Applications à la diffusion nucléon-nucléon a basse énergie

Dans ce chapitre, on applique les résultats établis dans le chapitre II notamment pour les sections efficaces et les effets de polarisation, à la diffusion nucléon-nucléon à basse énergie. Il s'agit de la diffusion d'un neutron par un proton, de la diffusion d'un proton par un proton et enfin de la diffusion d'un neutron par une molécule de H_2

3.1 Diffusion neutron-proton à basse énergie

Aux basses énergies $l=0$ dans ce cas $V(r)(\vec{\sigma}.\vec{L})=0$ et le potentiel d'interaction $V(r)=V_1(r)$sera donc indépendant du spin. L'équation de Schrödinger aura donc la forme suivante. [1)]

$$\frac{d^2R_0(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{r}R_0(r)+\left[\frac{2\mu}{\hbar^2}E-\frac{2\mu}{\hbar^2}V(r)\right]R_0(r)=0 \tag{3.1}$$

$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ est appelé masse réduite du système neutron-proton et $R_0(r)$ est la solution de l'équation de Schrödinger qui correspond à l'onde $s(l=0)$. Prenons $m_1=m_2=M \Rightarrow$ $\mu=\frac{M}{2}$. L'équation de Schrödinger devient :

$$\frac{d^2}{dr^2}R_0(r)+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}R_0(r)+\left[k^2-U(r)\right]R_0(r)=0 \tag{3.2}$$

$k^2=\frac{2\mu}{\hbar^2}E$ et $U(r)=\frac{2\mu}{\hbar^2}V(r)$

Posons $R_0(r)=\frac{X_0(r)}{r}$ $\Rightarrow$ l'équation devient

$$\frac{d^2}{dr^2}X_0(r)+\frac{M}{\hbar^2}\left[E-U(r)\right]X_0(r)=0 \tag{3.3}$$

Il faut noter que le potentiel qui correspond au puit sphérique décrit approximativement la diffusion neutron-proton à basse énergie [9)]. Ce qui donne

$$V(r)=\begin{cases}-V_0 & 0\le r\le R\\ 0 & r>R\end{cases} \tag{3.4}$$

Pour des énergies $E \geq 0$ cas des états de diffusion [1)]

On a $X_0(r) = A\sin(kr + \delta_0(k))$ pour $r \geq R$ (3.5)

$= B\sin K'r$ pour $r \leq R$ (3.6)

avec $k^2 = \frac{ME}{\hbar^2}$, $K'^2 = \frac{M(E+V_0)}{\hbar^2} = k^2 + k_0{}^2$ et $k_0{}^2 = \frac{MV_0}{\hbar^2}$. A Et B sont des constantes déterminées à partir des conditions de continuité et $\delta_0(k)$ le déphasage à l'onde s $(l = 0)$. La continuité de la dérivée logarithmique en $r = R$ donne

$$tg(kR + \delta(k)) = \frac{k}{K'} tg(K'R) \tag{3.7}$$

Aux basses énergies [9)] on a $k \to 0, (kR) \to 0, \delta(k) \to 0$ et $K' \to k_0 = \left(\frac{MV_0}{\hbar^2}\right)^{1/2}$

$\Rightarrow kR + \delta(k) \cong \frac{k}{k_0} tgk_0R$. On définit la longueur de diffusion a par

$$a = -\lim_{k\to 0} \frac{\delta(k)}{k} \tag{3.8}$$

L'amplitude de diffusion est identique à celle de (1.36) soit :

$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)\left(e^{2i\delta_l} - 1\right)P_l(\cos\theta)$. Aux basses énergies $l = 0$ et on a :

$$f_0 = \frac{1}{2ik}\left(e^{2i\delta_0} - 1\right) = \frac{1}{k[\cot\delta(k) - i]} \tag{3.9}$$

Or

$$k\cot\delta(k) = -\frac{1}{a} + \frac{r_0}{2}k^2 + O\left(k^4\right) \quad ^{8)} \tag{3.10}$$

r_0 est appelée portée effective. Pour $r_0 k << 1$, on a :

$$f_0 \cong -\frac{a}{1 + ika} \tag{3.11}$$

Si on se limite au cas $ka << 1$

$$f_0 \cong -a \tag{3.12}$$

est indépendant de θ. La section efficace totale quant à elle est identique à celle donnée par (1.28). Aux basses énergies elle est isotrope [9)] et peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\sigma_t = 4\pi a^2} \tag{3.13}$$

