Approche non-intrusive pour la résolution du problème adjoint

Nous mettons en place dans ce chapitre une procédure de résolution du problème adjoint restant non-intrusive dans le but d'avoir une méthode d'estimation d'erreur locale à la fois précise et pratique.

Sommaire

1 Intérêts d'une méthode non-intrusive 110

2 Nouvelle résolution du problème adjoint 111

2.1 Mise en place de la technique « handbook » 111

2.2 Calcul des fonctions d'enrichissement 113

2.3 Écriture du problème à résoudre 114

3 Obtention des bornes associées 115

3.1 Construction d'une solution admissible 115

3.2 Calcul des bornes 116

4 Résultats numériques 117

4.1 Exemple 1D 117

4.2 Exemple 2D 121

5 Bilan 127

1 Intérêts d'une méthode non-intrusive

Les différents exemples donnés dans les Chapitres 3 et 4 ont montré que les bornes d'erreur sur une quantité locale I pouvaient être rendues de très bonne qualité si le problème adjoint était correctement résolu. Cette résolution n'est pas si évidente à mener en 2D/3D car le chargement localisé du problème adjoint conduit généralement à une solution présentant de forts gradients en espace et en temps.

Une première façon de remédier à ce problème a été étudiée précédemment ; elle consiste à raffiner localement (i.e. dans la zone de forts gradients) le maillage spatio-temporel utilisé. Cependant cette méthode est intrusive car elle nécessite un remaillage et le calcul de nouveaux opérateurs pour la résolution.

Nous développons ici une technique non-intrusive pour la résolution du problème adjoint [Chamoin et Ladevèze 2007]. Nous entendons par « non-intrusive » que cette résolution va s'appuyer sur le même maillage spatio-temporel $\mathcal{M}_h \times \mathcal{M}_{\Delta t}$ que celui utilisé pour la résolution approchée du problème de référence ; ainsi, les mêmes opérateurs pourront être utilisés. Cet objectif est motivé par le fait que le problème adjoint est semblable au problème de référence dans le sens des temps rétrogrades (cf. Section 1.2 du Chapitre 3). Les seules données qui sont modifiées entre les résolutions des deux problèmes concernent le chargement.

L'idée générale suivie pour mettre en place une méthode efficace et non-intrusive de résolution du problème adjoint consiste à introduire la partie à forts gradients de la solution à l'aide d'un enrichissement de l'espace d'approximation classique éléments finis. De nombreuses méthodes d'enrichissement existent. Citons par exemple :

- les méthodes sans maillage (« Element Free Galerkin » (Belytschko), « hp-clouds method » (Duarte), « RKPM » (Liu)) dont une revue est donnée dans [Huerta *et al.* 2004]. Les problèmes associés à ces méthodes sont essentiellement liés à l'intégration et aux conditions limites, imposées par des multiplicateurs de Lagrange.
- les méthodes de Trefftz : pour les composites par exemple, on introduit des fonctions spéciales de problèmes locaux qui reflètent la solution. L'inconvénient est qu'on assure la continuité par des multiplicateurs de Lagrange qui apportent des problèmes de stabilité.

La méthode d'enrichissement que nous allons utiliser ici s'inspire de la « Generalized Finite Element Method (GFEM) » initiée par Strouboulis [Strouboulis *et al.* 2000a]. Dans cette méthode, on introduit des fonctions d'enrichissement dans la base de fonctions d'approximation, à l'aide d'une partition de l'unité associée généralement aux fonctions de forme éléments finis [Melenk et Babuška 1997] ; ceci permet de garder une solution conforme en déplacement. Dans la GFEM, les fonctions d'enrichissement sont construites numériquement en résolvant à l'échelle fine un panel de problèmes locaux ; cette technique fournit une bibliothèque de fonctions « handbook » permettant de traiter des détails structuraux comme les inclusions ou les trous.

Une méthode similaire à la GFEM a été introduite dans [Moës *et al.* 1999] : c'est

la « eXtended Finite Element Method (XFEM) ». Là encore, des fonctions d'enrichissement sont introduites au travers de la PUM mais ces fonctions, données sous une forme analytique [Leguillon et Sanchez-Palencia 1987], sont plus dédiées à la représentation de singularités géométriques telles que les discontinuités ou les pointes de fissures.

La mise en œuvre de la méthode d'enrichissement pour la résolution du problème adjoint est détaillée dans la suite de ce chapitre.

2 Nouvelle résolution du problème adjoint

2.1 Mise en place de la technique « handbook »

On prend comme partition d'unité les fonctions ϕ_i correspondant aux fonctions de forme éléments finis classiques associées aux nœuds i du maillage spatial $\mathcal{M}_h$ $\big(i \in \{1, nno\}$ avec nno : nombre total de nœuds du maillage $\mathcal{M}_h\big)$. Ces fonctions ϕ_i, qui ont pour support les patchs Ω_i, sont telles que :

$$\phi_i = \delta_{ij} \quad \text{au nœud } j \ \big(i, j \in \{1, nno\}\big)$$
$$\sum_{i=1}^{nno} \phi_i = 1$$

On montre alors [Strouboulis *et al.* 2000a], en notant $||\bullet||_{L^2(A)}$ la norme L^2 sur l'espace A, que si une fonction $\underline{u}$ peut être approchée sur chaque patch Ω_i par une autre fonction $\underline{v}_i$ telle que :

$$||\underline{u} - \underline{v}_i||_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon_{1_i} \ ; \quad ||\nabla \underline{u} - \nabla \underline{v}_i||_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon_{2_i}$$

alors la fonction $\underline{u}^h$ définie par :

$$\underline{u}^h(x) = \sum_{i=1}^{nno} \phi_i(x) \underline{v}_i(x)$$

satisfait :

$$||\underline{u} - \underline{u}_h||_{L^2(\Omega)} \leq C_0 \big(\sum_{i=1}^{nno} \varepsilon_{1_i}^2 \big)^{\frac{1}{2}}$$
$$||\nabla \underline{u} - \nabla \underline{u}_h||_{L^2(\Omega)} \leq \Big[\sum_{i=1}^{nno} \big(\frac{C_1}{|\Omega_i|} \big)^2 \varepsilon_{1_i}^2 + C_2^2 \varepsilon_{2_i}^2 \Big]^{\frac{1}{2}}$$

Dans notre cas, on ne va apporter l'enrichissement $\underline{v}_i$ par la PUM que dans les régions où cela est nécessaire i.e. dans un voisinage de la zone de chargement du problème adjoint, l'objectif étant de bien capter la partie à forts gradients de la solution. La PUM n'est donc appliquée que sur un ensemble de nœuds du maillage ; on note ces nœuds n_j^{PUM} $\big(j \in \{1, nno^{PUM}\}$ avec nno^{PUM} : nombre total de nœuds concernés par l'enrichissement avec la PUM$\big)$.

