



Fonctions et Circuits Logiques



- Définition
- Algèbre de commutation ou algèbre de Boole
- Fonction logique
- Circuits combinatoires SSI & MSI



Définitions

- **Élément logique**
 - 2 éléments logiques notés « 0 » et « 1 »
 - Le symbole « 1 » désigne une action comme une lampe s'allume, la porte s'ouvre ...
 - Le symbole « 0 » indique généralement l'absence d'action
- **Variable logique ou booléenne X**
 - Une variable logique ou booléenne est une grandeur qui ne peut prendre que 2 états « 0 » ou « 1 »
 - Domaine de définition $B_2 = \{0,1\}$
 - Si X est une variable booléenne, on a
 - $X \neq 0$ si et seulement si $X = 1$
 - $X \neq 1$ si et seulement si $X = 0$



Définitions

Opérateurs logiques élémentaires

Inversion (Not) ou Complémentation

$$B_2 \rightarrow B_2$$

Notation : \overline{X}

| X | \overline{X} |
|---|----------------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Opération OU (OR) ou Union

$$B_2 \times B_2 \rightarrow B_2$$

Notation : $X \cup Y$ ou $X+Y$

| X | Y | $X+Y$ |
|---|---|-------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Opération ET (AND) ou Intersection

$$B_2 \times B_2 \rightarrow B_2$$

Notation : $X \cap Y$ ou $X.Y$ ou XY

| X | Y | $X.Y$ |
|---|---|-------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |





Fonctions et Circuits Logiques

- Définition
- Algèbre de commutation ou algèbre de Boole
- Fonction logique
- Circuits combinatoires SSI & MSI



Lois fondamentales de l'algèbre de Boole

- L'algèbre de commutation ou algèbre de Boole est le système algébrique constitué de l'ensemble B_2 et des opérations ET, OU, PAS.

Axiomes de l'algèbre de boole

| | |
|------------------------|--|
| Fermeture | $A.B$ Variable logique définie par la table ET $A+B$ Variable logique définie par la table OU |
| Commutativité | $A.B = B.A$ $A+B = B+A$ |
| Associativité | $A.(B.C) = (A.B).C$ $A+(B+C) = (A+B)+C$ |
| Distributivité | $A.(B+C) = A.B + A.C$ $A+(B.C) = (A+B).(A+C)$ Différent algèbre classique |
| Complémentarité | $A+\bar{A} = 1$ $A.\bar{A} = 0$ |
| Idempotence | $A+A = A$ $A.A = A$ |
| Identités remarquables | $1.A = A$ $1+A = 1$ $0.A = 0$ $0+A = A$ |



Théorème de De Morgan

■ Théorème 1

- La négation d'un produit de variables est égale à la somme des négations des variables

$$\overline{A.B.C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

■ Théorème 2

- La négation d'une somme de variables est égale au produit des négations des variables

$$\overline{A+B+C} = \bar{A} . \bar{B} . \bar{C}$$



Fonctions et Circuits Logiques

- Définition
- Algèbre de commutation ou algèbre de Boole
- **Fonction logique**
- Circuits combinatoires SSI & MSI



Fonction complètement définie

- Une fonction logique est **complètement définie** quand on connaît sa valeur 0 ou 1 pour toutes les combinaisons possibles des variables.
- Ces combinaisons sont au nombre de 2^n pour n variables

Exemple

- Soit une fonction de 3 variables $f(x,y,z)$
- $2^3 = 8$ combinaisons
- Répertorier les combinaisons dans l'ordre croissant de 0 à 2^n-1

| X | Y | Z | f |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |



Fonction incomplètement définie

- Une fonction logique est **incomplètement définie** quand sa valeur est indifférente ou non spécifiée pour certaines combinaisons de variables
- On note sa valeur par **X** ou **Æ**

Exemple

- Soit une fonction de 3 variables $g(x,y,z)$
- $2^3 = 8$ combinaisons dont 4 combinaisons indéfinies

| X | Y | Z | g |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | X |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | X |
| 1 | 0 | 0 | X |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | X |



