

Applications astrophysiques

Sommaire

4.1	Champ magnétique lunaire	147
4.2	Stabilité des astres telluriques	165
4.3	Étoiles extra-solaires	192
4.4	Synthèse du chapitre 4 et publications	201

L'étude de l'instabilité elliptique dans un contexte planétaire a été initiée par les travaux expérimentaux de Malkus (1989). Sa présence a été suggérée dans le noyau liquide de la Terre (Aldridge *et al.*, 1997), de Io (Kerswell & Malkus, 1998) et dans le noyau primitif de Mars il y a 4 milliards d'années (Arkani-Hamed *et al.*, 2008; Arkani-Hamed, 2009). Outre ces astres telluriques, les astres gazeux ont aussi été considérés : Rieutord (2003) considère ainsi sa présence au sein d'étoiles doubles en orbites rapprochées, déformées par des forces de marées, tandis que Lebovitz & Lifschitz (1996*a,b*) puis Ou *et al.* (2007) montrent qu'elle peut également se développer au sein d'ellipsoïdes de Riemann, i.e. de modèles simples d'étoiles en rotation rapide, non-soumises à des forces de marées (voir annexe F). Enfin, Wicht & Tilgner (2010) montrent dans leur revue que sa présence au sein de la Terre actuelle est improbable, mais qu'il est possible que l'instabilité elliptique soit présente au sein des géantes gazeuses du système solaire.

Ce chapitre reconsidère ces études précédentes afin de quantifier plus précisément la stabilité de ces différents astres, et surtout les conséquences observables de la présence de l'instabilité elliptique. En section 4.1, nous considérons en détails un premier cas d'application : la Lune primitive. Proposant une nouvelle interprétation de l'origine du magnétisme lunaire, encore mal expliquée, nous combinons nos résultats pour évaluer quantitativement la pertinence d'un tel scénario et démontrons son accord avec les données disponibles. La section 4.2 reprend ainsi les différents scénarios possibles pouvant mener à l'excitation d'une instabilité elliptique dans un contexte astrophysique général, liant mécanique des fluides et mécanique céleste. Les études et résultats théoriques de la littérature sont alors étendus par une analyse théorique WKB prenant en compte simultanément un gradient local de température dans la couche fluide considérée et un champ magnétique externe axial provenant d'un mécanisme dynamo indépendant ou d'une source

externe. Ces nouveaux résultats, obtenus dans le cas de la TDEI mais aussi de la LDEI, permettent de réévaluer la stabilité des corps telluriques du système solaire mais aussi d'étudier l'éventuelle présence de l'instabilité elliptique au sein d'exoplanètes telluriques. Enfin, en section 4.3, le cas des corps gazeux est abordé, en considérant particulièrement les systèmes extra-solaires à Jupiters chauds¹.

1. Les Jupiters chauds (ou *Pégasides* du nom de la première planète de ce type, découverte autour de 51 Pégasi) sont des exoplanètes souvent plus massives que Jupiter, orbitant très proche de leur étoile.

4.1 Champ magnétique lunaire

Si la Lune ne génère plus de champ magnétique actuellement, les roches en surface portent la trace d'un champ magnétique passé. Depuis sa découverte il y a plus de quarante ans, son origine reste inexpliquée. Les signaux mesurés semblent nécessiter une source interne, temporaire et auto-entretenue de champ magnétique i.e. un mécanisme dynamo. Cependant, le flux de chaleur à travers le noyau liquide lunaire n'a jamais été suffisant pour alimenter une dynamo de type convectif. Nous proposons ici un modèle alternatif basé sur un forçage mécanique. A l'époque du grand bombardement tardif (ou LHB pour *Late Heavy Bombardment*), les impacts météoritiques, violents et fréquents, pourraient avoir temporairement désynchronisé la Lune, excitant dans son noyau liquide une instabilité elliptique générant une dynamo. Dans cette section, nous combinons nos résultats pour montrer qu'un tel mécanisme est capable de générer des champs magnétiques en surface de quelques μT sur quelques dizaines de milliers d'années, en accord avec les mesures paléomagnétiques.

Ce travail inter-disciplinaire résulte d'une collaboration : M. A. Wieczorek a contribué à l'analyse des anomalies magnétiques des cratères d'impact et des vitesses de rotation lunaires après impact, Ö. Karatekin a contribué à l'étude de l'évolution temporelle de la rotation lunaire après impact, et M. Laneuville a mené l'analyse de l'évolution temporelle des couches de roches d'impact fondues. L'analyse hydrodynamique du scénario, menée par M. Le Bars et moi-même, est présentée ci-dessous après avoir introduit le contexte et les différents scénarios possibles.

4.1.1 Problématique

Il est usuellement admis que maintenir un champ magnétique au sein d'un corps céleste implique l'existence d'une couche fluide conductrice en convection. Cependant, le modèle de dynamo par convection thermo-solutale, communément accepté pour expliquer le champ magnétique terrestre, présente des difficultés pour certaines planètes. C'est par exemple le cas de la Lune. Des mesures de champ magnétique montrent que des portions de croûte lunaire sont fortement magnétisées, et les analyses paléomagnétiques de roches lunaires indiquent que certaines possèdent une magnétisation rémanente stable (Fuller & Cisowski, 1987). Après une quarantaine d'années d'analyse, l'origine du champ magnétique ayant magnétisé la croûte lunaire est encore controversée (Wieczorek *et al.*, 2006b; Garrick-Bethell *et al.*, 2009). Une hypothèse propose que la convection thermique du noyau lunaire ait généré une dynamo, mais cette théorie présente des difficultés du fait de la petite taille du noyau lunaire et des amplitudes de champ magnétique ainsi générées en surface. Stegman *et al.* (2003) et Takahashi & Tsunakawa (2009) ont proposé un modèle basé sur une augmentation temporaire de la vigueur de la convection dans le noyau par déstabilisation d'une couche isolante du manteau. Cependant, ce scénario nécessite une valeur particulière du contraste de densité, difficile à obtenir selon les modèles standards de différenciation planétaire (Breuer & Moore, 2007). Une autre hypothèse suggère que des impacts pourraient avoir généré ou amplifié des champs pré-existants, notamment aux antipodes des plus grands cratères d'impacts (Hood & Artemieva, 2008).

Deux observations nous ont amenés à proposer un modèle dynamo différent pour

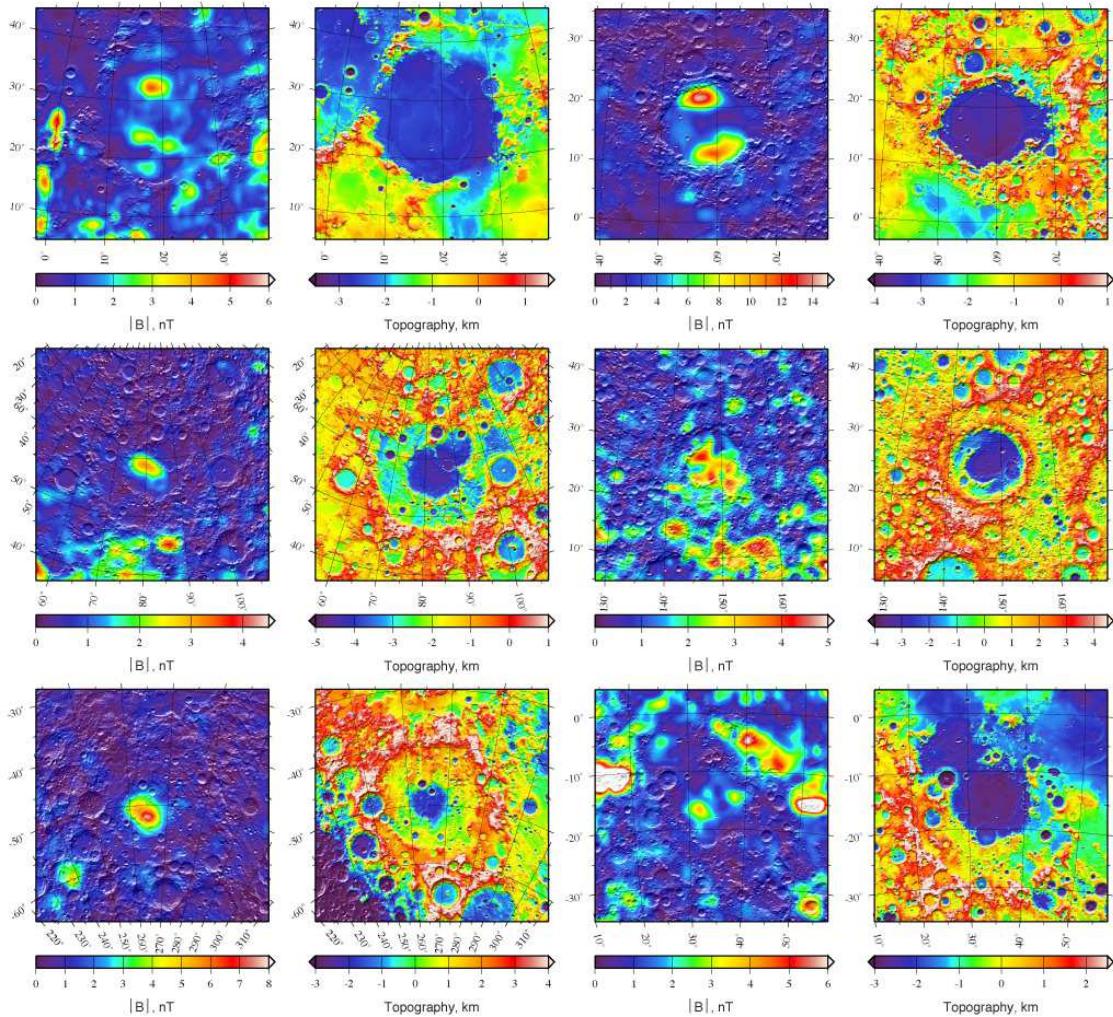


FIGURE 4.1 – Amplitude du champ magnétique total et topographie de surface des cratères d’impact possédant une anomalie centrale de champ magnétique, mesurées à partir de magnétomètres embarqués à bord de sondes spatiales (voir Purucker & Nicholas, 2010). De gauche à droite, chaque paire d’images correspond aux cratères d’impacts Serenitatis et Crisium (première ligne), Humboldtianum et Moscovиense (deuxième ligne) ainsi que Mendel-Rydberg et Nectaris (troisième ligne). Cet ordre correspond à l’âge estimé des cratères, du plus récent au plus ancien selon la chronologie de Wilhelms et al. (1987). Figure de M. A. Wieczorek.

générer des champs magnétiques de longue durée, où l'énergie magnétique provient directement de la rotation de la Lune plutôt que d'effets thermiques. Premièrement, six cratères d'impacts datant de l'époque du Nectarien² (voir figure 4.1) présentent des anomalies magnétiques centrales (Halekas *et al.*, 2003). Ce sont très probablement les couches d'impact en fusion qui ont acquis cette magnétisation thermo-rémanente tandis qu'elles se refroidissaient en-dessous de la température de Curie. Un tel processus se déroule sur des échelles de temps relativement longues et nécessite donc un champ magnétique stable, présent sur des dizaines de milliers d'années après l'impact. Deuxièmement, chacun de ces six cratères d'impact indique que la rotation lunaire a dû être fortement perturbée. Ces événements pourraient avoir soit désynchronisé la Lune en lui imprégnant une vitesse de rotation, soit induit des librations de forte amplitude qui pourraient avoir duré quelques dizaines de milliers d'années (Wieczorek & Le Feuvre, 2009).

Une quantité d'énergie gigantesque est stockée dans les mouvements de rotation propre et de révolution orbitale de la Lune. La question est de savoir si cette énergie peut être efficacement transmise dans l'écoulement du noyau liquide, question qui fait débat depuis les années 60 (e.g. Fearn, 1998). Malkus (1963, 1968) a proposé que des instabilités inertielles pourraient être ce moyen de conversion. Bien que la proposition de Malkus fut tout d'abord rejetée sur des arguments considérant des mouvements laminaires (Rochester *et al.*, 1975; Loper, 1975), il a été prouvé depuis, analytiquement et numériquement que les instabilités inertielles impliquent en effet de grandes quantités d'énergie (Kerswell (1996); Le Bars *et al.* (2010) ; voir aussi section 2.3.6) et sont dynamogènes (Tilgner, 2005, 2007a; Wu & Roberts, 2009).

4.1.2 Dynamo et instabilité elliptique

Il n'a pas encore été explicitement prouvé que l'écoulement associé à l'instabilité elliptique était capable de générer une dynamo. En effet, la non-axisymétrie nécessaire de la géométrie pose une réelle difficulté pour les études numériques : la plupart des codes utilisent en effet une décomposition en harmoniques sphériques pour accélérer le calcul. Cependant, l'instabilité elliptique est une instabilité inertuelle, de même que l'instabilité de précession qui est capable de générer une dynamo (Tilgner, 2005, 2007a; Wu & Roberts, 2009; Nore *et al.*, 2011). L'instabilité de précession diffère de l'instabilité elliptique uniquement par le fait que les nombres d'onde azimutaux des deux ondes inertielles en résonance diffèrent de 1 au lieu de 2. De plus, notons que le mode spin-over de l'instabilité elliptique est le même écoulement que le mode de Poincaré forcé par la précession (voir section 2.5). Étant donné la forte similarité entre les instabilités elliptique et de précession, nous supposons que l'instabilité elliptique est également dynamogène. La topologie du champ magnétique externe d'une dynamo générée par précession n'a pas été étudiée de façon très détaillée, mais il apparaît que la composante dipolaire et les composantes multi-polaires de bas degré jouent un rôle important (Tilgner, 2005, 2007a).

Le processus dynamo apparaît dès lors que le nombre de Reynolds magnétique $Rm = uR/\nu_m$ est assez grand, où ν_m est la diffusivité magnétique (ici prise égale à $1 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, comme dans le noyau terrestre), u la vitesse typique de l'écoulement généré par l'instabilité

2. Le Nectarien est une période géologique de la Lune s'étendant de -3 920 à -3 850 millions d'années. Elle correspond à la formation par impacts météoritiques des grands bassins lunaires.

(i.e. $u \approx \Delta\Omega R$ pour l'instabilité elliptique) et R le rayon typique de la couche fluide considérée. Les simulations de dynamo générée par précession donnent un seuil entre 770, obtenu pour un écoulement laminaire, et 200 – 300 pour un écoulement complètement turbulent (Tilgner, 2005, 2007a; Wu & Roberts, 2009). Le Reynolds magnétique critique pour obtenir une dynamo générée par instabilité elliptique est fixé ici à 1000. Cependant, notons que les résultats obtenus (section 4.1.3) sont en fait relativement indépendants de cette valeur : la génération dynamo dans notre modèle dépend principalement de l'existence d'une instabilité elliptique avec un taux de croissance suffisamment grand.

L'amplitude du champ magnétique B généré par une dynamo d'instabilité elliptique peut être estimée en adaptant les lois d'échelle des dynamos de convection au cas considéré ici i.e. un forçage mécanique. L'amplitude du champ magnétique créé dans le noyau est contrôlée par la puissance mécanique disponible plutôt que par un équilibre de forces (Christensen & Aubert, 2006; Christensen *et al.*, 2009; Christensen, 2010). Pour les instabilités elliptiques considérées ici, les effets thermiques ne modifient pas l'amplitude des écoulements générés (section 2.6 ; Lavorel & Le Bars (2010)). Le noyau est donc modélisé comme un fluide incompressible, conducteur électrique, tout effet thermique ou de stratification étant négligé. Puisque les dynamos de précession (et donc d'instabilité elliptique par hypothèse) ne dépendent pas d'une convection thermique, la puissance mécanique dissipée par l'instabilité est supposée complètement disponible pour la génération d'un champ magnétique.

La puissance mécanique dissipée pour un écoulement laminaire peut être estimée (Le Bars *et al.* (2010) ; voir aussi section 2.3.6) par :

$$P_L \approx \frac{8}{3}\pi R^3 \eta |\Delta\Omega|^2 \frac{R}{\delta} \quad (4.1)$$

où $\delta \approx R\sqrt{E}$ est l'épaisseur de la couche d'Ekman (e.g. Greenspan, 1968), $\eta = \rho\nu$ est la viscosité dynamique du noyau et ρ sa densité. Cette dissipation visqueuse résulte des différences de vitesse entre le noyau fluide et le manteau solide au niveau de la couche d'Ekman laminaire localisée à la paroi noyau-manteau. Ainsi, (4.1) donne une borne inférieure de la puissance mécanique dissipée, négligeant la turbulence de volume qui apparaît généralement pour l'instabilité elliptique aux faibles nombres d'Ekman, limite pertinente pour les applications planétaires (Le Bars *et al.*, 2010). Cependant, cette dissipation volumique est en E , alors que la dissipation surfacique est en $E^{1/2}$: l'équation (4.1) doit donc donner l'ordre de grandeur correct. La dissipation de l'énergie associée aux modes de l'instabilité elliptique plus complexes que le mode de spin-over sera également principalement due à la dissipation visqueuse de leur énergie cinétique à travers la couche d'Ekman. Cela implique que l'échelle de puissance dissipée donnée par l'équation (4.1) ne devrait pas dépendre du mode sélectionné. Ainsi, avec un préfacteur f_p , a priori supérieur à 1, la puissance dissipée est donnée par l'équation (4.1).

La même équation que (4.1), à un facteur 2 près, fut obtenu par Williams *et al.* (2001) en considérant la faible précession de l'axe de rotation lunaire (voir leurs équations (81a) et (54)). Ce n'est pas surprenant étant donné la similarité entre le mode de spin-over de l'instabilité elliptique et le mode de Poincaré excité par précession (section 2.5). Cependant, notons que les instabilités elliptiques génèrent des mouvements d'amplitude beaucoup plus grande que les petits mouvements forcés par précession considérés par

Williams *et al.* (2001), où $\Delta\Omega = \Omega_{spin} \sin I$, I étant l'angle de précession (supposé petit) entre l'équateur et le plan écliptique. L'instabilité elliptique est capable de générer des écoulements d'amplitude $\Delta\Omega$, de l'ordre de Ω_{spin} , donc de dissiper beaucoup plus d'énergie, disponible pour la dynamo. Même dans la limite des écoulements de petite amplitude, Yoder & Hutchison (1981) remarquent qu'une autre échelle pour le frottement visqueux à la paroi noyau-manteau lunaire doit être considérée si la couche visqueuse devient turbulente : dans ce cas, le taux de dissipation dépend d'une viscosité turbulente au lieu de la viscosité moléculaire. Le problème du couplage turbulent noyau-manteau n'a pas encore été résolu explicitement, mais une estimation raisonnable est donnée par Yoder & Hutchison (1981) et redéveloppée par Williams *et al.* (2001) (voir leurs équations (81a) and (55)) :

$$P_T \approx \frac{3}{4}\pi^2\kappa R^5\rho|\Delta\Omega|^3f_p, \quad (4.2)$$

où κ est une constante de l'ordre de $7.3 \cdot 10^{-4}$ pour un noyau lunaire liquide de 350 km avec une viscosité $\nu_m = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, valeurs utilisées par la suite, et f_p la constante introduite ci-dessus pour tenir compte de la complexité du mode sélectionné.

Afin d'estimer l'amplitude du champ magnétique créé par instabilité elliptique, nous suivons l'approche de Christensen & Aubert (2006) et relions la puissance dissipée par l'instabilité P à la dissipation Joule D_{ohm} , i.e. $D_{ohm} = f_{ohm}P$ (leur équation 24), où f_{ohm} est une constante qui dépend de la source d'énergie alimentant la dynamo. De plus, supposant que le rapport entre l'énergie magnétique

$$E_B = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{B_{core}^2}{2\mu} \quad (4.3)$$

et la dissipation Joule est égal au temps de dissipation magnétique (eq. 3 de Christensen & Tilgner, 2004),

$$\frac{E_B}{D_{ohm}} = 1.74 \frac{R}{u}, \quad (4.4)$$

l'amplitude du champ magnétique dans le noyau lunaire est :

$$B_{core,L} = \sqrt{7.0 f_{ohm} f_p \mu \rho R |\Delta\Omega| \sqrt{\nu_m \Omega_{spin}}} \quad (4.5)$$

pour l'estimation laminaire de puissance dissipée (4.1) et

$$B_{core,T} = \sqrt{6.1 f_{ohm} f_p \kappa \mu \rho R^2 |\Delta\Omega|^2} = \sqrt{0.0045 f_{ohm} f_p \mu \rho R^2 |\Delta\Omega|^2} \quad (4.6)$$

pour l'estimation turbulente de la puissance dissipée (4.2), où μ est la perméabilité magnétique du fluide. Du fait de l'atténuation, il est probable que seule la composante dipolaire du champ magnétique soit visible en surface, ce qui donne finalement

$$B \approx f_{dip} B_{core} (R/R_{planet})^3 \quad (4.7)$$

où R_{planet} est le rayon planétaire moyen, et f_{dip} est le rapport entre la composante dipolaire du champ magnétique et le champ magnétique total à la surface du noyau, qui

Paramètres	Valeurs
Rayon du noyau lunaire	$R = 350 \text{ km}$
Viscosité du noyau lunaire	$\nu_m = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$
Densité du noyau lunaire	$\rho = 7500 \text{ kg.m}^{-3}$
Rayon moyen de la Lune	$R_{\text{Lune}} = 1737.15 \text{ km}$ (Araki <i>et al.</i> , 2009)
Masse de la Lune	$M_{\text{Lune}} = 7.348 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ (Konopliv <i>et al.</i> , 2001)
Rayon moyen de la Terre	$R_{\text{Terre}} = 6378 \text{ km}$ (Mularie, 2000)
Masse de la Terre	$M_{\text{Terre}} = 5.973 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ (Mularie, 2000)
Moment d'inertie polaire lunaire	$C = 0.532 M_{\text{Lune}} R_{\text{Lune}}^2$ (Konopliv <i>et al.</i> , 1998)
Paramètre de dissipation	$k_2/Q \in [6.3 \cdot 10^{-4}; 0.015]$
Constante turbulente	$\kappa = 7.3 \cdot 10^{-4}$ (Williams <i>et al.</i> , 2001)

TABLE 4.1 – Liste des paramètres et valeurs utilisés.

dépend du mode dynamo sélectionné. Notons que l'ellipticité de l'interface noyau-manteau n'apparaît pas dans ces formules : la valeur de β détermine si une instabilité elliptique peut être excitée ou non, mais une fois l'écoulement développé, les mouvements fluides et le champ magnétique créé dépendent uniquement de la rotation différentielle entre le noyau fluide et le manteau³.

