

Béton numérique

Nous avons construit au chapitre 2 un modèle numérique afin de simuler la propagation des ondes élastiques dans un milieu hétérogène élastique. Cependant ce modèle ne prend pas en compte certains phénomènes physiques observés dans le béton. Par exemple, le mortier est observé dans des mesures comme étant un matériau absorbant lors de la propagation d'onde, et sa vitesse et atténuation sont dépendantes de la fréquence de l'onde (Figure 3. 1(a)). Nous l'appelons phénomène de dispersion dans le mortier. En outre, une zone d'épaisseur de 5~50 μm , nommée *Interfacial Transition Zone* (ITZ), est observée autour des granulats avec la présence d'une forte porosité (Figure 3. 1(b)), et son impact sur la propagation des ondes n'est pas bien connu. Toutefois les phénomènes de multidiffusion ainsi que ceux de vieillissement du béton sont positionnés en grande partie au niveau des interfaces granulats/matrice, il est donc important de les intégrer dans notre outil de simulation.

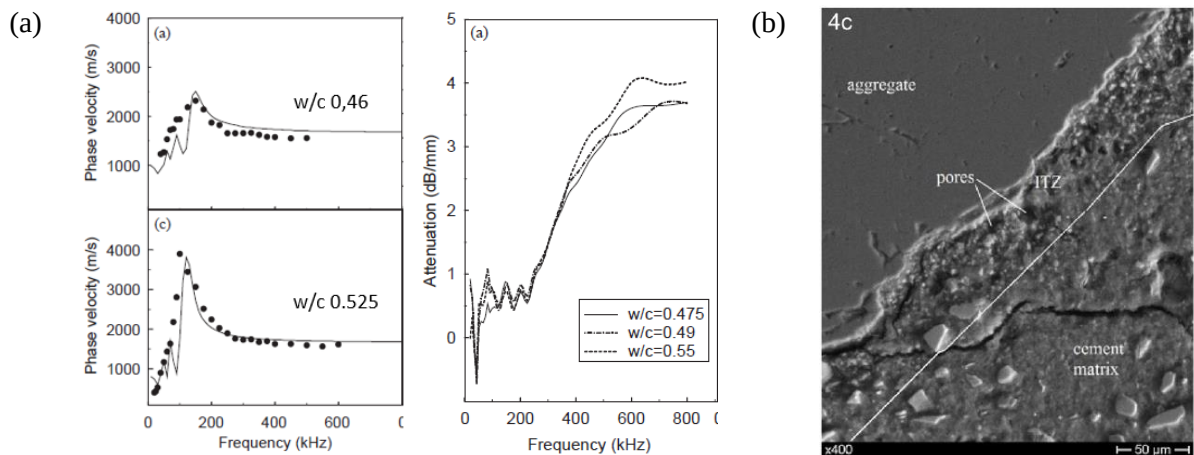


Figure 3. 1. Phénomènes physiques observés dans le béton : (a) évolutions fréquentielles de vitesse et d'atténuation du mortier [35] et (b) ITZ entre les granulats et le mortier [14].

Dans ce chapitre, nous allons proposer et appliquer des méthodes pour modéliser les deux phénomènes afin de compléter notre modèle numérique et ainsi approcher le plus possible le béton réel.

3.1 Viscoélasticité

Le phénomène de dispersion est observé dans des mesures sur le mortier du béton [33] [35] [36] et l'élasticité linéaire ne permet pas de rendre compte de ce phénomène. Afin de le prendre en compte dans la simulation numérique, nous devons appliquer une loi de comportement viscoélastique au mortier.

Dans cette section, nous rappelons d'abord l'équation d'onde dans un milieu homogène isotrope viscoélastique. Ensuite nous introduisons le modèle à facteur de qualité, Q , constant qui est choisi dans notre étude. Puis, l'implantation de ce modèle dans SPECFEM2D est validée par une comparaison numérique-analytique. Enfin, nous mesurons les valeurs de Q pour le

mortier, qui sont des paramètres d'entrée dans des simulations viscoélastiques.

3.1.1 Équation d'onde dans un milieu viscoélastique et facteur de qualité

3.1.1.1 Rappel : équation d'onde dans le cas élastique

Avant d'aborder la propagation des ondes dans un milieu viscoélastique, nous rappelons le cas élastique.

L'hypothèse des petits déplacements et petites déformations permet de prendre la loi de Hooke linéaire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \text{Eq. 3. 1}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont respectivement les tenseurs des contraintes et des déformations, $\mathbf{C}$ est un tenseur d'ordre 4 contenant 81 coefficients élastiques, dont 21 coefficients sont indépendants en tenant compte de la symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Lorsque le matériau est également homogène et isotrope, avec les coefficients de Lamé λ et μ , la loi de Hooke peut se réécrire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad \text{Eq. 3. 2}$$

où $\mathbf{I}$ est le tenseur identité, $\operatorname{tr}(\cdot)$ est la trace du tenseur, et δ_{ij} est le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$, si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon.

Nous pouvons également la réécrire à l'aide de l'invariant $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{k=1}^d \varepsilon_{kk}$ ($\nabla \cdot$ est l'opérateur divergence et $\mathbf{u}$ le champ du déplacement), et du déviatorique de $\boldsymbol{\varepsilon}$, $d_{ij} = \varepsilon_{ij} - \theta\delta_{ij}/n_d$ avec n_d la dimension d'espace :

$$\boldsymbol{\sigma} = K\theta\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}, \quad \text{Eq. 3. 3}$$

où $K = \lambda + 2\mu/n_d$ est le module d'élasticité isostatique (*bulk modulus* en anglais). Dans le cas 2D, nous avons $K = \lambda + \mu$. Dans cette expression, le premier terme décrit la déformation de dilatation (seulement l'effet de volume sans effet de forme), et le deuxième décrit la déformation de cisaillement (seulement l'effet de forme sans effet de volume).

Le principe fondamental de la dynamique dans un milieu de densité ρ peut s'écrire :

$$\rho\partial_t^2\mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad \text{Eq. 3. 4}$$

Nous obtenons l'équation d'onde en remplaçant $\boldsymbol{\sigma}$ par l'Eq. 3. 2 :

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \rho\partial_t^2\mathbf{u}, \quad \text{Eq. 3. 5}$$

où ∇ est l'opérateur gradient, $\nabla \times$ est l'opérateur rotationnel.

Nous appliquons respectivement les opérateurs divergence et rotationnel dans l'équation ci-dessus, ce qui nous permet de découpler les ondes longitudinale (L) et transversale (T). Après la transformée de Fourier ($\partial_t \rightarrow i\omega$ avec ω la pulsation), nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Ondes L} \quad & (\lambda + 2\mu)\Delta\theta + \rho\omega^2\theta = 0, \\ \text{Ondes T} \quad & \mu\Delta\Omega + \rho\omega^2\Omega = 0, \end{aligned} \quad \text{Eq. 3. 6}$$

où Ω est défini par $\Omega = \nabla \times \mathbf{u}$, Δ est l'opération laplacien.

En décomposant $\mathbf{u}$ en un potentiel scalaire φ et un potentiel vectoriel $\boldsymbol{\phi}$, nous retrouvons les équations de Helmholtz :

$$\begin{aligned} \text{Ondes L} \quad & \Delta\varphi + \frac{\omega^2}{c_l^2}\varphi = 0, \\ \text{Ondes T} \quad & \Delta\boldsymbol{\phi} + \frac{\omega^2}{c_t^2}\boldsymbol{\phi} = 0, \end{aligned} \quad \text{Eq. 3. 7}$$

où c_l, c_t sont respectivement les vitesses de phase constantes pour les ondes longitudinale et transversale, avec $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ et $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$. Nous définissons également le module d'onde de compression $\mathcal{E} = \lambda + 2\mu$.

Nous considérons une onde plane de pulsation ω_0 se propageant dans un milieu élastique dans la direction $\mathbf{e}_y$:

$$a(t) = a_0 e^{i(k_0 y - \omega t)} = a_0 \cos(k_0 y - \omega t), \quad \text{Eq. 3. 8}$$

où $\mathbf{k}_0 = k_0 \mathbf{e}_k$ est le nombre d'onde avec $k_0 = \omega_0/c_0$ (c_0 , vitesse de phase réelle), a_0 est l'amplitude d'onde.

3.1.1.2 Équation d'onde dans le cas viscoélastique

À la différence de la réponse instantanée d'un milieu élastique, un matériau viscoélastique linéaire a une mémoire. Autrement dit, il résiste et se déforme linéairement avec le temps pendant une certaine période lorsque la contrainte est appliquée, et également il ne peut pas revenir rapidement à l'état initial quand la contrainte est enlevée. Nous ne présentons ici que les équations de base pour comprendre la viscoélasticité linéaire : plus de détails peuvent être trouvés dans les travaux de Carcione [130].

En supposant que le temps de l'effet de mémoire t ne peut pas être négatif, une fonction arbitraire dépendante du temps $f(t)$ peut s'écrire :

$$f(t) = \check{f}(t)H(t), \quad \text{Eq. 3. 9}$$

où $H(t)$ est la fonction de Heaviside, et $\check{f}(t)$ est la fonction sans la restriction $t \geq 0$.

Nous définissons la convolution temporelle de deux fonctions arbitraires dépendant du temps, f et g , par :

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau. \quad \text{Eq. 3. 10}$$

Si f est une fonction dépendant du temps, nous définissons l'opération de Boltzmann comme :

$$f \odot g = f * (\partial_t g) = f(0)g + (\partial_t \check{f}H) * g. \quad \text{Eq. 3. 11}$$

En supposant que le matériau est viscoélastique linéaire isotrope, la relation déformations / contraintes peut s'exprimer :

$$\sigma_{ij} = \psi_{ijkl} * \partial_t \varepsilon_{kl}, \quad \text{Eq. 3. 12}$$

où ψ est le tenseur des fonctions de relaxation, dont l'expression la plus générale pour le cas isotrope dans un espace de dimensions n_d , est :

$$\psi_{ijkl}(t) = \left[\psi_K(t) - \frac{2}{n_d} \psi_\mu(t) \right] \delta_{ij} \delta_{kl} + \psi_\mu(t) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad \text{Eq. 3. 13}$$

avec $\psi_K(t)$ et $\psi_\mu(t)$ deux fonctions de relaxation indépendantes.

Donc l'Eq. 3. 12 peut se reformer comme :

$$\sigma_{ij} = \left[\psi_K - \frac{2}{n_d} \psi_\mu \right] * \partial_t \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\psi_\mu * \partial_t \varepsilon_{ij} = \psi_K * \partial_t \theta \delta_{ij} + 2\psi_\mu * \partial_t d_{ij}. \quad \text{Eq. 3. 14}$$

En comparant les équations Eq. 3. 2 et Eq. 3. 3 avec Eq. 3. 14 qui ont des formes similaires, nous pouvons trouver que ψ_K et ψ_μ décrivent respectivement les déformations de dilatation et de cisaillement, et que $\psi_K - 2\psi_\mu/n_d$ et ψ_μ correspondent aux λ et μ du cas élastique.

Nous remplaçons σ_{ij} dans l'Eq. 3. 4 par l'Eq. 3. 14, puis nous appliquons respectivement les opérations divergence et rotationnel comme dans le cas élastique. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{Ondes L} \quad & \mathcal{E} * \Delta \theta = \rho \partial_t^2 \theta, \\ \text{Ondes T} \quad & \mu * \Delta \Omega = \rho \partial_t^2 \Omega, \end{aligned} \quad \text{Eq. 3. 15}$$

avec les modules complexes $\mathcal{E}(\omega)$, $\mu(\omega)$ et $K(\omega)$:

$$\begin{aligned} K(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t \psi_K(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \mu(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t \psi_\mu(t) e^{-i\omega t} dt, \\ \psi_\mathcal{E} &= \psi_K + 2\psi_\mu \left(1 - \frac{1}{n_d}\right), \\ \mathcal{E}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t \psi_\mathcal{E}(t) e^{-i\omega t} dt = K(\omega) + 2\mu(\omega) \cdot \left(1 - \frac{1}{n_d}\right). \end{aligned}$$

Après une transformée de Fourier appliquée à l'Eq. 3. 15, nous obtenons les équations suivantes avec une forme similaire aux équations de Helmholtz en utilisant la décomposition du $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \text{Ondes L :} \quad & \Delta \varphi + \frac{\omega^2}{[v_l(\omega)]^2} \varphi = 0, \\ \text{Ondes T :} \quad & \Delta \boldsymbol{\phi} + \frac{\omega^2}{[v_t(\omega)]^2} \boldsymbol{\phi} = 0, \end{aligned} \quad \text{Eq. 3. 16}$$

où v_l, v_t sont respectivement les vitesses complexes pour les ondes longitudinale et transversale, avec $v_l(\omega) = \sqrt{\mathcal{E}(\omega)/\rho}$ et $v_t(\omega) = \sqrt{\mu(\omega)/\rho}$.

Puis nous définissons les nombres d'onde complexes :

$$k_l^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mathcal{E}(\omega)} = \frac{\omega^2}{v_l^2} = \left(\frac{\omega}{c_l} + \alpha_l \cdot i\right)^2, \quad k_t^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu(\omega)} = \frac{\omega^2}{v_t^2} = \left(\frac{\omega}{c_t} + \alpha_t \cdot i\right)^2, \quad \text{Eq. 3. 17}$$

où $c_l(\omega), c_t(\omega)$ sont respectivement les vitesses de phase réelles dépendant de la fréquence pour les ondes longitudinale et transversale, et $\alpha_l(\omega), \alpha_t(\omega)$ les coefficients d'atténuation.

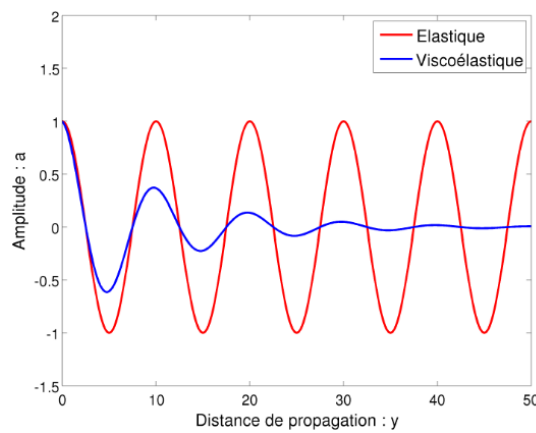


Figure 3. 2. Comparaison de la propagation des ondes planes dans des milieux élastique et viscoélastique. Nous prenons $a_0 = 1, t = 0, c_0 = 10 \text{ m/s}, \alpha_0 = 0,1, \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$.

Nous considérons la solution pour une onde plane de pulsation ω se propageant dans un milieu viscoélastique suivant la direction $\mathbf{e}_y$:

$$a(t) = a_0 e^{i(\mathbf{k}_0 y - \omega t)} = a_0 e^{-\alpha_0 y} \cos \left[\omega \left(\frac{y}{c_0} - t \right) \right], \quad \text{Eq. 3. 18}$$

où $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_0 + i\alpha_0 = k_0 \mathbf{e}_k + i\alpha_0 \mathbf{e}_\alpha$ avec k le nombre d'onde réel $k_0 = \omega_0/c_0$ (c_0 , la vitesse de phase), et α_0 le coefficient d'atténuation. En comparant avec la solution du cas élastique (Eq. 3. 8), nous observons que l'amplitude de l'onde dans le cas viscoélastique n'est plus constante, et qu'elle diminue exponentiellement avec la distance de propagation (Figure 3. 2).