Le proton et le neutron sont des particules de spin ½, et comme la diffusion dépend du spin, nous devons généraliser les résultats précédents pour en tenir compte. Dans la diffusion à basse énergie, le spin total $\vec{S}$ est conservé [9)]. En effet le moment cinétique est nul, puisque la diffusion se fait dans l'onde s, et la conservation du moment angulaire total est équivalente à celle du spin total. L'amplitude de diffusion peut s'écrire comme un opérateur

$\widehat{f}$ [9)] agissant dans l'espace à quatre dimensions, produit tensoriel des espaces des états des deux spins ½ du proton et du neutron, en fonction des projecteurs P_s et P_t sur les états singulets (spin total $S = 0$)et triplets (de spin total $S = 1$) du système neutron-proton.

$$\widehat{f} = f_s(k)P_s + f_t(k)P_t \tag{3.14}$$

$$P_s = \frac{1}{4}\left(1 - \vec{\sigma}_n.\vec{\sigma}_p\right) \tag{3.15}$$

$$P_t = \frac{1}{4}\left(3 + \vec{\sigma}_n.\vec{\sigma}_p\right) \tag{3.16}$$

$f_s(k)$, $f_t(k)$ sont respectivement les amplitudes de diffusion des états singulets et triplets de spin [9)], $\vec{\sigma}_n$ et $\vec{\sigma}_p$ sont les opérateurs de Pauli respectivement du neutron et du proton. De la relation (3.12) on a $f_s(k) = -a_s$ et $f_t(k) = -a_t$. Ce qui nous permet d'écrire $\widehat{f}$ sous la forme

$$\begin{aligned}\widehat{f} &= -a_s P_s - a_t P_t \\ &= -\left\{\frac{1}{4}a_s\left(1 - \vec{\sigma}_n.\vec{\sigma}_p\right) + \frac{1}{4}a_t\left(3 + \vec{\sigma}_n.\vec{\sigma}_p\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{2}(a_s + 3a_t)I + \frac{1}{4}(a_t - a_s)\vec{\sigma}_n.\vec{\sigma}_p\end{aligned}$$

$$-\widehat{f} = \widehat{a} = -\frac{1}{2}(a_s + 3a_t)I + \frac{1}{4}(a_t - a_s)\vec{\sigma}_n.\vec{\sigma}_p \tag{3.17}$$

La section efficace différentielle est isotrope et la section efficace totale pour un état de spin initial $|i\rangle$ et un état de spin final $|\upsilon\rangle$ est [9)]

$$\sigma_{\upsilon i} = 4\pi\left|\langle\upsilon|\widehat{a}|i\rangle\right|^2 \tag{3.18}$$

Si on ne mesure pas les spins finaux et si l'état initial est un mélange où l'on connaît seulement la probabilité P_i de trouver les spins initiaux dans l'état $|i\rangle$, il faut sommer sur les états $|\upsilon\rangle$ et les probabilités P_i [9)]

$$\sigma = 4\pi \sum_i P_i \sum_\upsilon \langle i|\hat{a}|\upsilon\rangle\langle\upsilon|\hat{a}|i\rangle$$

$$= 4\pi \sum_\upsilon \left\langle \upsilon \left| \hat{a} \sum_i P_i |i\rangle\langle i| \hat{a} \right| \upsilon \right\rangle$$

$$\boxed{\sigma = 4\pi \sum_\upsilon \langle \upsilon|\rho_{in}\hat{a}^2|\upsilon\rangle = 4\pi Tr\left(\rho_{in}\hat{a}^2\right)} \tag{3.19}$$

avec $\rho_{in} = \sum_i P_i |i\rangle\langle i|$ et $Tr\left(\rho_{in}\hat{a}^2\right) \equiv$ trace qui est la somme des éléments diagonaux de la matrice $\rho_{in}\hat{a}^2$