Les équations développées ci-dessus donnent une estimation du champ magnétique créé par l'instabilité elliptique mais différentes sources d'incertitudes existent, ce que reflète le préfacteur inconnu $f_{dip}\sqrt{f_{ohm}f_p}$. Christensen & Aubert (2006) estiment le facteur d'efficacité pour la conversion de la puissance mécanique en dissipation Joule entre 0.3 dans leurs simulations numériques à 1 pour le noyau terrestre. Leurs simulations MHD (Christensen *et al.*, 2009) donnent un rapport entre le champ dipolaire externe et le champ interne du noyau f_{dip} entre 1/4 et 1/15 pour une dynamo convective de type terrestre. D'un autre côté, le préfacteur f_p , égal à 1 pour le mode de spin-over, est selon toute vraisemblance plus grand que 1 pour des écoulements plus complexes. S'ajoute à ces préfacteurs, une incertitude sur le rayon du noyau lunaire, e.g. $\pm 50 \text{ km}$, ce qui mène à un champ magnétique de surface modifié d'un facteur 1.6. Une incertitude d'un facteur 10 sur la viscosité moléculaire mène à un facteur d'environ 1.7 d'incertitude sur l'amplitude du champ estimé par la loi d'échelle laminaire. Finalement, comme le rappellent Williams *et al.* (2001), les différentes estimations de κ donnent une gamme entre 0.002 et 0.0005 : par comparaison avec la valeur nominale $\kappa = 0.00073$, l'amplitude du champ magnétique est incertaine d'un facteur d'environ 1.7. Finalement, afin d'obtenir des bornes inférieures robustes, un préfacteur de 0.1 est considéré par la suite dans nos calculs de champ magnétique.

4.1.3 Application à la Lune

Les valeurs des paramètres utilisés dans notre modèle sont rassemblées dans la table 4.1.2. Un noyau liquide d'un rayon moyen de 350 km est supposé, en accord avec les caractéristiques du noyau lunaire actuel, déterminées par des analyses sismiques récentes

3. Ce qui est cohérent avec ce qui a été vu en chapitre 2 : la modification de l'écoulement par l'instabilité est de l'ordre de grandeur de la rotation, pas de la déformation elliptique.

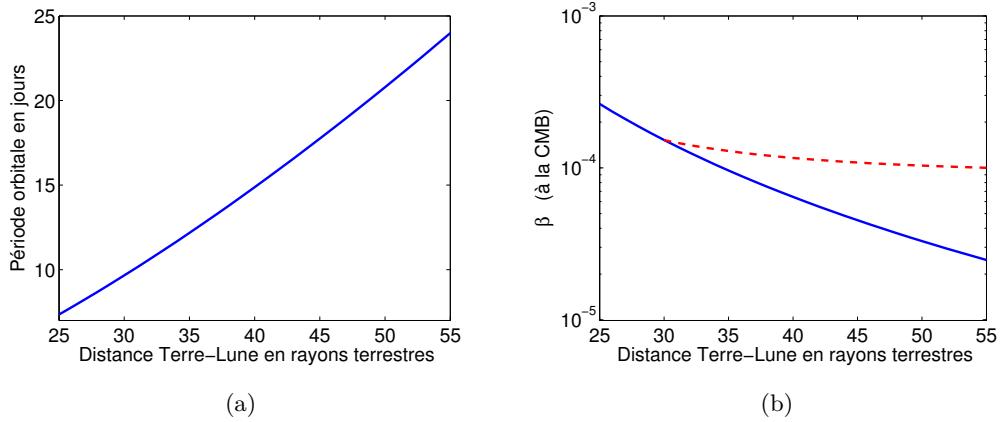


FIGURE 4.2 – (a) *Période orbitale et (b) ellipticité β de la CMB en fonction de la distance Terre-Lune. La Lune est supposée être en rotation synchrone et l'excentricité de l'orbite lunaire ainsi que l'obliquité lunaire sont considérées comme nulles. Dans ce modèle, la Lune possède une croûte de 45 km d'épaisseur et de densité 2900 kg.m^{-3} , un manteau de densité 3344 kg.m^{-3} , et un noyau de rayon 350 km et de densité 7500 kg.m^{-3} , ce qui est compatible avec la masse observée de la Lune. En figure b, la ligne continue correspond à une Lune purement hydrostatique et la ligne discontinue correspond au cas où la frontière noyau-manteau est en équilibre hydrostatique avec une lithosphère non-hydrostatique.*

(Weber *et al.*, 2011) et d'autres données géophysiques (e.g. Wieczorek *et al.*, 2006*b*). Pour le rapport k_2/Q , où k_2 est le nombre de Love d'ordre 2 du potentiel et Q le facteur de qualité des marées (*tidal quality factor*), deux cas limites sont considérés : une limite basse avec la valeur actuelle de $k_2/Q = 6.3 \cdot 10^{-4}$ (Williams *et al.*, 2010), et une limite haute donnée par la mesure $k_2/Q = 0.015$ pour la lune galiléenne Io (Lainey *et al.*, 2009), valeur typique probablement représentative de la Lune durant son évolution primitive.

L'amplitude moyenne en temps de l'ellipticité de la frontière noyau-manteau (ou CMB pour *Core-Mantle Boundary*) est déterminée avec un simple modèle hydrostatique à 3 couches de la Lune en orbite circulaire autour de la Terre. Bien que la lithosphère lunaire ne soit certainement pas en équilibre hydrostatique (e.g. Garrick-Bethell *et al.*, 2006), il est communément admis que le manteau inférieur amortit énormément les ondes sismiques et est en grande partie responsable de la valeur extrêmement importante de la dissipation en volume Q^{-1} (voir la discussion de Wieczorek *et al.*, 2006*a*). Il est donc raisonnable de considérer une frontière noyau-manteau conforme à la forme d'équilibre sur des temps géologiques, même si la lithosphère est hors-équilibre. Nos estimations des périodes de rotation et des ellipticités hydrostatiques équatoriales de la frontière (en supposant une rotation synchrone) sont données en figure 4.2 en fonction de la distance Terre-Lune.

Bien que l'ellipticité ait pu atteindre 0.3 lorsque la Lune était au voisinage du lobe de Roche, la plupart des modèles d'évolution prédisent une évolution rapide de la Lune vers une distance de 25 à 35 rayons terrestres en moins de 100 millions d'années (Webb, 1982; Ross & Schubert, 1989; Williams, 2000, 2004). Considérant donc une évolution

entre 25 rayons terrestres et 55 rayons terrestres (la distance Terre-Lune actuelle étant de 60 rayons terrestres), l'ellipticité de la CMB donnée par la théorie hydrostatique est comprise entre $2.5 \cdot 10^{-5}$ et $2.6 \cdot 10^{-4}$, pour des distances Terre-Lune respectives de 25 et 55 rayons terrestres. Supposant la Lune synchronisée, le nombre d'Ekman varie entre $2.7 \cdot 10^{-12}$ aujourd'hui et $8.3 \cdot 10^{-13}$. Le rapport $\beta/E^{1/2}$ est donc toujours supérieur à ~ 15 , et par conséquent le noyau liquide lunaire pourrait potentiellement avoir développé une instabilité elliptique au cours de son évolution. Cependant, une telle instabilité nécessite une rotation différentielle instantanée non-nulle entre le fluide du noyau et la déformation de la frontière noyau-manteau, au moins temporairement. Deux scénarios sont alors envisageables :

1. Une désynchronisation complète de la Lune après un impact suffisamment violent : l'instabilité elliptique éventuellement excitée est alors appelée TDEI pour *Tides Driven Elliptical Instability*
2. Une libration longitudinale de forte amplitude après un impact : l'instabilité elliptique éventuellement excitée est alors appelée LDEI pour *Libration Driven Elliptical Instability*

Comme nous le verrons, si la Lune est initialement désynchronisée, elle passera également par une phase de librations longitudinales de grande amplitude au cours de son retour vers l'état synchronisé. Ces deux scénarios peuvent donc prendre place successivement après un impact donné. Étant donné les temps très courts de resynchronisation (voir sections suivantes), nous supposons que la forme hydrostatique de la CMB avant impact est maintenue durant ces deux scénarios. Les résultats obtenus pour ces deux scénarios sont regroupés en table 4.1.3 et détaillés ci-dessous. Étant donné que la lithosphère lunaire est actuellement loin de l'équilibre hydrostatique, nous considérons également le cas où la frontière noyau-manteau est en équilibre hydrostatique avec une lithosphère non-hydrostatique. De même que Meyer & Wisdom (2010), nous supposons que le champ de gravité lunaire actuel de degré⁴ 2 résulte principalement de la topographie de surface, figée dans la lithosphère de la Lune primitive. Avec le potentiel gravitationnel associé, ainsi que les potentiels associés à la rotation et aux marées, la forme d'équilibre hydrostatique de la frontière noyau-manteau est calculée. La prise en compte de ce potentiel gravitationnel non-hydrostatique mène à des ellipticités de la frontière noyau-manteau qui sont de 1.3 à 2.4 fois supérieures à celles d'une Lune purement hydrostatique, pour des distances Terre-Lune égales à respectivement 35 et 45 rayons terrestres. L'écart à l'équilibre hydrostatique de la Lune pourrait avoir été encore plus grand dans le passé du fait de la relaxation visqueuse des contraintes : nous considérons donc aussi comme cas limite des ellipticités 10 fois supérieures à l'ellipticité hydrostatique. Bien que les ellipticités retenues ne modifient pas l'amplitude du champ magnétique éventuellement généré, ces valeurs influencent les taux de croissance de l'instabilité elliptique et l'espace de paramètres où elle peut se développer.

Finalement, notons que les marées dynamiques élastiques se superposent à la forme statique de la frontière noyau-manteau et qu'elles peuvent également contribuer à la dissipation visqueuse et à l'excitation d'une instabilité elliptique. Ces marées dynamiques

4. Au sens des harmoniques sphériques.

Origine de la rotation différentielle	Espace des paramètres exploré	Durée typique de la dynamo	Ordre de grandeur de B en surface
Désynchronisation après un impact météoritique (TDEI)	Distance Terre-Lune entre 25 et 55 rayons terrestres avec une période de rotation après impact entre 3 et 35 jours	$2 \cdot 10^3$ à $8 \cdot 10^3$ ans	$0.1 - 0.3 \mu\text{T}$ (lamininaire) ; $0.3 - 4 \mu\text{T}$ (turbulent)
Librations après un impact météoritique (LDEI)	Distance Terre-Lune entre 25 et 55 rayons terrestres avec une libration entre 0 et 90°	10^2 à 10^5 ans	$\sim 0.08 - 0.14 \mu\text{T}$ (lamininaire) ; $0.3 - 1 \mu\text{T}$ (turbulent)

TABLE 4.2 – *Deux scénarios de génération d'une dynamo par instabilité elliptique. La borne supérieure de l'amplitude du champ magnétique est obtenue pour une frontière noyau manteau 10 fois plus grande que sa valeur hydrostatique. Dans le cas d'une rotation non-synchrone, les amplitudes de champ considérées correspondent uniquement à des états rotationnels accessibles après un impact à 5 km. s^{-1} , formant des cratères de 700 km de diamètre.*

élastiques oscillent ou tournent par rapport à la forme statique de la CMB, respectivement pour le scénario de librations libres ou de désynchronisation complète. Une rotation synchrone avec une orbite elliptique génère également des marées dynamiques, mais avec une amplitude égale à celle des librations optiques. L'amplitude de ces marées dynamiques est beaucoup plus petite que la déformation hydrostatique de la frontière noyau-manteau et la borne inférieure sur le seuil de l'instabilité elliptique $\beta/E^{1/2} = 5.24$ montre qu'une amplitude de marées dynamiques inférieure à 0.9 m à la frontière noyau-manteau n'aura pas d'influence sur l'écoulement dans le noyau. Utilisant une rigidité élastique de 70 Gpa et une viscosité de 10^{22} Pa.s , valeurs satisfaisant les mesures actuelles des nombres de Love lunaires, les marées dynamiques prédictes à la CMB sont d'environ 1 cm actuellement, et 8 cm pour une distance Terre-Lune de 30 rayons terrestres. Avec les paramètres rhéologiques actuels, les marées dynamiques sont donc trop petites pour avoir une influence significative sur l'écoulement et nous considérons donc par la suite uniquement l'ellipticité statique.

4.1.3.1 Scénario 1 : désynchronisation après impact

Le moment angulaire et la vitesse de rotation propre de la Lune sont instantanément modifiés après un impact avec un astéroïde ou une comète. Après un impact violent, la Lune pourrait s'être désynchronisée (Melosh, 1975; Wieczorek & Le Feuvre, 2009) si le changement de vitesse angulaire de la Lune autour de son axe de rotation est supérieur à la fréquence de libration libre $\omega_{lib} = 0.026 \Omega_{spin}$ (voir ci-dessous). Le changement de vitesse angulaire de la Lune autour de son axe de rotation après un impact est donné par

$$\Delta \Omega = \frac{m}{C} R_{Lune} v \cos i |\cos \Psi| , \quad (4.8)$$

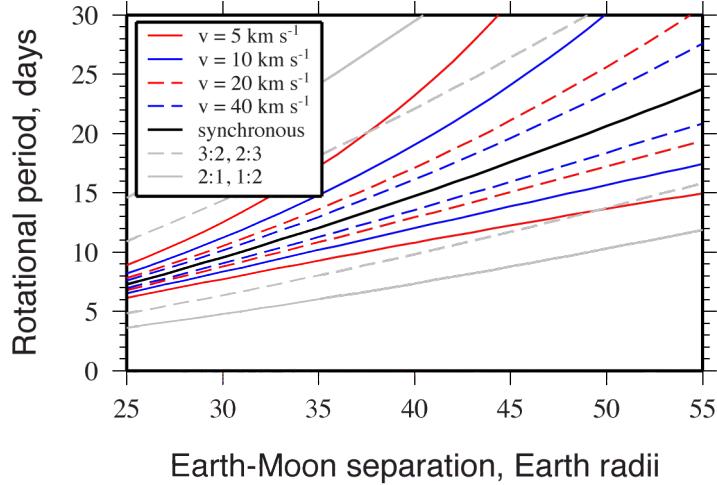


FIGURE 4.3 – *Période de rotation propre de la Lune après un impact ayant formé un cratère de 700 km de diamètre. Les changements de vitesse de rotation (prograde ou rétrograde) par rapport à la rotation synchrone (noir) sont calculés en considérant un impact moyen, avec un impacteur de densité 3500 kg.m^{-3} , et des vitesses d'impact de 5, 10, 20 et 40 km.s^{-1} . Les vitesses de rotation correspondant à des résonances spin-orbite 2 : 1, 3 : 2, 2 : 3 et 1 : 2 sont représentées en gris. Figure de M. A. Wieczorek.*

où m est la masse de l'impacteur, v la vitesse d'impact, i l'angle d'impact par rapport à la surface et Ψ l'angle entre le moment angulaire de l'impacteur au moment de l'impact et l'axe de rotation lunaire (Wieczorek & Le Feuvre, 2009). Pour un impacteur de taille et densité données, la taille du cratère d'impact peut être estimée avec les lois d'échelle du régime gravitaire données par Holsapple & Housen (2007). Seule la composante verticale de la vitesse d'impact intervient dans les lois d'échelle pour des impacts obliques, et le diamètre du cratère transitoire est supposé équivalent à la zone (ou cavité) d'excavation, qu'il est possible de déterminer à partir des données gravitationnelles et topographiques lunaires (Wieczorek & Phillips, 1999; Hikida & Wieczorek, 2007).

La fréquence de ces librations libres est donnée par (voir Goldreich & Peale (1966) et l'équation 5 de Lissauer (1985)) :

$$\omega_{lib} = \Omega_{spin} \sqrt{3 \frac{B - A}{C} H(1, e)}, \quad (4.9)$$

où $A < B < C$ sont donc les trois moments d'inertie principaux du manteau lunaire, et $H \approx 1 - 5/2 \cdot e^2 + 13/16 \cdot e^4 + O(e^6)$, où e est l'excentricité orbitale. L'équation (4.9) montre que la fréquence de libration longitudinale, normalisée par la vitesse de rotation lunaire, est indépendante de la distance Terre-Lune et de la taille de l'impacteur. Considérant le noyau liquide de la Lune d'un rayon d'environ 350 km (e.g. Wieczorek *et al.*, 2006a; Weber *et al.*, 2011), nous déduisons dans nos calculs la contribution du noyau au moment d'inertie polaire C mais il convient de remarquer que cela a peu d'effets sur la fréquence de libration

libre. Avec l'excentricité orbitale actuelle⁵, 0.055, et la valeur actuelle $\gamma = (B - A)/C$ (Konopliv *et al.*, 1998), la fréquence de libration libre vaut 0.026. La différence entre les moments d'inertie équatoriaux a probablement décrue avec le temps, par relaxation visqueuse, et la fréquence de libration de la Lune primitive pourrait avoir été un peu plus grande il y a 4 milliards d'années.

Le plus grand des bassins d'impact lunaires ayant une anomalie magnétique centrale est le bassin Serenitatis, pour lequel les données indiquent une zone d'excavation d'environ 700 km de diamètre (Hikida & Wieczorek, 2007). Les autres bassins du Nectarien avec anomalies magnétiques centrales admettent des zones d'excavation d'un diamètre supérieur à 300 km, et tous sont issus d'impacts ayant potentiellement pu désynchroniser la Lune (Wieczorek & Le Feuvre, 2009). En figure 4.3, la période de rotation propre théorique de la Lune est représentée en fonction de la distance Terre-Lune, après un impact ayant créé un cratère de 700 km de diamètre. Pour ces calculs, un impact moyen est supposé, avec une incidence moyenne $i = \Psi = 45^\circ$, et un impacteur d'une densité de 3500 kg.m^{-3} , représentative d'une grande partie des météorites (Consolmagno *et al.*, 2008). Pour des vitesses d'impact de 5, 10, et 40 km.s^{-1} , la taille de l'impacteur a d'abord été déterminée par les lois d'échelles impact/cratère, et le changement de vitesse de rotation estimée à partir de l'équation (4.8). Pour mémoire, la figure 4.3 montre également la vitesse de rotation synchrone et les vitesses de rotation associées aux résonances spin-orbite 2 : 1, 3 : 2, 2 : 3 et 1 : 2. Même si le changement de vitesse angulaire peut être plus grand avec des angles d'impacts différents, un cratère d'un diamètre inférieur à 700 km mène à des changements de vitesse de rotation plus petits.

Après un impact suffisamment violent pour désynchroniser la Lune, une rotation différentielle $\Delta\Omega$ est générée entre le fluide du noyau et la déformation de la frontière noyau-manteau. On considère ici la déformation statique, supposée gelée dans le manteau aux courtes échelles de temps sur lesquelles prend place la resynchronisation. La vitesse angulaire différentielle $\Delta\Omega$ peut être positive ou négative selon les angles d'impact, et une rotation différentielle persistera tant que le fluide n'aura pas atteint la vitesse de rotation du manteau. Le fluide étant en rotation dans un conteneur solide, le manteau, la réponse fluide à ce changement de vitesse de la paroi se déroulera sur un temps d'Ekman, i.e. $\Omega_{spin}^{-1} E^{-1/2}$ (voir section 1.3.5), où Ω_{spin} est la vitesse de rotation propre de la Lune après impact. Cette estimation est naturellement approximative, et se base sur un écoulement laminaire. Considérant une évolution quasi-stationnaire, où le temps typique de réponse fluide est beaucoup plus grand que le taux de croissance de l'instabilité elliptique, on a (voir par exemple l'annexe E.1) :

$$\frac{\sigma_{growth}}{|\Delta\Omega|} = \frac{(3\Delta\Omega + 2\Omega_{spin})^2}{16(\Delta\Omega + \Omega_{spin})^2} \beta - \alpha\sqrt{E}. \quad (4.10)$$

L'instabilité n'existe pas dans la bande interdite $-3/2 < \Omega_{spin}/\Delta\Omega < -1/2$. La rotation propre de la Lune évolue progressivement vers la resynchronisation, sur une échelle de

5. L'excentricité orbitale e est l'excentricité mathématique de l'orbite elliptique i.e. $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$, où a et b sont respectivement le demi-grand et petit axes de l'orbite.

