus réaliste qui tient compte des interactions des molécules dans le gaz.

**Propriété**

L'équation d'état d'un gaz de Van der Waals est de la forme

$$\left( P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT \quad \text{équation d'état d'un gaz de Van der Waals}$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes. Le coefficient  $b$  est positif et est appelé covolume.

**Remarque**

Cette équation d'état est de la forme

$$P_{\text{eff}} V_{\text{eff}} = nRT \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_{\text{eff}} = P + n^2 a / V^2 & \text{pression du gaz parfait équivalent} \\ V_{\text{eff}} = V - nb & \text{volume du gaz parfait équivalent} \end{cases}$$

On remarque que si  $a > 0$ , on a  $P_{\text{eff}} > P$ . La pression du gaz est inférieure à la pression du gaz parfait du fait des interactions attractives dans le gaz. De la même manière,  $a < 0$  traduit des interactions moyennes répulsives dans le gaz.

D'autre part,  $b > 0$  est appelé le covolume. C'est le volume moyen qu'occupe une mole de constituants<sup>a</sup>. Le volume effectivement accessible à une particule est donc le volume  $V$  de l'enceinte moins le volume occupé par les autres particules  $nb$ .

<sup>a</sup>. En réalité,  $b$  est proportionnel au volume moyen occupé par une mole, le coefficient de proportionnalité étant de l'ordre de 4.

### I.3. Fonction d'état

**Définition :**

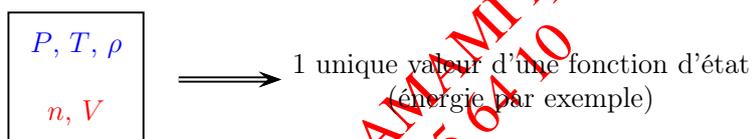
On appelle fonction d'état toute grandeur définie comme une fonction des variables d'état uniquement.

*Exemple*

L'énergie d'un système est une fonction de sa vitesse d'ensemble, de sa température, de son volume ...

**Conséquence**

À un état donné caractérisé par un ensemble de variables d'état correspond une unique valeur d'une fonction d'état.



*Remarque*

Le travail  $W$  ou le transfert thermique  $Q$  ne sont pas des fonctions d'état. En effet, on ne peut pas répondre à la question : "Quel est le travail du système ?" ou "Quel est le transfert thermique du système ?" On parle de travail ou de transfert thermique reçus par le système au cours d'une transformation. Le travail  $W$  et le transfert thermique  $Q$  ne sont donc pas des fonctions d'état.

### I.4. Transformation et état d'équilibre

**Définition :**

Un système physico-chimique est dans un état d'équilibre thermodynamique lorsque ses variables d'état n'évoluent plus.

L'évolution entre deux états d'équilibre peut être due à :

- un échange de chaleur ;

- un échange de travail ;
- un échange de matière (avec l'extérieur ou par réaction chimique).

Pour un système homogène, on distingue différents critères d'équilibre.

**L'équilibre thermique** : le système n'échange plus de chaleur avec l'extérieur. La température du système est constante et s'ajuste à la température extérieure<sup>1</sup>

$$T = \text{cste} \quad \text{et} \quad T = T_{\text{ext}}$$

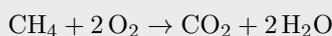
**L'équilibre mécanique** : le système n'échange plus de travail mécanique avec l'extérieur. Son volume est fixé et sa pression s'ajuste à la pression extérieure<sup>2</sup>

$$V = \text{cste} \quad \text{et} \quad P = P_{\text{ext}}$$

**L'équilibre osmotique** : le système n'échange plus de particules ni avec l'extérieur, ni par réaction chimique interne.

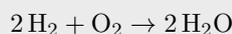
### Exemple

Prenons l'exemple de la réaction



Il n'y a pas de variations de la quantité de matière ( $\Delta\nu = 0$ ) mais un changement de nature des constituants.

Pour la réaction



il y a à la fois variation de la quantité de matière ( $\Delta\nu = -1$ ) et changement de la nature des constituants.

À l'équilibre osmotique, le nombre de particules de chaque espèce est fixé. Ce nombre n'évolue pas car, d'un point de vue énergétique, il est équivalent pour une particule d'appartenir au système ou de le quitter (par réaction chimique ou échange de particules). "L'énergie particulière" pour chaque espèce du système s'ajuste à sa valeur extérieure.

$$\text{Équilibre osmotique} \quad n_i = \text{cste} \quad \text{et} \quad \mu_i = \mu_{i,\text{ext}} \quad \forall \text{ espèce } i$$

"L'énergie par particule"  $\mu_i$  est appelée potentiel chimique de l'espèce  $i$ .

## II Premier principe de la thermodynamique

Considérons un système subissant une transformation dans des conditions d'évolution données. Afin de déterminer l'état final d'un système, il est possible d'appliquer un principe de conservation de l'énergie. Or pour un système thermodynamique formé d'un grand nombre de particules, il faut également prendre en compte une énergie "interne" qui est l'énergie des constituants élémentaires.

1. En fait, la température s'ajuste à la température sur la frontière du système.

2. En fait, la pression s'ajuste à la pression sur la frontière du système.

## II.1. Énoncé

### Premier principe de la thermodynamique

1. À tout système thermodynamique est associé une fonction d'état extensive  $U$ , appelée énergie interne.
2. Cette énergie interne est la somme :
  - de l'énergie cinétique microscopique (énergie d'agitation thermique) ;
  - et de l'énergie potentielle microscopique (énergie d'interaction entre les particules).
3. Au cours d'une transformation quelconque d'un système, la variation de son énergie totale (énergie mécanique + énergie interne) est égale à l'énergie qu'il reçoit.

#### Remarque

L'énergie reçue peut l'être sous forme de travail (mécanique, électrique), de chaleur (mise en contact avec une source de chaleur) ou sous la forme d'un échange de particules (soit avec l'extérieur, soit par réaction chimique).

#### Remarque

Le premier principe de la thermodynamique est un principe de conservation de l'énergie.

## II.2. Formulation mathématique du premier principe

D'un point de vue mathématique, le premier principe prend la forme

$$\begin{aligned} d(E_m + U) &= \delta W + \delta Q \quad \text{pour une transformation infinitésimale} \\ \Delta(E_m + U) &= W + Q \quad \text{pour une transformation finie} \end{aligned}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} E_m \quad \text{est l'énergie mécanique macroscopique} \\ U \quad \text{est l'énergie interne} \\ W \quad \text{est le travail reçu par le système au cours de la transformation} \\ Q \quad \text{est la chaleur reçue par le système au cours de la transformation} \end{array} \right.$$

#### Remarque

Les variations des fonctions d'état sont notées  $d$  (cas infinitésimal) ou  $\Delta$  (cas fini) car elles correspondent à des **différences entre un état initial et un état final**.

Les grandeurs échangées au cours d'une transformation sont notées avec un  $\delta$  (cas infinitésimal) ou sans rien (pas de  $\Delta$  dans le cas fini) car elles ne correspondent pas à une différence entre les états initial et final mais **dépendent du chemin suivi**.

- Généralement, on pourra prendre  $E_m = E_c + E_p = \text{cste}$ .
- Le travail des forces de pression est de la forme

$$\begin{aligned} \delta W_p &= -P_{\text{ext}} dV && \text{pour une transformation violente} \\ \delta W_p &= -P dV && \text{pour une transformation lente (et équilibre mécanique à tout instant)} \end{aligned}$$

Généralement, le travail se décomposera sous la forme

$$\delta W = \delta W_p + \delta W_u \quad \text{où } W_u \text{ est appelé travail utile}$$

Le travail utile correspond au travail reçu autre que celui des forces de pression (travail mécanique ou électrique).

- Le transfert thermique est délicat à calculer. On l'obtient généralement par la relation  $\delta Q = \Delta U - \Delta W$  après avoir exprimé  $\delta U$ .

Remarque

*Par conséquent, le premier principe prendra généralement la forme, pour une transformation lente*

$$dU = \delta W_u - PdV + \delta Q$$

**Définition :**

**On définit l'enthalpie  $H$  d'un système par la relation**

$$H = U + PV$$

**$H$  est une fonction d'état.**

Calculons la variation infinitésimale de  $H$  au cours d'une transformation lente d'un système fermé

$$\begin{aligned} dH &= dU + d(PV) = dU + VdP + PdV \\ &= (\delta W_u - PdV + \delta Q) + VdP + PdV \\ &= \delta W_u + VdP + \delta Q \end{aligned}$$

**Propriété**

**Le premier principe pour un système fermé prend les formes équivalentes, pour une transformation lente**

$$\begin{aligned} dU &= \delta W_u - PdV + \delta Q \\ dH &= \delta W_u + VdP + \delta Q \end{aligned}$$

**On utilisera généralement  $U$  pour des transformations isochores ( $V = \text{cste}$ ) et  $H$  pour des transformations isobares ( $P = \text{cste}$ ).**

### II.3. Expressions de $U$ et $H$

#### a) Cas général

L'énergie interne  $U$  est une fonction d'état : elle dépend *a priori* des variables d'état  $P, V, T, n, \dots$ . Le système étant caractérisé par une équation d'état, on peut exprimer  $P$  en fonction de  $V, T, n, \dots$ . Ainsi

$$U = U(T, V, n)$$

L'énergie interne  $U$  se calcule à partir de la relation différentielle

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,n} dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T,n} dV + \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_{T,V} dn$$

avec

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,n} = C_v & \text{capacité calorifique à volume constant} \\ \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_{T,V} = \mu & \text{(potentiel chimique)} \end{cases}$$

De la même manière, on exprime généralement l'enthalpie  $H$  en fonction de  $P, T$  et  $n$  en éliminant  $V$  à l'aide de l'équation d'état

$$H = H(T, P, n) \Rightarrow \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_{P,n} dT + \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_{T,n} dP + \left( \frac{\partial H}{\partial n} \right)_{T,P} dn$$

avec

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_{P,n} = C_p & \text{capacité calorifique à pression constante} \\ \left( \frac{\partial H}{\partial n} \right)_{T,P} = \mu & \text{(potentiel chimique)} \end{cases}$$

#### b) Cas du gaz parfait

Un gaz parfait vérifie les deux lois de Joule.

##### Définition :

On dit qu'un gaz obéit à la première loi de Joule lorsque son énergie interne ne dépend que de la température

$$U = U(T)$$

On dit qu'un gaz obéit à la deuxième loi de Joule lorsque son enthalpie ne dépend que de la température

$$H = H(T)$$

**Propriété**

Les variations infinitésimales d'énergie interne et d'enthalpie d'un gaz parfait sont de la forme

$$dU = C_v dT = nC_{v,m} dT$$

$$dH = C_p dT = nC_{p,m} dT$$

où  $C_{v,m}$  est la capacité calorifique molaire à volume constant et  $C_{p,m}$  la capacité calorifique molaire à pression constante et  $n$  la quantité de matière du système (en moles). Les capacités calorifiques  $C_{v,m}$  et  $C_{p,m}$  ne dépendent que de la température.

Si  $C_{v,m} = \text{cste}$  et  $C_{p,m} = \text{cste}$ , les variations d'énergie interne et d'enthalpie d'un gaz parfait s'écrivent

$$\Delta U = nC_{v,m} \Delta T$$

$$\Delta H = nC_{p,m} \Delta T$$

**Remarque**

On introduit parfois les capacités calorifiques massiques isochore  $c_v$  et isobare  $c_p$  de sorte que

$$dU = mc_v dT$$

$$dH = mc_p dT$$

où  $m$  est la masse du système.

Les propriétés de  $U$  et  $H$  sont étroitement liées à celles des capacités calorifiques.

**Relation de Mayer pour les gaz parfait**

Les capacités calorifiques molaires d'un gaz parfait vérifient la relation de Mayer

$$C_{p,m} - C_{v,m} = R$$

où  $R$  est la constante des gaz parfaits.

**Conséquence**

En notant  $\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}}$ , on a, pour un gaz parfait

$$C_{v,m} = \frac{R}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_{p,m} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

c) Phase condensée (liquide ou solide)

On supposera généralement les phases condensées incompressibles de sorte que  $V \approx \text{cste} \approx 0$ . On a donc

$$H = U + PV \approx U$$

Propriété

Pour une phase condensée

$$dU \approx dH \approx CdT$$

où  $C$  est la capacité calorifique du système.  $C$  est une grandeur extensive.

Remarque

On introduit généralement la capacité calorifique massique  $c$  (intensive) de sorte que

$$C = mc$$

III Application : compression adiabatique réversible d'un gaz parfaitExercice

On considère un cylindre calorifugé contenant un gaz parfait. Ce cylindre est fermé par un piston mobile également calorifugé. On comprime lentement le gaz. Déterminer une relation entre les variables d'état au cours de la transformation.

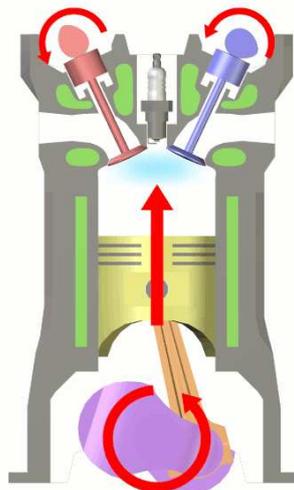


FIGURE 1 – Compression d'un mélange {air + carburant} assimilable à un gaz parfait.

On comprime le gaz de façon lente. Pour une transformation infinitésimale, l'application du premier principe conduit à

$$dU = \delta W + \delta Q$$

avec

$$\begin{cases} dU = nC_{v,m}dT \\ \delta W = -PdV \quad \text{transformation lente} \\ \delta Q = \end{cases}$$

Le premier principe de la thermodynamique avec l'enthalpie s'écrit

$$dH = \delta W_u + V dP + \delta Q + \delta J = \delta W_u + V dP$$

avec

$$\begin{cases} dH = nC_{p,m}dT \\ \delta W_u = 0 \quad \text{pas de travail autre que les forces de pression} \end{cases}$$

On a donc

$$nC_{p,m} dT = V dP \tag{2}$$

En faisant le rapport des équations (1) et (2), on trouve

$$\frac{C_{p,m}}{C_{v,m}} = -\frac{V dP}{P dV}$$

En supposant que  $\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}} = \text{cste}$ , cette équation devient

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V} \Leftrightarrow d \ln P + \gamma d \ln V = 0 \Leftrightarrow d \ln (PV^\gamma) = 0$$

On en déduit la loi de Laplace

$$PV^\gamma = \text{cste} \quad \text{transformation adiabatique réversible}$$

**Propriété**

Un gaz parfait, de coefficient  $\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}}$  constant et soumis à une transformation adiabatique réversible vérifie la loi de Laplace

$$PV^\gamma = \text{cste}$$

**Remarque**

On obtient des relations similaires entre P et T d'une part et T et V d'autre part en utilisant l'équation d'état des gaz parfaits

$$P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste} \quad \text{et} \quad TV^{\gamma-1} = \text{cste}$$

## IV Deuxième principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique est un principe de conservation d'énergie qui n'indique pas le sens des échanges énergétiques. Il faut donc lui adjoindre un principe d'évolution, qui est traduit par le deuxième principe de la thermodynamique.

### IV.1. Énoncé

#### Deuxième principe de la thermodynamique

1. À tout système thermodynamique est associée une fonction d'état extensive  $S$ , appelée entropie.
2. L'entropie d'un système fermé et isolé croît jusqu'à l'établissement d'un état d'équilibre.
3. À l'équilibre, l'entropie du système est maximale.

#### Remarque

*C'est un principe d'évolution.*

La formulation précédente est assez abstraite. C'est pourquoi, le deuxième principe est parfois formulé différemment, suivant l'énoncé ci-dessous.

#### Autre énoncé du deuxième principe

1. À tout système thermodynamique est associée une fonction d'état extensive  $S$ , appelée entropie.
2. Au cours d'une transformation quelconque, la variation d'entropie est la somme de deux termes :

$$dS = \delta S_e + \delta S_c \quad \text{pour une transformation infinitésimale}$$

$$\Delta S = S_e + S_c \quad \text{pour une transformation finie}$$

où

$$\begin{cases} \delta S_e = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}} & \text{est l'entropie échangée} \\ \delta S_c \geq 0 & \text{est l'entropie créée} \end{cases}$$

3. L'entropie créée traduit l'irréversibilité de la transformation

$$\begin{cases} \delta S_c = 0 & \text{transformation réversible} \\ \delta S_c > 0 & \text{transformation irréversible} \end{cases}$$

Remarque

On retrouve l'énoncé précédent. En effet, pour un système fermé et isolé

$$\delta S_e = 0 \quad \text{et} \quad dS = \delta S_c \geq 0$$

L'entropie est une fonction croissante. À l'équilibre,  $dS = 0$  : l'entropie atteint un extremum qui est en fait un maximum.

Remarque

$\delta S_e$  et  $\delta S_c$  sont associées à des transformations ! Ce ne sont donc pas des fonctions d'état. La question :

"Quelle est l'entropie échangée ou créée du système" n'a pas de réponse puisque ces grandeurs dépendent de l'évolution du système. On notera donc

$$\begin{array}{ll} \delta S_e \quad \text{et} \quad \delta S_c & \text{pour une transformation infinitésimale} \\ S_e \quad \text{et} \quad S_c & \text{pour une transformation finie} \end{array}$$

**IV.2. Expression de  $S$  : identité thermodynamique**

Le deuxième principe est un principe très général qui ne fournit pas l'expression de  $S$ . En revanche, l'entropie est une fonction d'état qui s'exprime en fonction des variables d'état  $S = S(T, V, n)$ . Il est donc possible d'exprimer la température  $T$  en fonction de  $S, V$  et  $n$ .

Comme l'énergie interne  $U$  dépend aussi de  $T, V$  et  $n$ , il est possible d'écrire

$$U = U(S, V, n) \quad \text{et} \quad dU = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,n} dS + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,n} dV + \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_{S,V} dn$$

On définit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la température thermodynamique} \quad T_{\text{th}} = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,n} \\ \text{la pression thermodynamique} \quad P_{\text{th}} = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,n} \\ \text{le potentiel chimique thermodynamique} \quad \mu_{\text{th}} = \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_{S,V} \end{array} \right.$$

On admet que les grandeurs thermodynamiques  $T_{\text{th}}, P_{\text{th}}$  et  $\mu_{\text{th}}$  s'identifient aux variables d'état  $T, P$  et  $\mu$  pour le système (ou sur sa frontière intérieure).

Identité thermodynamique

La première identité thermodynamique s'écrit

$$dU = T dS - P dV + \mu dn$$

On utilise parfois l'identité thermodynamique avec  $H = U + PV$ , appelée deuxième identité thermodynamique :

$$dH = T dS + V dP + \mu dn$$

Remarque

C'est l'identité thermodynamique qui permet de calculer  $S$  dans la plupart des problèmes de thermodynamique.

Remarque

La méthode générale pour résoudre un problème de thermodynamique est la suivante :

1. on applique le premier principe  $dU = \delta W + \delta Q$ .
2. On utilise l'expression de  $dU$  et on calcule celle de  $\delta W$ . En général  $\delta W = -P_{\text{ext}}dV$  pour le travail des forces de pression. On en déduit

$$\delta Q = dU - \delta W$$

3. On calcule  $dS$  à partir de l'identité thermodynamique.
4. On calcule  $\delta S_e = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$ .
5. On en déduit l'entropie créée  $\delta S_c = dS - \delta S_e$  et on conclut sur la réversibilité de la transformation.