On note de plus Ω^{PUM} la partie de Ω impliquée par l'enrichissement par la PUM. Ω^{PUM} est séparée en deux zones (Figure 5.1) :

- une zone Ω_1^{PUM} telle que :

$$\sum_{j=1}^{nno^{PUM}} \phi_{n_j^{PUM}}(M) = 1 \quad \forall M \in \Omega_1^{PUM}$$

contenant en pratique la partie de la structure sur laquelle le chargement du problème adjoint est appliqué ;

- une zone Ω_2^{PUM} qui est la partie complémentaire de Ω_1^{PUM} dans Ω^{PUM} :

$$\Omega_1^{PUM} \cup \Omega_2^{PUM} = \Omega^{PUM}$$
$$\Omega_1^{PUM} \cap \Omega_2^{PUM} = \varnothing$$

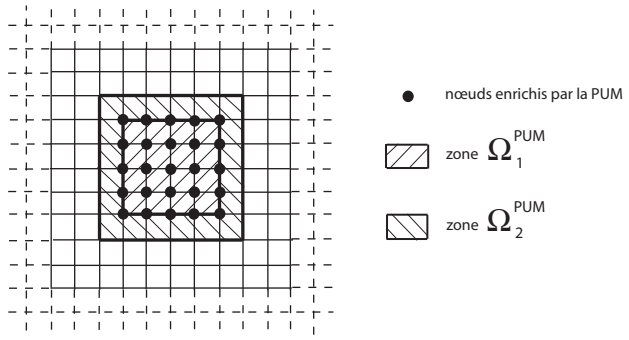

Figure 5.1: Définition des zones introduites avec la partition d'unité

En notant $(\tilde{e}^{hand}, \tilde{s}^{hand})$ la solution d'enrichissement « handbook » (son calcul est détaillé dans la Section 2.2), l'approximation complète du champ de déplacement relatif au problème adjoint s'écrit alors :

$$\underline{\tilde{u}} = \underline{\tilde{u}}^r + \sum_{j=1}^{nno^{PUM}} \phi_{n_j^{PUM}} \underline{\tilde{u}}^{hand} \tag{5.1}$$

où $\underline{\tilde{u}}^r$ est un champ de déplacement résiduel à chercher. La solution approchée du problème adjoint est donc constituée de deux parties :

- une solution « handbook » qui représente localement une solution « quasi-exacte » du chargement du problème adjoint. Cependant, cette solution ne vérifie généralement pas les conditions limites du problème ;

- une solution résiduelle à calculer qui assure la vérification de toutes les conditions limites du problème. Cette solution est en pratique très lisse donc peut être convenablement calculée avec la MEF classique.

Remarque : *Les singularités rencontrées dans la solution du problème adjoint sont dues au chargement et non pas à la géométrie. Leur intensité étant parfaitement connue, on n'a pas besoin d'introduire des degrés de liberté supplémentaires pour l'enrichissement. On évite ainsi les problèmes de dépendance des fonctions de base qui sont un souci majeur dans les méthodes GFEM/XFEM.*

2.2 Calcul des fonctions d'enrichissement

Le chargement du problème adjoint étant parfaitement connu, on calcule une solution précise représentant les singularités dues à ce chargement. Deux options sont alors possibles :

- dans de nombreux cas, on résout des problèmes locaux sur un domaine fini avec pour conditions limites celles venant d'un calcul sur le maillage grossier $\mathcal{M}_h$. Cette démarche nécessite un premier calcul avec le maillage grossier ; ce n'est pas ce que nous souhaitons.
- on peut aussi résoudre des problèmes en milieu infini i.e. numériquement sur un domaine suffisamment grand pour que les conditions limites n'influent pas sur la solution d'enrichissement ; c'est cette option que nous choisissons.

D'autre part, on se ramène par la transformée de Laplace à la résolution numérique d'un problème d'élasticité en milieu infini. La fonction « handbook » introduite est donc analytique en temps et numérique en espace.

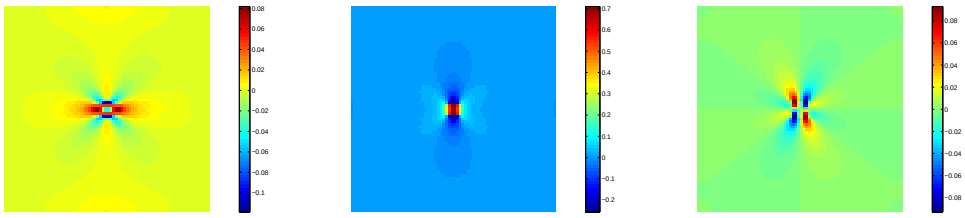

Figure 5.2: Répartition spatiale du champs de contrainte « handbook » correspondant à une précontrainte locale $\tilde{\sigma}_\Sigma$ dans un milieu infini : $\tilde{\sigma}_{xx}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}^{hand}$ (droite)

Notons qu'on peut chercher les fonctions « handbook » dans un milieu semi-infini pour mieux représenter la réalité, dans le cas où la zone d'intérêt ω est proche d'un bord libre

par exemple.

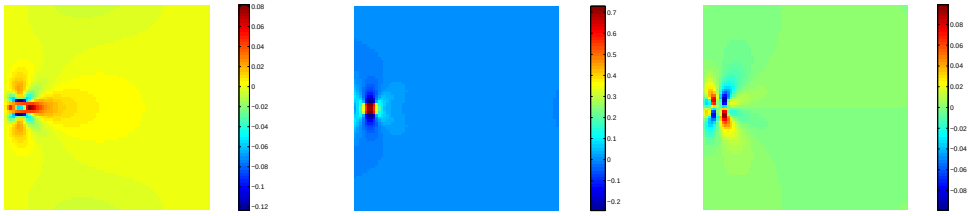

Figure 5.3: Répartition spatiale du champs de contrainte « handbook » correspondant à une précontrainte locale $\tilde{\sigma}_\Sigma$ dans un milieu semi-infini avec condition de bord libre : $\tilde{\sigma}_{xx}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}^{hand}$ (droite)