3.1.1.3 Facteur de qualité : Q

Pour décrire le comportement viscoélastique d'un milieu, le facteur de qualité, ou facteur de dissipation, Q , est couramment utilisé. Il est défini, pour un module complexe M du milieu, par :

$$Q_M(\omega) = \frac{Re(M)}{Im(M)}, \quad \text{Eq. 3. 19}$$

où $Re(\cdot)$, $Im(\cdot)$ indiquent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe.

Q_ε est le facteur pour le module $\mathcal{E}(\omega)$ et Q_μ est le facteur pour le module $\mu(\omega)$, qui correspondent respectivement aux ondes longitudinale et transversale ; ils sont les plus communs grâce à leurs liens directs avec les vitesses des ondes (Eq. 3. 17). Lorsque $Q_\varepsilon, Q_\mu \rightarrow +\infty$, le comportement du milieu s'approche d'un milieu élastique : plus les valeurs de Q_ε et Q_μ sont petites, plus la dispersion est importante.

3.1.2 Modèle à facteur Q constant

Parmi les différents modèles viscoélastiques existants, le modèle à facteur Q constant proposé par Kjartansson [131] est le plus utilisé en raison de sa simplicité.

Ce modèle a d'abord été proposé dans le cas 1D, et il se base sur une fonction de relaxation de la forme :

$$\psi(t) = \frac{1}{M_0 \Gamma(1 + 2\gamma)} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2\gamma} H(t), \quad \text{Eq. 3. 20}$$

où M_0 est le module élastique (de compression, $\mathcal{E}_0$, ou de cisaillement, μ_0), $t_0 = 2\pi/\omega_0$ est la période correspondante à la pulsation de référence ω_0 , Γ est une fonction de γ qui donne une valeur proche de 1, et γ est défini par le facteur de qualité Q_M correspondant à ce module complexe M :

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{Q_M}\right). \quad \text{Eq. 3. 21}$$

Les deux expressions ci-dessus conduisent à l'expression du module complexe correspondant :

$$M(\omega) = M_0 \left(\frac{-i\omega}{\omega_0} \right)^{2\gamma}. \quad \text{Eq. 3. 22}$$

Dans le cas 2D, nous pouvons déterminer les nombres d'onde complexes k_l et k_t relatifs aux ondes de compression et de cisaillement [123] par :

$$k_l = \frac{\omega}{c_{l0}} \left(\frac{-i\omega}{\omega_0} \right)^{-\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{Q_\varepsilon}\right)}, \quad k_t = \frac{\omega}{c_{t0}} \left(\frac{-i\omega}{\omega_0} \right)^{-\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{Q_\mu}\right)}, \quad \text{Eq. 3. 23}$$

où c_{l0} et c_{t0} sont respectivement les vitesses de référence longitudinal et transversale à ω_0 . Par conséquent, lorsque $Q \gg 1$, nous avons l'approximation linéaire de l'atténuation, $\alpha \approx$

$\pi f / Q c_0$. Sur la Figure 3. 3, nous montrons un exemple du modèle à Q constant : la vitesse de phase augmente avec la fréquence, et l'atténuation varie linéairement avec la fréquence.

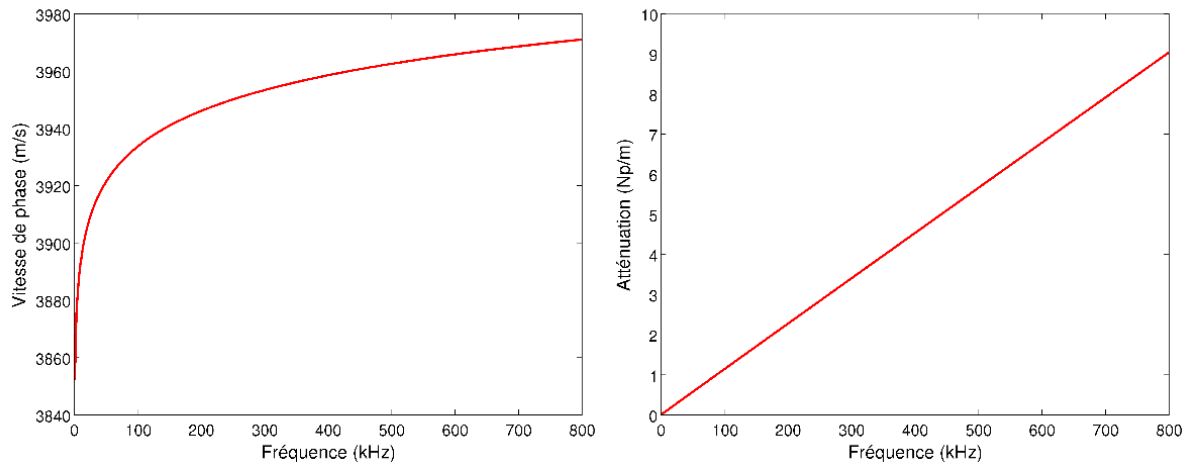


Figure 3. 3. Vitesse de phase et atténuation en fonction de la fréquence du modèle à Q constant. Nous prenons $\rho = 2050 \text{ kg/m}^3$, $c_l = 3950 \text{ m/s}$, $f_0 = 250 \text{ kHz}$, $Q_\varepsilon = 70$.

La relation entre Q_K et Q_ε dans le cas 3D est donnée dans [132]. Similairement, en se basant sur l'Eq. 3. 17 et $\varepsilon = K + \mu$ dans le cas 2D, nous obtenons :

$$\frac{1}{Q_\varepsilon} = \left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) \frac{1}{Q_K} + \frac{c_t^2}{c_l^2} \cdot \frac{1}{Q_\mu}. \quad \text{Eq. 3. 24}$$

3.1.3 Implantation du modèle à facteur Q constant dans le code SPECFEM2D

Le modèle à Q constant, qui impose des relations concernant les modules complexes du milieu, ne peut pas être implanté directement dans SPECFEM2D où le problème et la solution sont basés sur la description contrainte-déformation. Par conséquent, afin de réaliser l'implantation, SPECFEM2D utilise un modèle mécanique, le modèle généralisé de Zener, qui permet une valeur quasi-constante à Q dans un domaine fréquentiel d'intérêt.

Dans cette section, nous présentons d'abord le modèle généralisé de Zener et son amélioration. Ensuite nous précisons son implantation dans SPECFEM2D. Enfin, nous validons l'implantation par une comparaison numérique-analytique dans un cas d'un milieu homogène viscoélastique.

3.1.3.1 Modèle généralisé de Zener et son optimisation non linéaire

Le modèle généralisé de Zener (*Generalized Zener Model* en anglais) permet d'obtenir une valeur quasi-constante du facteur de qualité Q dans un domaine fréquentiel souhaité. Il s'appuie sur la construction d'un système mécanique (Figure 3. 4(a)).

Le modèle généralisé de Zener se compose de L éléments dont chacun a une viscosité η_l , et deux élasticités de ressort, k_{1l} et k_{2l} (Figure 3. 4(a)). Si le module relaxé du modèle généralisé ($t \rightarrow +\infty$ ou $\omega = 0$) M_R est connu, les paramètres sont habituellement choisis pour le module relaxé du l -ième système $M_{Rl} = M_R/L$. Le module complexe pour le modèle généralisé de Zener $M(\omega)$ est obtenu par :

$$M(\omega) = \sum_{l=1}^L M_l(\omega) = \sum_{l=1}^L \frac{M_R}{L} \left(\frac{1 + i\omega\tau_{\varepsilon l}}{1 + i\omega\tau_{\sigma l}} \right), \quad \text{Eq. 3. 25}$$

avec

$$\tau_{\sigma l} = \frac{\eta_l}{k_{1l} + k_{2l}}, \quad \tau_{\varepsilon l} = \frac{\eta_l}{k_{2l}},$$

où $M_l(\omega)$ est le module complexe du l -ième système. Par exemple, sur la Figure 3. 4(b), 5 courbes en pointillé représentent $M_l(\omega)$ et la courbe en trait représente $M(\omega)$ qui donne une valeur stable de Q autour d'une fréquence.

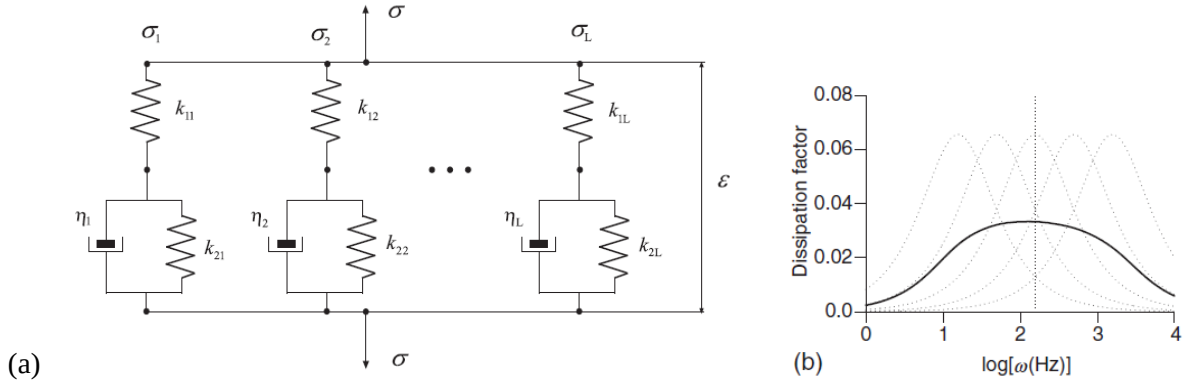


Figure 3. 4. Modèle généralisé de Zener. (a) Schéma mécanique avec L éléments (b) Exemple de Q^{-1} en fonction de $\log(\omega)$ avec 5 systèmes. Pris dans [130].

Nous pouvons donc obtenir le module non relaxé défini à $t = 0$ ou $\omega \rightarrow +\infty$:

$$M_U = M_R \left[1 - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left(1 - \frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}} \right) \right] = \frac{M_R}{L} \sum_{l=1}^L \frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}}. \quad \text{Eq. 3. 26}$$

L'expression de la fonction de relaxation peut être obtenue par la définition dans l'Eq. 3. 12 :

$$\psi(t) = \sum_{l=1}^L \psi_l = M_R \left[1 - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left(1 - \frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}} \right) e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} \right] H(t). \quad \text{Eq. 3. 27}$$

Afin d'améliorer cette approximation du modèle à Q constant, des algorithmes sont développés pour optimiser les coefficients $\tau_{\varepsilon l}$ et $\tau_{\sigma l}$ dans le modèle généralisé de Zener. L'algorithme d'optimisation non linéaire utilisé dans [133] permet d'approximer une valeur quasi-constante de Q dans un domaine fréquentiel cible $[f_{\min}, f_{\max}]$ avec moins de systèmes (N sur la Figure 3. 5 représente le nombre des systèmes L dans notre étude). Nous ne précisons pas ici les détails de calcul pour optimiser $\tau_{\varepsilon l}$ et $\tau_{\sigma l}$ avec cet algorithme non linéaire. Dans les paragraphes suivants, nous n'explicitons que les expressions des modules complexes et leurs facteurs de qualité après l'utilisation de cet algorithme non linéaire dans SPEC-FEM2D.

Dans un cas 2D, nous supposons que la densité ρ est connue, ainsi $c_{l0} = \sqrt{\varepsilon_0/\rho}$, $c_{t0} = \sqrt{\mu_0/\rho}$ à la fréquence de référence $\omega_0 = 2\pi f_0$, au lieu des modules relaxés ε_R et μ_R . L'algorithme non linéaire donne les coefficients optimaux $\tau_{\sigma l}^{(1)}, \tau_{\varepsilon l}^{(1)}, \tau_{\sigma l}^{(2)}, \tau_{\varepsilon l}^{(2)}$ afin d'approximer respectivement les facteurs Q_K et Q_μ souhaités dans le domaine fréquentiel $[f_0/10, 10f_0]$.

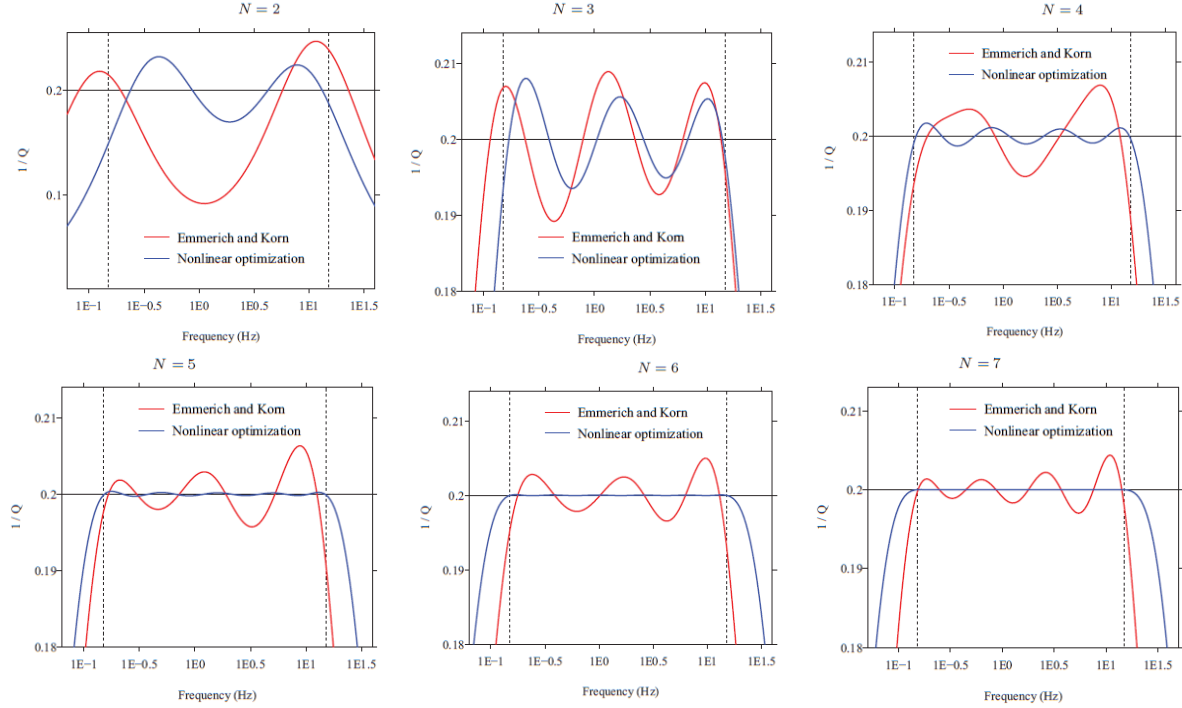


Figure 3. 5. Approximation d'un facteur Q constant ciblé dans un domaine fréquentiel cible par l'algorithme d'optimisation non-linéaire (en bleu) dans un modèle généralisé de Zener avec 2, 3, 4, 5, 6, 7 systèmes en comparant avec un algorithme linéaire (en rouge), Pris dans [133].