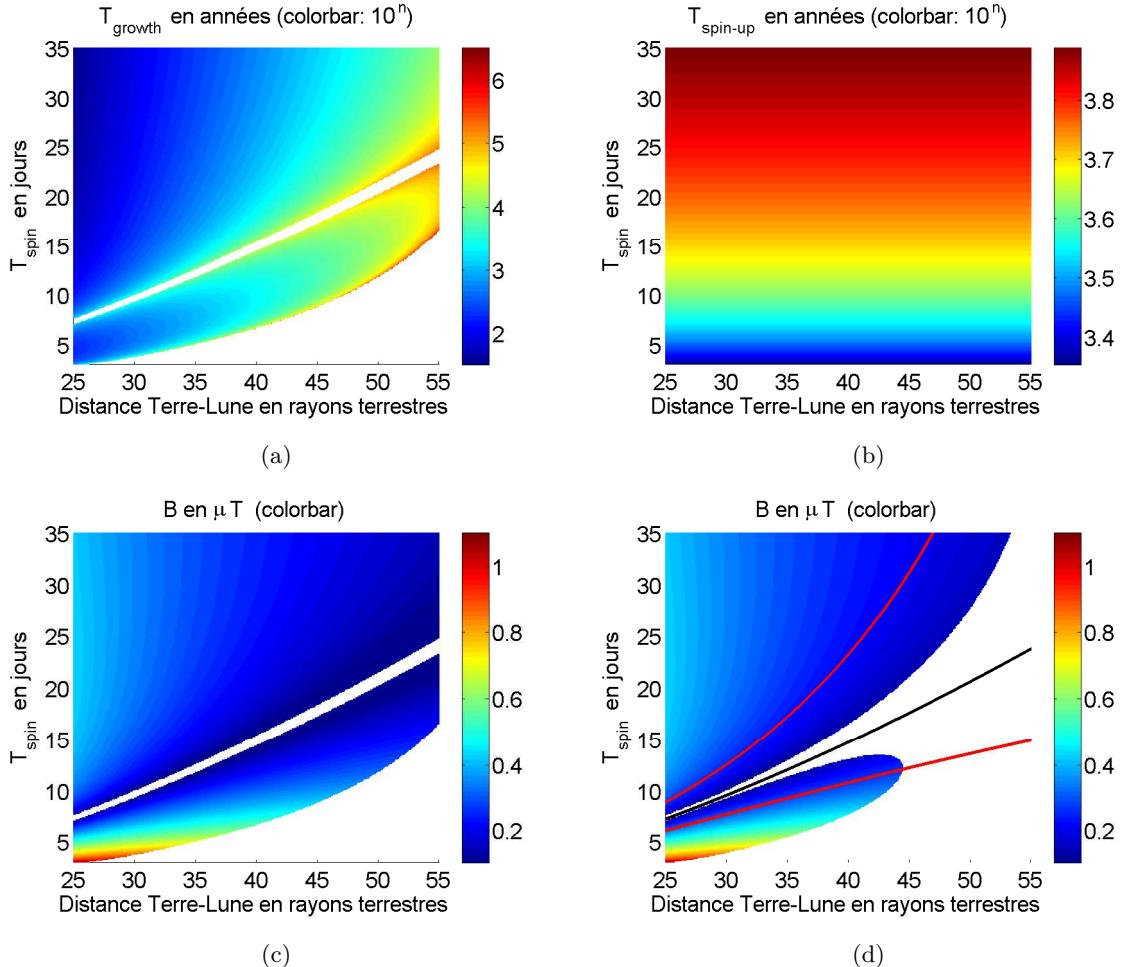


FIGURE 4.4 – (a) Temps de croissance caractéristique de la TDEI dans le cas d'une rotation non-synchrone après un impact, (b) temps de spin-up caractéristique du noyau fluide, (c) champ magnétique estimé à la surface de la Lune (avec l'estimation laminaire de puissance dissipée), calculé quand le nombre de Reynolds magnétique est au-dessus du seuil dynamo. (d) semblable à (c), mais ici le champ magnétique n'est représenté que lorsque le temps de croissance de l'instabilité elliptique est plus court que le temps de spin-up du noyau. En (d) est également représenté l'état de rotation synchrone (ligne continue noire), et la gamme de périodes propres accessibles après un impact de 5 km.s^{-1} ayant formé un cratère de 700 km de diamètre (lignes continues rouges) dans des conditions moyennes d'impact. Pour ces calculs, l'ellipticité de la frontière noyau-manteau est supposée égale à celle d'une Lune purement hydrostatique.

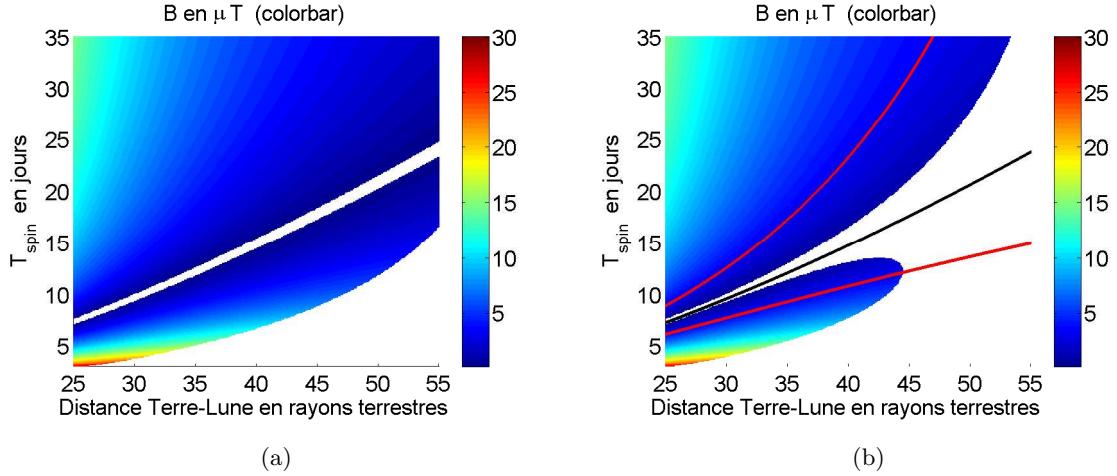


FIGURE 4.5 – Semblable à la figure 4.4 (c,d), mais avec l'estimation turbulente de puissance dissipée.

temps donnée par (Peale, 1977) :

$$T_{synch} = \frac{2 \Omega_{spin} d^6 C}{3 G M_{Terre}^2 R_{Lune}^5 k_2} Q, \quad (4.11)$$

où d est la distance Terre-Lune. Cette échelle de temps est beaucoup plus grande que le temps de réponse fluide en $E^{-1/2}$.

Nous avons évalué ce scénario de génération dynamo pour des distances Terre-Lune entre 25 et 55 rayons terrestres et des périodes de rotation après impact entre 3 et 35 jours. Les résultats pour une ellipticité de la frontière noyau-manteau d'une Lune en équilibre hydrostatique, ainsi que pour une ellipticité 10 fois plus grande, sont représentés sur les figures 4.4 à 4.7. Sur toutes les figures, les zones en blanc correspondent à des espaces de paramètres sans instabilité elliptique, et donc sans génération de dynamo. Plus spécifiquement, dans les zones en blanc autour de l'état synchronisé, la Lune est en libration autour de cet état (ce qui est décrit séparément, en section 4.1.3.2), et les zones en blanc des coins inférieurs droits correspondent à des zones sans instabilité elliptique (taux de croissance négatifs ou présence de la bande interdite). Notons que le seuil dynamo $Rm > 1000$ joue un rôle limité dans la détermination des zones sans dynamo.

Notons que pour un tel scénario, dans le référentiel en rotation avec le fluide, l'instabilité elliptique génère une vitesse angulaire $\Delta\Omega$. Cependant, le manteau solide possède également une rotation différentielle supplémentaire $\Delta\Omega$ par rapport au fluide du noyau après l'impact. Ainsi, la rotation différentielle moyenne à la frontière noyau-manteau est de l'ordre de $2 \Delta\Omega$. D'un côté, l'énergie dissipée par cette rotation différentielle entre le fluide et le manteau pourrait être utilisée pour accélérer le fluide. D'un autre côté, cette dissipation supplémentaire pourrait contribuer à la dynamo. Dans ce cas, selon l'équation 4.6, l'amplitude du champ magnétique serait plus grande d'un facteur $\sqrt{2}$.

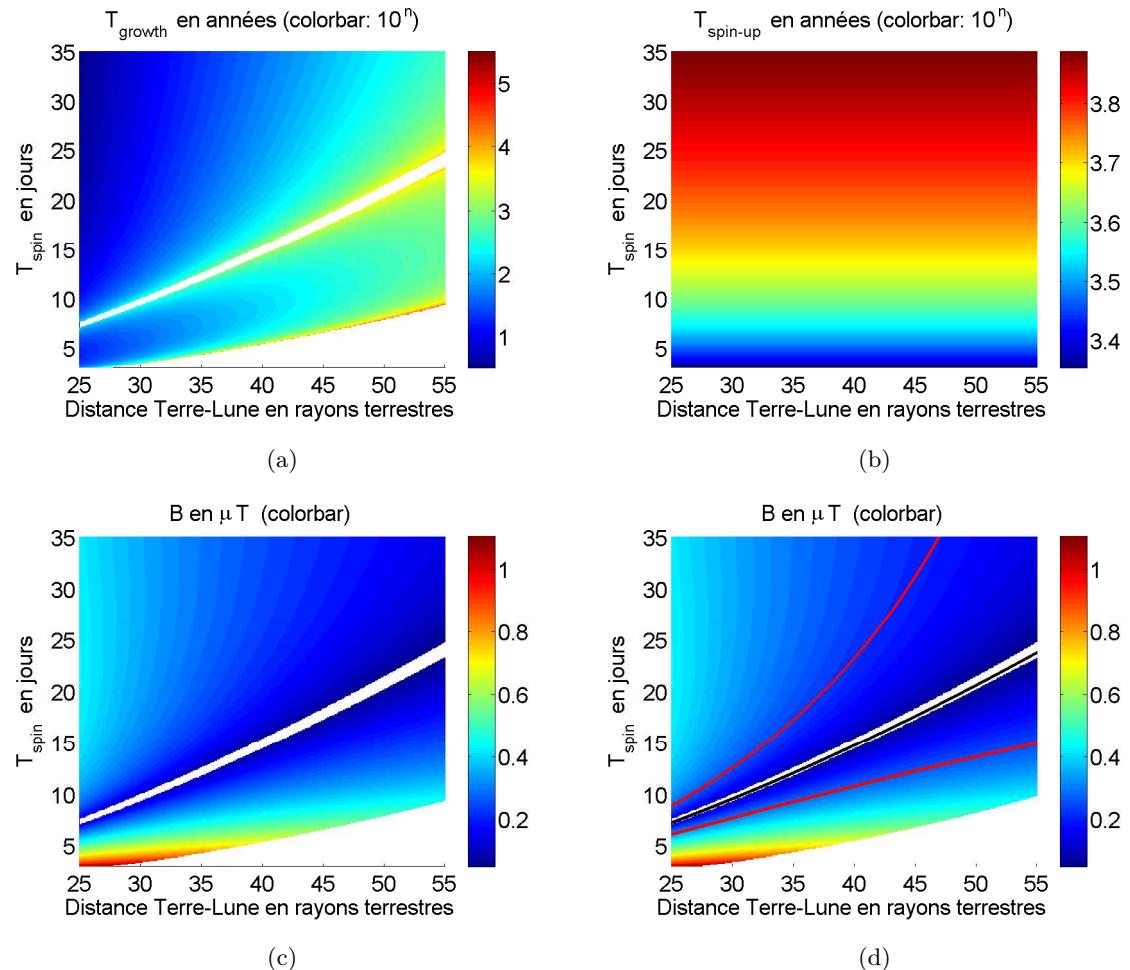


FIGURE 4.6 – Semblable à la figure 4.4 (dans le cas d'une dissipation laminaire), mais avec l'ellipticité de la frontière noyau-manteau 10 fois plus grande que celle d'une Lune purement hydrostatique.

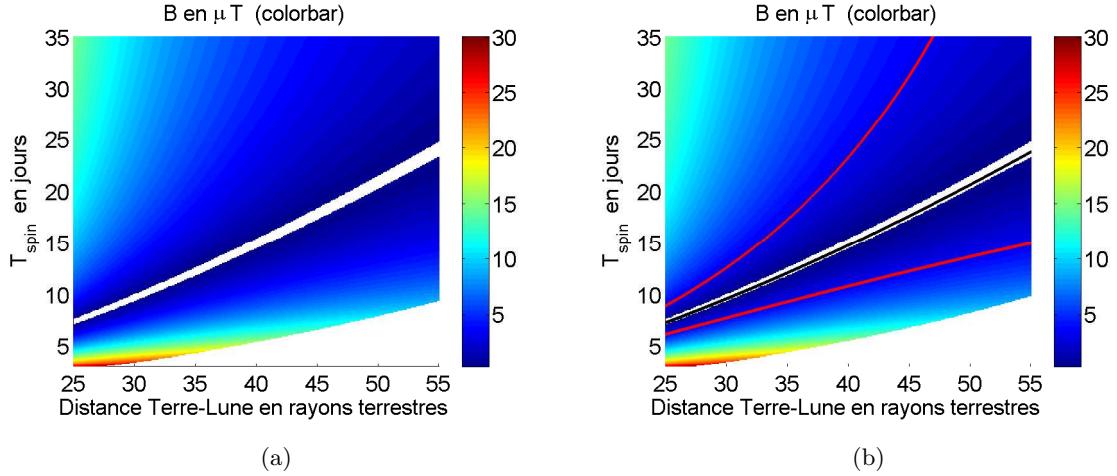


FIGURE 4.7 – Semblable à la figure 4.6 (c,d), mais avec l'estimation turbulente de puissance dissipée.

Pour ce scénario, une fois l'instabilité elliptique développée, le mécanisme dynamo serait actif durant approximativement $10^3 - 10^4$ ans, ce qui correspond au temps de spin-up du noyau. Pour l'espace de paramètres accessibles aux impacts formant un cratère de 700km de diamètre, les champs maximums générés sont d'environ $0.3 \mu\text{T}$ et $4 \mu\text{T}$, respectivement pour les cas de dissipation laminaire et turbulente à la CMB.

4.1.3.2 Scénario 2 : libration après impact

Pour de petits impacts, le changement de vitesse angulaire n'est pas suffisant pour désynchroniser la Lune, et les couples gravitationnels associés à la Terre, agissant sur les moments d'inertie inégaux de la Lune, induisent des librations en latitude et en longitude. Le moment angulaire de la Lune autour de son axe de rotation étant élevé, les librations les plus fortes auront lieu en longitude, avec une fréquence donnée par l'équation (4.9). Après l'impact, l'amplitude de libration décroît exponentiellement avec le temps, sur une échelle de temps typique de (Williams *et al.*, 2001)

$$T_{damp} = \frac{\sqrt{\gamma^*}}{0.497 \sqrt{3} G} \frac{\Omega_{spin} d^6 C}{M_{Terre}^2 R_{Lune}^5 k_2} Q \quad (4.12)$$

où d est la distance Terre-Lune et $\gamma^* = 228.6 \cdot 10^{-6}$. Notons que le noyau fluide ne suit pas les librations du manteau. En effet, le temps de spin-up reste beaucoup plus grand que la période de libration i.e. $\omega_{lib}/\Omega_{spin} \gg E^{1/2}$. Ainsi, le noyau fluide ne peut suivre les variations de vitesse de la frontière noyau-manteau, et continue donc à tourner à la vitesse angulaire constante de l'état synchronisé. Il existe donc une rotation différentielle instantanée entre le fluide et la déformation elliptique, permettant éventuellement à l'instabilité elliptique de croître.

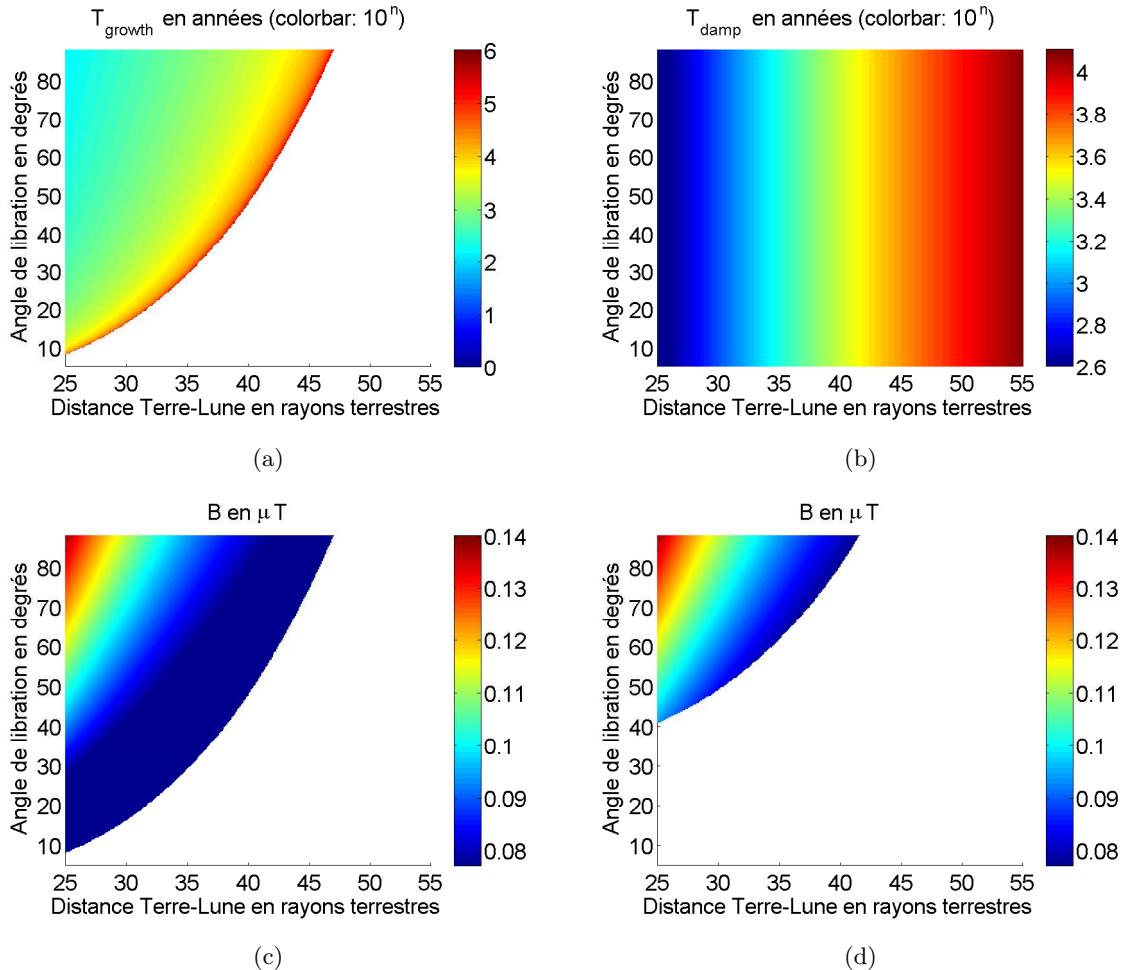


FIGURE 4.8 – (a) Temps de croissance caractéristiques de la LDEI, (b) temps caractéristiques d'amortissement des librations longitudinales, et (c) amplitudes de champ magnétique à la surface de la Lune en utilisant l'estimation laminaire de puissance calculée quand le nombre de Reynolds magnétique est au-dessus du seuil dynamo. En (d), les amplitudes de champ magnétique ne sont représentées que lorsque le temps de croissance de l'instabilité elliptique est plus court que le temps typique d'amortissement des librations. Pour ces calculs, les ellipticités de la frontière noyau-manteau sont prises égales à 10 fois celle d'une Lune purement hydrostatique, et k_2/Q est égal à sa valeur actuelle $6.3 \cdot 10^{-4}$.

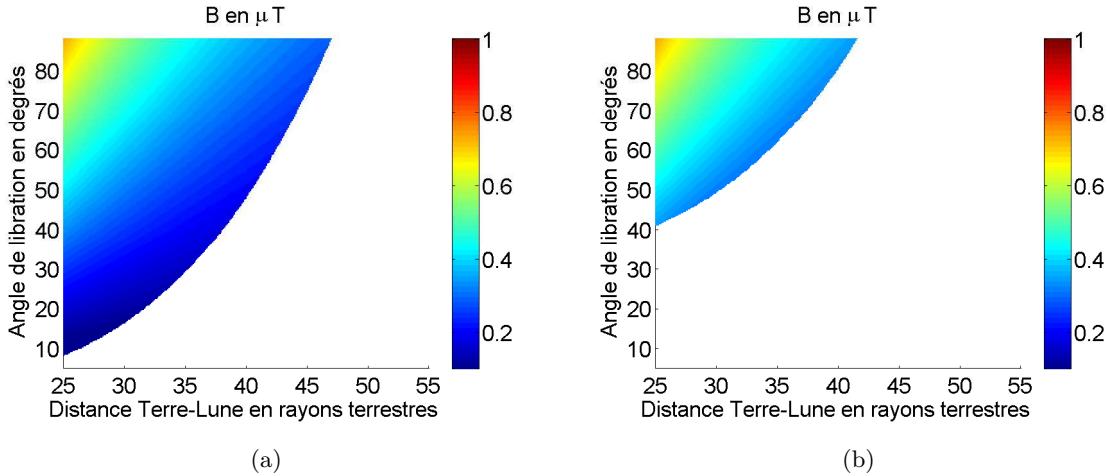


FIGURE 4.9 – Semblable à la figure 4.8 (c,d), mais avec l'estimation turbulente de puissance dissipée.

Le taux de croissance de l'instabilité dans ce cas est donné par (voir par exemple l'annexe E.2) :

$$\omega_{lib} = \frac{16 + (\omega_{lib}/\Omega_{spin})^2}{64} \theta \omega_{lib} \beta - \alpha \Omega_{spin} \sqrt{E} , \quad (4.13)$$

où θ est l'angle de libration longitudinale et α une constante d'ordre $O(1)$ qui dépend des ondes inertielles excitées. Typiquement, $\alpha = 2.62$ pour le spin-over (Lacaze *et al.*, 2004), ce qui sera utilisé dans nos calculs. L'amplitude du champ magnétique est estimée en utilisant la valeur maximum de la rotation différentielle instantanée, i.e. $|\Delta\Omega| = \theta \omega_{lib}$ pour des oscillations sinusoïdales. Notons que pour des angles de libration importants, les oscillations ne sont plus sinusoïdales et la rotation différentielle maximale vaut

$$|\Delta\Omega| = \omega_{lib} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}. \quad (4.14)$$

Dans ce cas, le taux de croissance de l'instabilité elliptique n'est pas connu analytiquement. Nous utilisons donc $|\Delta\Omega| = \theta \omega_{lib}$, en remarquant que cela surestime la vitesse angulaire d'un facteur $\pi/2$ au maximum.

Ce scénario de génération dynamo a été évalué pour des distances Terre-Lune entre 25 et 55 rayons terrestres, des angles de libration entre 0 et 90° et pour les cas limites :

- des ellipticités de la déformation statique de la frontière noyau-manteau correspondant à 10 fois les valeurs avant impact d'une Lune en équilibre hydrostatique, avec k_2/Q égal à sa valeur actuelle de $6.3 \cdot 10^{-4}$.
 - des ellipticités de la déformation statique de la frontière noyau-manteau correspondant aux valeurs avant impact d'une Lune en équilibre hydrostatique, avec k_2/Q égal à sa borne supérieure 0.015.

Le premier scénario est représenté en figure 4.8 et 4.9. En figure 4.8, l'amplitude du champ magnétique généré en surface est calculée avec l'estimation laminaire de puissance dissipée, tandis qu'en figure 4.9, le champ est calculé avec l'estimation turbulente de puissance dissipée. Sur toutes les figures, les zones en blanc correspondent à des zones stables pour l'instabilité elliptique, le seuil dynamo $Rm = 1000$ jouant ici encore un rôle limité dans la détermination des espaces de paramètres sans dynamo.

