Calcul des structures sous effets dynamiques et sismiques

Systèmes à un degré de liberté (SDOF)

Introduction générale

- **Objectifs du cours :**

  Présentation générale des méthodes d'analyse des structures soumises à des chargements dynamiques;

  Rappel: analyse = détermination des déplacements (et grandeurs dérivées) et des efforts, dans une perspective de dimensionnement ou de vérification.

- **Chargement dynamique :**

  = Actions qui évoluent au cours du temps (en direction, intensité et/ou position)

  [Rappel: chargement quasi-statique = forces d'inertie négligeables]

→ La réponse de la structure évolue au cours du temps !!

→ Déterminer les valeurs utiles pour la vérification ou le dimensionnement

Introduction générale

- **Actions dynamiques dans le domaine du génie civil :**

  - Vibrations provoquées par le trafic (trains, camions) → charges mobiles d'intensité constante ou non (hypothèse à faire);

  - Vibrations provoquées par l'homme: marche, sauts, danse…

  - Vibrations provoquées par les machines (machines tournantes…)

  - Explosions et impacts

  - Vent: composante moyenne statique + composante turbulente dynamique

  - Séismes: sollicitation par accélération imposée des fondations des structures (composantes verticale et horizontale)

  - Houle: cas des structures côtières et off-shore + navires

Introduction générale

- **Critères à respecter variables selon les cas :**

  - ELU traditionnels (vent, houle)

  - Fatigue (machines), ELS

  - Accélérations maximales pour des raisons technologiques (TGV) ou de confort (vibrations "humaines")

  - Résistance résiduelle suffisante (séisme, explosion)

- **Dynamique déterministe >< dynamique stochastique :**

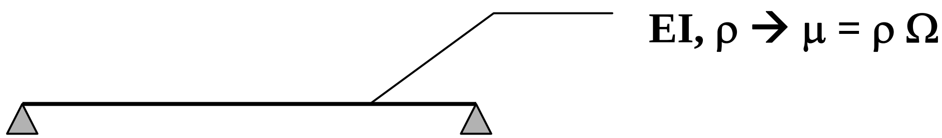
  - Déterministe: chargement parfaitement défini → 1 réponse sous 1 charge donnée

  - Stochastique (probabiliste): chargement connu via des grandeurs statistiques (moyenne, écart-type…) et/ou énergétique → estimation des caractéristiques statistiques de la réponse (et en particulier les grandeurs extrêmes pour une certaine période de retour)

→ 2 familles de méthodes

Systèmes continus – MDDL – 1DDL

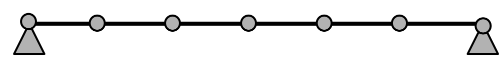
- **Exemple 1 : poutre sur deux appuis**



<u>Hypothèse 1:</u>

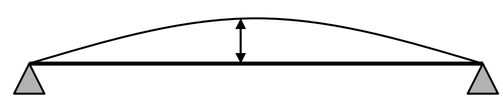
raideur et masse uniformément réparties sur la longueur + déformée = fct(x) → système continue

<u>Hypothèse 2:</u>



Modèle "élements finis" → système à N degrés de liberté

<u>Hypothèse 3:</u>



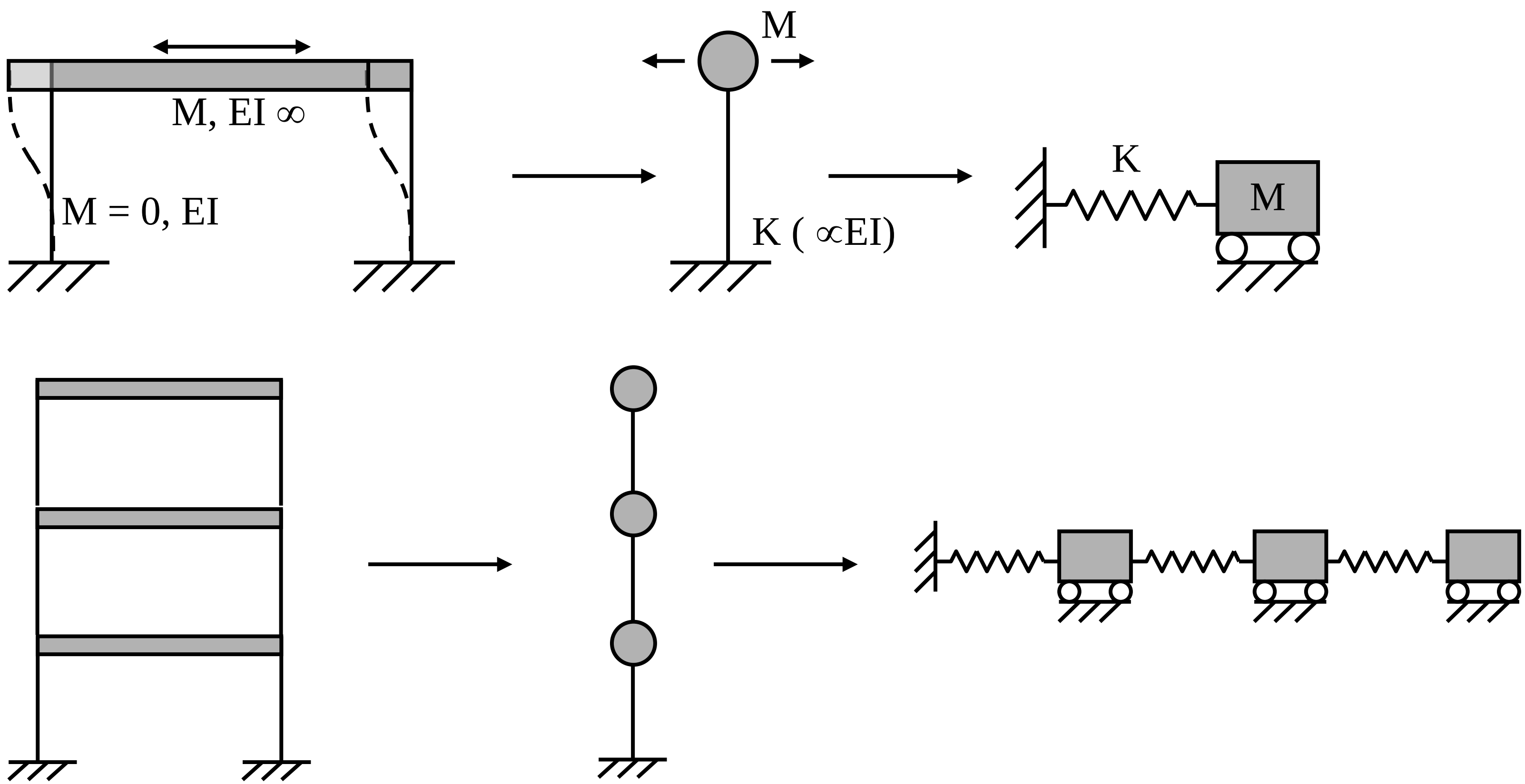
Déformée vibratoire supposée connue et définie par son amplitude → système décrit par un seul paramètre (1 degré de liberté)

Systèmes continus – MDDL – 1DDL

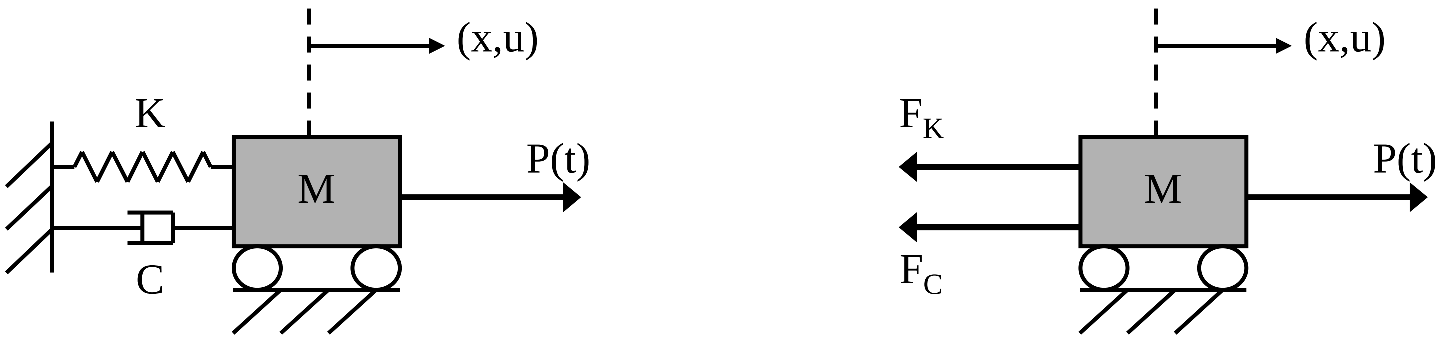
- **Exemple 2 : portique**

En général, système continue ou plus souvent MDDL (modèles EF)

Mais aussi modèles simplifiés ("brochettes" et "chariots")



Équation du mouvement pour les systèmes 1DDL



$$\begin{cases} F_K = K\,u \\ F_C = C\,\dot{u} \end{cases} \rightarrow \quad F_{tot} = P - K\,u - C\,\dot{u}$$

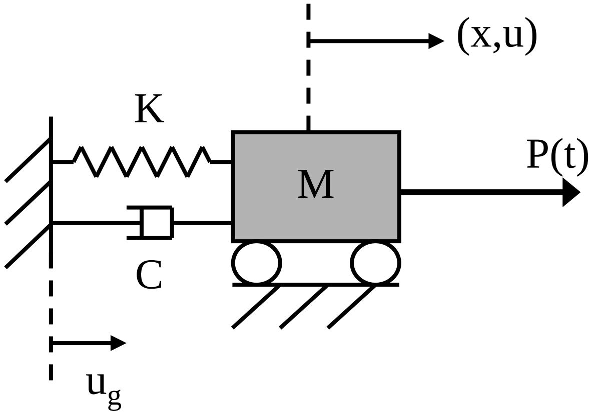
Newton: $\dfrac{d}{dt}(M\,\dot{u}) = F \longrightarrow \boxed{M\,\ddot{u} + C\,\dot{u} + K\,u = P(t)}$

Ou encore en posant $\omega^2 = K/M \quad et \quad \xi = C/2M\omega$

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\,\xi\,\omega\,\dot{u}(t) + \omega^2\,u(t) = \frac{\omega^2}{K}P(t)}$$

Équation du mouvement pour les systèmes 1DDL

Cas particulier: excitation du support



u = déplacement de l'oscillateur par rapport au support

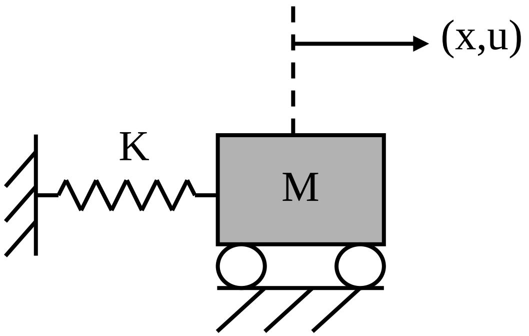
$$\rightarrow u_{tot} = u_g + u \quad et \begin{cases} F_K = -K\,u \\ F_C = -C\,\dot{u} \end{cases}$$

Newton: $M\,\ddot{u}_{tot} = F$

$$\rightarrow M\,(\ddot{u}_g + \ddot{u}) = -K\,u - C\,\dot{u}$$

$$\rightarrow \boxed{M\,\ddot{u} + C\,\dot{u} + K\,u = -M\,\ddot{u}_g}$$

Vibrations libres non amorties



$$\boxed{\begin{aligned} & M\,\ddot{u} + K\,u = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \ddot{u} + \omega^2\,u = 0 \end{aligned}}$$

Solution générale : $u(t) = c_1\,e^{s_1 t} + c_2\,e^{s_2 t}$

Avec s_1 et s_2 racines de l'équation caractéristique (1)

et c_1 et c_2 déterminées par les conditions aux limites (2)

(1) $s^2 + \omega^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = i\omega \\ s_2 = -i\omega \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad u(t) &= c_1\,e^{i\omega t} + c_2\,e^{-i\omega t} = c_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + c_2(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\ &= (c_1 + c_2)\cos\omega t + (ic_1 - ic_2)\sin\omega t \\ &= A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t \end{aligned}$$

Vibrations libres non amorties

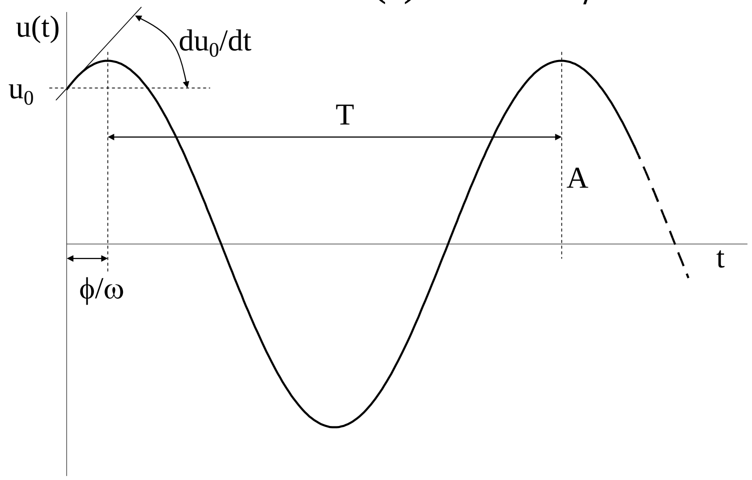
(2) Conditions aux limite $\equiv$ conditions initiales

$$\begin{cases} u(t=0) = u_0 = A_1 \\ \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 = A_2\,\omega \end{cases} \Rightarrow \quad u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t$$

Formulation alternative:

poser $\begin{cases} A_1 = A\cos\phi \\ A_2 = A\sin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{u_0^{\,2} + \left(\dfrac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2} \\ \phi = \arctan\left(\dfrac{\dot{u}_0/\omega}{u_0}\right) \end{cases}$

$$\rightarrow \quad u(t) = A\cos\phi\cos\omega t + A\sin\phi\sin\omega t = A\cos\left(\omega t - \phi\right)$$



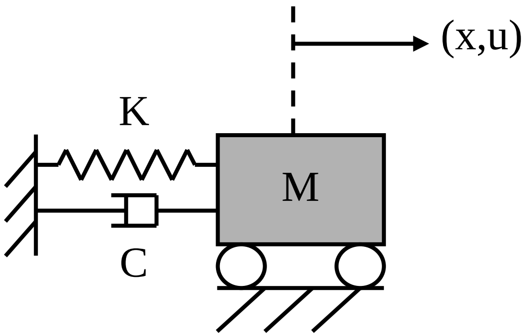
Mouvement harmonique simple:

Amplitude ***A***, phase initiale $\boldsymbol{\phi}$ et pulsation propre $\boldsymbol{\omega}$

→ Période propre $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{M/K}$

→ fréquence propre $f = \omega/2\pi = \sqrt{K/M}\,/2\pi$

Vibrations libres amorties



$$\boxed{\begin{aligned} & M\,\ddot{u} + C\,\dot{u} + K\,u = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \ddot{u} + 2\,\xi\,\omega\,\dot{u} + \omega^2\,u = 0 \end{aligned}}$$

<u>Équation caractéristique :</u> $s^2 + 2\,\xi\,\omega\,s + \omega^2 = 0$

$$\Delta = 4\xi^2\omega^2 - 4\,\omega^2 = 4\,\omega^2(\xi^2 - 1)$$

$$\rightarrow \quad s_{\frac{1}{2}} = \frac{-2\xi\omega \pm 2\omega\sqrt{\xi^2 - 1}}{2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

<u>Cas 1</u>: $\xi^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \xi = 1 \quad ou \quad C = C_{cr} = 2M\,\omega$

$$\Rightarrow \quad s_1 = s_2 = -\xi\,\omega$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = (c_1 + c_2\,t)\,e^{-\xi\omega t} = \left[u_0 + \left(\dot{u}_0 + \xi\,\omega\,u_0\right)t\right]e^{-\xi\omega t}$$

Amortissement critique

Vibrations libres amorties

<u>Cas 2</u>: $\xi^2 - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \xi > 1 \quad ou \quad C > C_{cr}$

$$poser\ \omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad s_{\substack{1\\2}} = -\xi\,\omega \pm \omega_D$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = e^{-\xi\omega t}\left(c_1 \cosh \omega_D t + c_2 \sinh \omega_D t\right)$$

Amortissement super-critique

Pas en GC, sauf dans certains systèmes d'isolation ou d'amortissement

<u>Cas 3</u>: $\xi^2 - 1 < 0 \quad \rightarrow \quad \xi < 1 \quad ou \quad C < C_{cr}$

$$poser\ \omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\Rightarrow \quad s_{\substack{1\\2}} = -\xi\,\omega \pm i\,\omega_D$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = e^{-\xi\omega t}\left(A_1 \cos \omega_D t + A_2 \sin \omega_D t\right) = e^{-\xi\omega t} A \cos\left(\omega_D t - \phi\right)$$

$$avec \quad \begin{cases} A = \sqrt{u_0{}^2 + \left(\dfrac{\dot{u}_0 + \xi\,\omega u_0}{\omega_D}\right)^2} \\ \phi = \arctan \dfrac{\left(\dot{u}_0 + \xi\,\omega u_0\right)/\omega_D}{u_0} \end{cases}$$

Amortissement infra-critique

Cas habituel en GC

Vibrations libres amorties

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} A\cos\left(\omega_D t - \phi\right) \quad avec \quad \omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

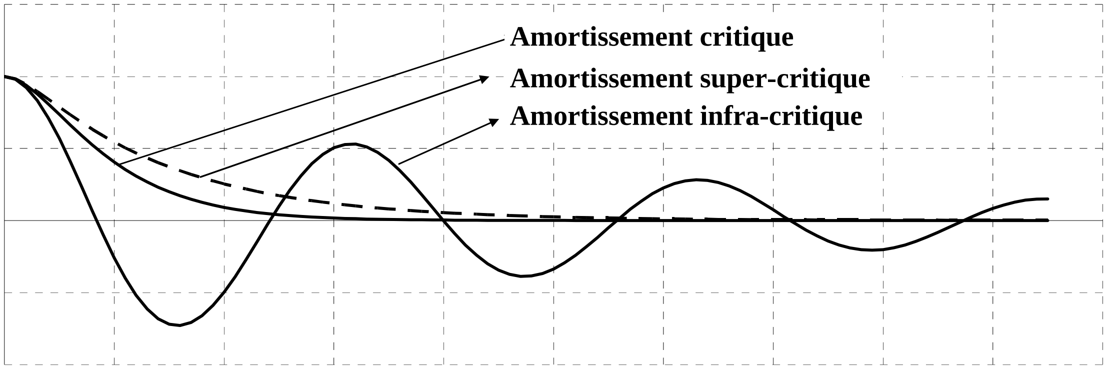
Double effet de l'amortissement:

- Décroissance exponentielle de l'amplitude
- Modification de la pulsation propre

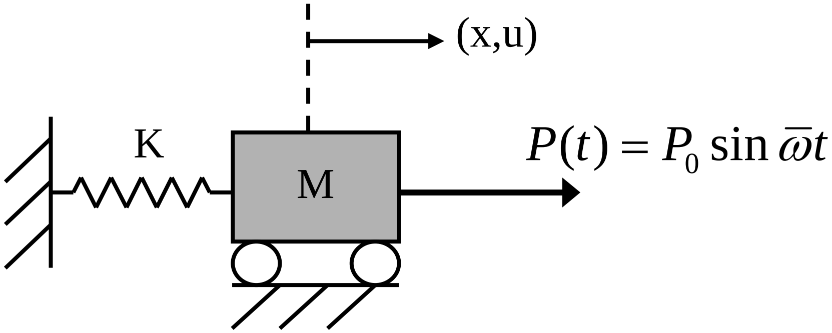
Ordre de grandeur de l'amortissement dans le domaine du GC

- Constructions métalliques: 1 à 2 %
- Béton armé et précontraint: 2 à 7 %
- Sols: 5 à 15 %

$\rightarrow$ Modification de la pulsation propre négligeable en pratique (pour ξ = 10%, ω_D = 0.995 ω)



Vibrations non amorties sous charges harmoniques



Équation du mouvement :

$$M\,\ddot{u} + K\,u = P_0 \sin \bar{\omega} t$$

a/ Solution statique (effets d'inertie négligés): $u(t) = \dfrac{P_0}{K} \sin \bar{\omega} t$

b/ Solution dynamique – solution générale de l'équation homogène:

$$u_g(t) = A\cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$avec \quad \omega = \sqrt{K/M}$$

Vibrations non amorties sous charges harmoniques

c/ Solution dynamique – solution particulière de l'équation complète:

$$u_P(t) = C \sin \overline{\omega} t \quad (*)$$ avec C à déterminer

(*) dans l'équation du mouvement

$$\longrightarrow \quad -M\overline{\omega}^2 C \sin \overline{\omega} t + K C \sin \overline{\omega} t = P_0 \sin \overline{\omega} t$$

$$\rightarrow \quad C = \frac{P_0}{K - M\overline{\omega}^2} = \frac{P_0}{K\left[1 - \left(\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2\right]}$$

$$\rightarrow \quad u(t) = \boxed{A \cos \omega t + B \sin \omega t} + \boxed{\frac{P_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2} \sin \overline{\omega} t} \quad avec \quad \beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega}$$

Composante ***TRANSITOIRE***, dépendant des conditions initiales

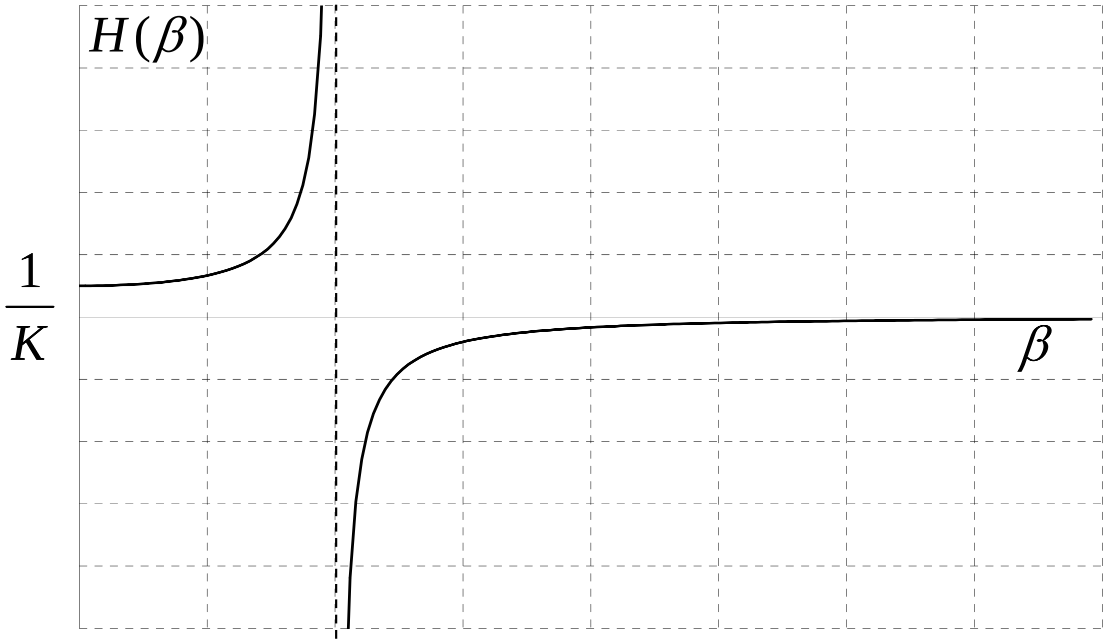
Composante ***STATIONNAIRE***, dépendant du chargement appliqué

Vibrations non amorties sous charges harmoniques

Caractérisation de la solution stationnaire :

$$P(t) \xrightarrow[H(\beta)]{\textit{fonction de transfert}} u(t)$$

$$H(\beta) = \frac{u(t)}{P(t)} = \frac{1}{K}\frac{1}{1-\beta^2}$$ ***= Fonction de transfert***



$$\beta = 0\left(\bar{\omega} = 0\right) \quad \Rightarrow \quad H(\beta) = 1/K$$