IV.3. Expression de l'entropie d'un gaz parfait

Considérons un gaz parfait de capacités calorifiques molaires isochore  $C_{v,m}$  et isobare  $C_{p,m}$  constantes. Au cours d'une transformation infinitésimale, l'identité thermodynamique permet d'écrire

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} dV$$

où l'on a posé  $n = \text{cste}$  puisque le système est fermé.

Avec

$$dU = nC_{v,m} dT = \frac{nR}{\gamma - 1} dT \quad \text{et} \quad \frac{P}{T} = \frac{nR}{V}$$

on trouve

$$dS = \frac{nR}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

L'intégration entre un état caractérisé par  $P_0, T_0, V_0$  et un autre état caractérisé par  $P, T, V$  conduit à

$$S(T, V) = S(T_0, V_0) + \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + nR \ln \left( \frac{dV}{V} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{S(T, V) = S(T_0, V_0) + \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{TV^{\gamma-1}}{T_0V_0^{\gamma-1}} \right)}$$

En partant de la deuxième identité thermodynamique ou en utilisant l'équation d'état du gaz parfait, on obtient l'expression de  $S$  en fonction de  $P$  et  $T$  :

$$\boxed{S(T, P) = S(T_0, P_0) + \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{P^{1-\gamma} T^\gamma}{P_0^{1-\gamma} T_0^\gamma} \right)}$$

et en fonction de  $P$  et  $V$  :

$$\boxed{S(P, V) = S(P_0, V_0) + \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{PV^\gamma}{P_0V_0^\gamma} \right)}$$

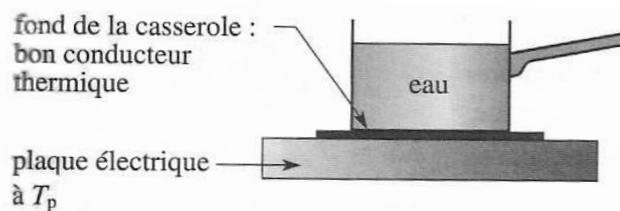
#### IV.4. Exemple : irréversibilité du transfert thermique

Exercice

On considère une masse  $m = 1,5 \text{ kg}$  d'eau à la température  $T_1 = 300 \text{ K}$  contenue dans une casserole. La casserole est chauffée par une plaque électrique à la température  $T_p = 370 \text{ K}$ . Au bout d'un certain temps, l'eau atteint la température  $T_2 = 350 \text{ K}$ .

On supposera que les échanges thermiques avec l'air sont négligeables, qu'il n'y a pas d'évaporation et que la casserole conduit très bien la chaleur de sorte que  $T_{\text{casserole}} = T_p$ . On donne la valeur de la capacité calorifique massique de l'eau  $c = 4,18 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ .

1. Déterminer la variation  $\Delta S$  d'entropie ainsi que l'entropie échangée  $S_e$  au cours de la transformation.
2. Que vaut l'entropie créée ?



1. L'entropie est une fonction d'état : il n'est donc pas nécessaire de connaître l'évolution de la température pour déterminer sa variation : seuls importent les états initial et final. L'identité thermodynamique avec  $U$  permet d'écrire

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} dV$$

Pour une phase condensée que l'on suppose incompressible  $dV = 0$  et  $dU = mc dT$ . On en déduit

$$dS = \frac{mc dT}{T} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Delta S = mc \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right)}$$

Numériquement, on obtient

$$\Delta S = 1,5 \times 4,18 \cdot 10^3 \times \ln\left(\frac{350}{300}\right) = 967 \text{ J.K}^{-1}$$

L'entropie échangée vaut

$$S_e = \int \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}} = \frac{Q}{T_p} \quad \text{avec} \quad \Delta U = mc(T_2 - T_1) = W + Q = Q$$

On en déduit

$$S_e = mc \frac{T_2 - T_1}{T_p} = 1,5 \times 4,18 \cdot 10^3 \times \frac{350 - 300}{370} = 847 \text{ J.K}^{-1}$$

2. On obtient l'entropie créée en faisant la différence entre la variation totale d'entropie et l'entropie échangée

$$S_c = \Delta S - S_e = 120 \text{ J.K}^{-1}$$

L'évolution de l'eau est irréversible car  $S_c > 0$ .

prof. AMAMI ipest  
tel:95 55 64 10

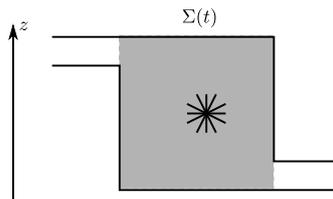
# Système ouvert en régime permanent

## IV Machines thermiques avec écoulement de fluide

Dans les machines thermiques étudiées précédemment, on a pu raisonner sur des systèmes assimilés à des systèmes fermés. Or dans la thermodynamique industrielle, la plupart des machines fonctionnent avec un écoulement de fluide (turbines, turbocompresseurs, réacteurs...). On doit donc utiliser le même raisonnement que pour la détente de Joule-Thomson et se ramener à un système fermé.

### IV.1 Position du problème

Soit  $\Sigma(t)$  un système ouvert défini ci-dessous. Les grandeurs associées à ce système sont l'énergie interne  $U(t)$ , l'énergie cinétique  $E_c(t)$ , l'énergie potentielle  $E_p(t)$ , la masse  $m(t)$  et l'entropie  $S(t)$ . On se place en régime stationnaires, ces grandeurs ne dépendent donc plus du temps.



Pour appliquer les principes de la thermodynamique, on doit se ramener à un système fermé  $\Sigma^*$  (qui évolue avec le temps) défini ci-dessous :



- $dm_1$  est la masse de fluide qui entre dans  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$ . A cette masse  $dm_1$ , on associe les grandeurs suivantes :
  - $P_1$  : pression
  - $T_1$  : température
  - $z_1$  : altitude
  - $v_1$  : volume massique
  - $c_1$  : vitesse
  - $u_1$  : énergie interne massique
  - $s_1$  : entropie massique
- $dm_2$  est la masse de fluide qui sort de  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . A cette masse  $dm_2$ , on associe les grandeurs suivantes :
  - $P_2$  : pression
  - $T_2$  : température
  - $z_2$  : altitude
  - $v_2$  : volume massique
  - $c_2$  : vitesse
  - $u_2$  : énergie interne massique
  - $s_2$  : entropie massique

**Bilan de masse :**

- $M^*(t) = M(t) + dm_1$
- $M^*(t + dt) = M(t + dt) + dm_2$

Le régime étant permanent, on a  $M(t) = M(t + dt)$ , et le système  $\Sigma^*$  étant fermé  $M^*(t) = M^*(t + dt)$ . On en déduit que  $\boxed{dm_1 = dm_2 = dm}$ .

**Bilan de travail :** Entre les instants  $t$  et  $t + dt$  le travail reçu par le système  $\Sigma^*$  s'écrit :

$$\delta W = \delta W_{amont} + \delta W_{aval} + \delta W'$$

- $\delta W_{amont}$  est le travail des forces de pression d'admission :  $\delta W_{amont} = dmP_1v_1$
- $\delta W_{aval}$  est le travail des forces de pression de refoulement :  $\delta W_{aval} = -dmP_2v_2$
- $\delta W'$  est le travail échangée avec les parties mobiles (aubes de turbines...) : ce travail est nul pour une canalisation.

## IV.2 Application du premier principe

Le premier principe appliqué au système fermé  $\Sigma^*$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  s'écrit :

$$dU^* + dE_c^* + dE_p^* = \delta Q + \delta W$$

**Bilan d'énergie interne :**  $dU^* = U^*(t + dt) - U^*(t) = dm(u_2 - u_1)$  puisque  $U(t) = U(t + dt)$

**Bilan d'énergie cinétique :**  $dE_c^* = E_c^*(t + dt) - E_c^*(t) = \frac{1}{2}dm(c_2^2 - c_1^2)$

**Bilan d'énergie potentielle :**  $dE_p^* = E_p^*(t + dt) - E_p^*(t) = dm.g(z_2 - z_1)$

Le premier principe s'écrit alors :

$$dm(u_2 - u_1) + dm(e_{c2} - e_{c1}) + dm(e_{p2} - e_{p1}) + dm(P_2v_2 - P_1v_1) = dmq + dmw'$$

où  $q$  est le transfert thermique massique reçu par le système,  $w'$  est le travail massique reçu par le fluide par l'intermédiaire des parties mobiles,  $e_{c1,2} = \frac{1}{2}c_{1,2}^2$  et  $e_{p1,2} = gz_{1,2}$ .

Après simplification par  $dm$  et en notant  $h$  l'enthalpie massique ( $h = u + Pv$ ), on obtient l'expression du premier principe pour des systèmes en écoulement :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = q + w'$$

- Dans le cas d'un écoulement lent, sans variation d'altitude notable (cas usuel), le premier principe pour les systèmes en écoulement s'écrit  $\Delta h = w' + q$ .
- En introduisant le débit massique  $D_m = \frac{dm}{dt}$ , l'expression du premier principe pour des systèmes en écoulement devient :

$$D_m(\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p) = \mathcal{P}' + \mathcal{P}_{th}$$

- $\mathcal{P}'$  est la puissance reçue par les parties mobiles ;
- $\mathcal{P}_{th}$  est la puissance thermique reçue par le fluide en écoulement.

## IV.3 Application du second principe

Le second principe appliqué au système fermé  $\Sigma^*$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  s'écrit :

$$dS^* = \delta S_e + \delta S_c$$

- $dS^* = S^*(t + dt) - S^*(t) = dm(s_2 - s_1)$
- $\delta S_e$  est l'entropie échangée :  $\delta S_e = \frac{dmq}{T}$
- $\delta S_c$  est l'entropie créée :  $\delta S_c = dm.s_c$

Le second principe s'écrit alors :  $\Delta s = \frac{q}{T} + \delta s_c$

## IV.4 Exercice d'application

On pompe l'eau d'un puits à 30 m de profondeur, à la température  $T_1 = 363 \text{ K}$ , avec un débit volumique  $D_v = 120 \text{ L.min}^{-1}$ . Cette eau est récupérée dans un réservoir à la température  $T_2 = 273 \text{ K}$  après être passée dans un échangeur thermique où elle reçoit une puissance thermique algébrique  $\mathcal{P}_{th}$ . La puissance mécanique de la pompe est  $P = 2 \text{ kW}$ .

Calculer la puissance thermique algébrique reçue par l'eau  $\mathcal{P}_{th}$  en supposant que l'on peut négliger sa variation d'énergie cinétique.

*Données :* capacité thermique massique de l'eau :  $c = 4,18.10^3 \text{ J.kg}^{-1}.K^{-1}$ , intensité du champ de pesanteur  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

# Diffusion thermique

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que des systèmes thermodynamiques homogènes. Or cette situation n'est pas toujours vérifiée. Prenons l'exemple d'une salle climatisée. Lorsque le climatiseur est allumé, l'air à proximité du climatiseur est plus frais qu'à d'autres endroits. Au bout d'un temps très long, la température sera homogène dans la salle mais ce n'est certainement pas le cas au cours de la transformation.

Nous nous proposons dans ce chapitre de décrire le phénomène de transport d'énergie thermique.

## I Diffusion thermique

### I.1. Différents modes de transfert thermique

Considérons une piscine située en plein air et cherchons à chauffer l'eau qu'elle contient.

- La première solution envisageable est de l'exposer en plein soleil : on constate alors que l'eau s'échauffe. Au contraire, placée à l'ombre, l'eau ne s'échauffe pas autant. L'eau de la piscine a donc reçue de l'énergie thermique sous la forme du rayonnement électromagnétique solaire.

- Une autre possibilité pour réchauffer l'eau de la piscine, consiste simplement à rajouter une grande quantité d'eau chaude, chauffée préalablement. En mélangeant l'eau chaude et l'eau froide, on obtient une température intermédiaire. Ce mélange fait appel à un mouvement macroscopique de matière et d'énergie thermique, on parle de phénomène de convection.

- Enfin, plutôt que d'ajouter de l'eau chaude, il est possible de placer une résistance chauffante dans la piscine. Dans ce cas, l'eau de la piscine voit sa température augmenter progressivement. Ce phénomène de chauffage fait appel à un processus microscopique de transfert d'énergie thermique : la chaleur "diffuse" lentement de la source la plus chaude vers les zones les plus froides. On parle de phénomène de diffusion.

#### Définition :

**Le transport d'énergie thermique peut s'effectuer selon trois processus :**

- \* **la convection, correspondant à un mouvement macroscopique de matière (agitation) ;**
- \* **la diffusion (ou conduction), correspondant à un transfert d'origine microscopique ;**
- \* **le rayonnement, correspondant à un échange d'énergie par l'intermédiaire de photons.**

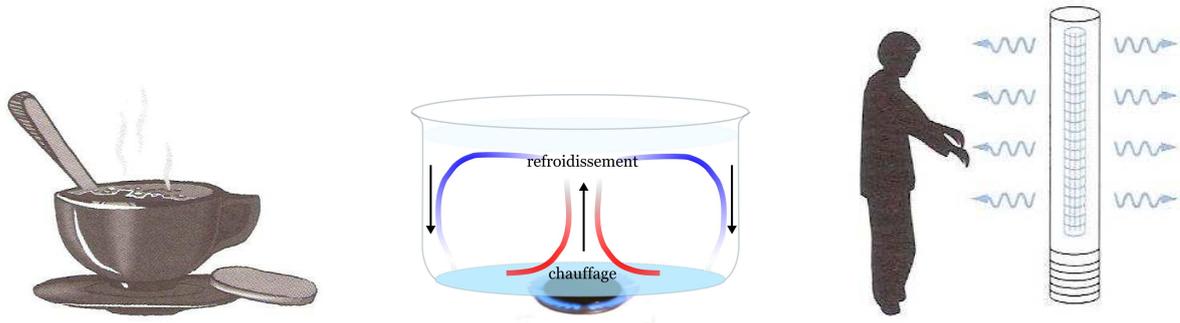


FIGURE 2 – À gauche : exemple de diffusion thermique. Une cuillère plongée dans l'eau bouillante voit sa température augmenter. Au milieu : le chauffage de l'eau d'une casserole fait intervenir le phénomène de convection thermique. À droite : transfert radiatif. Un corps porté à incandescence émet un rayonnement dont l'énergie peut être transformée en énergie thermique.

*Remarque*

*En général, un transfert thermique se fait sous les trois modes simultanément. Néanmoins, dans la suite du cours, nous nous intéresserons essentiellement au phénomène de diffusion thermique.*

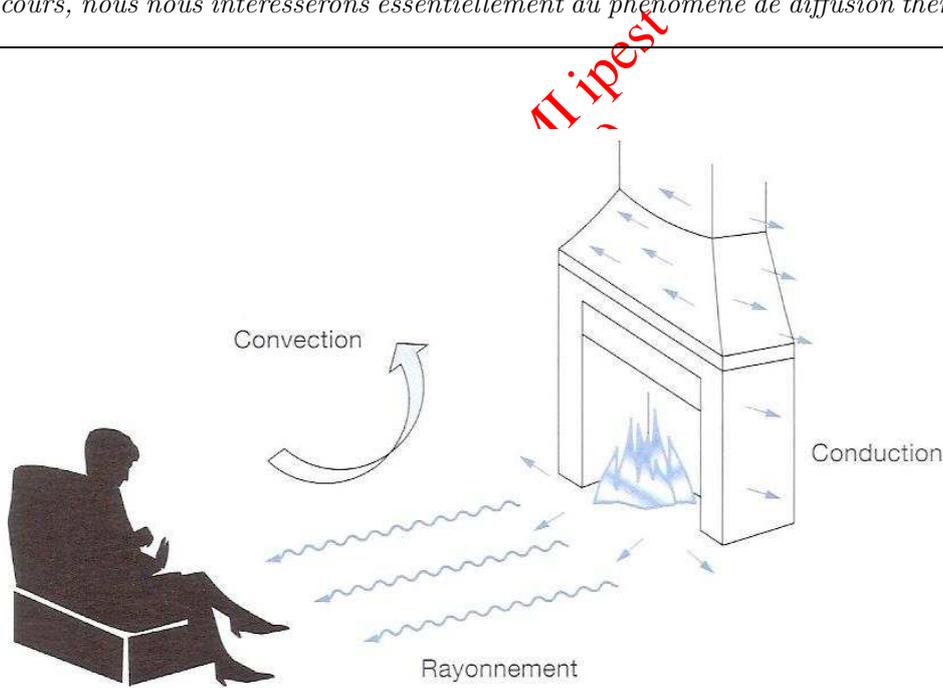


FIGURE 3 – En général, les trois modes de transferts sont simultanés.

### I.2. Puissance thermique et densité de courant

Afin de décrire l'évolution spatiale et temporelle de la température d'un corps, il faut bien évidemment définir sa température. Dans toute la suite, on supposera que l'on peut définir en chaque point et à l'échelle mésoscopique une température locale  $T(M, t)$  même s'il le système dans son ensemble n'est pas à l'équilibre. Cette hypothèse nécessite un équilibre thermodynamique local, c'est-à-dire un équilibre tel qu'à l'échelle mésoscopique, la distribution des vitesses particules respecte une statistique de Maxwell-Boltzman de température  $T(M, t)$ .

**Propriété**

Soit un système qui n'est pas à l'équilibre thermique. Dans le cadre d'un équilibre thermodynamique local, il est possible de définir à l'échelle mésoscopique, une température  $T(M, t)$  dépendant du point  $M$  de l'espace et du temps.

Isolons à l'aide d'une surface fermée  $\Sigma$  fictive un élément de volume d'un système. Cet élément de volume reçoit de la part de l'extérieur de l'énergie thermique. On définit alors la puissance thermique ou flux thermique comme l'énergie reçue par ce volume par unité de temps. Plus généralement, il est possible de définir le flux thermique à travers une surface  $S$  non nécessairement fermée.

**Définition :**

On définit la puissance thermique  $\mathcal{P}_{th}$  ou flux thermique traversant une surface  $S$  par

$$\Phi_{th} = \mathcal{P}_{th} = \frac{dQ}{dt}$$

où  $Q$  est l'énergie thermique (ou chaleur) traversant la surface  $S$  par unité de temps.

$\mathcal{P}_{th}$  s'exprime en W dans le système S.I.

Mais la puissance qui traverse une surface  $S$  est proportionnelle à la surface  $S$ . On peut donc définir une puissance surfacique  $\vec{j}_{th}$  telle que le flux thermique soit effectivement

$$\mathcal{P}_{th} = \iint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{S}$$

$\vec{j}_{th}$  est aussi appelé densité de courant d'énergie.

**Définition :**

Le flux thermique s'écrit sous la forme

$$\mathcal{P}_{th} = \iint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{S}$$

où  $\vec{j}_{th}$  est le vecteur densité de courant thermique.

$j_{th}$  s'exprime en  $W \cdot m^{-2}$ .