Afin de simplifier les expressions dans la suite, nous définissons d'abord les deux coefficients suivants :

$$v_l = \frac{1}{L} \left(\frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}} - 1 \right), \quad \vartheta_l = \frac{1}{\tau_{\sigma l}}. \quad \text{Eq. 3. 28}$$

Pour l'onde transversale, en supposant que $c_t \gg \alpha_t$, nous négligeons la partie imaginaire de l'Eq. 3. 25 pour ω_0 . Nous pouvons estimer le module relaxé de cisaillement :

$$\mu_R \approx \rho c_{t0}^2 / \left(1 + \sum_{l=1}^L \frac{v_l^{(1)}}{\left(\frac{\vartheta_l^{(1)}}{\omega_0} \right)^2 + 1} \right). \quad \text{Eq. 3. 29}$$

Pour l'onde longitudinale, en supposant que $c_l \gg \alpha_l$, nous négligeons la partie imaginaire de l'Eq. 3. 25 pour ω_0 . Nous pouvons estimer le module relaxé d'élasticité isostatique :

$$K_R \approx (\rho c_{l0}^2 - \rho c_{t0}^2) / \left(1 + \sum_{l=1}^L \frac{v_l^{(2)}}{\left(\frac{\vartheta_l^{(2)}}{\omega_0} \right)^2 + 1} \right). \quad \text{Eq. 3. 30}$$

En injectant les deux expressions l'Eq. 3. 29 et l'Eq. 3. 30 dans l'Eq. 3. 25, nous pouvons respectivement obtenir $\mu(\omega)$, $K(\omega)$ et $\mathcal{E}(\omega)$ par $\mathcal{E}(\omega) = K(\omega) + \mu(\omega)$, ainsi que leurs facteurs de qualité $Q_\mu(\omega)$, $Q_K(\omega)$ et $Q_{\mathcal{E}}(\omega)$.

3.1.3.2 Discrétisation temporelle : variables de mémoire

Avec les coefficients des temps de relaxation $\tau_{\sigma l}^{(1)}, \tau_{\varepsilon l}^{(1)}, \tau_{\sigma l}^{(2)}, \tau_{\varepsilon l}^{(2)}$ obtenus par l'algorithme d'optimisation, nous pouvons obtenir les fonctions de relaxation de $\psi_K(t)$ et $\psi_\mu(t)$ d'après l'Eq. 3. 27.

Théoriquement nous pouvons maintenant résoudre le problème d'après la relation directe déformations / contraintes (Eq. 3. 14). En pratique, cependant, le calcul de la contrainte avec une convolution temporelle est difficile à réaliser directement dans les codes numériques travaillant dans le domaine temporel, car il faudrait stocker tout le passé du matériau, et donc stocker tous les pas de temps calculés depuis le début de la simulation. SPEC-FEM2D introduit des variables à mémoire dans le domaine temporel [130] afin d'éviter le calcul direct de la convolution temporelle et de le remplacer par un calcul récursif, et donc sans stockage du passé, de cette convolution.

Nous réécrivons la relation déformations / contraintes :

$$\sigma_{ij} = K_U \left(\varepsilon_{kk} + \sum_{l=1}^L e_l^{(1)} \right) \delta_{ij} + 2\mu_U \left(d_{ij} + \sum_{l=1}^L e_{ijl}^{(2)} \right), \quad \text{Eq. 3. 31}$$

où $e_l^{(1)}, e_{ijk}^{(2)}$ sont les variables à mémoire définies par

$$e_l^{(1)} = \psi_l^{(1)} * \varepsilon_{kk}, \quad e_{ijk}^{(2)} = \psi_l^{(2)} * d_{ij},$$

avec

$$\psi_l = \check{\psi}_l H(t) = \frac{1}{\tau_{\sigma l}} \left(\sum_{l=1}^L \frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}} \right) e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} H(t).$$

Si nous l'explicitons dans l'espace en 2D en déformations planes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (K_U + \mu_U) \partial_x u_x + (K_U - \mu_U) \partial_z u_z + K_U \sum_{l=1}^L e_l^{(1)} + 2\mu_U \sum_{l=1}^L e_{11l}^{(2)}, \\ \sigma_{zz} &= (K_U - \mu_U) \partial_x u_x + (K_U + \mu_U) \partial_z u_z + K_U \sum_{l=1}^L e_l^{(1)} + 2\mu_U \sum_{l=1}^L e_{33l}^{(2)}, \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = \mu_U (\partial_x u_z + \partial_z u_x) + 2\mu_U \sum_{l=1}^L e_{13l}^{(2)}. \end{aligned} \quad \text{Eq. 3. 32}$$

Nous présentons ici la méthode de discrétisation temporelle pour la convolution temporelle [134] utilisée dans SPEC-FEM2D. Si a est une constante et $g(t)$ est une fonction temporelle, la fonction $h(t)$ est sous forme :

$$h = a \int_0^t e^{-a\tau} g(t - \tau) d\tau. \quad \text{Eq. 3. 33}$$

La fonction $h(t)$ peut s'écrire en discrétisation temporelle :

$$\begin{aligned} h^{(n)} &\approx a \int_0^{n \cdot \Delta t} e^{-a\tau} g(n \cdot \Delta t - \tau) d\tau, \\ h^{(n)} &\approx e^{-a \cdot \Delta t} h^{(n-1)} + \left(1 - e^{-a \cdot \frac{\Delta t}{2}} \right) \left[g^{(n)} + e^{-a \cdot \frac{\Delta t}{2}} g^{(n-1)} \right]. \end{aligned} \quad \text{Eq. 3. 34}$$

À partir de cette expression, nous pouvons discrétiser $e_l^{(1)}$ par :

$$e_l^{(1)(n)} \approx e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{\sigma l}^{(1)}}} e_l^{(1)(n-1)} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_{\sigma l}^{(1)}}}\right) \left[\tau_{\sigma l}^{(1)} \Theta^{(1)} \varepsilon_{kk}^{(n)} + e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_{\sigma l}^{(1)}}} \tau_{\sigma l}^{(1)} \Theta^{(1)} \varepsilon_{kk}^{(n-1)} \right], \quad \text{Eq. 3. 35}$$

avec

$$\Theta = \frac{1}{\tau_{\sigma l}} \left(\sum_{l=1}^L \frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}} \right).$$

Par analogie, nous pouvons discrétiser $e_{ijl}^{(2)}$ en :

$$e_{ijl}^{(2)(n)} \approx e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{\sigma l}^{(2)}}} e_{ijl}^{(2)(n-1)} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_{\sigma l}^{(2)}}}\right) \left[\tau_{\sigma l}^{(2)} \Theta^{(2)} d_{ij}^{(n)} + e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_{\sigma l}^{(2)}}} \tau_{\sigma l}^{(2)} \Theta^{(2)} d_{ij}^{(n-1)} \right]. \quad \text{Eq. 3. 36}$$

En pratique, nous ne calculons que $e_l^{(1)}$, $e_{11l}^{(2)}$, $e_{13l}^{(2)}$ parce que $e_{33l}^{(2)} = -e_{11l}^{(2)}$ grâce à $d_{33} = -d_{11}$.

3.1.3.3 Condition périodique pour une source en onde plane

Dans le cas élastique, afin de modéliser une onde plane dans une géométrie finie, SPECFEM2D impose la solution analytique de l'onde plane (condition de Bielak [124] [135]) aux bords absorbants (Figure 3. 6). La solution imposée est exprimée en termes de vecteur traction $\mathbf{t}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, avec $\mathbf{n}$ la normale au bord correspondant.

Dans les paragraphes suivants, nous présentons le calcul de la solution analytique d'une onde plane de Ricker qui se propage dans un milieu viscoélastique à facteur Q constant, afin de l'implanter comme condition de bord dans le cas viscoélastique. En raison de la difficulté de calculer directement la convolution temporelle, nous estimons la solution analytique à partir de la décomposition de Ricker en séries de Fourier, qui permet de passer facilement entre les domaines temporel et fréquentiel.

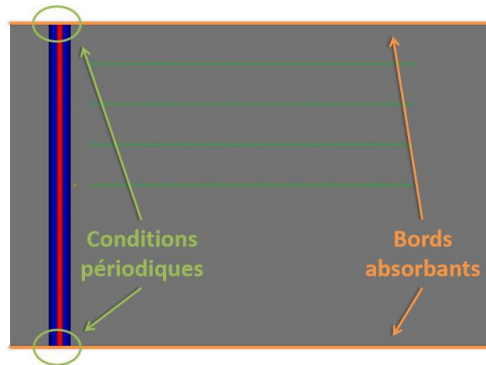


Figure 3. 6 Implémentation d'une onde plane dans SPECFEM2D.

Pour une onde plane de Ricker avec un angle incident θ , sa direction incidente dans le plan de repère est notée $\mathbf{e}_y = \sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z$, et la distance de propagation est notée $y = \sin \theta x + \cos \theta z$.

De même que pour la décomposition de Ricker en séries de Fourier dans le cas élastique (Eq. 2. 13 et Eq. 2. 14), nous prenons en compte le nombre d'onde complexe, $k_n = \omega_n/c_n + i \cdot \alpha_n$, dans le cas viscoélastique et nous obtenons :

$$rs(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cdot e^{i[k_n y - \omega_n t]} = \sum_{n=1}^N A_n \cdot e^{-\alpha_n y} \cdot \cos \left[2\pi f_n \left(t - \frac{y}{c_n} \right) \right] = u_y, \quad \text{Eq. 3. 37}$$

où $c_n = c(\omega_n)$ et $\alpha_n = \alpha(\omega_n)$.

Nous pouvons obtenir les déformations temporelles en notant $\Pi_n = 2\pi f_n(t - y/c_n)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \partial_x u_x = \sin \theta \partial_x u_y = \sin^2 \theta \sum_{n=1}^N A_n e^{-\alpha_n y} \left\{ -\alpha_n \cos \Pi_n + \frac{\omega_n}{c_n} \sin \Pi_n \right\}, \\ \varepsilon_{zz} &= \partial_z u_z = \cos \theta \partial_z u_y = \cos^2 \theta \sum_{n=1}^N A_n e^{-\alpha_n y} \left\{ -\alpha_n \cos \Pi_n + \frac{\omega_n}{c_n} \sin \Pi_n \right\}, \end{aligned} \quad \text{Eq. 3. 38}$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} (\partial_x u_z + \partial_z u_x) = \sin \theta \cos \theta \sum_{n=1}^N A_n e^{-\alpha_n y} \left\{ -\alpha_n \cos \Pi_n + \frac{\omega_n}{c_n} \sin \Pi_n \right\}.$$

En appliquant la transformée de Fourier aux expressions ci-dessus, nous obtenons les déformations dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{xx}(\omega_n) &= \sin^2 \theta \\ &\quad \cdot A_n e^{-\alpha_n y} \left\{ \left(\alpha_n i - \frac{\omega_n}{c_n} \right) \sin \left(\frac{\omega_n}{c_n} y \right) - \left(\alpha_n + \frac{\omega_n}{c_n} i \right) \cos \left(\frac{\omega_n}{c_n} y \right) \right\}, \\ \hat{\varepsilon}_{zz}(\omega_n) &= \cos^2 \theta \\ &\quad \cdot A_n e^{-\alpha_n y} \left\{ \left(\alpha_n i - \frac{\omega_n}{c_n} \right) \sin \left(\frac{\omega_n}{c_n} y \right) - \left(\alpha_n + \frac{\omega_n}{c_n} i \right) \cos \left(\frac{\omega_n}{c_n} y \right) \right\}, \\ \hat{\varepsilon}_{xz}(\omega_n) &= \hat{\varepsilon}_{zx} = \sin \theta \cos \theta \\ &\quad \cdot A_n e^{-\alpha_n y} \left\{ \left(\alpha_n i - \frac{\omega_n}{c_n} \right) \sin \left(\frac{\omega_n}{c_n} y \right) - \left(\alpha_n + \frac{\omega_n}{c_n} i \right) \cos \left(\frac{\omega_n}{c_n} y \right) \right\}. \end{aligned} \quad \text{Eq. 3. 39}$$

Nous explicitons la relation déformations / contraintes de l'Eq. 3. 14 dans le domaine fréquentiel comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{xx} &= (K + \mu) \hat{\varepsilon}_{xx} + (K - \mu) \hat{\varepsilon}_{zz}, \\ \hat{\sigma}_{zz} &= (K - \mu) \hat{\varepsilon}_{xx} + (K + \mu) \hat{\varepsilon}_{zz}, \\ \hat{\sigma}_{xz} &= \hat{\sigma}_{zx} = 2\mu \hat{\varepsilon}_{xz}, \end{aligned} \quad \text{Eq. 3. 40}$$

où les modules complexes $K(\omega)$, $\mu(\omega)$ et $\mathcal{E}(\omega) = K(\omega) + \mu(\omega)$ ont déjà été calculés dans SPEC-FEM2D d'après la section 3.1.3.1.

Par conséquent, nous pouvons calculer les contraintes dans le domaine temporel, $\sigma_{xx}(t)$, $\sigma_{zz}(t)$, $\sigma_{xz}(t)$ et $\sigma_{zx}(t)$ par la transformée inverse de Fourier afin d'obtenir le vecteur traction $\mathbf{t}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ aux bords à utiliser pour la condition de bord.

3.1.3.4 Validation numérique-analytique

Afin de valider l'implantation de la viscoélasticité et des conditions de bord correspondantes dans SPEC-FEM2D, nous réalisons une simulation de la propagation d'une onde plane longitudinale dans un milieu viscoélastique homogène.

Nous utilisons la même taille de géométrie que dans notre étude de la diffusion dans le chapitre précédent : $l_x = 400 \text{ mm}$, $l_z = 600 \text{ mm}$, les autres paramètres dans la simulation

étant : $N = 8500$, $\Delta t = 1.6e - 8 \text{ s}$, $L = 6$, $\rho = 2050 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 3950 \text{ m/s}$, $c_s = 2250 \text{ m/s}$, $Q_K = 101.7$, $Q_\mu = 30$, qui correspond à $Q_\varepsilon = 57.28$. La fréquence de référence est prise égale à la fréquence dominante de la source de Ricker (250 kHz). Nous utilisons trois lignes de récepteurs : la première ligne est sur le bord du haut, la deuxième est au milieu de la première et de la troisième, et la troisième est au centre de la géométrie (en vert Figure 3. 7).

Nous analysons des instantanés de propagation des solutions, dans lesquels la couleur représente le champ de déplacement (Figure 3. 7). Aucune réflexion parasite n'est observée sur les bords du domaine.

De plus, nous obtenons les évolutions de vitesse de phase et d'atténuation d'après des déplacements enregistrés aux récepteurs sur la première ligne, qui correspondent aux conditions périodiques imposées, et sur la troisième ligne, qui correspondent au modèle viscoélastique implanté. Nous les comparons avec le modèle analytique à Q constant sur la Figure 3. 8. Un très bon accord entre les trois courbes est obtenu et valide l'implantation de l'atténuation dans SPECFEM2D, et il confirme également la bonne performance de SPECFEM2D pour reproduire un modèle à facteur Q constant.

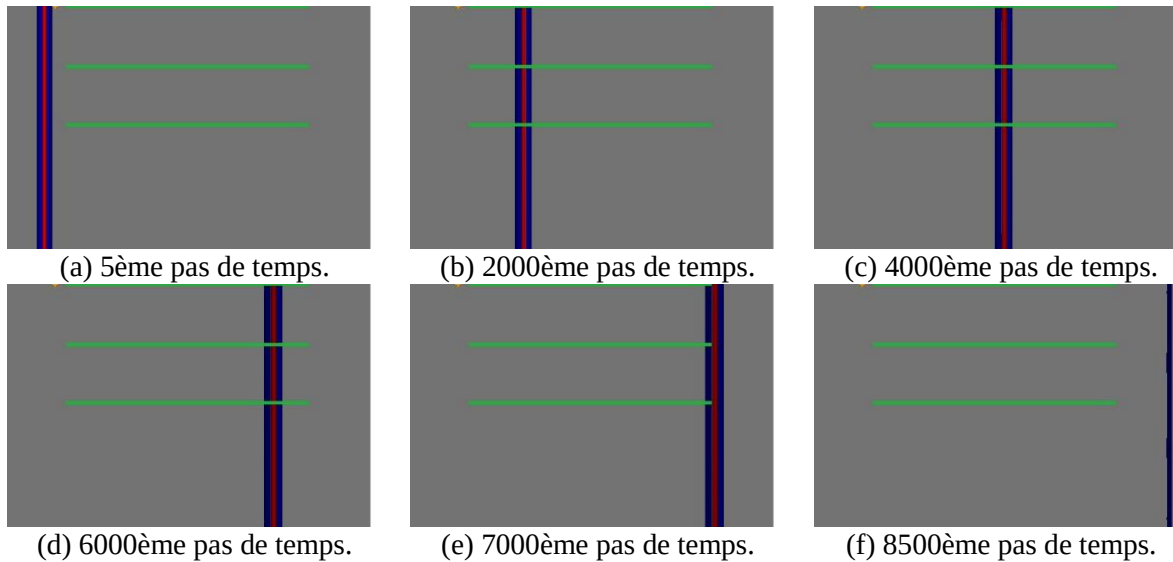


Figure 3. 7 Déplacement vertical lors de la propagation d'une onde plane longitudinale dans un milieu viscoélastique, à différents pas de temps.