2.3 Écriture du problème à résoudre

D'après (5.1), les variables généralisées s'écrivent maintenant :

$$\tilde{e} = \tilde{e}^r + \tilde{e}_{PUM}^{hand} \quad ; \quad \tilde{s} = \tilde{s}^r + \tilde{s}_{PUM}^{hand} \tag{5.2}$$

et le problème adjoint consiste alors à trouver une solution résiduelle $(\tilde{e}^r, \tilde{s}^r)$ qui vérifie :

- les équations de liaison :

$$\underline{\tilde{u}}^r \in \mathcal{U}^{[0,T]} \; ; \quad \underline{\tilde{u}}^r_{|\partial_1\Omega} = -\sum_{j=1}^{nno^{PUM}} \phi_{n_j^{PUM}} \underline{\tilde{u}}^{hand}_{|\partial_1\Omega} \quad \forall t \in [0,T] \; ; \quad \tilde{e}^r = \tilde{e}^{r,e} + \tilde{e}^{r,p} \tag{5.3}$$

- les équations d'équilibre :

$$\tilde{\sigma}^r \in \mathcal{S}^{[0,T]} \; ; \quad \int_\Omega \mathrm{Tr}\big[\tilde{\sigma}^r \epsilon(\underline{u}^*)\big] \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \mathrm{Tr}\big[(\tilde{\sigma}_\Sigma - \tilde{\sigma}_{PUM}^{hand})\epsilon(\underline{u}^*)\big] \mathrm{d}\Omega \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \forall t \in [0,T] \tag{5.4}$$

- les relations de comportement :

$$\tilde{e}^{r,e} = \boldsymbol{\Lambda}(\tilde{s}^r) \; ; \quad \sum_{i=1}^{n} \tilde{\sigma}_i^r = \tilde{\sigma}^r \quad \text{(lois d'état)} \tag{5.5}$$

$$\dot{\tilde{e}}^{r,p} = -\boldsymbol{B}(\tilde{s}^r) \quad \text{(équations d'évolution)} \tag{5.6}$$

- les conditions finales :

$$\tilde{e}^{r,p}_{|t=T} = 0 \tag{5.7}$$

Remarque 1 : *En pratique, la condition limite dans* (5.3) *se réduit à :*

$$\underline{\tilde{u}}^r_{|\partial_1\Omega} = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

car dans le cas où $\exists j \in \{1, nno^{PUM}\}$ *tel que* $\phi_{n_j^{PUM}|\partial_1\Omega} \neq 0$ *(i.e. lorsque le chargement est proche de la frontière* $\partial_1\Omega$*), on peut construire la solution « handbook » de façon à assurer* $\underline{\tilde{u}}^{hand}_{|\partial_1\Omega} = 0$.

Remarque 2 : *La solution résiduelle* $(\tilde{e}^r, \tilde{s}^r)$ *est régulière dans chaque élément de* $\mathcal{M}_h$ *et ne présente que de possibles discontinuités sur la frontière de certains éléments. En effet, vu que* $\tilde{\sigma}^{hand}_{PUM} = \tilde{\sigma}^{hand}$ *sur* Ω_1^{PUM} *et que* $\tilde{\sigma}^{hand}$ *est en équilibre avec* $\tilde{\sigma}_\Sigma$ *dans un milieu (semi-)infini, le second membre de l'équation d'équilibre se réécrit :*

$$-\int_{\partial\Omega_1^{PUM}} \tilde{\sigma}^{hand} \underline{n}_{12}.\underline{u}^* \, d\Omega - \int_{\Omega_2^{PUM}} Tr\big[\tilde{\sigma}^{hand}_{PUM} \epsilon(\underline{u}^*)\big] \, d\Omega \tag{5.8}$$

avec $\underline{n}_{12}$ *: normale sortante de* Ω_1^{PUM}*. Ce second membre ne contient donc plus de termes singuliers.*

Grâce à son caractère très régulier, une solution approchée $(\tilde{e}^r_h, \tilde{s}^r_h)$ de la partie résiduelle $(\tilde{e}^r, \tilde{s}^r)$ peut être correctement obtenue avec le même maillage que celui utilisé pour résoudre le problème de référence. On emploie de ce fait les mêmes opérateurs (notamment la matrice de rigidité factorisée) entre les deux résolutions. Seul le nouveau chargement (5.8) a besoin d'être introduit pour la résolution du problème adjoint.

En pratique, les résolutions du problème de référence et adjoint sont réalisées en même temps.

On obtient par conséquent la résolution non-intrusive du problème adjoint souhaitée. Celle-ci donne la solution approchée $(\tilde{e}_h, \tilde{s}_h)$, constituée d'une solution d'enrichissement $(\tilde{e}^{hand}_{PUM}, \tilde{s}^{hand}_{PUM})$ prédéfinie et d'une solution résiduelle $(\tilde{e}^r_h, \tilde{s}^r_h)$ calculée par éléments finis :

$$\tilde{e}_h = \tilde{e}^r_h + \tilde{e}^{hand}_{PUM}$$
$$\tilde{s}_h = \tilde{s}^r_h + \tilde{s}^{hand}_{PUM}$$

3 Obtention des bornes associées

3.1 Construction d'une solution admissible

La construction d'une solution admissible $(\hat{\tilde{e}}_h, \hat{\tilde{s}}_h)$, nécessaire pour le calcul de l'erreur en dissipation du problème adjoint, est classique et utilise les mêmes techniques que celles décrites dans le Chapitre 2. En pratique, on doit calculer une solution résiduelle admissible $(\hat{\tilde{e}}^r_h, \hat{\tilde{s}}^r_h)$ vérifiant les équations (5.3), (5.4), (5.5) et (5.7).

On en déduit alors :

$$\hat{\tilde{e}}_h = \hat{\tilde{e}}^r_h + \tilde{e}^{hand}_{PUM}$$
$$\hat{\tilde{s}}_h = \hat{\tilde{s}}^r_h + \tilde{s}^{hand}_{PUM}$$

Le seul point technique est la construction du champ $\hat{\tilde{\sigma}}_h^r$. Il doit satisfaire l'équation :

$$\int_\Omega \mathrm{Tr}\big[\hat{\tilde{\sigma}}_h^r \epsilon(\underline{u}^*)\big]\mathrm{d}\Omega = -\int_{\partial\Omega_1^{PUM}} \tilde{\sigma}^{hand}\underline{n}_{12}.\underline{u}^*\mathrm{d}\Omega$$
$$-\int_{\Omega_2^{PUM}} \mathrm{Tr}\big[\tilde{\sigma}_{PUM}^{hand}\epsilon(\underline{u}^*)\big]\mathrm{d}\Omega \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \forall t \in [0,T]$$

Cette construction reprend les procédures classiques données dans [Ladevèze et Pelle 2004] et s'appuie sur les propriétés de $\tilde{\sigma}_h^r$. La seule petite variante concerne le calcul des densités $\hat{\underline{F}}^r$ sur $\partial\Omega_1^{PUM}$. En effet, cette frontière est soumise à un chargement linéique de la forme $\underline{F} = -\tilde{\sigma}^{hand}\underline{n}_{12}$ qui n'est pas linéaire en espace. On sépare alors le chargement sur $\partial\Omega_1^{PUM}$ en une partie linéaire $\underline{F}_0$ et une partie complémentaire $\underline{F}^*$ à résultante et moment nuls comme l'illustre la Figure 5.4.