Formes Canoniques des Fct. Logiques

Première Forme Canonique (1)



- Appelé aussi
 - Produits de Produits
 - Forme canonique disjonctive
- S'exprime sous la forme d'**une somme de produits**
- Écriture à partir de la table de vérité
 - Repérer dans la table de vérité les combinaisons x, y, z pour lesquelles la fonction vaut 1
 - Pour ces combinaisons, faire le produit des variables en affectant le **symbole** ^{3/4} aux variables dont l'état est 0. On obtient les **monômes de la fonction**
 - Faire la somme de tous les monômes



Formes Canoniques des Fct. Logiques

Première Forme Canonique (2)

- Exemple
 - soit la fonction f tel que
 - $f = 1$ si la majorité des variables sont à 1
 - $f = 0$ sinon

Réalisation de la table de vérité

| X | Y | Z | f |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

1) Recherche les cas où la fonction vaut 1

| X | Y | Z | f |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

2) Écriture des monômes



Formes Canoniques des Fct. Logiques

Première Forme Canonique (3)

■ Remarque

- Comment obtenir le complément de f ?

| X | Y | Z | f |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$\overline{f}(x, y, z) = \overline{x}.\overline{y}.\overline{z} + \overline{x}.\overline{y}.z + \overline{x}.y.\overline{z} + x.\overline{y}.\overline{z}$$



Formes Canoniques des Fct. Logiques

Première Forme Canonique (4)

- Écriture de la table de vérité à partir de f canonique
 - dresser la table de vérité à n variables
 - les combinaisons correspondantes à un monôme de f seront affectées à l'état 1, les autres à l'état 0
- Exemple

$$f(x, y, z) = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + x.\bar{y}.\bar{z} + x.y.z$$

| X | Y | Z | f |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |





Formes Canoniques des Fct. Logiques

Deuxième Forme Canonique (1)



- Appelé aussi
 - Produits de Produits
 - Forme canonique conjonctive
- S'exprime sous la forme d'un produit de sommes

- Écriture à partir de la table de vérité
 - Repérer les combinaisons pour lesquelles l'état de f est 0
 - Pour ces combinaisons, faire la sommes des variables en affectant le symbole $\bar{}$ aux variables dont l'état est 1
 - Faire le produit des sommes



Formes Canoniques des Fct. Logiques

Deuxième Forme Canonique (2)

■ Exemple

1) Recherche les cas où la fonction vaut 0

| X | Y | Z | f |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

2) Écriture des monômes

→ $x + y + z$

→ $x + y + \bar{z}$

→ $x + \bar{y} + z$

→ $\bar{x} + y + z$



Formes Canoniques des Fct. Logiques

Deuxième Forme Canonique (3)

- Écriture de la table de vérité à partir de f
 - Dresser la table
 - Pour chaque terme somme de f, prendre la combinaison faisant apparaître
 - un 0 pour une variable directe
 - un 1 pour une variable inverse notée ^{3/4}
 - Affecter 0 à f pour ces combinaisons, 1 à f pour les autres
- Exemple

| X | Y | Z | f |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$f(x, y, z) = (x + y + \bar{z}).(x + \bar{y} + \bar{z}).(\bar{x} + \bar{y} + z)$$