Les taux de croissance de l'instabilité elliptique augmentent avec l'ellipticité de la CMB, et le temps d'amortissement des librations augmente lorsque k_2/Q décroît. Pour le premier scénario, avec une ellipticité de la CMB importante et la valeur actuelle de k_2/Q , les librations libres après impact peuvent générer des champs magnétiques de surface avec des amplitudes d'environ $0.14 \mu\text{T}$ pour l'estimation laminaire de puissance dissipée (fig. 4.8), et $1 \mu\text{T}$ pour l'estimation turbulente de puissance dissipée (fig. 4.9). Le temps d'amortissement des librations dans ce cas est de l'ordre de 10^2 à 10^4 ans, et une dynamo pourrait alors être activée pour des amplitudes de libration supérieures à 40° . Pour le second scénario, avec des ellipticités de la CMB purement hydrostatiques, et un rapport k_2/Q du type de Io, le noyau reste stable sur toutes la gamme de paramètres explorée. Enfin, avec des ellipticités de CMB dix fois plus grandes que la valeur hydrostatique avant impact et la borne supérieure $k_2/Q = 0.015$, ou des valeurs d'ellipticités purement hydrostatiques et la borne inférieure $k_2/Q = 6.3 \cdot 10^{-4}$, les temps de croissance typiques de l'instabilité restent plus grands que le temps d'amortissement des librations. Ainsi, bien que de fortes amplitudes de libration puissent exciter une dynamo, cela n'est possible que sous certaines conditions.

4.1.4 Conclusion

Des instabilités de marées sont susceptibles d'avoir été excitées sur une large gamme de distance Terre-Lune et de périodes de rotation lunaire après impact. Ainsi, sous l'hypothèse d'un écoulement capable d'exciter et de maintenir une dynamo, ces instabilités pourraient avoir généré des champs magnétiques d'amplitude $0.2 - 4 \mu\text{T}$ à la surface de la Lune après la formation d'un cratère typique de 700 km de diamètre. Ces valeurs peuvent être comparées aux valeurs obtenues à partir des analyses paléomagnétiques de roches lunaires, qui donnent un champ entre $1 \mu\text{T}$ et $100 \mu\text{T}$ (Garrick-Bethell *et al.*, 2009). Notons qu'étant donné le préfacteur f et les incertitudes en jeu, un facteur entre 1 et 10 peut exister pour nos prédictions théoriques. En se basant sur un temps de spin-up laminaire du noyau lunaire, la durée des dynamos générées par impact est prédite entre 2000 et 8000 ans, et une épaisseur d'environ 1 km de roches d'impact en fusion se refroidirait alors en-dessous de leur température de Curie sur cette période, acquérant ainsi une magnétisation thermorémanente (fig. 4.10). En se rapprochant de l'état synchronisé, la Lune passe par une phase de librations libres de grande amplitude, et ces librations pourraient également avoir excité une dynamo, générant des champs en surface de l'ordre de $1 \mu\text{T}$.

Les dynamos excitées par des impacts qui modifient la vitesse de rotation et excitent ainsi des instabilités elliptiques pourraient donc expliquer les anomalies magnétiques lunaires et les magnétisations rémanentes des échantillons analysés. Considérant un scénario différent, des études précédentes ont suggéré que des dynamos excitées par des instabilités elliptiques pourraient avoir existé au sein de Mars (Arkani-Hamed *et al.*, 2008; Arkani-

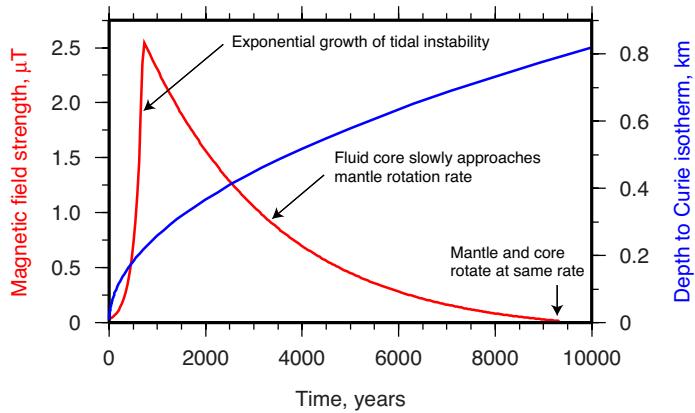


FIGURE 4.10 – Évolution typique du champ magnétique lunaire (courbe rouge) et de la profondeur de la température de Curie (courbe bleue) dans les roches en fusion d'un impact formant un cratère de 700 km de diamètre pour une distance Terre-Lune de 45 rayons terrestres. La phase de croissance exponentielle du champ est estimée avec une perturbation en vitesse dans le noyau de 1 % de la rotation différentielle (entre le noyau et le manteau) et en utilisant une ellipticité de la CMB cinq fois plus grande que sa valeur hydrostatique. L'évolution de la rotation différentielle entre le noyau et le manteau est issue d'une simulation numérique couplée de Ö. Karatekin (paramètres : table 4.1.2). L'évolution thermique des roches d'impact en fusion a été calculée par M. Laneuville.

Hamed, 2009), et l'approche présentée ici permet non seulement de tester cette hypothèse quantitativement, mais aussi d'estimer les amplitudes de champ magnétique en surface générées par une telle dynamo. De façon similaire, les déformations de marées sur Mercure, Ganymède, le Terre (primitive) et les systèmes exoplanétaires pourraient potentiellement rendre compte de certaines particularités de leurs champs magnétiques.

4.2 Stabilité des astres telluriques

Cette section présente un travail soumis à la revue *Astronomy & Astrophysics*. Rédigé en anglais, il fait le lien entre les études hydrodynamiques et MHD de l'instabilité elliptique, présentées en chapitres 2 et 3, et son existence dans un contexte planétaire. Ce travail a été mené en collaboration avec C. Moutou, du Laboratoire d'Astrophysique de Marseille.

In this section, the presence of such an elliptical instability driven by tides and librations is investigated in terrestrial bodies in order to confirm its relevance in an astrophysical context. Its consequences on energy dissipation, on magnetic field induction and on heat flux fluctuations at the planetary scale are considered. Previous studies and theoretical results regarding the elliptical instability are re-evaluated and extended to cope with an astrophysical context. In particular, generic analytical expressions of the elliptical instability growth rate are obtained using a local WKB approach, taking into account (i) a

local temperature gradient due to an imposed temperature contrast across the considered layer or to the presence of a volumic heat source, and (ii) an imposed magnetic field along the rotation axis, coming from an independent dynamo mechanism or from an external source. The theoretical results are applied to the telluric planets and moons of the solar system as well as to three Super-Earths : 55 CnC e, CoRoT-7b and GJ 1214b.

4.2.1 Introduction

The flows in fluid layers of planets and moons are of primary interest as they imply first order consequences relative to their internal dynamics and orbital evolutions. Indeed, internal flows create torques on solid layers and induce energy dissipation, which remain negligible for stable laminar flows, but become significant for turbulent ones. Moreover, internal flows are directly responsible for magnetic field generation, either by induction of an existing background magnetic field or by excitation of a self-sustained dynamo. Finally, planetary heat fluxes are also directly linked to flows in fluid layers, which can act as thermal blankets for stably stratified configurations, or as efficient heat flux conveyors in the case of convective flows.

Planetary fluid layers are subject to body rotation, which implies that inertial waves can propagate through them (e.g. Greenspan, 1968). Usually damped by viscosity, these waves can however be excited by libration, precession and tides, which are harmonic mechanical forcings of azimuthal periodicity $m = 0, 1$ and 2 respectively. The fluid response to such forcings in ellipsoids is a long standing issue : see e.g. Aldridge & Toomre (1969); Noir *et al.* (2009); Calkins *et al.* (2010); Sauret *et al.* (2010) for librations ; Poincaré (1910); Busse (1968); Cébron *et al.* (2010b) for precession ; Ogilvie & Lin (2004, 2007); Tilgner (2007b); Rieutord & Valdettaro (2010); Morize *et al.* (2010) for tides. In these studies, it has been shown that the dynamics of a fluid layer is completely modified when the forcing is in direct resonance with an inertial wave. In addition to these direct forcings, inertial waves can also form triadic resonances, leading to parametric inertial instabilities. For instance, the so-called shear instability can be excited by precession (Kerswell, 1993b; Lorenzani & Tilgner, 2001, 2003), and the elliptical instability can be excited by tides (Malkus, 1989; Rieutord, 2000) and librations (Kerswell & Malkus, 1998).

The elliptical instability is a generic instability that affects any rotating fluid whose streamlines are elliptically deformed (see the review by Kerswell, 2002). A fully three-dimensional turbulent flow is excited in the bulk as soon as (i) the ratio between the ellipticity of the streamlines β and the square root of the Ekman number E (which represents the ratio between the viscous over the Coriolis forces) is larger than a critical value of order one and (ii) as soon as a difference in angular velocity exists between the mean rotation rate of the fluid and the elliptical distortion. In a planetary context, the ellipticity of streamlines is related to the gravitational deformation of the rigid boundaries of the considered fluid layer, corresponding either to dynamic tides or static bulges. The differential rotation between the fluid and the elliptical distortion can be oscillatory when due to libration in synchronized systems, or stationary, as for instance in non-synchronized ones : the elliptical instability is then referred to as libration driven elliptical instability (LDEI) and tide driven elliptical instability (TDEI) respectively. TDEI and LDEI have already been suggested to take place respectively in Earth (e.g. Aldridge *et al.*, 1997)

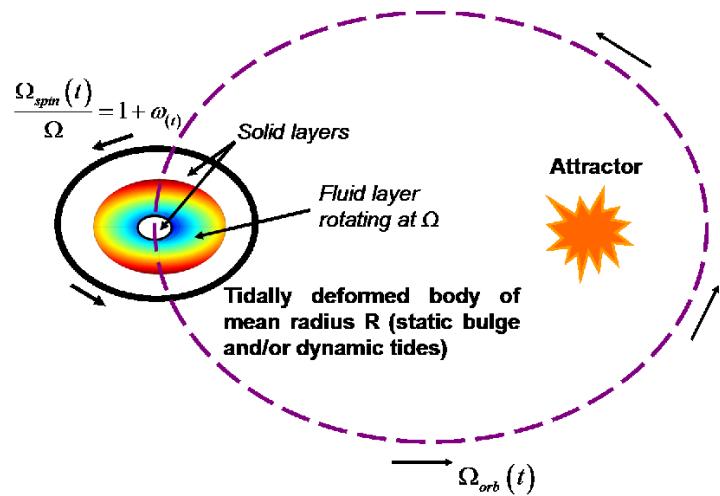


FIGURE 4.11 – Sketch of the problem considered in this work. With the mean rotation rate of the fluid Ω , we define the dimensionless orbital rotation rate $\gamma_{(t)}$ and the dimensionless spin rotation rate $1 + \omega_{(t)}$. Note that the phase lag between the tide and the gravitational potential of the host body is not relevant for our purpose.

and in Io (e.g. Kerswell & Malkus, 1998). However, these previous works do not take into account some planetary particularities and need to be revisited. For instance, Aldridge *et al.* (1997) did not take into account the orbital rate of the Moon nor the magnetic field of the Earth, hence neglecting the effects of tides rotation and Joule dissipation on the growth of TDEI. Kerswell & Malkus (1998) implicitly assumed that the tidal response of Io is completely fluid, neglecting the rigidity of its mantle and overestimating the amplitude of librations and tidal deformations. Our purpose here is to extend previous results of the literature on TDEI and LDEI, and to determine general formulas for quantifying the presence of the elliptical instability in terrestrial bodies, taking into account the relevant complexities present in natural systems.

This paper is organized as follows. Section 4.2.2 presents the different celestial forcings which could excite an elliptical instability, first focusing on tides, and then on forced and free librations. In section 4.2.3, we introduce our physical model and develop a local WKB analysis for non-synchronized and synchronized systems, including the effects of viscosity as well as the effects of an imposed magnetic field and a local temperature gradient. These theoretical results are used in section 4.2.4 to investigate the presence or not of TDEI and LDEI in telluric planets and moons of the solar system, as well as in two Super-Earths of extrasolar systems ; the possible consequences of those instabilities are finally considered.

4.2.2 Celestial mechanics and elliptical instability

Figure 4.11 presents a sketch of the problem considered in this work. We consider a telluric body of rotation rate Ω_{spin} , orbiting around an attractor (orbit in black dashed line) at the orbital rate Ω_{orb} . This body has a radius R , a mass M and a fluid layer in its

TABLE 4.3 – *List of the different astrophysical configurations which could lead to an elliptical instability in a planetary fluid layer (liquid core, subsurface ocean). β is the ellipticity of the boundaries distortion, $\Delta\Omega$ is the differential rotation rate between the fluid and the elliptical deformation, Ω is the mean spin rate of the planet, ε is the physical libration amplitude, T_{orb} and e are the orbital period and eccentricity, and ω_{free} is the free libration frequency.*

State	Origin of $\Delta\Omega$	Origin of β	$\Delta\Omega$	Instability
Non-Synch.	spin rotation	D.T. ^a	$\Omega_{spin} - \Omega_{orb}$	TDEI
Non-Synch.	meteoritic impact	S.B. ^a	spin-up process	TDEI
Synch.	forced optical libration	D.T.	$2e\Omega \cos(2\pi t/T_{orb})$	LDEI
Synch.	forced physical libration	S.B.	$\varepsilon\Omega \cos(2\pi t/T_{orb})$	LDEI
Synch.	free physical libration	S.B.	$\varepsilon\Omega \cos(\omega_{free}t)$	LDEI
Synch.	any physical libration	S.B. or D.T.	zonal flow ^b	TDEI

^a D.T. stands for dynamic tides and S.B stands for static bulge.

^b Case equivalent to a non-synchronized case (cf. section 4.2.2.4).

interior between an external radius R_2 and an internal radius R_1 , typically a liquid outer core. We suppose that this internal fluid layer is enclosed between an external elliptically deformed solid layer and a possible inner core such as the outer liquid core of the Earth or the subsurface ocean of Europa. The elliptical deformation of streamlines is due either to tides generated by an orbiting companion body (i.e. dynamic tides), or to a so-called frozen elliptical shape of the rigid surface (i.e. static bulge). The usual phase lag between the tide and the gravitational potential of the host body, which is due to internal dissipation, is not relevant for our purpose and is thus forgotten. Three dimensionless numbers are necessary to describe the system : (i) the ellipticity β of the elliptical deformation, (ii) the Ekman number $E = \nu/(\Omega R_2^2)$, where ν is the fluid kinematic viscosity, R_2 is the outer radius of the rotating fluid, and Ω its typical angular velocity before any instability, equal to the mean value of the (possibly varying) mantle spin rate $\Omega_{spin}(t)$, (iii) the differential rotation $\Delta\Omega$ between the fluid and the elliptical distortion, non-dimensionalized by the fluid rotation rate, $\Delta\Omega/\Omega$. We distinguish two cases : the case of a non-synchronized body, and the case of a synchronized body. In the former case, over one spin period, a mean differential rotation exists between the elliptical deformation and the fluid, whereas in the latter case the mean rotation rates of the deformation and of the fluid are equal. The different cases are described in the following and summarized in table 4.3.

4.2.2.1 Non-synchronized bodies

For a non-synchronized body, we consider two cases depending on the origin of the elliptical shape.

First, if the spin rate of the mantle Ω_{spin} is constant, a TDEI can be excited by the elliptical distortion due to dynamic tides, which rotate at the orbital velocity Ω_{orb} . This is the standard configuration considered for instance by Craik (1989), who showed that

TDEI is indeed possible except in a forbidden zone $\Omega_{spin}/\Omega_{orb} \in [-1; 1/3]$, where no triadic resonance is possible.

Second, if the elliptical shape is due to a static bulge, a non-null mean differential rotation over one spin period implies that the fluid does not rotate at the same rate as the mantle, which corresponds to a spin-up or a spin-down process. This can occur for instance transiently after a large meteoritic impact, capable of fully desynchronizing the body (see for instance the considered scenario for explaining the Moon magnetic field by Le Bars et al. 2011). In this case, a differential rotation exists between the fluid and the mantle with its frozen bulge, up to the typical spin-up/spin-down time necessary for the fluid to recover the mantle velocity (Greenspan, 1968), i.e. up to

$$t_{spin-up} = \Omega_{spin}^{-1} E^{-1/2}. \quad (4.15)$$

Now, if the growth time of the TDEI is short enough compared to the spin-up time, one can expect a quasi-static evolution of the system, where the modification of the spin rate of the fluid is neglected during the growth of the instability : the former configuration is then transiently recovered.

4.2.2.2 Synchronized bodies

In the synchronized case, even if there is no mean differential rotation between the elliptical deformation and the fluid, oscillations can occur for different reasons. We distinguish below forced librations due to gravitational interactions with other celestial bodies, and free librations induced for instance by a meteoritic impact.

4.2.2.3 Forced librations

In forced librations, frozen static bulge and dynamic tides have to be considered simultaneously. To illustrate this, following Goldreich & Mitchell (2010), we consider a simple toy model without any internal dissipation : a synchronously spinning satellite, with an elastic outer shell and an homogeneous fluid interior, moving on an elliptic orbit. The orbital velocity changes along the orbit, and writes at first order in the orbital eccentricity e

$$\Omega_{orb} = \Omega (1 + 2e \cos \Omega t) \quad (4.16)$$

where Ω is the mean value of the mantle spin rate $\Omega_{spin}(t)$. Considering the influence of the orbital velocity variations on the satellite dynamics, we expect two limit cases : (i) if the rigidity of the elastic shell is null, the shell slides over the fluid and maintains its equilibrium shape, with the long axis of the ellipsoidal figure pointing toward the companion body ; (ii) if the rigidity of the elastic shell is large enough, the entire satellite rotates rigidly with a fixed shape.

In the first case, only the elastic energy E_{elas} varies : the meridians of the shell are stretched and compressed due to the rotation, whereas the spin velocity of the satellite remains constant. This is the so-called optical libration. In the second case, only the gravitational energy E_{grav} varies and the spin velocity of the satellite changes : this corresponds to the so-called physical libration.

Note that in both cases, the libration period remains small compared to the typical spin-up/spin-down time (4.15), which means that the fluid does not follows the solid boundaries : it never has enough time to adapt to the periodic velocity fluctuations and continues to rotate at the constant synchronous rotation rate Ω . This is the so-called "no spin-up" condition. Hence, in the first case, a differential rotation exists between the fluid rotating at the constant rate Ω and the dynamic tides rotating at the oscillating orbital velocity, $\Delta\Omega/\Omega = 2e \cos \Omega t$. A LDEI can thus be excited by this optical libration, as shown theoretically by Kerswell & Malkus (1998) and Herreman *et al.* (2009). In the second case, a differential rotation $\Delta\Omega/\Omega = \epsilon \cos \Omega t$ exists between the fluid rotating at the constant rate Ω and the static bulge subject to physical librations of amplitude ϵ , which depends on the internal structure of the satellite. In this case also, LDEI is possible, as recently demonstrated experimentally and numerically by Noir *et al.* (2011).

With the more general case of an arbitrary torque applied to the shell, Goldreich & Mitchell (2010) estimated the ratio $\Re = E_{elas}/E_{grav}$ by

$$\Re = \frac{32}{5} \frac{\pi}{5 + \tilde{\nu}} \frac{(1 + k_f)^2}{k_f} \frac{\tilde{\mu} d R^3}{GM^2} \quad (4.17)$$

where $\tilde{\nu}$ is the Poisson's ratio, k_f the fluid Love number, $\tilde{\mu}$ the shell rigidity, R and d the mean radius and the thickness of the shell, M the mass of the satellite. According to Goldreich & Mitchell (2010), typical values give $\Re \sim 10^{-2}$ for the subsurface ocean of Europa, and $\Re \sim 0.1$ for the subsurface ocean of Titan, whereas the silicate mantle of Io is expected to behave in the limit $\Re \gg 1$. Because of the visco-elastic rheology of real bodies, the effective response should be between the two limit cases given by this model. Goldreich & Mitchell (2010) argue that the total increase of energy would be minimal, which leads us to consider that Europa and Titan, for instance, behave as entirely fluid satellites. On the opposite side, Karatekin *et al.* (2008), Van Hoolst *et al.* (2008, 2009) and Baland & Van Hoolst (2010) considered that the rheology does not allow the bodies to reach their minimal energetic state and assume that they behave rigidly. This issue being still debated, we will consider in this work the whole range of configurations between these two limit cases.

4.2.2.4 Free librations

After a meteoritic impact for instance, so-called free librations can occur on the typical resynchronization time (e.g. Williams *et al.*, 2001). Following the no spin-up condition explained in section 4.2.2.3, the fluid keeps rotating at the orbital velocity (synchronized state) whereas the mantle librates around this mean value. The amplitude ϵ of the free librations depends initially on the impact strength and decreases through time, whereas the libration frequency remains equal to a proper frequency of the body, given by $\omega_{free} = \Omega \sqrt{3(B - A)/C}$ at first order in the orbital eccentricity, (A, B, C) being the three principal moments of inertia of the body (see for instance Lissauer, 1985). Considering a static bulge, free librations can thus drive a LDEI from the differential rotation $\Delta\Omega/\Omega = \epsilon \cos(\omega_{free} t)$, providing that the growth time of the instability is short compared to the resynchronization time, as will be shown in section 4.2.3.5.

4.2.2.5 Zonal wind induced by physical librations

Finally, in all scenarios involving physical librations, it has recently been determined analytically by Busse (2010), and confirmed experimentally and numerically by Sauret *et al.* (2010), that non-linearities in the Ekman layer driven by the librating rigid boundaries induce a differential rotation in the fluid of amplitude $\Delta\Omega/\Omega = -0.154 (\theta\omega_o/\Omega)^2$, where θ is the amplitude angle of the libration and ω_o its frequency. TDEI can thus be excited by this differential rotation with both static bulge and dynamic tides. Nevertheless, it is important to notice that the differential rotation generated by this process is always very small. We do not expect this mechanism to play an important role in a planetary context, since it is always dominated by LDEI but it is worth to mention its existence that may be relevant in certain astrophysical cases.

4.2.2.6 Typical amplitudes of gravitational distortions

The amplitude β of gravitational distortions, defined here as $\beta = (a_1^2 - a_2^2)/(a_1^2 + a_2^2)$, where a_1 and a_2 are respectively the long and short axes of the outer boundary of the considered fluid layer, is generally unknown for celestial bodies. To study the elliptical instability for real cases, we need to estimate it, for instance in assuming an hydrostatic equilibrium shape.