Si l'état initial est non polarisé : les états $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle$ et $|--\rangle$ ont la même probabilité. Dans ce cas $\rho_{in} = \dfrac{1}{4}$ et

$$\sigma_{non.pol} = \pi Tr\hat{a}^2 = \pi Tr\left(a_s^{\ 2} P_s + a_t^{\ 2} P_t\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{non.pol} = 4\pi\left(\frac{1}{4}a_s^{\ 2} + \frac{3}{4}a_t^{\ 2}\right)$$

Posons $\sigma_s = 4\pi a_s^{\ 2}$ et $\sigma_t = 4\pi a_t^{\ 2}$. Donc la section efficace totale de diffusion sera

$$\boxed{\sigma_{non.pol} = \frac{1}{4}\sigma_s + \frac{3}{4}\sigma_t} \tag{3.20}$$

Traçons la courbe de la section efficace en fonction de l'énergie

$\sigma(E)$ en barn	20.4	20.4	20.4	20.4	20	17.5	12.5	7.5	0.8
E en MeV	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	100

Tableau 3: Données de la section efficace de diffusion élastique neutron-proton [10)]

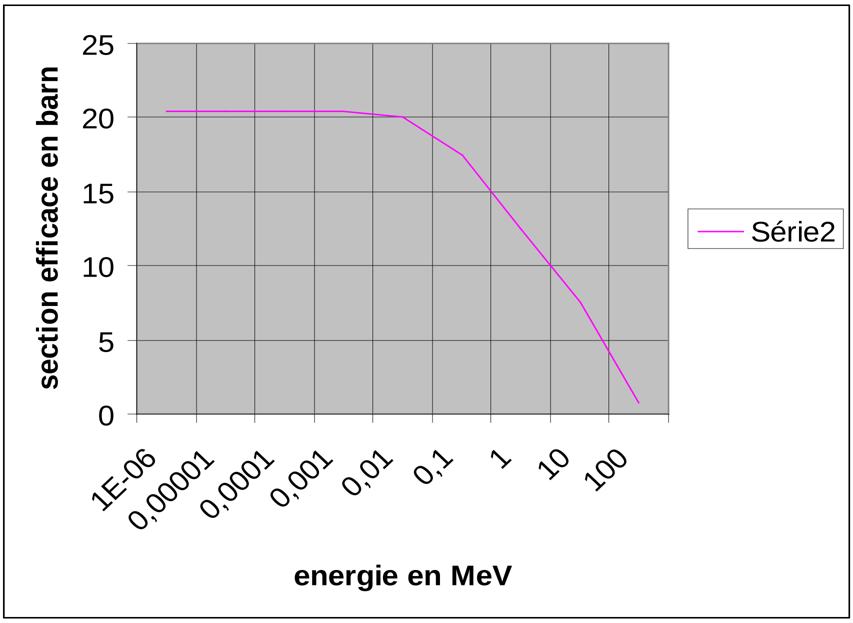

Figure 8 : Section efficace de diffusion élastique neutron-proton [10)]

La courbe montre bien qu'à des énergies basses, la section efficace est une constante. Ici elle est égale à 20,4 barns. Cependant à des énergies élevées, elle dépend de l'énergie.

L'interprétation physique qu'on peut faire de la relation (3.20) est que dans une collision entre des neutrons et des protons non polarisés, il y a quatre combinaisons possibles des deux spins intrinsèques des particules. Trois de ces combinaisons concernent l'état triplet ${}^3S_1$ et une l'état singulet ${}^1S_0$. Les poids relatifs de ces deux états sont donc $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$. Si l'on considère l'amplitude de l'état triplet seul $a_t = 5.7\,\mathrm{fm}$ à partir des paramètres du deutérium**[10)]**, on parvient à une section efficace de 4.08 barns et non les 20.4 barns. A partir de la relation (3.20), on peut déduire le section efficace singulet $\sigma_s \approx 68$ barns soit $a_s \approx \pm 23.71$ fm. Ces résultats démontrent clairement que le potentiel d'interaction dépend fortement de l'orientation des spins. Ce renseignement est très important pour caractériser la force de cohésion nucléaire. Pour l'état singulet ${}^1S_0$ (spins antiparallèles), la force de cohésion est plus faible que pour l'état triplet ${}^3S_1$ (spins parallèles) [12)].