Fonctions de deux variables Booléennes

- On peut former 2^{2^2} fonctions, soit 16 fonctions

| x | y | f ₀ | f ₁ | f ₂ | f ₃ | f ₄ | f ₅ | f ₆ | f ₇ | f ₈ | f ₉ | f ₁₀ | f ₁₁ | f ₁₂ | f ₁₃ | f ₁₄ | f ₁₅ |
|---|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Fonction à une seule variable

$$f_0 = 0 \quad f_3 = x \quad f_5 = y$$

$$f_{15} = 1 \quad f_{12} = \bar{x} \quad f_{10} = \bar{y}$$

Opérateurs fondamentaux

$$f_7 = x + y \quad \text{OU}$$

$$f_1 = x \cdot y \quad \text{ET}$$

Autres fonctions

$$f_6 = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y = x \oplus y$$

$$f_9 = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y} = x \odot y$$

$$f_8 = \bar{\bar{x} \cdot \bar{y}} = \overline{x + y}$$

$$f_{14} = \bar{\bar{x} + \bar{y}} = \overline{x \cdot y}$$

Fonction **OU exclusif** ou comparateur d'inégalité

Fonction **Identique** ou comparateur d'identité

Fonction **NON OU** ou **NOR**

Fonction **NON ET** ou **NAND**





Fonctions et Circuits Logiques

- Définition
- Algèbre de commutation ou algèbre de Boole
- Fonction logique
- **Circuits combinatoires SSI & MSI**

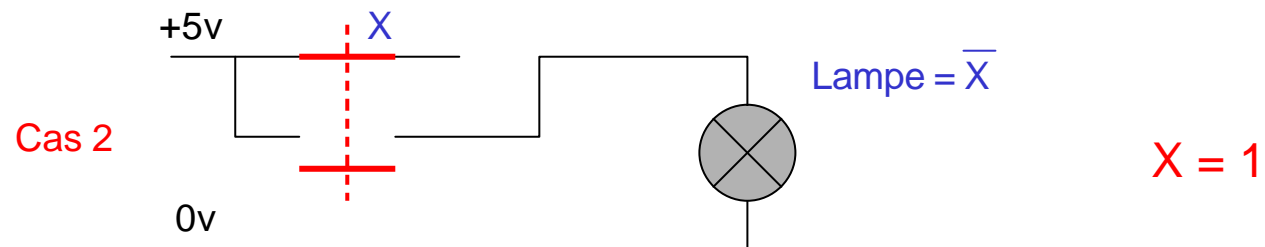
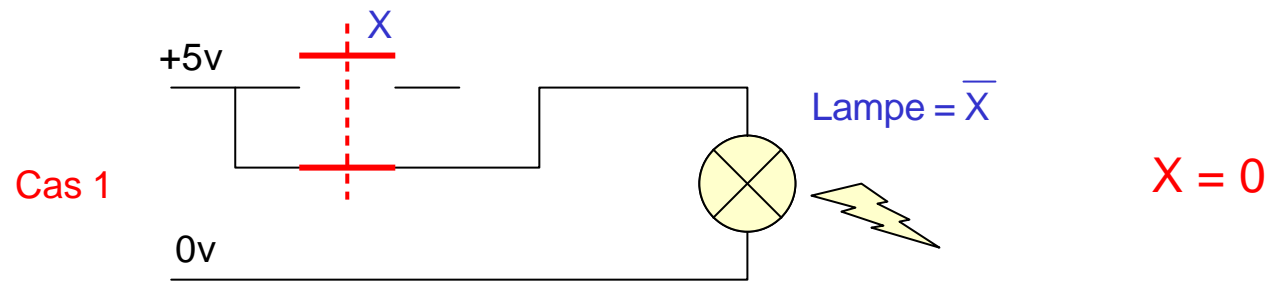


Circuits SSI (Small Scale Integration)

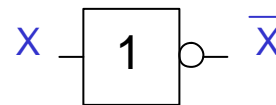
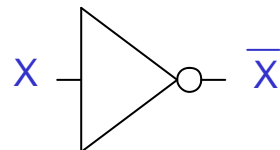
Portes Logiques Élémentaires (1)

Porte NON, PAS ou Inverseur (NOT)