The equilibrium shape of a body of mass M and radius R , is an old problem which begins with the static bulges theory of Newton (1687). This classical theory considers an incompressible no-spinning body at rest deformed by a tidal field at leading order in R/D , which leads to a spheroidal shape and

$$\beta = \frac{3}{2} \frac{M_2}{M} \frac{R^3}{D^3} + O\left(\frac{R^4}{D^4}\right), \quad (4.18)$$

where M_2 is the mass of the body responsible for the gravitational field and D the distance between the two bodies. This tide is sometimes referred to as the marine tide, where the gravitational potential of the tidal bulge is neglected. Note that this approximation always leads to a relevant but underestimated tidal deformation. When possible, we have used in the following a better estimate of β taking into account the density distribution in the body and the gravitational potential of the tidal bulge :

$$\beta = \frac{3}{2} h_2 \frac{M_2}{M} \frac{R^3}{D^3} \quad (4.19)$$

with the radial displacement Love number h_2 , directly linked to the potential Love number k_2 by $h_2 = 1 + k_2$. A typical value is $k_2 = 3/2$, obtained for an incompressible homogeneous body in hydrostatic equilibrium (e.g. Greff-Lefftz *et al.*, 2005). The tidal Love numbers can be calculated with the Clairaut-Radau theory (see e.g. Van Hoolst *et al.*, 2008).

As shown by equation (4.19), gravitational distortions vary with the inter-bodies distance D . They can thus be divided in a component of constant amplitude, corresponding to the mean value of the gravitational distortion along the elliptic orbit, plus a smaller component with an amplitude oscillating between $\pm 3e$ times the constant one (e.g. Greenberg *et al.*, 2003). In real cases that we will consider in the following, this oscillating

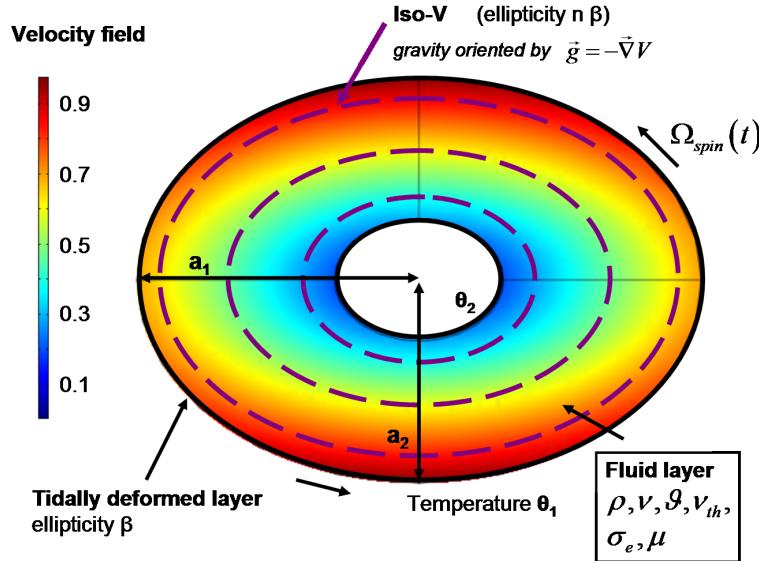


FIGURE 4.12 – Description of an internal liquid layer. The tidal forces deform the core-mantle boundary (CMB) in an ellipse of axes a_1 and a_2 , which leads to an ellipticity β of the streamlines. In this layer, the fluid is rotating at the rate Ω .

component can be neglected since it will always have a second order influence on the elliptical instability compared to the constant (static or dynamic) component of β (but see appendix E.3). Note nevertheless that in synchronized satellites, these so-called diurnal tides have important consequences for the internal state and the orbital evolution, since the changing shape of the bulge generates time-varying stresses, which generate heat by viscosity or friction.

4.2.3 Generic stability of the elliptical instability in a planetary context

4.2.3.1 Model, equations and dimensionless parameters

We consider a telluric celestial body in the general framework sketched in figure 4.11, and we focus on a liquid layer described in figure 4.12. All dimensional parameters are listed in table 4.4. The instantaneous spin rotation rate $\Omega_{\text{spin}} = \Omega (1 + \omega_{(t)})$ may depend on time because of either free or forced physical librations. We focus on an internal fluid layer enclosed in an ellipsoidal shell, with an outer boundary of mean radius R_2 at temperature θ_2 , and an inner boundary at temperature θ_1 , with a mean radius $R_1 = \eta R_2$. As already seen above, because of the no spin-up condition, this fluid layer is initially rotating at the constant rate Ω , equal to the mean value of Ω_{spin} . This layer is considered to be homogeneous, of density ρ_0 , kinematic viscosity ν , thermal expansion ϑ , thermal diffusivity ν_{th} , electrical conductivity σ_e and magnetic permeability μ . We focus here on the stability of the elliptical flow in the equatorial plane, but note that our local analysis remains valid in any plane orthogonal to the rotation axis. We choose R_2

TABLE 4.4 – List of the dimensional variables used in this work.

Orbital (resp. spin) rotation rate	$\Omega_{orb}(t)$ (resp. $\Omega_{spin}(t)$)
Fluid rotation rate*	Ω
Mass of the deformed body (resp. attractor)	M (resp. M_2)
Inter-bodies distance	D
Free libration angular frequency	ω_{free}
Fluid layer mean external radius	R_2
Long/short axis in the equatorial plane	a_1/a_2
Fluid layer mean internal radius	$R_1 = \eta R_2$
Imposed external (resp. internal) temperature	θ_2 (resp. θ_1)
Gravity at the external radius	g_0
Imposed magnetic field	$B_0 \mathbf{e}_{x_3}$
Fluid density	ρ_0
Fluid kinematic viscosity	ν
Fluid thermal expansion	ϑ
Fluid thermal diffusivity	ν_{th}
Fluid electrical conductivity	σ_e
Fluid magnetic permeability	μ

*mean value of the spin rate.

as the length scale and Ω^{-1} as the time scale so that the mean basic spin of the body has an unit angular velocity along the rotation axis (O, \mathbf{e}_{x_3}). The elliptical deformation has a dimensionless angular velocity $\gamma_{(t)} \mathbf{e}_{x_3}$, with $\gamma_{(t)}$ equal to $\Omega_{orb}(t)/\Omega$ when looking at dynamic tides and to $\Omega_{spin}(t)/\Omega$ when looking at static bulges (see table 4.3).

We consider the frame where the elliptical distortion is fixed, which is rotating at the angular velocity $\gamma_{(t)} \mathbf{e}_{x_3}$, with \mathbf{e}_{x_1} in the direction of the long axis a_1 and \mathbf{e}_{x_2} in the direction of the short axis a_2 . The dimensionless equations of fluid motions are :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\gamma \mathbf{e}_{x_3} \times \mathbf{u} + \frac{d\gamma_{(t)}}{dt} \mathbf{e}_{x_3} \times \mathbf{r} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = E \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (4.21)$$

where \mathbf{u} is the fluid velocity, p the pressure (including the centrifugal term) non-dimensionalized by $\rho_0 R_2^2 \Omega^2$, $E = \nu/(\Omega R_2^2)$ the Ekman number based on the external radius, and $\mathbf{f} = \mathbf{f}_B + \mathbf{f}_L$ the volumic force, including the buoyancy force \mathbf{f}_B and the magnetic Lorentz force \mathbf{f}_L . The flow is rotating within an ellipse $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1$, and we define the ellipticity $\beta = (a_1^2 - a_2^2)/(a_1^2 + a_2^2)$.

Using the dimensionless temperature $\theta = (\tilde{\theta} - \theta_2)/(\theta_1 - \theta_2)$, the temperature equation is

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \frac{E}{Pr} (\nabla^2 \theta - K), \quad (4.22)$$

TABLE 4.5 – *List of relevant dimensionless parameters.*

Aspect ratio of the shell	η
Ellipticity of the distortion	$\beta = (a_1^2 - a_2^2)/(a_1^2 + a_2^2)$
Distortion rotation rate	$\gamma(t)$
Orbital eccentricity	e
Physical libration rate	$\omega(t)$
Physical libration amplitude	ε
Volumic heat source	K
Ekman number	$E = \nu/(\Omega R_2^2)$
Thermal Prandtl number	$Pr = \nu/\nu_{th}$
Magnetic Prandtl number	$Pr = \sigma_e \mu \nu$
Modified Rayleigh number	$\tilde{Ra} = \vartheta [\theta_1 - \theta_2]g_0/\Omega^2 R_2$
Magnetic Reynolds number	$Rm = \sigma_e \mu \Omega R_2^2$
Elsasser number	$\Lambda = \sigma_e B_0^2/(\rho_0 \Omega)$

where $Pr = \nu/\nu_{th}$ is the thermal Prandtl number and K is a constant standing for a possible volumic heat source. Considering a gravity $\mathbf{g} = g_{(r,\phi)}g_0\mathbf{e}_g$, where \mathbf{e}_g is a unit vector, (r, ϕ) the cylindrical coordinates in the equatorial plane, and g_0 the gravity at the radius R_2 , the dimensionless buoyancy force to add in the Navier-Stokes equations using the Boussinesq approximation is $\mathbf{f}_B = \tilde{Ra} \theta g_{(r,\phi)} \mathbf{e}_g$, with the modified Rayleigh number $\tilde{Ra} = \vartheta [\theta_1 - \theta_2]g_0/\Omega^2 R_2$. Note that in a planetary context, the temperature contrast to take into account corresponds to the non-adiabatic component only, which is the deviation from the thermodynamical equilibrium state.

We also take into account the possible presence of an uniform imposed magnetic field B_0 along the rotation axis \mathbf{e}_{x_3} , which is used as the magnetic field scale. The MHD induction equations have then to be solved simultaneously

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{Rm} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (4.24)$$

with the magnetic Reynolds number $Rm = \sigma_e \mu \Omega R_2^2$. The magnetic Laplace force acting on the flow is given by $\mathbf{f}_L = (\Lambda/Rm) (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$, with the Elsasser number $\Lambda = \sigma_e B_0^2/(\rho_0 \Omega)$. All dimensionless parameters are listed in table 4.5.

4.2.3.2 Base fields

In the reference frame where the elliptical deformation is stationary, the differential rotation of the fluid has an amplitude $1 - \gamma(t)$. Besides, the ellipticity induces an elongational flow $-(1 - \gamma(t)) \beta (x_2 \mathbf{e}_{x_1} + x_1 \mathbf{e}_{x_2})$, leading to the general elliptical base flow

$$\mathbf{U} = (1 - \gamma(t)) [-(1 + \beta)x_2 \mathbf{e}_{x_1} + (1 - \beta)x_1 \mathbf{e}_{x_2}] \quad (4.25)$$

This flow represents the laminar response of the fluid to the tidal distortion as an exact, non-linear solution of Navier-Stokes equations for any finite viscosity, provided that $(\nabla \times$

$\mathbf{f}) \cdot \mathbf{e}_3 = 2 d_t \gamma(t)$. This means that a body volumic force noted \mathbf{f} is necessary to have spin period fluctuations (i.e. free or forced physical librations), as obvious in a planetary context. Equation (4.25) leads to elliptical streamlines of instantaneous ellipticity β . Note that β is not the mathematical eccentricity of the streamlines, given by $\sqrt{2\beta/(1+\beta)}$. Note also that the velocity magnitude changes along a streamline, the isovalues of the velocity being elliptical but with an ellipticity 2β .

We further assume that a stationary temperature profile $\Theta(r, \phi)$ is imposed, which is, at order 1 in β , solution of the energy conservation equation (4.22) with the base field \mathbf{U} . We suppose that the modified Rayleigh number \tilde{Ra} is of order β . We also consider the presence of an imposed uniform magnetic field along the rotation axis, produced for instance by a companion body. We assume that the Laplace force does not modify the base flow but only plays a role on the elliptical instability. This implies that this force is of order β . In this context, we will see below that regarding the elliptical instability, equations for fluid motions at order 0 in β are similar to those of the purely hydrodynamical case where the elliptical instability is described as a resonance between two inertial waves. The magnetic and thermal fields only induce a correction in the fluid equations at order 1 in β , hence a correction on the growth rate of the instability, because of the stabilizing effect of the Laplace and buoyancy forces.

4.2.3.3 The WKB method : stability along a streamline

Our local approach is based on the short-wavelength Lagrangian theory developed in Bayly (1986), Craik & Criminale (1986), then generalized in Friedlander & Vishik (1991) and Lifschitz & Hameiri (1991). This method has been successfully applied to the elliptical instability by Le Dizès (2000), then extended to take into account the energy equation and the buoyancy force, or the induction equation and the Laplace force in Le Bars & Le Dizès (2006) and Herreman *et al.* (2009) respectively. To summarize, the WKB method consists in looking for a perturbed solution of the equations of motion under the form of localized plane waves along the streamlines of the base flow. We thus look for a solution of the linearized non-dimensional system of equations (4.20, 4.21, 4.22, 4.23, 4.24) under the form

$$\mathbf{u}_{(\mathbf{x},t)} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'(t) e^{i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x}}, \quad (4.26)$$

$$\mathbf{P}_{(\mathbf{x},t)} = \mathbf{P} + \mathbf{p}'(t) e^{i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x}}, \quad (4.27)$$

$$\theta_{(\mathbf{x},t)} = \Theta + \theta'(t) e^{i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x}}, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{B}_{(\mathbf{x},t)} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}(t) e^{i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x}}, \quad (4.29)$$

along the streamlines of the base flow described by

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U}, \quad (4.30)$$

where $\mathbf{k}(t)$ is the time-dependent wave vector, \mathbf{x} the position vector, and where \mathbf{U} (with its corresponding pressure field \mathbf{P}), Θ and $\mathbf{B}_0 = (0, 0, 1)$ are the dimensionless base fields defined in the previous section 4.2.3.2. Dropping the primes for simplicity, the linearized

system of equations writes :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} d_t \mathbf{u} + i \mathbf{u} (d_t \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + i (\mathbf{U} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} \\ = -i p \mathbf{k} - 2 \gamma_{(t)} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} - k^2 E \mathbf{u} + \frac{\Lambda}{Rm} (i \mathbf{k} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}_0 + \tilde{Ra} \theta g \mathbf{e}_g \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$d_t \theta + i \theta (d_t \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + i (\mathbf{U} \cdot \mathbf{k}) \theta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Theta = -k^2 \frac{E}{Pr} \theta \quad (4.33)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} d_t \mathbf{b} + i \mathbf{b} (d_t \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + i (\mathbf{U} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{b} \\ = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{U} + i (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \mathbf{u} - \frac{k^2}{Rm} \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Those equations can be decoupled in space and time to give an equation for the wave vector only :

$$d_t \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (4.36)$$

In this case, the equations for $\mathbf{u}, \theta, \mathbf{b}$ are decoupled in space and time, and the solution is then sought under the form of a Taylor expansion in β of all variables, as illustrated in appendix E.1 and E.2.

This approach will be used in the following sections to calculate the growth rate of the instability in the two generic cases : the TDEI, which appears in the case of non-synchronized bodies, and the LDEI, which appears in the case of synchronized bodies.

4.2.3.4 Non-synchronized bodies : inviscid growth rate of the TDEI

In this section, we consider the effects of dynamic tides of amplitude β on the liquid core of a Mercury-like planet orbiting close to its star with (i) constant but different orbital and sidereal rotation periods, (ii) an imposed thermal stratification (see e.g. Manglik *et al.*, 2010), and (iii) an externally imposed magnetic field (e.g. the Sun magnetic field). Note that the same analysis applies to the stratified zone of a star (the so-called radiative zone) tidally deformed by a companion body, taking into account the magnetic field generated by dynamo in its convective zone. The present configuration corresponds to the standard case of the elliptical instability as already known, but completed by the complexities present in real astrophysical cases. Note that these additive effects have already been studied separately, whereas they are simultaneously present in real systems. The effect of the angular velocity of the tidal bulge has been studied in Miyazaki & Fukumoto (1992), Le Dizès (2000), Le Bars *et al.* (2007) and Le Bars *et al.* (2010) ; the presence of a thermal field has been studied in Le Bars & Le Dizès (2006), Cébron *et al.* (2010c), Lavorel & Le Bars (2010) ; the presence of an inner solid core has been studied in Lacaze *et al.* (2005b) ; the presence of an external magnetic field has been studied in Kerswell (1994), Kerswell (2002), Lacaze *et al.* (2006), Herreman *et al.* (2009). We extend these works in including all of these features in a single formula.

In the non-synchronized case, which is considered in this section, the base flow (4.25) reduces to

$$\mathbf{U} = (1 - \Omega_{orb}/\Omega_{spin}) [-(1 + \beta)x_2 \mathbf{e}_{x_1} + (1 - \beta)x_1 \mathbf{e}_{x_2}]. \quad (4.37)$$

The WKB analysis is then tractable (see appendix E.1), taking into account thermal and magnetic effects in the limit where buoyancy and Laplace forces are of the order β . The instability does not exist in the range $\Omega_{spin}/\Omega_{orb} \in [-1; 1/3]$, which is called the forbidden band. It corresponds to the absence of resonance between the elliptical forcing and the inertial waves of the rotating flow (see Le Bars *et al.*, 2007, for a complete discussion). In the present limit, the presence of the thermal and magnetic fields does not affect the forbidden band. Neglecting the thermal diffusion, the inviscid growth rate of the TDEI with the presence of thermal and magnetic fields is

$$\sigma_{inv} = \frac{\sqrt{(2\Omega^G + 3)^4 \beta^2 - 4 (\tilde{Ra} r \partial_r \Theta)^2}}{16 |1 + \Omega^G|^3} - \frac{\Lambda}{4 |1 + \Omega^G|^3}, \quad (4.38)$$

with $\Omega^G = \Omega_{orb}/(\Omega_{spin} - \Omega_{orb})$, r and $\partial_r \theta$ being respectively the radius and the dimensionless temperature base field radial gradient of the considered streamline. This expression allows to recover the different cases already obtained in the literature. For instance, the purely hydrodynamic growth rate given by Miyazaki & Fukumoto (1992), Le Dizès (2000) and Le Bars *et al.* (2010) is recovered for $(\tilde{Ra} = 0, \Lambda = 0)$. For a fixed elliptical deformation, we recover the classical inviscid value $\sigma_{inv}/\beta = 9/16$. Finally, in the absence of a thermal field and with a stationary bulge ($\Omega_{orb} = 0, \tilde{Ra} = 0$), the magnetic case given in Herreman *et al.* (2009) is also recovered. Formula (4.38) is fully generic and clearly illustrates the stabilizing influence of Joule dissipation and of a local stratification.

4.2.3.5 Synchronized bodies : inviscid growth rate of the LDEI

In this section, we consider the liquid ellipsoidal core of a synchronized moon like Io, or of an extra-solar telluric planet orbiting close to its massive attractor with (i) an orbital period equal to the sidereal rotation period, but with small instantaneous fluctuations of the differential rotation between the elliptical deformation and the fluid, whatever their origin (optical or physical, forced or free librations), (ii) an imposed magnetic field (e.g. the Jupiter's magnetic field for Io), (iii) a local thermal gradient. The dimensionless instantaneous differential rotation between the fluid and the elliptic deformation oscillates with a libration amplitude ϵ (equal to $2e$ for optical librations) and a libration frequency ω_o (equal to 1 for forced librations). Considering the particular case of a fluctuation due to the orbital ellipticity (i.e. $\omega_o = 1$), Kerswell & Malkus (1998) and Herreman *et al.* (2009) have shown that these oscillations can lead to LDEI. We extend these previous studies to the more general case of small fluctuations of arbitrary periods, taking into account a buoyancy. Neglecting the thermal diffusion, the inviscid growth rate of the LDEI is then (see appendix E.2)

$$\sigma_{inv} = \frac{16 + \omega_o^2}{64} \sqrt{(\epsilon \beta)^2 - \frac{4}{\omega_o^2} (\tilde{Ra} r \partial_r \Theta)^2} - \frac{\omega_o^2}{16} \Lambda \quad (4.39)$$

at first order in $\epsilon \beta$, taking into account the effects of thermal and magnetic fields in the limit where buoyancy and Laplace forces are of the order β . The forbidden band is given by $|\omega_o| > 4$. As before, the generic formula (4.39) clearly illustrates the stabilizing influence of Joule dissipation and of a local stratification.

The case $\omega_o \rightarrow 0$ corresponds to the limit toward the fully synchronized state. In the case of the TDEI, this limit case is obtained with $\Omega^G \rightarrow \infty$, which gives the inviscid growth rate $\sigma_{inv} = \beta/(4\Omega^G)$ for large wavenumbers. Both expressions for the growth rate are thus consistent in the limit of synchronized state : $\Omega_{orb}/\Omega_{spin} = 1 - \epsilon$ i.e. $|1 + \Omega^G| \sim |\Omega^G| = 1/\epsilon$. The expression given in Herreman *et al.* (2009) is also exactly recovered when $\omega_o = 1$ and $\Lambda = 0$. Note that there is a slight error on the numerator of the magnetic damping term in Herreman *et al.* (2009) : in their considered case, $\omega_o = 1$, the magnetic damping is $-\Lambda/16$, instead of $-3\Lambda/16$.

4.2.3.6 Viscous dissipation

The previous sections present the calculation of the growth rate of the elliptic instability in an inviscid fluid with Joule dissipation and buoyancy stabilization. The calculation of the threshold of the instability necessitates to correctly estimate all dissipative terms. In the case of no-slip boundaries, dissipation occurs mainly in the viscous boundary layers of thickness $E^{1/2}$. This implies a damping term that should alter the growth rate :

$$\sigma = \sigma_{inv} - \alpha E^{1/2} f(\eta), \quad (4.40)$$

where α is a constant of order 1, equal to $\alpha = 2.62$ for the spinover mode of the TDEI and $f(\eta) = (1 + \eta^4)/(1 - \eta^5)$ (see e.g. Kudlick, 1966; Hollerbach & Kerswell, 1995; Lacaze *et al.*, 2005b).