3.2 Diffusion proton-proton à basse énergie

Pour trouver la section efficace, nous devons tenir compte du fait que les deux particules sont identiques. Ces particules étant déviées de θ et de $\pi-\theta$, les échanger revient à inter changer leurs coordonnées sphériques θ et $\pi-\theta$. L'amplitude totale de diffusion s'obtient en additionnant [8)] $f(\theta)$ et $f(\pi-\theta)$. Tout comme dans le cas de la diffusion neutron-proton, soit $\widehat{f}(\theta)$ l'opérateur amplitude de diffusion défini en (3.14) qui est une matrice 4x4 dans l'espace produit tensoriel des deux spins du système proton-proton. Si P_t et P_s sont des projecteurs sur les états triplet et singulet, et si la diffusion ne change pas le spin total, on pourra écrire :

$$\widehat{f}(\theta)=[f_s(\theta)+f_s(\pi-\theta)]P_s+[f_t(\theta)-f_t(\pi-\theta)]P_t \tag{3.21}$$

Ce qui assure l'antisymétrie espace+spin. Si la polarisation initiale de l'ensemble des deux protons est notée α et la polarisation finale β, la section efficace différentielle sera

$$\frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\Omega}=\left|\left\langle\beta\right|\widehat{f}(\theta)\left|\alpha\right\rangle\right|^2 \tag{3.22}$$

Si on ne mesure pas la polarisation des protons après diffusion, on doit sommer sur β et si l'état initial est une superposition incohérente d'états de polarisation $\left|\alpha\right\rangle$ avec une probabilité P_α

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\sum_\alpha P_\alpha\sum_\beta\left\langle\alpha\right|\widehat{f}^+\left|\beta\right\rangle\left\langle\beta\right|\widehat{f}\left|\alpha\right\rangle \tag{3.23}$$

$$=\sum_\alpha P_\alpha\left\langle\alpha\right|\widehat{f}^+\widehat{f}\left|\alpha\right\rangle=Tr\left(\rho_{in}\widehat{f}^+\widehat{f}\right)$$

Avec $\rho_{in}=\sum_\alpha P_\alpha\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right|$

Lorsque les protons avant diffusion ne sont pas polarisés $\Rightarrow\rho_{in}=\frac{1}{4}$ et

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{non.\,pol}=\frac{1}{4}Tr\left(\widehat{f}^+\widehat{f}\right)$$

$$=\frac{1}{4}Tr\left[\left(f_s{}^*P_s+f^*P_t\right)\left(f_sP_s+f_tP_t\right)\right]$$

$$P_s = \frac{1}{4}\left(1 - \vec{\sigma}_p . \vec{\sigma}_p\right)$$

$$P_t = \frac{1}{4}\left(3 + \vec{\sigma}_p . \vec{\sigma}_p\right)$$

Rappelons que $P_s P_t = 0 \Rightarrow \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{non.pol} = \frac{1}{4} Tr\left[\left|f_s\right|^2 P_s + \left|f_t\right|^2 P_t\right]$

En remplaçant P_s et P_t par leurs expressions, on obtient

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{non.pol} = \frac{1}{4}\left|f_s\right|^2 + \frac{3}{4}\left|f_t\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left|f\left(\theta\right) + f\left(\pi - \theta\right)\right|^2 + \frac{3}{4}\left|f\left(\theta\right) - f\left(\pi - \theta\right)\right|^2 \tag{3.24}$$

Avec

$$f\left(\theta\right) = -\frac{\eta}{2k\sin^2\frac{\theta}{2}} \exp\left[-i\eta\log\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 2i\sigma_0\right] + \frac{1}{k} e^{2i\sigma_0} \cdot e^{i\delta_0} \cdot \sin\delta_0 \tag{3.25}$$

$$= f_c\left(\theta\right) + f_N\left(\theta\right)$$

avec

$$f_c\left(\theta\right) = -\frac{\eta}{2k\sin^2\frac{\theta}{2}} \exp\left[-i\eta\log\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 2i\sigma_0\right] \tag{3.26}$$

$$f_N\left(\theta\right) = -\frac{1}{2ik} e^{2i\sigma_0}\left(e^{2i\sigma_0} - 1\right) = \frac{1}{k} e^{2i\sigma_0} \cdot e^{i\delta_0} \cdot \sin\delta_0 \tag{3.27}$$

