Algorithme de Transport et Méthode de Vogel

2.1 Principe de base de la méthode

Dans ce chapitre, nous présentons l'algorithme de transport qui est une adaptation de l'algorithme du simplexe. Il exploite la structure tabulaire des problèmes de transport. Cependant, les principes de base et les différentes étapes sont implicitement les mêmes. D'ailleurs, nous les rappelons dans la prochaine sous section.

2.1.1 Démarche globale

L'algorithme de transport suit exactement les mêmes étapes que la méthode du simplexe. Cependant, il les effectue différemment en tenant compte de la structure des problèmes de transport.

Procédure générale

Etape 0. Initialisation
Etape 1. Critère d'optimalité
Etape 2. Variable rentrante
Etape 3. Variable sortante
Etape 4. Mise à jour de la solution et retour étape 1.

La principale différence se situe au niveau de l'étape de détermination de la solution initiale. En effet, l'application de la méthode du simplexe aurait nécessité l'addition de variables artificielles au niveau de chaque contrainte qui aurait constitué la base initiale. L'algorithme de transport cherche à éviter cette démarche trop lourde. Il opère avec les seules variables du problème et utilise un cheminement complètement différent.
Pour cette raison, nous réservons toute la prochaine sous section à cette initialisation.

2.1.2 Solution Initiale : Méthode de Vogel

Ils existent plusieurs méthodes d'initialisation des problèmes de transport qui contiennent principalement deux étapes :

1- Détermination de la variable à allouer

2- Allocation de la variable

Les méthodes diffèrent principalement au niveau de l'étape de détermination de la variable à allouer. La deuxième étape d'allocation et de mise à jour est la même pour toutes ces méthodes. Nous allons dans la suite présenter la méthode de Vogel.

Méthode de Vogel
Nous présentons brièvement la méthode de Vogel. Elle est une méthode d'approximation. Elle associe à chaque rangée une pénalité qui est la différence entre le deuxième moindre coût et le moindre coût. Elle mesure la perte unitaire résultant du choix au niveau de cette rangée du deuxième moindre coût plutôt que du moindre coût. En d'autres termes, si au niveau d'une rangée, on rate le moindre coût et qu'on se contente du deuxième moindre coût, il en résulte une perte unitaire fournie par la pénalité de la rangée. La rangée possédant la plus grande pénalité doit en conséquence être prioritaire. Nous présentons la méthode sous la procédure ci dessous.

Étape 1. Détermination de la variable à allouer

1.1 Détermination des pénalités

Déterminer pour chaque ligne i

$$u_i = \min_j\{C_{ij}\} \quad et \quad p_i = \min_{i \neq j}\{C_{ij} - u_i\} \tag{2.1}$$

Déterminer pour chaque colonne j

$$v_j = \min_i\{C_{ij}\} \quad et \quad q_j = \min_{i \neq j}\{C_{ij} - v_j\} \tag{2.2}$$

1.2 Détermination de la variable à allouer

Déterminer la plus grande pénalité $\min\{p_i, q_j\}$.
Si

$$\min\{p_i, q_j\} = p_k \tag{2.3}$$

alors déterminer $C_{kr} = \min_j\{C_{kj}\}$

Sinon

$$\min\{p_i, q_j\} = q_r \tag{2.4}$$

alors déterminer $C_{rk} = \min_i\{C_{ir}\}$
La variable à allouer est X_{kr}

Étape 2. Allocation de la variable

Allouer la variable X_{kr} en effectuant

$X_{kr} = \min\{a_k, b_r\}$ en suite $a_k = a_k - X_{kr}$ *et* $b_r = b_r - X_{kr}$

Une des deux rangées (ligne k ou colonne r) est saturée, la rayer du tableau.

Étape 3. Test d'arrêt

S'il reste une rangée (ligne ou colonne) compléter la et Fin. Sinon, retourner à l'étape 1.

Exemple

En utilisant la méthode de Vogel, déterminer une solution initiale du problème de transport suivant.

1	3	20	11	**15**
12	14	13	20	**25**
2	11	16	18	**10**
5	**20**	**15**	**10**	

TABLE 2.1 – exemple (solution initiale par méthode de vogel)

Assignation 1. Les pénalités p_i et q_j associées aux lignes et colonnes sont

$p_1 = 2$ $p_2 = 1$ $p_3 = 9$
$q_1 = 1$ $q_2 = 8$ $q_3 = 3$ $q_4 = 7$

La plus grande pénalité (pgp) est $p_3 = 9$. La variable de moindre coût dans cette ligne 3 est
$X_{31} = \min\{a_3, b_1\} = b_1 = 5$ et $a_3 = 10 - 5 = 5$
Ensuite la colonne 1 devient saturée et est rayée du tableau.