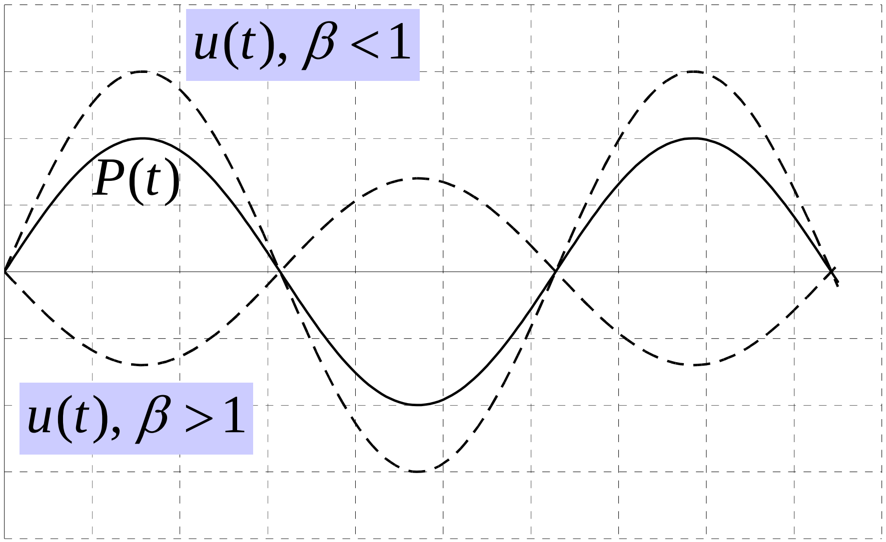
$$\beta \to 1\left(\bar{\omega} \to \omega\right) \quad \Rightarrow \quad \left|H(\beta)\right| \to \infty$$

RESONANCE

$$\beta \to \infty\left(\bar{\omega} >> \omega\right) \quad \Rightarrow \quad \left|H(\beta)\right| \to 0$$

Vibrations non amorties sous charges harmoniques

Caractérisation de la solution stationnaire :



$\beta<1: \quad H(\beta)>0$

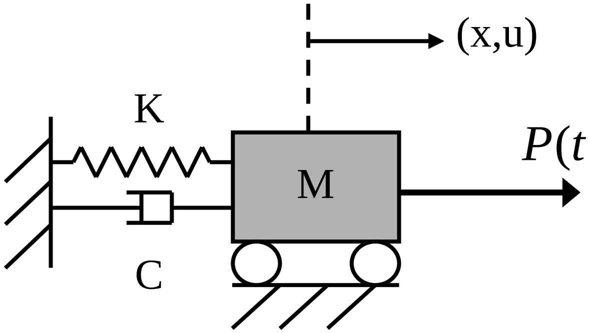
Déplacement et sollicitation en phase

$\beta>1: \quad H(\beta)<0$

Déplacement et sollicitation en opposition de phase

Amplification dynamique: $D=\dfrac{|u_{\max}|}{\left|u_{\max}^{stat}\right|}=\dfrac{\left|\dfrac{P_0}{K}\dfrac{1}{1-\beta^2}\right|}{\dfrac{P_0}{K}}=\left|\dfrac{1}{1-\beta^2}\right|$

Vibrations amorties sous charges harmoniques



Équation du mouvement :

$$M\,\ddot{u} + C\,\dot{u} + K\,u = P_0 \cos \bar{\omega} t \qquad (1)$$

a/ Solution homogène : $u_g(t) = e^{-\xi \omega t}\left(A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t\right)$

b/ Solution particulière :

$$u_P(t) = U \cos\left(\bar{\omega} t - \phi\right) = U \cos \bar{\omega} t \cos \phi - U \sin \bar{\omega} t \sin \phi$$

$u_P(t)$ dans (1):

$$\overbrace{\left[U\left(-\bar{\omega}^2 M + K\right)\sin\phi - U C \bar{\omega} \cos\phi\right]}^{\boldsymbol{T_1}} \sin \bar{\omega} t$$

$$+ \underbrace{\left[U\left(-\bar{\omega}^2 M + K\right)\cos\phi + U C \bar{\omega} \sin\phi\right]}_{\boldsymbol{T_2}} \cos \bar{\omega} t = P_0 \cos \bar{\omega} t$$

Vibrations amorties sous charges harmoniques

$$T_1 \equiv 0 \quad \rightarrow \quad \tan\phi = \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$T_2 \equiv P_0 \quad \rightarrow \quad U = \frac{P_0/K}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}}$$

$$avec \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{C}{2\omega M} \\ \beta = \bar{\omega}/\omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \left(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\right)e^{-\xi\omega t} \longrightarrow \text{Composante } \textbf{\textit{transitoire}}$$

$$\underbrace{+\frac{P_0}{K}\left[\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}\right]^{1/2}\cos\left(\bar{\omega}t - \phi\right)}_{\longrightarrow \text{ Composante } \textbf{\textit{stationnaire}}}$$

Vibrations amorties sous charges harmoniques

<u>Solution dans l'espace complexe</u>

Équation du mouvement :

$$M\,\ddot{\bar{u}} + C\,\dot{\bar{u}} + K\,\bar{u} = P_0\,e^{i\bar{\omega}t} \qquad (1bis)$$

$\longrightarrow$ Trouver $\bar{u}(t)$ (complexe) $\longrightarrow$ $u(t) = \Re\left[\bar{u}(t)\right]$

Solution particulière : $\bar{u}(t) = \bar{U}\,e^{i\bar{\omega}t}$

dans $(1bis)$

$$\longrightarrow \quad -M\,\bar{\omega}^2\bar{U}e^{i\bar{\omega}t} + Ci\bar{\omega}\bar{U}\,e^{i\bar{\omega}t} + K\bar{U}e^{i\bar{\omega}t} = P_0\,e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{U} = \frac{P_0/K}{\left(1-\beta^2\right) + 2i\xi\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u}(t) = \frac{P_0/K}{\left(1-\beta^2\right) + 2i\xi\beta}\,e^{i\bar{\omega}t} = \frac{1/K}{\left(1-\beta^2\right) + 2i\xi\beta}\,\bar{P}(t) = \boxed{\bar{H}(\beta)}\,\bar{P}(t)$$

Fonction de transfert complexe

Vibrations amorties sous charges harmoniques

Réécriture de la fonction de transfert:

$$\bar{C} = A + i\,B = \left|\bar{C}\right| e^{i\phi} \quad avec \quad \left|\bar{C}\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$et \qquad \phi = \arctan B/A$$

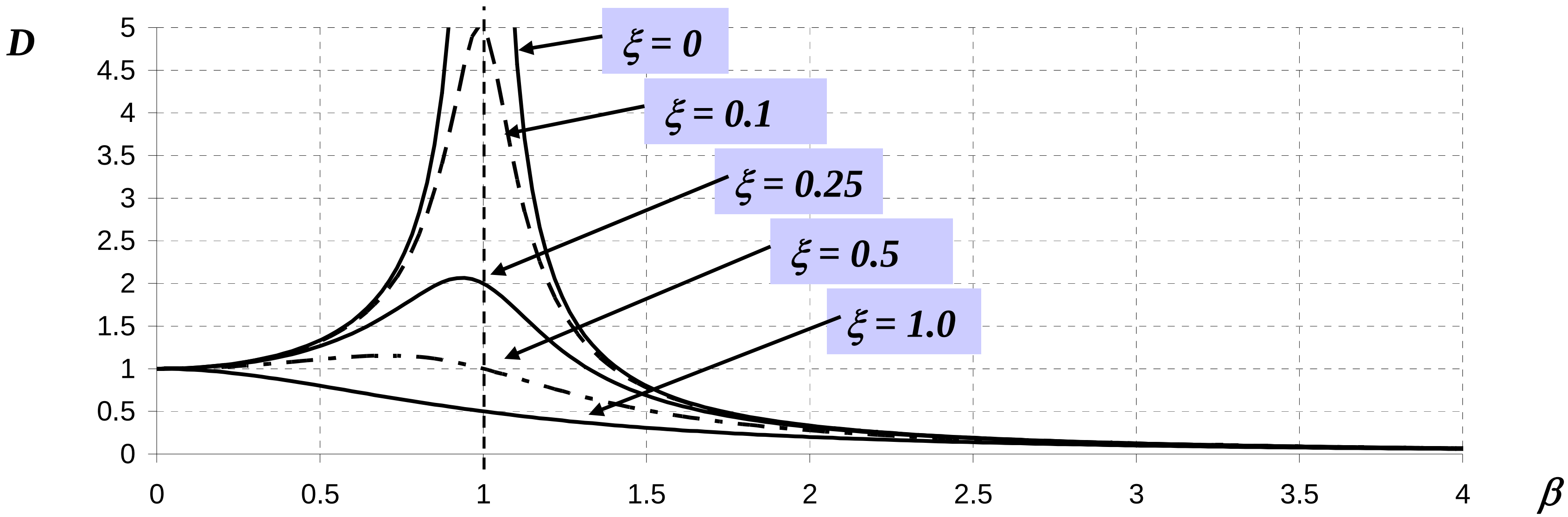
$$\bar{H}(\beta) = \frac{1/K}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}} e^{-i\phi} = \left|\bar{H}(\beta)\right| e^{-i\phi} \quad avec \quad \phi = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

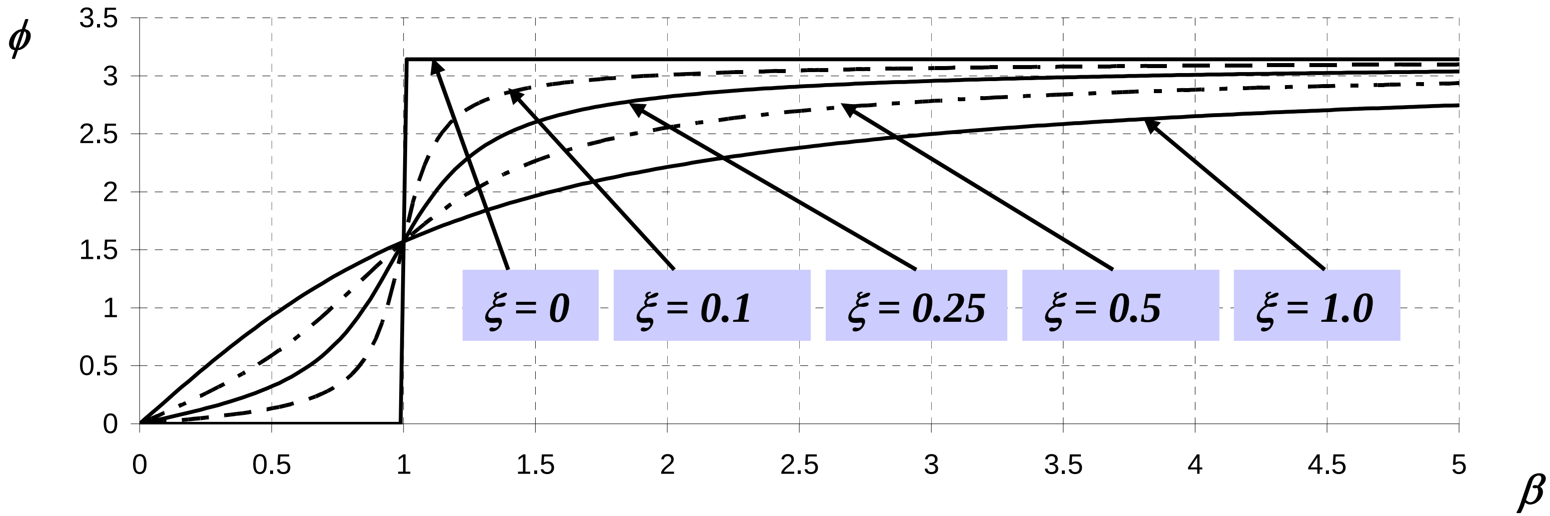
$$\bar{u}(t) = \bar{U}\,e^{i\bar{\omega}t} = P_0\left|\bar{H}(\beta)\right| e^{i\left(\bar{\omega}t-\phi\right)}$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \Re\left[\bar{u}(t)\right] = P_0\left|\bar{H}(\beta)\right|\cos\left(\bar{\omega}t-\phi\right)$$

Amplification dynamique: $D = \dfrac{\left|u_{\max}\right|}{\left|u_{\max}^{stat}\right|} = \dfrac{P_0\left|\bar{H}\left(\beta\right)\right|}{\dfrac{P_0}{K}} = K\left|\bar{H}\left(\beta\right)\right|$

Vibrations amorties sous charges harmoniques





Vibrations amorties sous charges harmoniques

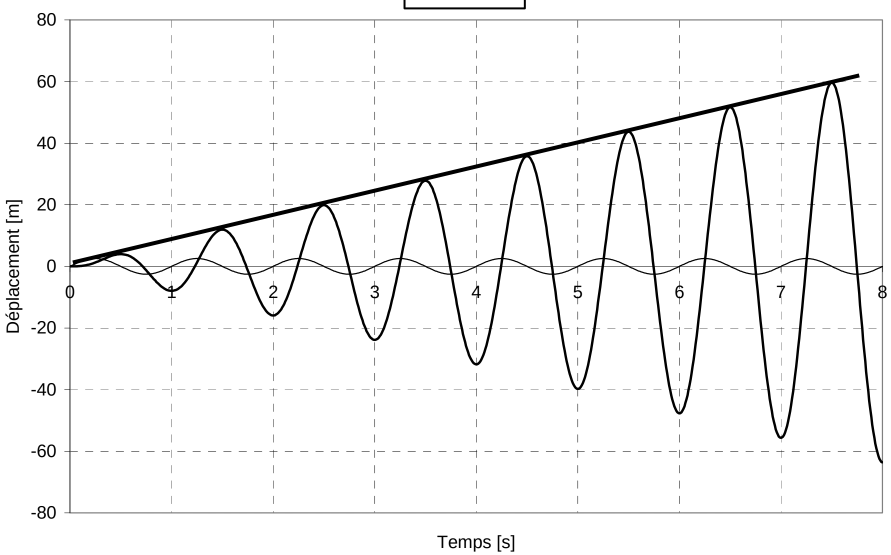
<u>Caractéristiques de la réponse résonante:</u>

$$D(\beta = 1) = \frac{1}{2\xi} \quad \neq \text{maximum}$$

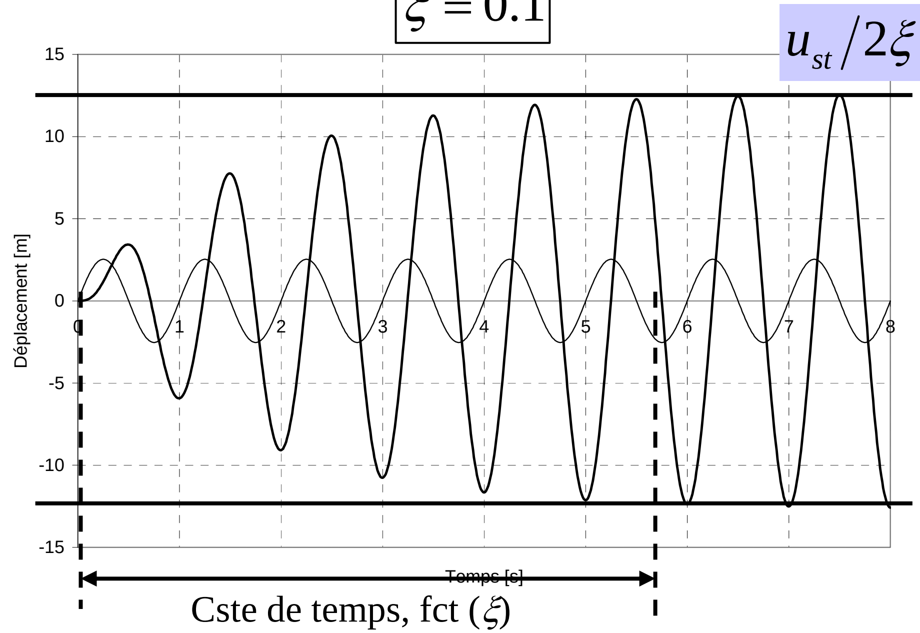
$$\beta_{\max} = \sqrt{1-2\xi^2} \quad et \quad D(\beta = \beta_{\max}) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{2\xi}\frac{\omega}{\omega_D}$$

Réponse complète (stationnaire + transitoire), au départ du repos :

$\boxed{\xi = 0}$



$\boxed{\xi = 0.1}$



Détermination de l'amortissement

Pour une structure réelle, M et K ($\leftrightarrow$ ω) sont facilement évaluables

De plus, ω est assez simple à mesurer.

Sources d'amortissement: (1) dans le matériau (2) dans les assemblages, fondations et éléments non structurels

→ difficile à estimer a priori (même si l'expérience donne des fourchettes)

→ nécessité de mesurer: différentes procédures possibles

a/ atténuation des vibrations libres

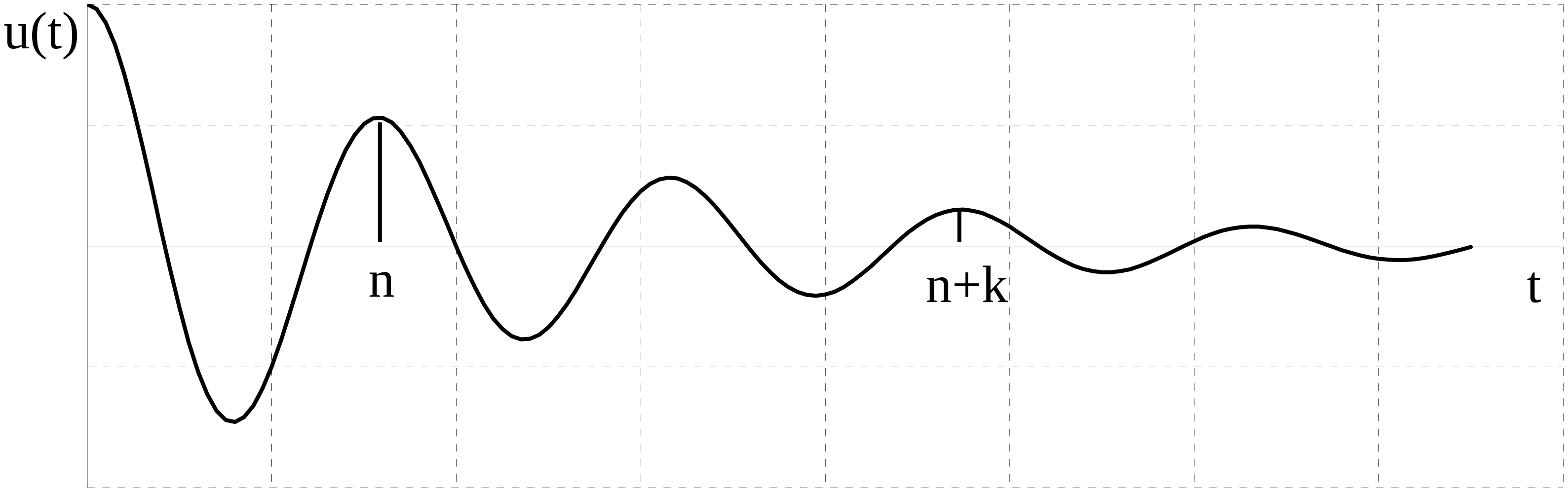
b/ Amplification à la résonance

c/ Largeur du pic de résonance

d/ …

Détermination de l'amortissement

a/ atténuation des vibrations libres



$$u(t) \simeq A e^{-\xi \omega t} \cos \omega_D t$$

$$t_n = \frac{2\pi n}{\omega_D}$$

$$t_{n+k} = \frac{2\pi(n+k)}{\omega_D}$$

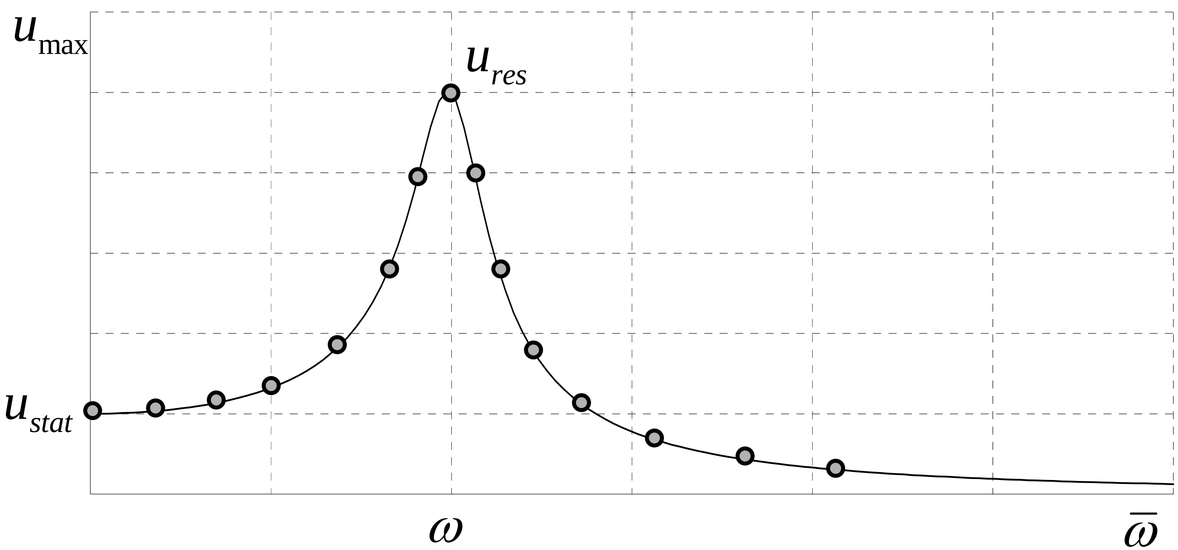
$$\rightarrow \quad \frac{u_n}{u_{n+k}} = \frac{e^{-\xi \omega \frac{2\pi n}{\omega_D}}}{e^{-\xi \omega \frac{2\pi(n+k)}{\omega_D}}} = e^{2\pi k \xi \omega / \omega_D}$$

$$si\ \xi << 1, \quad \delta_k = \ln \frac{u_n}{u_{n+k}} = 2\pi k \xi \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{\delta_k}{2\pi k}$$

Détermination de l'amortissement

b/ Amplification à la résonance

Excitation harmonique pour une série de pulsations discrètes ("sine sweep") et mesure du déplacement maximum stationnaire



A la résonance,

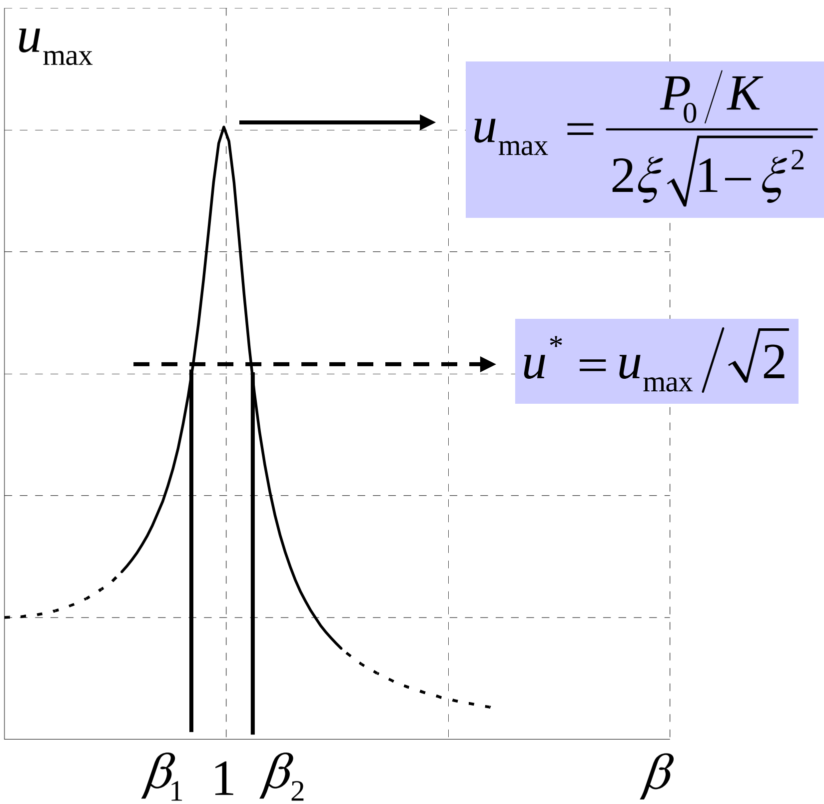
$$D_{\max} = \frac{u_{res}}{u_{stat}} = \frac{1}{2\xi} \;(si\ \xi << 1)$$

$$\rightarrow \quad \xi = \frac{u_{stat}}{2u_{\max}}$$

Détermination de l'amortissement

c/ Largeur du pic de résonance

Idem b/, mais on ne balaie qu'au voisinage du pic



$$\frac{P_0/K}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2+\left(2\xi\beta\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{P_0/K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_{\substack{1\\2}} \simeq 1-\xi^2 \mp \xi\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \beta_2-\beta_1 = 2\xi\sqrt{1-\xi^2} \approx 2\xi \\ \beta_1+\beta_2 = 2\left(1-\xi^2\right) \approx 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \xi = \frac{\beta_2-\beta_1}{\beta_1+\beta_2} = \frac{\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2}$$