Ainsi $\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{non.pol} = \frac{d\sigma_{Mott}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_N}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{NC}}{d\Omega}$ (3.28)

$$\frac{d\sigma_{Mott}}{d\Omega} = \left|f_c\right|^2 + \left|f_c\left(\pi - \theta\right)\right|^2 - \mathrm{Re}\left[f_c^{\,*} f_c\left(\pi - \theta\right)\right] \tag{3.29}$$

$$\frac{d\sigma_N}{d\Omega} = \left|f_N\right|^2 + \left|f_N\left(\pi - \theta\right)\right|^2 - \mathrm{Re}\left[f_N^{\,*} f_N\left(\pi - \theta\right)\right] \tag{3.30}$$

$$\frac{d\sigma_{NC}}{d\Omega} = \mathrm{Re}\left\{f_c^{\,*}\left[2 f_N - f_N\left(\pi - \theta\right)\right] + 2 f_c^{\,*}\left(\pi - \theta\right) \cdot f_N\left(\pi - \theta\right) - f_N^{\,*} f_c\left(\pi - \theta\right)\right\} \tag{3.31}$$

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{e^2}{M\nu^2}\right)^2\left\{\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}}-\frac{\cos\left(\xi\ln tg^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\xi}\sin\delta_0\left[\frac{\cos\left(\delta_0+\xi\ln\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{\cos\left(\delta_0+\xi\ln\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right]+\frac{4}{\xi^2}\sin^2\delta_0\right\} \qquad (3.32)$$

avec $\xi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\hbar\nu}$

Traçons la courbe de la section efficace en fonction de l'angle de diffusion

$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$ en cmb/sr	0.18	0.108	0.106	0.109	0.112	0.113	0.114	0.115
θ en degré	30	35	40	50	60	70	80	90

Tableau 4: Données de la section efficace en fonction de l'angle de diffusion pour E=4.203 MeV

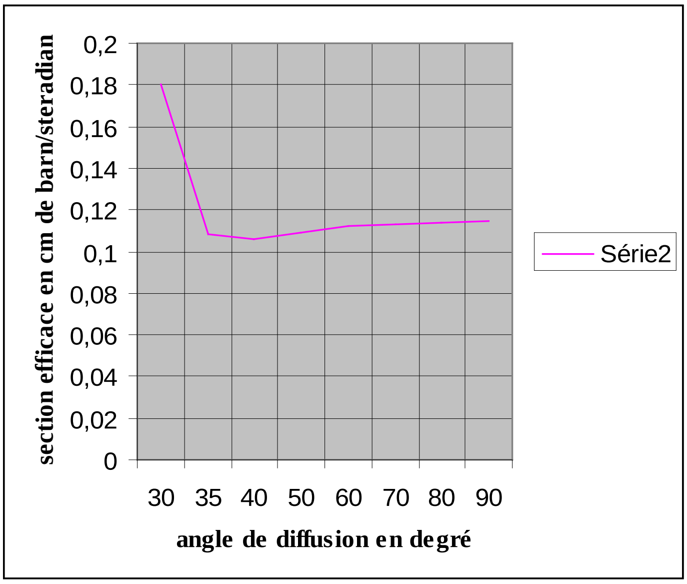

Figure 9: Section efficace différentielle de diffusion proton-proton pour E=4.203 MeV

Cette courbe montre que la section efficace de diffusion proton-proton a une valeur infinie pour θ faible. Cependant pour θ grand, la section efficace tend asymptotiquement vers 0.12 centibarn. Cela est dù au fait que plus les protons incidents passent prés des protons cibles,

plus ils sont déviées et plus l'angle θ est grand. Par contre s'il passent loin du noyau, ils échappent à l'influence de ce dernier donc traversent toute la zone sans presque être dévié.
La courbe de la figure 9 comparée à celle de la figure 5 montre bien qu'au-delà de l'interaction coulombienne, il y a d'autres phénomènes à tenir en compte. Il s'agit ici de l'interaction forte et du spin des particules. La présence des termes d'interférences est caractéristique de la diffusion de particules identiques. Ainsi, si on ne tient pas compte de l'interaction forte on retrouve l'expression classique de la formule de Rutherford dans le système du centre de masse.