Assignation 2. Les pénalités q_j associées aux colonnes restent inchangés tandis que les pénalités p_i deviennent

$p_1 = 8 \qquad p_2 = 1 \qquad p_3 = 5$
La plus grande pénalité (pgp) est $p_1 = 8$. La variable de moindre coût $C_{12} = 3$ est $X_{12} = \min\{a_1, b_2\} = a_1 = 15 \quad et \quad b_2 = 20 - 15 = 5$

Ensuite la ligne 1 devient saturée et est rayée du tableau.

Assignation 3.
Les pénalités p_i restent inchangés tandis que les pénalités q_j deviennent
$q_2 = 3 \quad q_3 = 3 \quad q_4 = 2$
La plus grande pénalité (pgp) est $p_3 = 5$. La variable de moindre coût $C_{32} = 11$ est

$X_{32} = \min\{a3, b2\} = a_3 = b_2 = 5$

Ainsi la colonne 2 et ligne 3 deviennent saturées en même temps.
Nous rayons la ligne 3 du tableau (choix arbitraire).
Il ne reste plus que la seule ligne 2 dans le tableau.
Nous la remplissons en posant $X_{22} = 0, \quad X_{23} = 15 \quad et \quad X_{24} = 10$. Fin

Nous obtenons la solution initiale présentée dans le tableau ci dessous dont le coût total est $CT_V = 505$

	15			**15**
	0	**15**	**10**	**25**
5	**5**			**10**
5	**20**	**15**	**10**	

TABLE 2.2 – solution de l'exemple Précédant

2.2 Algorithme de transport

Étape 0. Initialisation
Déterminer une solution initiale à partir de la méthode de Vogel .

Étape 1. Critère d'optimalité

1.1. Identifier la solution courante et la base B associée.

1.2. Écrire les équations de dualité pour obtenir le système

$$u_i + v_j = C_{ij}; \quad X_{ij} \in B \tag{2.5}$$

Ce système indéterminé avec m + n - 1 équations et m + n inconnues admet une infinité de solutions. Pour en déterminer une, il suffit par exemple de poser $u_1 = 0$.

1.3. Déterminer à partir de cette solution les coûts réduits associés

$$\hat{C_{ij}} = C_{ij} - u_i - v_j; \quad X_{ij} \notin B \tag{2.6}$$

aux variables hors base.

1.4. Tester la positivité de ces coûts réduits.

$$Si \quad \min_{i,j}\{\hat{C_{ij}}\} \geq 0 \tag{2.7}$$

alors la solution est optimale.
Sinon continuer

Étape 2. Variable rentrante

La variable X_{kr} telle que

$$C_{kr} = \min_{i,j}\{\hat{C_{ij}}\}$$

est la variable rentrante. Sa rentrée implique la sortie d'une variable de la base qui est fournie par la prochaine étape.

Étape 3. Variable sortante

La rentrée de la variable X_{kr} dans la base entraîne sa possible augmentation d'une valeur θ . Comme les disponibilités sont fixes, ceci implique une nécessaire diminution de θ de variables de base dans la ligne k et colonne r . Ces diminutions vont entraîner des augmentations de la même valeur θ de variables de base dans leurs rangées respectives. Nous obtenons ainsi un cycle et marquons par le signe $\ominus$ les variables à diminuer et par le signe $\oplus$ celles à augmenter. Pour maintenir la positivité des variables, la valeur de θ doit correspondre à la plus petite marquée du signe $\ominus$ soit X_{ls} . Ainsi, en diminuant cette variable X_{ls} , elle devient nulle et peut sortir de la base.

Étape 4. Mise à jour de la nouvelle solution

Poser $X_{kr} = \theta$
Augmenter de θ les variables de base marquées du signe $\oplus$
Diminuer de θ les variables de base marquées du signe $\ominus$
Retourner à l'étape 2.

Exemple
Par l'algorithme de transport, à partir de la solution initiale fournie par la méthode de Vogel résoudre le problème de transport suivant

2	3	11	8	**6**
1	0	6	2	**2**
5	8	15	9	**4**
1	**6**	**3**	**2**	

TABLE 2.3 – exemple (Par l'algorithme de transport)

solution
La solution initiale fournie par la méthode de Vogel est

$X_{12} = 6; \quad X_{23} = 0; \quad X_{24} = 2; \quad X_{31} = 1; \quad X_{32} = 0; \quad X_{33} = 3$

Nous obtenons la solution initiale présentée dans le tableau ci dessous dont le coût total est $C_{TV} = 72$

	6			**6**
		0	**2**	**2**
1	**0**	**3**		**4**
1	**6**	**3**	**2**	

Table 2.4 – solution initiale de l'exemple précédant

Itération 1.