**Remarque**

On note l'analogie avec l'électrocinétique

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{th} &\longleftrightarrow I \\ \vec{j}_{th} &\longleftrightarrow \vec{j} \\ \mathcal{P}_{th} = \iint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{S} &\longleftrightarrow I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d^2\vec{S} \end{aligned}$$

### I.3. Loi de Fourier et coefficient de diffusion

Le phénomène de diffusion thermique n'existe que lorsque la distribution de température n'est pas uniforme : c'est une situation hors-équilibre. La diffusion thermique s'effectue alors dans le sens d'un retour à l'équilibre et tend à uniformiser la température :

- ★ les zones froides reçoivent de l'énergie thermique : leur température augmente ;
- ★ les zones chaudes cèdent de l'énergie thermique : leur température diminue.

Il existe donc un **courant de diffusion thermique** orienté des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides.

Considérons un barreau cylindrique de section  $S$  et d'axe  $(Ox)$ . Notons  $T(x, t)$  la température du barreau en un point  $M$  d'abscisse  $x$  et  $j_{th}$  la densité de courant thermique, comptée positivement dans le sens de  $\vec{u}_x$ .

- Si la température est uniforme  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  et il n'y a pas de diffusion. On en déduit  $j_{th} = 0$ .
- Si la température augmente à mesure que  $x$  augmente alors  $\frac{\partial T}{\partial x} > 0$ . Il apparaît alors un courant de diffusion orienté dans le sens des températures décroissantes, c'est-à-dire dans le sens  $-\vec{u}_x$ . On en déduit  $j_{th} < 0$ . D'autre part, on constate expérimentalement que ce courant est d'autant plus fort que la différence de température entre les extrémités du barreau est grande, c'est-à-dire que  $\frac{\partial T}{\partial x}$  est grand. On peut donc poser

$$j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{avec } \lambda = \text{conste} > 0$$

- Le même raisonnement s'applique si la température diminue à mesure que  $x$  augmente. Le courant de particule est alors opposé à  $\frac{\partial T}{\partial x}$ .

Remarque

Plus généralement, pour un problème tridimensionnel,  $\vec{j}_{th}$  est opposé à la variation spatiale de  $T$ , caractérisée par  $\vec{\text{grad}} T$  :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$$

Propriété

Toute inhomogénéité de température entraîne un phénomène de diffusion généralement caractérisée par la loi de Fourier

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$$

où  $\lambda$  est la conductivité thermique, exprimée en  $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\vec{j}_{th}$  est la densité volumique de courant thermique.

Remarque

La loi de Fourier est une loi phénoménologique valable lorsque la température ne varie pas trop brusquement sur de faibles distances. Dans le cas contraire, les courants de diffusion seraient très intenses et la convection ne pourrait plus être négligée.

Remarque

On note à nouveau l'analogie avec la loi d'Ohm

$$\begin{aligned} \vec{j}_{th} &\longleftrightarrow \vec{j} \\ T &\longleftrightarrow V \\ \vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T &\longleftrightarrow \vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V \end{aligned}$$

Remarque

Les métaux sont généralement de bon conducteurs thermiques, les gaz et certains solides (polymères) sont souvent des isolants thermiques tandis que les liquides sont moyennement conducteurs de chaleur. On retiendra les ordres de grandeurs suivant

$$\begin{aligned} \lambda &\sim 10^2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} && \text{métaux} \\ \lambda &\sim 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} && \text{liquides} \\ \lambda &\sim 10^{-2} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} && \text{gaz et polymères} \end{aligned}$$

## II Bilan d'énergie et équation de la diffusion

### II.1. Bilan d'énergie

#### a) Bilan thermique unidimensionnel

On considère un corps en phase condensée (liquide ou solide) homogène de masse volumique  $\rho$ , de conductivité thermique  $\lambda$  et de capacité thermique massique  $c$ . Ces grandeurs sont supposées constantes.

Dans un premier temps, on supposera qu'il n'y a pas au sein du milieu de sources susceptibles de fournir de la chaleur localement.

Plaçons-nous dans le cas où la température du matériau ne dépend que de l'abscisse  $x$  et du temps  $t$ . Notons  $\mathcal{P}_{th}(x, t)$  le flux thermique traversant une surface  $S$  normale à l'axe  $Ox$  orientée selon les  $x$  croissants. On a donc  $\mathcal{P}_{th}(x, t) = j_{th}(x, t) S$ .

Considérons alors un petit volume de section  $S$  compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , de température  $T(x, t)$ .

Effectuons un bilan énergétique entre deux instants voisins  $t$  et  $t + dt$  :

- ★ à l'abscisse  $x$ , il entre dans le système une énergie

$$\delta Q = \mathcal{P}_{th}(x, t) dt = j_{th}(x, t) S dt$$

- ★ à l'abscisse  $x + dx$ , il sort du système une énergie

$$\delta Q' = \mathcal{P}_{th}(x + dx, t) S dt$$

donc il y entre  $-\delta Q'$ .

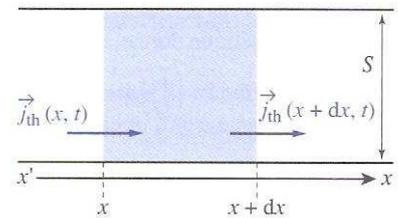


FIGURE 4 -

D'après le premier principe de la thermodynamique, pour une transformation isochore :

$$dU = \delta Q - \delta Q' = [j_{th}(x, t) - j_{th}(x + dx, t)] S dt = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx S dt$$

Par ailleurs, la capacité thermique de ce système est  $C = \delta m c = \rho S dx c$  donc on peut également écrire :

$$dU = C dT = \rho c S dx dT = \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

En égalant les deux expressions de  $dU$ , on obtient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}$$

**Propriété**

L'équation de conservation de l'énergie thermique dans le cas unidimensionnel et en l'absence de source s'écrit :

$$\frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

**b) Prise en compte d'un terme de source**

Dans certains cas, un apport énergétique peut avoir lieu au sein même du matériau : effet Joule dans un conducteur, énergie dégagée par une réaction exothermique...

Il suffit alors de reprendre le bilan énergétique effectué précédemment.

Notons  $p$  la densité volumique de puissance traduisant l'apport énergétique dû aux sources. On a alors :

$$[\mathcal{P}_{th}(x, t) - \mathcal{P}_{th}(x + dx, t)] dt + p S dx dt = \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dx dt \Rightarrow -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} + p = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

**Propriété**

En présence de source ayant une puissance volumique  $p$ , l'équation de conservation de l'énergie thermique s'écrit :

$$\frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = p$$

Exemple

Supposons que la puissance thermique volumique apportée soit due à une résistance chauffante. La puissance volumique due à l'effet Joule vaut :

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{j} & \text{densité volumique de courant électrique} \\ \vec{E} & \text{champ électrique} \end{cases}$$

En introduisant la conductivité électrique  $\gamma$ , on obtient

$$p = \frac{j^2}{\gamma}$$

c) Bilan thermique tridimensionnel

On réalise un bilan énergétique tridimensionnel. On remplace le volume élémentaire précédent par un volume  $V$  limité par une surface fermée et fixe  $\Sigma$ .

Le flux thermique à travers  $\Sigma$  est

$$\mathcal{P}_{th} = \oint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot \vec{d^2S}$$

La normale étant par convention orientée vers l'extérieur de la surface, il s'agit d'un flux sortant.

Pendant un temps  $dt$ , le volume  $V$  reçoit donc une énergie

$$\delta Q = -\mathcal{P}_{th} dt$$

L'application du premier principe pour une volume constant fournit

$$dU = \delta Q = -\mathcal{P}_{th} dt = -\oint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot \vec{d^2S} dt$$

Par ailleurs,

$$dU = \iiint_{V(\Sigma)} \rho c dT d^3V = \iiint_{V(\Sigma)} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt d^3V$$

En égalant ces deux expressions pour la variation d'énergie interne, on obtient, après simplification par  $dt$

$$-\oint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot \vec{d^2S} = \iiint_{V(\Sigma)} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d^3V$$

L'application du théorème de Green-Ostrogradsky permet de transformer l'intégrale double en intégrale triple

$$-\iiint_{V(\Sigma)} \text{div}(\vec{j}_{th}) d^3V = \iiint_{V(\Sigma)} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d^3V$$

Cette égalité étant vérifiée quel que soit  $V$ , nous en déduisons la relation

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_{th}$$

Propriété

Dans le cas tridimensionnel, la conservation de l'énergie thermique s'écrit :

$$\text{div} \vec{j}_{th} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = p$$

où  $p$  est la puissance volumique fournie par des sources.

Remarque

On retrouve encore l'analogie avec l'électrocinétique et l'équation de conservation de la charge :

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

en l'absence de terme de source.

## II.2. Équation de la diffusion thermique

En combinant la loi de Fourier unidimensionnelle  $j_{\text{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$  et l'équation de conservation de l'énergie thermique, on obtient l'équation de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{soit} \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Dans le cas tridimensionnel, on obtient

$$\text{div}(\vec{j}_{\text{th}}) + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

soit

$$-\lambda \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} T) + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = 0$$

### Propriété

Lorsque la loi de Fourier s'applique, la température  $T$  vérifie l'équation de la diffusion thermique :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \text{cas unidimensionnel} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T & \text{cas tridimensionnel} \end{cases}$$

Cette équation est aussi appelée équation de la chaleur.

Le coefficient

$$D_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\rho c}$$

est le coefficient de diffusion thermique, exprimé en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Remarque

Dans le cas où un terme de source doit être pris en compte, l'équation de la chaleur devient

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T + \frac{p}{\rho c}$$

On constate que l'équation de diffusion n'est pas invariante sous la transformation  $t \rightarrow -t$ . On en déduit que la diffusion thermique est un phénomène irréversible.

### Propriété

La diffusion thermique est un phénomène irréversible.

### III Application au régime stationnaire

#### III.1. Temps caractéristique de diffusion

Considérons un problème unidimensionnel de longueur caractéristique  $L$ . Pour fixer les idées, on pourra envisager un barreau cylindrique de longueur  $L$  et de faible section.

D'après l'équation de la diffusion

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

il apparaît un temps caractéristique  $\tau$  lié au phénomène de diffusion tel que

$$\frac{T}{\tau} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{T}{L^2} \quad \text{soit} \quad \tau = \frac{L^2}{D_{th}}$$

où  $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$  est le coefficient de diffusion thermique.

Mais cette relation s'interprète différemment : sur une durée  $\tau$ , le phénomène de diffusion s'effectue sur une distance caractéristique  $L$  telle que

$$L = \sqrt{D_{th}\tau}$$

**Propriété**

Pendant une durée  $\tau$ , le phénomène de diffusion s'effectue sur une distance caractéristique  $L$  telle que

$$L = \sqrt{D_{th}\tau}$$

où  $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$  est le coefficient de diffusion thermique.

#### III.2. Profil de température dans un barreau cylindrique

Considérons un barreau cylindrique de section  $S$  et de longueur  $\ell$ .

Supposons que ce barreau soit en contact en  $x = 0$  avec une source de température  $T_1$  et d'autre part, en  $x = \ell$  avec une source de température  $T_2 < T_1$  :

$$T(x = 0) = T_1 \quad \text{et} \quad T(x = \ell) = T_2 < T_1$$

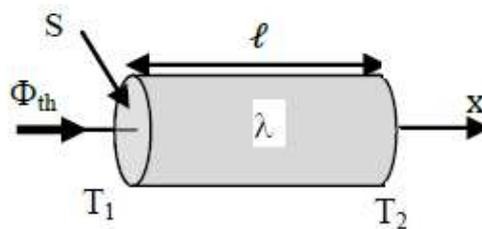


FIGURE 5 -

Au bout d'un temps suffisamment long, tel que  $\delta t \gg \tau = \sqrt{D_{th}\ell}$  et en considérant  $T_1$  et  $T_2$  constantes, on peut supposer qu'un régime stationnaire est atteint. La température dans la barre ne dépend alors pas du temps. L'équation de diffusion thermique devient, puisqu'aucune source n'est à prendre en compte :

$$\Delta T = 0 \quad \text{soit, ici} \quad \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

**Propriété**

En régime stationnaire, l'équation de diffusion prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 & \quad \text{cas unidimensionnel} \\ \Delta T = 0 & \quad \text{cas tridimensionnel} \end{aligned}$$

**Remarque**

On obtient une équation de Laplace, déjà rencontrée en électrostatique dans le vide.

On en déduit un profil linéaire dans la barre

$$T(x) = ax + b$$

En utilisant les conditions aux limites, on obtient les constantes  $a$  et  $b$  :

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{l}$$

**III.3. Résistance thermique**

a) Définition et analogie électrique

Par analogie avec l'électrocinétique

$$\begin{aligned} \vec{j}_{th} & \longleftrightarrow \vec{j} \\ \vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T & \longleftrightarrow \vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V \\ T & \longleftrightarrow V \\ \mathcal{P}_{th} = \iint \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{S} & \longleftrightarrow I = \iint \vec{j} \cdot d^2\vec{S} \end{aligned}$$

Par ailleurs, en régime stationnaire (ou quasi-stationnaire) :

$$\begin{cases} \text{div}(\vec{j}_{th}) = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 & \text{conservation de l'énergie} \\ \text{div}(\vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 & \text{conservation de la charge électrique} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{conservation de } \mathcal{P}_{th} = \iint \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{S} \\ \text{conservation de } I = \iint \vec{j} \cdot d^2\vec{S} \end{cases}$$

Ainsi, en régime stationnaire, la loi des nœuds est vérifiée pour l'intensité électrique mais aussi pour le flux thermique. Il est donc possible de définir, par analogie avec l'électrocinétique, une résistance thermique entre deux points de température  $T_1$  et  $T_2$  :

$$R_{th} = \frac{T_2 - T_1}{\mathcal{P}_{th}} \longleftrightarrow R = \frac{V_2 - V_1}{I}$$

**Définition :**

En régime stationnaire, on définit, par analogie avec l'électrocinétique, une résistance thermique  $R_{th}$  telle que :

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\mathcal{P}_{th}}$$

où  $T_1$  et  $T_2$  sont les températures aux extrémités du matériau étudié et où  $\mathcal{P}_{th}$  est le flux thermique orienté de 1 vers 2.

Reprenons l'exemple du barreau cylindrique de section  $S$  et de longueur  $\ell$  en régime permanent. Si l'on isole une portion de ce barreau compris entre  $x$  et  $x + dx$ , le flux thermique entrant en  $x$  est égal, en régime stationnaire, au flux thermique sortant en  $x + dx$ . On en déduit

$$\mathcal{P}_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{S} = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda S}{\ell} (T_1 - T_2)$$

Remarque

On vérifie bien que le flux thermique est bien positif lorsque l'on oriente des températures les plus élevées vers les températures les plus faibles.

On obtient alors l'expression de la résistance thermique

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\mathcal{P}_{th}} = \frac{\ell}{\lambda S}$$

Propriété

La résistance thermique d'un cylindre de section  $S$ , de longueur  $\ell$  et de conductivité thermique  $\lambda$  vaut

$$R_{th} = \frac{\ell}{\lambda S}$$

On notera que pour une différence de température donnée entre deux points, le flux thermique est d'autant plus faible de la résistance thermique est élevée.

Remarque

On note l'analogie avec l'expression de la résistance électrique d'une portion cylindrique de conducteur, de section  $S$  et de longueur  $\ell$

$$R = \frac{\ell}{\gamma S}$$

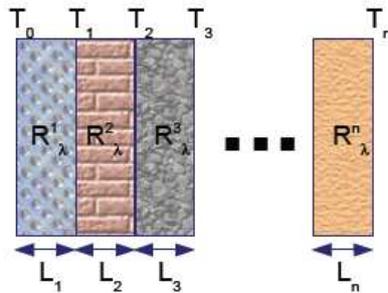
où  $\gamma$  est la conductivité électrique du matériau.

Toutefois, on fera attention à ne pas associer à cette résistance thermique une dissipation par effet Joule. En effet, en régime permanent, la puissance entrant dans un cylindre de longueur  $\ell$  et égale à la puissance qui en sort. Il n'y a donc pas de phénomène dissipatif, contrairement au cas électrique.

b) Association de résistances thermiques

Nous allons montrer que l'association de résistances thermiques est en tout point analogue à celle des résistances en électricité.

• **Association en série** : Considérons l'association en "série" de plusieurs matériaux, permettant d'isoler thermiquement deux milieux de températures différentes.



En régime permanent, le flux est identique dans les différents matériaux, mais les températures sont différentes aux extrémités. Dans ce cas :

$$\mathcal{P}_{th} = \frac{T_0 - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T_2}{R_2} = \dots = \frac{T_{n-1} - T_n}{R_n} \Rightarrow T_0 - T_n = \mathcal{P}_{th}(R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

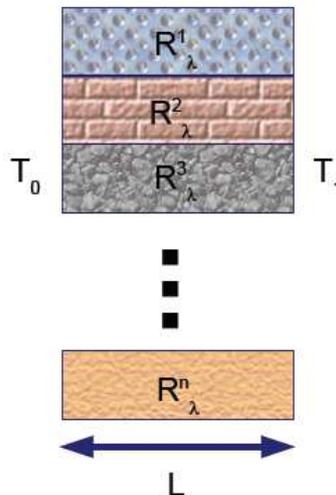
On en déduit

$$\mathcal{P}_{th} = \frac{T_0 - T_n}{R_{eq}} \text{ avec } R_{eq} = \sum_i R_i$$

Propriété

Des résistances thermiques en série s'additionnent.

• **Association en parallèle** : Considérons l'association en "parallèle" de plusieurs matériaux, chaque matériau étant en contact, à ses extrémités, avec les mêmes milieux de températures  $T_1$  et  $T_2$ .



En régime permanent, bien que la température des différents milieux soit constante, le flux est différent dans les différents matériaux. Dans ce cas :

$$\mathcal{P}_{th,1} = \frac{T_0 - T_1}{R_1} \quad \mathcal{P}_{th,2} = \frac{T_0 - T_1}{R_2} \quad \mathcal{P}_{th,n} = \frac{T_0 - T_1}{R_n}$$

On en déduit

$$\mathcal{P}_{th} = \sum_i \mathcal{P}_{th,i} = \frac{T_0 - T_1}{R_{eq}} = (T_0 - T_1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$

Finalement,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad \text{soit} \quad G_{eq} = \sum_i G_i$$

**Propriété**

Des conductances thermiques en parallèle s'additionnent.

**c) Exemple**

Considérons une pièce maintenue à la température  $T_a$  et chauffée par un radiateur, fournissant la puissance thermique  $\mathcal{P}_{th}$ . La pièce est en contact avec l'air extérieur, de température  $T_{ext}$ , par l'intermédiaire d'une fenêtre dans un mur sur lequel est plaqué un matériau isolant.