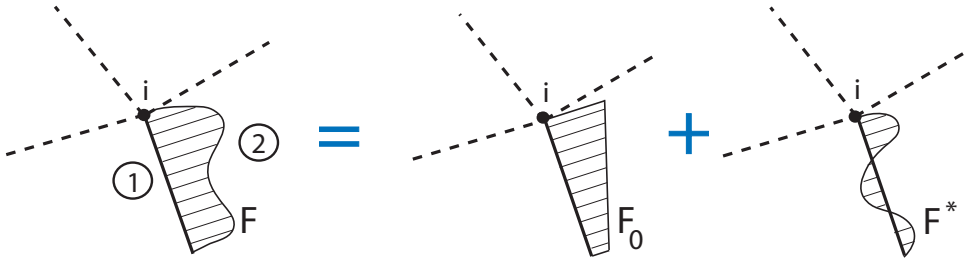

Figure 5.4: Séparation du chargement non linéaire sur $\partial\Omega_1^{PUM}$ en deux parties

On calcule dès lors de façon classique, sur le bord de chaque élément, des densités $\hat{\underline{F}}^r$ équilibrées et linéaires en ne faisant intervenir que la partie $\underline{F}_0$ du chargement linéique $\underline{F}$. En d'autres termes, on écrit dans la procédure générale, au niveau de chaque nœud i inclus dans $\partial\Omega_1^{PUM}$, une relation de la forme :

$$\underline{b}_1(i) - \underline{b}_2(i) = \underline{Q}_{E_1}(i) - \int_{\Gamma_{E_2}} \underline{F}_0\phi_i\mathrm{d}\Gamma \quad \big(\text{cf. } (1.20)\big)$$

La partie non linéaire de $\underline{F}$, qui ne modifie en rien l'équilibre, est rajoutée à la fin aux densités équilibrées $\hat{\underline{F}}^r$.

3.2 Calcul des bornes

Les bornes d'encadrement de I_{ex} restent les mêmes que celles données dans (4.5) :

$$\xi_{inf} = I_h + I_{hh} + F_1(\tilde{x}_h, \Delta_h) - 2\big[\frac{1}{2}E_{diss}^2(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h) + F_0(\Delta_h)\big]^{\frac{1}{2}}.\big[F_2(\tilde{x}_h)\big]^{\frac{1}{2}}$$
$$\xi_{sup} = I_h + I_{hh} + F_1(\tilde{x}_h, \Delta_h) + 2\big[\frac{1}{2}E_{diss}^2(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h) + F_0(\Delta_h)\big]^{\frac{1}{2}}.\big[F_2(\tilde{x}_h)\big]^{\frac{1}{2}}$$

avec :

$$
\begin{aligned}
&I_{hh} = \langle\langle \dot{\hat{e}}_h - \boldsymbol{\Lambda}(\dot{s}_h) - \boldsymbol{B}(s_h), \hat{\tilde{s}}_h - \tilde{s}_\Sigma \rangle\rangle + \langle\langle s_h - \hat{s}_h^m, \dot{\hat{\tilde{e}}}_h^p + \boldsymbol{B}(\hat{\tilde{s}}_h) \rangle\rangle + \langle\langle \hat{s}_h - s_h, \dot{\hat{\tilde{e}}}_h \rangle\rangle \\
&\tilde{x}_h = -\boldsymbol{B}(\hat{\tilde{s}}_h) - \dot{\hat{\tilde{e}}}_h^p \\
&\Delta_h = \hat{s}_h - \hat{s}_h^m \\
&F_0, F_1, F_2 : \text{fonctionnelles connues analytiquement}
\end{aligned}
$$

Nous pouvons tout d'abord remarquer qu'il n'y a pas d'erreur de comportement au niveau des termes d'enrichissement $\tilde{e}_{PUM}^{hand}$ et $\tilde{s}_{PUM}^{hand}$. On a en particulier :

$$\dot{\tilde{e}}_{PUM}^{hand,p} = -\boldsymbol{B}(\tilde{s}_{PUM}^{hand})$$

et par conséquent :

$$\boldsymbol{B}(\hat{\tilde{s}}_h) + \dot{\hat{\tilde{e}}}_h^p = \boldsymbol{B}(\hat{\tilde{s}}_h^r) + \dot{\hat{\tilde{e}}}_h^{r,p}$$

De ce fait :

$$\tilde{x}_h = -\boldsymbol{B}(\hat{\tilde{s}}_h^r) - \dot{\hat{\tilde{e}}}_h^{r,p}$$

ce qui montre que le calcul de l'erreur en dissipation du problème adjoint ne porte que sur les termes résiduels réguliers calculés par la MEF.

L'intégration des termes présents dans l'expression de I_{hh} et faisant intervenir explicitement la partie singulière des fonctions d'enrichissement est faite par sur-discrétisation du maillage. En pratique, on prend en espace la discrétisation utilisée pour le calcul de $(\tilde{e}_{PUM}^{hand}, \tilde{s}_{PUM}^{hand})$, ce qui permet d'avoir une intégration spatiale exacte.

4 Résultats numériques

4.1 Exemple 1D

On montre dans cet exemple simple les avantages d'un enrichissement local. On considère le problème de la Figure 5.5 dans lequel on souhaite estimer l'erreur sur la quantité locale :

$$I = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega \epsilon_{|T}^p \mathrm{d}x$$

où ω est une région très localisée correspondant au deuxième tiers de l'élément 3.