Électricité



Symboles Électroniques

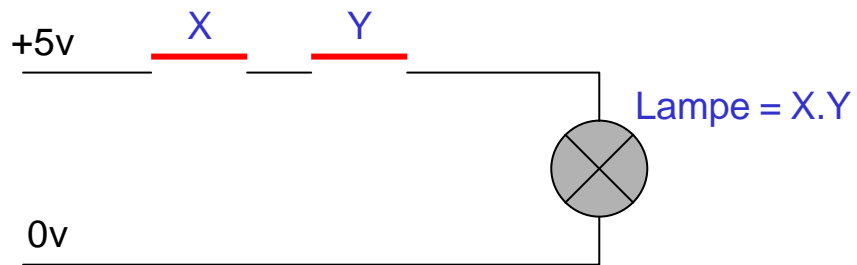


Circuits SSI (Small Scale Integration)

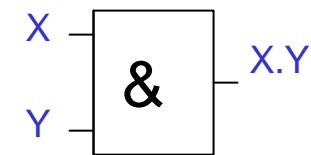
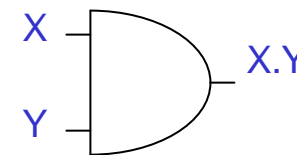
Portes Logiques Élémentaires (2)

Porte ET (AND)

Électricité

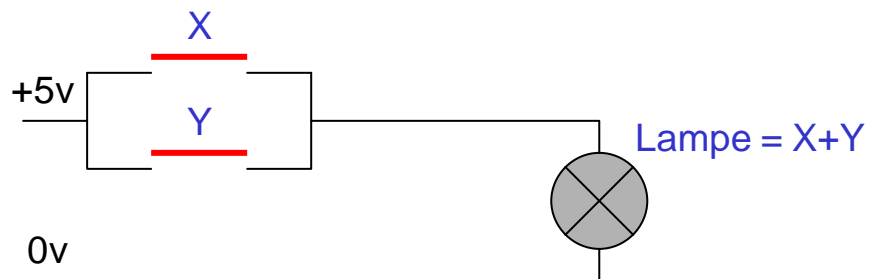


Symboles Électroniques

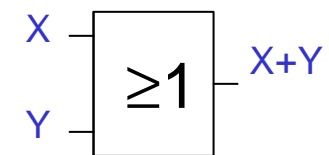
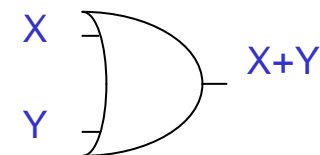


Porte OU (OR)

Électricité



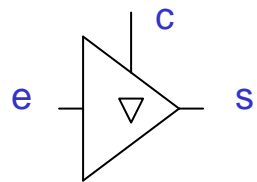
Symboles Électroniques



Circuits SSI (Small Scale Integration)

Portes Logiques de Base (2)

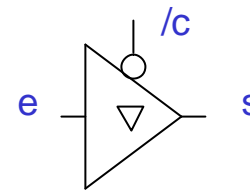
Circuits 3 états (TRISTATE)



$c = 0$ alors $s = \text{haute impédance (z)}$
 $c = 1$ alors $s = e$

e $c=0$ $s = z$ (haute impédance)

e $c=1$ $s = e$



$c = 1$ alors $s = \text{haute impédance (z)}$
 $c = 0$ alors $s = e$

e $/c=1$ $s = e$

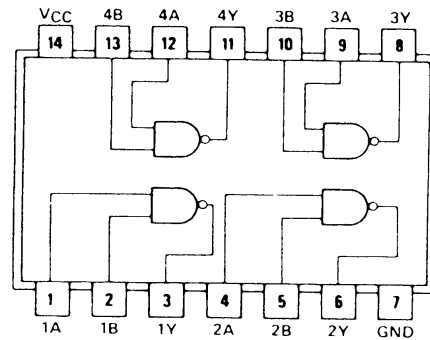
e $/c=0$ $s = z$ (haute impédance)