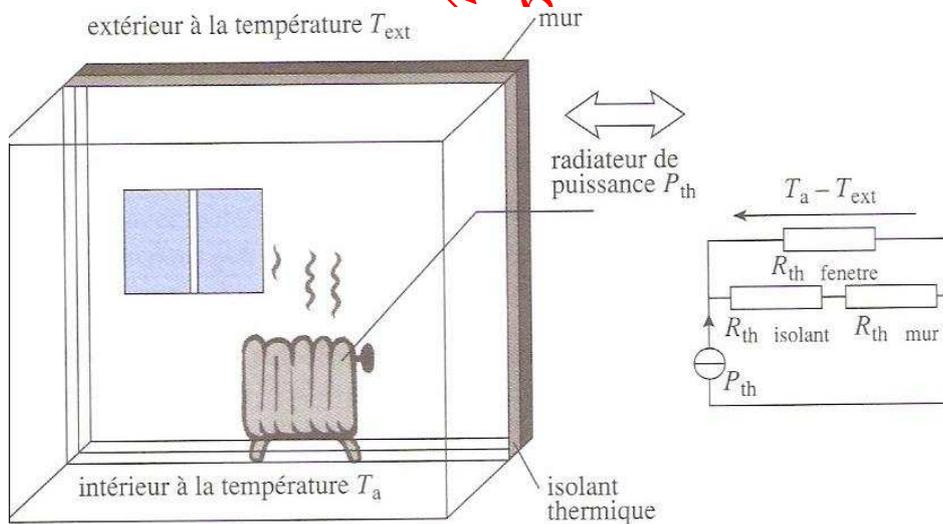


FIGURE 6 –

Dans l'exemple ci-dessus, les résistances thermiques du mur et de l'isolant sont en série et sont toutes les deux en parallèle avec celle de la fenêtre.

**III.4. Application : intérêt du double vitrage**

La notion de résistance thermique permet de comprendre l'utilité du double vitrage par rapport au simple vitrage du point de vue de l'isolation thermique.

- **Simple vitrage** : la résistance thermique d'une surface  $S$  de verre, est donnée par :

$$R_{th} = \frac{\ell}{\lambda_{verre}S}$$

On peut en déduire que le flux thermique au travers de la vitre vaut :

$$\mathcal{P}_{th-simple} = \frac{\lambda_{verre}S}{\ell}(T_{int} - T_{ext})$$

- **Double vitrage** : la résistance thermique pour une surface  $S$  de verre, est calculée en supposant que l'épaisseur  $\ell$  des deux vitres est identique à celle de la couche d'air entre elles (association en série) :

$$R_{th} = \frac{\ell}{S} \left( \frac{1}{\lambda_{verre}} + \frac{1}{\lambda_{air}} + \frac{1}{\lambda_{verre}} \right) \underset{\lambda_{air} \ll \lambda_{verre}}{\approx} \frac{\ell}{\lambda_{air}S}$$



On peut en déduire que le flux thermique au travers de la vitre vaut :

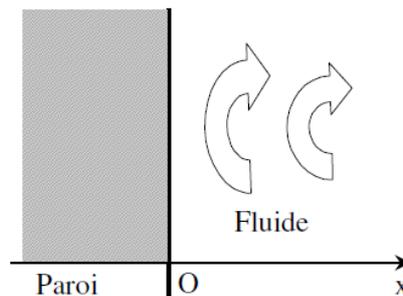
$$\mathcal{P}_{th-double} = \frac{\lambda_{air}S}{\ell}(T_{int} - T_{ext})$$

Comme  $\lambda_{air} \simeq 0,03 \text{ W.K}^{-1} .\text{m}^{-1}$  et  $\lambda_{verre} \simeq 0,8 \text{ W.K}^{-1} .\text{m}^{-1}$ , on peut donc en déduire que le double vitrage isole plus de 20 fois mieux que le simple vitrage.

## IV Transfert thermique convectif

### IV.1. Loi de Newton

Les mouvements de convection dans un fluide assurent, au même titre que la diffusion, un homogénéisation de température du milieu, mais à l'aide d'un mouvement macroscopique de matière.



Le phénomène de convection étant particulièrement efficace, on considérera que la température dans un fluide est uniforme, à condition que ce fluide ne soit pas trop dilué.

Toutefois, au voisinage d'une paroi, il existe dans le fluide une couche limite, d'épaisseur très faible, à l'intérieur de laquelle la convection est négligeable. Tout se passe comme si la couche limite assurait une adaptation entre la température du fluide et la température de la paroi.

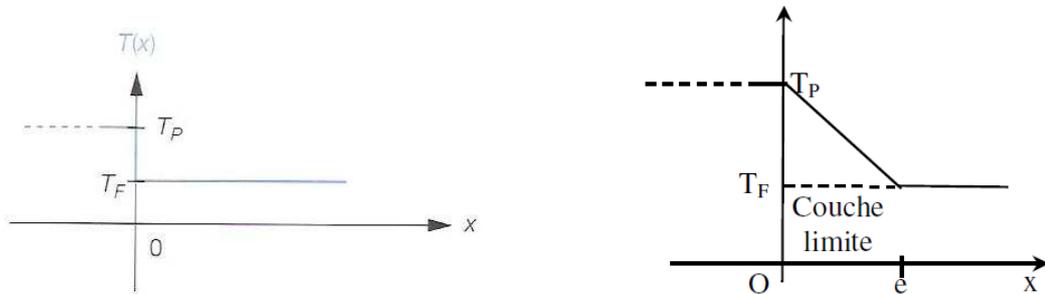


FIGURE 7 – (À gauche) Profil idéalisé de température. (À droite) Profil réel de température : existence d'une couche limite dans le fluide.

L'épaisseur  $\delta$  de la couche limite est généralement faible de sorte que le temps de diffusion  $\tau = \frac{\delta^2}{D_{th}}$  est très court. On pourra donc supposer que le régime stationnaire est toujours atteint dans la couche limite. En notant  $\lambda_F$  la conductivité thermique du fluide,  $T_F$  la température du fluide et  $T$  la température d'une paroi solide, on peut exprimer la densité de flux thermique orienté de la paroi vers le fluide

$$j_{th} = \frac{\lambda_F}{\delta} (T - T_F) = h (T - T_F) \quad \text{avec} \quad h = \frac{\lambda_F}{\delta} \approx \text{cste}$$

**Loi de Newton**

Lorsqu'une paroi solide à la température  $T$  est en contact avec un fluide à la température  $T_F$ , la densité de flux thermique orienté de la paroi vers le fluide suit la loi phénoménologique de Newton :

$$j_{cc} = h(T - T_F)$$

où  $h$  est le coefficient de transfert thermique de surface.

On parle de transfert conducto-convectif car il y a :

- ★ conduction (ou diffusion) thermique dans la couche limite du fluide ;
- ★ convection dans le volume du fluide.

**Remarque**

- ★  $h$  est positif donc on retrouve la propriété selon laquelle le transfert a lieu dans le sens des températures décroissantes.
- ★ Entre un gaz et un solide,  $h \simeq 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  tandis qu'entre un gaz et un liquide  $h > 100 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ .
- ★ Le flux thermique à travers une surface  $S$  est alors proportionnel à  $T - T_F$ . On peut définir une résistance thermique équivalente

$$R_{th} = \frac{1}{hS}$$

### IV.2. Application : ailette de refroidissement

On se propose de déterminer le profil de température  $T(x)$  atteint en régime permanent dans une tige cylindrique (de rayon  $R$  et d'axe  $(Ox)$ ) dont une extrémité est maintenue à la température  $T_0$ .

La tige n'est pas isolée latéralement : on suppose que le transfert thermique sur la surface latérale en contact avec l'atmosphère (de température constante  $T_a < T_0$ ) est du type conducto-convectif (il vérifie la loi de Newton). On supposera l'ailette de longueur infinie.

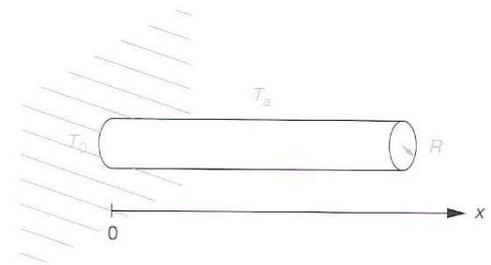


FIGURE 8 -

Effectuons un bilan énergétique dans un tranche de l'ailette comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . Il faut prendre en compte les flux convectifs à travers les sections de l'ailette en  $x$  et en  $x + dx$  ainsi que le flux conducto-convectif entre la surface latérale et l'atmosphère.

- ★ Le flux convectif **entrant** en  $x$  vaut

$$j_{th}(x, t)S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \pi R^2$$

- ★ Le flux convectif **sortant** en  $x + dx$  vaut

$$j_{th}(x + dx, t)S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x + dx, t) \pi R^2$$

le signe  $-$  provenant de l'orientation de la surface.

- ★ Le flux conducto-convectif **sortant** latéralement entre  $x$  et  $x + dx$  vaut

$$j_{cc}(x, t)S_{lat} = h [T(x, t) - T_a] 2\pi R dx$$

En régime stationnaire, la température ne dépend que de  $x$  et la puissance thermique totale reçue par le volume  $Sdx$  est nulle. On en déduit

$$-\lambda \frac{dT}{dx}(x) \pi R^2 + \lambda \frac{dT}{dx}(x + dx) \pi R^2 - h [T(x) - T_a] 2\pi R dx = 0$$

soit

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} \pi R^2 dx - h [T(x) - T_a] 2\pi R dx = 0$$

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par  $T$  :

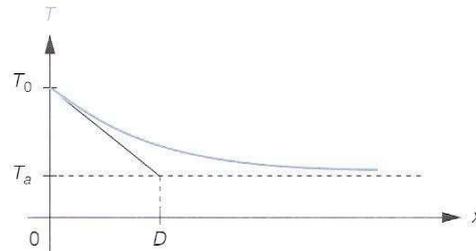
$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R} [T(x) - T_a] = 0$$

On voit apparaître une longueur  $\ell = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}}$ . On résout alors cette équation en

$$T(x) = A e^{-\frac{x}{\ell}} + B e^{\frac{x}{\ell}} + T_a$$

Comme la tige est infinie et que  $T$  doit rester bornée quand  $x \rightarrow \infty$ , on a nécessairement  $B = 0$ . D'autre part,  $T(x = 0) = A + T_a = T_0$ . On obtient finalement :

$$T(x) = (T_0 - T_a) e^{-\frac{x}{\ell}} + T_a$$



On constate que la température de l'ailette tend vers celle du milieu environnant lorsque la distance  $x$  à l'origine est très grande que la distance caractéristique  $\ell$ .

Pour mieux comprendre l'intérêt de l'ailette de refroidissement, il faut évaluer le flux thermique évacué par l'ailette de refroidissement vers l'atmosphère. On détermine ce flux à l'aide de la loi de Fourier en  $x = 0$ . En effet, en régime permanent, le flux entrant dans l'ailette en  $x = 0$  est cédé en totalité à l'air ambiant. Ainsi

$$\Phi_c(x=0) = j(x=0) S = -\lambda \frac{dT}{dx}(x=0) \pi R^2 = \frac{\lambda}{\ell} \pi R^2 (T_0 - T_a)$$

En l'absence d'ailette, le flux aurait été :

$$\Phi'_c = h \pi R^2 (T_0 - T_a)$$

On en déduit le rapport

$$\frac{\Phi_c}{\Phi'_c} = \frac{\lambda}{h \ell}$$

Avec des valeurs numériques courantes, ce rapport est de l'ordre de plusieurs dizaines. L'ailette de refroidissement permet d'évacuer la chaleur bien plus efficacement.

Les ailettes de refroidissement sont notamment utilisées dans les moteurs ou dans les composants informatiques.



# Rayonnement thermique

Le rayonnement thermique est un transfert énergétique classé dans les transferts thermiques qui comptent aussi la conduction et la convection. Ce mécanisme de transfert énergétique fait intervenir à la fois l'émission et l'absorption d'ondes électromagnétiques. Sa spécificité par rapport à la conduction et à la convection est de ne pas nécessiter de milieu matériel pour se réaliser. Le vide où peuvent se propager les ondes électromagnétiques permet les transferts thermiques par rayonnement. Quelques éléments théoriques concernant ces ondes sont indispensables. C'est pourquoi, nous commencerons par en donner une brève description. Notons, pour commencer, que le rayonnement thermique dans le domaine du visible et de l'infrarouge trouve de nombreuses applications. Dans le domaine du visible, le Soleil est la principale source de rayonnement thermique de notre environnement. La vision nocturne est sans doute la plus connue des applications, voir la figure 1. Elle est basée sur la détection du rayonnement infrarouge qui est émis par tout corps possédant une température habituelle sur Terre (autour de 280 K).

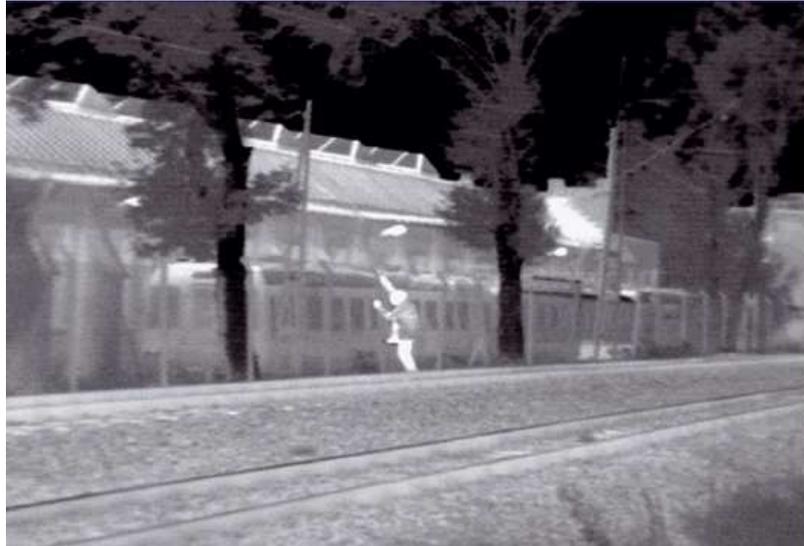


FIG. 1 – Vision nocturne - Surveillance d'une zone sensible

Les autres applications seront étudiées à la fin de ce document.

## 1 Ondes électromagnétiques

Sur le plan théorique, le rayonnement thermique est décrit comme le résultat de la superposition des rayonnements électromagnétiques émis par une multitude de dipôles rayonnants. Les principaux résultats du cours sur l'émission d'ondes électromagnétiques par un dipôle oscillant sont nécessaires.

### 1.1 Rayonnement dipolaire

Le dipôle électrostatique a été modélisé par un couple de charge  $(-q, +q)$  séparé par une distance fixe généralement notée  $a$ . Le moment dipolaire électrique associé à ce système est défini par le vecteur  $\mathbf{p} = qa\mathbf{e}_z$  si les deux charges sont présentes sur l'axe de coordonnées  $Oz$  et orienté depuis la position de la charge négative  $-q$  vers la charge positive  $q$ . Un dipôle électrique oscillant peut être décrit par le modèle de deux charges  $(-q \cos \omega t, q \cos \omega t)$  séparées par la distance fixe  $a$ . Le moment dipolaire devient alors :  $\mathbf{p} = qa \cos \omega t$  qu'on pourra noter en complexe :

$$\mathbf{p} = qa \exp i\omega t \mathbf{e}_z$$

Une autre description du moment oscillant est possible : on peut le décrire comme composé par un couple de charge  $(-q, +q)$  invariables, séparées par une distance variable  $a \cos \omega t$ . On pose  $\mathbf{p}_0 = qa\mathbf{e}_z$ .

On montre, alors, dans le cadre de l'approximation dipolaire ( $r \gg a$ ) que le champ électromagnétique dans la zone de rayonnement  $r \gg \lambda$  où  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  est caractérisé par :

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r c} \sin \theta \exp i(\omega t - kr) \mathbf{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \sin \theta \exp i(\omega t - kr) \mathbf{e}_\theta$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide et  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_r$  le vecteur d'onde de norme  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , voir la figure 2.

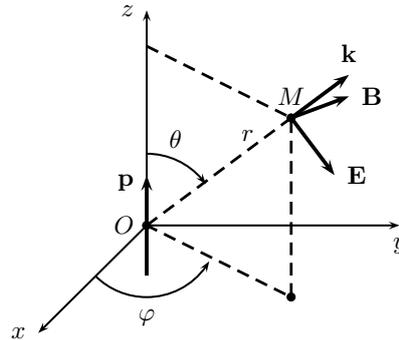


FIG. 2 – Structure de l’onde rayonnée par un dipôle oscillant

### 1.2 Vecteur de Poynting

Le vecteur de POYNTING caractérise l’onde électromagnétique du point de vue énergétique. Il est défini par :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$$

Commençons par une analyse dimensionnelle de cette définition :

L’unité du champ électrique  $\mathbf{E}$  est :  $V \cdot m^{-1}$ . Pour l’autre terme de ce produit, il est préférable de ne pas s’intéresser à  $\mathbf{B}$  mais directement à  $\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$ . En effet, le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par une intensité  $I$  est donné par  $\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta$  pour un point  $M$  situé à la distance  $r$  du fil (coordonnées cylindriques).

On constate donc que  $\frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi r}$ . L’unité de ce terme est donc :  $A \cdot m^{-1}$ . Par conséquent :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \text{ est en : } W \cdot A \cdot m^{-2} \text{ ou } W \cdot m^{-2}$$

Le vecteur de POYNTING correspond donc à une puissance par unité de surface qu’on appelle encore *flux surfacique* souvent noté  $\varphi$ . Cette grandeur est identique à celles rencontrées en conduction et en convection que nous avons notées  $\mathbf{j}_{cond}$  et  $\mathbf{j}_{conv}$ . On écrira donc les puissances surfaciques correspondant au vecteur de POYNTING :

$$\text{Puissance surfacique : } j_{ray} = \varphi = \mathbf{\Pi}$$

Dans le cadre du dipôle oscillant, en réels, le flux surfacique sera :  $j_{ray} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c r^2} \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - kr)$ .

### 1.3 Puissance rayonnée

La puissance rayonnée à travers une surface donnée correspond au flux du vecteur de POYNTING à travers la surface ouverte ou fermée considérée :

$$P_{ray} = \oiint \mathbf{j}_{ray} \cdot d\mathbf{S}$$

Dans le cas d’un seul dipôle oscillant étudié précédemment, on peut observer que la puissance n’est pas rayonnée de façon isotrope dans l’espace du fait de la présence du terme en  $\sin^2 \theta$ , elle est maximale en  $\theta = \pi/2$ . Le calcul de la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon  $r$  s’écrit donc :  $\langle P_{ray} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$ . Après calcul, on a :

$$\langle P_{ray} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

On constate que cette puissance ne dépend que des caractéristiques du moment dipolaire oscillant. On observera aussi bien à travers ce résultat qu’à travers l’expression de  $j_{ray}$  que le rayonnement émis par un dipôle est composé d’une seule fréquence correspondant à la pulsation  $\omega$  ou à la longueur  $\lambda$ . Il est *monochromatique*.

## 2 Loi de Planck

Afin d'expliquer le rayonnement émis par un corps macroscopique, Planck proposa en 1900 une théorie qui considère que le corps macroscopique à l'équilibre à la température  $T$  est constitué d'une multitude de dipôles oscillants. La Thermodynamique statistique permet alors d'étudier le flux surfacique émis. Sa première caractéristique est de ne plus être monochromatique. Cette théorie est hors programme mais fait intervenir un modèle pour le corps macroscopique étudié qu'on appelle le modèle du *corps noir*.