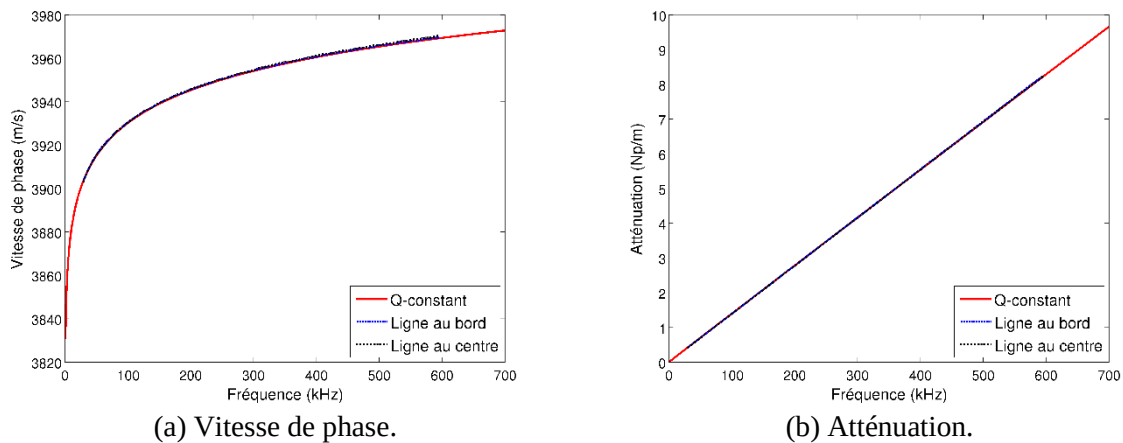


Figure 3. 8 Vitesse de phase et atténuation d'après les déplacements enregistrés sur le bord gauche et au centre dans une simulation viscoélastique effectuée avec SPECFEM2D, comparées à celles d'un modèle analytique à facteur Q constant.

3.1.4 Mesures des facteurs de qualité Q_ε et Q_μ

Afin de réaliser des simulations viscoélastiques pour le béton, il faut connaître les valeurs de Q_ε et Q_μ du mortier correspondant respectivement aux ondes longitudinale et transversale. Cependant, très peu d'études existent dans la littérature concernant la valeur de Q_ε du mortier, et aucune pour Q_μ . Des simulations viscoélastiques en prenant en compte différentes valeurs de Q_ε et Q_μ dans l'Annexe I montrent la importance de leurs présences.

Par conséquent, nous fabriquons des éprouvettes en mortier correspondant au béton de type VeRCoRs et réalisons des mesures afin d'obtenir les évolutions fréquentielles de vitesse de phase et d'atténuation, qui vont nous permettre d'estimer les valeurs de Q_ε et Q_μ par l'ajustement des courbes.

3.1.4.1 Éprouvettes

Afin de fabriquer les éprouvettes, nous avons conçu deux moules pouvant contenir respectivement trois éprouvettes de dimensions 20 cm × 15 cm × 4 cm et 20 cm × 15 cm × 7 cm. Les moules se composent de planches en acier ou en PVC (en violet sur la Figure 3. 9(a)).

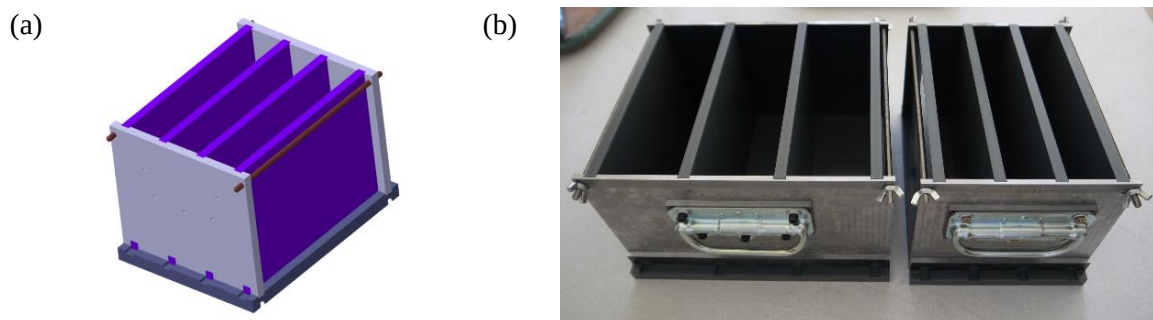


Figure 3. 9. Moule des éprouvettes : (a) design du moule (b) deux moules fabriqués, de taille 20 cm × 15 cm × 7 cm (gauche) et 20 cm × 15 cm × 4 cm (droite).

Pour le mortier de type VeRCoRs, nous prenons la formulation du béton de type VeRCoRs et enlevons tous les grains (sable et gravillons) de diamètre supérieur à 2 mm (en tamisant à 2 mm). Nous obtenons donc le reste des grains occupant la fraction volumique 48,7 % dans ce mortier. La formulation du mortier est détaillée dans le Tableau 3. 1. En plus de cela, nous décidons de réaliser également un autre type de mortier : en gardant la même fraction volumique des grains, nous remplaçons les grains par le sable non tamisé, dont la taille varie de 0 à 4 mm, parce que 4 mm est une limite de taille classique pour le mortier dans le domaine du génie civil. Nous le notons « mortier modifié » dans toute la section 3.1.

Tableau 3. 1. Formule du mortier VeRCoRs (avec sable tamisé à 2 mm) et du mortier modifié (avec sable non tamisé) pour un volume total de 1 litre.

Matériaux	Densité (kg/L)	Volume (L)	Masse (kg)
Ciment CEM 52.5 N CE CP2 NF Gaurain	3,1	0,1921	0,5956
Sable 0/4 REC LGP1 (ou tamisée à 2 mm)	2,6	0,4872	1,2668
Sikaplast Techno 80	1,055	0,0046	0,0048
Eau d'ajout	1,0	0,3610	0,3160
Total		1,0000	2,1833

Tous les matériaux nécessaires à la conception des éprouvettes sont identiques à ceux utilisés dans le béton de type VeRCoRs. La fabrication est réalisée au LMDC (Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions) à Toulouse. Pendant le coulage des mortiers, nous trouvons que cette formulation de mortier est très fluide et nous observons un ressuage à la surface après la vibration des moules. Ainsi, nous constatons un retrait important à la surface 24 heures après le coulage (Figure 3. 10). Les éprouvettes sont également démoulées et pesées 24 heures après le coulage (Tableau 3. 2). Nous prenons une densité de 2180 kg/m^3 ($\pm 58 \text{ kg/m}^3$, au niveau de trois écarts-type) pour les deux mortiers dans la suite. Toutes les éprouvettes sont ensuite conservées sous eau saturée de chaux, et la mesure est réalisée après que la prise des éprouvettes est finalisée (28 jours).



Figure 3. 10. Retrait à la surface des éprouvettes de mortier observé après 24 heures.

Tableau 3. 2. Mesures des poids des éprouvettes en mortier après 24 heures.

Matériaux	Numéro	N°1(kg)	N°2(kg)	N°3(kg)	Densité (kg/L)
Mortier VeRCoRs	$20 \times 15 \times 4 \text{ cm}^3$	2,6436	2,6200	2,6194	2,190
Sable 0/4 tamisée à 2 mm	$20 \times 15 \times 7 \text{ cm}^3$	4,5247	4,5501	/	2,161
Mortier modifié	$20 \times 15 \times 4 \text{ cm}^3$	2,6150	2,6442	2,6548	2,198
Sable 0/4	$20 \times 15 \times 7 \text{ cm}^3$	4,5259	4,5570	4,5644	2,166

Pour chaque type de mortier, nous avons fabriqué trois petites et trois grandes éprouvettes (Figure 3. 11). Cependant, pour le mortier modifié, deux éprouvettes, la petite N°3 et la grande N°3, sont anormales pendant les mesures : nous ne recevons quasiment pas de signal à travers les deux éprouvettes alors que nous recevons des signaux avec une même source à travers les quatre autres éprouvettes. Par conséquent, toutes les mesures pour le mortier modifié sont effectuées sur les petites éprouvettes N°1 et N°2 et les grandes N°1 et N°2, alors que les mesures pour le mortier VeRCoRs sont effectuées sur les trois petites et les trois grandes.



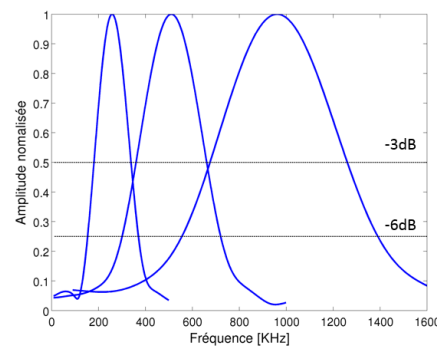
Figure 3. 11. Vue depuis le haut des éprouvettes à deux différentes dimensions (épaisseur 7 cm en haut et 4 cm en bas) après le démoulage.

Nous avons également fabriqué et mesuré d'autres types d'éprouvettes : avec du micro-béton (granulats de diamètres inférieurs à 11 mm), avec du ciment avec le rapport E/C 0,28 et 0,34, et avec du ciment avec sable fine et le rapport E/C 0,34. Nous présentons leurs formulations et mesures en Annexe H.

3.1.4.2 Mesures de Q_ε

Les mesures de Q_ε , qui correspondent aux ondes longitudinales, sont réalisées en transmission en immersion dans l'eau. Nous avons utilisé le même protocole que dans la section 2.4.2 pour les mesures sur des éprouvettes en résine. Les éprouvettes en mortier sont installées sur le support pour que les signaux traversent dans l'épaisseur (4 cm ou 7 cm).

Trois paires de transducteurs ayant pour fréquence dominante respectivement 250 kHz, 500 kHz et 1 MHz sont utilisées dans la mesure afin de couvrir un domaine fréquentiel le plus large possible. Les deux premières paires sont les mêmes que pour les mesures effectuées dans la section 2.4.2. La dernière paire à la fréquence dominante 1 MHz est représentée sur la Figure 3. 12 et leur bande passante est mentionnée dans le Tableau 3. 3. Le transducteur émetteur a un diamètre de 1 pouce (25,4 mm) et le récepteur a un diamètre de 0,5 pouce (12,7 mm).



(a) Émetteur (gauche) et récepteur (droite). (b) Mesures des caractéristiques des transducteurs.
Figure 3. 12. Transducteurs de fréquence nominale 1 MHz.

Tableau 3. 3. Caractéristiques des transducteurs (données mesurées en immersion dans l'eau).

Couple de transducteurs		Fréquence nominale (kHz)	Bande passante (kHz)		Diamètre (mm)
			à -3 dB	à -6 dB	
Émetteur	Panametrics V302	1000	680-1260	560-1390	25,4 (1 pouce)
Récepteur	Panametrics V303				12,7 (0,5 pouce)

Pour chaque mortier, nous avons réalisé des mesures avec les trois paires de transducteurs. Lors des mesures effectuées avec les transducteurs de fréquence dominante de 250 kHz et de 500 kHz, nous avons réalisé 12 acquisitions avec un même signal émis en visant chacune des positions uniformément répartie suivant un rectangle 3×4 avec un intervalle constant de 25 mm dans la zone centrale de chaque éprouvette. Nous gardons une distance minimale d'environ 25-30 mm entre les positions et les bords des éprouvettes pour affaiblir le plus possible la perturbation des réflexions. Lors des mesures effectuées avec les transducteurs de fréquence dominante de 1000 kHz, nous avons réalisé 48 acquisitions avec un même signal émis en visant chacune des positions uniformément répartie suivant un rectangle 6×8 avec un intervalle 13 mm dans la zone centrale de chaque éprouvette.

Le traitement des signaux que nous effectuons pour obtenir la vitesse de phase c_l^* et l'atténuation α_l^* est identique à celui effectué dans la section 2.4.3 pour deux éprouvettes en résine sans tige. Dans la mesure avec une paire de transducteurs sur un type de mortier, nous moyennons respectivement les acquisitions sur toutes les éprouvettes petites ($d_1=4$ cm) et grandes ($d_1=7$ cm) afin d'obtenir un signal correspondant à l'onde cohérente. Tous les résultats sont pris sur les bandes passantes à -3 dB des transducteurs qui permettent donc un domaine fréquentiel continu de 181 kHz à 1260 kHz.

Pour chaque mortier, nous avons répété trois fois les mesures pour évaluer les incertitudes de mesure. Les évolutions fréquentielles de c_l^* et α_l^* sont montrées sur la Figure 3. 13. Nous constatons une bonne continuité des résultats entre les trois paires de transducteurs dans le domaine fréquentiel. La vitesse du mortier modifié est quasiment constante autour de 4400 m/s et est plus grande de l'ordre de 200 m/s que celle du mortier VeRCoRs, qui présente un minimum à basse fréquence et une faible croissance entre 360 kHz et 1260 kHz. Les atténuations entre les deux mortiers sont similaires et quasiment linéaires avec la fréquence, mais celle du mortier VeRCoRs est un peu plus importante, sauf à basse fréquence (environ de 180 kHz à 340 kHz).

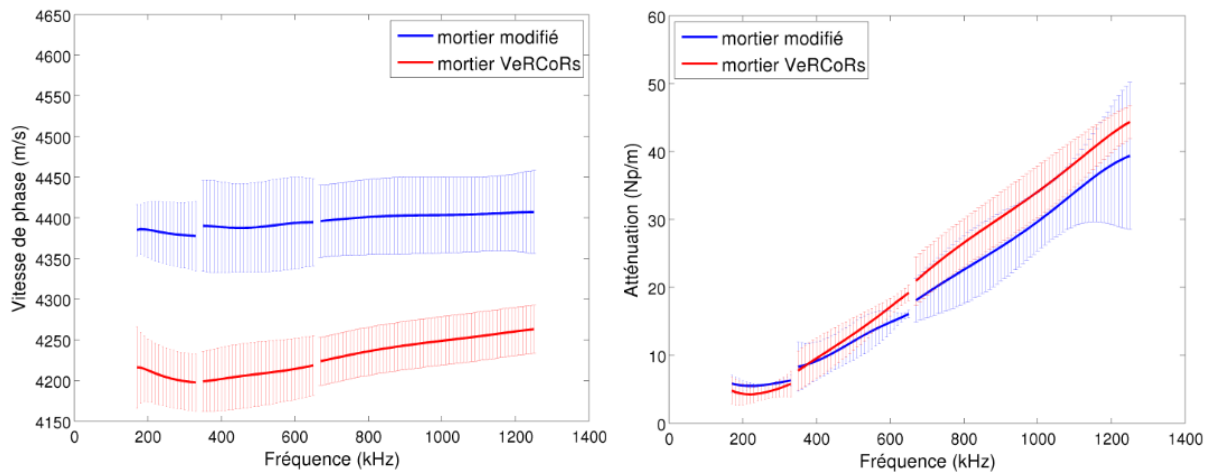


Figure 3. 13. Mesures expérimentales : évolutions fréquentielles de vitesse longitudinale c_l^* et d'atténuation α_l^* dans le mortier VeRCoRs et le mortier modifié en fonction de la fréquence.