3.3 Diffusion d'un neutron par une molécule de H_2

La molécule d'hydrogène notée H_2 peut exister sous deux formes. Elle est soit sous la forme ortho –hydrogène (ortho) lorsque les spins des deux protons sont parallèles soit sous la forme para-hydrogène (para) si les deux protons ont des spins anti-parallèles. Notons $\vec{S}_n = \frac{1}{2}\vec{\sigma}_n$ l'opérateur de spin du neutron incident et $\vec{S}_{P_1}$, $\vec{S}_{P_2}$ les spins des deux protons de H_2. On a :

$$\vec{S}_H = \vec{S}_{p_1} + \vec{S}_{p_2} \tag{3.33}$$

Le spin total est respectivement $S_H = 1$ et $S_H = 0$.

Pour déterminer la section efficace de diffusion, introduisons un opérateur $\hat{a}$ longueur de diffusion du système neutron-proton.

$$\hat{a} = \frac{1}{4}(3a_t + a_s)I + (a_t - a_s)\vec{S}_n.\vec{S}_p \tag{3.34}$$

Ainsi si le neutron et le proton sont à l'état triplet de spin $\vec{S}_n.\vec{S}_p = \frac{1}{4}$ et $\hat{a} = a_t$. Par contre si ils sont à l'état singulet de spin $\vec{S}_n.\vec{S}_p = -\frac{3}{4}$ et $\hat{a} = a_s$. En introduisant (3.33) dans (3.34), on obtient l'amplitude totale de diffusion d'un neutron par une molécule de H_2 soit

$$\hat{a}_H = \frac{1}{2}(3a_t + a_s)I + (a_t - a_s)\vec{S}_n.\vec{S}_H \tag{3.35}$$

$\hat{a}_H{}^2$ contient des termes en $\left(\vec{S}_n.\vec{S}_H\right)$ et $\left(\vec{S}_n.\vec{S}_H\right)^2$. Ces deux termes s'annulent lorsque $S_H = 0$.

Considérons que les neutrons incidents sont non polarisés et que l'axe Z est suivant $\vec{S}_H$ c'est-à-dire perpendiculaire au plan de diffusion, la section efficace de diffusion dans l'état propre $\left| s_{zn} S_{zH} S_H{}^2 \right\rangle$ commun à s_{zn} , S_{zH} , $\vec{S}_H{}^2$ sera [11)]

$$\sigma_{mol} = \frac{1}{2}\sum_{s_{zn}} \left\langle s_{Z_n} S_{Z_H} S_H{}^2 \middle| 4\pi \hat{a}_H{}^2 \middle| s_{Z_H} S_{Z_H} S_H{}^2 \right\rangle \tag{3.36}$$

Et puisque les valeurs moyennes

$$\sum_{s_{Z_n}} \left\langle \vec{S}_n . \vec{S}_H \right\rangle = 0 \tag{3.37}$$

et

$$\frac{1}{2}\sum_{s_{Z_n}} \left\langle \left(\vec{S}_n . \vec{S}_H\right)^2 \right\rangle = \frac{1}{4} S_H \left(S_H + 1\right) \tag{3.38}$$

l'équation (3.36) devient

$$\boxed{\sigma_{ortho} = \pi\left(3a_t + a_s\right)^2 + 2\pi\left(a_t - a_s\right)^2} \tag{3.39}$$

$$\boxed{\sigma_{para} = \pi\left(3a_t + a_s\right)^2} \tag{3.40}$$

Lorsqu'on a un mélange des formes ortho et para dans le processus de diffusion, la section efficace est alors identique à celle (3.20) soit

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{4}\sigma_{para} + \frac{3}{4}\sigma_{ortho}} \tag{3.41}$$

En l'absence du spin, $a_s = a_t = a$ ce qui implique que $\sigma_{para} = \sigma_{ortho} = \sigma$.