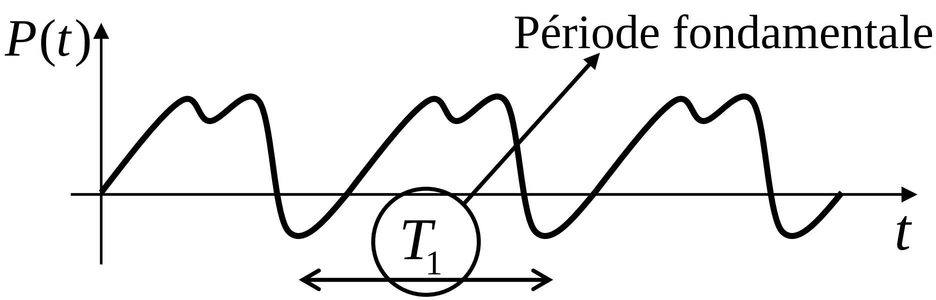
Vibrations sous charges périodiques

Préalable: principe de superposition

L'opérateur de dérivation $L(u) = M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku$ est linéaire à coefficients constants

→ Si u_1 est solution de $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P_1(t)$ et u_2 est solution de $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P_2(t)$

Alors, $C_1\, u_1 + C_2\, u_2$ est solution de $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = C_1 P_1(t) + C_2 P_2(t)$



Toute fonction périodique peut se décomposer en série de Fourier

$$P(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos \bar{\omega}_n t + \sum_1^{\infty} b_n \sin \bar{\omega}_n t$$

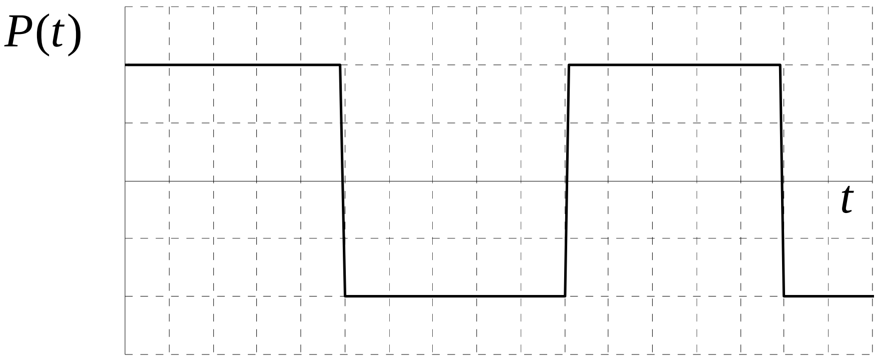
$$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} P(t)\,dt \longrightarrow \text{Moyenne}$$

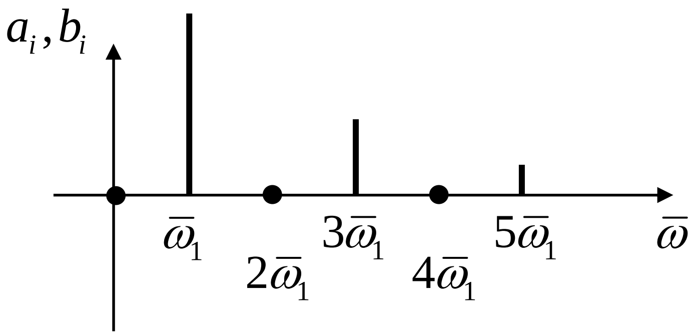
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T_1}\displaystyle\int_0^{T_1} P(t)\cos\left(\bar{\omega}_n t\right)dt \\[2ex] b_n = \dfrac{2}{T_1}\displaystyle\int_0^{T_1} P(t)\sin\left(\bar{\omega}_n t\right)dt \end{cases} \qquad \bar{\omega}_n = n\,\bar{\omega}_1 = n\frac{2\pi}{T_1}$$

→ Taux de participation de l'harmonique n

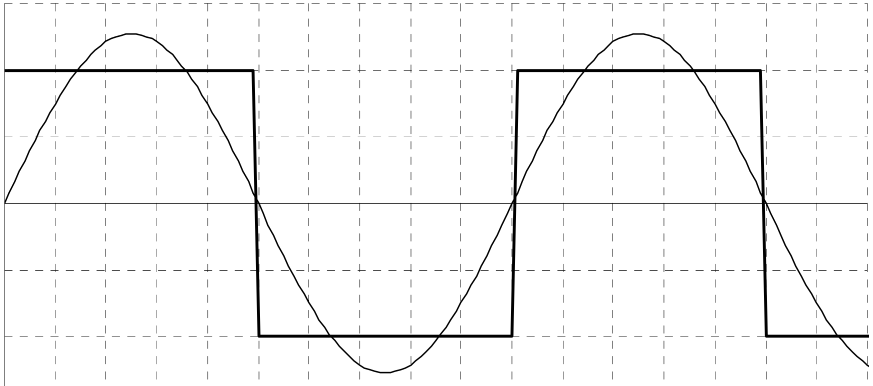
Vibrations sous charges périodiques

Exemple

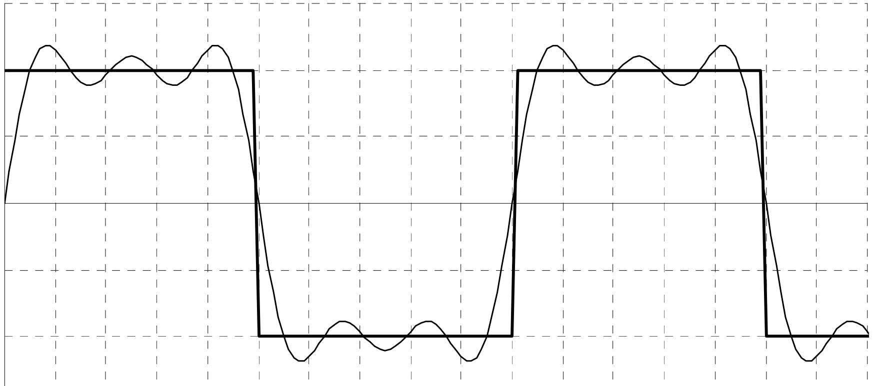




Harmonique 0 (fondamentale)



Harmonique 0 + 1 + 2



Vibrations sous charges périodiques

Réponse du système par application du principe de superposition

$u_0 = \dfrac{a_0}{K}$ et $u_n(t)$ = réponse sous $\begin{cases} a_n \cos\left(n\bar{\omega}_1 t\right) \\ b_n \sin\left(n\bar{\omega}_1 t\right) \end{cases}$ ≡ Réponse sous charge harmonique

$$\rightarrow \quad u(t) = u_0 + \sum_1^{\infty} u_n(t)$$

<u>Difficulté</u>: Calcul des coefficients a_n, b_n et Recomposition de la série des u_n

<u>Solution alternative</u>: Utilisation des séries de Fourier complexes

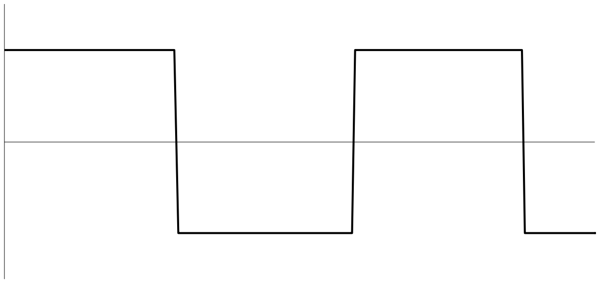
$$P(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}_n e^{in\bar{\omega}_1 t} \quad avec \quad \bar{P}_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} P(t) e^{-in\bar{\omega}_1 t} dt$$

$$\bar{u}_n(t) = \bar{H}(\beta_n)\, \bar{P}_n\, e^{in\bar{\omega}_1 t} \quad avec \quad \beta_n = \frac{n\bar{\omega}_1}{\omega}$$

$$\bar{u}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_n(t) \quad \Rightarrow \quad u(t) = \Re\left[\bar{u}(t)\right]$$

Vibrations sous charges périodiques

Exemple: réponse stationnaire sous *P(t)* =

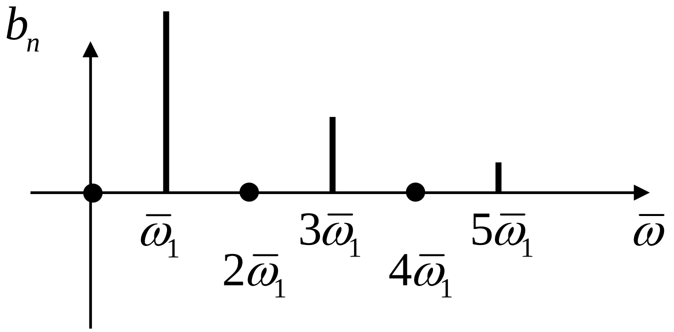


Seul les harmoniques sinus impairs (b_n avec n impair) sont non-nuls

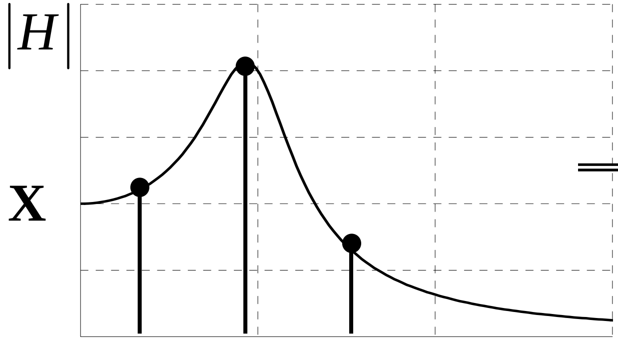
$$\rightarrow \quad P_n(t) = b_n \sin\left(n\bar{\omega}_1 t\right)$$

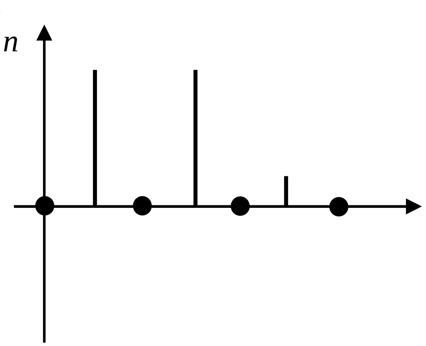
$$\rightarrow \quad u_n(t) = \frac{b_n}{K} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta_n\right)^2}} \sin\left(n\bar{\omega}_1 t - \phi_n\right) = b_n \left|H\left(\beta_n\right)\right| \sin\left(n\bar{\omega}_1 t - \phi_n\right)$$

$$avec \quad \beta_n = \frac{n\bar{\omega}_1}{\omega} \quad et \quad \phi_n = \phi(\beta_n)$$



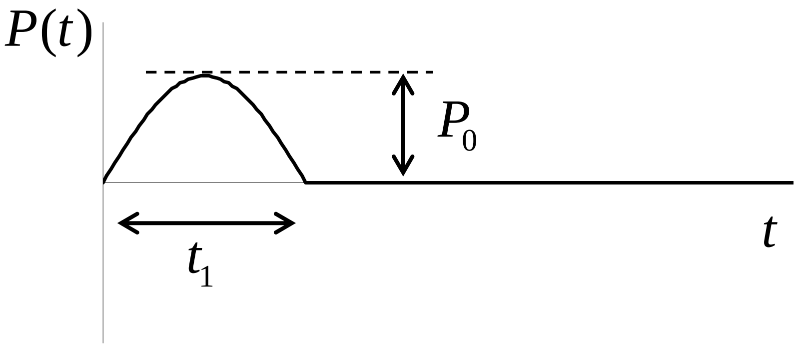
X





Réponse à un chargement impulsionnel

Exemple: réponse sous impulsion sinusoïdale



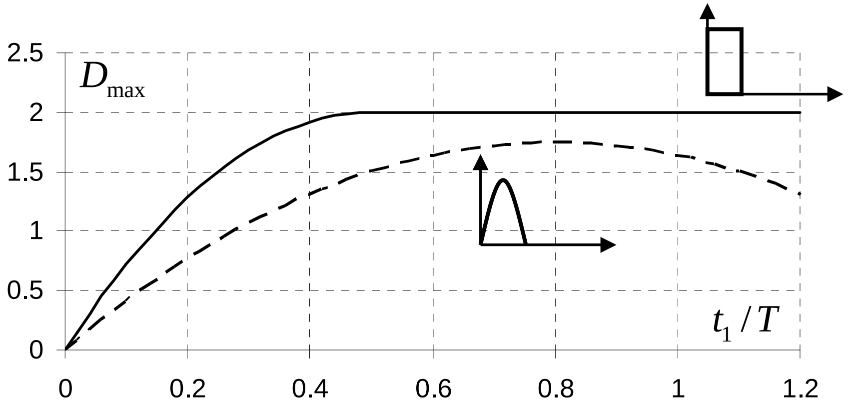
Méthode:

Phase 1 ($0 < t < t_1$): réponse forcée sous charge harmonique (avec contributions transitoire et stationnaire)

Phase 2 ($t > t_1$): vibrations libres avec conditions initiales égales aux vitesse et déplacement en fin de phase 1

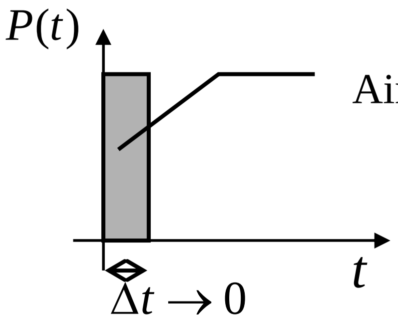
Constatation: le paramètre principal qui gouverne la réponse est le rapport t_1/T (T = période propre de l'oscillateur)

→ Utilisation de ***Spectres de réponse***



Réponse à un chargement impulsionnel

Cas particulier: impulsion de Dirac



Fonction de Dirac : $\begin{cases} \delta(t) = 0 \quad si \quad t \neq 0 \\ \delta(t)\, non\ définie\ en\ t = 0 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \quad \left(\Rightarrow [\delta] = \left[T^{-1}\right] \right)$$

Excitation impulsionnelle : $P(t) = I\,\delta(t) \quad [I] = [FT]$

Newton : $M \dfrac{d}{dt}\dot{u} = P(t) - F_K(t) - F_C(t)$

$$\int_0^{\Delta t} \ldots dt \quad \Rightarrow \quad M\,\dot{u}\Big]_0^{\Delta t} = \int_0^{\Delta t} I\,\delta(t)\,dt - \int_0^{\Delta t} \left[F_K(t) + F_C(t)\right] dt$$

$$\Delta t \to 0 \quad \Rightarrow \quad M\,\dot{u}(0^+) = I - 0$$

Réponse à un chargement impulsionnel

L'oscillateur se comporte comme un oscillateur libre auquel on donne une vitesse initiale $\dot{u}_0 = I/M$

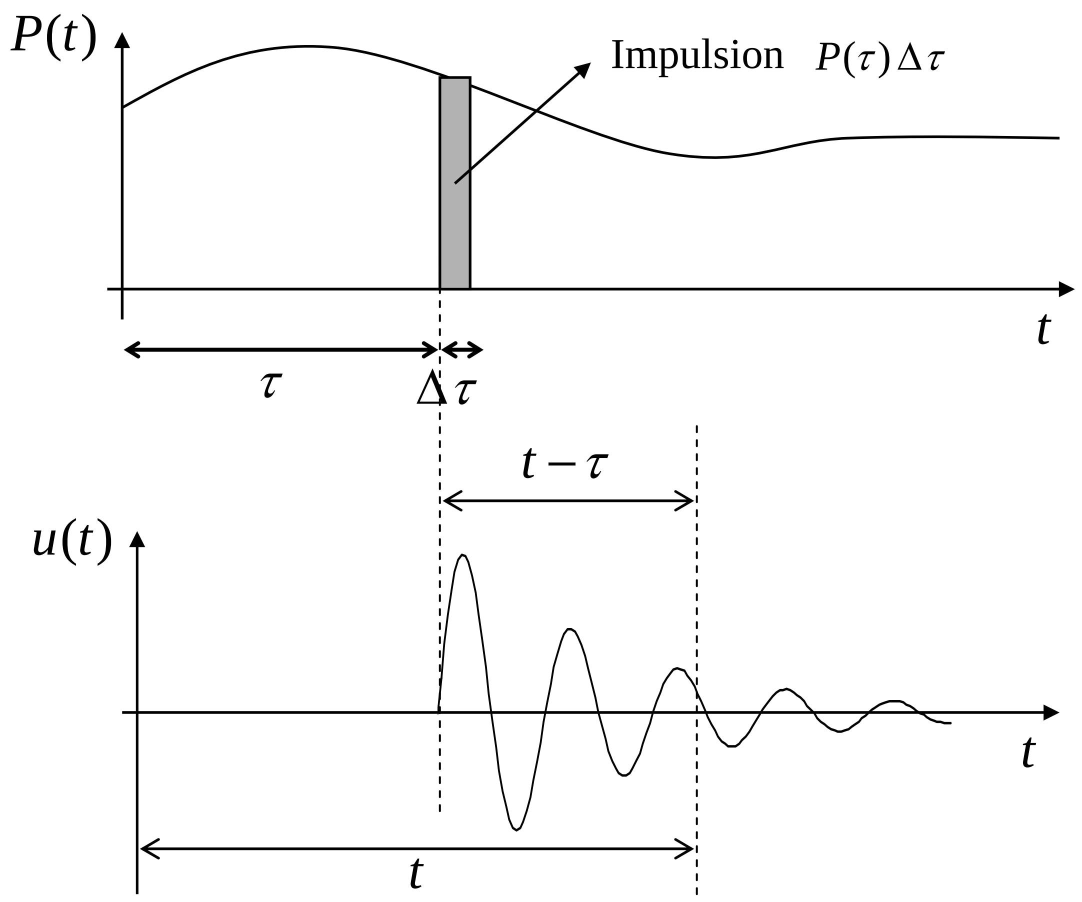
$$\rightarrow \quad si\ u_0 = 0, u(t) = \frac{I}{M\,\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sin\left(\omega_D t\right)$$

En particulier, si $I = 1$

$$u(t) = \frac{1}{M\,\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sin\left(\omega_D t\right) = h(t)$$

***h(t)* = fonction de réponse impulsionnelle unitaire**

Réponse à une sollicitation quelconque – domaine temporel



<u>Principe</u>: considérer la charge *P(t)* comme une succession d'impulsions de durée $\Delta\tau$

Déplacement en *t* sous l'effet d'une impulsion en τ :

$$\Delta u(t,\tau) = P(\tau)\,\Delta\tau\, h(t-\tau)$$

Déplacement total en *t* = somme des contributions impulsionnelles appliquées entre 0 et *t* :

$$u(t) = \sum_i \Delta u(t,\tau_i)$$

$$= \sum_i P(\tau_i)\,\Delta\tau_i\, h(t-\tau_i)$$

Réponse à une sollicitation quelconque – domaine temporel

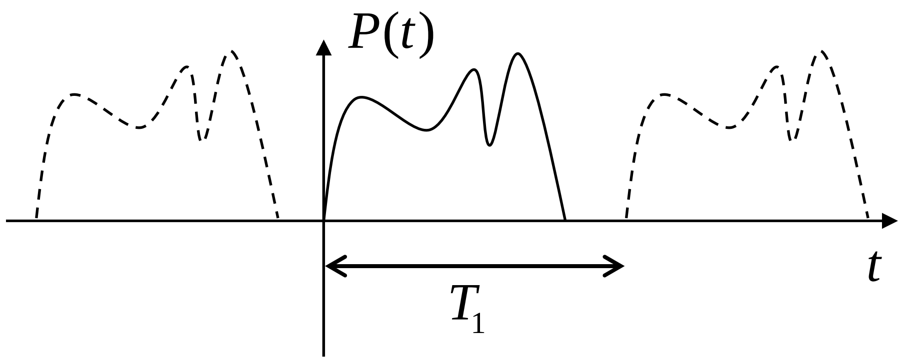
La réponse impulsionnelle n'est rigoureuse que si $\Delta\tau \to 0$

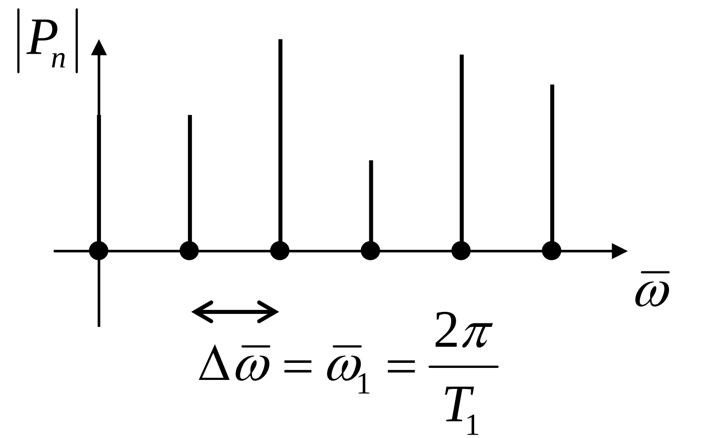
$$\Rightarrow \quad u(t) = \int_0^t P(\tau)\, h\left(t-\tau\right) d\tau$$ **= *convolution de P par h***

$$= \frac{1}{M\,\omega_D} \underbrace{\int_0^t P(\tau)\, e^{-\xi\,\omega\left(t-\tau\right)} \sin\left[\omega_D\left(t-\tau\right)\right] d\tau}_{\textbf{\textit{Intégrale de Duhamel}}}$$

- Pour certaines formes simples de *P(t)*, valeurs tabulées dans des ouvrages spécialisés
- Sinon, intégration numérique (avec algorithmes adaptés)

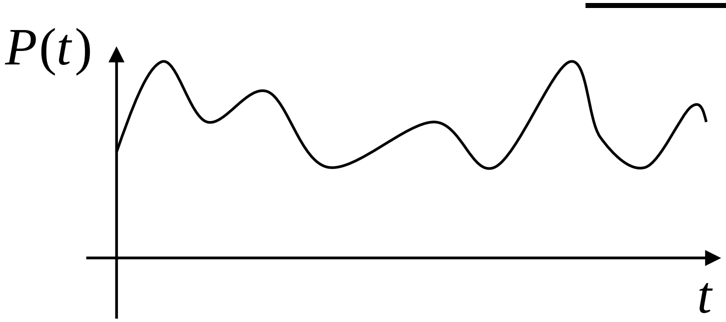
Réponse à une sollicitation quelconque – domaine fréquentiel

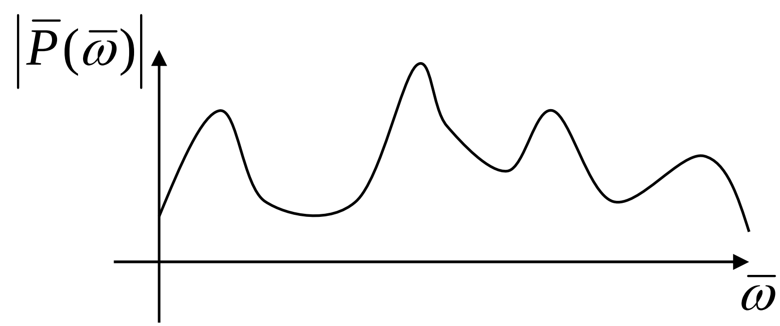




<u>Principe</u>: considérer la sollicitation quelconque comme une sollicitation périodique de période T_1 puis passer à la limite ($T_1 \rightarrow \infty$)

Si $T_1 \rightarrow \infty, \Delta\bar{\omega} \rightarrow 0$ le ***spectre*** des harmoniques discrets devient un ***<u>spectre continu</u>***





Réponse à une sollicitation quelconque – domaine fréquentiel

Détermination et propriété du spectre

Séries de Fourier complexes pour charges périodiques

$$P(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{P}_n e^{in\overline{\omega}_1 t} \quad avec \quad \overline{P}_n = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} P(t) e^{-in\overline{\omega}_1 t}\, dt$$