### 2.1 Le corps noir

Un corps macroscopique est qualifié de *corps noir* lorsqu'il est à l'équilibre thermodynamique. Il est donc indispensable qu'il reçoive autant d'énergie qu'il n'en émette. D'autre part, un *corps noir* absorbe l'intégralité du rayonnement incident qu'il reçoit d'où son qualificatif de noir par référence aux corps de couleur noire qui absorbent intégralement le rayonnement visible.

$$\text{Corps noir} \Leftrightarrow \text{Équilibre} \Leftrightarrow \varphi_{\text{incident}} = \varphi_{\text{absorbé}} = \varphi_{\text{émis}}$$

### 2.2 La loi de Planck

Elle sera présentée sous la forme de la densité spectrale de rayonnement. Le caractère non monochromatique du rayonnement émis par le corps noir est traduit par la donnée de la dérivée du flux surfacique de rayonnement  $j_{ray}$  par rapport à la longueur d'onde  $\lambda$  (on peut aussi rencontrer cette loi où la fréquence  $\nu = c/\lambda$  est privilégiée). La formule de la loi de PLANCK est :

$$\frac{dj_{ray}}{d\lambda} = \frac{d\varphi_{\text{corps noir}}}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1}$$

Dans cette formule  $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  est la constante de PLANCK et  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  est la constante de BOLTZMANN. La densité spectrale de flux surfacique est donnée à la figure 3.

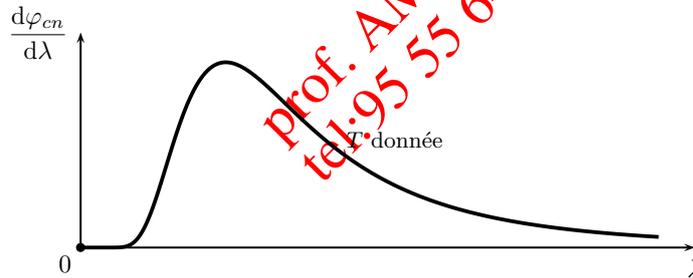


FIG. 3 – Densité spectrale de flux surfacique

### 2.3 Loi de Wien

On effectue fréquemment le changement de variable  $\alpha = \frac{hc}{k_B T \lambda}$  pour simplifier l'approche de cette fonction lorsqu'on étudie le spectre du rayonnement émis par le corps noir, c'est-à-dire la dépendance avec  $\lambda$ . On peut alors réécrire :  $\frac{d\varphi_{\text{Corps Noir}}}{d\lambda} = \frac{2\pi k_B^5 T^5}{h^4 c^3} f(\alpha)$  avec  $f(\alpha) = \frac{\alpha^5}{\exp \alpha - 1}$ . Après calcul, on trouve que

$\frac{df}{d\alpha} = \frac{5\alpha^4}{(\exp \alpha - 1)^2} \left[ \exp \alpha \left( 1 - \frac{\alpha}{5} \right) - 1 \right]$ . Cette dérivée s'annule pour  $\alpha = \alpha_m$  et la fonction  $f(\alpha)$  présente un maximum lorsque :  $1 - \frac{\alpha_m}{5} = \exp -\alpha_m$ . Cette équation doit être résolue numériquement et on trouve :  $\alpha_m = 4,9651$ . La représentation de  $f(\alpha)$  est donnée sur la figure 4.

Sauf pour les valeurs de  $\alpha \simeq 0$ , la fonction  $f(\alpha)$  peut être très bien approchée par  $f_{ap}(\alpha) = \alpha^5 \exp -\alpha$ . L'étude de cette fonction est alors beaucoup plus simple et on trouve que  $\alpha_m = 5$ .

La loi de WIEN exprime le fait que la longueur d'onde  $\lambda_m$  correspondant au maximum de puissance rayonnée par le corps noir est lié à la température  $T$  de ce dernier par :

$$\text{Loi de WIEN : } \lambda_m T = 2895 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

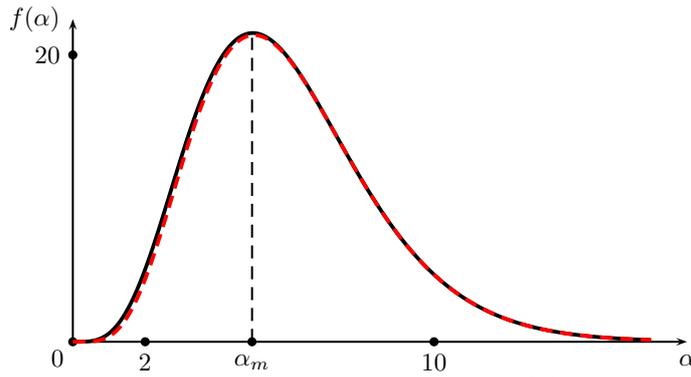


FIG. 4 – Représentation de  $f(\alpha)$

Cette loi est souvent approximée par  $\lambda_m T \simeq 3000 \mu\text{m} \cdot \text{K}$ . Son origine est directement liée à la détermination de  $\alpha_m = \frac{hc}{k_B T \lambda_m}$  d'où  $\lambda_m T = \frac{hc}{k_B \alpha_m}$ .

Comme le spectre rayonné par le Soleil présente un maximum d'émission autour de  $0,5 \mu\text{m}$ , on peut évaluer très rapidement grâce à la loi de WIEN la température des couches superficielles du Soleil : on trouve  $T_S \simeq 6000 \text{K}$ .

Dans la lecture du graphique de la figure 4, on n'oubliera pas que  $\alpha = \frac{hc}{k_B T \lambda}$  et donc que, pour une température  $T$  fixée,  $\alpha \rightarrow 0$  correspond à  $\lambda \rightarrow \infty$  et réciproquement  $\alpha \rightarrow \infty$  correspond à  $\lambda \rightarrow 0$ . Il est donc indispensable de tracer le spectre en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ .

### 2.4 Étude spectrale

Nous allons étudier l'influence de la température  $T$  du corps noir sur la distribution spectrale du rayonnement.

Le graphique de la figure 5 représente  $\frac{d\varphi}{d\lambda}$  en fonction de  $\lambda$ .

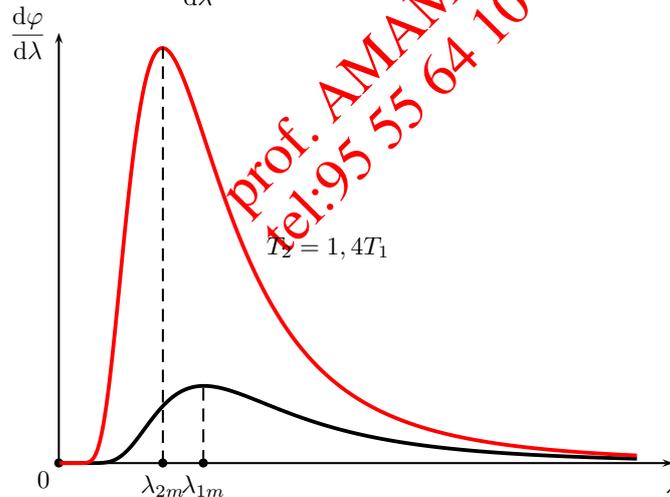


FIG. 5 – Spectre du rayonnement du corps noir

Les constatations importantes à effectuer sont d'une part le fait que lorsque la température augmente la puissance surfacique rayonnée à savoir  $\varphi$  qui est représentée par l'aire sous la courbe puisque  $\varphi = \int \frac{d\varphi}{d\lambda} d\lambda$  augmente fortement. D'autre part, comme on l'a vu avant le maximum se décale vers les courtes longueurs d'onde comme la Loi de WIEN. Un corps à la température de  $T \simeq 300 \text{K}$  émettra essentiellement autour de  $\lambda_m \simeq 10 \mu\text{m}$ , c'est-à-dire dans l'infrarouge. C'est le cas de la plupart des objets terrestres. Le principe de la vision nocturne en infrarouge repose sur la différence des rayonnements émis avec la température. Prenons l'exemple d'une atmosphère nocturne à  $7^\circ\text{C}$  donc  $T_1 = 280 \text{K}$  et celle d'un homme à  $37^\circ\text{C}$  donc  $T_2 = 310 \text{K}$ . Le rapport des températures est  $T_2/T_1 = 1,12$ . La différence entre les rayonnements émis est déjà suffisamment notable comme on peut le voir à la figure 6. Les deux systèmes émettent dans l'infrarouge autour de  $10 \mu\text{m}$  mais la quantité de rayonnement émis est plus importante pour le corps humain d'où la possibilité de le détecter.

### 2.5 Le rayonnement de fond cosmologique

Un corps noir à une température de  $3 \text{K}$  possède un spectre réparti aux alentours de  $\lambda = 1 \text{mm}$  d'après la loi de WIEN. Les modèles cosmologiques actuels (dits du big bang) supposent que l'état *initial* de l'univers était exclu-

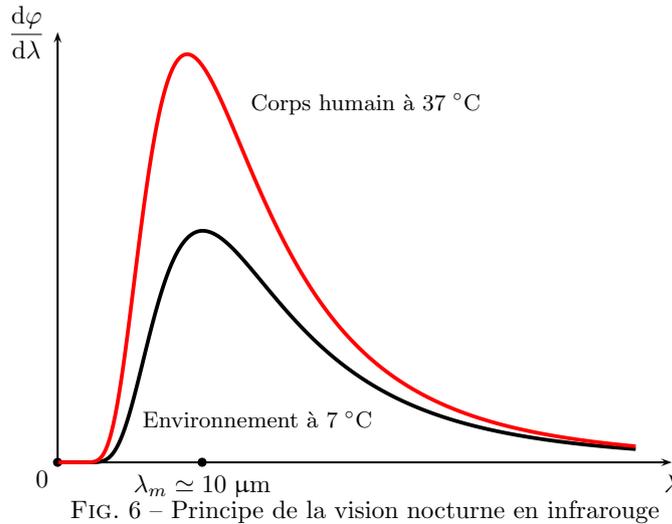


FIG. 6 – Principe de la vision nocturne en infrarouge

sivement constitué de rayonnement, en équilibre thermique à une température très élevée, donc à une longueur d’onde très faible. Le refroidissement rapide associé à l’expansion de l’Univers amena la fin de cette première phase lorsque la température devint suffisamment basse (de l’ordre de 4000 K) pour permettre la recombinaison des électrons et des noyaux en atomes, puis en molécules : c’est la phase de dominante matérielle, qui dure encore actuellement. Le rayonnement qui avait été émis à ce moment poursuit depuis une existence propre, découplée de l’évolution matérielle ; il continue de remplir uniformément l’Univers. Cependant, il subit, comme le reste de l’Univers, l’expansion universelle. Ainsi, il possédait au moment de la recombinaison (il y a environ  $15 \times 10^9$  années) une température de l’ordre de 4000 K, avec donc une répartition donnée par la loi de PLANCK, et un maximum d’émission à la longueur d’onde de  $0,72 \mu\text{m}$ . La réalisation d’observations astronomiques à grande distance revient, compte tenu de la vitesse finie de propagation des ondes électromagnétiques, à une observation du passé. Cependant, une telle observation est affectée par l’effet DOPPLER-FIZEAU, c’est-à-dire par un *décalage vers le rouge* (vers les basses longueurs d’onde) du rayonnement, proportionnel au rapport  $v/c$ , où  $v$  est la vitesse d’éloignement (on parle aussi de vitesse de récession) de l’objet observé, et  $c$  la vitesse de la lumière. Dans le cas de ce rayonnement, le rapport  $v/c$  pour la *frontière* de la zone de rayonnement (c’est-à-dire aussi, la limite de l’univers observable) correspond environ à  $v/c = 1/500$ , donc la longueur d’onde de ce rayonnement, tel qu’il est observé depuis la Terre, atteint aujourd’hui une valeur de l’ordre de 1 mm, ce qui correspond à une température apparente de 2,7 K ; on dit que l’expansion universelle *refroidit* ce rayonnement thermique, qui porte le nom de rayonnement de fond cosmologique. Ce rayonnement, prévu par les théoriciens de la cosmologie, a été observé pour la première fois en 1965 par les radioastronomes américains ARNO PENZIAS et ROBERT WILSON. Conformément aux prévisions théoriques de la cosmologie, ce fond de rayonnement est pratiquement isotrope et est très bien représenté par la loi de PLANCK ; les mesures effectuées le satellite COBE évaluent actuellement sa température à  $2,74 \pm 0,06 \text{ K}$ .

### 3 Loi de Stefan

#### 3.1 Expression de la loi

Cette loi est encore appelée loi de STEFAN-BOLTZMANN. Cette loi caractérise le flux surfacique  $j_{ray} = \varphi$  en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$  émis par un corps noir à l’équilibre à la température  $T$ . Comme nous l’avons écrit précédemment, ce flux surfacique correspond à l’aire sous la courbe représentant la densité spectrale. Pour obtenir le flux surfacique, on intègre sur toutes les longueurs d’onde  $\lambda$ , voir la figure 7.

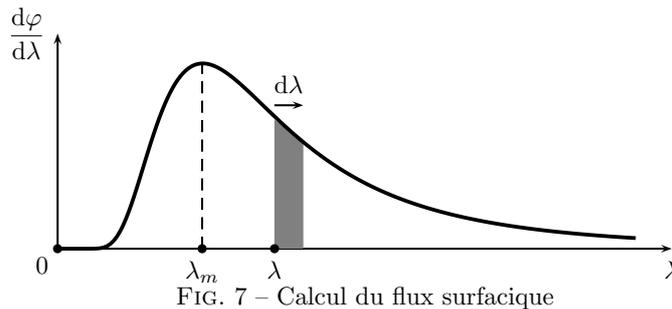


FIG. 7 – Calcul du flux surfacique

On a donc  $j_{ray} = \varphi = \int_{\lambda=0}^{\infty} \left( \frac{d\varphi}{d\lambda} \right) d\lambda$ . Pour calculer cette intégrale, on effectue à nouveau le changement de variable  $\alpha = \frac{hc}{k_B T \lambda}$ . On peut ainsi écrire que  $j_{ray} = \frac{2\pi^5 k_B^4 T^4}{15 c^2 h^3} \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\alpha^3}{\exp \alpha - 1} d\alpha$ . Cette dernière intégrale est difficile à calculer, le résultat est la valeur  $\frac{\pi^4}{15}$ . Ainsi, on peut écrire :

$$\text{Loi de STEFAN-BOLTZMANN : } j_{ray} = \sigma T^4$$

avec  $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  est appelée constante de STEFAN-BOLTZMANN. On constate que quel que soit le système considéré à partir du moment où il est assimilé à un corps noir, il obéit à  $j_{ray} = \sigma T^4$ . De plus, la constante  $\sigma$  ne dépend que de constantes fondamentales de la Physique.

### 3.2 Corps gris

Le modèle du corps noir est un modèle qui ne correspond pas tout à fait à la réalité de l'émission thermique même si le modèle fonctionne très bien pour le rayonnement de fond cosmologique. En pratique, l'émission de rayonnement est décrite par la notion de *corps gris* et caractérisée par un nombre  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  qu'on peut qualifier d'émissivité. Le flux surfacique émis par le corps gris est une fraction de celui émis par le corps noir :

$$\text{Corps gris : } j_{ray} = \varepsilon \sigma T^4$$

La description que nous venons de faire du corps gris n'est pas tout à fait satisfaisante car les corps ne sont pas des émetteurs *universels*. Cela signifie qu'il ne se comporte pas de la même façon sur toutes les longueurs d'onde. Les exemples que nous prendront concernent les deux domaines de rayonnement qui nous concernent à avoir le rayonnement infrarouge autour de  $10 \mu\text{m}$  ou  $300 \text{ K}$  et le rayonnement visible autour de  $0,5 \mu\text{m}$  ou  $6000 \text{ K}$ . Certains corps peuvent être considérés comme des corps quasiment noirs dans un domaine de longueur d'onde et comme des corps gris dans un autre. L'émission s'effectuant au niveau de la surface, c'est surtout l'état de surface d'un corps qui va être décisive. Dans le tableau qui suit, on trouve des exemples du comportement différent d'un même corps en fonction du domaine spectral considéré :

	$\varepsilon$ Visible $\lambda \approx 0,5 \mu\text{m}$	$\varepsilon$ Infrarouge $\lambda \approx 10 \mu\text{m}$
acier galvanisé	0,89	0,28
marbre blanc	0,47	0,97
verre	0,10	0,90
papier blanc	0,28	0,95
végétation	0,80	0,85

On observe donc que le modèle du corps noir s'adapte très bien au cas du marbre dans l'infrarouge et relativement mal dans le domaine visible. Pour l'acier galvanisé, c'est plutôt l'inverse.

### 3.3 Définition des flux surfaciques pertinents

Lors de l'étude thermodynamique des systèmes qui émettent du rayonnement thermique, on est amené à définir plusieurs flux surfaciques. Nous avons déjà présenté le flux surfacique émis par un corps. Un autre flux important est le flux réfléchi par la surface d'un corps. Lorsqu'un corps reçoit un rayonnement thermique, il ne va pas en général l'absorber complètement. Une partie sera réfléchie. Comme pour l'émission la fraction réfléchie du rayonnement dépend de la longueur d'onde et donc du domaine spectral. Le coefficient de réflexion est noté en général  $A$  et porte le nom d'*albédo*. Ce facteur permet d'évaluer la puissance surfacique réfléchie par une surface par rapport à celle qu'elle reçoit. Un exemple : l'atmosphère terrestre réfléchit environ 35% du flux surfacique qu'elle reçoit de la part du Soleil. On a donc  $A = 0,35$ . Comme nous l'avons vu pour l'émissivité  $\varepsilon$ , l'albédo dépend aussi du domaine de longueur d'onde. En particulier, l'atmosphère va relativement peu réfléchir le rayonnement infrarouge mais plutôt l'absorber.

- Le flux surfacique *émis* est donné par le modèle du corps noir  $\varphi_{\text{émis}} = \sigma T^4$  ou bien par celui du corps gris  $\varphi_{\text{émis}} = \varepsilon \sigma T^4$ .
- Le flux surfacique incident sur une surface est :  $\varphi_{\text{incident}}$ .
- Le flux surfacique réfléchi par une surface est :  $\varphi_{\text{réfléchi}} = A \varphi_{\text{incident}}$ .

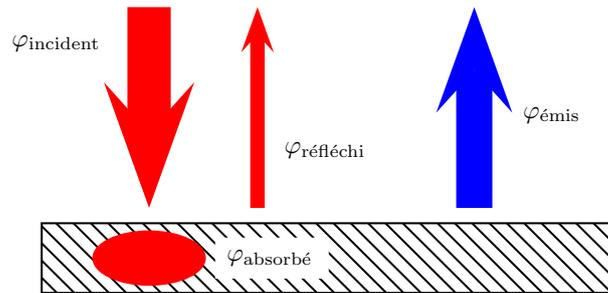


FIG. 8 – Bilan des flux surfaciques

- Le flux surfacique absorbé par une surface est :  $\varphi_{\text{absorbé}} = (1 - A)\varphi_{\text{incident}}$ .
- Le flux surfacique partant d'une surface est :  $\varphi_{\text{partant}}$ .