3.1.4.3 Mesures de Q_μ

Les mesures de Q_μ , qui correspond aux ondes transversales, sont également réalisées en transmission en immersion dans l'eau. La conception du protocole est montrée sur la Figure 3. 14(a) : en émettant un signal de type longitudinal avec un angle incident θ_i , des ondes transversales se créent dans l'éprouvette et nous pouvons recevoir et analyser les ondes longitudinales correspondantes (OL' sur la figure) afin d'obtenir la vitesse de phase c_t^* et l'atténuation α_t^* pour évaluer Q_μ .

Pour évaluer θ_i et θ_t , nous estimons la vitesse transversale c_t' , qui est supposée constante avec la fréquence, en transmission par contact : en émettant un même signal à travers les éprouvettes d'épaisseur $d_1=4$ cm et $d_2=7$ cm, nous pouvons calculer c_t' à partir de la différence des temps de vol Δt , et les valeurs de c_t' sont indiquées dans le Tableau 3. 4.

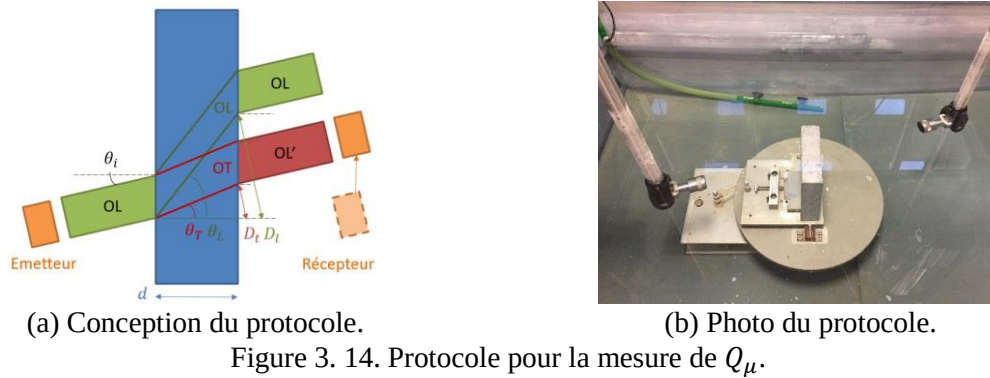
Figure 3. 14. Protocole pour la mesure de Q_μ .

Tableau 3. 4. Propriétés estimées.

	ρ (kg/m ³)	c_l ou c_l' (m/s)	c_t' (m/s)
Eau	1000	1500	\
Mortier VeRCoRs	2180	4200	2520
Mortier modifié	2180	4400	2700

Bien que nous cherchions et estimions un angle incident θ_i assez grand pour séparer les ondes longitudinale et transversale dans l'éprouvette, comme sur la Figure 3. 14(a), qui demande d'avoir $(D_l - D_t)$ supérieur au diamètre des transducteurs, nous constatons toujours deux pulses dans le signal reçu qui correspondent respectivement aux OL' et OL (Figure 3. 14(a)) à cause de la divergence de faisceau du transducteur émetteur. Nous notons dans la suite OL' pour l'onde longitudinale dans l'eau correspondant à l'onde transversale dans l'éprouvette après la transmission, et OL pour l'onde longitudinale dans l'eau correspondant à l'onde longitudinale dans l'éprouvette.

Grâce à la différence des vitesses longitudinale et transversale, le premier pulse correspond à l' OL et le second à l' OL' . Lorsque nous déplaçons le récepteur de la position en face de l'émetteur vers le haut (Figure 3. 14(a)), les deux pulses apparaissent : le pulse d' OL augmente, et celui d' OL' augmente dans un premier temps, puis diminue. Nous cherchons la position correspondant au maximum du pulse d' OL' et prenons ce pulse d' OL' maximum pour analyser l'onde transversale dans l'éprouvette. Cette étape de réglage, qui concerne les transducteurs et l'éprouvette, doit être faite avant chaque mesure.

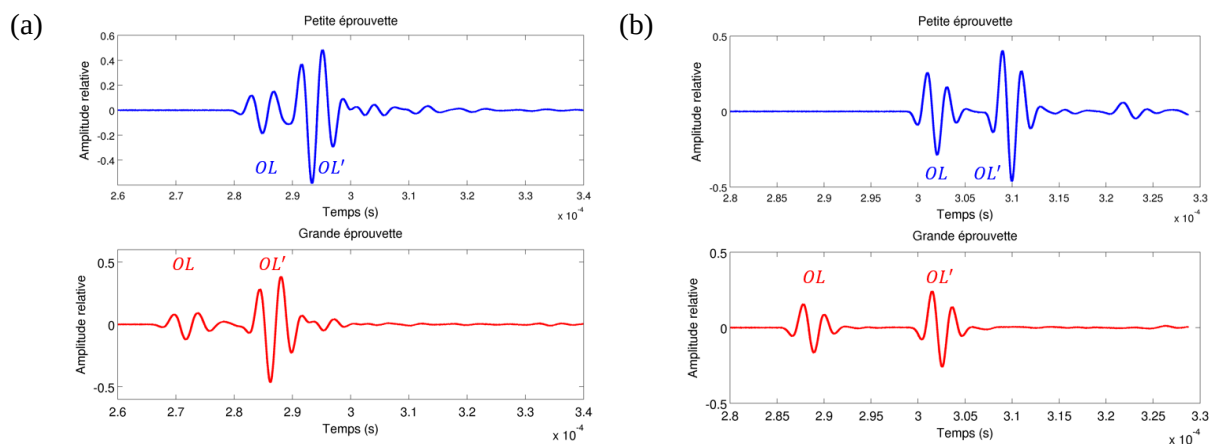


Figure 3. 15. Signaux mesurés par les transducteurs de fréquence dominante (a) 250 kHz et (b) 500 kHz.

En pratique, cette conception de mesure ne convient pas aux transducteurs de fréquence dominante 1 MHz dont les dimensions de l'émetteur et du récepteur sont différentes (difficile de régler la bonne position pour le pulse d' OL'). De plus, pour les transducteurs de fréquence dominante 250 kHz, le pulse de source est relativement long et la séparation des deux pulses, OL' et OL , n'est pas claire. Cela diminue la fiabilité de mesure (Figure 3. 15(a)).

Par conséquent, nous avons finalement choisi $\theta_i = 18^\circ$ pour la mesure de Q_μ avec les transducteurs de fréquence dominante 250 kHz et 500 kHz et nous avons répété trois fois la mesure pour 500 kHz. La valeur de θ_t est estimée d'après le Tableau 3. 4 et est indiquée dans le Tableau 3. 5.

Tableau 3. 5. Angles estimés pour la mesure de Q_μ .

Matériaux	Épaisseur d (cm)	θ_i (°)	θ_l (°)	θ_t (°)	$(D_l - D_t)$ (mm)
Mortier	4	18	60	31	41
VeRCoRs	7	18	60	31	72
Mortier	4	18	65	34	37
modifié	7	18	65	34	65

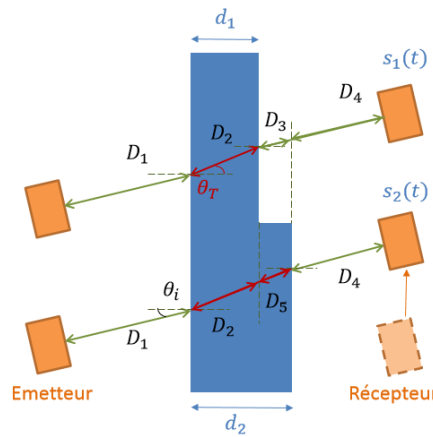


Figure 3. 16. Schéma du traitement des signaux pour la mesure de Q_μ .

Le schéma des traitements de mesure est indiqué sur la Figure 3. 16. De même que pour le traitement effectué dans la section 2.4.3, nous moyennons les signaux respectivement correspondant aux petites et grandes éprouvettes d'épaisseur d_1 et d_2 . Nous prenons les seconds pulses d' OL' des signaux moyennés, pour analyser l'onde transversale dans les éprouvettes, en notant respectivement $s_1(t)$ et $s_2(t)$. Dans le domaine fréquentiel, nous les exprimons respectivement comme :

$$\begin{aligned}\hat{s}_1(\omega) &= \hat{s}_0 \cdot \hat{g}_e \cdot \hat{e}_e \cdot \hat{h}(D_2, \omega) \cdot \hat{h}_{eau}(D_1 + D_3 + D_4, \omega) \cdot \hat{e}_r \cdot \hat{g}_r, \\ \hat{s}_2(\omega) &= \hat{s}_0 \cdot \hat{g}_e \cdot \hat{e}_e \cdot \hat{h}(D_2 + D_5, \omega) \cdot \hat{h}_{eau}(D_1 + D_4, \omega) \cdot \hat{e}_r \cdot \hat{g}_r,\end{aligned}\quad \text{Eq. 3. 41}$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{s}(\omega) &= A(\omega) \cdot e^{i\phi(\omega)}, \\ D_2 &= \frac{d_1}{\cos \theta_t}, D_3 = \frac{d_2 - d_1}{\cos \theta_i}, D_5 = \frac{d_2 - d_1}{\cos \theta_t}, \\ \hat{h}(d, \omega) &= e^{ik_{epr}(\omega)d} \cdot T_{eau/epr} \cdot T_{epr/eau}, \hat{h}_{eau}(d, \omega) = e^{i\omega d/c_{eau}},\end{aligned}$$

où $T_{eau/epr}$, $T_{epr/eau}$ sont respectivement les coefficients de transmission en amplitude aux

interfaces eau/éprouvette et éprouvette/eau, k_{epr} est le nombre d'onde effectif dans l'éprouvette. Pour toutes les éprouvettes, les interfaces eau/éprouvette et éprouvette/eau sont entre le mortier et de l'eau. Nous considérons donc que $T_{eau/epr}$, $T_{epr/eau}$ sont constants dans toutes les mesures.

En explicitant $k_{epr} = k_t^* = \omega/c_t^* + i \cdot \alpha_t^*$ avec la vitesse de phase $c_t^*(\omega)$ et l'atténuation $\alpha_t^*(\omega)$ qui représente la dispersion dans la résine, nous pouvons obtenir :

$$\frac{1}{c_t^*(\omega)} = \frac{1}{c_{eau}} \cdot \frac{D_3}{D_5} + \frac{\phi_2 - \phi_1}{\omega D_5}, \quad \alpha_t^*(\omega) = \frac{1}{D_5} \ln \frac{A_1(\omega)}{A_2(\omega)}, \quad \text{Eq. 3. 42}$$

où A_1 , A_2 sont les amplitudes, ϕ_1 , ϕ_2 sont les phases des ondes cohérentes mesurées dans les signaux reçus correspondant aux éprouvettes d'épaisseurs d_1 et d_2 .

Sur la Figure 3. 17, nous montrons les évolutions fréquentielles de c_t^* et α_t^* à partir des mesures. Nous constatons que les résultats de deux paires de transducteurs dans le domaine fréquentiel sont moins continus, et nous pensons que cela peut provenir des résultats obtenus avec les transducteurs à 250 kHz où les OL se superposent aux OL' . Les deux vitesses sont quasiment constantes : autour de 2650 m/s pour le mortier modifié, et autour de 2500-2550 m/s pour le mortier VeRCoRs. Les valeurs sont en accord avec les vitesses estimées par la mesure au contact. Les atténuations entre les deux mortiers varient quasiment linéairement avec la fréquence, mais celle du mortier VeRCoRs est un peu plus importante que l'autre, similaire à α_l^* (en pointillé) dans le cas des ondes longitudinales. De plus, α_t^* est plus importante que α_l^* pour le mortier VeRCoRs, alors que, pour le mortier modifié, les deux atténuations sont proches.

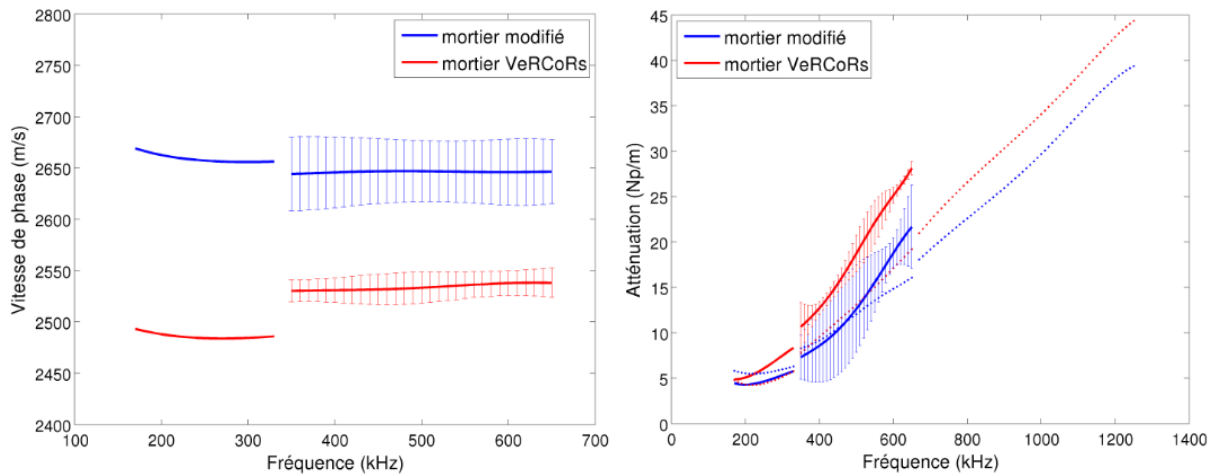


Figure 3. 17. Mesures expérimentales : évolutions fréquentielles de vitesse transversale c_t^* et d'atténuation α_t^* (en trait plein) dans le mortier VeRCoRs et le mortier modifié en fonction de la fréquence avec l'atténuation α_l^* (en pointillé).

3.1.4.4 Adaptation au modèle à facteur Q constant

En utilisant les évolutions fréquentielles de vitesse de phase et d'atténuation mesurées, nous pouvons les adapter au modèle à facteur Q constant pour estimer la valeur de Q_ε et Q_μ .

Pour chaque mortier, en fixant la fréquence de référence à $f_0=500$ kHz, l'adaptation de Q_ε ou Q_μ avec les évolutions correspondantes est faite de la façon suivante :

- Nous cherchons la vitesse mesurée à f_0 et la notons vitesse de référence c_0 ;
- En supposant que l'atténuation est linéaire en fonction de la fréquence, nous cherchons la pente la mieux adaptée p par ajustement de courbe à l'ordre 1 (méthode des moindres carrés) ;
- En supposant $Q \gg 1$ dans l'Eq. 3. 23, nous avons l'approximation $\alpha^* \approx \pi f / Q c_0$ et nous obtenons $Q \approx \pi / p c_0$.

D'après les résultats sur tout le domaine fréquentiel, les valeurs de Q_ε et Q_μ adaptées pour les deux mortiers sont indiquées dans le Tableau 3. 6. Avec l'Eq. 3. 23, nous pouvons tracer la vitesse de phase et l'atténuation du modèle à Q constant avec les valeurs de Q adaptées. Elles sont illustrées sur les Figure 3. 18 Figure 3. 19, Figure 3. 20 et Figure 3. 21 (en rouge ou bleu).