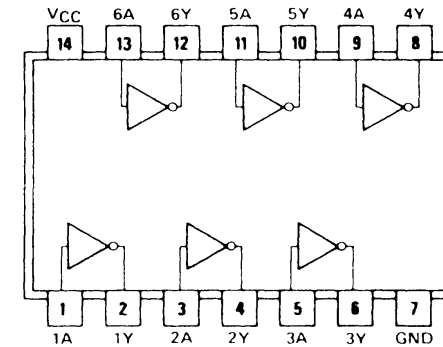
Circuits SSI (Small Scale Integration)

Exemples

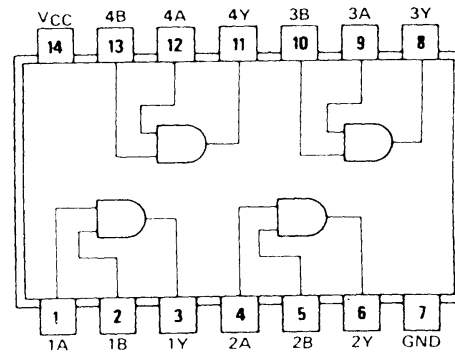
NAND (7400)



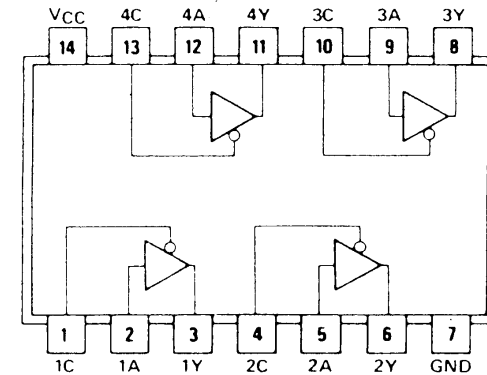
NOT (7404)



OR (7408)



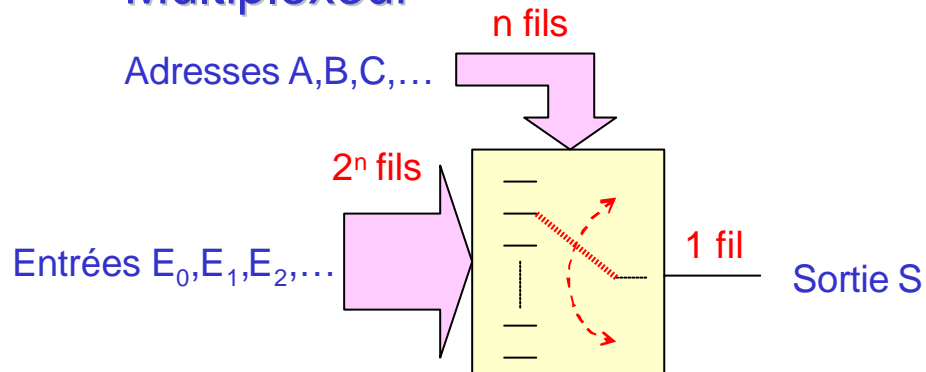
Buffer Tristate (74126)



Circuits MSI (Medium Scale Integration)

Multiplexeur & Encodeur

Multiplexeur

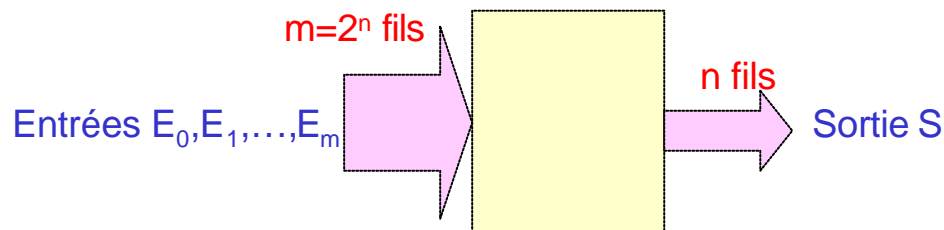


Exemple

Multiplexeur $4 \rightarrow 1$

- 4 entrées = 2^2
- $n=2$ donc 2 fils d'adresse A et B
- 1 sortie (toujours vrai)