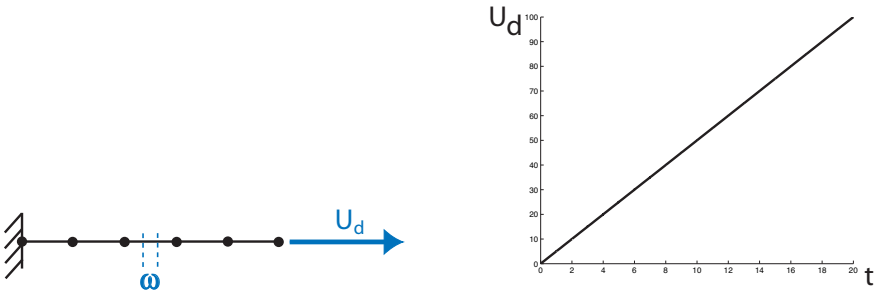

Figure 5.5: Structure considérée, avec zone locale ω (gauche) et évolution du chargement (droite)

Le chargement du problème adjoint consiste en un pré-effort $\tilde{N}_\Sigma$ dans la zone ω comme l'illustre la Figure 5.6.

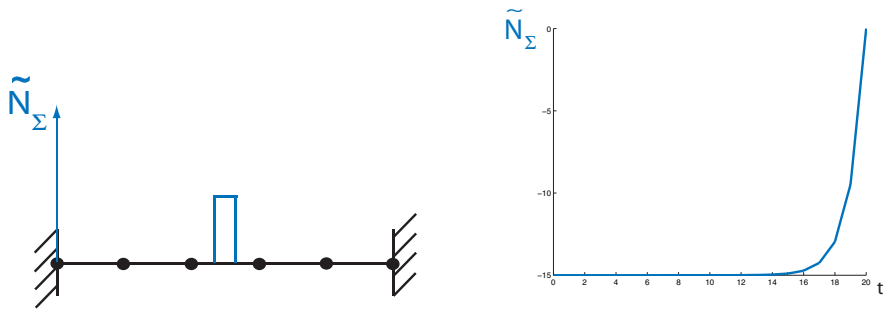

Figure 5.6: Distribution spatiale (gauche) et temporelle (droite) du chargement du problème adjoint

On voit que pour bien capter ce chargement avec des fonctions éléments finis classiques, un raffinement du maillage spatio-temporel est nécessaire. Dans notre méthode non-intrusive, on introduit au contraire l'enrichissement donné sur la Figure 5.7 et correspondant à la solution du chargement $\tilde{N}_\Sigma$ appliqué sur une poutre infinie.

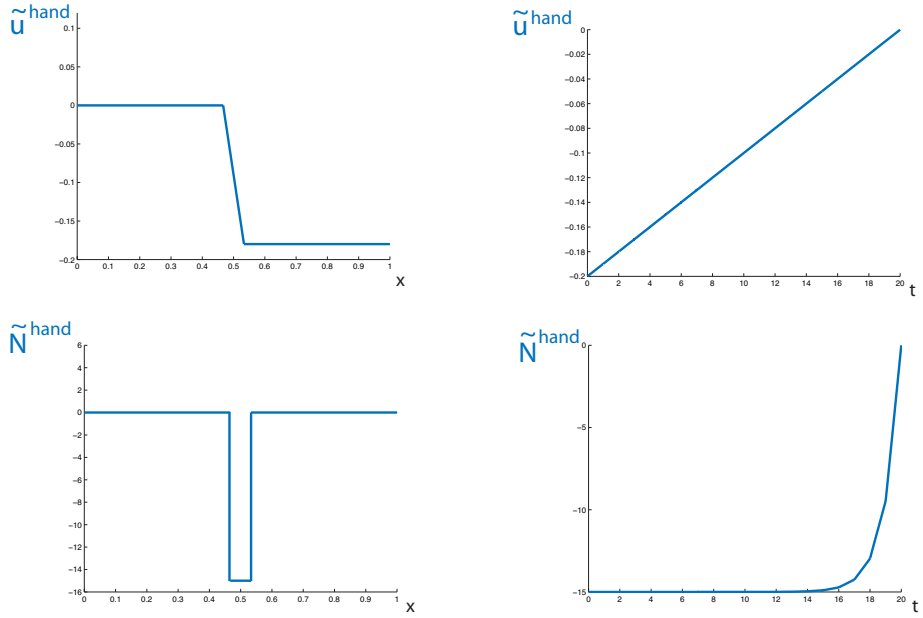

Figure 5.7: Fonctions d'enrichissement introduites en espace et en temps : déplacement $\tilde{u}^{hand}$ (haut) et effort $\tilde{N}^{hand}$ (bas)

L'enrichissement est apporté au travers de la PUM qu'on applique sur les nœuds 3 et 4 du maillage (Figure 5.8).

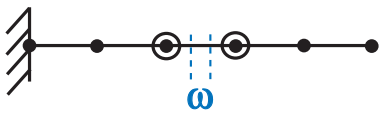

Figure 5.8: Nœuds enrichis par la PUM dans la méthode non-intrusive

On obtient alors les champs donnés sur les Figures 5.9 et 5.10, où seules les évolutions spatiales sont représentées.

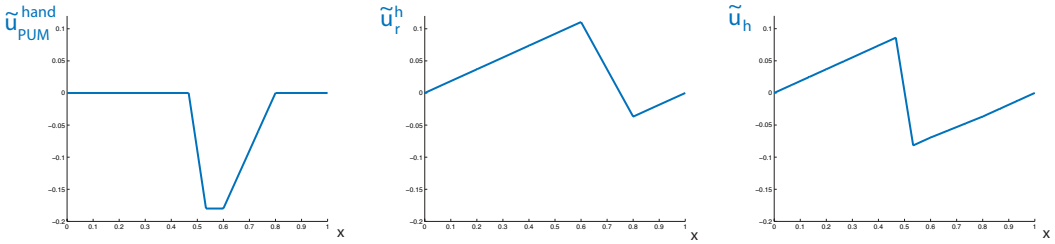

Figure 5.9: Répartition spatiale des champs $\tilde{u}^{hand}_{PUM}$ (gauche), $\tilde{u}^{r}_{h}$ (centre) et $\tilde{u}_{h}$ (droite)

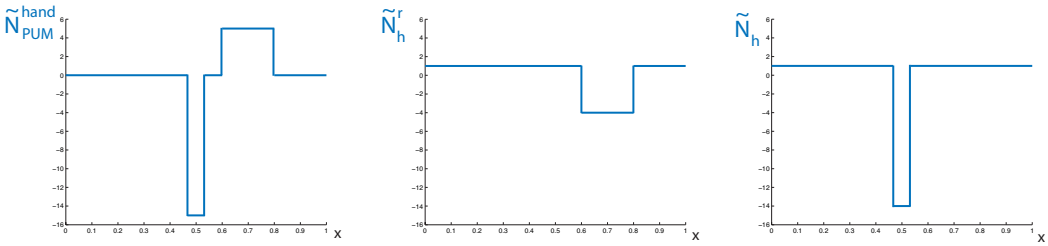

Figure 5.10: Répartition spatiale des champs $\tilde{N}^{hand}_{PUM}$ (gauche), $\tilde{N}^{r}_{h}$ (centre) et $\tilde{N}_{h}$ (droite)

L'erreur en dissipation du problème adjoint, qui ne porte que sur les champs résiduels, est alors très faible ; la Figure 5.11 montre les distributions spatiale et temporelle de celle-ci.