Sur les figures, nous indiquons également les courbes des modèles avec des valeurs de Q adaptées d'après les résultats d'une seule paire de transducteurs : cyan pour les transducteurs de fréquence dominante 250 kHz, magenta pour 500 kHz et vert pour 1 MHz. Nous observons des grandes différences pour les valeurs de Q , et les différences de valeur atteintes jusqu'à l'ordre de grandeur de 20. Cette différence impacte peu l'évolution de vitesse de phase mais impacte beaucoup l'atténuation.

En pratique, la source dans des simulations est une onde incidente de Ricker de fréquence dominante f_0' , qui peut être différente de la fréquence de référence f_0 déterminée pendant l'adaptation de Q aux mesures. Notamment la fréquence de référence dans SPECFEM2D est par défaut fixée à f_0' . Afin d'utiliser le modèle à facteur Q constant adapté aux mesures, nous devons prendre la vitesse à f_0' du modèle comme paramètre d'entrée (des propriétés du matériau). Par exemple, sur les Figure 3. 18 Figure 3. 19, Figure 3. 20 et Figure 3. 21, nous montrons les valeurs lorsque $f_0' = 250$ kHz.

Tableau 3. 6. Valeurs de Q_ε et Q_μ adaptées aux mesures de trois paires de transducteurs.

Matériaux	Q_ε	Q_μ
Mortier VeRCoRs	22,5	33,6
Mortier modifié	24,5	44,8

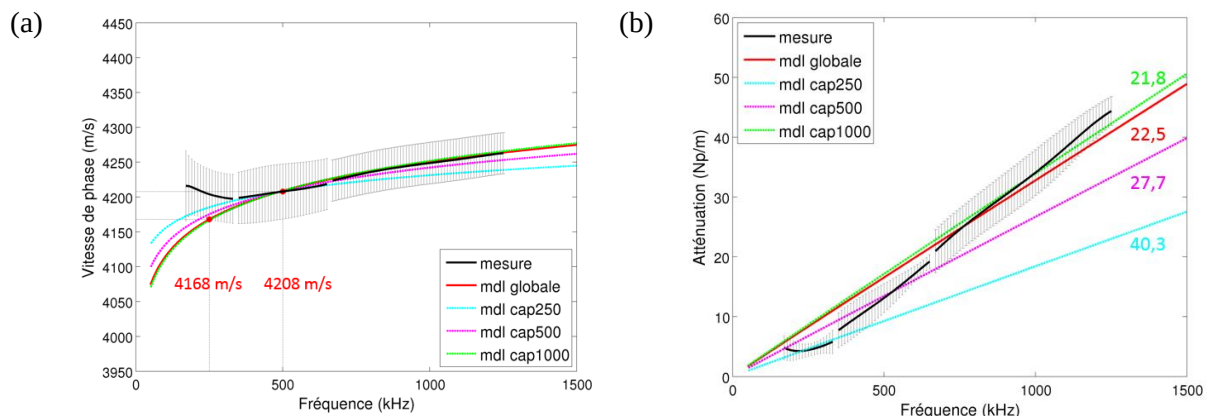


Figure 3. 18. Comparaisons de la vitesse de phase (a) et de l'atténuation (b) pour les ondes longitudinales entre la mesure et le modèle à Q_ε constant adapté (aux transducteurs à 250 kHz, 500 kHz, 1 MHz et à l'ensemble en cyan, magenta, vert et rouge) pour le mortier VeRCoRs.

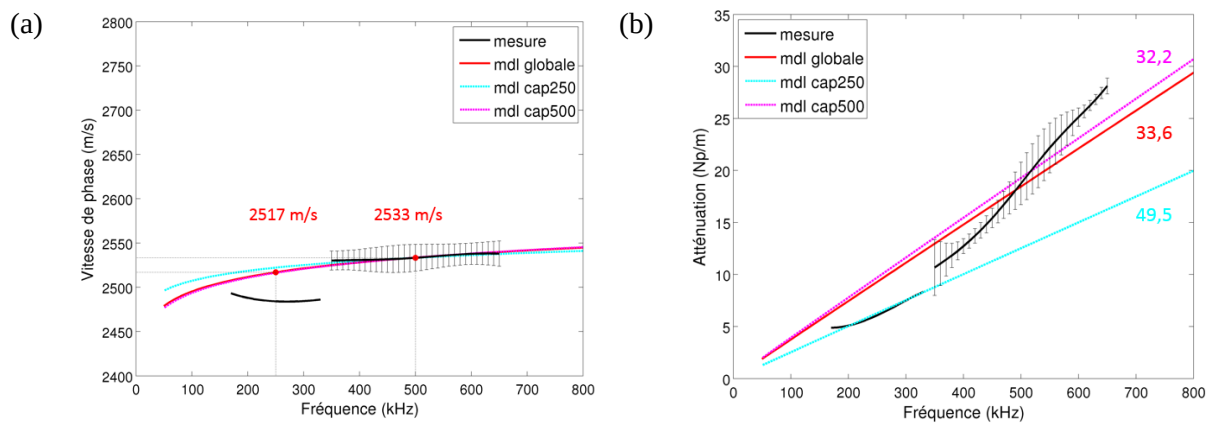


Figure 3.19. Comparaisons de la vitesse de phase (a) et de l'atténuation (b) pour les ondes transversales entre la mesure et le modèle à Q_μ constant adapté (aux transducteurs à 250 kHz, 500 kHz, 1 MHz et à l'ensemble en cyan, magenta, vert et rouge) pour le mortier VerCoRs.

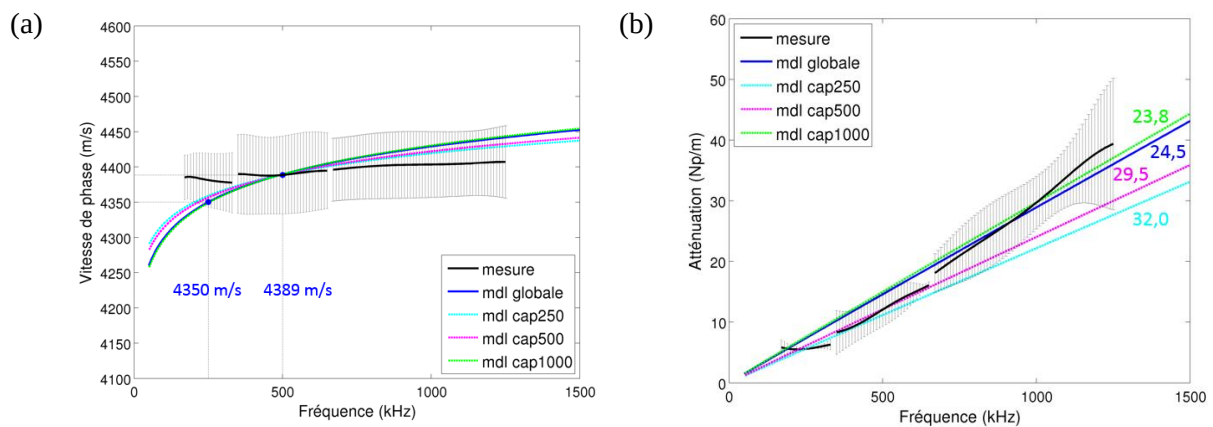


Figure 3.20. Comparaisons de la vitesse de phase (a) et de l'atténuation (b) pour les ondes longitudinales entre la mesure et le modèle à Q_ϵ constant adapté (aux transducteurs à 250 kHz, 500 kHz, 1 MHz et à l'ensemble en cyan, magenta, vert et rouge) pour le mortier modifié.

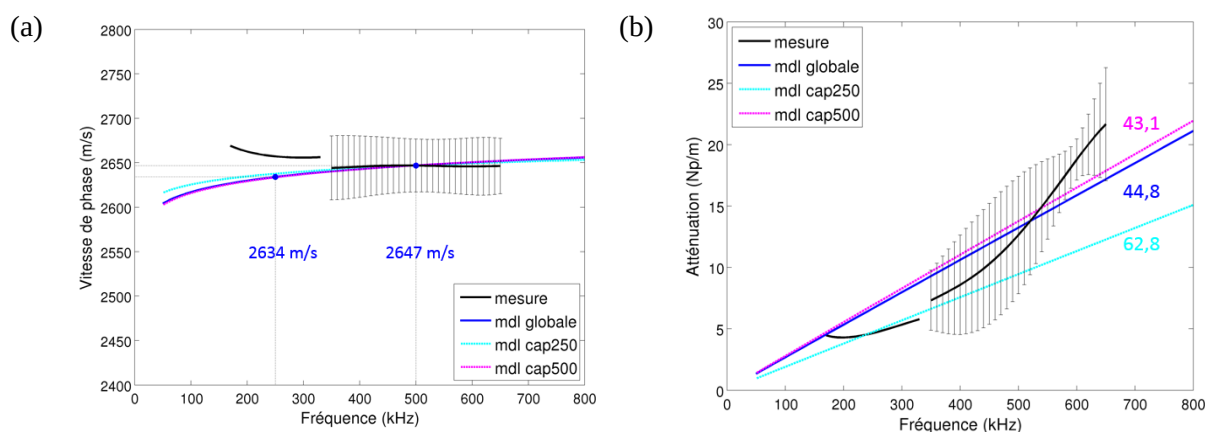


Figure 3.21. Comparaisons de la vitesse de phase (a) et de l'atténuation (b) pour les ondes transversales entre la mesure et le modèle à Q_μ constant adapté (aux transducteurs à 250 kHz, 500 kHz, 1 MHz et à l'ensemble en cyan, magenta, vert et rouge) pour le mortier modifié.

3.2 Interfacial transition zone (ITZ)

À l'interface entre les granulats et le mortier dans le béton, une couche très fine (de l'ordre de 5 à 50 μm) est présente, avec une forte porosité ; elle se nomme *interfacial transition zone* (ITZ). L'impact de la présence de l'ITZ sur la propagation des ondes n'est pas bien connu dans la littérature, et il est difficile de l'étudier expérimentalement car il est difficile d'isoler ce seul effet, parmi tout le reste.

Disposer d'un outil numérique nous offre une possibilité beaucoup plus commode de simuler l'ITZ afin d'étudier son impact sur la propagation des ondes. Cependant, son épaisseur, qui est très petite par rapport à la taille des granulats (diamètre de 2 mm à 22 mm) et aux longueurs d'onde dans le béton (environ de 4,5 mm à 80 mm), impose une taille de maillage du même ordre (en considérant que la taille moyenne dans nos simulations est autour de 0,35~0,5 mm). Le pas de temps pour des schémas d'intégration temporelle conditionnellement stables avec une condition de stabilité de type CFL, qui fait intervenir la plus petite taille d'un élément de maillage, est également impacté. Cela pénalise très fortement le coût de calcul et montre la nécessité de développer une approche de modélisation numérique de l'ITZ plus sophistiquée qu'une simple simulation directe.

Des études proposent d'utiliser une interface d'épaisseur nulle avec un ensemble de conditions décrivant les propriétés moyennes du contact afin de remplacer la zone très fine de l'ITZ. Plusieurs jeux de conditions de saut et de conditions aux limites existent, décrivant des lois de contact linéaires ou non linéaires [136]. Cependant il est difficile de bien poser la correspondance entre les propriétés de la couche et les conditions de contact.

Par conséquent, nous décidons d'utiliser les conditions de transmission équivalentes (CTE) introduites dans la thèse de Burel [137], qui permettent une solution ayant une précision d'ordre 3 de l'épaisseur d'une fine couche aux bords de couche, sans avoir à mailler explicitement cette couche.

Dans cette section, nous rappelons la conception de cette approche CTE dans le cas d'une fine couche rectiligne supposée homogène isotrope élastique. Puis nous l'implantons dans le logiciel SPECFEM2D. Nous validons l'implantation de code par des comparaisons numériques pour des cas simples pour une couche non bornée. Enfin nous simulons le cas d'une couche ITZ présente autour d'une hétérogénéité de forme carrée : Cette première approche est limitée au cas d'une ITZ rectiligne car elle doit rendre compte d'une façon simple et peu chronophage de l'intérêt d'engager une étude plus approfondie de ce thème de recherche.

3.2.1 Problème approché avec des conditions de transmission équivalentes

Nous ne rappelons ici que le principe des conditions de transmission équivalentes (CTE) en bref ; pour plus de détails nous renvoyons à la thèse de Burel [137].

Le schéma du problème est décrit sur la Figure 3. 22. Une couche fine et rectiligne de matériau élastique $(\rho^i, \lambda^i, \mu^i)$ d'épaisseur constante $\eta > 0$ occupe une bande Ω_η^i , qui est non bornée, ayant pour bord supérieur $\partial\Omega_\eta^+ = \mathbb{R} \times \{\eta/2\}$ et pour bord inférieur $\partial\Omega_\eta^- = \mathbb{R} \times \{-\eta/2\}$. Soit $\Gamma = (\partial\Omega_\eta^+ + \partial\Omega_\eta^-)/2$ l'interface parallèle située à mi-chemin entre les deux bords. Les caractéristiques du matériau extérieur Ω_η^E , qui peuvent être non constantes, sont la densité ρ ainsi que les coefficients de Lamé λ et μ .

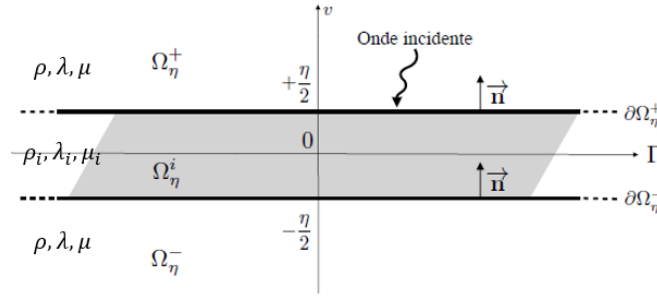


Figure 3. 22. Schéma de l'approche par conditions de transmission équivalentes pour le cas d'une interface plane introduite dans la thèse de Burel [137].

Équations de l'élastodynamique

En supposant le champ de déplacement élastique $\mathbf{u}_\eta^i(\mathbf{x}, t)$ dans la bande ($\mathbf{x} \in \Omega_\eta^i$) et $\mathbf{u}_\eta^E(\mathbf{x}, t)$ à l'extérieur de la bande ($\mathbf{x} \in \Omega_\eta^E$), les équations de l'élastodynamique et les conditions initiales de ce problème sont :

$$\begin{cases} \rho^i \partial_t^2 \mathbf{u}_\eta^i - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^i(\mathbf{u}_\eta^i) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_\eta^i(\cdot, 0) = \mathbf{0} \text{ et } \partial_t \mathbf{u}_\eta^i(\cdot, 0) = \mathbf{0}' \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega_\eta^i \times \mathbb{R}^+, \\ \text{dans } \Omega_\eta^i \end{array} \quad \text{Eq. 3. 43}$$

$$\begin{cases} \rho^E \partial_t^2 \mathbf{u}_\eta^E - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{u}_\eta^E) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_\eta^E(\cdot, 0) = \mathbf{u}_{s0} \text{ et } \partial_t \mathbf{u}_\eta^E(\cdot, 0) = \mathbf{u}_{s1}' \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega_\eta^E \times \mathbb{R}^+, \\ \text{dans } \Omega_\eta^E \end{array} \quad \text{Eq. 3. 44}$$

où $\mathbf{u}_{s0}$, $\mathbf{u}_{s1}$ sont respectivement un déplacement initial et une vitesse initiale qui génèrent une onde source incidente provenant de Ω_η^E ; $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$, $\boldsymbol{\sigma}^i(\mathbf{u})$ dénotent respectivement le tenseur des contraintes évalué dans le matériau environnant Ω_η^E et dans la bande Ω_η^i , qui vérifient la loi de Hooke.