Encodeur



Exemples

Encodeur $8 \rightarrow 3$

- 8 entrées
- 3 sorties

Encodeur $10 \rightarrow 4$

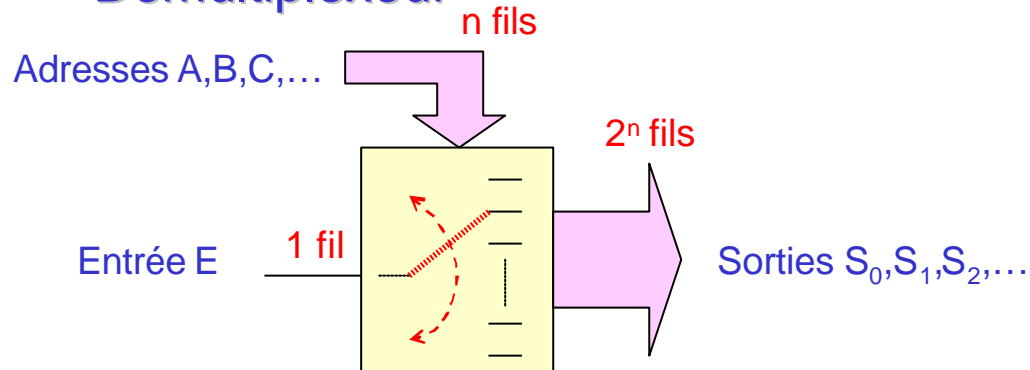
| E_{m-1} | ... | E_1 | E_0 | S_n | ... | S_1 | S_0 | |
|-----------|-----|-------|-------|-------|-----|-------|-------|-----|
| 0 | ... | 0 | 1 | 0 | ... | 0 | 0 | 0 |
| 0 | ... | 1 | 0 | 0 | ... | 0 | 1 | 1 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 1 | ... | 0 | 0 | 1 | ... | 1 | 1 | m-1 |



Circuits MSI (Medium Scale Integration)

Demultiplexeur & Décodeur

Demultiplexeur

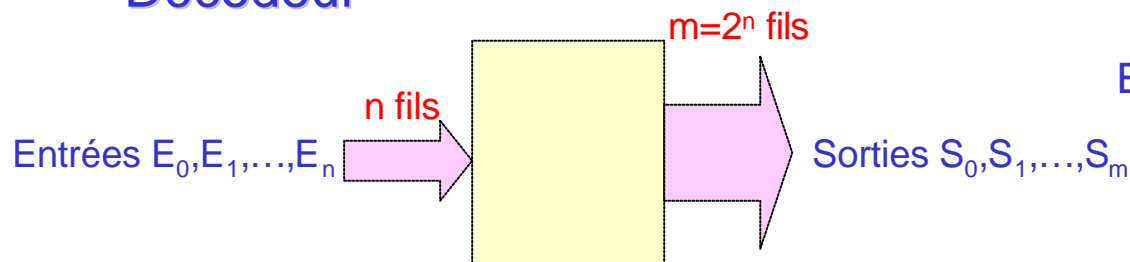


Exemple

Demultiplexeur 1 \rightarrow 8

- 1 entrée (toujours vrai)
- 8 sorties ou 2^3 sorties
- $n=3$ donc 3 fils d'adresse A,B et C

Décodeur



Exemples

Décodeur 3 \rightarrow 8

- 3 entrées
- 8 sorties

Décodeur 4 \rightarrow 10

| | E_n | ... | E_1 | E_0 | S_{m-1} | ... | S_1 | S_0 |
|-------|-------|-----|-------|-------|-----------|-----|-------|-------|
| 0 | 0 | ... | 0 | 0 | 0 | ... | 0 | 1 |
| 1 | 0 | ... | 0 | 1 | 0 | ... | 1 | 0 |
| | | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ |
| $m-1$ | 1 | ... | 1 | 1 | 1 | ... | 0 | 0 |