La figure 8 présente un bilan des différents flux surfaciques définis ci-dessus.

Avec les définitions proposées, on constate que le flux incident se décompose en flux absorbé et en flux réfléchi :

$$\varphi_{\text{incident}} = \varphi_{\text{réfléchi}} + \varphi_{\text{absorbé}}$$

De la même façon, le flux partant comporte deux contributions, une issue de la réflexion et une autre issue de l'émission propre par la surface :

$$\varphi_{\text{partant}} = \varphi_{\text{réfléchi}} + \varphi_{\text{émis}}$$

Le modèle du corps noir suppose que  $\varphi_{\text{réfléchi}} = 0$ . Par conséquent, on a  $\varphi_{\text{incident}} = \varphi_{\text{absorbé}} = \varphi_{\text{partant}} = \varphi_{\text{émis}}$ .

Considérons un corps considéré comme noir à la température  $T$  plongé dans un environnement aussi assimilé à un corps noir à la température  $T_0$ . Ce corps émet selon la loi de STEFAN-BOLTZMANN le flux surfacique  $\sigma T^4$ . Mais dans le même temps, il reçoit de la part de son environnement le flux surfacique  $\sigma T_0^4$ . Pour tout problème énergétique, il faudra tenir compte de ces deux flux surfaciques. Si l'on utilise la convention habituelle de la Thermodynamique qui compte positivement les énergies reçues par le corps considéré, on a donc le bilan de flux suivant :

$$j_{\text{bilan}} = \varphi_{\text{bilan}} = \sigma(T_0^4 - T^4)$$

### 3.4 Linéarisation d'un bilan de rayonnement

## **partie IV : Filtres et analyses de Fourier**

prof. AMMI ipest  
tel:95 55 6410

# Rappels d'électrocinétique

## I Rappels sur les dipôles

### I.1. Rappels sur les conducteurs ohmiques

#### a) Loi d'Ohm locale

Un conducteur est un corps à l'intérieur duquel des charges peuvent se déplacer sous l'action d'une force, aussi petite soit-elle.

Prenons le cas simple d'un conducteur filiforme. En appliquant une différence de potentiel  $U = V_A - V_B$  entre deux points assez proches  $A$  et  $B$  de ce conducteur, on impose un champ électrique

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}U = -\overrightarrow{\text{grad}}(V_A - V_B)$$

Les porteurs de charge, de charge  $q$ , sont alors mis en mouvement sous l'effet de la force de Lorentz  $\vec{F} = q\vec{E}$  et il apparaît alors un courant d'intensité  $i$  définie par  $i = \frac{dq}{dt}$  correspondant à la quantité de charge traversant une portion de conducteur par unité de temps.

Lorsque la géométrie du conducteur est plus complexe, on introduit la densité volumique de courant  $\vec{j}$

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v}$$

où  $\rho_m$  est la densité volumique de charge mobile et  $\vec{v}$  la vitesse des porteurs de charge. La charge totale traversant une section  $d^2S$  pendant  $dt$  vaut  $dq = \rho_m \vec{v} \cdot d^2S dt$  et l'intensité du courant vaut alors

$$di = \rho_m \vec{v} \cdot d^2S = \vec{j} \cdot d^2S$$

L'expérience montre que pour un grand nombre de conducteurs et dans un large domaine de validité, le vecteur densité volumique de courant est proportionnel au champ électrique  $\vec{E}$  en chaque point  $M$  du conducteur

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

où  $\gamma = \gamma(M)$  est la conductivité électrique au point  $M$ .

#### Propriété

On dit qu'un conducteur vérifie la loi d'Ohm locale si, en chacun de ses points

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

où  $\gamma$  est la conductivité du matériau,  $\vec{j}$  la densité volumique de courant et  $\vec{E}$  le champ électrique dans le matériau.

On parle alors de conducteur ohmique.

Un conducteur ohmique parfait est caractérisé par une conductivité infinie :

$$\gamma \rightarrow \infty \quad \text{conducteur parfait}$$

### b) Résistance et conductance électriques

Considérons un conducteur filiforme de longueur  $\ell$  et de section  $S$  :

$$I = jS \quad (\text{intensité du courant})$$

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \sim E\ell \quad (\text{tension aux bornes du conducteur})$$

La loi d'Ohm locale devient

$$\frac{I}{S} = j = \gamma E = \gamma \frac{U}{\ell} \quad \text{soit } \boxed{U = RI} \quad \text{avec } R = \frac{\ell}{\gamma S}$$

On retrouve la loi d'Ohm.

#### Propriété

On définit la résistance  $R$  d'un tronçon de conducteur ohmique de longueur  $\ell$  et de section  $S$  par la relation

$$R = \rho \frac{\ell}{S} \quad \text{en ohm } (\Omega)$$

où  $\rho = 1/\gamma$  est la résistivité du matériau.

De la même manière, on définit la conductance  $G$  par

$$G = \frac{1}{R} = \gamma \frac{S}{\ell} \quad \text{en siemens (S)}$$

## I.2. Dipôle : définition et convention

### Définition :

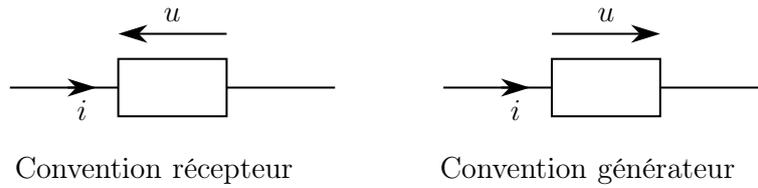
On appelle *dipôle électrocinétique* tout système relié à un circuit électrique par 2 pôles.

Schématiquement, un dipôle est généralement représenté par un rectangle, traversé par un courant électrique d'intensité  $i$  et aux bornes duquel existe une différence de potentiel  $u$ , appelée tension.

### Remarque

*C'est en raison de la différence de potentiel aux bornes d'un dipôle qu'un courant électrique s'écoule !*

Le schéma ci-dessous fait apparaître les deux orientations possible de la tension.



En convention récepteur la tension  $u$  et le courant  $i$  sont orientés en sens opposés.

En convention générateur la tension  $u$  et le courant  $i$  sont orientés dans le même sens.

### I.3. Caractéristique et classification des dipôles

**Définition :**

On appelle caractéristique d'un dipôle la courbe  $i = f(u)$  où :

- \*  $i$  est l'intensité du courant qui le traverse ;
- \*  $u$  est la tension à ses bornes, une fois précisée la convention générateur ou récepteur.

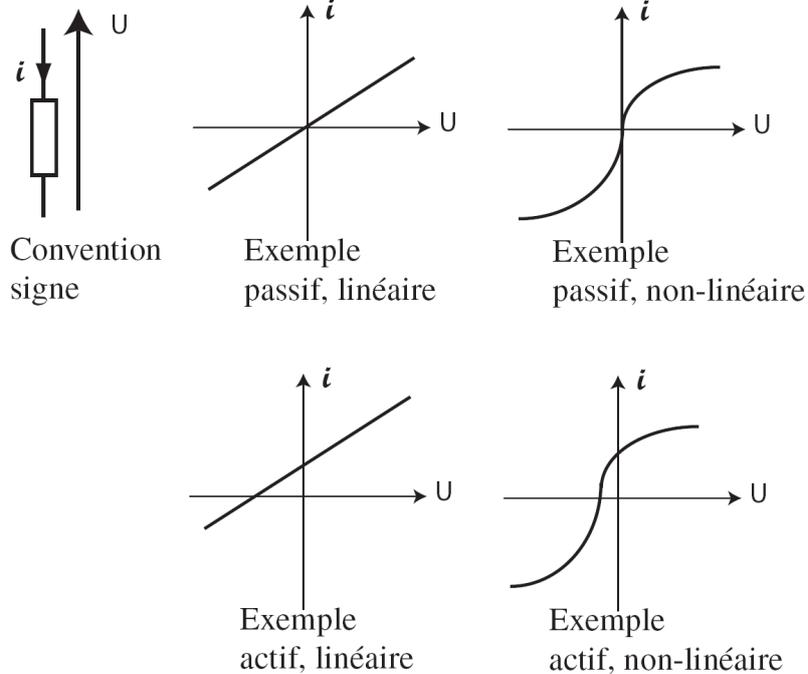


FIGURE 1 – Exemples de caractéristiques.

**Définition :**

Un dipôle est dit passif si sa caractéristique passe par l'origine ( $i = 0$  et  $u = 0$ ).

Un dipôle est dit actif si sa caractéristique ne passe pas par l'origine.

**Définition :**

Un dipôle est linéaire si le lien entre  $u$  et  $i$  est :

- \* ou bien une fonction affine ;
  - \* ou bien une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
- Sinon, il est non-linéaire.

#### I.4. Exemples de dipôles

En électrocinétique, les dipôles étudiés sont constitués :

- \* de sources idéales de tension ou de courant ;
- \* de résistors, de condensateurs ou de bobines ;
- \* d'éléments non-linéaires (diodes, transistors, amplificateurs opérationnels).

Nous donnons dans la suite quelques exemples de ces dipôles

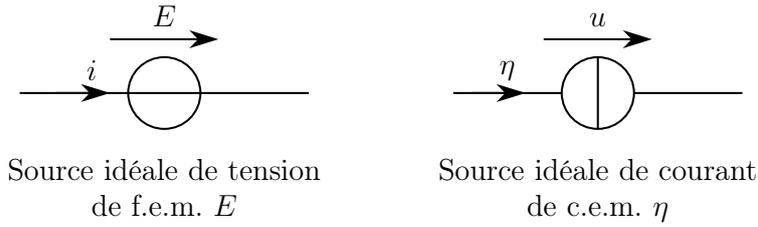
##### a) Sources idéales de tension et de courant

**Définition :**

Une source idéale de tension fournit une tension constante, appelée force électromotrice (f.e.m.), indépendamment du courant qui la traverse.

Une source idéale de courant fournit un courant d'intensité constante, appelé courant électromoteur (c.e.m.), indépendamment de la tension à ces bornes.

De telles sources sont représentées schématiquement sur la figure ci-dessous.



Les caractéristiques des sources idéales de tension et de courant sont représentées sur la figure 2.

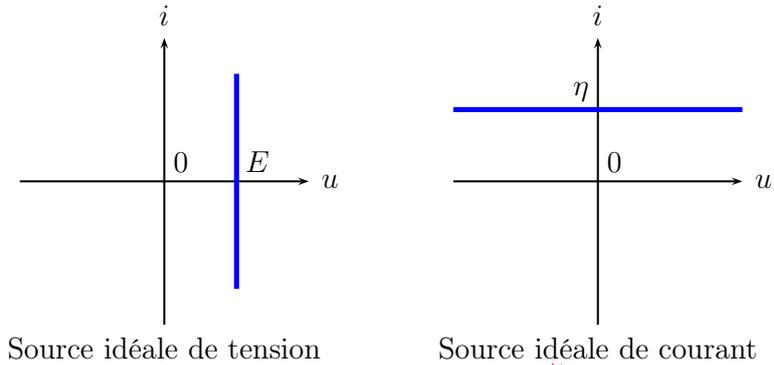


FIGURE 2 – Caractéristiques de sources idéales de tension (gauche) et de courant (droite).

Remarque

Une source idéale est un dipôle linéaire actif.

**b) Dipôles linéaires passifs**

Parmi les dipôles linéaires passifs, on distingue :

- ★ les résistors, caractérisés par une résistance  $R$ ;
- ★ les condensateurs idéaux, caractérisés par une capacité  $C$ ;
- ★ les bobines idéales, caractérisés par une inductance  $L$ .

Les relations entre l'intensité du courant et la tension aux bornes de chaque dipôle sont indiquées sur la figure 3.

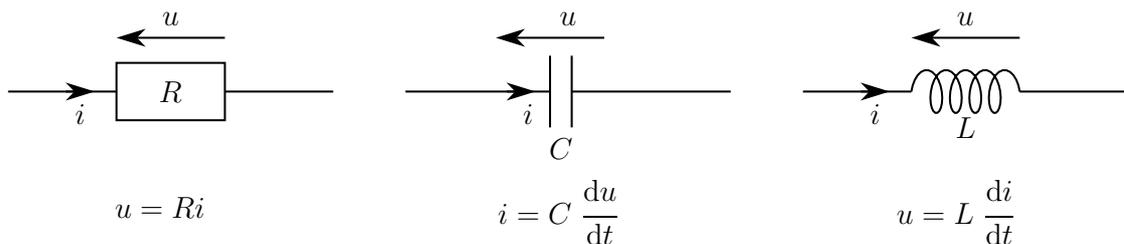


FIGURE 3 –

En régime sinusoïdal permanent, un dipôle linéaire soumis à une tension sinusoïdale

$$u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

est parcouru par un courant d'intensité

$$i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

À la tension  $u(t)$  et à l'intensité  $i(t)$ , on associe les grandeurs complexes suivantes :

$$\underline{u} = u_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad \text{et} \quad \underline{i} = i_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

**Définition :**

En régime sinusoïdal permanent, on définit l'impédance complexe  $\underline{Z}$  et l'admittance complexe  $\underline{Y}$  d'un dipôle linéaire par les relations

$$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i} \quad \text{et} \quad \underline{i} = \underline{Y} \underline{u} = \frac{1}{\underline{Z}} \underline{u}$$

Remarque

En utilisant les expressions générales de  $\underline{u}$  et  $\underline{i}$ , on en déduit

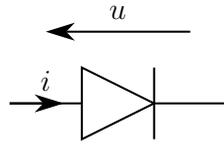
$$\underline{Z} = \frac{u_m}{i_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u_m = |\underline{Z}| i_m \\ \varphi_u - \varphi_i = \varphi = \arg(\underline{Z}) \end{cases}$$

Les résultats concernant les résistors, condensateurs idéaux et bobines idéales sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Dipôle	Résistor	Condensateur idéal	Bobine idéale
Relation courant-tension	$u = Ri$	$i = C \frac{du}{dt}$	$u = L \frac{di}{dt}$
Relation entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$	$\underline{u} = R\underline{i}$	$\underline{i} = C \frac{d\underline{u}}{dt}$	$\underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt}$
Impédance complexe	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$	$\underline{Z}_L = jL\omega$
Admittance complexe	$\underline{Y}_R = \frac{1}{R}$	$\underline{Y}_C = jC\omega$	$\underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega}$

c) Exemple de dipôle non-linéaire : la diode

Une diode est un dipôle dont la représentation figure ci-dessous.



La caractéristique d'une diode est représentée sur la figure 4. La relation suivante entre  $i$  et  $u$  est la suivante :

$$\begin{aligned}
 & i \leq 0 \quad \text{et} \quad u \leq V_d \\
 & i = 0 \quad \text{si} \quad u < V_d \\
 & u = 0 \quad \text{si} \quad i > 0
 \end{aligned}$$

Généralement, pour une diode réelle  $V_d = 0,7 \text{ V}$

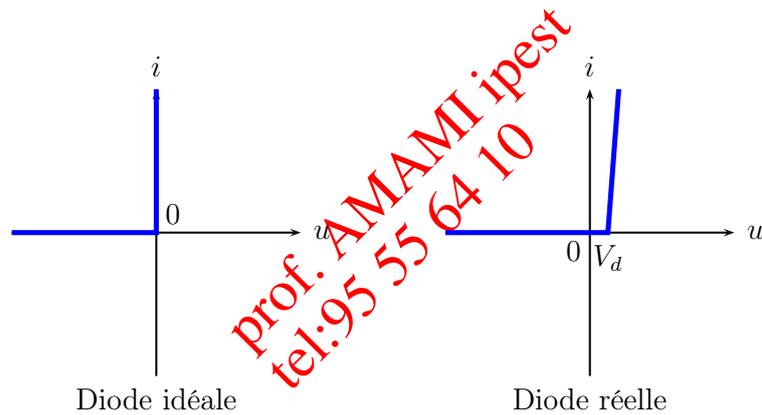


FIGURE 4 – Caractéristique d'une diode idéale (gauche) et réelle (droite).

Remarque

*La relation entre  $i$  et  $u$  n'est ni affine, ni une équation différentielle linéaire à coefficients constants : une diode est un dipôle non-linéaire.*

*C'est également un dipôle passif car la caractéristique passe par le point  $(u = 0, i = 0)$ .*

Remarque

*Dans la pratique, une diode peut supporter de grande tension négative et de forts courants mais au-delà de certaines valeurs, elle se détériore.*

Certaines diodes possèdent la propriété de laisser passer le courant pour des tensions suffisamment négative : ce sont des diode Zener dont la caractéristique est représentée sur la figure 5.

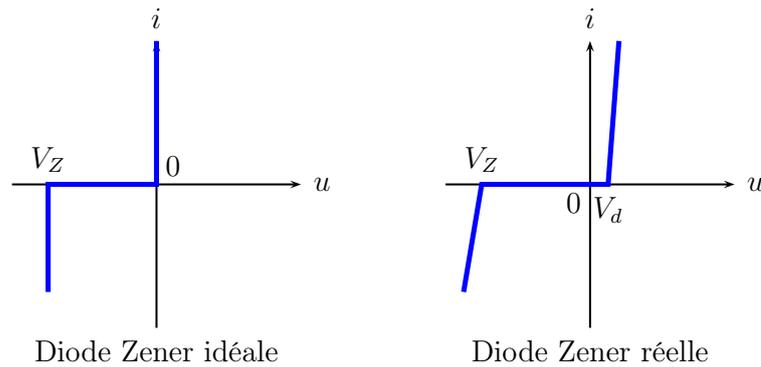


FIGURE 5 – Caractéristique d’une diode Zener.

## II Lois de Kirchhoff et conséquences importantes

### II.1. Loi des nœuds et théorème de Millman

#### Loi des nœuds

Dans l’approximation des régimes quasi-stationnaires (A.R.Q.S.), la somme algébrique des intensités arrivant à un nœud est nulle :

$$\sum_k \varepsilon_k i_k(t) = 0$$

où

- $\varepsilon_k = +1$  si le courant d’intensité  $i_k$  arrive sur le nœud ;
- $\varepsilon_k = -1$  sinon.

#### Remarque

Cette relation est également valable en notations complexes, à condition que la fréquence des signaux ne soit pas trop élevée.

Considérons le circuit de la figure 7 et plaçons-nous en régime sinusoidal permanent.

La loi des noeuds en A conduit à

$$\underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3 = 0$$

où  $\underline{i}_1$ ,  $\underline{i}_2$  et  $\underline{i}_3$  sont les intensités complexes des courants arrivant en A issus des branches 1,2 et 3. On en déduit, en introduisant les impédances complexes.

$$\underbrace{\frac{V_1 - V_A}{Z_1}}_{\underline{i}_1} + \underbrace{\frac{V_2 - V_A}{Z_2}}_{\underline{i}_2} + \underbrace{\frac{V_3 - V_A}{Z_3}}_{\underline{i}_3} = 0$$

On obtient le théorème de Millman

$$\underline{Y}_1 V_1 + \underline{Y}_2 V_2 + \underline{Y}_3 V_3 = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) V_A$$

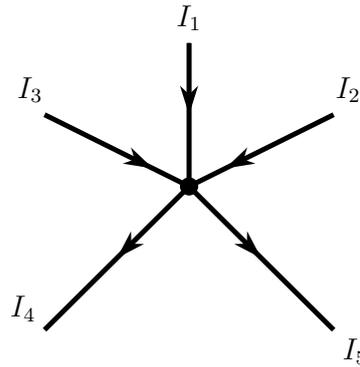


FIGURE 6 – Dans l’A.R.Q.S., la loi des nœuds impose :  $\sum_k \varepsilon_k I_k = I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$ .