Etape 1.
En posant $u_1 = 0$ et en écrivant les équations de dualité, nous avons

$u_1 + v_2 = 3 \quad donc \quad v_2 = 3$
$u_3 + v_2 = 8 \quad donc \quad u_3 = 5$
$u_3 + v_1 = 5 \quad donc \quad v_1 = 0$
$u_3 + v_3 = 15 \quad donc \quad v_3 = 10$
$u_2 + v_3 = 6 \quad donc \quad u_2 = -4$
$u_2 + v_4 = 2 \quad donc \quad v_4 = 6$

Ces variables duales permettent l'évaluation des coûts réduits pour les variables hors base de la manière suivante

$\hat{C_{11}} = C_{11} - u_1 - v_1 = 2 - 0 - 0 = 2$
$\hat{C_{13}} = C_{13} - u_1 - v_3 = 11 - 0 - 10 = 1$
$\hat{C_{14}} = C_{14} - u_1 - v_4 = 8 - 0 - 6 = 2$
$\hat{C_{21}} = C_{21} - u_2 - v_1 = 1 + 4 - 0 = 5$
$\hat{C_{22}} = C_{22} - u_2 - v_2 = 0 + 4 - 3 = 1$
$\hat{C_{34}} = C_{34} - u_2 - v_4 = 9 - 6 - 5 = -2$

Tous ces calculs peuvent être résumés dans le tableau ci dessous. Les coûts réduits occupent la position du bas de chaque case et tout à fait à gauche.

	$v_1 = 0$	$v_2 = 3$	$v_3 = 10$	$v_4 = 6$	
$u_1 = 0$	$\boxed{2}$ 2	$\boxed{3}$ **6**	$\boxed{11}$ 1	$\boxed{8}$ 2	**6**
$u_2 = -4$	$\boxed{1}$ 5	$\boxed{0}$ 1	$\boxed{6}$ **0**	$\boxed{2}$ **2**	**2**
$u_3 = 5$	$\boxed{5}$ **1**	$\boxed{8}$ **0**	$\boxed{15}$ **3**	$\boxed{9}$ -2	**4**
	1	**6**	**3**	**2**	

TABLE 2.5 – itération 1 (étape 1) de la solution de l'exemple précédant

Étape 2. La solution optimale n'est pas atteinte. La variable de plus petit coût réduit X_{34} est la variable rentrante. Sa rentrée fournit le cycle

	$v_1 = 0$	$v_2 = 3$	$v_3 = 10$	$v_4 = 6$	
$u_1 = 0$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ **6**	$\boxed{11}$	$\boxed{8}$	**6**
$u_2 = -4$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{6}$ **0** $\oplus$	$\boxed{2}$ **2** $\ominus$	**2**
$u_3 = 5$	$\boxed{5}$ **1**	$\boxed{8}$ **0**	$\boxed{15}$ **3** $\ominus$	$\boxed{9}$ $\oplus$	**4**
	1	**6**	**3**	**2**	

TABLE 2.6 – itération 1 (étape 2) de la solution de l'exemple précédant

La variable affectée du signe $\ominus$ possédant la plus petite allocation X_{24} sort de la base avec $\theta = 2$. Ainsi, nous obtenons la nouvelle solution de base

$X_{12} = 6; \quad X_{23} = 0; \quad X_{31} = 1; \quad X_{32} = 2; \quad X_{33} = 1; \quad X_{34} = 2$

dont la fonction objectif reste inchangée.

Itération 2. Seules les variables duales $v_4 = 6$ changent pour devenir $v_4 = 4$. Ceci affecte les coûts réduits associés à la ligne 3 et colonne 4. Les nouveaux coûts réduits sont résumés dans le tableau ci-dessous.

	$v_1 = 0$	$v_2 = 3$	$v_3 = 10$	$v_4 = 4$	
$u_1 = 0$	$\boxed{2}$ 2	$\boxed{3}$ **6**	$\boxed{11}$ 1	$\boxed{8}$ 2	**6**
$u_2 = -4$	$\boxed{1}$ 5	$\boxed{0}$ 1	$\boxed{6}$ **2**	$\boxed{2}$ 2	**2**
$u_3 = 5$	$\boxed{5}$ **1**	$\boxed{8}$ **0**	$\boxed{15}$ **1**	$\boxed{9}$ **2**	**4**
	1	**6**	**3**	**2**	

TABLE 2.7 – itération 2 de la solution de l'exemple précédant

Les coûts réduits sont tous positifs . alors La solution est optimale avec un coût total CT = 68.