Théorie de L'information

Nicolas Sendrier

Chapitre 1

Systèmes de communication

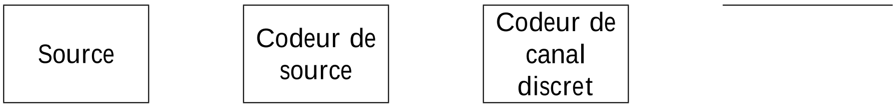
1.1 Introduction

La théorie des communications s'intéresse aux moyens de transmettre une information depuis une source jusqu'à un utilisateur (cf. Figure 1.1). La nature de la *source* peut-être très variée. Il peut s'agir par exemple d'une voix, d'un signal électromagnétique ou d'une considérablement plus simple que les sources et les canaux physiques, permettent de donner une bonne intuition de leur comportement.

Dans le but de simplifier l'étude des systèmes de communication, nous étudierons séparément les modèles de sources et les modèles de canaux. Ceci peut se schématiser en séparant le codeur et le décodeur de la Figure 1.2 en deux parties. Le but du codeur de

1.2 SOURCES ET CODADET(SOUR)26(C)]TJ/F2811.95Tf453.02f0TD[5

Par exemple, si un alphabet contient 2^L lettres équiprobables, il est immédiat que l'entropie de la source correspondante vaut L. Or il est bien clair que pour représenter 2^L lettres distinctes, L


Source
Codeur de source
Codeur de canal discret

Chapitre 2

Une mesure de l'information

Nous donnons dans ce chapitre une mesure de la quantité d'information adaptée à la description statistique des sources et des canaux. Les énoncés qui en résultent faisant largement appel aux probabilités discrètes, nous commencerons l'exposé par le rappel de quelques éléments de théorie des probabilités.

2.1 Rappels de théorie des probabilités dppde

b - Probabilité conditionnelle

On suppose que $P(a_k) > 0$, la probabilité conditionnelle pour que $y = b_j$ sachant que $x = a_k$, est définie par

P

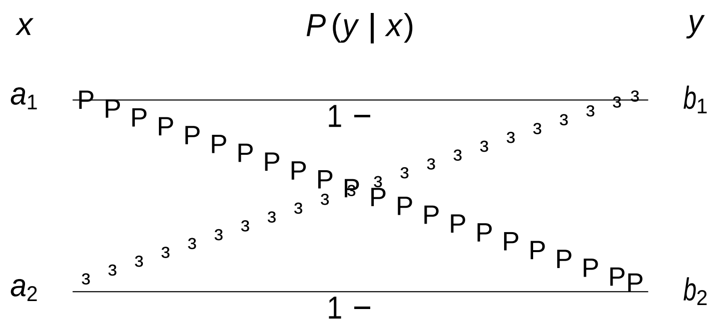
Ainsi, l'information "y est réalisé" diminue l'incertitude sur x de la quantité

$$I(x) - I(x \mid y) = \log \frac{P(x \mid y)}{P(x)}.$$

Cette dernière quantité sera défine plus loin comme l'information mutuelle de x et y, alors que $I(x)$ sera l'information propre de x.

bAinsi,Pour ldu/F1og293th m1-294emiet fonc tio295nT Jm/Fe1su29 4de u(l'dn26)4i63(de)xT1(ev66)463(ere

Il faut prendre garde que ce résultat n'est vrai que parceque les lettres de la source sont équiprobables, en effet, si ce n'est pas le cas, l'information propre de l'évènement a_k, $I(a_k$


x
P(y | x)
y
a1
b1
1 −
a2
b2
1 −

L'équation (2.1) peut se reécrire en moyenne

$$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y).$$

Cette relation nous sera utile pour interpréter la capacité d'un canal.

2.3.2 Propriétés de l'entropie

Théorème 2.1 *Soit* X

Théorème 2.2 *Soit un espace probabilisé joint discret XY. L'information mutuel*[redacted] *ne $I(X;Y)$ de X et de Y vérifie*

$$I(X;Y) \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si X et Y sont statistiquement indépendants.

preuve : Montrons que $-I(X;Y) \leq 0$. On a, en utilisant (2.2)

$$\begin{aligned}
-I(X;Y) &= \sum_{x,y} P(x,y) \log_2 \frac{P(x)P(y)}{P(x,y)} \\
&\leq \log_2 e \sum_{x,y} P(x,y) \left(\frac{P(x)P(y)}{P(x,y)} - 1 \right) \\
&\leq \log_2 e \left(\sum_{x,y} P(x)P(y) - \sum_{x,y} P(x,y) \right) \\
&\leq \log_2 e \left(\sum_{x} P(x) \sum_{y} P(y) - 1 \right)
\end{aligned}$$

[redacted]

L'information propre conditionnelle *de x sachant y*

r

r

r

L'arbre du code 1 est donné par r©

r

r

r

Et si l'arbre est binaire strict, on a

preuve :

1. Soit la source $X = \{a_1, \ldots, a_K\}$ muni d'un code déchiffrable dont les mots ont une longueur respectivement de $n_1, \ldots, n_K$. Montrons que $H(X) - \bar{n} \leq 0$.

$$H(X) - \bar{n} = \sum_{k=1}^{K} P(a_k) \log_2 \quad 1$$

¤

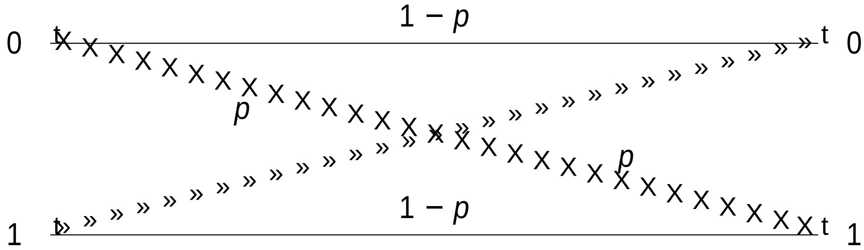
L'efficacité $E = H(X)/\overline{n}$

Soit

2. $K > 2$. Soit la source

est appelée matrice stochastique *du canal. Nous parlerons d'un canal* (X, Y, Π).

Exemple : Le canal binaire symétrique de probabilité de transition p représenté par le diagramme



a pour matrice stochastique

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

e□et

$$I(X;Y$$

L'information mutuelle moyenne s'écrit

$$I(X;Y) = H(Y) - H($$

Chapitre 5

Codes correcteurs d'erreurs

5.1 Définitions générales

5.1.1 Distance de Hamming

Définition 5.1

Lorsque l'alphabet A peut être muni d'une structure de corps, l'espace A^n est un espace

5.1.3 Décodage à vraisemblanceT D[(45)r

2. Code de Hamming H H_{2k5} $\int H$

b - Codes BCH

L'alphabet est égal à $\mathbb{F}_q$, le corps à q éléments. Soit m un entier et $n = q^m - 1$. On

– que $\mathbf{x}$ est perturbé dans un canal bruité par l'erreur $\mathbf{e}$ $\mathbb{F}^{n}$

Proposition 5.8

c - Codes BCH de distance construite δ

Soit α un élément primitif de $\mathbb{F}_{q^m}$, $n = q^m - 1$.
On défini le code BCH primitif au sens strict sur $\mathbb{F}_q$

5.3. D´

preuve :

$S(z)$ mod $z^{\delta-1}$ étant connu.

Si on applique l'algorithme d'Euclide à $r_{-1}(z$

Chapitre 6

Codes convolutifs

Pour un tel code le treillis de codage est donné par la figure 6.4. La valeur inscrite sur chaque branche est la valeur de sortie au temps considéré.

6.3. D ́