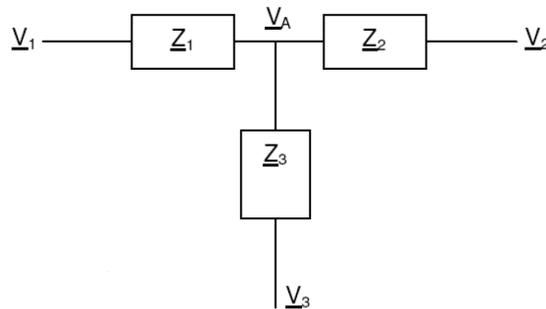


FIGURE 7  
f. AML 5564

**Théorème de Millman**

En l’absence de sources de courant ou de tension, le potentiel complexe d’un nœud est le barycentre des potentiels complexes des nœuds voisins affectés des admittances complexes correspondantes

$$V_A = \frac{\sum_k Y_k V_k}{\sum_k Y_k}$$

Remarque

Le théorème de Millman n’est qu’une conséquence de la loi des nœuds !

Exemple

Appliquons le théorème de Millman pour déterminer le potentiel complexe  $V_O$  dans le circuit de la figure 8.

$$V_O = \frac{\frac{V_e}{R} + \frac{V_s}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_L}}$$

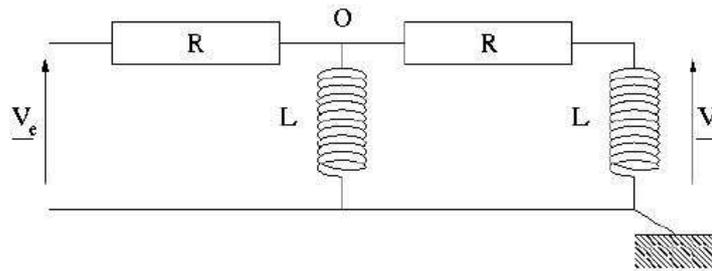


FIGURE 8 –

## II.2. Loi des mailles et loi de Pouillet

### Loi des mailles

Dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (A.R.Q.S.), la somme algébrique des tensions dans une maille orientée est nulle :

$$\sum_k \varepsilon_k u_k(t) = 0$$

où

- $\varepsilon_k = +1$  si la tension  $u_k$  est orientée dans le sens conventionnel de la maille ;
- $\varepsilon_k = -1$  sinon.

### Remarque

Cette relation est également valable en notations complexes, à condition que la fréquence des signaux ne soit pas trop élevée.

Lorsqu'un circuit ne possède qu'une seule maille, on peut déterminer rapidement l'intensité le traversant à l'aide de la loi de Pouillet.

Considérons le circuit de la figure 9 et on oriente le circuit dans le sens du courant.

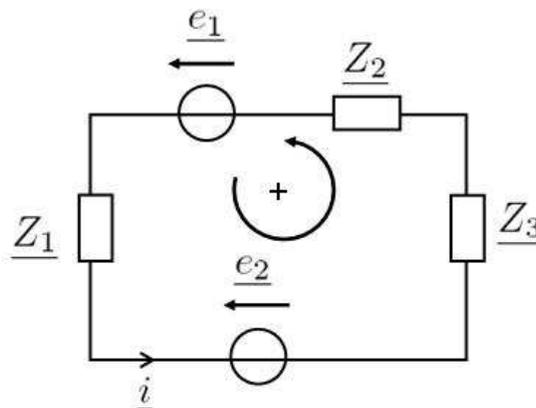


FIGURE 9 –

La loi des mailles impose, en notations complexes :

$$\underline{e}_1 - \underline{Z}_1 i - \underline{e}_2 - \underline{Z}_3 i - \underline{Z}_2 i = 0$$

soit

$$i = \frac{\underline{e}_1 - \underline{e}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

**Loi de Pouillet**

Dans une maille unique, l'intensité du courant est donnée par

$$i = \frac{\sum_k \epsilon_k e_k}{\sum_k Z_k}$$

où  $\epsilon_k = +1$  si la tension  $e_k$  est dans le même sens que le courant et  $\epsilon_k = -1$  sinon.

**II.3. Ponts diviseurs de tension et de courant**

a) Rappels sur les associations de dipôles

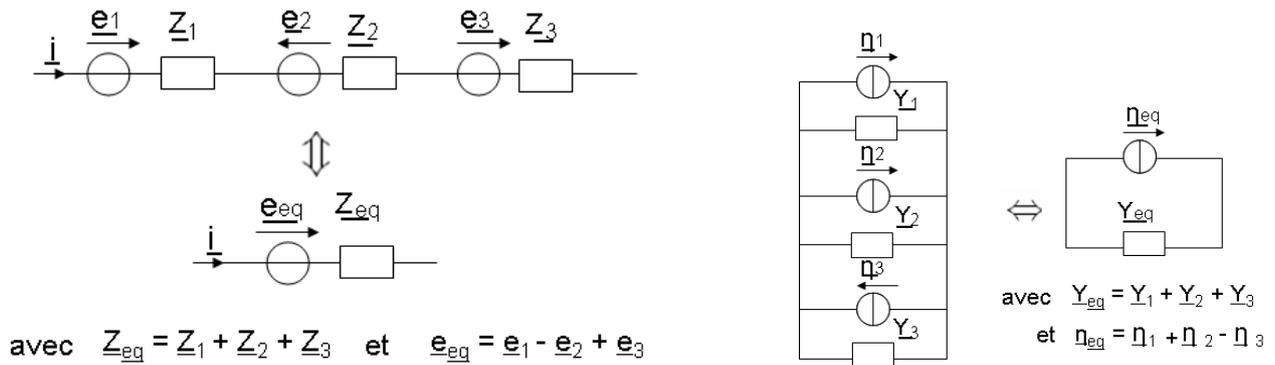
**Propriété**

L'impédance équivalente à l'association en série de dipôles est la somme des impédances des dipôles

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_k \underline{Z}_k \quad \text{association en série}$$

L'admittance équivalente à l'association en parallèle de dipôles est la somme des admittances des dipôles

$$\underline{Y}_{eq} = \sum_k \underline{Y}_k \quad \text{association en parallèle}$$



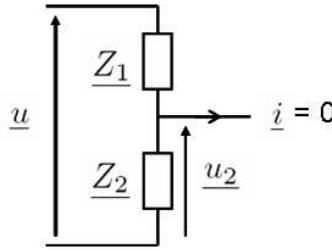


FIGURE 10 – Pont diviseur de tension.

**b) Pont diviseur de tension**

Considérons l'association en série de deux dipôles d'impédances complexes  $Z_1$  et  $Z_2$ , comme indiqué sur la figure 10.

Notons  $I$  l'intensité complexe du courant qui traverse les dipôles. Puisque le même courant traverse les deux dipôles :

$$I = \frac{u}{Z_1 + Z_2} = \frac{u_2}{Z_2}$$

On en déduit

$$u_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} u$$

**Pont diviseur de tension**

Considérons l'association en série de dipôles d'impédances complexes  $Z_k$ , soumise à la tension  $u$ . La tension au bornes du dipôle  $n$  vaut alors

$$u_n = \frac{Z_n}{\sum_k Z_k} u$$

**Remarque**

Afin d'appliquer la formule du pont diviseur de tension, il faut s'assurer que tous les dipôles soient parcourus par le même courant !

**c) Pont diviseur de courant**

Considérons l'association en parallèle de plusieurs dipôles, d'admittances complexes  $Y_1, Y_2, \dots$ , comme indiqué sur la figure 11.

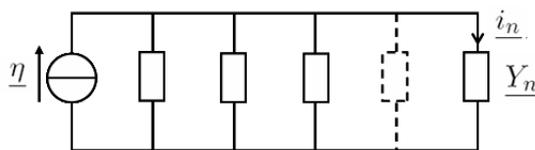


FIGURE 11 – Pont diviseur de courant.

Notons  $\underline{u}$  la tension aux bornes des dipôles. Puisque les dipôles sont soumis à la même différence de potentiel :

$$\underline{u} = \frac{\underline{\eta}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots} = \frac{\underline{i}_n}{\underline{Y}_n}$$

On en déduit

$$\underline{i}_n = \frac{\underline{Y}_n}{\sum_k \underline{Y}_k} \underline{\eta}$$

### Pont diviseur de courant

Considérons l'association en parallèle de dipôles d'admittances complexes  $\underline{Y}_k$ , alimentée par un courant d'intensité complexe  $\underline{\eta}$ . L'intensité du courant traversant le dipôle  $n$  vaut alors

$$\underline{i}_n = \frac{\underline{Y}_n}{\sum_k \underline{Y}_k} \underline{\eta}$$

### Remarque

Afin d'appliquer la formule du pont diviseur de courant, il faut s'assurer que la différence de potentiel soit la même aux bornes de tous les dipôles !

## III Modélisation de Thévenin et de Norton

### III.1. Modèles de Thévenin et de Norton des dipôles linéaires actifs

Tous les résultats qui suivent seront énoncés en régime sinusoïdal permanent.

Un dipôle linéaire actif est modélisé par l'association en série :

- ★ d'une source idéale de tension, de force électromotrice  $\underline{e}$ ;
- ★ d'un dipôle linéaire passif, d'impédance complexe  $\underline{Z}$ .

La tension aux bornes d'un tel dipôle vaut

$$\underline{u} = \underline{e} - \underline{Z} \underline{i}$$

Mais cette relation peut aussi s'écrire

$$\underline{i} = \underline{\eta} - \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} \quad \text{avec} \quad \underline{\eta} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}}$$

Il est donc possible de modéliser un tel dipôle par l'association en parallèle :

- ★ d'une source idéale de courant électromoteur  $\underline{\eta} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}}$ ;
- ★ d'un dipôle de même impédance  $\underline{Z}$ .

La figure 12 illustre l'équivalence de ces deux modélisation.

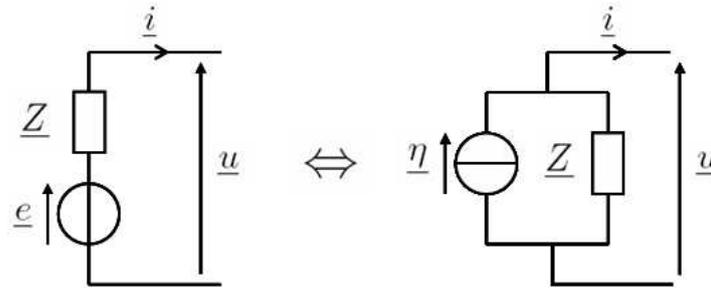


FIGURE 12 – Modélisation de Thévenin (gauche) et de Norton (droite) d'un dipôle linéaire actif.

**Propriété**

En régime sinusoïdal forcé, un dipôle actif linéaire peut être représenté en notation complexe par :

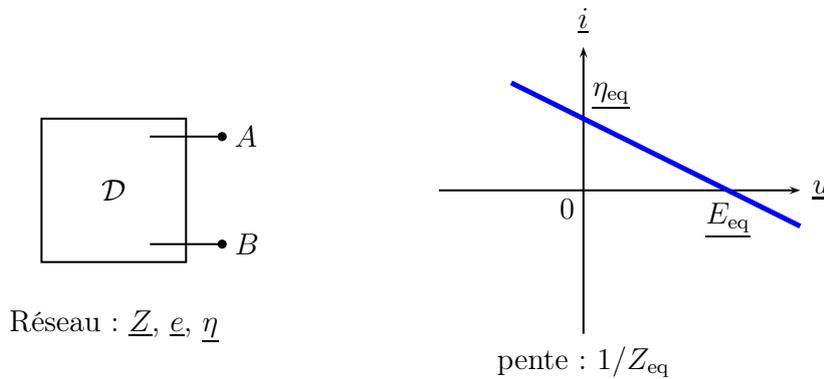
- ★ un générateur de Thévenin (source idéale de tension de f.é.m.  $\underline{e}$  en série avec une impédance  $\underline{Z}$ ) ;
- ★ un générateur de Norton (source idéale de courant de c.é.m.  $\underline{\eta}$  en parallèle avec une impédance  $\underline{Z}$ )

On a la relation :  $\underline{\eta} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}} = \underline{Y} \underline{e}$

Prof. AMAMI  
tel: 95 55 64 10

**III.2. Modélisation d'un réseau dipolaire linéaire**

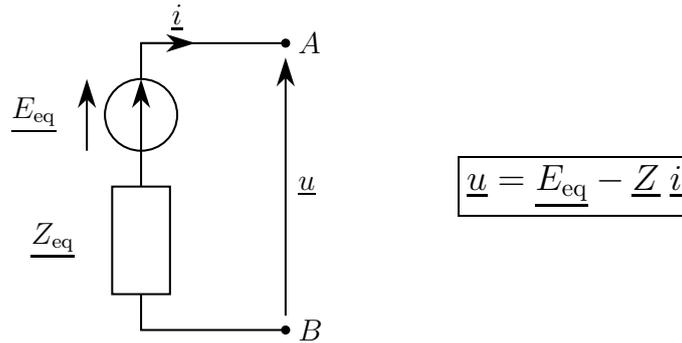
En régime sinusoïdal forcé, tous les dipôles linéaires ont une caractéristique de la forme  $\underline{u} = \underline{a} \underline{i} + \underline{b}$ . Comme les lois de Kirchhoff sont linéaires, la loi caractéristique de l'ensemble du réseau est aussi linéaire :  $\underline{u} = \underline{\alpha} \underline{i} + \underline{\beta}$ .



Réseau :  $\underline{Z}, \underline{e}, \underline{\eta}$

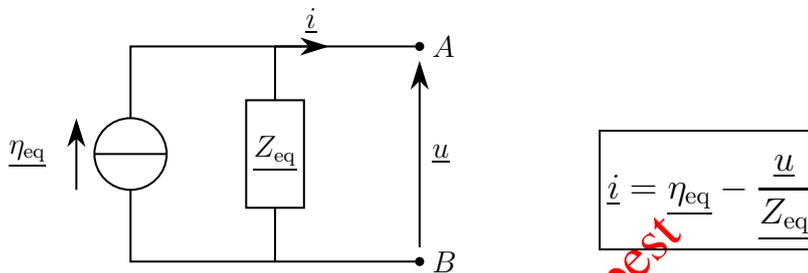
Un réseau linéaire de cette forme est modélisable par un générateur de Thévenin représenté ci-dessous formé :

- ★ d'une source idéale de tension de force électromotrice  $\underline{E}_{eq}$  ;
- ★ d'un dipôle d'impédance  $\underline{Z}_{eq}$ .



Ce même réseau linéaire est aussi modélisable par un générateur de Norton représenté ci-dessous formé :

- ★ d'une source idéale de courant de courant électromoteur  $\eta_{eq}$  ;
- ★ d'un dipôle d'impédance  $Z_{eq}$ .



### III.3. Méthode de superposition des états

Lorsqu'un réseau linéaire dipolaire est constitué de plusieurs sources, on pourra appliquer avantageusement le principe de superposition suivant.

#### Principe de superposition

Dans un circuit linéaire comportant des sources sinusoïdales libres, la valeur complexe  $x(t)$  d'une grandeur quelconque (courant ou tension) est égale à la somme des valeurs complexes de cette grandeur obtenues lorsqu'une seule source fonctionne, les autres étant éteintes.

- ★ l'intensité dans une branche est la somme des intensités  $i(k)$  produites par chaque source  $k$  fonctionnant seule ;
- ★ la tension aux bornes d'un dipôle est la somme des tensions  $u(k)$  produites par chaque source  $k$  fonctionnant seule.



Remarque : dans le cas où les sources n'ont pas la même fréquence, les impédances complexes du circuit changent avec chaque source puisque ces impédances dépendent de la pulsation  $\omega$ .

### III.4. Théorème de Thévenin

On cherche les caractéristiques  $E_{eq}$  et  $Z_{eq}$  du générateur de Thévenin équivalent à un réseau linéaire.

a) Détermination de  $E_{eq}$ 

On constate que  $\underline{u} = E_{eq}$  lorsque  $\underline{i} = 0$ , c'est-à-dire lorsque le circuit est ouvert entre les points  $A$  et  $B$ .

Pour déterminer  $E_{eq}$ , il suffit de mettre le réseau en circuit ouvert et de calculer  $\underline{u} = E_{eq}$  par les méthodes usuelles (diviseur de tension, théorème de Millman ...).

b) Détermination de  $Z_{eq}$ 

Si l'on éteint les sources libres, alors  $E_{eq} = 0$ . On a alors  $\underline{u} = -Z_{eq} \underline{i}$ . L'impédance  $Z_{eq}$  est donc l'impédance du réseau quand toutes les sources sont éteintes : on parle de réseau passivé.

Pour déterminer  $Z_{eq}$ , il suffit d'éteindre les sources et de calculer l'impédance équivalente au réseau par association d'impédances.

c) Théorème de ThéveninThéorème de Thévenin

- Tout réseau dipolaire linéaire  $\mathcal{D}$  peut être modélisé par l'association en série :
- d'une source idéale de tension de f.é.m.  $E_{eq}$  égale à la tension aux bornes du réseau en circuit ouvert ;
  - d'un dipôle d'impédance  $Z_{eq}$  égale à l'impédance du réseau passivé (toutes sources libres éteintes).

Prof. Dr. A. Bouhassira  
tel: 95 53

III.5. Théorème de Norton

On cherche les caractéristiques  $\underline{\eta}_{eq}$  et  $Z_{eq}$  du générateur de Norton équivalent à un réseau linéaire.

a) Détermination de  $\underline{\eta}_{eq}$ 

On constate que  $\underline{i} = \underline{\eta}_{eq}$  lorsque  $\underline{u} = 0$ , c'est-à-dire lorsqu'on court-circuite le réseau entre les points  $A$  et  $B$  en reliant ces points par un fil.

Pour déterminer  $\underline{\eta}_{eq}$ , il suffit de mettre le réseau en court-circuit et de calculer  $\underline{i} = \underline{\eta}_{eq}$  par les méthodes usuelles (diviseur de courant, théorème de Millman ...).

b) Détermination de  $Z_{eq}$ 

Si l'on éteint les sources libres, alors  $\underline{\eta}_{eq} = 0$ . On a alors  $\underline{u} = -Z_{eq} \underline{i}$ . L'impédance  $Z_{eq}$  est donc l'impédance du réseau quand toutes les sources sont éteintes : on parle de réseau passivé.

Pour déterminer  $Z_{eq}$ , il suffit d'éteindre les sources et de calculer l'impédance équivalente au réseau par association d'impédances.