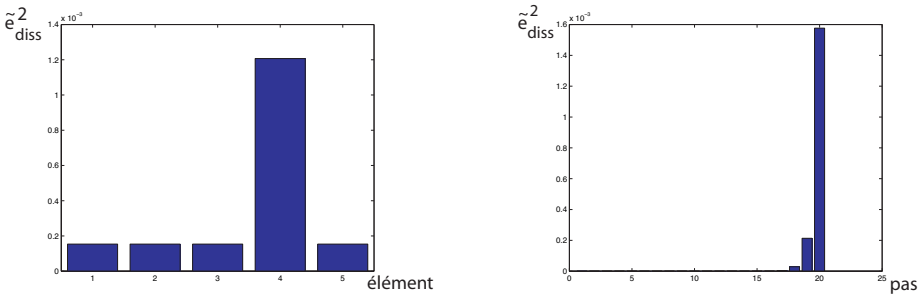

Figure 5.11: Distributions spatiale sur chaque élément (gauche) et temporelle à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation du problème adjoint

Cette erreur est principalement située dans l'élément 4 qui est l'élément de raccordement du déplacement par la PUM.

Finalement, on trouve :

$$\begin{aligned} I_h &= 92,500 \\ \xi_{inf} &= 94,579 \\ \xi_{sup} &= 94,602 \end{aligned}$$

alors que la valeur de I_{ex}, donnée analytiquement, est $94,592$. On a donc un encadrement d'erreur extrêmement précis sans procéder à aucun raffinement du maillage spatio-temporel.

4.2 Exemple 2D

Nous considérons maintenant le cas-test du portique donné sur la Figure 4.9. La quantité d'intérêt choisie est :

$$I = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \dot{\epsilon}^p_{1_{yy}|T} \mathrm{d}\omega$$

où ω correspond au quart supérieur droit de l'élément situé dans l'angle de la structure (Figure 5.12).

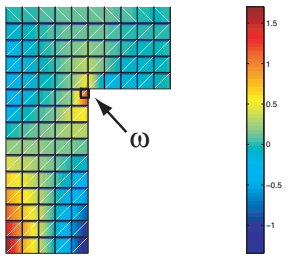

Figure 5.12: Carte du champ $\dot{\epsilon}^p_{1h_{yy}}$ à l'instant final T et zone ω d'étude

La solution quasi-exacte du problème adjoint correspondant, tracée sur les Figures 5.13 et 5.14, présente de forts gradients en espace et en temps, autour de la zone d'estimation de I. On voit donc qu'un fort raffinement est nécessaire si on veut calculer une solution approchée de ce problème suffisamment précise pour obtenir un encadrement d'erreur locale pertinent.

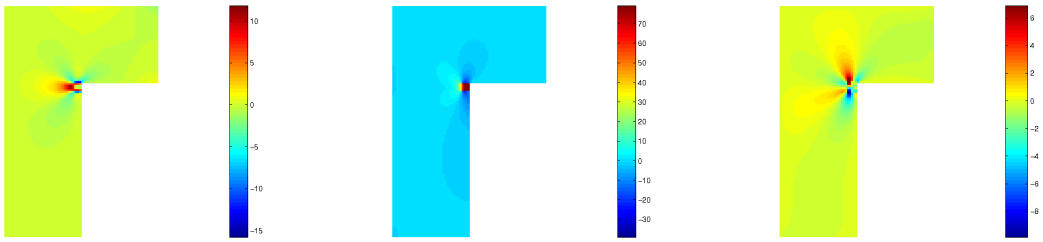

Figure 5.13: Évolution spatiale de la solution quasi-exacte du problème adjoint à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{xx}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}$ (droite)

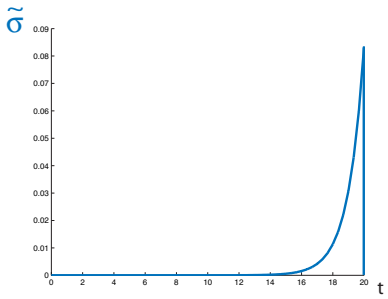

Figure 5.14: Allure de l'évolution temporelle de la solution quasi-exacte du problème adjoint

On introduit alors la fonction d'enrichissement associée au chargement du problème adjoint (l'évolution spatiale est donnée sur la Figure 5.15 et l'évolution temporelle est semblable à celle donnée sur la Figure 5.14). Cette fonction prend en compte la géométrie locale (coin) et les conditions limites proches de la zone ω (bords libres). On peut observer qu'elle est très localisée en espace (principe de Saint-Venant).

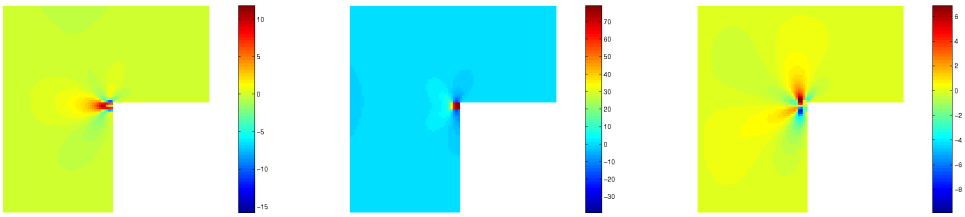

Figure 5.15: Évolution spatiale du champ de contrainte « handbook » $\tilde{\sigma}^{hand}$ utilisé : $\tilde{\sigma}^{hand}_{xx}$ (gauche), $\tilde{\sigma}^{hand}_{yy}$ (centre), $\tilde{\sigma}^{hand}_{xy}$ (droite)

On considère deux enrichissements différents (Figure 5.16) : le premier, noté « enrichissement 1 », est réalisé en appliquant la PUM sur les 4 nœuds de l'élément de coin tandis que le deuxième, noté « enrichissement 2 », considère une couche de nœuds supplémentaire.