In addition to decreasing the growth rate, viscous dissipation is also of primordial importance to quantify the orbital evolution and rotational history of a binary system during its synchronization. A model has been proposed in Le Bars *et al.* (2010) for a stationary bulge, which allows the authors to estimate the viscous power dissipated by TDEI. Our purpose here is to generalize this model to all cases studied above. Far from threshold, the model proposed by Le Bars *et al.* (2010) considers that the TDEI simply corresponds to a differential rotation between the boundary and the bulk. According to this model, the power dissipated by the system is :

$$P = -2 M R_2^2 \Delta\Omega^2 \Omega E^{1/2}, \quad (4.41)$$

assuming that in the small Ekman numbers limit reached in astrophysical cases, the amplitude of the instability is commensurate with the differential rotation $\Delta\Omega$ (Cébron *et al.*, 2010a).

The tidal quality factor Q is widely used in systems evolution calculations. Using (4.41), we are now in a position to give the theoretical expression of its component associated with the elliptical instability. By analogy with the theory of harmonic oscillators, Q is defined by (e.g. Greenberg (2009) for a recent discussion on Q) the ratio between the maximum potential gravitational energy stored in the tidal distortion over the energy dissipated in one period. The potential energy stored in the bulge is of the order $E_0 \sim 4\pi\rho_0 g_0 s^2 R_2^2$, with s the dimensional height of the tides (e.g. Benest, 1990). Since $\beta \sim s/R_2$, we obtain from equation (4.41)

$$Q \sim \frac{g_0 \beta^2}{R \Delta\Omega^2 E^{1/2}}. \quad (4.42)$$

4.2.3.7 Validity of the approach

The previous analysis is valid when the elliptic instability originates from a resonance of pure hydrodynamic inertial waves. Therefore, any previously derived expressions are limited to the case where buoyancy and Laplace forces are of the same order as the elliptical distortion β . According to (4.31), this means that

$$\frac{\Lambda}{Rm} k \sim \beta \quad \text{and} \quad \tilde{Ra} \sim \beta, \quad (4.43)$$

where k is the dimensionless norm of the wavevector of the excited mode. For a typical planetary core, these conditions can be rewritten

$$B_0 \sim 0.1 \frac{\sqrt{\beta/k}}{R_2 E} \quad \text{in } \mu\text{T} \quad \text{and} \quad \frac{F_{\text{non-adia}}}{F_{\text{adia}}} \sim 10^{-3} \frac{\beta}{E^2 R_2^4 g_0^2}, \quad (4.44)$$

where $F_{\text{non-adia}}$ and F_{adia} are respectively the non-adiabatic and adiabatic components of the core heat flux. The condition on the magnetic field is easily verified for planetary cores over a large range of wave vector k . The condition on the non-adiabatic heat flux is more problematic to quantify : in most planets, the adiabatic profile is supposed to be sufficient to transport core heat flux, and the non-adiabatic component is estimated to be very small, but not known precisely. Nevertheless, one should notice that the condition (4.44) is very restrictive and special attention should be paid in each given configuration. For instance, in the case of Europa, (4.44) implies $F_{\text{non-adia}}/F_{\text{adia}} \sim 0.1\%$, which seems reasonable ; but in the case of Io, (4.44) implies $F_{\text{non-adia}}/F_{\text{adia}} \sim 1\%$, which is only marginally verified since the estimated non-adiabatic heat flux is about 1/5 of the adiabatic component (e.g. Kerswell & Malkus, 1998).

Now supposing that the buoyancy or the Laplace force is of order 0 in β , we can wonder if the elliptic instability still exists. In this case, inertial waves will be replaced by gravito-inertial or magneto-inertial waves, and the elliptical instability will arise as a resonance between those modified waves. Resonances of magneto-inertial waves has been studied for instance in Kerswell (1994); Lebovitz & Zweibel (2004); Mizerski & Bajer (2009) in the case of an imposed uniform magnetic field along the spin axis : this is the so-called magnetoelliptic instability. Resonance of gravito-inertial waves has been studied in Le Bars & Le Dizès (2006); Guimbard *et al.* (2010), who concluded that a stratified thermal field can be either stabilizing or destabilizing depending on the shape of gravitational iso-potentials and isotherms : this is the so-called gravitoelliptic instability. This point is further clarified in appendix E.4, which shows the high sensitivity of the elliptical instability to the specificities of the thermal and gravity fields. Planets with buoyancy or Laplace force of order 0 in β should be the subject of specific studies, which is beyond the scope of the generic results presented here.

4.2.4 Application to solar/extrasolar systems

Using previous results, we are now in a position to calculate the threshold of the elliptical instability for telluric bodies of different systems. We consider that a body is stable or unstable when the mean value of the growth rate over an orbit is respectively positive or negative.

TABLE 4.6 – *Physical and orbital characteristics used for the stability calculations and results. Following Herreman et al. (2009), we take as typical values $\sigma_e = 4 \cdot 10^5 \text{ S.m}^{-1}$, $\rho_0 = 12\,000 \text{ kg.m}^{-3}$ and $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, consistent with a Fe/Fe-S composition.*

	Mercury	Venus	Actual Earth	Early Earth ^b
$M (\times 10^{-24} \text{ kg})$	0.330	4.87	5.98	5.98
$R (\text{km})$	2440	6051	6378	6378
$T_{\text{spin}} (\text{d})$	58.6	-243	0.997	0.418
$T_{\text{orb}} (\text{d})$	87.97	224.7	27.32	9.67 ^b
Tidal amplitude (m)	0.925 ^a	1.8	0.6	3.4
R_2/R	0.8 ^a	0.17	0.55	0.55
η	0	0	0.35	0
$E (\times 10^{14})$	21	316	0.11	0.047
β (measured) ($\times 10^7$)	7.6	?	1.9	11
β (hydrostatic) ($\times 10^7$)	6.8	1.1	0.8	6.7
$B_{\text{suf}}^{\text{c}}$ (nT)	250 ^d	30	$3 \cdot 10^4$	0
B_0^{e} (nT)	488	6100	$1.8 \cdot 10^5$	0
Λ	$6.4 \cdot 10^{-6}$	0.004	0.015	0
$\sigma (\text{years}^{-1})$	$-1.5 \cdot 10^{-5}$	-5.43	-7.7	0.003

^a Van Hoolst *et al.* (2007)

^b Considering an Early Moon two times closer than today.

^c Equatorial surface field

^d Anderson *et al.* (2010)

^e Considering a variation in r^{-3} from the core to the planetary surface (r being the spherical radius).

4.2.4.1 Non-synchronized system : tide driven elliptical instability (TDEI)

Let us consider first the TDEI in liquid cores of telluric bodies in the solar system. A rough criteria given by the equations (4.38) and (4.40) leads to a threshold $\beta/\sqrt{E} \sim O(1)$, as already mentioned. In the Solar system, this leads to focus only on Mercury, Venus, and on the Earth-Moon system during its evolution. Most tidal evolution models predict the Moon to rapidly retreat to 25–35 Earth radii in less than about 100 Ma (Webb, 1982; Ross & Schubert, 1989; Williams, 2000, 2004), and we thus consider two limit cases : the actual Earth-Moon system and an early Earth with an early Moon at 30 Earth radii, i.e. two times closer than today. The tabulated values found in the literature for these planets are given in table 4.6. Note that the Ekman number E is calculated with a molecular kinematic viscosity $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, consistent with a Fe/Fe-S composition of a liquid outer core.

We first neglect thermal effects. In order to represent all bodies of table 4.6 on the

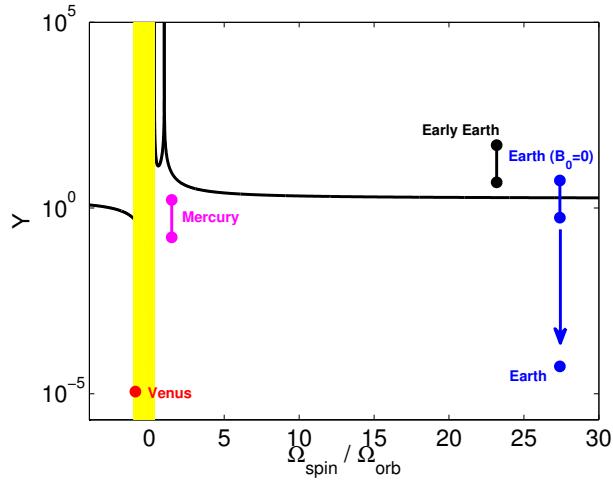


FIGURE 4.13 – *TDEI stability diagram for celestial bodies of the solar system. Considering a surfacic viscous damping term of the growth rate $\sigma_s = -\alpha f(\eta) E^{1/2}$ (see section 4.2.3.6), the zone above the black line, defined by (4.47), is the unstable zone, whereas Y , defined by (4.45), is calculated with $\alpha = 1$ and $\alpha = 10$ for each planet (for the current Earth and Venus, the difference is very small). The yellow zone is the so-called 'forbidden zone', given by $\Omega_{\text{spin}}/\Omega_{\text{orb}} \in [-1; 1/3]$.*

same stability diagram, we define the quantity

$$Y = \beta \left(\alpha f(\eta) \sqrt{E} + \frac{\Lambda}{4|1 + \Omega^G|^3} \right)^{-1}. \quad (4.45)$$

The quantity Y includes the specific dependence in the spin/orbit angular velocity ratio, aspect ratio η of the inner core and the magnetic field. The stability criterium

$$\sigma = \frac{(2\Omega^G + 3)^2}{16 |1 + \Omega^G|^3} \beta - \alpha f(\eta) \sqrt{E} - \frac{\Lambda}{4 |1 + \Omega^G|^3} \geq 0 \quad (4.46)$$

derived from (4.38) and (4.40) is then equivalent to

$$Y \geq \frac{16 |1 + \Omega^G|^3}{(3 + 2\Omega^G)^2}. \quad (4.47)$$

Figure 4.13 represents the stability results for the TDEI in the liquid cores of the non-synchronized planets of the solar system concidered in table 4.6. The case of each planet will be discussed in the following. We can already note that, except the Early Earth, the TDEI seems not currently be present in the telluric bodies of the solar system.

An important result, already noticed in Cébron *et al.* (2010a), is that the Early Earth, with a Moon two times closer than today and in absence of exten magnetic field, is unstable with a good level of confidence. The dissipated power due to the instability was around $5 \cdot 10^{18} W$, which corresponds to a tidal quality factor of $Q \sim 0.003$. This estimation

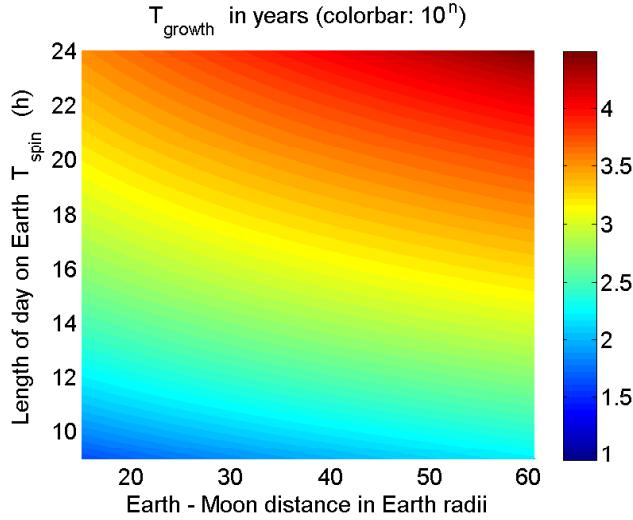


FIGURE 4.14 – Evolution of the typical growth time $T_{\text{growth}} = 1/\sigma$ of the instability in the Early Earth core as a function of the Earth-Moon separation and of the length of day on the Early Earth T_{spin} ($\alpha = 2.62$). Note that this diagram assumes no external magnetic field ($B_0 = 0$).

seems huge in comparison to the present dissipation by tidal friction ($\sim 3.75 \cdot 10^{12} \text{ W}$ according to Munk & Wunsch, 1998) but actually, it simply suggests that the Earth-Moon system was then in rapid evolution. Figure 4.14 shows in more details the stability of the Early Earth, for different values of the length of day and Earth-Moon distances. Note that in absence of meteoroid impacts, the angular momentum conservation links these two quantities, which cannot then vary independently. However, at this epoch, violent meteoroid impacts have probably modified the angular momentum of the early Earth-Moon system (Melosh, 1975; Wieczorek & Le Feuvre, 2009) and we thus keep these two parameters independant, which allows to cope with uncertainties.

The case of the actual Earth is more subtle : if we consider that the actual magnetic field is provided by thermo-solutal convective motions in the core, it has to be considered as an imposed field for the dynamics of the elliptical instability. In this case, the destabilizing term in the growth rate (4.46) is about 10^{-7} , whereas the magnetic damping term is around 0.004. Then the TDEI cannot grow, whatever the Ekman number is. On the contrary, if we consider that the actual magnetic field is provided by the flow driven by the TDEI, the threshold has to be calculated with $\Lambda = 0$, and the actual Earth is slightly unstable, with a growth time of around 14,000 years. The same result was suggested by Aldridge *et al.* (1997), neglecting the influence of magnetic field and global rotation.

Considering the actual heat flux of Earth, the corresponding super-adiabatic temperature contrast is about 1 mK, leading to a vigorous convection in the liquid core (Christensen & Aubert, 2006). First, note that this vigorous convection does not prevent the elliptical instability to grow, as shown in Cébron *et al.* (2010c); Lavorel & Le Bars (2010). Second, we can wonder the influence of a stably stratified flow. To confirm the negligible

TABLE 4.7 – *Physical and orbital characteristics used for the four galilean moons and Titan.*

	Io	Europa	Ganymede	Callisto	Titan
$M (\times 10^{-22} \text{ kg})$	8.93	4.8	14.8	10.8	13.45
$R (\text{km})$	1822	1561	2631	2410	2576
$T_{orb} (d)$	1.77	3.55	7.16	16.69	15.95
$e (\times 10^3)$	4.1	9.4	1.3	7.4	28.8
$\varepsilon (\times 10^4)$	1.3 ^a	2 ^a	0.056 ^a	0.042 ^a	1.3 ^a
$B_0 (\text{nT})$	1850	410 ^b	120	10 ^b	0

^a Physical libration amplitude from Noir *et al.* (2009)

^b Order of magnitude from Zimmer *et al.* (2000) of the magnetic field component along the rotation axis of the moon (see also Kabin *et al.*, 1999).

role of the temperature, we can consider, as an upper bound, a subadiabatic gradient of the same order of magnitude in the Early Earth (see Sumita & Yoshida, 2003, for a discussion on this possible stable density stratification in the whole early Earth outer core and its disruption). For the actual Earth, such a stratification leads to $\tilde{Ra} \approx -1.4 \cdot 10^{-6}$, and the dependance $\tilde{Ra} \propto D^3 E^2$ gives the value $\tilde{Ra} \approx -2 \cdot 10^{-7}$ for the Early Earth. Considering $\tilde{Ra} \approx -1 \cdot 10^{-6}$ as an upper bound, the formula (4.38) is valid ($\tilde{Ra} \sim O(\beta)$) and shows that the thermal stratification reduces the growth rate by 2%. This confirms that the role of the temperature can be neglected in the limits considered in this work.

For the last two bodies, note that Venus is in the forbidden band, which means that whatever the tidal deformation or the Ekman number are, the TDEI cannot grow. Mercury is slightly below the threshold of the instability and is thus probably stable today. Note that Mars is clearly stable nowadays ($\beta \ll \sqrt{E}$), but Arkani-Hamed *et al.* (2008); Arkani-Hamed (2009) suggested that past gravitational interactions with an asteroid could have excited a TDEI in the martian core during its fall towards the planet.

4.2.4.2 Synchronized body : libration driven elliptical instability (LDEI)

4.2.4.3 Galilean moons and Titan

The presence of LDEI in Io has been first suggested by Kerswell & Malkus (1998). In Herreman *et al.* (2009), this suggestion has been reexamined and the magnetic field induced by this possible instability has been quantified. In the following, this calculation is re-evaluated and extended to the four galilean moons (Io, Europa, Ganymede and Callisto), considering the presence of the external magnetic field of Jupiter. Titan is also considered. All necessary data are given in table 4.7 and 4.8.

As described in section 4.2.3.5, we consider an instantaneous differential rotation $\epsilon \cos(\omega_o t)$ for these synchronized bodies. Focusing on the forced librations due to the orbital eccentricity, the libration frequency is $\omega_o = 1$. The amplitude of the libration ϵ is given by $\epsilon = 2e$ for optical librations. For physical librations, obtained for $\Re \gg 1$, $\epsilon = \varepsilon$

TABLE 4.8 – *Stability results in the case of optical librations ($\epsilon = 2e$ and β from this table and table 4.7). For the considered liquid cores, we take as typical values $\sigma_e = 4 \cdot 10^5 \text{ S.m}^{-1}$, $\rho_0 = 8\,000 \text{ kg.m}^{-3}$ and $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, consistent with a Fe/Fe-S composition. For the considered subsurface oceans, we take as typical values $\sigma_e = 0.25 \text{ S.m}^{-1}$ (Hand & Chyba, 2007), $\rho_0 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ and $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$.*

	Io	Europa	Ganymede	Callisto	Titan
	core	core	core	core	core
R_2/R	0.52 ^{b,c}	0.38 ^c	0.27 ^d	– ^e	0.35 ^f
η	0	0	0	–	0
$E (\times 10^{14})$	2.7	14	20	–	27
$\beta (\times 10^4)$	60 ^b	9.7 ^g	3.7 ^h	–	1.2 ⁱ
$\Lambda (\times 10^7)$	42	4.1	0.7	–	0
$\sigma (yr^{-1})$	0.016	0.0025	$-3 \cdot 10^{-4}$	–	$7 \cdot 10^{-5}$
	ocean	ocean	ocean	ocean	ocean
Crust (km)	–	10^k	100^l	150^m	70^n
Depth (km)	–	100^k	150^l	150^m	200^n
R_2/R	–	0.99	0.96	0.94	0.97
η	–	0.94	0.94	0.93	0.92
$E (\times 10^{14})$	–	2.0	1.5	4.5	3.5
$\beta (\times 10^4)$	–	9.7 ^g	3.7 ^h	0.72 ^h	1.2 ⁱ
$\Lambda (\times 10^{13})$	–	21	3.5	0.9	0
$\sigma (yr^{-1})$	–	0.0016	$-6 \cdot 10^{-4}$	$-4 \cdot 10^{-4}$	-10^{-4}

^aPhysical libration amplitude from Noir *et al.* (2009)

^bKerswell & Malkus (1998), considering the static tidal bulge

^cHussmann & Spohn (2004)

^dBland *et al.* (2008)

^eKuskov & Kronrod (2005)

^fGrasset *et al.* (2000)

^gwith $k_2 \approx 0.3$ (Wahr *et al.*, 2006; Baland & Van Hoolst, 2010)

^hEq. (4.19) with $k_2 \approx 0.3$

ⁱ $k_2 \approx 1$ (Goldreich & Mitchell, 2010)

^j Primary (background) field (Zimmer *et al.*, 2000)

^k Wahr *et al.* (2006)

^l Bland *et al.* (2009)

^mKuskov & Kronrod (2005)

ⁿSohl *et al.* (2003)

has to be measured or estimated (see the data in Noir *et al.*, 2009). In any case, the theoretical analysis is the same, and the use of formula (4.39) with $\tilde{Ra} = 0$ (thermal field negligible) and $\omega_o = 1$ gives the LDEI threshold. To obtain a unique stability diagram for all bodies of table 4.7, we define the quantity

$$Y_2 = \left[\epsilon \beta - \frac{4}{17} \Lambda \right] \left[\alpha (1 - \eta) f_{(\eta)} \right]^{-1}, \quad (4.48)$$

and use the Ekman number based on the thickness $E_k = E/(1 - \eta)^2$. The threshold for LDEI given by formulas (4.39) and (4.40)

$$\sigma = \frac{17}{64} \epsilon \beta - \alpha (1 - \eta) f_{(\eta)} \sqrt{E_k} - \frac{1}{16} \Lambda \geq 0 \quad (4.49)$$

is then equivalent to

$$Y_2 \geq \frac{64}{17} \sqrt{E_k}. \quad (4.50)$$

This allows to plot the stability diagram shown in figure 4.15 in the case of the optical libration ($\epsilon = 2e$) for a quasi-equilibrium hydrostatic bulge calculated with formula (4.19), corresponding to the optimal case for LDEI (i.e. the maximum possible libration amplitude and the maximum possible elliptical deformation). In the following, we will discuss the stability versus the LDEI of the galilean moons, Titan and three Super-Earths. Because the tidal bulge and the libration amplitudes of these bodies are not yet known (see the discussion of Goldreich & Mitchell, 2010), we will represent the results on diagrams in the (β, ϵ) plane, taking into account the full range of variability of β and ϵ . Therefore, the upper right corner will correspond to the optimal case for the LDEI : the libration of a purely deformable body i.e optical libration with $\epsilon = 2e$ and an hydrostatic bulge. The lower left corner corresponds to the libration of a rigid body (physical librations), associated with the small diurnal tides. In the same way, the lower right corner corresponds also to physical librations, but with an hydrostatic bulge. Finally, the upper left corner corresponds to the libration of a purely deformable body (optical libration) associated to the small diurnal tides amplitude. The relevant physical configurations for each body depend on their compositions and will be specifically discussed in the following for each of them.