Conditions de transmission exactes

À tout point $\mathbf{x}$ dans la bande Ω_η^i , nous associons les coordonnées locales paramétriques $(y, v) \in \Gamma \times [-\eta/2, \eta/2]$ via $\mathbf{x} = y\boldsymbol{\tau} + v\mathbf{n}$, où $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur unitaire suivant Γ et $\mathbf{n}$ le vecteur normal unitaire à Γ , pointant dans la direction de Ω_η^+ (Figure 3. 22).

L'Eq. 3. 43 et l'Eq. 3. 44 sont couplées avec des conditions de transmission sur les interfaces $\partial\Omega_\eta^+$ et $\partial\Omega_\eta^-$. En supposant que la couche mince et le domaine extérieur sont parfaitement collés (déplacements continus), pour tout y de Γ , les quatre relations de transmission sur les frontières $\partial\Omega_\eta^\pm$ sont :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\eta^E(y, \pm \frac{\eta}{2}, t) = \mathbf{u}_\eta^i(y, \pm \frac{\eta}{2}, t) \\ \mathbf{t}(\mathbf{u}_\eta^E)(y, \pm \frac{\eta}{2}, t) = \mathbf{t}^i(\mathbf{u}_\eta^i)(y, \pm \frac{\eta}{2}, t) \end{cases}, \quad (y, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+ \quad \text{Eq. 3. 45}$$

où $\mathbf{t}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}$ et $\mathbf{t}^i(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}^i(\mathbf{u})\mathbf{n}$ sont les vecteurs tractions relatifs à Ω_η^E et Ω_η^i .

Si un saut généralisé $\{f\}_\eta$, pour toute fonction scalaire ou vectorielle f définie sur un voisinage de la frontière $\partial\Omega_\eta^\pm$, est défini par :

$$\{f\}_\eta(y, t) = ([f]_\eta(y, t), \langle f \rangle_\eta(y, t)), \quad (y, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+ \quad \text{Eq. 3. 46}$$

avec

$$[f]_\eta(y, t) = f(y, \frac{\eta}{2}, t) - f(y, -\frac{\eta}{2}, t) \quad \text{et} \quad \langle f \rangle_\eta(y, t) = [f(y, \frac{\eta}{2}, t) + f(y, -\frac{\eta}{2}, t)]/2,$$

les conditions de transmission (Eq. 3. 45) peuvent s'écrire, depuis la région extérieure au

domaine Ω_η^E , sous la forme :

$$\{t(\mathbf{u}_\eta)\}_\eta = \mathbf{T}_\eta \{\mathbf{u}_\eta\}_\eta, \quad \text{Eq. 3. 47}$$

où $\mathbf{T}_\eta$ est un opérateur (non local) de transmission qui peut être défini implicitement par la solution du problème de Dirichlet intérieur dans la bande Ω_η^i .

Le problème formé de l'Eq. 3. 43, de l'Eq. 3. 44 et de l'Eq. 3. 47 est le problème de transmission exact.

Conditions de transmission équivalentes (CTE)

L'idée, pour contourner la difficulté d'avoir à effectuer une détermination exacte de la solution à l'intérieur de la bande $\mathbf{u}_\eta^i$, est de remplacer l'Eq. 3. 43 et l'Eq. 3. 45 par des Conditions de Transmission Équivalentes (CTE) posées sur le bord intermédiaire Γ . Autrement dit, ces conditions visent à connecter le déplacement $\mathbf{u}_\eta^+ = \mathbf{u}_\eta^E(y, +\eta/2, t)$ sur $\partial\Omega_\eta^+$ avec le déplacement $\mathbf{u}_\eta^- = \mathbf{u}_\eta^E(y, -\eta/2, t)$ sur $\partial\Omega_\eta^-$, sans avoir recours au calcul de la solution exacte de l'Eq. 3. 43, de l'Eq. 3. 44 et de l'Eq. 3. 45 à l'intérieur de la bande, mais de telle façon que nous approchons la solution exacte lorsque η tend vers zéro.

Lorsque η tend vers zéro, nous pouvons formuler des approximations analytiques explicites locales pour l'opérateur de transmission exact non local $\mathbf{T}_\eta$. En d'autres termes, nous cherchons des opérateurs locaux $\mathbf{T}_\eta^k$ qui approchent $\mathbf{T}_\eta$ dans le sens où un champ de déplacement élastodynamique $\tilde{\mathbf{u}}_\eta$ dans Ω_η^E satisfaisant l'Eq. 3. 44 avec la CTE suivante :

$$\{t(\tilde{\mathbf{u}}_\eta)\}_\eta = \mathbf{T}_\eta^k \{\tilde{\mathbf{u}}_\eta\}_\eta, \quad \text{Eq. 3. 48}$$

approche la solution $\mathbf{u}_\eta^E$ du problème de transmission exact formé de l'Eq. 3. 43, de l'Eq. 3. 44 et de l'Eq. 3. 47 à l'ordre $O(\eta^{k+1})$.

Problème approché avec la CTE construite

Par conséquent, le problème approché avec la CTE peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \rho \partial_t^2 \tilde{\mathbf{u}}_\eta - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_\eta) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_\eta^E \times \mathbb{R}^+, \\ \{t(\tilde{\mathbf{u}}_\eta)\}_\eta = \mathbf{T}_\eta^k \{\tilde{\mathbf{u}}_\eta\}_\eta & \text{dans } \partial\Omega_\eta^\pm \end{cases}, \quad \text{Eq. 3. 49}$$

où $\mathbf{T}_\eta^k$ est un opérateur différentiel (local) adéquat, dépendant de η .

La CTE peut alors être calculée, et ses expressions d'ordre 3 ($O(\eta^3)$) dans le cas 2D sont :

$$\begin{cases} \eta [t(\tilde{\mathbf{u}}_\eta)]_\eta = \eta^2 (\rho^i \partial_t^2 - JAJ \partial_x^2) \langle \tilde{\mathbf{u}}_\eta \rangle_\eta - \eta JB \partial_1 [\tilde{\mathbf{u}}_\eta]_\eta \\ \eta \langle t(\tilde{\mathbf{u}}_\eta) \rangle_\eta = A [\tilde{\mathbf{u}}_\eta]_\eta + \eta BJ \langle \partial_x \tilde{\mathbf{u}}_\eta \rangle_\eta \end{cases}, \quad \text{Eq. 3. 50}$$

où les matrices J , A et B sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} \mu^i & 0 \\ 0 & \lambda^i + 2\mu^i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mu^i & 0 \\ 0 & \lambda^i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour cette CTE d'ordre 3, la stabilité et l'analyse asymptotique de la solution approchée $\tilde{\mathbf{u}}_\eta$ sont démontrées dans [137].

3.2.2 Implantation de code dans SPECFEM2D

Nous implantons d'abord cette méthode avec CTE dans SPECFEM2D et nous vérifions

sa pertinence pour simuler l'ITZ du béton.

Formulation variationnelle et discrétisation en espace

Dans le cas 2D, la formulation variationnelle faible peut s'écrire sous la forme ($\forall \mathbf{v} \in V = H^1(\Omega_\eta^E)$) :

$$\frac{d^2}{dt^2} m(\tilde{\mathbf{u}}_\eta, \mathbf{v}) + \eta \frac{d^2}{dt^2} m_\Gamma(\tilde{\mathbf{u}}_\eta, \mathbf{v}) + k(\tilde{\mathbf{u}}_\eta, \mathbf{v}) + c_\Gamma^\eta(\tilde{\mathbf{u}}_\eta, \mathbf{v}) = 0, \quad \text{Eq. 3. 51}$$

avec les intégrales de surface

$$m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_\eta^E} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_\eta^E} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx, \quad \text{Eq. 3. 52}$$

et les intégrales de bord le long de Γ

$$\begin{aligned} m_\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_\Gamma \rho^i \langle \mathbf{u} \rangle_\eta \cdot \langle \mathbf{v} \rangle_\eta \, dy, \quad c_\Gamma^\eta(\tilde{\mathbf{u}}_\eta, \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{\eta} a_\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \eta p_\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ a_\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_\Gamma A[\mathbf{u}]_\eta \cdot [\mathbf{v}]_\eta \, dy, \\ p_\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_\Gamma \left((\lambda^i + \mu^i) \operatorname{div}_\Gamma \langle \mathbf{u} \rangle_\eta \operatorname{div}_\Gamma \langle \mathbf{v} \rangle_\eta + \mu^i \nabla_\Gamma \langle \mathbf{u} \rangle_\eta : \nabla_\Gamma \langle \mathbf{v} \rangle_\eta \right) dy, \\ b_\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \lambda^i \int_\Gamma \left(\operatorname{div}_\Gamma \langle \mathbf{u} \rangle_\eta [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]_\eta + \operatorname{div}_\Gamma \langle \mathbf{v} \rangle_\eta [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_\eta \right) dy \\ &\quad + \mu^i \int_\Gamma \left(\nabla_\Gamma \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \rangle_\eta \cdot [\mathbf{v}]_\eta + \nabla_\Gamma \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_\eta \cdot [\mathbf{u}]_\eta \right) dy, \end{aligned} \quad \text{Eq. 3. 53}$$

où ∇_Γ et $\operatorname{div}_\Gamma$ sont des opérateurs définis comme suit, avec $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur unitaire suivant Γ :

$$\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} = \partial_\tau (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}), \quad \nabla_\Gamma w = \partial_\tau w \boldsymbol{\tau}, \quad \nabla_\Gamma \mathbf{v} = \partial_\tau \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau},$$

La formulation peut se réécrire sous la forme matricielle :

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{U}(t)}{dt^2} + \mathbf{Q} \mathbf{U}(t) = 0,$$

où $\mathbf{U}$ est le vecteur qui rassemble les coordonnées de l'approximation $\tilde{\mathbf{u}}_\eta$ dans une base de Lagrange $\{\phi_i\}$, $\mathbf{Q} = \left(\mathbf{K} + \frac{1}{\eta} \mathbf{A} + \mathbf{B} + \eta \mathbf{P} \right)$ dont les éléments (i, j) des matrices sont :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M})_{ij} &= m(\phi_i, \phi_j) + m_\Gamma(\phi_i, \phi_j), \quad (\mathbf{K})_{ij} = k(\phi_i, \phi_j), \\ (\mathbf{A})_{ij} &= a_\Gamma(\phi_i, \phi_j), \quad (\mathbf{P})_{ij} = p_\Gamma(\phi_i, \phi_j), \quad (\mathbf{B})_{ij} = b_\Gamma(\phi_i, \phi_j). \end{aligned}$$

Discrétisation en temps

Nous gardons une discrétisation en temps totalement explicite par la méthode de différences centrées (Newmark) $\beta = 0, \gamma = 0,5$, qui est le schéma en temps standard explicite d'ordre 2 implémenté dans SPECFEM2D.

Pour les bords de la couche, nous explicitons les prédicteurs au $(n + 1)$ ème pas de temps de durée Δt sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(n+1)} &= \mathbf{U}^{(n)} + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^{(n)} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}^{(n)}, \\ \ddot{\mathbf{U}}^{(n+1)} &= -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{U}^{(n+1)}, \end{aligned} \quad \text{Eq. 3. 54}$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{(n+1)} = \dot{\mathbf{U}}^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{U}}^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{U}}^{(n+1)}.$$

Les matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{Q}$ permettent le calcul de la fonction de saut généralisée (Eq. 3. 46) entre les bords. Par conséquent, nous devons traiter en même temps les deux points de Gauss associés par la fonction sur les deux bords, et de ce fait la matrice locale de ces deux points correspondant à $\mathbf{M}$ est une matrice de taille 4×4 .

Avec ce schéma, la condition CFL est pénalisée par les termes de bord et impose un pas de temps réduit :

$$\Delta t_c \leq 2\sqrt{\eta} \Delta t_c^{ref} (1 + O(\eta)), \quad \text{Eq. 3. 55}$$

où Δt_c^{ref} est le temps critique de référence obtenu sur un schéma explicite sans les termes de bords, autrement dit la CFL classique.

Remarques concernant l'implantation

Nous avons implanté cette méthode avec les CTE dans SPECFEM2D, et ceci nous a conduit à faire plusieurs remarques sur cette méthode et son application :

- Les points de grille sur les deux bords doivent se correspondre exactement (Figure 3. 23(a)) dans le sens où les liaisons de deux points correspondants sont perpendiculaires aux bords, pour que les points de Gauss sur les bords dans le calcul soient en accord avec la définition de la fonction de saut généralisée (Eq. 3. 46) dans la CTE construite ;
- Il faut ajouter des fonctions ou fichiers pour que SPECFEM2D connaisse les paires des points de grille correspondants et leurs propres groupes ($\partial\Omega_\eta^+$ ou $\partial\Omega_\eta^-$) ;
- Il faut connaître ou ranger les positions (i, j) des points de Gauss sur les bords dans leurs propres éléments pour l'intégration des termes de bord ;
- Parce que la CTE introduite est construite pour le cas d'une couche rectiligne non bornée, elle n'est pas optimale pour une couche présentant des coins, par exemple une couche entourant un gravier de béton de forme polygonale. En effet, sur la Figure 3. 23(b), les points de Gauss sur les côtés du coin ne peuvent plus satisfaire la correspondance des points exigée.

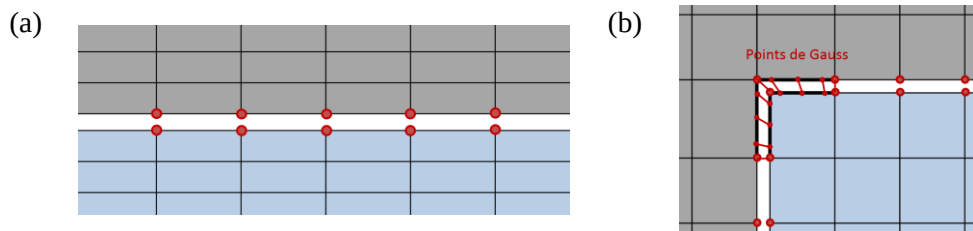


Figure 3. 23. Exemples de maillage autour d'une fine couche : (a) pour une bande non bornée, (b) pour un coin de couche.

3.2.3 Validation de l'implantation

Nous validons l'implantation de la méthode des CTE dans deux cas différents.

Le premier cas consiste en une couche $(\rho^i, \lambda^i, \mu^i)$ dans un milieu homogène (ρ, λ, μ) , et une onde est excitée par une source ponctuelle se trouvant dans la zone située en dessous de l'interface (Figure 3. 24). Nous comparons la simulation avec CTE, dans laquelle la couche n'est pas maillée (Figure 3. 24(a), (b) et (c)), et la simulation classique, où la couche est maillée

et calculée (Figure 3. 24 (d), (e) et (f)). Les propriétés des matériaux sont $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, $\rho^i = 1500 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = \mu = 8,1 \text{ GPa}$, $\lambda^i = \mu^i = 0,75 \text{ GPa}$, et la source est un Ricker de fréquence dominante $f_0 = 10 \text{ Hz}$. La géométrie se compose de deux rectangles de $1500 \text{ m} \times 4000 \text{ m}$, dont la taille est $\Delta l = 50 \text{ m}$, et d'une couche d'épaisseur $\eta = 0,08$ avec $\Delta l = 4 \text{ m}$. Nous représentons sur la Figure 3. 24 des instantanés de propagation du champ de déplacement u_z aux temps $t = 0,22 \text{ s}$, $0,44 \text{ s}$ et $0,66 \text{ s}$. La comparaison des déplacements à un récepteur donné (Figure 3. 24(a)) est également illustrée sur la Figure 3. 25. Les accords entre les résultats de deux simulations valident notre modèle et l'approche CTE utilisée.