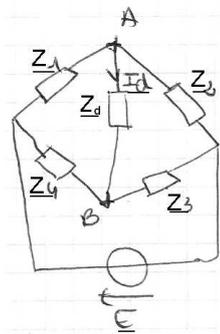
c) Théorème de Norton

Théorème de Norton

Tout réseau dipolaire linéaire  $\mathcal{D}$  peut être modélisé par l'association en parallèle :

- d'une source idéale de courant de c.e.m.  $\eta_{eq}$  égal au courant qui traverse le dipôle équivalent en court-circuit ;
- d'un dipôle d'impédance  $Z_{eq}$  égale à l'impédance du réseau passivé (toutes sources libres éteintes).

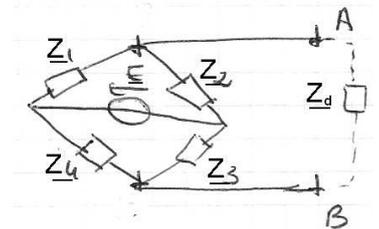
III.6. Application : pont de Wheatstone



$Z_d$  est l'impédance d'un détecteur de courant : on cherche  $I_d$ .

prof. AMAMI ipest  
tel:95 55 64 10

1. Identifier le réseau dipolaire  $AB$

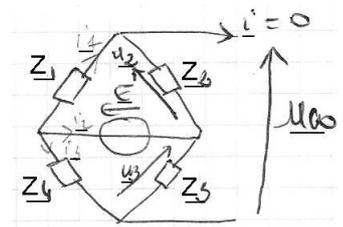


2. Calculer  $E_{eq}$

En circuit ouvert  $u = u_{co} = u_3 + u_2$

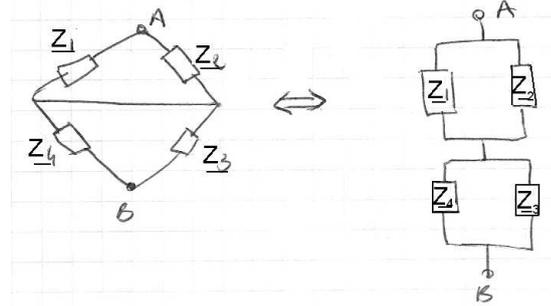
Diviseurs de tension :  $u_2 = \frac{Z_2 E}{Z_1 + Z_2}$  et  $u_3 = \frac{-Z_3 E}{Z_3 + Z_4}$

Donc 
$$E_{eq} = u_{co} = \left( \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} \right) E = \frac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}$$



3. Calculer  $Z_{eq}$

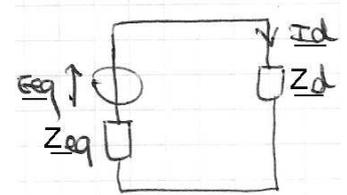
$$\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}$$



4. Remplacer le dipôle par son modèle de Thévenin

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{E}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_d}$$

Le pont de Wheastone est dit équilibré si  $\underline{I}_d = 0$  ( $\underline{E}_{eq} = 0$ ). Condition d'équilibre :  $\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_4$

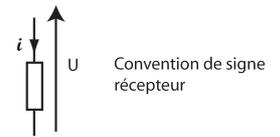


## IV Puissance reçue par un dipôle

### IV.1. Convention récepteur/générateur

#### a) Convention récepteur

Soit un dipôle parcouru par un courant d'intensité  $i(t)$  et aux bornes duquel on a une tension  $u(t) = v_A - v_B$  avec la convention de signe de la figure ci-contre.

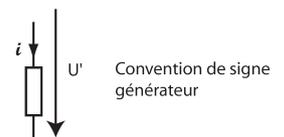


La **puissance instantanée reçue** par le dipôle est alors :  $P(t) = u(t) \times i(t)$

- Si  $u$  et  $i$  sont tous les deux positifs, **la puissance reçue est positive**. Le dipôle a un **comportement récepteur**.  
C'est pourquoi cette convention de signe où  $u$  et  $i$  sont de sens opposés est appelée **convention récepteur**.
- Dans le cas où soit la tension soit l'intensité est négative, **la puissance reçue est négative**. Le dipôle a un **comportement générateur**.

#### b) Convention générateur

On définit alors une deuxième convention de signe (figure ci-contre), où tension et courant vont dans le même sens. On parle de **convention générateur**.



La **puissance instantanée fournie** par le dipôle est alors :  $P(t) = u'(t) \times i(t)$

- Si  $u'$  et  $i$  sont tous les deux positifs et **la puissance fournie est positive**. Le dipôle a un **comportement générateur**.
- Dans le cas où soit la tension soit l'intensité est négative, **la puissance fournie est négative**. Le dipôle a un **comportement récepteur**.

Remarque

Il faut bien noter que le caractère générateur ou récepteur d'un dipôle est différent de son caractère actif ou passif. On peut par exemple avoir un dipôle passif qui fonctionne en générateur ou un dipôle actif qui fonctionne en récepteur (exemples du condensateur ou d'une bobine). De même, le caractère générateur ou récepteur d'un dipôle est indépendant de la convention choisie (un résistor sera récepteur quelle que soit la convention utilisée).

**IV.2. Régime sinusoïdal permanent : valeur efficace et valeur maximale**

Dans toute la suite, on se place dans le cas de signaux sinusoïdaux  $T$ -périodiques de la forme :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

avec  $\omega = 2\pi/T$  et  $x_m$  la valeur maximale de  $x(t)$ .

On définit la valeur efficace de  $x(t)$  par

$$X_{\text{eff}} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle_T} \quad \text{où} \quad \langle x^2(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (\text{valeur moyenne de } x^2(t))$$

Avec

$$x^2(t) = x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{x_m^2}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)]$$

on trouve

$$X_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{x_m^2}{2} \quad \text{soit} \quad \boxed{X_{\text{eff}} = \frac{x_m}{\sqrt{2}}}$$

$x(t)$  prend alors la forme

$$x(t) = X_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

Dans le cas d'un dipôle, on notera

★  $u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi_u)$  la tension à ses bornes ;

★  $i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi_i)$  l'intensité qui le traverse ;

où  $T = 2\pi/\omega$ .

$u_m = U_{\text{eff}} \sqrt{2}$  et  $i_m = I_{\text{eff}} \sqrt{2}$  sont respectivement la tension et l'intensité maximales,  $U_{\text{eff}}$  et  $I_{\text{eff}}$  étant la tension et l'intensité efficaces.

**IV.3. Régime sinusoïdal permanent : puissance moyenne**

En convention récepteur, la puissance instantanée reçue par le dipôle est de la forme

$$p(t) = u(t) \times i(t) = u_m i_m \cos(\omega t + \varphi_u) \cos(\omega t + \varphi_i)$$

soit

$$p(t) = \frac{u_m i_m}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)] \quad \text{avec} \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

La puissance moyenne sur une période  $T$  est définie par

$$\mathcal{P}_m = \langle p(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

En évaluant l'intégrale, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_m &= \frac{u_m i_m}{2T} \left[ \int_0^T \cos \varphi dt + \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) dt \right] \\
 &= \frac{u_m i_m}{2T} \left( T \cos \varphi + \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]_0^T \right) \\
 &= \frac{u_m i_m}{2} \cos \varphi
 \end{aligned}$$

**Propriété**

En régime sinusoïdal, la puissance moyenne reçue par un dipôle est appelée **puissance active** avec :

★  $U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$  : **puissance apparente** (en VA volt-ampère) ;

★  $\cos \varphi$  : **facteur de puissance**

où  $\varphi$  est le déphasage entre la tension et l'intensité.

**IV.4. Exemple : puissance moyenne reçue par les dipôles  $R$ ,  $L$  et  $C$** 

Plaçons-nous en régime sinusoïdal permanent.

**a) Cas du résistor**

La tension aux bornes d'un résistor et l'intensité qui le traverse sont en phase de sorte que

$$\varphi = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 1$$

et

$$\mathcal{P}_m(R) = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = R I_{\text{eff}}^2 = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$$

**Remarque**

La puissance instantanée est de la forme  $p(t) = \frac{u_m i_m}{2} [1 + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)] \geq 0$  donc le résistor a toujours un comportement récepteur.

**Remarque**

Le réseau EDF est constitué de câbles de forte résistance. Afin de ne pas perdre trop d'énergie dans le transport d'électricité, il faut limiter la valeur de  $I_{\text{eff}}$ , ce qui revient à imposer une forte différence de potentiel.

b) Cas du condensateur idéal

Pour un condensateur idéal,  $u(t)$  et  $i(t)$  sont déphasés de  $-\pi/2$  :

$$\frac{u}{i} = \underline{Z}_c = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{C\omega} e^{-j\pi/2}$$

d'où  $\varphi = -\pi/2$ .

Ainsi

$$\cos \varphi(C) = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{P}_m(C) = 0}$$

En moyenne, un condensateur ne consomme pas d'énergie : un condensateur restitue en moyenne autant d'énergie que ce qu'il reçoit.

c) Cas de la bobine idéale

Pour une bobine idéale,  $u(t)$  et  $i(t)$  sont déphasés de  $+\pi/2$  :

$$\frac{u}{i} = \underline{Z}_L = jL\omega = L\omega e^{j\pi/2}$$

d'où  $\varphi = \pi/2$ .

Ainsi

$$\cos \varphi(L) = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{P}_m(L) = 0}$$

En moyenne, une bobine ne consomme pas d'énergie : une bobine restitue en moyenne autant d'énergie que ce qu'elle reçoit.

d) Cas général

Soit  $\underline{Z}$  l'impédance du dipôle étudié et  $\underline{Y}$  son admittance.

$$\underline{Z} = \frac{u}{i} = \frac{u_m}{i_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad \text{On a alors } \mathcal{R}e(\underline{Z}) = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} \cos \varphi$$

$$\underline{Y} = \frac{i}{u} = \frac{i_m}{u_m} e^{-j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{I_{eff}}{U_{eff}} (\cos \varphi - j \sin \varphi) \quad \text{On a alors } \mathcal{R}e(\underline{Y}) = \frac{I_{eff}}{U_{eff}} \cos \varphi$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\mathcal{P}_m = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi = \mathcal{R}e(\underline{Z}) I_{eff}^2 = \mathcal{R}e(\underline{Y}) U_{eff}^2}$$

$$\text{Exemple du circuit RLC série : } \underline{Z} = R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \quad \mathcal{R}e(\underline{Z}) = R \quad \mathcal{P}_m = R I_{eff}^2$$

La seule énergie consommée est celle dans la résistance.

Remarque

Lorsque l'on cherche à calculer une puissance moyenne, il faut revenir aux notations réelles. Il est toutefois possible de définir une puissance complexe définie par

$$\underline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \langle \underline{u}(t) \times \underline{i}^*(t) \rangle$$

dont la partie réelle s'identifie à la puissance active :

$$\mathcal{P}_m = \operatorname{Re}(\underline{\mathcal{P}})$$

prof. AMAMI ipest  
tel:95 55 64 10

# Analyse de Fourier

## 1 Théorème de Fourier

### 1.1 Série de Fourier

Soit une fonction périodique du temps  $t$ , de période  $T$ , de pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .  
 A tout instant  $t$  où la fonction est continue, elle est développable de façon unique en *série de Fourier* :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$a_0$  : amplitude de la composante continue

$a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$  : terme fondamental de même période que la fonction.

$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$  : harmonique de rang  $n$ .

### 1.2 Expression des coefficients de la série

$$a_0 = \langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad \text{valeur moyenne de } f(t)$$

Pour  $n > 0$ ,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

### 1.3 Autre forme du développement

L'harmonique de rang  $n$  peut s'écrire

$$\begin{aligned} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) &= C_n \cos(n\omega t + \phi_n) \\ &= C_n [\cos(n\omega t) \cos \phi_n - \sin(n\omega t) \sin \phi_n] \end{aligned}$$

Le développement en série de Fourier de la fonction T-périodique  $f(t)$  peut être mis sous la forme :

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

$C_0 = a_0$  : amplitude de la composante continue

$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  : amplitude de l'harmonique de rang  $n$

$\phi_n = -\tan(b_n/a_n)$  : phase à l'origine des temps pour l'harmonique de rang  $n$

### 1.4 Propriétés

- Pour un signal physique, l'amplitude des  $C_n$  tend vers zéro quand leur rang tend vers l'infini.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$$

- Lorsque  $f(t)$  est paire, son développement en série de Fourier est aussi pair, ce qui entraîne  $b_n = 0$ , quel que soit  $n$ . D'où :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

**La série de Fourier d'une fonction paire est une série de cosinus.**

- De même, lorsque la fonction est impaire, son développement en série de Fourier est impair ce qui entraîne  $a_n = 0$  d'où :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

**La série de Fourier d'une fonction impaire est une série de sinus.**

### 1.5 Spectre de Fourier

L'ensemble des amplitudes  $C_n$  forme le spectre de fréquences de la fonction  $f(t)$ . Il est représenté par un diagramme en bâtons, spectre de raies, obtenu en représentant les amplitudes  $C_n$  en fonction des pulsations  $n\omega$ , ou plus simplement en fonction des rangs  $n$ .

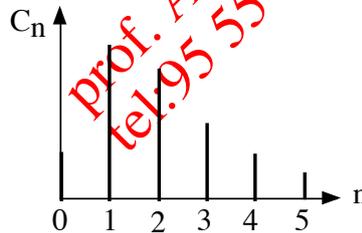


FIGURE 1 – Spectre de la fonction  $f(t)$

### 1.6 Formule de Parseval

La valeur efficace  $F$  d'un signal  $f(t)$  périodique développable en série de Fourier :

$$F^2 = \langle f^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt$$

s'obtient par la formule de Parseval :

$$\langle f^2(t) \rangle = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$

### 1.7 Série à coefficients complexes

La série peut être écrite en utilisant des nombres complexes. Pour l'harmonique de rang  $n$  :

$$\begin{aligned} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) &= \frac{a_n}{2}(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) + \frac{b_n}{2i}(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}) \\ &= e^{in\omega t} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} \right) + e^{-in\omega t} \left( \frac{a_n + ib_n}{2} \right) \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \underline{C}_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{pour } n > 0 \\ \underline{C}_{-n} &= \underline{C}_n^* \\ \underline{C}_0 &= a_0 \end{aligned}$$

On peut alors réécrire la série sous la forme :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{C}_n e^{in\omega t}$$

avec

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

## 2 Série de Fourier de signaux périodiques usuels

### 2.1 Signal "créneau"

$$\begin{cases} f(t) = -A & t \in ]-\frac{T}{2}, 0[ \\ f(t) = +A & t \in ]0, \frac{T}{2}[ \end{cases}$$

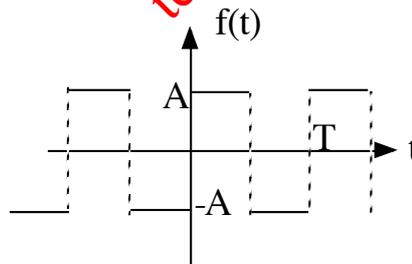


FIGURE 2 – Fonction créneau

Fonction impaire, d'où  $a_n = 0, \forall n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ &= \frac{4A}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2A}{\pi} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \quad (\omega T = 2\pi) \end{aligned}$$

$b_n = 0$  pour  $n$  pair ( $n = 2p$ )

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin(2p+1)\omega t}{2p+1}$$

### 2.2 Signal triangulaire

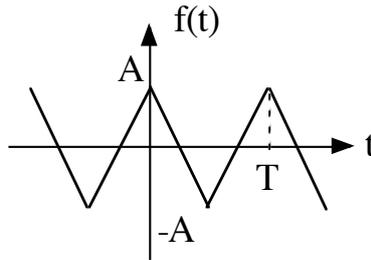


FIGURE 3 – Fonction triangle

$$\begin{cases} f(t) = A \left(1 + 4\frac{t}{T}\right) & t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right] \\ f(t) = A \left(1 - 4\frac{t}{T}\right) & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \end{cases}$$

Fonction paire, d'où  $b_n = 0, \forall n$

Fonction à valeur moyenne nulle :  $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{0}^{T/2} f(t) dt \\ &= \frac{4A}{T} \int_{0}^{T/2} \left(1 - 4\frac{t}{T}\right) \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{4A}{\pi^2} \frac{[1 - (-1)^n]}{n^2} \quad (\omega T = 2\pi) \end{aligned}$$

$a_n = 0$  pour  $n$  pair ( $n = 2p$ )

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos(2p+1)\omega t}{(2p+1)^2}$$

## 3 Synthèse de Fourier

### 3.1 Signal continu

Notons  $s_{Fn}(t)$  la série de Fourier d'un signal périodique et *continu*  $s(t)$  limitée à ses  $n$  premiers termes. Lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $s_{Fn}(t)$  tend vers  $s(t)$  :  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{Fn}(t) = s(t)$ . Lors de la synthèse d'un tel signal, la somme des premiers harmoniques suffit à le représenter de façon satisfaisante.

### 3.2 Signal discontinu

Soit  $s(t)$  un signal périodique développable en série de Fourier et présentant une discontinuité en  $t = t_0$ .

La série de Fourier  $s_F(t)$  est continue et tend vers :

$$s_F(t_0) = \frac{1}{2}[s(t_{0-}) + s(t_{0+})]$$

quand  $t$  tend vers  $t_0$ . Au voisinage de  $t_0$ , le graphe de  $s_F(t)$  varie continûment et rapidement de part et d'autre de la discontinuité.

En un point de discontinuité, l'écart entre les graphes de  $s_{F_n}(t)$  et  $s_F(t)$  au voisinage de  $t_0$  diminue quand  $n$  augmente, mais il est irréductible, quel que soit le nombre d'harmoniques considéré. Cet effet est connu sous le nom de phénomène de Gibbs.

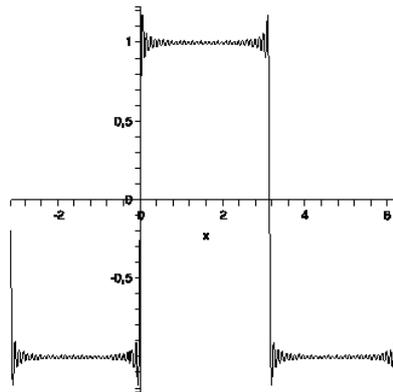


FIGURE 4 – Série tronquée pour un signal carré

prof. AMA  
tel:95 55 64 10

## L'essentiel du chapitre

### ▷ Décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique

Soit  $f(t)$  T-périodique. On note  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

A tout instant  $t$  où la fonction est continue, elle est développable de façon unique en *série de Fourier* :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$a_0$  : amplitude de la composante continue

$a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$  : terme fondamental de même période que la fonction.

$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$  : harmonique de rang  $n$ .

### ▷ Expression des coefficients de Fourier

$$a_0 = \langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad \text{valeur moyenne de } f(t)$$

Pour  $n > 0$ ,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

La série de Fourier d'une fonction paire est une série de cosinus.

La série de Fourier d'une fonction impaire est une série de sinus.

### ▷ Spectre d'une fonction périodique

L'harmonique de rang  $n$  peut aussi s'écrire  $C_n \cos(\omega t + \phi_n)$  avec  $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

L'ensemble des  $C_n$  forme le spectre de la fonction.