Poser

$$n\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_n \quad et \quad \overline{P}(\overline{\omega}_n) = T_1 P_n = \frac{2\pi}{\Delta\overline{\omega}} P_n$$

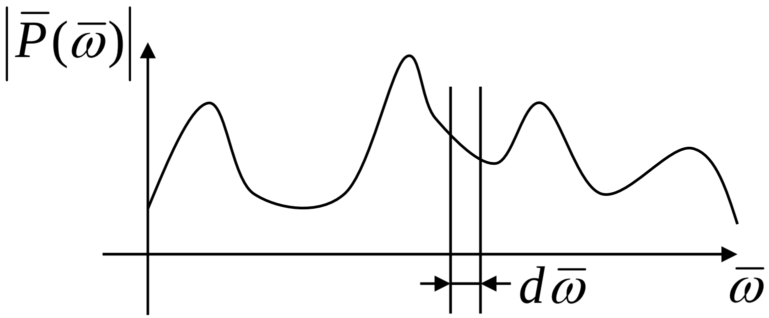
$$\begin{cases} P(t) = \dfrac{\Delta\overline{\omega}}{2\pi} \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{P}(\overline{\omega}_n) e^{i\,\overline{\omega}_n t} \\ \overline{P}(\overline{\omega}_n) = \displaystyle\int_{-T_1/2}^{T_1/2} P(t) e^{-i\overline{\omega}_n t}\, dt \end{cases} \xrightarrow[\Delta\overline{\omega}\to 0]{T_1\to\infty} \begin{cases} P(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{P}(\overline{\omega}) e^{i\,\overline{\omega} t}\, d\overline{\omega} \\ \overline{P}(\overline{\omega}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-i\overline{\omega} t}\, dt \end{cases}$$

Les fonctions *P(t)* et $\overline{P}(\overline{\omega})$ constituent une paire de Fourier

$$P(t) \underset{\text{Transformée de Fourier inverse}}{\overset{\text{Transformée de Fourier directe}}{\rightleftharpoons}} \overline{P}(\overline{\omega})$$

Réponse à une sollicitation quelconque – domaine fréquentiel

$\overline{P}(\overline{\omega})$ représente le "poids" des harmoniques compris entre $\overline{\omega} + d\overline{\omega}$



Réponse de l'oscillateur :

$$u(t) = \frac{\Delta\overline{\omega}}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\overline{H}\left(\beta_n\right)\overline{P}\left(\overline{\omega}_n\right)e^{i\overline{\omega}_n t} \quad avec \quad \beta_n = \overline{\omega}_n/\omega$$

$$\xrightarrow[\Delta\overline{\omega}\to 0]{T_1\to\infty} u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{H}\left(\overline{\omega}\right)\overline{P}\left(\overline{\omega}\right)e^{i\overline{\omega}_n t}\,d\overline{\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{u}\left(\overline{\omega}\right)e^{i\overline{\omega}_n t}\,d\overline{\omega}$$

$\overline{u}\left(\overline{\omega}\right)$: Transformée de Fourier de la réponse

Réponse à une sollicitation quelconque – domaine fréquentiel

Procédure :

$$P(t) \xrightarrow[\textit{Fourier}]{} \boxed{\bar{P}(\bar{\omega}) \xrightarrow[x\ \bar{\bar{H}}(\bar{\omega})]{} \bar{u}(\bar{\omega})} \xrightarrow[\textit{Fourier inverse}]{} u(t)$$

Domaine fréquentiel

$$\left(f = \bar{\omega}/2\pi \right)$$

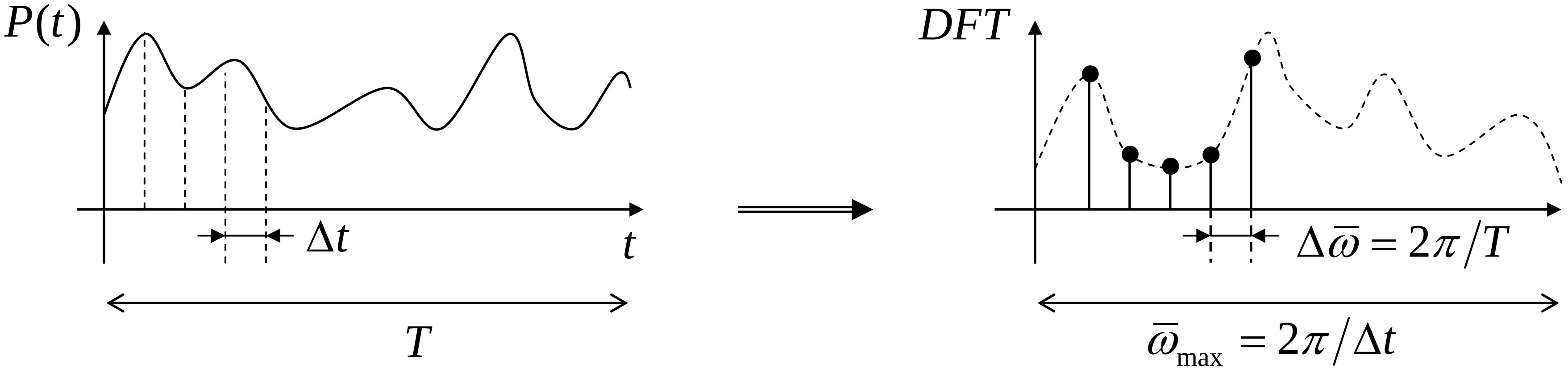
Opérations à effectuer:

- 2 transformées de Fourier
- Détermination de la fonction de transfert
- Une multiplication

Réponse à une sollicitation quelconque – domaine fréquentiel

Remarque 1 :

En pratique, les transformées de Fourier sont généralement effectuées à l'aide d'algorithmes de DFT (Discrete Fourier Transform) ou de FFT (Fast Fourier Transform), qui travaillent sur des signaux discrets



→ Attention au choix des pas et des périodes

Réponse à une sollicitation quelconque – domaine fréquentiel

Remarque 2

Fonctions caractérisant l'oscillateur:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Domaine temporel:} & h(t) \\ \text{Domaine fréquentiel:} & \bar{H}(\bar{\omega})\end{array}\right\} = \text{Paire de Fourier}$$

Opérations:

Domaine temporel: $P(t) \xrightarrow[\text{convolution}]{} u(t) = \int_0^t h(t-\tau)\, P(t)\, d\tau$

Domaine fréquentiel: $\bar{P}(\bar{\omega}) \xrightarrow[\text{multiplication}]{} \bar{u}(\bar{\omega}) = \bar{H}(\bar{\omega})\, \bar{P}(\bar{\omega})$

Méthodes pas à pas – généralités

Limitations des méthodes analytiques:

- Systèmes linéaires
- Pour les charges quelconques, procédures partiellement numériques (Duhamel, DFT-FFT)

→ Alternative: ***méthodes pas à pas*** complètement numériques

Principe: équilibre dynamique vérifié en certains instants

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = P(t) \quad \textit{vérifié en } t_0, t_1 \ldots t_n$$

(généralement, $t_n = t_0 + n\,\Delta t$)

+ hypothèse sur le comportement entre t et $t + \Delta t$

Méthodes pas à pas – généralités

1/ **Formulations implicites > < formulations explicites**

Implicites
$$\begin{Bmatrix} u_{n+1} \\ \dot{u}_{n+1} \\ \ddot{u}_{n+1} \end{Bmatrix} = Fct\left[u_n, \dot{u}_n, \ddot{u}_n, u_{n+1}, \dot{u}_{n+1}, \ddot{u}_{n+1}, P\right]$$

→ Procédures itératives

Explicites
$$\begin{Bmatrix} u_{n+1} \\ \dot{u}_{n+1} \\ \ddot{u}_{n+1} \end{Bmatrix} = Fct\left[u_n, \dot{u}_n, \ddot{u}_n, P\right]$$

→ Solutions directes

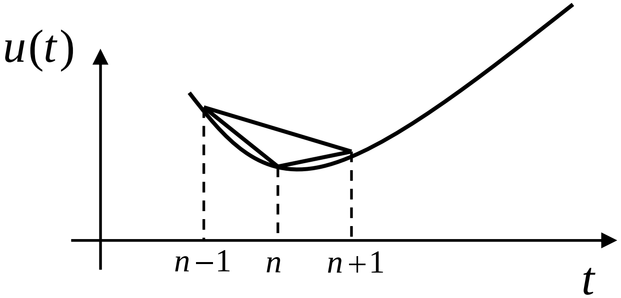
2/ Problèmes possibles

- Déphasage et période apparente (≠ valeurs analytiques)
- Amortissement numérique positif (dégradation de l'amplitude) ou négatif (instabilité de la méthode)

Méthodes pas à pas – généralités

3/ Deux familles principales, selon le type d'hypothèse sur le comportement entre *t* et *t* + *Δt* (entre le pas *n* et le pas *n+1*)

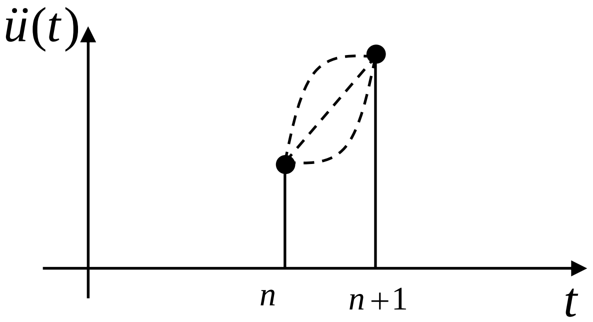
- Approximation sur les dérivées



$$\dot{u} = \frac{du}{dt} \sim \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{u}_t \simeq \frac{u_{t+\Delta t} - u_t}{\Delta t} \quad ou \quad \dot{u}_t \simeq \frac{u_t - u_{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad ou \quad \dot{u}_t \simeq \frac{u_{t+\Delta t} - u_{t-\Delta t}}{2\,\Delta t}$$

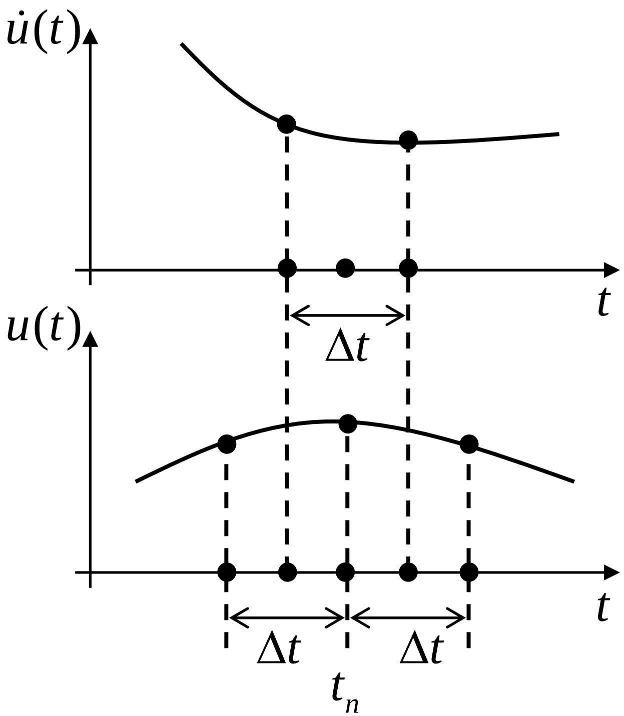
- Approximation sur les intégrales



$$\dot{u}(t) = \int \ddot{u}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \int_0^{\Delta t} \ddot{u}\left(t+\tau\right)d\tau = \dot{u}_t + \ddot{u}_{moy,\Delta t}\,\Delta t$$

Méthode de la différence centrale



$$\ddot{u}_n = \frac{\dot{u}_{n+1/2} - \dot{u}_{n-1/2}}{\Delta t}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{n+1/2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} \\ \dot{u}_{n-1/2} = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \quad \ddot{u}_n = \frac{1}{\Delta t^2}\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) \quad (1)$$

$$M\,\ddot{u}_n + C\,\dot{u}_n + K\,u_n = P(t = t_n)$$

$$\rightarrow \quad \ddot{u}_n = \frac{1}{M}\left[P_n - C\,\dot{u}_n - K\,u_n\right] \quad (2)$$

$$(1) = (2) \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} = \frac{\Delta t^2}{M}\left[P_n - C\,\dot{u}_n - K\,u_n\right] + 2u_n - u_{n-1}$$

$$De\ plus, \dot{u}_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} \quad \Rightarrow \quad u_{n-1} = u_{n+1} - 2\Delta t\,\dot{u}_n$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{n+1} = u_n + \Delta t\,\dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{2M}\left[P_n - C\,\dot{u}_n - K\,u_n\right]}$$

Méthode de la différence centrale

Estimation de la vitesse en $t + \Delta t$:

$$\frac{\dot{u}_{n+1}+\dot{u}_n}{2}=\frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{u}_{n+1}=\frac{2\left(u_{n+1}-u_n\right)}{\Delta t}-\dot{u}_n}$$

→ <u>Schéma explicite</u>: $\left(u_0,\dot{u}_0\right)\rightarrow\left(u_1,\dot{u}_1\right)\rightarrow\ldots\rightarrow\left(u_n,\dot{u}_n\right)\rightarrow\ldots$

- Qualité de la solution liée au choix de Δt: l'erreur sur la solution est d'ordre Δt^2, si on divise le pas de temps par 2, on divise l'erreur sur les dérivées par 4;
- Méthode non-inconditionnellement stable

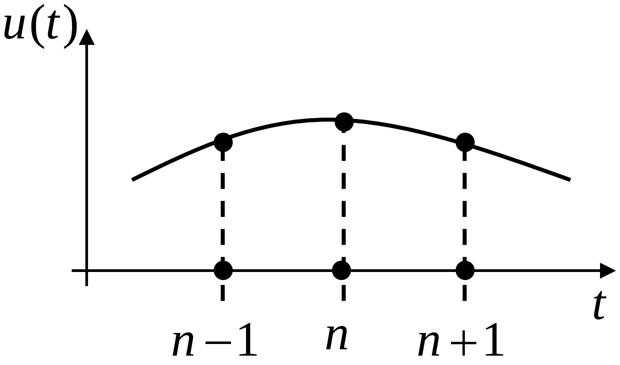
Méthode de la différence centrale

Différence centrale = interpolation parabolique des déplacements

$$u(t) = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2\Delta t^2}\left(t - t_n\right)^2 + \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t}\left(t - t_n\right) + u_n$$

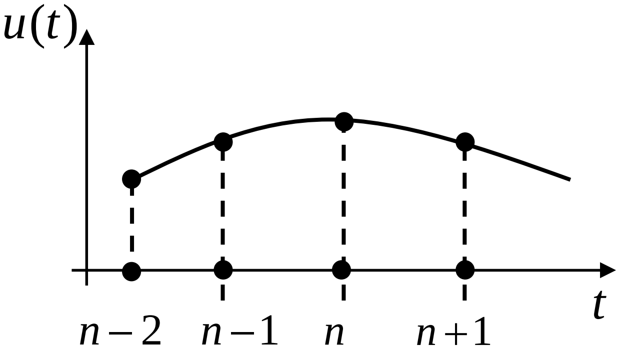
$$\rightarrow \quad \dot{u}(t) = \ldots$$

$$\rightarrow \quad \ddot{u}(t) = Cste = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta t}$$

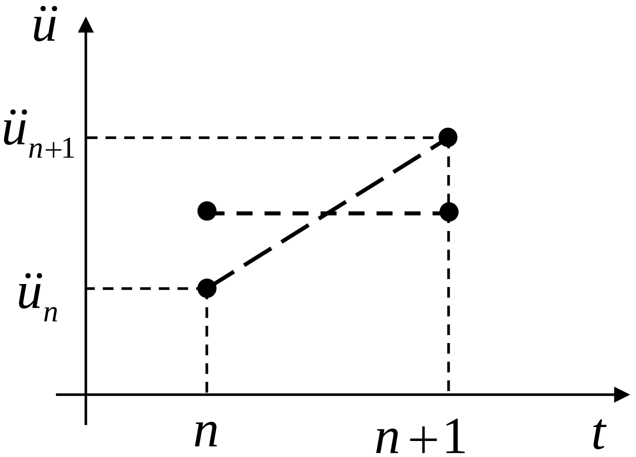


Variante: ***méthode de Houbolt***

- Interpolation cubique des déplacements (→ accélération linéaire)
- Méthode implicite
- Problème au démarrage



Méthode de l'accélération constante/linéaire



1/ $\ddot{u}_n$ connu

2/ Choix d'une valeur d'essai pour $\ddot{u}_{n+1}$

3/ Hypothèse sur l'évolution de l'accélération entre *n* et *n+1*

(a) $\ddot{u} = Cste = \dfrac{\ddot{u}_n + \ddot{u}^*_{n+1}}{2} \Rightarrow$ $\dot{u}$ linéaire et u parabolique entre *t* et *t* + *Δt*

(b) $\ddot{u}\ linéaire : \ddot{u}(t) = \ddot{u}_n + \dfrac{\ddot{u}^*_{n+1} - \ddot{u}_n}{\Delta t}\left(t - t_n\right) \Rightarrow$ $\dot{u}$ parabolique et u cubique entre *t* et *t* + *Δt*

(a) ou (b) $\Rightarrow \dot{u}^*_{n+1}, u^*_{n+1}$

Méthode de l'accélération constante/linéaire

4/ Vérification de l'équilibre dynamique en t_{n+1}

$$M\,\ddot{u}^{*}_{n+1} + C\,\dot{u}^{*}_{n+1} + K\,u^{*}_{n+1} = P_{n+1} \;??$$

Si l'équilibre n'est pas vérifié, nouvelle estimation de l'accélération en t_{n+1} par :

$$\ddot{u}^{**}_{n+1} = \frac{1}{M}\left[P_{n+1} - C\,\dot{u}^{*}_{n+1} - K\,u^{*}_{n+1}\right]$$

Puis recommencer en 3/ jusqu'à ce que l'équilibre soit satisfait

Variante: ***Méthode de Wilson***

Accélération linéaire entre t et $t+\theta\,\Delta t$ ($\theta > 1$), puis interpolation pour déterminer $u_{t+\Delta t}\,,\dot{u}_{t+\Delta t}\,,\ddot{u}_{t+\Delta t}$

Méthode de Newmark

Généralisation de l'accélération constante/linéaire:

u_n *et* $\dot{u}_n$ connus en $t = t_n$

Si l'accélération est constante sur Δt, $\begin{cases} \ddot{u}(t) = a \\ \dot{u}(t) = \dot{u}_n + a\,t \\ u(t) = u_n + \dot{u}_n\,t + a\,t^2/2 \end{cases}$ $\quad$ *pour* $t \in [t_n, t_{n+1}]$

Hypothèse sur a : Combinaison linéaire de $\ddot{u}_n$ *et* $\ddot{u}_{n+1}$

Combinaison a priori différente pour estimer u *et* $\dot{u}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \left[(1-\delta)\ddot{u}_n + \delta\ddot{u}_{n+1}\right]\Delta t & (1) \\ u_{n+1} = u_n + \dot{u}_n\Delta t + \left[(1/2-\alpha)\ddot{u}_n + \alpha\ddot{u}_{n+1}\right]\Delta t^2 & (2) \end{cases}$$

- Si $\delta = 1/2$ *et* $\alpha = 1/4$, accélération constante
- Si $\delta = 1/2$ *et* $\alpha = 1/6$, accélération linéaire
- La formulation résultante est implicite → procédure itérative nécessaire

Méthode de Newmark

Conversion à un schéma explicite :

$$(2) \quad \rightarrow \quad \ddot{u}_{n+1} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}\left[u_{n+1} - u_n\right] - \frac{1}{\alpha \Delta t}\dot{u}_n - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_n \qquad (3)$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t\left(1-\delta\right)\ddot{u}_n + \delta \Delta t \ddot{u}_{n+1} \qquad (4)$$

$$(3),(4)\ dans\ M\,\ddot{u}_{n+1} + C\,\dot{u}_{n+1} + K\,u_{n+1} = P_{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \left[K + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} M + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} C\right] u_{n+1}$$

$$= P_{n+1} + M\left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} u_n + \frac{1}{\alpha\,\Delta t}\dot{u}_n + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_n\right] + C\left[\frac{\delta}{\alpha \Delta t} u_n + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1\right)\dot{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right)\ddot{u}_n\right]$$

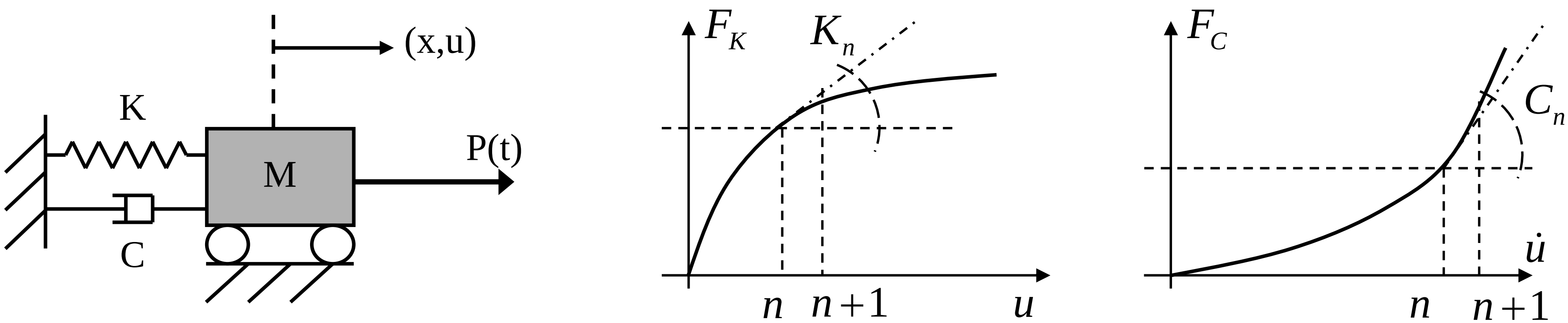
$$\Rightarrow \quad K_F\, u_{n+1} = P_{n+1}^F$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_{n+1} = \frac{1}{K_F} P_{n+1}^F} \qquad puis \quad \ddot{u}_{n+1}\ par\ (3)\ et\ \dot{u}_{n+1}\ par\ (4)$$

$\longrightarrow$ Solution "statique" équivalente

Cste $\qquad Fct(P_{n+1}, u_n, \dot{u}_n, \ddot{u}_n)$

Réponse d'un oscillateur non linéaire (Newmark)



$K = K(u)$ $\qquad$ $C = C(\dot{u})$

Equilibre en t $\qquad$ $M\,\ddot{u}_n + C\left[\dot{u}\left(t_n\right)\right]\dot{u}_n + K\left[u\left(t_n\right)\right]u_n = P_n \qquad (a)$

Equilibre en $t + \Delta t$ $\qquad$ $M\,\ddot{u}_{n+1} + C\left[\dot{u}\left(t_{n+1}\right)\right]\dot{u}_{n+1} + K\left[u\left(t_{n+1}\right)\right]u_{n+1} = P_{n+1} \qquad (b)$

Hypothèse: C et K ~ constant entre $t + \Delta t$ $\quad \Rightarrow \quad C = C\left(t_n\right) \quad et \quad K = K\left(t_n\right)$

$$(b)-(a): \quad M\,\Delta\ddot{u} + C_n\,\Delta\dot{u} + K_n\,\Delta u = \Delta P$$

Réponse d'un oscillateur non linéaire (Newmark)

+ Poser $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \Delta u \\ \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta \dot{u} \\ \ddot{u}_{n+1} = \ddot{u}_n + \Delta \ddot{u} \end{cases}$ dans $\begin{cases} \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \left[\left(1-\delta\right)\ddot{u}_n + \delta \ddot{u}_{n+1} \right] \Delta t \\ u_{n+1} = u_n + \dot{u}_n \Delta t + \left[\left(1/2 - \alpha\right)\ddot{u}_n + \alpha \ddot{u}_{n+1} \right] \Delta t^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \left[K_n + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} M + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} C_n \right] \Delta u$$

$$= \Delta P + M \left[\frac{1}{\alpha\, \Delta t} \dot{u}_n + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_n \right]$$

$$+ C_n \left[\left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \dot{u}_n + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \ddot{u}_n \right]$$

$$\Rightarrow \quad K_F \, \Delta u = \Delta P_F$$

$$\Rightarrow \quad \Delta u = \frac{1}{K_F} \Delta P_F \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} = u_n + \Delta u$$

K_F et ΔP_F évoluent à chaque pas !!