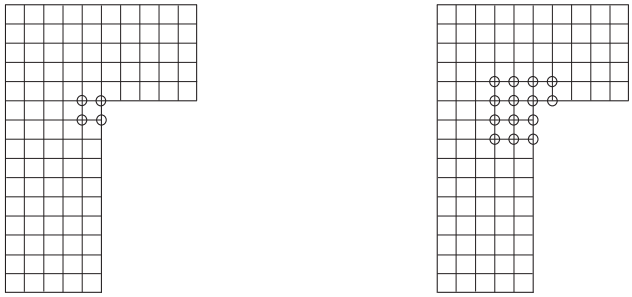

Figure 5.16: Nœuds enrichis par la PUM : enrichissement 1 (gauche), enrichissement 2 (droite)

Nous présentons les résultats obtenus avec ces deux enrichissements. Dans chaque cas, on montre l'évolution spatiale des champs de contrainte $\tilde{\sigma}^{hand}_{PUM}$, $\tilde{\sigma}^{r}_{h}$ et $\tilde{\sigma}_h = \tilde{\sigma}^{hand}_{PUM} + \tilde{\sigma}^{r}_{h}$ à l'instant $t = T$, l'erreur en dissipation relative au problème adjoint, avant de donner l'encadrement obtenu sur I à travers les bornes normées $\bar{\xi}_{inf}$ et $\bar{\xi}_{sup}$.

4.2.1 Résultats obtenus avec l'enrichissement 1

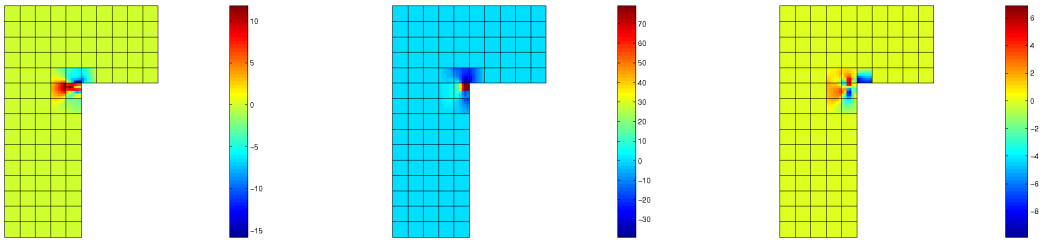

Figure 5.17: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}^{hand}_{PUM}$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}^{hand}_{PUM_{xx}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}^{hand}_{PUM_{yy}}$ (centre), $\tilde{\sigma}^{hand}_{PUM_{xy}}$ (droite)

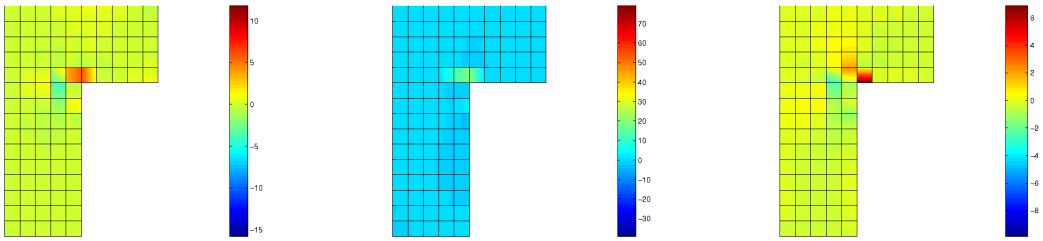

Figure 5.18: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}^{r}_{h}$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}^{r}_{h_{xx}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}^{r}_{h_{yy}}$ (centre), $\tilde{\sigma}^{r}_{h_{xy}}$ (droite)

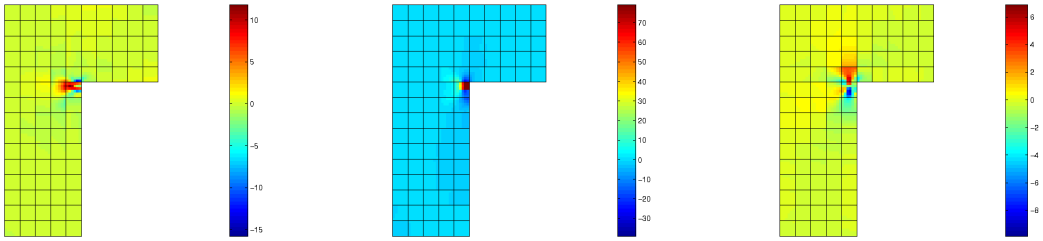

Figure 5.19: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_{h}$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}$ (droite)

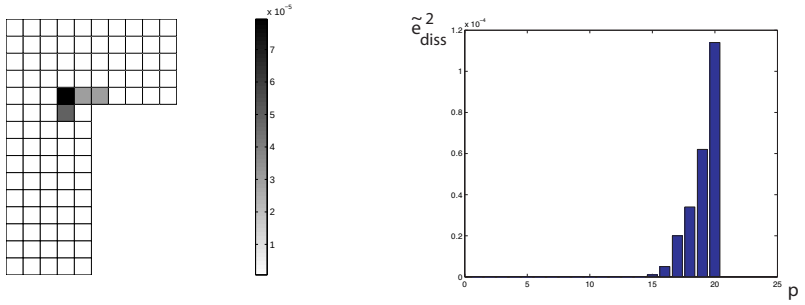

Figure 5.20: Distribution sur chaque élément (gauche) et à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation $\tilde{e}^2_{diss}$

On obtient alors l'encadrement :

$$\bar{\xi}_{inf} = 0,94 \qquad \bar{\xi}_{sup} = 1,07$$

4.2.2 Résultats obtenus avec l'enrichissement 2

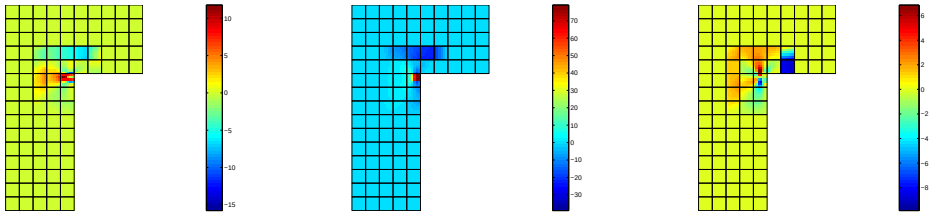

Figure 5.21: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}^{hand}_{PUM}$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}^{hand}_{PUM_{xx}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}^{hand}_{PUM_{yy}}$ (centre), $\tilde{\sigma}^{hand}_{PUM_{xy}}$ (droite)