First, we consider Io with the values used in the studies of Kerswell & Malkus (1998) and Herreman *et al.* (2009), i.e. a static bulge of ellipticity $\beta = 0.006$ and a libration amplitude assumed to be $\epsilon = 2e$ (see table 4.7). As already found by these authors, Io is found to be unstable with a good level of confidence (typical growth time of 63 years). However, this is an optimal non-realistic case : the ellipticity used is due to a static frozen bulge ($\Re \gg 1$), and the libration amplitude is taken equal to $2e$, as in the deformable case ($\Re \ll 1$). Due to its silicate mantle, the core of Io is expected to be in the limit $\Re \gg 1$, and consequently the ellipticity to consider is indeed $\beta = 0.006$ but the libration amplitude is rather $\epsilon \approx 1.3 \cdot 10^{-4}$ (see table 4.7), which is 63 times smaller than $2e$. With these more realistic values and taking into account the presence of Jupiter magnetic field, the lower right corner of figure 4.16 shows that Io is expected to be stable, contrary to what was expected. However, in order to obtain a better view of the stability in Io, figure

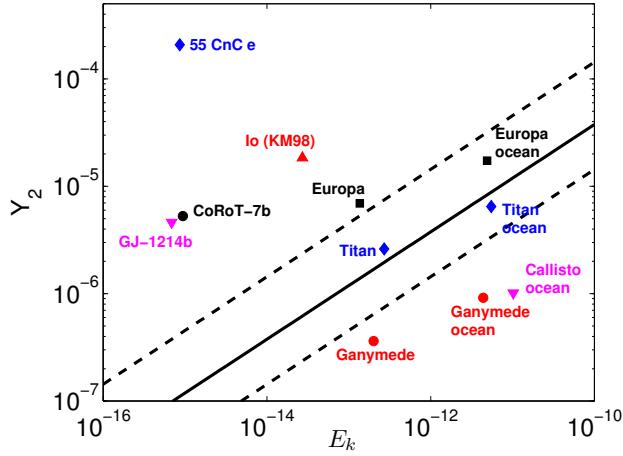


FIGURE 4.15 – *LDEI stability diagram for synchronized celestial bodies in the optimal case for the instability, i.e. an optical libration ($\epsilon = 2e$) for a quasi-equilibrium tide. All values are given in table 4.7 and the horizontal axis represents the Ekman number E_k based on the thickness of the fluid layer. The label KM98 for Io reminds that the point is placed with the values used by Kerswell & Malkus (1998). The zone below the black line, defined with the viscous surfacic damping coefficient $\alpha = 2.62$, is the stable zone, whereas the black dashed lines represent respectively the extremum values $\alpha = 1$ and $\alpha = 10$.*

4.16 gives the typical growth time of the instability for different ellipticities and libration amplitudes, ranging between the limit cases $\Re \gg 1$ and $\Re \ll 1$, with $\epsilon = 2e$ and the diurnal tidal ellipticity $3e\beta \approx 7 \cdot 10^{-5}$, corresponding to a diurnal tide amplitude around 130 m. Future accurate measurements of the tidal amplitude at the core-mantle boundary and of the libration amplitude should confirm our prediction.

In the optimal case for instability, figure 4.15 shows that the liquid core of Europa is unstable, as already suggested by Kerswell & Malkus (1998), even when taking into account the Joule dissipation due to the presence of Jupiter magnetic field. We calculate the typical growth time of the instability to be around 400 years, and the associated dissipation to be on the order of $P \sim 10^{10} W$. This corresponds to a tidal quality factor of $Q \sim 10^7$, which is two orders of magnitude below the conservative estimation of $3 \cdot 10^{12} W$ for the tidal heating rate on Europa (O'Brien *et al.*, 2002). In reality, only the subsurface ocean is expected to behave in this optimal case, presented in figure 4.15 (Goldreich & Mitchell, 2010). The silicate mantle of Europa should follow a more rigid response, whose amplitude is controlled by the induced dissipation in the ocean. This libration amplitude of the mantle being not known yet, intermediate behaviours are explored in figure 4.17a. Because of this mechanism, we expect the libration of Europa mantle to follow the behaviour of the icy crust ; consequently, its core is expected to be described by parameters close to the upper right corner of diagram 4.17a. This shows that the core of Europa is expected to be unstable. The elastic behaviour of the icy crust above Europa's ocean is expected to behave in the deformable limit ($\Re \ll 1$), and figure 4.17b shows that

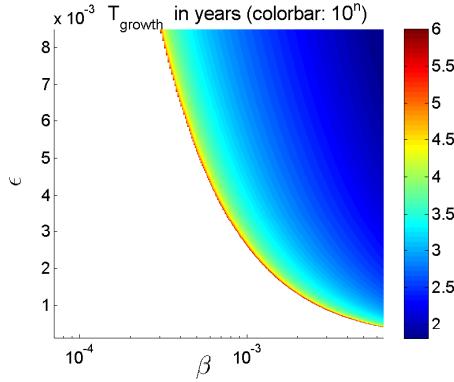


FIGURE 4.16 – Evolution of the typical growth time $T_{growth} = 1/\sigma$ of the instability in Io with the tidal bulge ellipticity β and the libration amplitude ϵ ($\alpha = 2.62$). The upper right corner corresponds to the optimal case considered in Kerswell & Malkus (1998) and Herreman et al. (2009), the upper left corner corresponds to optical librations with a small tidal amplitude corresponding to diurnal tides ($\beta = 7 \cdot 10^{-5}$, $\epsilon = 2e = 0.0082$) and the lower right corner corresponds to the region of physical librations of the static frozen bulge ($\beta = 0.006$, $\epsilon = 1.3 \cdot 10^{-4}$). The white zone corresponds to the stable zone where the instability cannot grow because of dissipative effects (at the boundary with the colored zone, the growth time is infinite). Note that the range of the colorbar is chosen so that color variations are clearly visible.

the ocean is clearly unstable.

Concerning the two last galilean moons, the core of Ganymede and the subsurface ocean of Callisto and Ganymede are found to be stable in the optimal case (fig. 4.15). A LDEI is improbable today. Figure 4.15 shows also that Titan's core is slightly unstable but remains in the threshold band of uncertainties. The subsurface ocean of Titan is probably stable because even in the optimal case for the LDEI, it remains in the vicinity of the threshold.

4.2.4.4 Super-Earths

The recent discovery of extra-solar telluric planets gives typical examples of synchronized planets in close orbit around their host stars. This particular astrophysical configuration should lead to a vigorous LDEI in their possible liquid cores. In this section, we consider three Super-Earths, expected to be telluric : 55 CnC e, CoRoT-7b and GJ 1214b, respectively at $D = 0.0156$ A.U, $D = 0.0172$ A.U, and $D = 0.0143$ A.U from their host star. The data used are from Winn et al. (2011) for 55 CnC e, Valencia et al. (2010) for CoRoT-7b and Charbonneau et al. (2009) for GJ 1214b. They are given in table 4.9. For CoRoT-7b, the work of Léger et al. (2011) predicts a core composed of liquid metals, representing 11% of the total planetary volume, as for the actual Earth. The presence of a liquid core in Super-Earths is still not clear (e.g. Wagner et al., 2011, for CoRoT-7b) but we can reasonably assume that a planetary liquid core could occupy about one

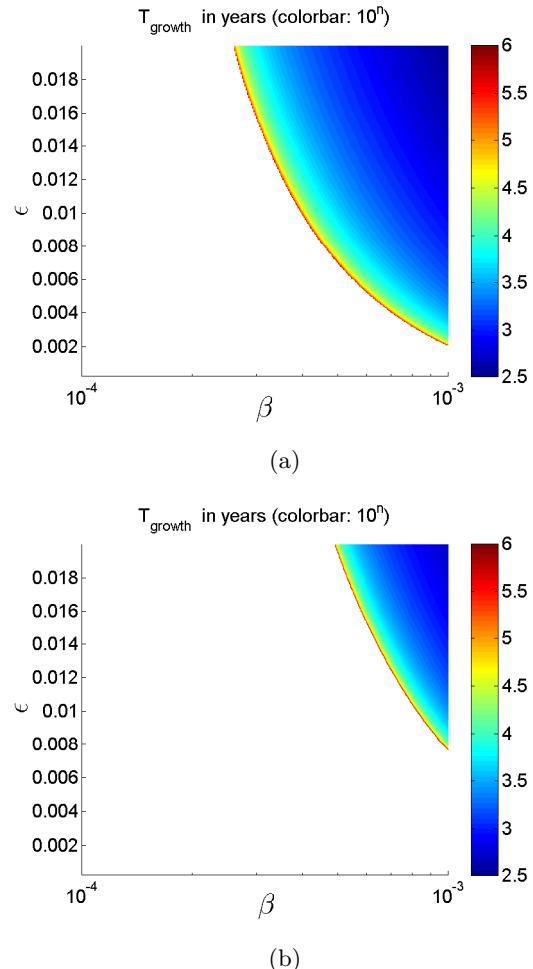


FIGURE 4.17 – Same as figure 4.16 but for Europa, considering (a) its possible liquid core and (b) a 100 km depth subsurface ocean. Both the core and the subsurface ocean of Europa are expected to behave in the deformable limit, locating their states in the upper right corner of the diagram. Both are thus found to be unstable.

TABLE 4.9 – *Physical and orbital characteristics used for the stability calculations in exoplanets. We take as typical value $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, consistent with a Fe/Fe-S composition. We use the formula (4.18) to estimate the tidal bulge ellipticity.*

	CoRoT-7b	GJ 1214b	55 CnC e
M (in Earth's mass)	4.8	6.55	8.57
R (in Earth's radius)	1.68	2.678	1.63
T_{orb} (d)	0.854	1.58	0.7365
R_2/R	$1/3^a$	$1/3^b$	$1/3^c$
e	0.001 ^c	0.001 ^c	0.057 ^d
η	0	0	0
E ($\times 10^{16}$)	9.4	6.8	8.6
β ($\times 10^3$)	7	6	5
σ (yr^{-1})	0.01	0.005	0.45

^a Coherent with Léger *et al.* (2011).

^b Coherent with the values from Nettelmann *et al.* (2010).

^c Hypothesis assumed.

^d Winn *et al.* (2011).

third the radius of the planet, which corresponds to 4 % of the total planetary volume. Because of the proximity of the parent star, these extra-solar planets are expected to be synchronized. The actual orbital eccentricities of CoRoT-7b and GJ 1214b are not known. If they are fully circularized and synchronized, no elliptical instability can grow. On the contrary, if a small libration exists, previous stability formula can be used. Let assume here an orbital eccentricity of $e = 0.001$, well beyond the detection limit. Figure 4.15 shows that in the optimal case these three Super-Earths cores are clearly unstable with a good level of confidence, which means that the LDEI is probably present in their liquid layers. One can notice that this result is not very sensitive to the hypothesis on the size of the considered liquid core : for instance, with the values of table 4.9, CoroT-7b become stable for liquid core aspect ratio R_2/R smaller than 1 % (for the optimal case i.e. optical librations and equilibrium tides). In these estimates, we use the hydrostatic tidal deformation, which underestimates the real tidal deformation. Note also that larger orbital eccentricity would lead to more unstable configurations. Figure 4.18 shows the influence of these uncertainties, as well as the effect of smaller libration amplitudes and tidal deformations. The proximity of the known Super-Earths with their host stars leads to strong tidal deformations, and the LDEI is then able to grow from very small libration amplitudes, as shown in figure 4.18. Same conclusions are obtained for Kepler-10b (Batalha *et al.*, 2011), assuming the same hypothesis.

4.2.5 Conclusion and discussion

In conclusion, the presence of the elliptical instability in telluric celestial bodies has been investigated theoretically. New analytical results have been determined to fill the gap

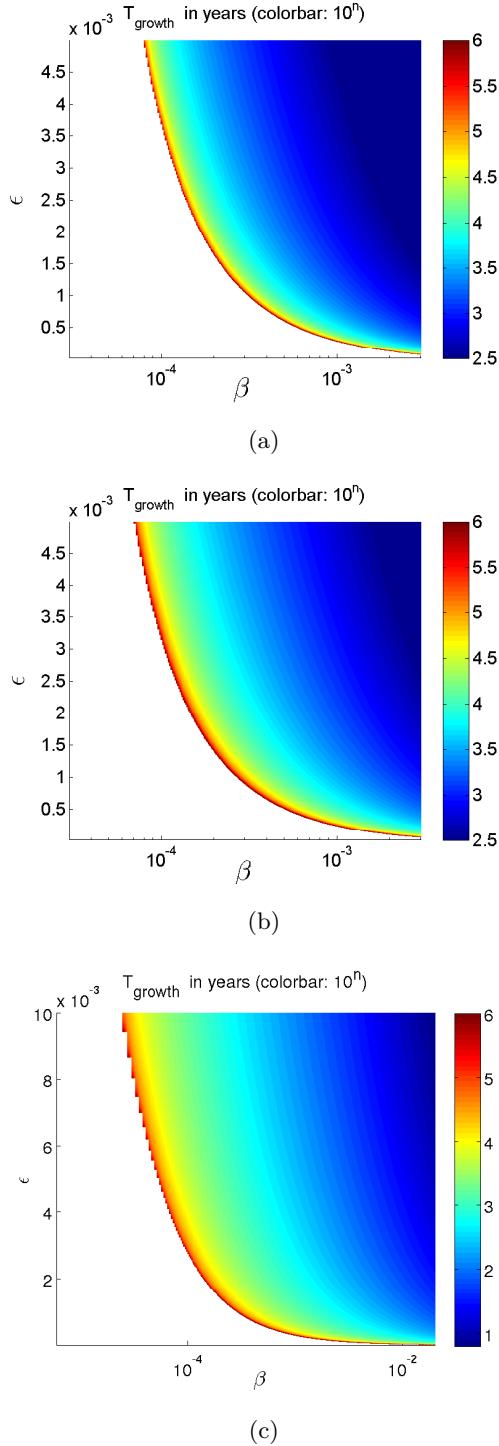


FIGURE 4.18 – Same as figure 4.16 but for CoroT-7b in figure (a), GJ 1214b in figure (b) and 55 CnC e in figure (c). The true tidal deformation, larger than the hydrostatic value, leads to an LDEI for a large range of libration amplitudes. Then, the presence of the LDEI in their liquid cores is very probable, whatever the uncertainty ranges.

between previous studies and astrophysical applications. In particular, generic formulas for the growth rate of the elliptical instability driven respectively by tides (TDEI) and libration (LDEI) have been derived, in the presence of imposed magnetic and thermal base fields. It has been shown that an elliptical instability is strongly expected in the core of the Early Earth, Europa, 55 CnC e, CoRoT-7b and GJ 1214b, as well as in the subsurface ocean of Europa. Those results are valid for the present state of the considered bodies, and do not preclude the existence of elliptical instability in the past. For instance, the Early Earth core was clearly unstable, because of the larger gravitational distortions when the Moon was closer.

Now, one can wonder what are the signatures and consequences of such an instability on the planetary dynamics. A first consequence would be on the orbital evolution and synchronization process : indeed, the elliptical instability generates three-dimensional turbulent flows with cycles of growth, saturation, fluctuations and relaminarization (e.g. Le Bars *et al.*, 2010). Timescales involved range typically between the spin period and the typical growth time of the instability. Dissipation rates at the planetary scale, and consequently the orbital evolution, may then follow the same variations, with periods of rapid evolution when an elliptical instability is present, followed by more quiescent periods, for instance when the forbidden zone is reached. This increased dissipation should accelerate the synchronization process, as described in Le Bars *et al.* (2010), and this range of timescales should appear in the evolution of the spin rotation rate.

The second consequence would be on heat flux variations at the planetary surface : indeed, as shown in Cébron *et al.* (2010c); Lavorel & Le Bars (2010), flows driven by elliptical instability are very efficient in transporting heat by advection. Hence, sub-adiabatic cores should not be regarded as thermal blankets when tidally unstable. The usual Nusselt number $Nu = Q_{tot}/Q_{diff}$, ratio between the total outward heat flux Q_{tot} and the purely diffusive outward heat flux Q_{diff} , associated to this heat advection is given by the following scaling law, verified both experimentally (Lavorel & Le Bars, 2010) and numerically (Cébron *et al.*, 2010c) :

$$Nu = \frac{0.01}{\sqrt{E}}. \quad (4.51)$$

This leads to a total outward heat flux advected by the elliptical instability about $Nu \approx 3 \cdot 10^4$ times larger than a purely diffusive outward heat flux. Besides, in the presence of natural thermal convection, the superimposition of chaotic elliptically driven flows would induce large scale variations of the same amplitude.

Finally, internal flows driven by elliptical instability are directly responsible for magnetic field generation. The question of whether or not LDEI and TDEI are dynamogène is still open and remains out of reach of the currently available numerical capacity. But in any case, elliptically driven flows induce a magnetic field from an existing background one. In order to estimate a typical amplitude of such an induced field, we can use the results of our WKB approach. This shows that the dimensionless induced magnetic field inside the core and the instability velocity \mathbf{u}_0 are systematically related by

$$\mathbf{B} = i \frac{Rm k_{x_3}}{k^2} \mathbf{u}_0, \quad (4.52)$$

where k and k_{x_3} are respectively the norm and the axial component of the wave vector of the excited mode of the elliptical instability. This generic expression shows that the induced magnetic field due to the elliptical instability is systematically proportional to and in quadrature with the velocity field due to the instability. In the case of the TDEI, $k_{x_3} = k/2$ and in the case of the LDEI, $k_{x_3} = \omega_o k/4$ (see respectively the appendix E.1 and E.2). Then, assuming that at saturation, the typical flow induced by instability is commensurate to the differential rotation between the fluid and the elliptical distortion (see table 4.3), we estimate the surface field by

$$b_{surf} = \frac{Rm}{k^2} \frac{k_{x_3}}{\Omega} \left(\frac{R_2}{R} \right)^3, \quad (4.53)$$

where R is the planet radius. Starting from the jovian magnetic field component along the rotation axis, the LDEI in Europa ($k_{x_3} = k/4$) subsurface ocean is capable of inducing surface variations of up to $\sim 0.1\%$ of the ambient field (reached for $k = 2\pi/(1 - \eta)$ and optical librations, i.e. $\epsilon = 0.0188$), and LDEI in its core up to $\sim 100\%$ of the ambient field at the surface (reached for $k = 2\pi/(1 - \eta)$ and physical librations, i.e. $\epsilon = 2 \cdot 10^{-4}$). Considering the Galileo's E4 flyby of Europa (see Zimmer *et al.*, 2000; Kabin *et al.*, 1999), the background z-component of the magnetic field is perturbed from 410 nT to 380nT at a distance of Europa about 1.5 Europa radius. This perturbation of 30nT is of the same order of magnitude as the possible LDEI induced magnetic field from the core. Internal sources should thus be considered in addition to plasma currents (Kabin *et al.*, 1999) for the interpretation of Europa magnetic signal.

To finish with, one should notice that the tide driven elliptical instability (TDEI) and the libration driven elliptical instability (LDEI) studied here for telluric planets, can also affect the giant gaseous planets of our solar system (Wicht & Tilgner, 2010), as well as extra-solar gaseous planets such as the hot-jupiters, whose dramatic tidal deformations should excite vigorous elliptical instabilities in the planetary atmospheres, but also in their host stars (Rieutord, 2003; Ou *et al.*, 2007; Cébron *et al.*, 2011).

4.3 Étoiles extra-solaires

Le travail présenté dans cette section constitue une première approche de l'étude de l'instabilité elliptique dans le contexte des systèmes à Jupiters chauds. Ce travail, mené en collaboration avec C. Moutou et R. Farès, a été en partie publié dans les actes du congrès *Detection and dynamics of transiting exoplanets* qui s'est déroulé à l'Observatoire de Haute-Provence Cébron *et al.* (2011).

4.3.1 Introduction

The search for planetary systems shows that a substantial fraction of the observed stars host extrasolar planets. Methods of detection, such as the radial-velocity method or the transit method, are most sensitive to large planets on small orbits. Consequently, many known planets have a mass comparable to that of Jupiter orbiting very close to

their host stars. This population of planets, the so-called hot Jupiters, currently includes about 25 % of all known planets (Lanza, 2009). The increasing amount of data on these systems allows to constrain more precisely the theoretical models of interaction between two celestial bodies, such as tidal or magnetic mutual influences (e.g. Cuntz *et al.*, 2000; Gu & Suzuki, 2009). Indeed, the permanent and systematic presence of tides in binary systems leads to clear observational evidence of their important roles (see the recent review of Mazeh, 2007). For instance, the ellipsoidal effect or the apsidal motion⁶ are clear signatures of the tidal deformations, whereas the tidal induced dissipation and angular momentum exchanges control the orbital evolution of the system, driving it toward a synchronized state on a circular orbit (neglecting possible thermal tides, which can drive a planet away from synchronism : e.g. Gold & Soter, 1969). In the case of systems composed of a star and a close-in companion, the role of tides has been recently investigated, in order to tentatively explain for instance : i) the spin-up of stars with hot Jupiters (Pont, 2009), ii) the radius anomaly of strongly irradiated planets (Leconte *et al.*, 2010b), iii) the synchronization or quasi-synchronization of the stellar spin (Aigrain *et al.*, 2008). Most recent observations have attracted our interest to reconsider the possible consequences of a often ignored ingredient, the elliptical instability. The star τ Boo has a massive planet in short orbit ($4.5 M_{Jup}$ minimum mass and 3.31-day period), and the remarkable property of a stellar surface rotating synchronously with the planetary orbit. It is possible that tides from the planet onto the star have synchronized the thin convective zone of this F7 star, since the mass ratio between the planet and the convective zone is more than 10. Recurrent spectropolarimetric observations have allowed to reconstruct the global magnetic topology of the star since 2006, and its evolution. Two polarity reversals have been observed in two years (Donati *et al.*, 2008; Fares *et al.*, 2009), an evidence for a magnetic cycle of 800 days, much shorter than the Sun's (22 yrs). The role of the planetary tides on the star in this short activity cycle was questioned ; a strong shear may take place at the bottom of the convective zone, triggering a more active and rapidly evolving dynamo.

The Spin-orbit misalignment⁷ of one third of transiting hot Jupiters (Winn *et al.*, 2010) also questioned the role of tides in such systems, since the tides are responsible for alignment of the planes, circularization of the orbit and synchronization of periods. The classical idea of planet formation and migration within a disk was also challenged by such observations. Tidal instabilities may cause the rotational axis of both bodies in the system to change orientation with time, at a relatively short timescale. Misaligned systems could thus show unstable rotation axes of stars, rather than tilted orbital planes of the planet. Tidal implications on the internal structure of planets were already reported (Leconte *et al.*, 2010b). Since the power dissipated by tides could generate radius anomaly, then the additional power generated by tidal instabilities should also be taken into account in planet modeling.

6. The apsidal motion, which is the precession of the *line of apsides* of a non-circular orbit (the line of apsides, also called *apse line* is defined by the periapsis and apoapsis for elliptical orbit, and by the orbit's periapsis and focus for parabolic and hyperbolic orbits), is due to the mutual tidal distortion in a binary system (the first correct, and now classical calculation, of this motion was made by Cowling, 1938). A famous example of apsidal motion, for instance, is the perihelion precession of Mercury.