puis $\ddot{u}_{n+1}$ *par* (3) *et* $\dot{u}_{n+1}$ *par* (4)

Stabilité et précision des méthodes pas à pas

Méthode d'évaluation de la stabilité

- Exprimer le schéma d'intégration de l'équation de vibration libre sous forme d'une récurrence

$$\{x_n\} = [A]\{x_{n-1}\} = [A]^n \underbrace{\{x_0\}}_{\text{Conditions initiales}}$$

Avec $\{x_n\}$ = vecteur caractéristique de l'état de déplacement en $t = t_n$

- Effectuer la décomposition spectrale de la matrice **[*A*]**

$$[A] = [P][\Lambda][P]^{-1} \quad \Rightarrow \quad [A]^n = [P][\Lambda]^n [P]^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \{x_n\} = [P][\Lambda]^n [P]^{-1} \{x_0\}$$

$[\Lambda]$ Matrices diagonales des valeurs propres λi

$[P]$ Vecteurs propres

- Vérifier la condition de stabilité sur le rayon spectral ρ ([***A***])

$$\rho([A]) = \max|\lambda_i| \leq 1$$

$$Si\ \rho > 1, [\Lambda]^n \to \infty \quad \Rightarrow$$ Amplification artificielle des conditions initiales

$$Si\ \rho < 1, [\Lambda]^n \to 0 \quad \Rightarrow$$ Amortissement artificiel des conditions initiales

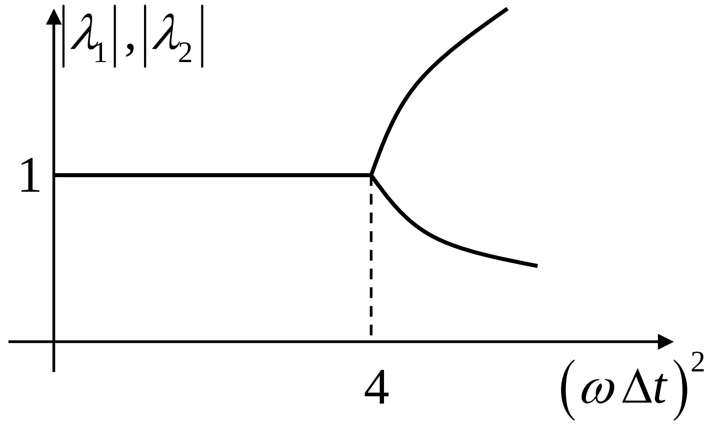
Stabilité et précision des méthodes pas à pas

Exemple: Différence centrale

$$\begin{cases} \ddot{u}_n = \dfrac{1}{\Delta t^2}\left[u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right] & (1) \\ \dot{u}_n = \dfrac{1}{2\,\Delta t}\left[u_{n+1} - u_{n-1}\right] & (2) \quad \rightarrow \quad (1)\ et\ (2)\ dans\ (3) \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} = Fct\left\{u_n, u_{n-1}\right\} \\ \ddot{u}_n + 2\xi\omega\dot{u}_n + \omega^2 u_n = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2-\omega^2\Delta t^2}{1+\xi\omega\Delta t} & -\dfrac{1-\xi\omega\Delta t}{1+\xi\omega\Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \left\{x_{n+1}\right\} = \left[A\right]\left\{x_n\right\}$$

$$si\ \xi = 0,\ \lambda_{\substack{1\\2}} = 1 - \frac{\omega^2\Delta t^2}{2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2\Delta t^2}{2}\right)^2 - 1}$$



Seuil de stabilité: $\omega^2\ \Delta t^2 = 4$

$\rightarrow \Delta t \leq \Delta t^* = T/\pi$

Stabilité et précision des méthodes pas à pas

Précision:

En fonction de l'amortissement, du type de chargement, des paramètres de la méthode, du pas de temps…

on peut observer: un allongement de la période et/ou une dégradation de l'amplitude, par comparaison avec une solution analytique

Par exemple: vibrations libres

$$u(t) = \cos \omega t \quad \rightarrow \quad \tilde{u}(t) = \underbrace{\tilde{A}}_{\leq 1} \cos \underbrace{\tilde{\omega}}_{\leq \omega} t$$

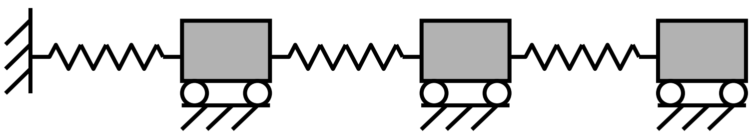
Calcul des structures sous effets dynamiques et sismiques

Systèmes à plusieurs degrés de liberté (MDOF)

Systèmes MDDL

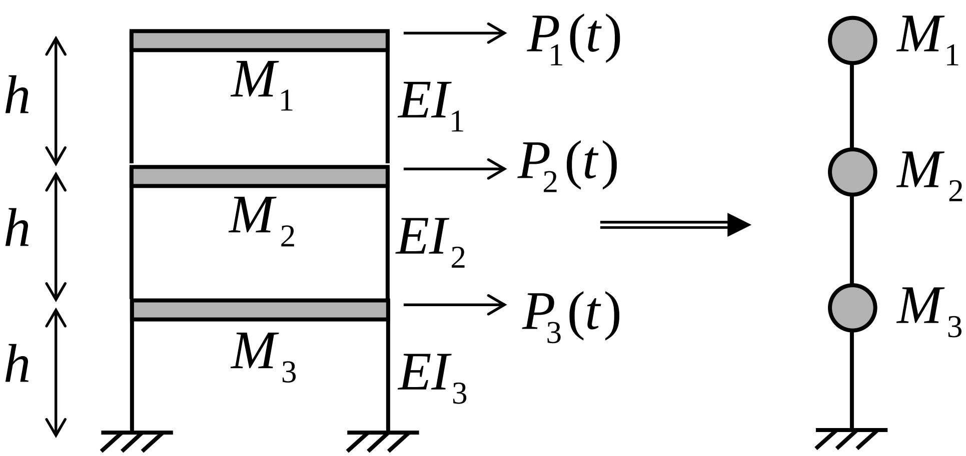
Systèmes considérés comme MDDL

1/ "Vrais" systèmes MDDL



3 DDL

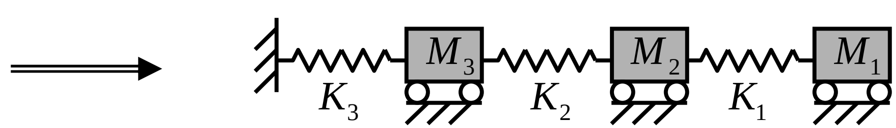
2/ Systèmes simplifiés en systèmes MDDL



$$K_1 = 2 \times \frac{12 EI_1}{h^3}$$

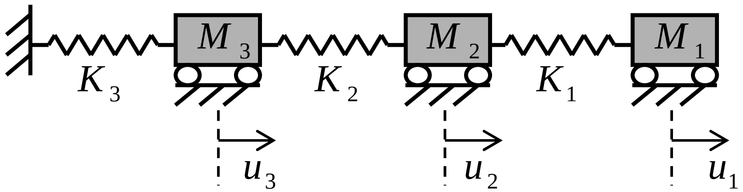
$$K_2 = 2 \times \frac{12 EI_2}{h^3}$$

$$K_3 = 2 \times \frac{12 EI_3}{h^3}$$



Systèmes MDDL

Équilibre des trois masses



$$\begin{cases} M_3\ddot{u}_3 = -K_3u_3 + K_2(u_2 - u_3) + P_3 \\ M_2\ddot{u}_2 = K_2(u_3 - u_2) + K_1(u_1 - u_2) + P_2 \\ M_1\ddot{u}_1 = K_1(u_2 - u_1) + P_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1\ddot{u}_1 + K_1u_1 - K_1u_2 = P_1 \\ M_2\ddot{u}_2 + (K_1 + K_2)u_2 - K_2u_3 - K_1u_1 = P_2 \\ M_3\ddot{u}_3 + (K_2 + K_3)u_3 - K_2u_2 = P_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & (K_1 + K_2) & -K_2 \\ 0 & -K_2 & (K_2 + K_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

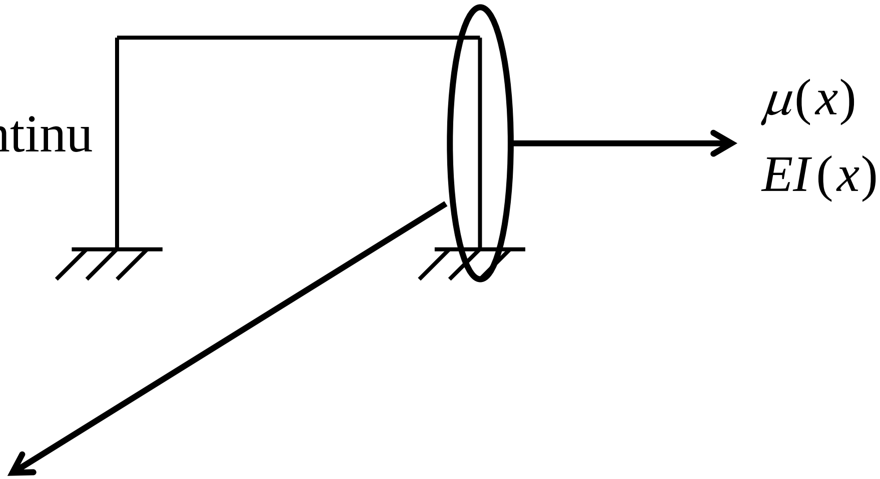
$$\Rightarrow [M]\{\ddot{u}\}\left(+[C]\{\dot{u}\}\right) + [K]\{u\} = \{P\}$$

⟶ **Forme matricielle de l'équation du mouvement (Système de N équations différentielles du second ordre à N inconnues)**

Systèmes MDDL

3/ Formulation "élément fini" – exemple des éléments "poutre"

Système continu



Système discrétisé (approche "déplacements")

$$v(x) = V_1\psi_1(x) + \theta_1\psi_2(x) + V_2\psi_3(x) + \theta_2\psi_4(x)$$

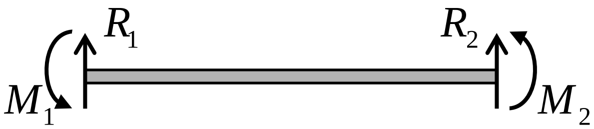
$\psi_i(x)$: Fonctions d'interpolation cubiques

Systèmes MDDL

Rappels d'analyse statique

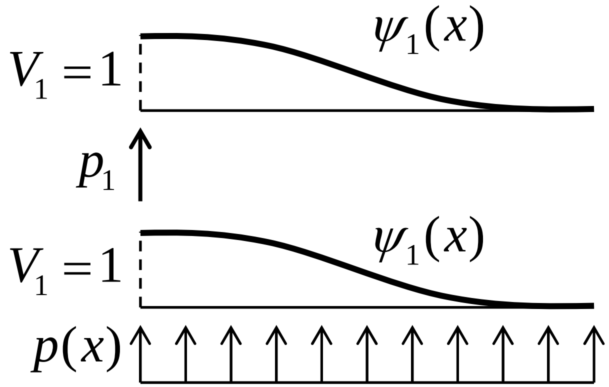
- Rigidité k_{ij} = réaction en i sous l'effet d'un déplacement unitaire en j

  Par exemple: $R_1 = k_{11}V_1 + k_{12}\theta_1 + k_{13}V_2 + k_{14}\theta_2$



- Force énergétiquement équivalente aux forces extérieures: imposer un déplacement unitaire du DDL i $\rightarrow$ $v(x) = \psi_i(x)$

  puis exprimer l'équivalence des travaux $p_i = \int_0^L p(x)\psi_i(x)dx$



→ Équilibre statique:

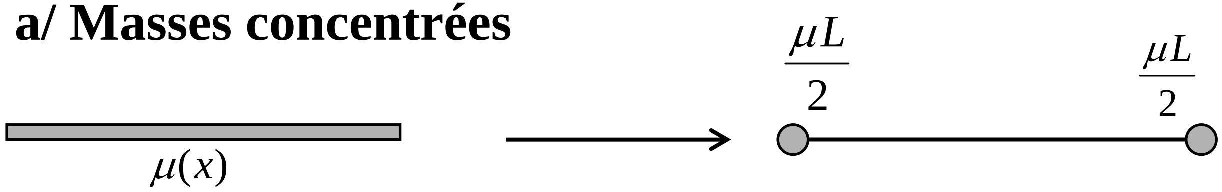
$$-\{R\} + \{P\} + \{p\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -[K]\{q\} + \{P\} + \{p\} = 0$$

Systèmes MDDL

<u>Comportement dynamique</u>

a/ Masses concentrées



$$\Rightarrow \begin{cases} F_{I1} = \dfrac{\mu L}{2}\ddot{V}_1 \\ F_{I2} = \dfrac{\mu L}{2}\ddot{V}_2 \end{cases}$$

→ Équilibre dynamique (exemple du DDL 1):

$$F_{I1}(t) = P_1(t) + p_1(t) - R_1(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mu L}{2}\ddot{V}_1(t) = P_1(t) + p_1(t) - k_{11}V_1(t) - k_{12}\theta_1(t) - k_{13}V_2(t) - k_{14}\theta_2(t)$$

→ Globalisation sur l'élément:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mu L}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\mu L}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{V}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{V}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \left[K\right] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \left\{P(t)\right\} + \left\{p(t)\right\}$$

Systèmes MDDL

b/ Masses cohérentes

$+v(x)$

$\mu(x)$

$$\rightarrow \quad f_I(x) = \mu(x)\ddot{v}(x) = \mu(x)\left[\psi_1(x)\ddot{V}_1 + \psi_2(x)\ddot{\theta}_1 + \psi_3(x)\ddot{V}_2 + \psi_4(x)\ddot{\theta}_2\right]$$

→ Forces d'inertie nodales énergétiquement équivalentes à l'inertie répartie:

$$F_{I,i}(x) = \int_0^L f_I(x)\psi_i(x)dx = \int_0^L \mu(x)\left[\psi_1(x)\ddot{V}_1 + \ldots + \psi_4(x)\ddot{\theta}_2\right]\psi_i(x)dx$$

m_{ij} = force d'inertie équivalente en *i* sous l'effet d'une accélération unitaire en *j*

$$m_{ij} = \int_0^L \mu(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx$$

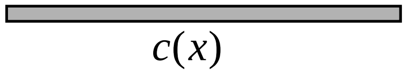
Équilibre dynamique du DDL 1: $F_{I,1}(x) = m_{11}\ddot{V}_1 + m_{12}\ddot{\theta}_1 + m_{13}\ddot{V}_2 + m_{14}\ddot{\theta}_1$

$$\Rightarrow \quad F_{I,1}(t) = P_1(t) + p_1(t) - R_1(t)$$

→ Globalisation sur l'élément: $\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{P\} + \{p\}$

Systèmes MDDL

c/ Amortissement



$$+v(x) \rightarrow \quad f_C(x) = c(x)\dot{v}(x) \quad \rightarrow \quad c_{ij} = \int_0^L c(x)\psi_i(x)\psi_j(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad [M]^E\{\ddot{q}\}^E + [C]^E\{\dot{q}\}^E + [K]^E\{q\}^E = \{P\} + \{p\}^E$$

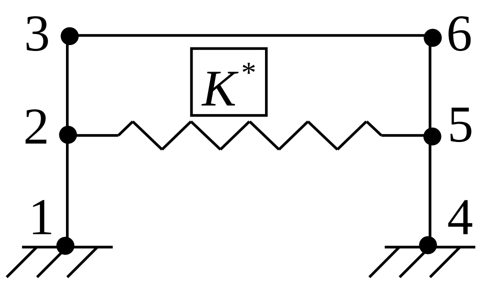
Rotations et assemblages des matrices locales $\Rightarrow \quad [M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{P_{tot}\}$

<u>Remarques</u>:

- En pratique, *c(x)* est difficile à déterminer et insuffisant → la matrice d'amortissement [C] doit être déterminée autrement
- Ajouts de masses concentrées: ajouter M^* sur la diagonale de [M]
- Ajouts de ressorts ou amortisseurs concentrés: ajouter K^* ou C^* aux termes adéquats de [K] ou [C]

$$F_2 = K^*\left(V_5 - V_2\right)$$

$$F_5 = K^*\left(V_2 - V_5\right)$$



$$\begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots + K^* & \cdots & \cdots - K^* & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots - K^* & \cdots & \cdots + K^* & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

Vibrations libres non amorties

Système d'équations différentielles à résoudre : $\left[M\right]\left\{\ddot{q}\right\}+\left[K\right]\left\{q\right\}=\left\{0\right\}$

Hypothèse: tous les DDL vibrent en phase de manière harmonique

$$\rightarrow \quad \left\{q(t)\right\}=\left\{u\right\}\varphi(t)=\left\{u\right\}\sin\omega t$$

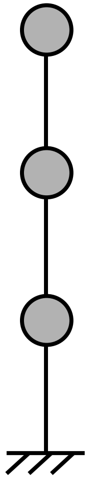
$$\left[M\right]\left\{u\right\}\ddot{\varphi}(t)+\left[K\right]\left\{u\right\}\varphi(t)=\left\{0\right\} \quad \Rightarrow \boxed{\left(\left[K\right]-\omega^2\left[M\right]\right)\left\{u\right\}=\left\{0\right\}}$$

Problème généralisé aux valeurs propres

→ Trouver les valeurs particulières de ω pour que le système possède une solution non trivialement nulle

Vibrations libres non amorties

Exemple



$$\begin{cases} M_1 = 1000\,kg \\ M_2 = 1500\,kg \\ M_3 = 2000\,kg \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} K_1 = 1{,}5.10^6\ N/m \\ K_2 = 3{,}0.10^6\ N/m \\ K_3 = 4{,}5.10^6\ N/m \end{cases}$$

$$[K] = 10^6 \begin{bmatrix} 1{,}5 & -1{,}5 & 0 \\ -1{,}5 & 4{,}5 & -3 \\ 0 & -3 & 7{,}5 \end{bmatrix} \quad [M] = 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}0 \end{bmatrix}$$

$$[K] - \omega^2 [M] = 10^6 \begin{bmatrix} 1{,}5 - A & -1{,}5 & 0 \\ -1{,}5 & 4{,}5 - 1{,}5A & -3 \\ 0 & -3 & 7{,}5 - 2A \end{bmatrix} \quad avec\ A = \frac{\omega^2}{1000}$$

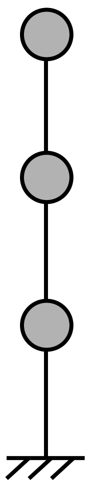
$$\left|[K] - \omega^2 [M]\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad 3A^3 - 24{,}75A^2 + 50{,}625A - 20{,}25 = 0$$

$$\rightarrow A = \begin{Bmatrix} 0{,}527 \\ 2{,}410 \\ 5{,}313 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \omega = \begin{Bmatrix} 22{,}961 \\ 49{,}091 \\ 72{,}890 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow f = \begin{Bmatrix} 3{,}654 \\ 7{,}813 \\ 11{,}601 \end{Bmatrix} Hz \quad \rightarrow T = \begin{Bmatrix} 0{,}274 \\ 0{,}128 \\ 0{,}086 \end{Bmatrix} s$$

Fréquences (pulsations, périodes) propres de la structure (autant que de DDL)

Vibrations libres non amorties

Exemple



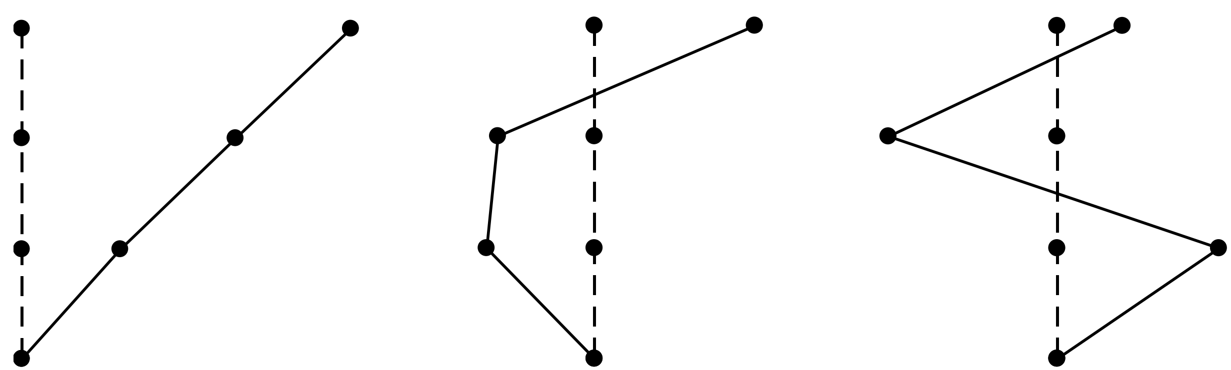
Pour chaque pulsation propre $\tilde{\omega}$, on peut résoudre le système

$$\left(\left[K\right]-\tilde{\omega}^2\left[M\right]\right)\left\{u(x)\right\}=\left\{0\right\}$$

$\Rightarrow \quad \left\{\tilde{u}(x)\right\}$ défini à une constante près = forme de la déformée vibratoire pour la fréquence considérée

Pour l'exemple, en normant le déplacement en tête à 1,

$$\left\{\tilde{u}_1(x)\right\}=\begin{Bmatrix}1\\0,65\\0,30\end{Bmatrix} \quad \left\{\tilde{u}_2(x)\right\}=\begin{Bmatrix}1\\-0,61\\-0,68\end{Bmatrix} \quad \left\{\tilde{u}_3(x)\right\}=\begin{Bmatrix}1\\-2,54\\2,44\end{Bmatrix}$$



Vibrations libres non amorties

Propriétés des modes propres

$$[K]\{u_i\} = \omega_i^2 [M]\{u_i\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \langle u_j \rangle [K]\{u_i\} = \omega_i^2 \langle u_j \rangle [M]\{u_i\} & (1) \\ \langle u_i \rangle [K]\{u_j\} = \omega_j^2 \langle u_i \rangle [M]\{u_j\} & (2) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \quad \Rightarrow \quad 0 = \left(\omega_i^2 - \omega_j^2\right)\langle u_i \rangle [M]\{u_j\}$$ vu que $[K]$ et $[M]$ sont symétriques

$$\Rightarrow \quad si\ i \neq j : \langle u_i \rangle [M]\{u_j\} = 0 \quad et \quad \langle u_i \rangle [K]\{u_j\} = 0$$

Les vecteurs propres sont **orthogonaux** par rapport à $[K]$ et $[M]$ (même si $\omega_i = \omega_j$)

$$et \quad \omega_i^2 = \frac{\langle u_i \rangle [K]\{u_i\}}{\langle u_i \rangle [M]\{u_i\}} = \frac{K_i^*}{M_i^*}$$

Masse et raideur généralisées associées au mode i

Calcul des modes propres

Si N >>1, algorithmes de résolution du problème généralisé aux valeurs propres $\left([A]-\lambda[B]\right)\{x\} = \{0\}$ (puissance, sécante, rotation)

Réponse forcée : domaine fréquentiel

Méthodes de résolution du système d'équations différentielles

N inconnues = évolution des déplacements des nœuds au cours du temps

Pour un système à 1 DDL, la fonction de transfert $\overline{H}(\overline{\omega})$ représente la réponse fréquentielle du système soumis à un ***bruit blanc*** $\left[P(t)\ tel\ que\ \overline{P}(\overline{\omega})=1\right]$

→ Pour les systèmes MDDL, on définit des ***fonctions de transfert croisées*** (= réponse fréquentielle du DDL *i* si on applique un bruit blanc en *j*)

$$P_j(t) \xrightarrow{Fourier} \overline{P}_j(\overline{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} P_j(t)\, e^{-i\overline{\omega}t}\, dt$$

$$\overline{v}_{ij}(\overline{\omega}) = \overline{H}_{ij}(\overline{\omega})\overline{P}_j(\overline{\omega}) \xrightarrow{Fourier\ inverse} v_{ij}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{v}_{ij}(\overline{\omega})\, e^{i\overline{\omega}t}\, d\overline{\omega}$$

$$v_i(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{H}_{ij}(\overline{\omega})\overline{P}_j(\overline{\omega})\, e^{i\overline{\omega}t}\, d\overline{\omega}\right]$$

Réponse forcée : domaine fréquentiel/temporel

Fonction de transfert pour 1DDL: $\bar{H}(\bar{\omega}) = \dfrac{1}{K - \bar{\omega}^2 M + i\bar{\omega} C}$

$\longrightarrow$ Matrice de transfert: $\left[\bar{H}(\bar{\omega})\right] = \left\{[K] - \bar{\omega}^2 [M] + i\bar{\omega}[C]\right\}^{-1}$

Pratiquement impossible à calculer analytiquement → évaluée point par point pour une série de pulsations discrètes

Pour chaque terme de la matrice de transfert, on peut calculer la transformée de Fourier → matrice de réponse impulsionnelle

$$\bar{H}_{ij}(\bar{\omega}) \xrightarrow{Fourier} h_{ij}(t)$$

$h_{ij}(t)$ = réponse à l'instant *t* du DDL *i* sollicité par une impulsion unitaire à l'instant *t* = *0* au DDL *j*

$$\Rightarrow \quad v_{ij}(t) = \int_0^t P_j(\tau)\, h_{ij}(t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \quad v_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \left[\int_0^t P_j(\tau)\, h_{ij}(t-\tau)\, d\tau \right]$$

Réponse forcée : domaine temporel

Réponse pas à pas: généralisation de la méthode de Newmark

$$\begin{cases} \{\dot{q}\}_{n+1} = \{\dot{q}\}_n + \left[(1-\delta)\{\ddot{q}\}_n + \delta\{\ddot{q}\}_{n+1}\right]\Delta t \\ \{q\}_{n+1} = \{q\}_n + \{\dot{q}\}_n \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\{\ddot{q}\}_n + \alpha\{\ddot{q}\}_{n+1}\right]\Delta t^2 \end{cases}$$

→ **Schéma explicite** $[K_F]\{q\}_{n+1} = \{P^F\}_{n+1}$

$$avec \quad [K_F] = [K] + \frac{1}{\alpha\,\Delta t^2}[M] + \frac{\delta}{\alpha\,\Delta t}[C]$$

$$et \quad \{P^F\}_{n+1} = \{P\}_{n+1} + \left(\frac{1}{\alpha\,\Delta t^2}\{q\}_n + \frac{1}{\alpha\,\Delta t}\{\dot{q}\}_n + \left(\frac{1}{2\alpha}-1\right)\{\ddot{q}\}_n\right)[M]$$

$$+\left(\frac{\delta}{\alpha\,\Delta t}\{q\}_n + \left(\frac{\delta}{\alpha}-1\right)\{\dot{q}\}_n + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha}-1\right)\{\ddot{q}\}_n\right)[C]$$

A évaluer une fois

$$\Rightarrow \quad \{q\}_{n+1} = [K_F]^{-1}\{P^F\}_{n+1} \longrightarrow$$ A évaluer à chaque pas

Méthode utilisable pour des systèmes non linéaires, mais $[K_F]$ à inverser à chaque pas !