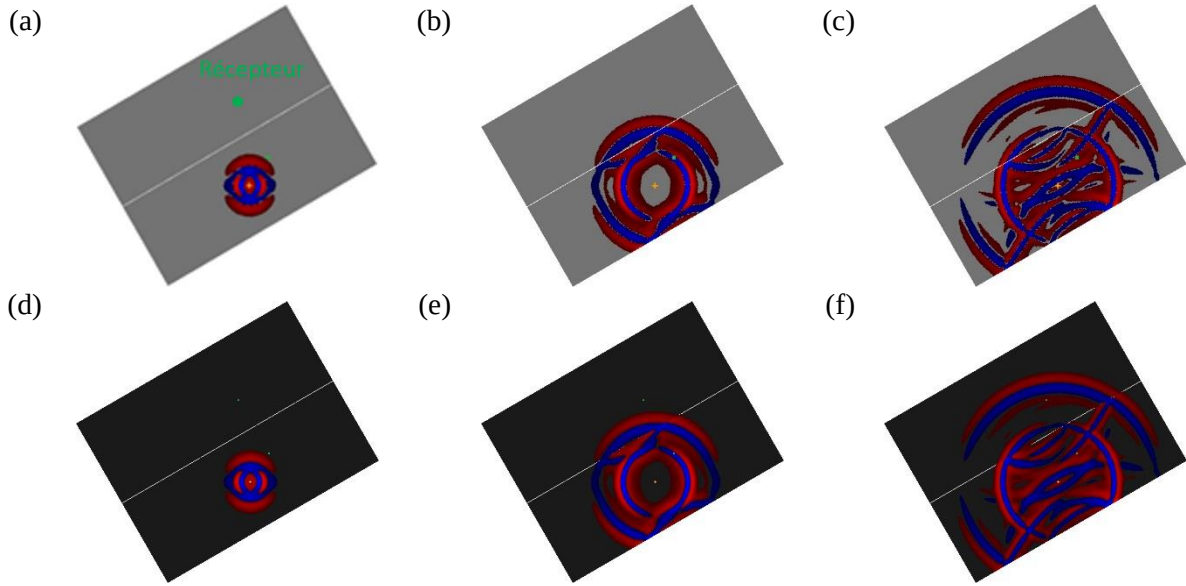


Figure 3. 24. Comparaisons d'instantanés de propagation du champ de déplacement u_z avec CTE et une couche non maillée (en haut, (a), (b) et (c)) et avec une couche entièrement maillée (en bas, (d), (e) et (f)) pour $t = 0,22 \text{ s}$, $0,44 \text{ s}$ et $0,66 \text{ s}$, dans le cas de deux matériaux différents pour le milieu et pour la couche.

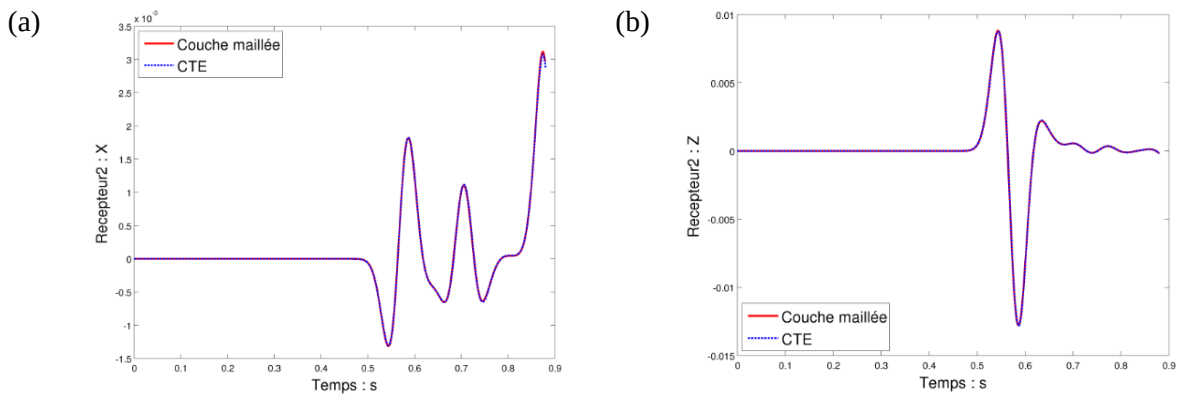


Figure 3. 25. Comparaisons des évolutions de la composante du déplacement à une même position entre les simulations avec CTE et une couche non maillée (en bleu) et avec une couche entièrement maillée (en rouge) : (a) u_x et (b) u_z .

Ensuite, dans le deuxième cas, nous ne remplaçons que les propriétés de la couche pour qu'elles soient identiques au milieu environnant ($\rho^i = \rho$, $\lambda^i = \lambda$, $\mu^i = \mu$). Nous comparons également la simulation avec CTE et la simulation classique, et les instantanés de propagation du déplacement u_z aux temps $t = 0,22 \text{ s}$, $0,44 \text{ s}$ et $0,66 \text{ s}$ sont représentés sur la Figure 3. 26. Nous vérifions qu'il n'y a aucune réflexion au passage de couche et cela constitue une deuxième

validation notre modèle.

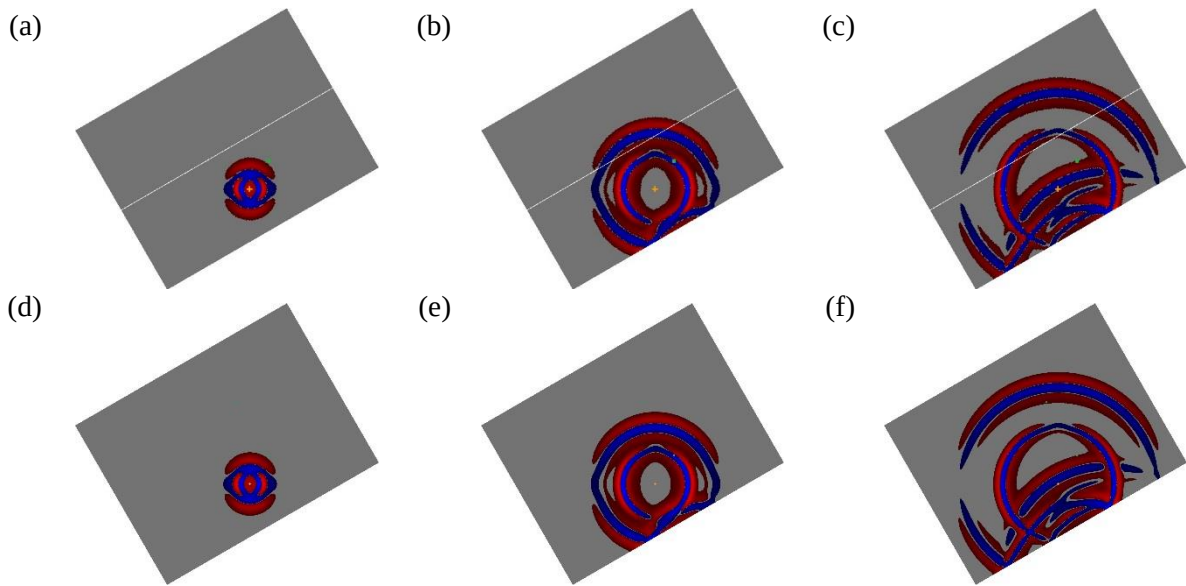


Figure 3. 26. Comparaisons d'instantanés de propagation du champ de déplacement avec CTE et une couche non maillée (en haut, (a), (b) et (c)) et avec une couche entièrement maillée (en bas, (d), (e) et (f)) pour $t = 0,22$ s, $0,44$ s et $0,66$ s, dans le cas de deux matériaux identiques pour le milieu et pour la couche.

3.2.4 Simulation d'une couche ITZ située autour d'une inclusion carrée

Bien que, dans le cas avec une couche bornée, le traitement des éléments au coin de couche ne soit pas optimal avec la CTE implantée, nous simulons le cas d'une couche ITZ située autour d'un carré afin d'évaluer l'importance de l'effet (potentiellement parasite) du coin et de vérifier le potentiel de l'approche CTE pour simuler l'ITZ dans un tel cas.

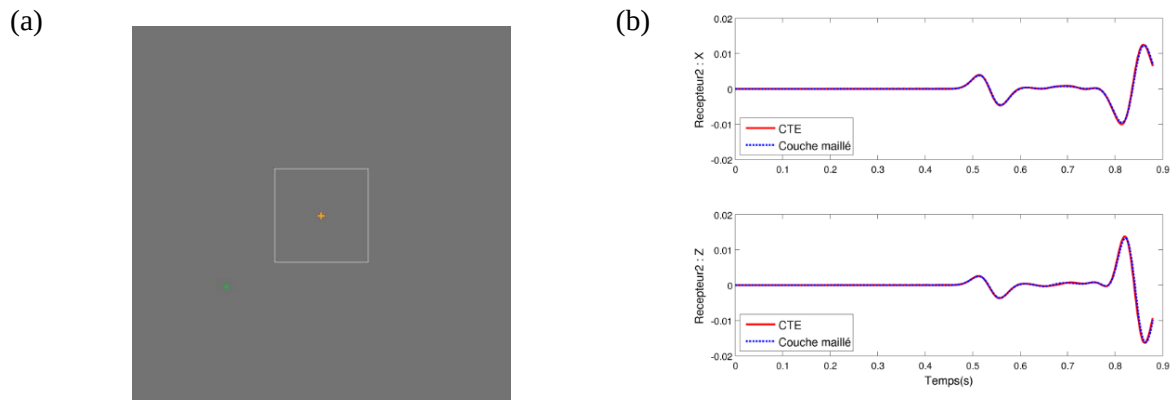


Figure 3. 27. Exemple d'un cas avec une couche ITZ située autour d'un carré. (a) Géométrie considérée (b) Comparaison des déplacements verticaux en un récepteur donné (représenté par un carré vert) entre les simulations faites avec CTE et celles faites avec la couche maillée.

Une géométrie sous forme de carré de $4000 \text{ m} \times 4000 \text{ m}$ est séparée en deux parties par une couche de 10 m autour d'un carré plus petit de taille $980 \text{ m} \times 980 \text{ m}$ (Figure 3. 27(a)). Les propriétés des matériaux, la taille de maillage et la source sont identiques au premier cas de la section précédente. Nous réalisons une simulation avec CTE et une simulation classique avec la couche maillée. Nous comparons sur la Figure 3. 27(b) les déplacements au récepteur indiqué

sur la Figure 3. 27(a) (en vert). Des instantanés de propagation du déplacement u_z aux temps $t = 0,22$ s, $0,44$ s, $0,66$ s et $0,88$ s sont également donnés sur la Figure 3. 28. Dans ce cas simple, nous constatons peu d'impact des calculs imprécis au coin de couche sur les résultats, et cela montre le potentiel de cette méthode pour simuler l'ITZ. Mais dans le futur une comparaison dans un cas avec plusieurs couches bornées serait nécessaire afin de vérifier si l'impact et l'erreur se cumulent avec le nombre des couches.

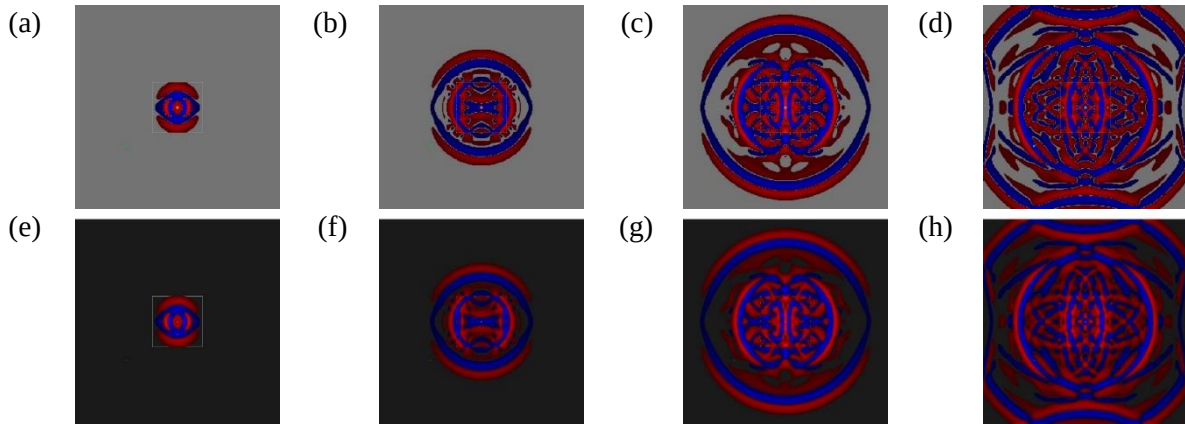


Figure 3. 28. Comparaisons d'instantanés de propagation du champ de déplacement u_z avec CTE et une couche non maillée (en haut, (a), (b), (c) et (d)) et avec une couche entièrement maillée (en bas, (e), (f), (g) et (h)) pour $t = 0,22$ s, $0,44$ s, $0,66$ s et $0,88$ s, dans le cas de deux matériaux différents pour le milieu et pour la couche.

3.3 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons présenté des travaux pour la prise en compte de la dispersion dans le mortier et l'*interfacial transition zone* (ITZ) entre les granulats et le mortier afin de compléter le modèle numérique de la propagation des ondes dans le béton.

Nous avons tout d'abord proposé d'utiliser la loi de comportement viscoélastique pour décrire la dispersion dans le mortier et nous avons choisi le modèle viscoélastique à facteur de qualité Q constant avec la fréquence, qui est l'un des plus utilisés dans la littérature. Dans un cas d'un milieu homogène viscoélastique, nous avons validé l'implantation du modèle et montré la capacité de notre logiciel SPECFEM2D à caractériser numériquement le modèle à Q constant. Afin d'obtenir les valeurs des paramètres d'entrée, c'est-à-dire les facteurs de qualité Q_ε et Q_μ du mortier à utiliser dans nos simulations numériques, nous avons fabriqué des éprouvettes en mortier de deux formulations différentes et réalisé des mesures sur ces éprouvettes. Par ajustement de courbes par moindres carrés, nous avons estimé, entre 181 kHz et 1260 kHz, la valeur de Q_ε , qui correspond aux ondes longitudinales, comme étant de l'ordre de 20~40, et la valeur de Q_μ , qui correspond aux ondes transversales, comme étant de l'ordre de 30~60. Les gammes de valeur proviennent du fait que l'atténuation dans le mortier n'est pas parfaitement linéaire.

Ensuite, nous avons rappelé la méthode des conditions de transmission équivalentes (CTE) développée dans la thèse de Burel [137] et qui permet de construire une solution approchée pour un problème de couche mince rectiligne supposée homogène isotrope élastique sans avoir à explicitement mailler la couche, et qui est donc une solution potentielle permettant de simuler une *interfacial transition zone* (ITZ) très fine entre les granulats et le mortier sans

avoir à fortement pénaliser le coût de calcul. Nous avons implanté cette méthode avec des CTE dans notre logiciel SPECFEM2D et validé l'implantation dans le cas d'une couche non bornée, par comparaison des résultats avec des simulations classiques (mais beaucoup plus chères) dans lesquelles la couche est maillée explicitement. Pour finir, nous avons simulé un cas avec une couche ITZ située autour d'un carré. Par comparaison avec la solution exacte nous avons observé un bon comportement et une bonne qualité de solution, ce qui nous a permis de montrer le potentiel de la méthode de CTE pour simuler l'ITZ du béton. Cependant, dans des travaux futurs il sera nécessaire dans un premier temps de vérifier l'erreur de calcul de la solution et plus spécifiquement dans le coin des couches dans les cas présentant de nombreuses couches. Dans un second temps, il faudra implémenter des interfaces ITZ de forme courbe, afin de pouvoir simuler des granulats de forme réaliste. Cette approche originale permettra de simuler un vieillissement du béton à l'échelle granulaire.