7. The angle considered is the angle between the stellar spin axis and planetary orbit normal (as projected on the sky).

4.3.2 Elliptic instability in astrophysics : growth rate and observables

In an astrophysical context, the TDEI has been suggested in accretion disks by Goodman (1993) who first explore its role in angular momentum transport. His results are later confirmed by two-dimensional numerical simulations of Ryu & Goodman (1994), which show that the instability induces no significant angular momentum transport in this context (see also Lubow *et al.*, 1993; Balbus & Hawley, 1998). However, Lebovitz & Zweibel (2004) confirm that its presence in accretion disks is possible (see also Mizerski & Bajer, 2009), as well as in the inner parts of barred galaxies, in which the gas flow is slightly elliptical, where the instability could be a source of turbulence. Its presence in accretion disks has recently been reinvestigated, considering the presence of elliptical vortices in these disks (e.g. Lesur & Papaloizou, 2009*a,b*; Lyra & Klahr, 2010). The possible presence of a TDEI in stars is first explored by Lebovitz & Lifschitz (1996*b,a*), who revisit the classical problem of the stability of Riemann ellipsoids. These ellipsoids are stationary incompressible figures of equilibrium, representing very simple self-gravitating stellar models. Even if the existence of their compressible counter-parts has been questioned (Chambat, 1994; Filippi *et al.*, 1996, 2002), examples have been theoretically and numerically found (e.g. Cazes & Tohline, 2000; Ou, 2006), which proves the relevance of this simple model. Lebovitz & Lifschitz (1996*b,a*) show theoretically that certain of these incompressible ellipsoids, with elliptical streamlines, are prone to the TDEI, which destabilize the figure of equilibrium. This result has been confirmed and numerically extended to polytropic Riemann ellipsoids by Ou *et al.* (2004, 2007), showing that the elliptical instability is able to grow on fully compressible fluid flows. Finally, so far the presence of the TDEI in a star deformed by tidal forces has been proposed by Rieutord (2003) who gave the first description of its possible consequences.

4.3.2.1 Model

Let us consider the star as a massive fluid body, with its own spin and tidally deformed by an orbiting extra-solar planet. For our purpose, the considered layer of the star can be modeled as a rotating flow inside a fixed triaxial ellipsoidal shell of outer axes (a, b, c) , where c is the length of the polar axis. In the following, we will use the mean equatorial radius $R_{eq} = (a + b)/2$ as the lengthscale. We introduce also a timescale Ω^{-1} using the tangential velocity along the deformed outer boundary at the equator $U = \Omega R_{eq}$. Then, the hydrodynamic problem is fully described by five dimensionless numbers : the ellipticity $\beta = |a^2 - b^2|/(a^2 + b^2)$, the shell aspect ratio η , the aspect ratio c/b , the Ekman number $E = \nu/(\Omega R_{eq}^2)$, where ν is the kinematic viscosity of the fluid and the ratio $\Omega^G = \Omega_{orb}/(\Omega - \Omega_{orb})$ where Ω_{orb} is the orbital rate and Ω the fluid angular velocity.

4.3.2.2 Calculation of the instability growth rate

As previously stated, the elliptic instability comes from a parametric (triadic) resonance and takes place in any rotating fluid whose streamlines are (even slightly) elliptically deformed. In the usual hydrodynamic case, the underlying strain field responsible for the elliptic deformation is in resonance with two inertial waves (Bayly, 1986; Waleffe, 1990). However, in the presence of an external magnetic field, magneto-inertial waves can also be

in resonance in the limit of non-diffusive magnetic field i.e. in the limit of ideal magnetohydrodynamic (Lebovitz & Zweibel, 2004; Mizerski & Bajer, 2009, 2011) : this is the so-called magneto-elliptical instability. In the same way, when a density stratification is present, gravito-inertial waves can be coupled in the non-diffusive limit (Le Bars & Le Dizès, 2006; Guimbard *et al.*, 2010) : this is the so-called gravito-elliptical instability. In this work, we consider only the coupling of inertial waves, neglecting the effects of a possible density stratification or the presence of a magnetic field (see also Cébron *et al.*, 2011, for a discussion on these specific points). Note, however, that convective flows are in no case a problem for the instability to grow (Lavorel & Le Bars, 2010; Cébron *et al.*, 2010c; Wicht & Tilgner, 2010).

In most of the previous studies on the tidal instability, it is assumed that the tidal deformation is fixed and that the excited resonance is the so-called spin-over mode, which corresponds to a solid body rotation around an axis perpendicular to the spin axis of the system. This is indeed the only perfect resonance in spherical geometry in the absence of rotation of the elliptical deformation (Lacaze *et al.*, 2004). But in all natural configurations such as binary stars, moon-planet systems or planet-star systems, orbital motions are also present. This implies that the gravitational interaction responsible for the tidal deformation is rotating with an independent angular velocity Ω_{orb} different from the spin of the considered star. This significantly changes the conditions for resonance and the mode selection process, as recently studied in (Le Bars *et al.*, 2007, 2010). A very important point is the apparition of a so-called 'forbidden zone' where the tidal instability cannot grow whatever the deformation and the rotation rates are. This forbidden zone is simply given by the following kinematic conditions $-1 \leq \Omega/\Omega_{orb} \leq 1/3$. This is a key point when observing natural systems possibly affected by the tidal instability. Outside from this forbidden zone, the growth rate of the tidal instability is given by (see e.g. the appendix E.1 or Craik, 1989).

$$\sigma = \frac{(2 \Omega^G + 3)^2}{16 |1 + \Omega^G|^3} \beta - K E^\gamma, \quad (4.54)$$

where the first term on the right-hand side comes from the inviscid local analysis (see the appendix E.1). The second term is due to the viscous damping of the instability. The pre-factor K depends on the excited mode of the tidal instability and on the aspect ratio η , the exponent γ depends on the kind of the viscous damping. If the surfacic damping is dominant, as in the case of no-slip boundaries, $\gamma = 1/2$. On the contrary, in the absence of surfacic viscous damping, the volumic damping in the bulk of the flow is dominant and then $\gamma = 1$. In the case of a planetary core or experiments, the boundary conditions are no-slip and the situation is unambiguous : the surfacic damping is dominant. But in the case of stars, the boundary conditions between the radiative and the convective zones are less clearly defined. Concerning the viscous pumping/dissipation, the astrophysical literature shows a disagreement between Tassoul (1987, 1995), who argue that it scale as $E^{1/2}$ (see also Tassoul & Tassoul, 1990, 1992a,b, 1997) and Rieutord (1992); Espinosa Lara & Rieutord (2007); Rieutord (2008a), who argue that this Ekman pumping/dissipation is rather proportionnal to E (see also Rieutord & Zahn, 1997). In the framework considered by these authors i.e. for an incompressible homogeneous fluid star, there is no ambiguity

for us : the viscous pumping/dissipation scales as E . However, we can imagine a more complex model where an Ekman layer exists at the boundary between the radiative zone and the convective zone (and not at the surface of the star as thought by Tassoul), due to a viscosity/density jump and velocity gradients (for instance induced by the presence of the elliptical instability in the convective zone or in the radiative zone). In this case, the viscous pumping/dissipation scale as $E^{1/2}$ (but not for the reasons presented by Tassoul). In this work, we will consider both models in order to obtain conservative results.

4.3.2.3 Observables due to the tidal instability

The tidal instability is expected to be dynamogenic, as already suggested in Malkus (1993), Lacaze *et al.* (2006) or Arkani-Hamed *et al.* (2008); Arkani-Hamed (2009). In this case, the magnetic field dynamics should be very different from the dynamics driven by a thermo-solutal convective dynamo. Another interesting feature from an astrophysical point of view is the inclination of the rotation axis of the flow due to the spinover mode, or at least the modification of the apparent rotation axis when an elliptical instability is present. Indeed, this could be directly related to the spin-orbit obliquity angle. In this case, there is no need to evoke a supplementary non-observable third body to justify the obliquity. The inclination of the rotation axis would be a direct consequence of the tilted rotation axis of the stellar flow. Note that in this case, as there is no supplementary torque acting on the star, the conservation of the angular momentum will imply that the rotation axis of the Hot Jupiter will also be tilted.

Finally, the tidal instability modifies the whole flow, which leads to a stronger viscous dissipation. This supplementary dissipation is larger than the simple dissipation induced by the tidal strain of the elliptically distorted basic flow. This supplementary dissipation could be very important for the synchronization process (see Le Bars *et al.*, 2010). We also expect that this extra dissipation and supplementary heat release could be related to the observed radius anomaly.

4.3.3 Application to hot-jupiter systems

In this section, we consider 29 hot-jupiter systems (physical and orbital characteristics given in the appendix G), and previous expressions will be used to evaluate their stability versus the elliptical instability.

4.3.3.1 Tidal deformation

We note M , R , respectively the mass and the radius of the star, M_2 the mass of the body responsible for the tidal deformation and D the distance between the two. As in section 4.2.2.6, the ellipticity due to tidal forces can be written

$$\beta = \frac{3}{2} h_2 \frac{M_2}{M} \frac{R^3}{D^3} \quad (4.55)$$

with the radial displacement Love number h_2 , directly linked to the potential Love number k_2 by $h_2 = 1 + k_2$. A lower bound of the tidal deformation is thus given by $k_2 = 0$, which is the limiting case of a massless tidal bulge. Then, taken into account the gravitational

potential of the tidal bulge systematically increases the tidal deformation. This influence is completely encompassed into k_2 , which depends only on the density profile at first order. This density profile can be obtained in assuming that the star is constituted of a polytropic⁸ gas fluid, which is a good commonly used approximation. In this model, the polytropic index n ranges typically between $n = 3/2$, representative of a fully convective star, and $n = 3$, which gives a stably stratified polytropic fluid and is thus representative of radiative zones (e.g. Horedt, 2004). For these two limiting polytropes, the potential Love numbers are respectively $k_2 \approx 0.3$ and $k_2 \approx 0.03$ (Brooker & Ollé, 1955). According to Mazeh (2007), typical model of stars leads to $k_2 \in [0.001; 0.01]$, depending on the stellar mass and age. In order to be conservative, we consider the lower bound $k_2 = 0$ (see also Claret & Willem, 2002; Landin *et al.*, 2009, for estimations of k_2 from the apsidal motions constants).

4.3.3.2 The stellar model

We model the considered stars as a two zone system : a convective zone where thermal convection is the dominant physical process and a radiative thermally stratified zone. The considered stars are about twice more massive than the Sun, and the convective zone is thus systematically above the radiative zone (e.g. Kippenhahn & Weigert, 1990). We focus on the external convective zone. Considering this external layer with a ratio η given by the depth of the convective zone R_{cz} ⁹, we estimate the growth rate of the elliptical instability using equation (4.54). Note that the convective fluid motions should not significantly modify the growth rate. Indeed, the Ekman number is typically about 10^{-11} whereas the thermal Rossby number in the convective zone is about $Ro \sim 0.1 - 1$: according to the study presented in section 2.6, this does not prevent the instability to grow. The molecular kinematic viscosity inside this zone is calculated considering the molecular kinematic viscosity of the Sun and assuming a temperature dependance in $T^{-5/2}$. This leads (e.g. Rieutord, 2008b) to $\nu = 0.001 (5800/\varsigma)^{5/2}$, with ς the surface temperature of the star in Kelvin unit, and ν in $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$.

4.3.3.3 Stability analysis with free-slip boundaries

In this case, the prefactor K of the viscous damping term in equation (4.54) is simply the square of the wavenumber $k = 2\pi/\lambda = \sqrt{K}$ of the excited mode. However, the value of k , needed to calculate explicitly the damping term, changes with the excited mode. A lower bound estimation for k is given by $k = \pi/(1 - \eta)$, which corresponds to the first unstable mode (a half wavelength inside the gap of the shell). A relevant upper bound is difficult to obtain. However, the balance between the typical inviscid growth rate β and the volume damping term leads to a typical wavelength $\lambda = 2\pi/k$ given by $l \sim \sqrt{E/\beta}$. Then, with typical values $E/\beta \sim 10^{-10}$, we obtain $\lambda \sim 10^{-5}$, which is larger than the Kolmogorov microscale $E^{3/4} \sim 10^{-12}$ given by the Kolmogorov theory which is the scale

8. A polytropic fluid is defined by the equation of state $p = A \rho^{1+1/n}$ where p is the pressure, ρ the density and (A, n) two constants (see the review of Horedt, 2004, on polytropes).

9. In the Sun for instance, the convective zone is located above $R_{cz} \approx 0.7 R_\odot$, where R_\odot is the Sun radius.

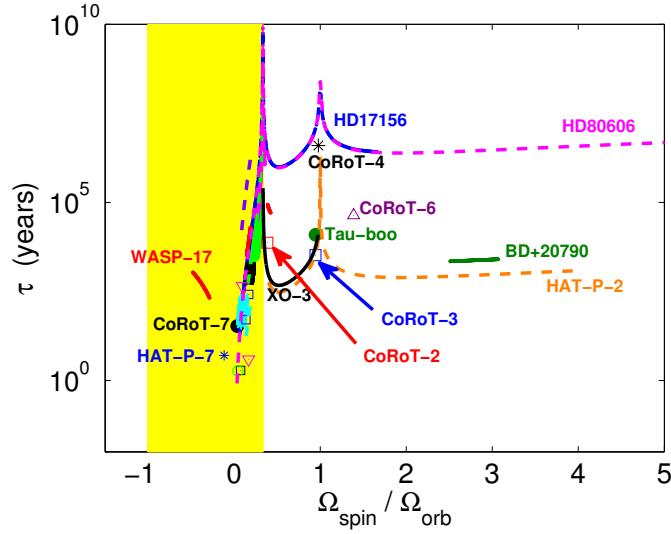


FIGURE 4.19 – Typical timescale $\tau = \sigma^{-1}$ for the inviscid growth of the tidal instability in stars, calculated over a whole orbit. Consequently, when the orbital eccentricity of the Hot-Jupiter is 0, the (host) star is represented by a point (e.g. CoRoT-3 or Tau-Boo), whereas an elliptic orbit leads to lines (e.g. HAT-P-2 or HD80606).

limit between molecular dissipation and turbulent dissipation. This shows in particular that the different scales are well separated in the flow, allowing the elliptic, large scale instability to grow. Assuming $k \sim O(1)$, the calculated dissipative term is so small that it can be neglected. We thus can consider that this free slip boundaries case leads to a growth rate of the same order of the inviscid growth rate σ . The associated typical timescales $\tau = 1/\bar{\sigma}$ is thus chosen to represent the strength of the instability (fig. 4.19). This model is correct provided that $\tau \gg \Omega_{orb}^{-1}$, which allows to consider a quasi-static situation, and $\tau \ll \tau_2$ where τ_2 is the typical time of stellar evolution. For instance, considering the synchronization time τ_2 , it follows that the presence of the tidal instability is expected in the range $10 \text{ } y \ll \tau \ll 10^6 \text{ } y$. This gives 8 unstable stars.

4.3.3.4 Stability in presence of an Ekman layer

Considering that the viscous damping term in the growth rate expression scales as $E^{1/2}$, the situation is similar to the situation met in experiments or in telluric planets (section 4.2), i.e. with no-slip boundaries. In this case, we have $K = \alpha (1 + \eta^4)/(1 - \eta^5)\alpha f_{(\eta)}$, with $\alpha = O(1)$ a constant, equal to $\alpha = 2.62$ for the spinover mode of the tidal instability. This allows to define a threshold and then to plot the stability diagram shown in figure 4.20 which summarizes the results. Equation (4.54) allows to write the stability condition $\sigma \geq 0$ equation under the form :

$$Y = \beta \left(\alpha f(\eta) \sqrt{E} \right)^{-1} \geq \frac{16 |1 + \Omega^G|^3}{(3 + 2\Omega^G)^2} \quad (4.56)$$

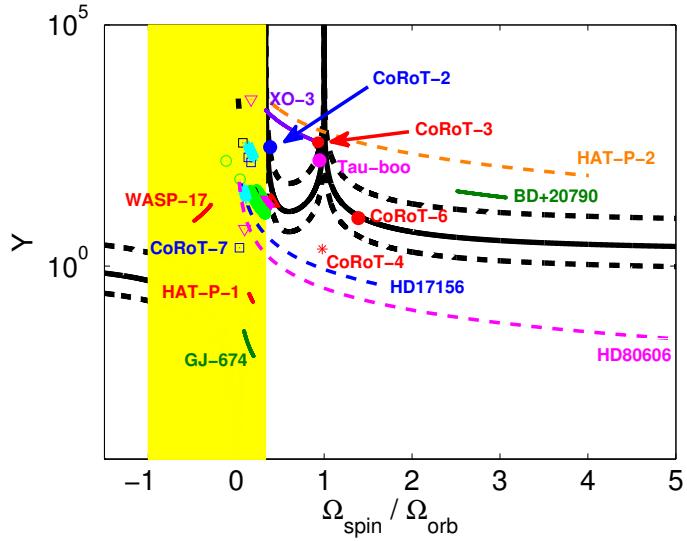


FIGURE 4.20 – *Stability diagram using a dominant surfacic dissipation as in Tassoul’s model. Considering the equation (4.56), the zone below the black line, defined with $\alpha = 2.62$, is the stable zone, whereas the black dashed lines represent $\alpha = 1$ and $\alpha = 10$. The yellow zone is the so-called ‘forbidden zone’, given by $\Omega_{\text{spin}} / \Omega_{\text{orb}} \in [-1; 1/3]$. Among the 29 stars considered, 17 are in the forbidden zone and 8 are unstable.*

which defines the vertical axis Y used in figure 4.19 (see also section 4.2.4.1). As can be seen on fig. 4.20, among the 12 stars outside the forbidden zone, 8 stars are found to be unstable ($\bar{\sigma} > 0$), which are the same as in the previous model except that HD179949 is replaced by CoRoT-4.

4.3.4 Results and discussions

Due to a selection bias (hot Jupiters have orbital periods less than 5-10 days and exoplanets are mainly found around low rotator stars with rotational periods more than 20 days, hence $\Omega / \Omega_{\text{orb}} \leq 1/3$), 17 stars lie in the forbidden zone : WASP-17, WASP-10, WASP-19, WASP-18, Kepler-5, TrES-3, HD41004B, CoRoT-7, GJ-674, HD189733, HAT-P-1, HD149026, TrES-2, TrES-1, CoRoT-1, HAT-P-7, WASP-14. Outside the forbidden zone, the stars found to be unstable with both dissipation models are CoRoT-6, τ Boo, CoRoT-2, CoRoT-3, XO-3, HAT-P-2. Apart these ones, HD179949, HD80606, CoRoT-4 could also be unstable (with a lower level of confidence) whereas HD17156 is probably stable. Tidal instability could be invoked to explain the misaligned spin-orbit axes of XO-3b, CoRoT-3b and HD 80606b. The spin-orbit misalignement of WASP-17b, CoRoT-1b, HAT-P-7b a,d WASP-14b (all included in our sample but in the forbidden zone) could be explained by an evolution of the system involving tidal instability occurring before the stellar spin-down. Finally, the short-cycled star τ Boo has been demonstrated to be among the most unstable stars of our sample : not only tides from the planet have an

impact on the system's evolution, but now we can also describe explicitly this process with a physical mechanism, the elliptical instability.

The consequences of tidal instability in hot-jupiter systems have to be deeper investigated : internal structure of stars and planets, misalignment or evolution of the stellar (and planetary) rotation axis, effects on the dynamo. The calculations have to be applied to a larger sample of systems, where the stellar rotation period would be measured with accuracy. This work is underway, showing that a large number of stars could be unstable. A complementary aspect of this work is to study the presence of an elliptical instability inside the hot-jupiter. An observational proxy of this presence could be the radius anomaly (see Leconte *et al.*, 2010*a,b*, for details) observed for certain hot-jupiters (first results on this point in the appendix H). Finally, the presence of these elliptic instabilities should force the orbital parameters of the binary system to evolve, which could put constraints on the observation of the elliptic instability. Finally, we can wonder about the momentum conservation on this kind of binary system if an elliptic instability is excited : How is the surface of the star modified by the elliptic instability (the only one work considering this point is Ou *et al.*, 2007) ? What about the mechanical coupling by the tidal bulges between the star and the planet ? As shown in the appendix H, the study of these issues is in progress, both with theory and numerical simulations, in collaboration with J. Leconte from the CRAL (Lyon).

4.4 Synthèse du chapitre 4 et publications

En section 4.1, un scénario alternatif est proposé pour expliquer la dynamo lunaire primitive : des impacts météoritiques successifs à l'époque du grand bombardement tardif (LHB), pourraient avoir temporairement désynchronisé la Lune, donnant naissance à un écoulement complètement turbulent excité par instabilité elliptique. Les impacts les plus violents ont pu générer un champ magnétique en surface de l'amplitude des signaux mesurés. Ce type de dynamo inertielle, proposé ici pour la Lune primitive, devrait être systématiquement considéré comme une alternative viable au modèle convectif, valide pour la Terre. Ce travail, mené en collaboration avec M. A. Wieczorek, Ö. Karatekin et M. Laneuville, a fait l'objet d'une soumission dans *Nature*.

En section 4.2, les résultats théoriques des études précédentes sur l'instabilité elliptique ont été réévalués et étendus afin d'évaluer sa pertinence dans un contexte astrophysique. La stabilité des corps telluriques du système solaire et de trois Super-Terres (55 CnC e, CoRoT-7b et GJ 1214b) a ainsi pu être quantifiée. La Terre primitive semble être la seule planète tellurique du système solaire instable pour la TDEI (i.e. l'instabilité elliptique avec une rotation différentielle constante entre le fluide et la déformation elliptique). Concernant la LDEI (i.e. l'instabilité elliptique avec une rotation différentielle oscillante en temps entre le fluide et la déformation elliptique), le noyau liquide de Io est *a priori* stable, contrairement à ce qui avait été proposé dans la littérature, mais Europe et les trois Super-Terres sont clairement instables. L'océan de subsurface d'Europe et le noyau de Titan sont instables, mais restent dans la gamme d'incertitude sur le seuil. Naturellement, cela n'exclut pas des situations plus instables dans le passé. Ce travail, mené en collaboration avec C. Moutou, a fait l'objet d'une soumission à *Astronomy & Astrophysics*.

Enfin, des premiers résultats sur les systèmes à Jupiters chauds sont présentés en section 4.3. Cette étude a été initialement motivée par l'étoile τ -boo, dont les renversements rapides du champ magnétique ont été attribués à des effets de marées. Les résultats montrent qu'une instabilité elliptique au sein de τ -boo peut en effet être présente, ce qui est encourageant. L'étape suivante, menée en collaboration avec J. Leconte, sera d'étudier la stabilité d'une planète de type Jupiter chaud, et les échanges de moment cinétique entre l'étoile et la planète.