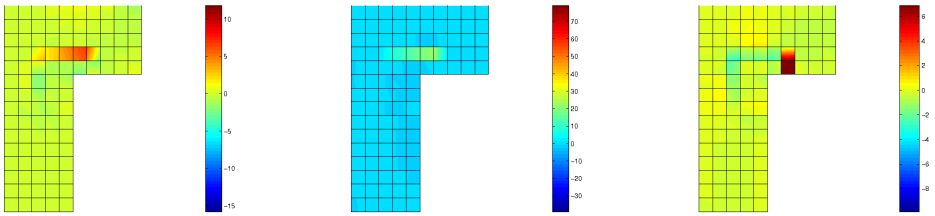

Figure 5.22: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}^r_h$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}^r_{h_{xx}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}^r_{h_{yy}}$ (centre), $\tilde{\sigma}^r_{h_{xy}}$ (droite)

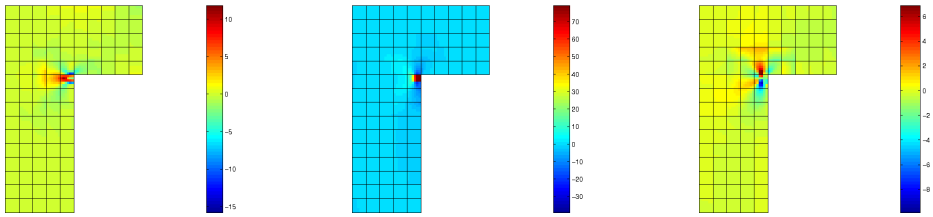

Figure 5.23: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}$ (droite)

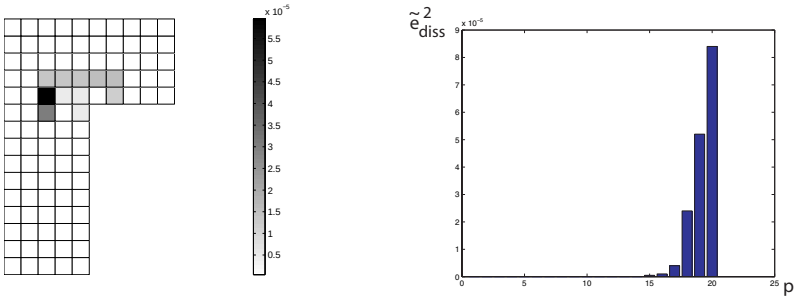

Figure 5.24: Distribution sur chaque élément (gauche) et à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation $\tilde{e}^2_{diss}$

On obtient alors l'encadrement :

$$\bar{\xi}_{inf} = 0,97 \qquad \bar{\xi}_{sup} = 1,02$$

Nous voyons donc que des bornes très précises peuvent être obtenues sur I_{ex}. Pour cela, seuls quelques nœuds situés dans la zone d'application du chargement singulier du problème adjoint ont besoin d'être enrichis. L'erreur en dissipation du problème adjoint est alors très faible.

Finissons par une remarque concernant les effets observés au niveau des éléments situés dans la zone Ω_2^{PUM} (Figures 5.17 et 5.21). Ces effets viennent du fait que le champ de déplacement $\underline{\tilde{u}}^{hand}_{PUM}$ est nul sur $\partial\Omega^{PUM}$ alors que le déplacement $\underline{\tilde{u}}^{hand}$ venant de la solution « handbook » est généralement non nul sur cette zone $\partial\Omega^{PUM}$ (Figure 5.25).

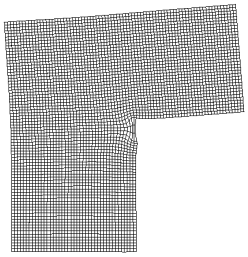

Figure 5.25: Maillage déformé de la solution $(\tilde{e}^{hand}, \tilde{s}^{hand})$

On observe alors de forts gradients de déplacement près de $\partial\Omega^{PUM}$ i.e. dans la zone de raccordement entre la solution enrichie et la solution éléments finis (Figure 5.26).

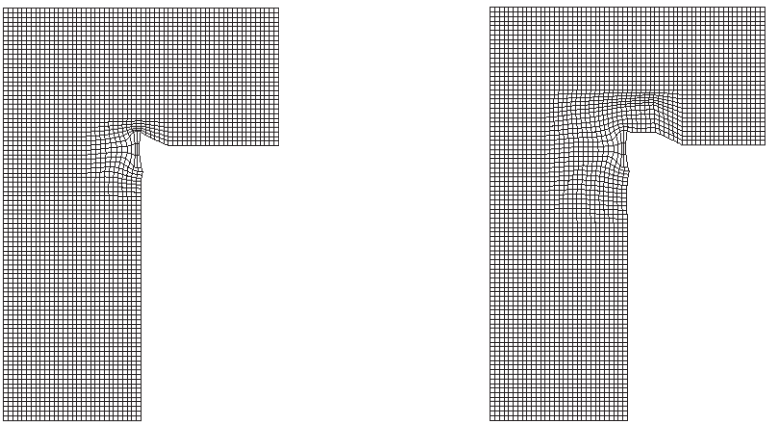

Figure 5.26: Maillage déformé de la solution $(\tilde{e}^{hand}_{PUM}, \tilde{s}^{hand}_{PUM})$ avec l'enrichissement 1 (gauche) et l'enrichissement 2 (droite)

Cependant, ces forts gradients sont correctement repris par la solution résiduelle $(\tilde{e}^r_h, \tilde{s}^r_h)$.

5 Bilan

Nous avons mis en place une technique de résolution du problème adjoint non-intrusive i.e. qui s'appuie sur la discrétisation spatio-temporelle utilisée pour le problème de référence. Les deux problèmes étant semblables, on garde ainsi les mêmes opérateurs lors de

la recherche de solutions approchées. La qualité des bornes est assurée par l'introduction de fonctions d'enrichissement, singulières mais entièrement connues, dans la solution approchée du problème adjoint.

D'un point de vue pratique, la méthode d'estimation d'erreur locale peut, par son caractère non-intrusif, être implantée plus aisément dans un code éléments finis. Il n'est pas nécessaire de modifier le maillage initial, et les problèmes de référence et adjoint sont résolus en même temps. Seule une sur-discrétisation reste nécessaire pour intégrer les quelques termes singuliers intervenant dans l'expression des bornes. Les fonctions d'enrichissement sont quant à elles pré-calculées et stockées dans une bibliothèque de fonctions ; elles sont appelées dans le code selon la quantité d'intérêt qui est considérée.