Réponse forcée en base modale

Les N modes propres sont linéairement indépendants

→ Tout vecteur peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des modes propres. En particulier:

$$\{q(t)\} = \sum_{i=1}^{N} \eta_i(t)\{u_i\} = [U]\{\eta(t)\}$$

→ Matrices de modes propres

Système non amorti

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{P\}$$

$$[U]^T [M][U]\{\ddot{\eta}\} + [U]^T [K][U]\{\eta\} = [U]^T \{P\}$$

$$avec\ \langle u_i \rangle [M]\{u_j\} = \begin{cases} M_i^* & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases} \quad id.\ pour\ [K]$$

$$\Rightarrow \quad [M^*]\{\ddot{\eta}\} + [K^*]\{\eta\} = [U]^T \{P\}$$ $[K^*]$ et $[M^*]$ = matrices diagonales

$$\Rightarrow \quad M_i^*\ \ddot{\eta}_i(t) + K_i^*\ \eta_i(t) = P_i^*(t) \quad avec\ P_i^*(t) = \langle u_i \rangle \{P\} \quad pour\ i = 1, N$$

→ N équations découplées: résolution de N équations du mouvement à 1DDL

Réponse forcée en base modale

Système amorti: $\left[M\right]\left\{\ddot{q}\right\}+\left[C\right]\left\{\dot{q}\right\}+\left[K\right]\left\{q\right\}=\left\{P\right\}$

$$\Rightarrow \quad \left[M^*\right]\left\{\ddot{\eta}\right\}+\left[C^*\right]\left\{\dot{\eta}\right\}+\left[K^*\right]\left\{\eta\right\}=\left[U\right]^T\left\{P\right\}$$

$$avec\left[C^*\right]=\left[U\right]^T\left[C\right]\left[U\right] \longrightarrow \text{Pas forcément diagonale !}$$

Traitements possibles de l'amortissement:

$[C]$ connue (par exemple dans le cas d'amortisseurs concentrés)

- Résoudre le problème complet dans la base des déplacements nodaux
- Résoudre le problème couplé dans la base des amplitudes modales
- Négliger les termes "hors-diagonale" dans une approche modale

$$\longrightarrow \quad M_i^*\ \ddot{\eta}_i(t)+C_i^*\ \dot{\eta}_i(t)+K_i^*\ \eta_i(t)=P_i^*(t)$$

Réponse forcée en base modale

$[C]$ non connue précisément (amortissement structurel) → nécessité de faire des hypothèses

a/ Amortissement de Rayleigh $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$

α et β : 2 coefficients à régler

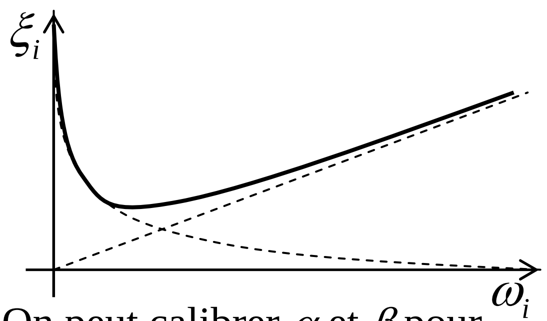
Amortissement proportionnel à la masse: plutôt amortissement "externe" (frottements…)

Amortissement proportionnel à la raideur: plutôt amortissement interne au matériau

$$\Rightarrow \quad [U]^T [C][U] = \alpha\left[M^*\right] + \beta\left[K^*\right]$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\eta}_i + 2\,\xi_i\,\omega_i\,\dot{\eta}_i + \omega_i^{\,2}\,\eta_i = \frac{1}{M_i^*} P_i^*$$

$$avec\ \xi_i = \frac{C_i^*}{2\,\omega_i M_i^*} = \frac{\alpha}{2\,\omega_i} + \frac{\beta\,\omega_i}{2}$$



On peut calibrer α et β pour obtenir un niveau d'amortissement déterminé pour 2 modes propres (→ 2 pulsations propres)

Réponse forcée en base modale

b/ Amortissement modal

Hypothèse de découplage + fixer ξ_i mode par mode (par exemple le même pour tous les modes)

<u>**Solution des équations découplées**</u>

Impulsionnelle, fréquentielle, pas à pas (harmonique, périodique)

$\rightarrow$ <u>Duhamel</u> $h_i(t) = \frac{1}{M_i^* \omega_{D,i}} e^{-\xi_i \omega_i t} \sin \omega_{D,i} t \quad avec \quad \omega_{D,i} = \omega_i \sqrt{1-\xi_i^2}$

$$[K],[M] \rightarrow \{u_i\}, \omega_i \rightarrow M_i^*, K_i^*, C_i^* (\rightarrow \xi_i), P_i^* \rightarrow h_i(t)$$

$$\eta_i(t) = \int_0^t P_i^*(t)\, h_i(t-\tau)\, d\tau \quad \Rightarrow \quad \{q(t)\} = \sum_{i=1}^{N} \eta_i(t) \{u_i\}$$

Réponse forcée en base modale

Solution des équations découplées

Impulsionnelle, ***fréquentielle***, pas à pas (harmonique, périodique)

$$\bar{H}_i(\omega) = \frac{1/K_i^*}{\left(1-\beta_i^2\right)+2i\xi_i\beta_i} \quad avec \quad \beta_i = \frac{\omega}{\omega_i}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\bar{H}(\omega)\right] = \begin{bmatrix} \bar{H}_1(\omega) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{H}_2(\omega) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{H}_N(\omega) \end{bmatrix}$$

Matrice de transfert diagonale

Procédure: $[K],[M] \to \{u_i\},\omega_i \to M_i^*, K_i^*, C_i^* (\to \xi_i) \to \left[\bar{H}(\omega)\right]$

$$\{P(t)\} \xrightarrow[\textit{la base modale}]{\textit{projection dans}} \{P^*(t)\} = [U]^T \{P(t)\} \xrightarrow[\textit{domaine fréquentiel}]{\textit{passage dans le}} \{\tilde{P}^*(\omega)\}$$

$$\xrightarrow{\textit{résolution}} \{\tilde{\eta}(\omega)\} = \left[\bar{H}(\omega)\right]\{\tilde{P}^*(\omega)\} \xrightarrow[\textit{domaine temporel}]{\textit{retour dans le}} \{\eta(t)\}$$

$$\xrightarrow[\textit{base des noeuds}]{\textit{retour dans la}} \{q(t)\} = \sum_{i=1}^{N} \eta_i(t)\{u_i\}$$

Réponse forcée en base modale

Troncature de la base des modes:

Sous certaines conditions, possibilité de réduire la taille du problème à résoudre

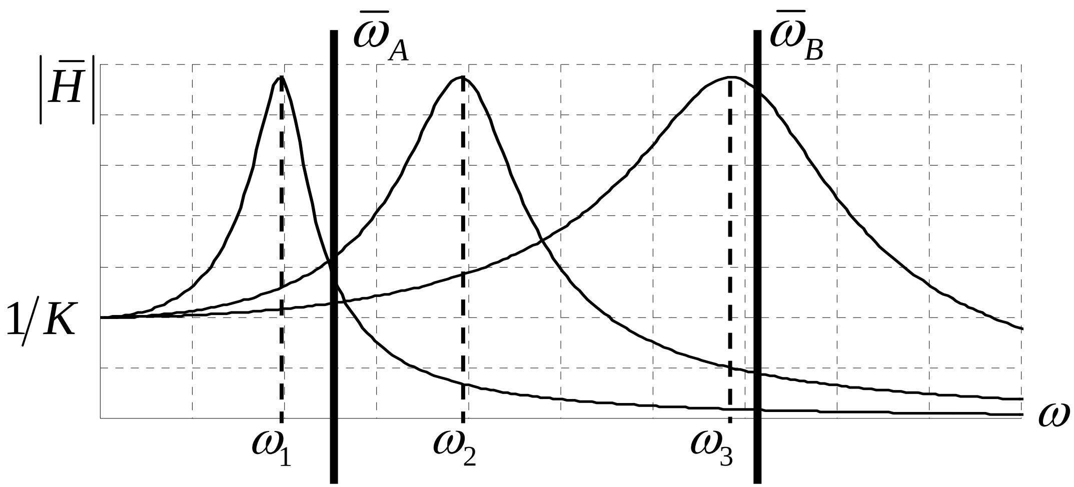
$$\{q(t)\} = \sum_{i=1}^{r} \eta_i(t)\{u_i\} = \left[U^{red}\right]\{\eta(t)\} \quad r < N$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\eta}_i + 2\,\xi_i\,\omega_i\,\dot{\eta}_i + \omega_i^2\,\eta_i = \frac{1}{M_i^*} P_i^* \qquad avec\ i = 1, r$$

En augmentant *r*, on converge vers la solution exacte

Critères pour justifier la réduction:

Amplification dynamique – hypothèse: $\{P(t)\} = \{R\} \sin \bar{\omega} t$ → Spectre = une raie dans le domaine fréquentiel



Amplification maximale pour les modes de pulsation proche de la pulsation excitatrice

Réponse quasi-statique pour les modes à haute pulsation propre

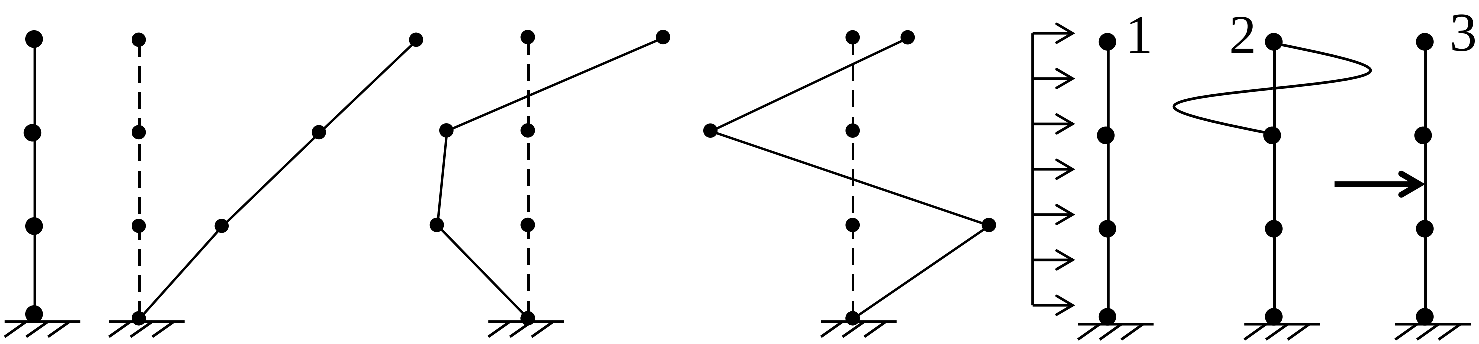
Réponse forcée en base modale

<u>Critères pour justifier la réduction:</u>

Facteur de participation modale – hypothèse: $\{P(t)\}=\{R\}\varphi(t)$

$$\frac{P_i^*}{M_i^*}=\frac{\langle u_i\rangle\{P\}}{\langle u_i\rangle[M]\{u_i\}}=\boxed{\frac{\langle u_i\rangle\{R\}}{\langle u_i\rangle[M]\{u_i\}}}\varphi(t)$$

= F.P.M: charge modale normée par la masse, proportionnelle au produit scalaire de la charge par le mode



Charge 1: Excite principalement le monde 1; plus on monte dans les modes, plus FPM diminue

Charge 2: Excite surtout le mode 2

Charge 3: Excite modes 1 et 2, mais pas mode 3

Vecteurs de Ritz

- Vecteurs propres: indépendants du chargement
- FPM maximum si la déformée est homothétique au chargement $\{R\}$

→ Remplacer la base des modes propres par une base liée en correspondance avec le chargement (= vecteurs de Ritz).

Méthode

- Déformée statique sous $\{R\} \quad \Rightarrow \quad \{q_1\} = [K]^{-1}\{R\}$
- Normalisation par rapport à $[M] \quad \Rightarrow \quad \langle q_1 \rangle [M] \{q_1\} = \beta_1^2$

$$\Rightarrow \quad \{\psi_1\} = \frac{1}{\beta_1}\{q_1\} \quad \left(\rightarrow \langle \psi_1 \rangle [M] \{\psi_1\} = 1\right)$$

- Si la structure se déforme selon $\{\psi_1\}$, les forces d'inertie se distribuent selon $[M]\ \{\psi_1\}$

  → solution statique sous les forces d'inertie: $\{q_2\} = [K]^{-1}[M]\{\psi_1\}$

Vecteurs de Ritz

- $\{q_2\}$ et $\{\psi_1\}$ a priori pas orthogonaux

$$\Rightarrow \quad \{\tilde{q}_2\} = \{q_2\} - \alpha_1 \{\psi_1\} \quad avec \quad \alpha_1\, tel\ que \langle\psi_1\rangle[M]\{\tilde{q}_2\} = 0$$

$$\rightarrow \alpha_1 = \langle\psi_1\rangle[M]\{q_2\}$$

- Puis normalisation: $\langle\tilde{q}_2\rangle[M]\{\tilde{q}_2\} = \beta_2{}^2 \quad \Rightarrow \quad \{\psi_2\} = \dfrac{1}{\beta_2}\{\tilde{q}_2\}$
- Puis récurrence: déformée statique sous $[M]\ \{\psi_2\}$ …

Solution

Exprimée sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de Ritz:

$$\{q(t)\} = \sum_{i=1}^{s} \gamma_i(t)\{\psi_i\} = [\psi]\{\gamma(t)\}$$

⟶ équation du mouvement:

$$[\psi]^T[M][\psi]\{\ddot{\gamma}\} + [\psi]^T[C][\psi]\{\dot{\gamma}\} + [\psi]^T[K][\psi]\{\gamma\} = [\psi]^T\{R\}\varphi(t)$$

$$\left[M^{**}\right]\{\ddot{\gamma}\} + \left[C^{**}\right]\{\dot{\gamma}\} + \left[K^{**}\right]\{\gamma\} = \left\{P^{**}\right\}$$

diagonale pleines ***s* équations couplées à *s* inconnues**

Vecteurs de Ritz

Calcul de la base modale du système réduit par $\left\{\left[K^{**}\right]-\Omega\left[M^{**}\right]\right\}\{x\}=\{0\}$

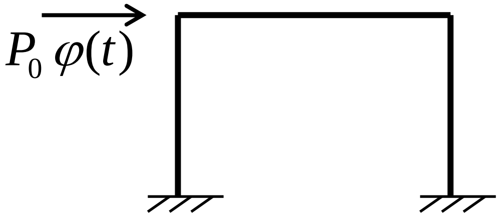
Puis projection dans la base des $\{\tilde{x}\} \quad \Rightarrow \quad \{\gamma\}=[X]\{\eta\}$

→ s équations découplées à s inconnues η_i

Connaissant $\{\eta(t)\}, \quad \{\gamma(t)\}=[X]\{\eta(t)\}$

$$\rightarrow \quad \{q(t)\}=[\psi]\{\gamma(t)\}=[\psi][X]\{\eta(t)\}$$

Exemple: pour un portique sous charge transversale, on obtient la même précision avec 2 vecteurs de Ritz qu'avec 6 modes propres.



Calcul des structures sous effets dynamiques et sismiques

Analyse sismique

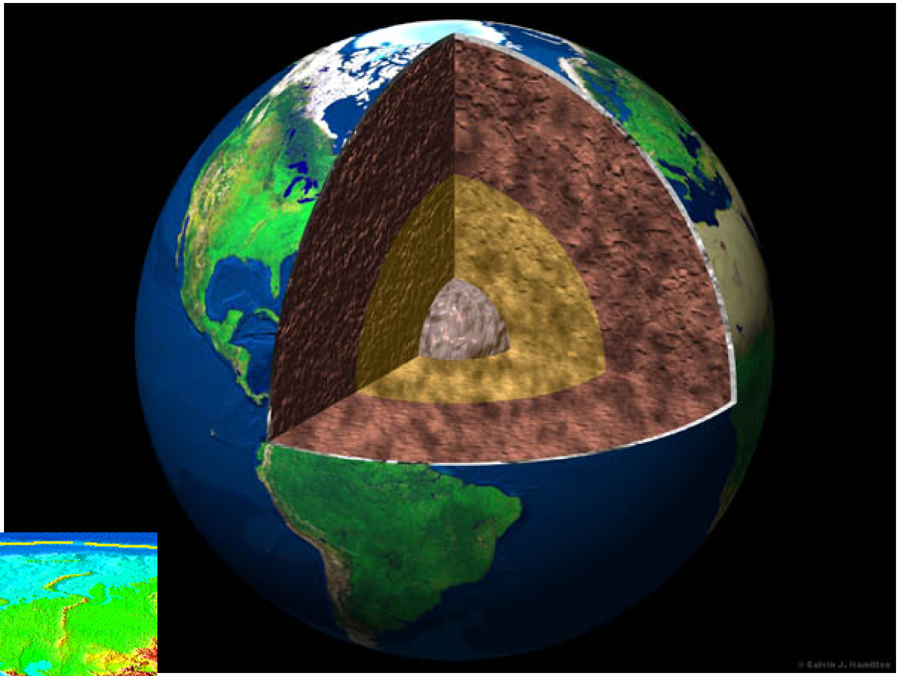
Le phénomène sismique

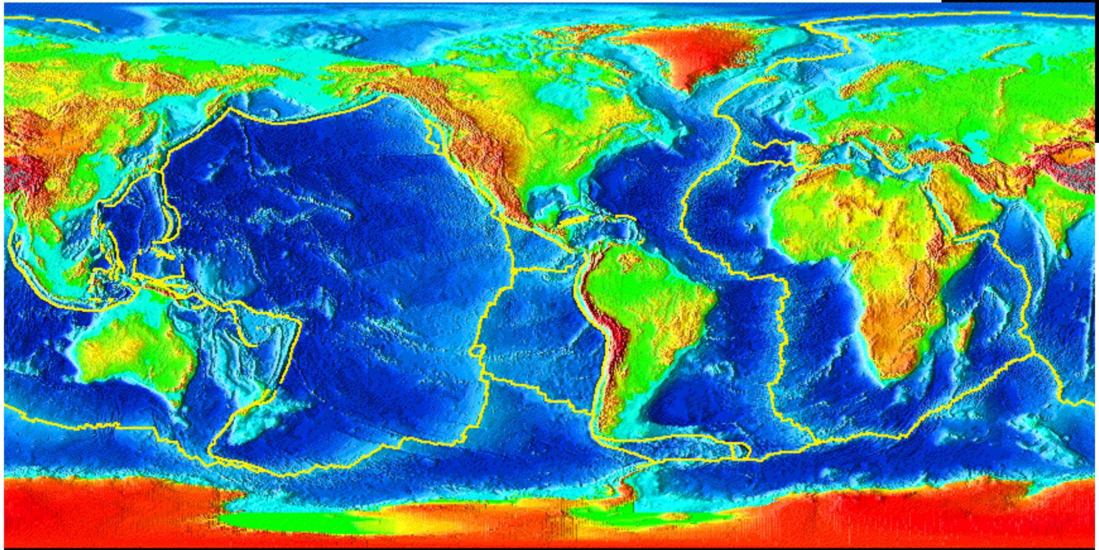
<u>Localisation de l'activité sismique</u>

Structure de la terre:

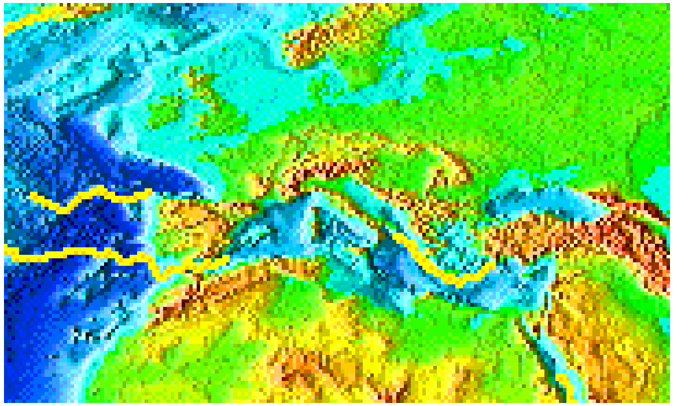
Croûte, lithosphère, asthénosphère, manteau + noyau

→ Tectonique des plaques:





Crustal Plate Boundaries

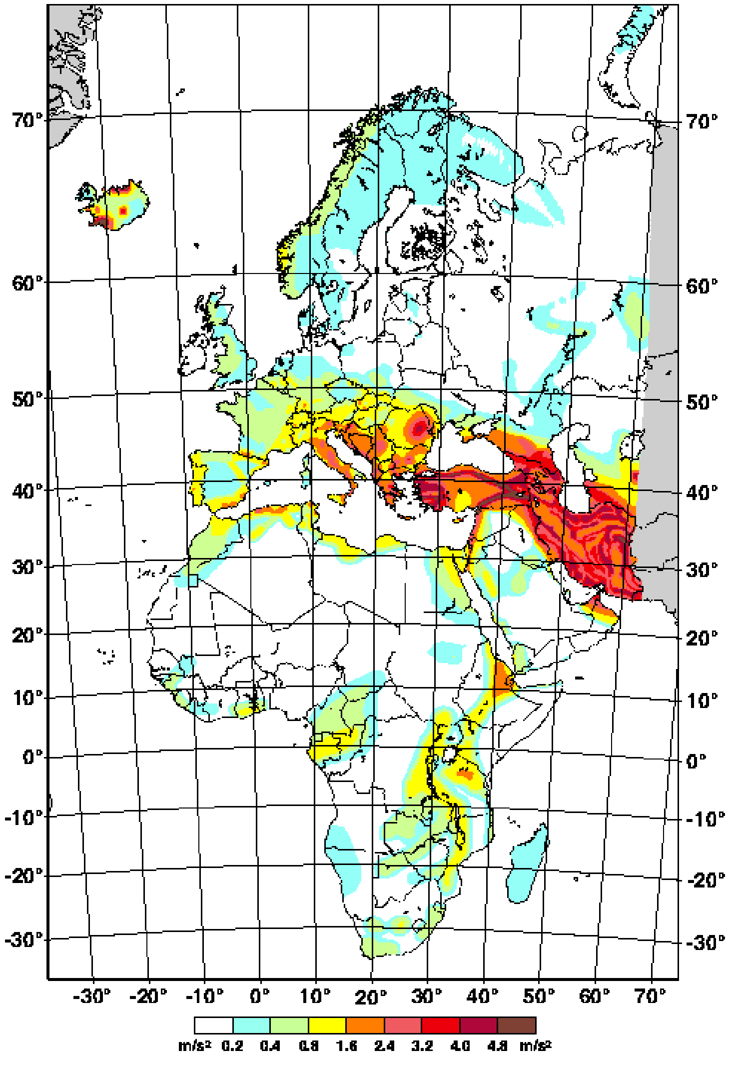


Le phénomène sismique

<u>Localisation de l'activité sismique</u>

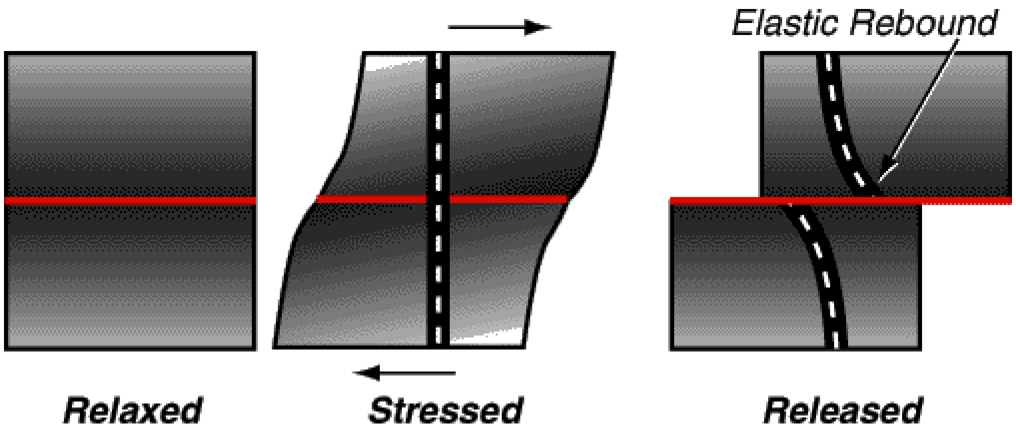
Forte activité sismique sur les régions de faille tectonique (Japon, Indonésie, Californie, Turquie, Italie…)

Activité également possible en zone "intra-plaque" (failles géologiques)



Le phénomène sismique

Théorie du rebond élastique



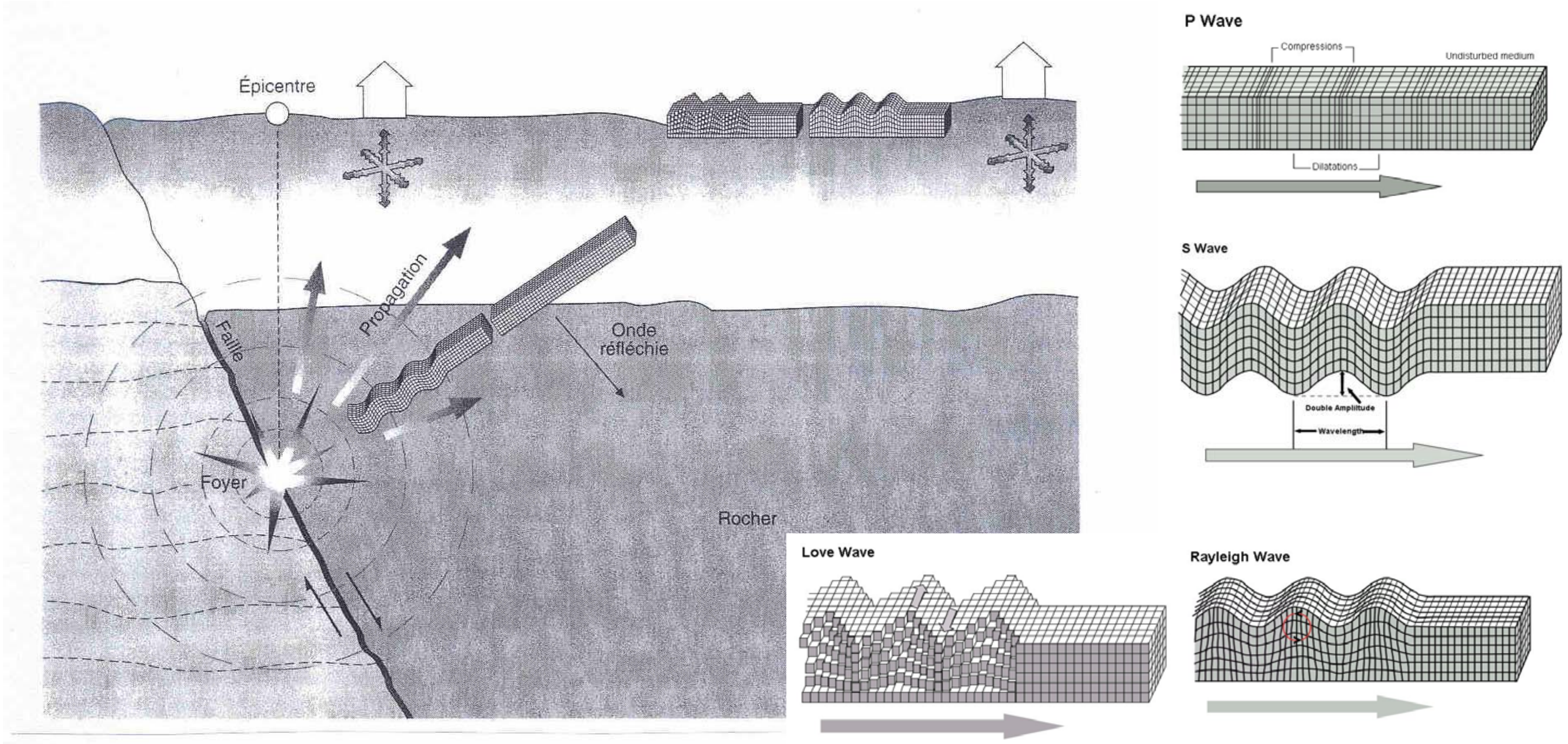
Effets

1/ Déplacement relatif des bords de faille

Le phénomène sismique

Effets

2/ Libération d'énergie sous formes d'ondes sismiques (*P*, *S*, Love, Rayleigh)



Caractérisation des séismes

Magnitude (Echelle de Richter)

= mesure de l'énergie libérée au foyer : $\log E = 11{,}8 + 1{,}5M$

(E en ergs)

Peu d'intérêt pratique pour l'ingénieur (ordre de grandeur: pas/peu de dégâts en surface si M < 5)

Intensité

Échelle qualitative des dégâts en surface

Echelle de Mercalli, échelle internationale macrosismique d'intensité, …

Durée (de quelques secondes à une minute)

Effet important sur la dégradation des structures

Corrélée à la magnitude

Caractérisation des séismes

Déplacement maximal du sol

De quelques centimètres à 1m

Accélération maximale du sol a_g (PGA)

De 0 à 0,1g jusque 0,4g à 0,6g au niveau du bedrock

Attention aux effets de sites

→ Ordre de grandeur des efforts: F = M . a_g

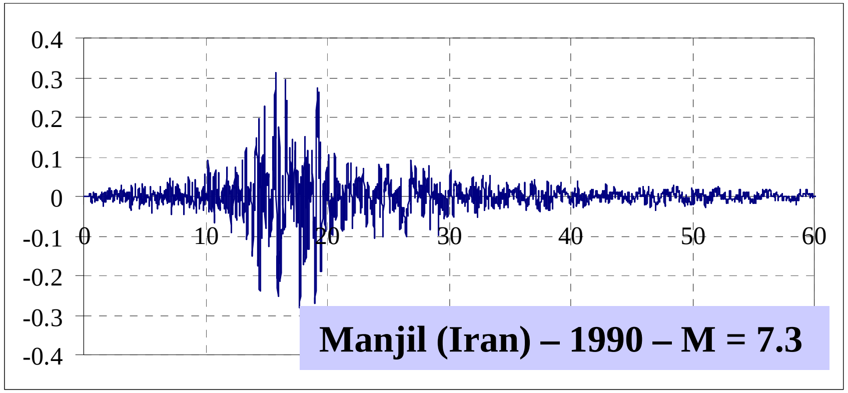
Accélérogrammes

Directement utilisables : $M\,\ddot{v} + C\,\dot{v} + K\,v = -M\,\ddot{v}_g$

Pas forcément simples à enregistrer

Constituent des cas particuliers

Spectres de réponse



Manjil (Iran) – 1990 – M = 7.3

Aléa et risque sismique

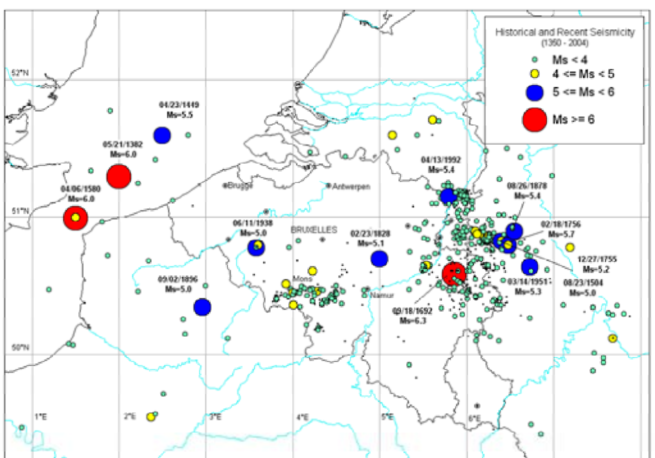
Aléa

= niveau de séisme susceptible de se produire dans une région donnée (généralement en terme de PGA)

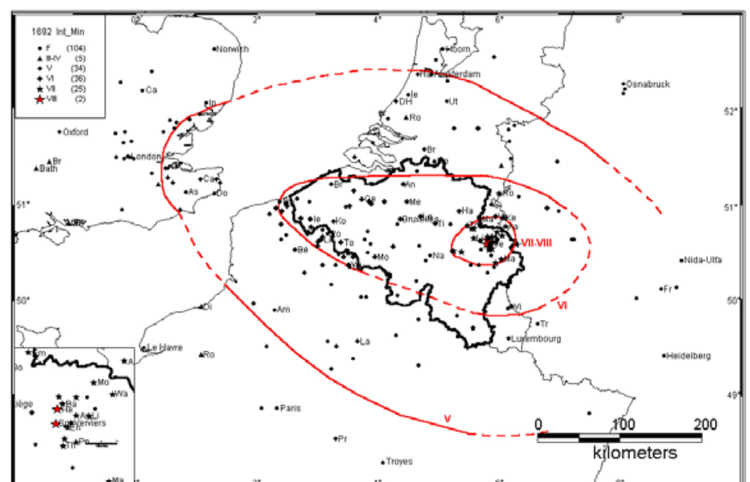
Relation probabiliste entre la magnitude (et donc la PGA) et la période de retour

<u>Belgique</u>: statistiques depuis 1382

$$\boldsymbol{M = 4 : T_{ret} = 3 \text{ ans} - M = 5 : T_{ret} = 30 \text{ ans} - M = 6 : T_{ret} = 250 \text{ ans}}$$



Sismicité historique(dès 1350) et instrumentale (1985-..)



Aléa et risque sismique

Aléa

= niveau de séisme susceptible de se produire dans une région donnée (généralement en terme de PGA)

Relation probabiliste entre la magnitude (et donc la PGA) et la période de retour

Belgique: statistiques depuis 1382

$$\boldsymbol{M = 4 : T_{ret} = 3 \text{ ans} – M = 5 : T_{ret} = 30 \text{ ans} – M = 6 : T_{ret} = 250 \text{ ans}}$$

→ Pour le dimensionnement, choix d'un niveau de séisme de calcul.

Eurocode 8: ELU : TR = 475 ans (10% de dépassement par 50 ans)

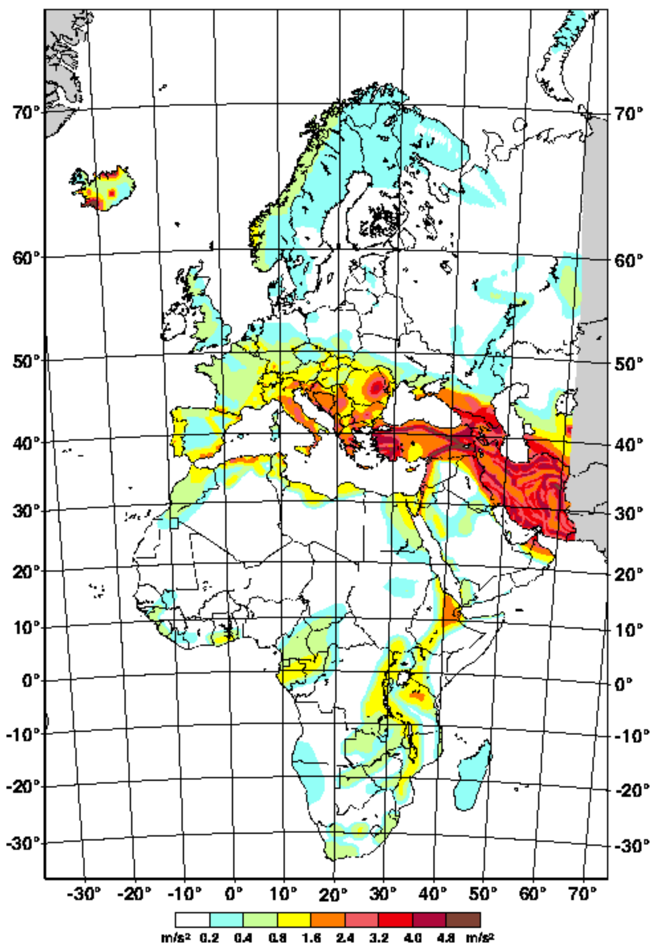
ELS : TR = 95 ans (10% de dépassement par 10 ans)

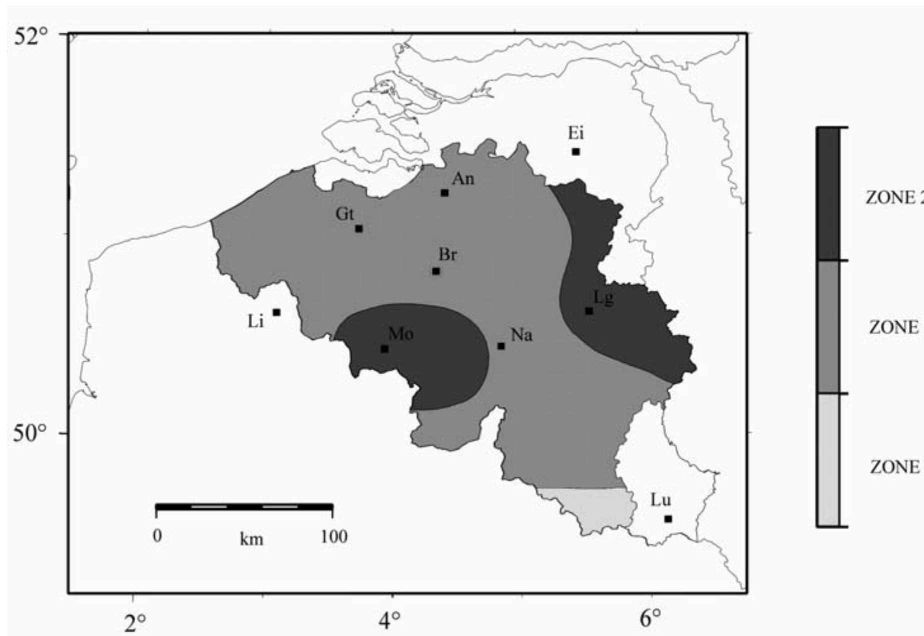
ELU: dégâts structurels → critère de résistance (non effondrement)

ELS: dégâts non-structurels → limitation des déplacements

Aléa et risque sismique

Cartes de zonation



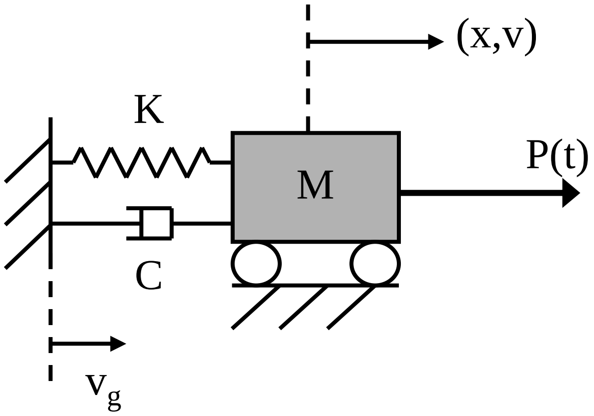


Risque sismique

= Aléa x vulnérabilité

Réponse sismique d'un système 1DDL

Equation du mouvement



$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = -m\ddot{v}_g(t) = p_{eff}(t)$$

$$\leftrightarrow \quad \ddot{v} + 2\xi\omega\dot{v} + \omega^2 v = -\ddot{v}_g(t)$$

$$\rightarrow \quad \ddot{v}_{tot} = -2\xi\omega\dot{v} - \omega^2 v$$

Résolution par Duhamel

$$v(t) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p_{eff}(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$\simeq -\frac{1}{\omega}\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\sin\omega(t-\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}d\tau \quad pour \quad \xi << 1$$

Réponse sismique d'un système 1DDL

Vitesses - accélérations

$$\dot{v}(t) \simeq -\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\cos\omega(t-\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\,d\tau$$
$$+\,\xi\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\sin\omega(t-\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\,d\tau$$
$$\ddot{v}(t) \simeq \omega\left(1-2\xi^2\right)\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\sin\omega(t-\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\,d\tau$$
$$+\,2\omega\xi\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\cos\omega(t-\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\,d\tau$$

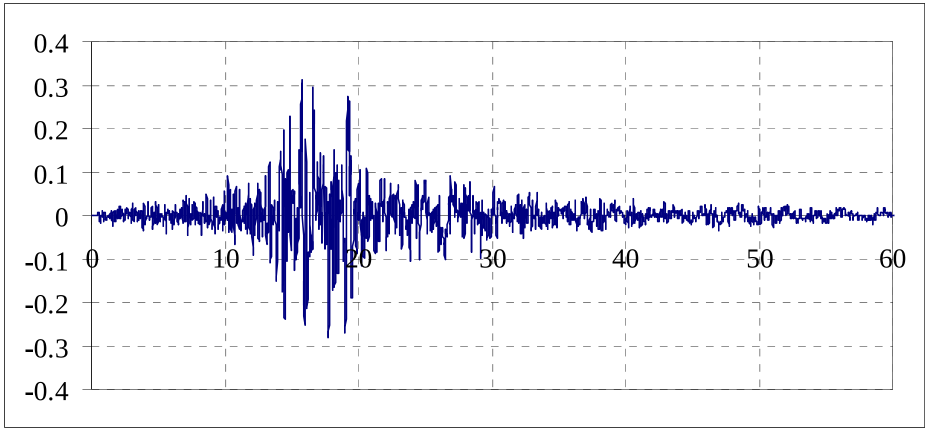
Pour un séisme donné ($\ddot{v}_g$), la réponse de l'oscillateur dépend de ω et ξ

→ Spectres de déplacement, vitesse et accélération (S_d, S_v, S_a)

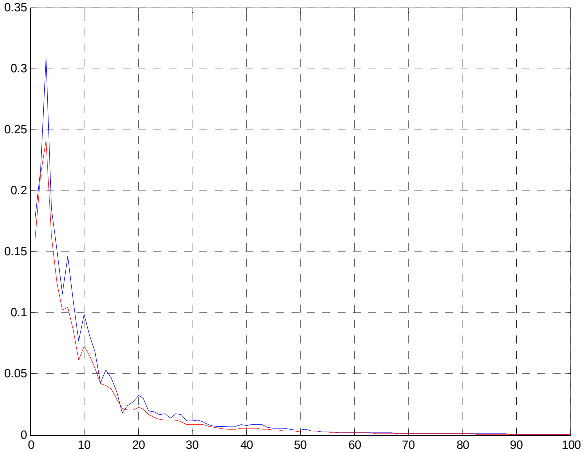
$$= v_{\max}, \dot{v}_{\max}, \ddot{v}_{\max} \quad en\ \ fct\ de\ \omega\ et\ \xi$$

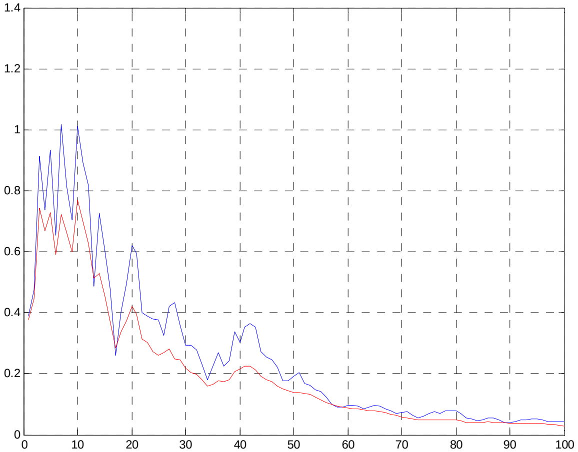
Réponse sismique d'un système 1DDL

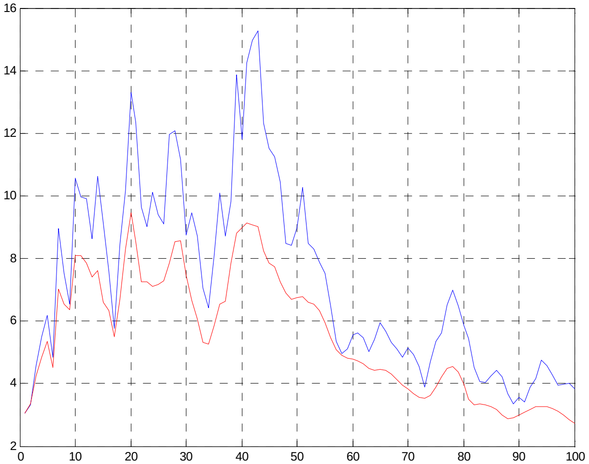
Exemple



Accélérogramme







Spectre de déplacements

Spectre de vitesse

Spectre d'accélération

Réponse sismique d'un système 1DDL

Pseudo-spectres

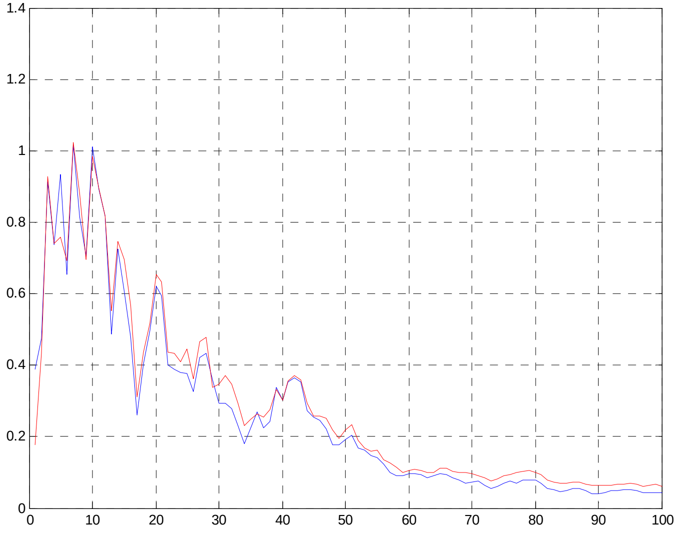
Pseudo-vitesse - hypothèse:

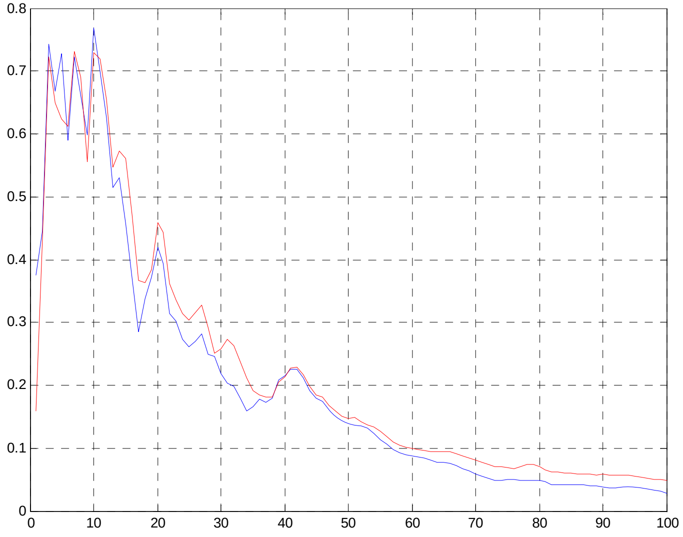
Energie de déformation élastique max = énergie cinétique max

(exact pour un oscillateur libre non-amorti)

$$\frac{K}{2} v_{\max}^2 = \frac{M}{2} \dot{v}_{\max}^2 \leftrightarrow S_{pv} = \sqrt{\frac{K}{M}} S_d = \omega S_d$$

$$\begin{cases} S_{pv} = -\int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \sin \omega (t-\tau) d\tau \\ S_v = -\int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \cos \omega (t-\tau) d\tau \end{cases}$$





Réponse sismique d'un système 1DDL

Pseudo-spectres

Pseudo-accélération:

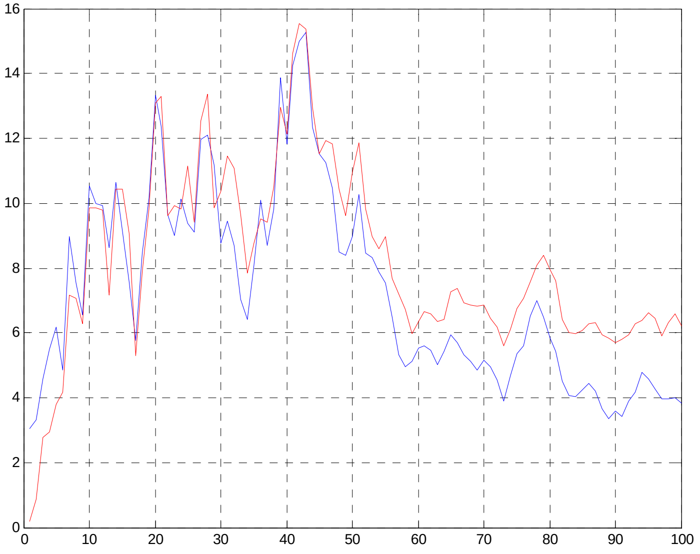
$$si\ \xi = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{v}_{\max} = \omega^2 v_{\max}$$

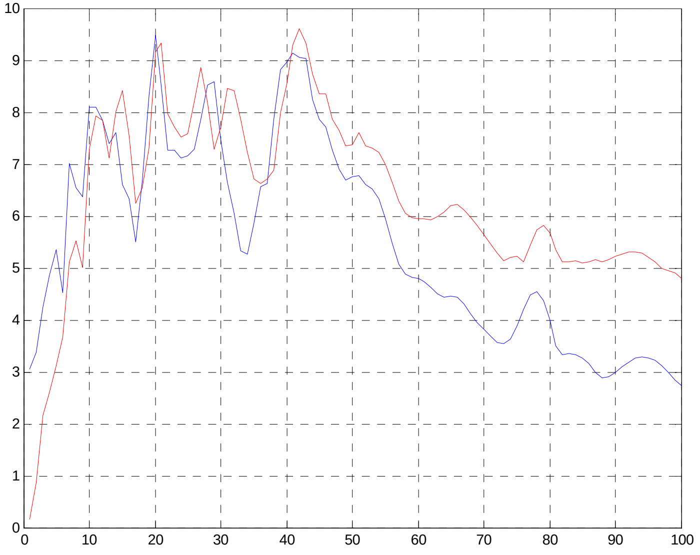
$$\rightarrow S_{pa} = \omega^2 S_d \left(= \omega S_{pv}\right)$$

$$\begin{cases} S_{pa} = S_a \ si\ \xi = 0 \\ S_{pa} \simeq S_a \ si\ \xi \neq 0 \end{cases}$$

La pseudo-accélération permet d'évaluer l'effort maximum dans le ressort :

$$F_K = K\,S_d = \frac{K}{\omega^2} S_{pa} = M\,S_{pa}$$

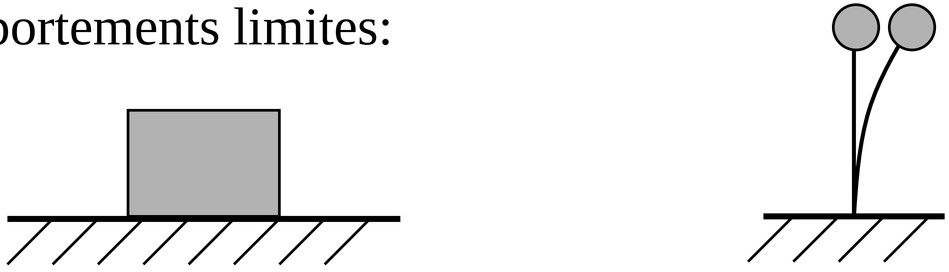




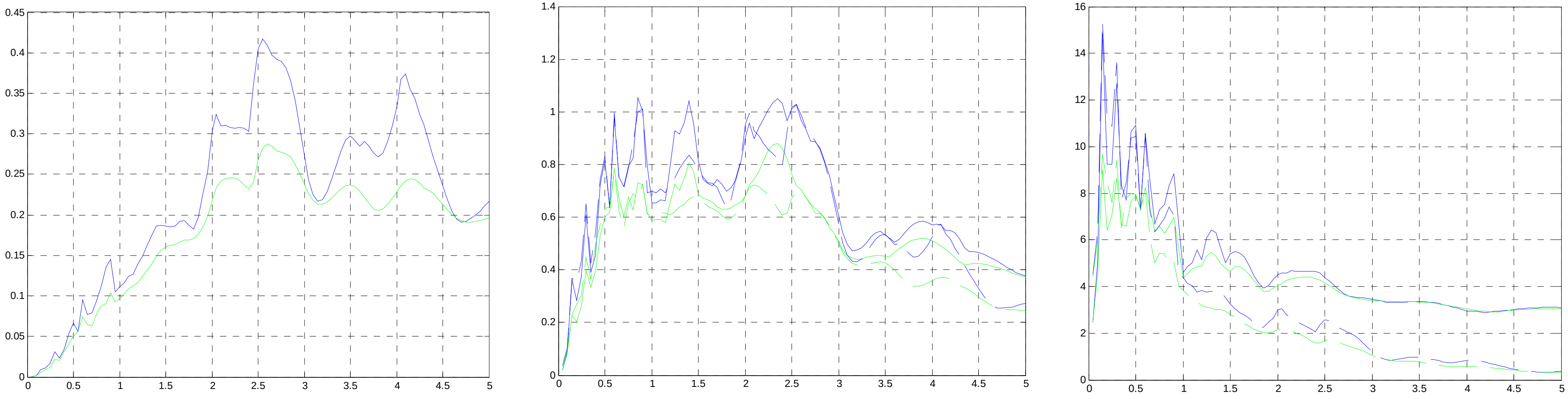
Réponse sismique d'un système 1DDL

En pratique, les spectres et pseudo-spectres sont souvent exprimés en fonction de la période propre de l'oscillateur

→ comportements limites:



$$T \to 0 : S_{pa} \to \ddot{v}_g \ \ et \ S_d \to 0 \qquad T \to \infty : S_d \to v_g \ \ et \ S_a \to 0$$



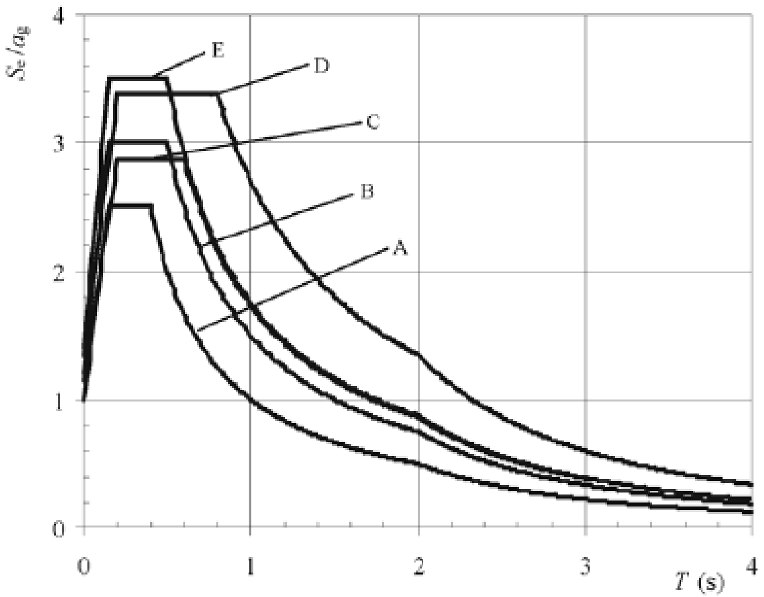
Réponse sismique d'un système 1DDL

Spectres normatifs

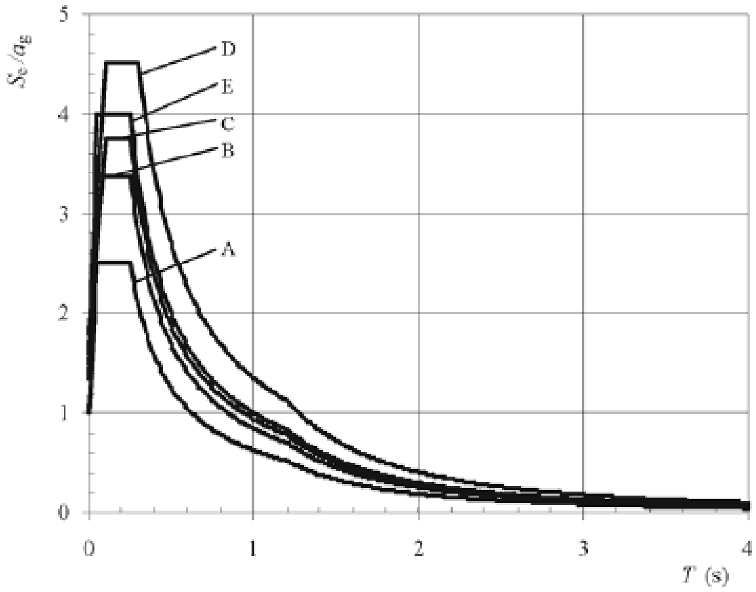
1 accélérogramme → 1 spectre

Pour couvrir "tous" les cas, on définit des spectres-enveloppes

<u>Exemple</u>: Spectre de l'Eurocode 8



Spectre Type 1 (séismes lointains)

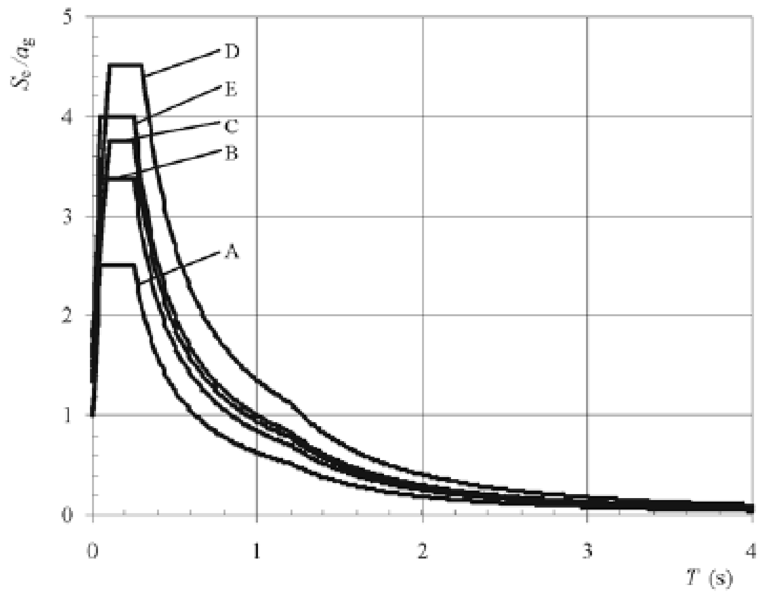


Spectre Type 2 (séismes proches)

Réponse sismique d'un système 1DDL

<u>Caractéristiques</u>: paramètres a_g, type de sol, η (dépend de ξ)

- SppA(T = 0) = a_g S
- Palier = zone résonante (SppA = 2.5 x a_g S)
- Première phase décroissant en 1/T (→ SppV constante)
- Deuxième phase décroissante en 1/T² (→SpD constant)



Spectre Type 2 (séismes proches)

Réponse sismique d'un système 1DDL

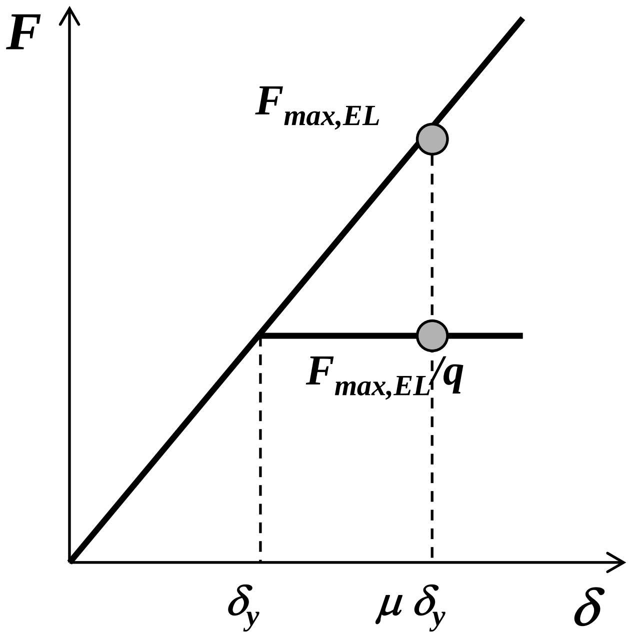
Utilisation pratique $M, K, C \;\rightarrow\; T, \xi \;\rightarrow\; SppA$

$$\rightarrow \; F_{\max} = M\, SppA(T, \xi)$$

Puis vérification de la résistance (par exemple, $F_{max} < A\, F_y$)

$$SppA(T, \xi) \;\rightarrow\; \delta_{\max} = \frac{T^2}{4\pi^2} SppA(T, \xi)$$

Puis vérification des ELS



Rem:

- a_g est différent pour les ELU et les ELS
- Cas des oscillateurs élasto-plastiques

Réponse sismique d'un système MDDL

1/ <u>Analyse temporelle</u>

- Données: accélérogrammes $\ddot{v}_g(t)$
  - Naturels ou synthétiques
  - En nombre suffisant
- Equation du mouvement

$$[M]\{\ddot{v}_{tot}(t)\}+[C]\{\dot{v}(t)\}+[K]\{v(t)\}=\{0\}$$

$$avec\ \{v_{tot}(t)\}=\{v(t)\}+\{r\}v_g(t) \qquad \begin{cases} r_i=1 & dans\ la\ direction\ du\ séisme \\ r_i=0 & dans\ les\ autres\ directions \end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad [M]\{\ddot{v}\}+[C]\{\dot{v}\}+[K]\{v\}=-[M]\{r\}\ddot{v}_g(t)=\{P_{éq}\}$$

Réponse sismique d'un système MDDL

Résolution

- Dans la base des nœuds (par exemple par Newmark)
  - Permet la prise en compte éventuelle des non-linéarités
  - Peut être lourde à mettre en œuvre (NDDL élevé, plusieurs accélérogrammes à considérer, $f_c \approx 40$ Hz → $\Delta t \approx 0.01$ s et $T_{séisme}$ de 30s à 1min)
- En base modale (si structure linéaire + hypothèse sur l'amortissement)

$$M_i^* \ddot{\eta}_i + C_i^* \dot{\eta}_i + K_i^* \eta_i = P_i^* \quad i = 1, n$$

$$avec\ P_i^* = -\langle u_i \rangle [M] \{r\} \ddot{v}_g$$

Facteur de participation modale

$$\rightarrow \quad \ddot{\eta}_i + 2\omega_i \xi_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = -\frac{\langle u_i \rangle [M] \{r\}}{\langle u_i \rangle [M] \{u_i\}} \ddot{v}_g = -\frac{L_i}{M_i^*} \ddot{v}_g$$

Réponse sismique d'un système MDDL

Critère de sélection des modes

- Sur base de la ***masse collaborante*** (ou ***masse effective***)

$$m_i = \frac{L_i^2}{M_i^*} \quad [kg] \qquad i = 1, n$$

$$tel\ que \sum_{i=1}^{n} m_i = M_{tot}$$

= mesure de la manière dont la masse totale se répartit entre les différents modes propres

→ Critère: $\Sigma\, m_i > 0.9\, M_{tot}$

ou $\Sigma\, m_i > 0.7\, M_{tot}$ (avec $f_i < f_{coupure}$)

Réponse sismique d'un système MDDL

2/ **Analyse modale spectrale**

- Données: spectre réponse (réel ou réglementaire)
- Système à 1 DDL:

$$\ddot{v} + 2\xi\omega\dot{v} + \omega^2 v = -\ddot{v}_g \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \delta_{\max}(\omega,\xi) = S_d(\omega,\xi) \\ a_{\max}(\omega,\xi) \simeq S_{pa}(\omega,\xi) \end{cases}$$

→ Système à N DDL projeté selon le mode *i*:

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = -\frac{L_i}{M_i^*}\ddot{v}_g \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \eta_{i,\max} = \dfrac{L_i}{M_i^*} S_d(\omega_i,\xi_i) \\ \ddot{\eta}_{i,\max} \simeq \dfrac{L_i}{M_i^*} S_{pa}(\omega_i,\xi_i) \end{cases}$$

Réponse sismique d'un système MDDL

$$\{v_i\}_{\max} = \eta_{i,\max}\{u_i\} = \{u_i\}\frac{L_i}{M_i^*}S_d(\omega_i,\xi_i)$$

$$\{F_i\}_{\max} = [K]\{v_i\}_{\max} = [K]\{u_i\}\frac{L_i}{M_i^*}S_d(\omega_i,\xi_i)$$

$$= \omega_i^2[M]\{u_i\}\frac{L_i}{M_i^*}S_d(\omega_i,\xi_i) = [M]\{u_i\}\frac{L_i}{M_i^*}S_{pa}(\omega_i,\xi_i)$$

Combinaison des réponses modales:

- Combinaison arithmétique: $\{X\}_{\max} = \sum_i \{X_i\}_{\max}$

  Très (trop) sécuritaire, car les maxima sur les différents modes ne sont pas simultanés.

  De plus, les maxima obtenus par l'approche spectrale sont en fait des extrema.

Réponse sismique d'un système MDDL

Combinaison des réponses modales:

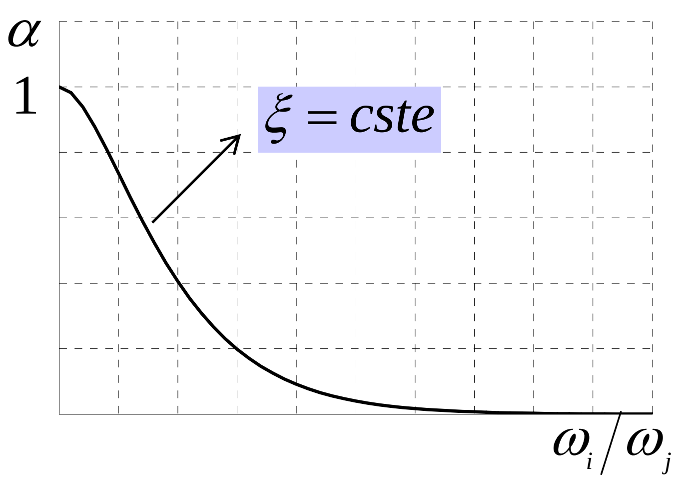
- Combinaisons quadratiques:

SRSS: $X_{k,\max} = \sqrt{\sum_i X_{i,k,\max}^2}$

Correcte si on suppose que les réponses dans chacun des modes sont indépendantes (OK si $\omega_i \neq \omega_j$)

CQC: $X_{k,\max} = \sqrt{\sum_i \sum_j \alpha_{ij} X_{i,k,\max} X_{j,k,\max}}$

Corrélation α_{ij} entre modes i et j fonction de $\omega_i \neq \omega_j$ et de ξ

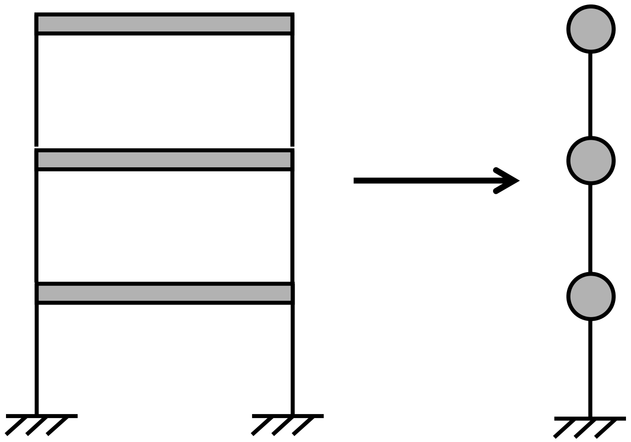


Réponse sismique d'un système MDDL

3/ <u>Analyse statique équivalente</u>

Réponse essentiellement sur un mode ← Structure régulière

<u>Exemple</u>:



$$R_{H,\max} = \sum_{k=1}^{3} F_{\max,k} = \sum_{k=1}^{3} \{[M]\{u_1\}\}_k \frac{L_1}{M_1^*} S_{pa}(\omega_1,\xi_1)$$

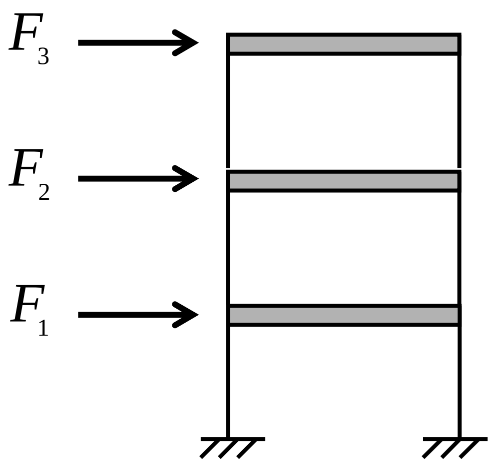
$$= \frac{L_1^2}{M_1^*} S_{pa}(\omega_1,\xi_1) = m_1 S_{pa}(\omega_1,\xi_1)$$

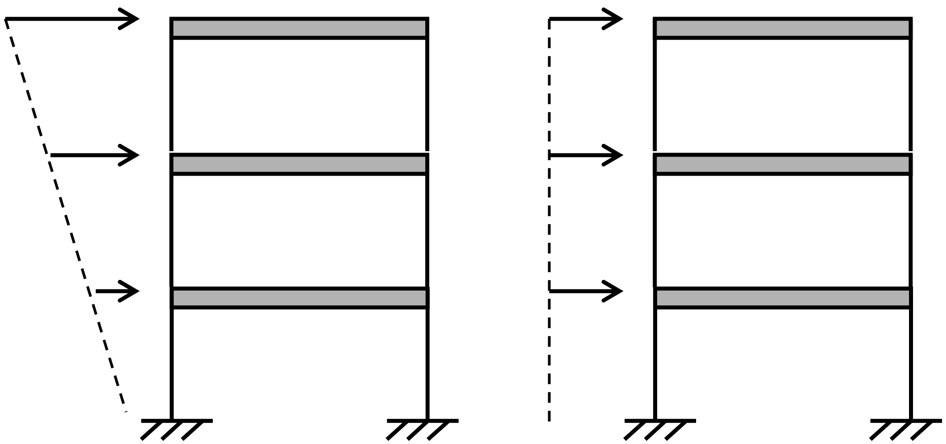
$$= \lambda M_{tot} S_{pa}(\omega_1,\xi_1) \quad avec\ \lambda < 1$$

Réponse sismique d'un système MDDL

Problème équivalent:

Calcul statique sous {***F***} tel que $\sum F_i = \lambda M_{tot} S_{pa}(\omega_1, \xi_1)$





A fixer:

- valeur de λ
- Distribution des F_i sur la hauteur

$\}$ → Normes