

# Mécanique des Structures par Eléments Finis

## Volume 2 - Plaques



Olivier PANTALE

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes

- 2005/2006 -



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>I Éléments finis de plaques</b>	<b>5</b>
<b>1 Élément fini <math>C^0</math> de plaque</b>	<b>7</b>
1.1 Présentation générale . . . . .	7
1.2 Tenseur des déformations . . . . .	8
1.3 Contraintes généralisées : . . . . .	9
1.4 Loi de comportement en variables généralisées . . . . .	10
1.4.1 Forme générale de la matrice $\mathbf{C}$ . . . . .	10
1.4.2 Ecriture en variables généralisées . . . . .	11
1.4.3 Cas particuliers de comportement . . . . .	11
1.4.4 Coefficient de cisaillement . . . . .	12
1.5 Equations d'équilibre d'une plaque . . . . .	13
1.6 Elements finis de plaque . . . . .	17
1.6.1 Elements de type Kirchoff . . . . .	17
1.6.2 Eléments de volume dégénérés . . . . .	17
1.6.3 Eléments $C^0$ avec cisaillement transverse . . . . .	18
<b>II Exercices et travaux dirigés</b>	<b>21</b>
<b>1 Exercices d'application</b>	<b>23</b>
1.1 Elaboration mécanique d'un problème de plaque . . . . .	23
1.2 Plaques minces axisymétriques . . . . .	23
1.3 Différences finies . . . . .	23
1.4 Flambement d'une plaque en flexion cylindrique . . . . .	23
1.5 Flambement d'une plaque rectangulaire . . . . .	24

---

<b>2 Problèmes de plaques</b>	<b>25</b>
2.1 Plaque en traction . . . . .	25
2.1.1 Théorie . . . . .	25
2.1.2 Modèle continu . . . . .	26
2.1.3 Méthode des éléments finis . . . . .	26
2.2 Plaque en flexion . . . . .	27
2.2.1 Etude d'une paroi d'échangeur : . . . . .	28
2.2.2 Modélisation numérique d'une plaque : . . . . .	28

# Table des figures

I.1.1	Description géométrique de la plaque . . . . .	7
I.1.2	descriptif des efforts et moments . . . . .	15
II.2.1	Description du chargement de la plaque. . . . .	26
II.2.2	représentation de la paroi de l'échangeur . . . . .	28
II.2.3	répartition de la température : $T_m = \frac{T_1+T_2}{2}$ . . . . .	28
II.2.4	modélisation de la plaque . . . . .	29



# Introduction

Ce polycopié sert de base pour le cours de structures. Le cours de structure fait partie intégrante de l'enseignement de semestre 7 en éléments finis, dans lequel il s'intègre comme décrivant une famille particulière d'éléments finis dédiée à la modélisation numérique des poutres. Pour cette raison, sa place se situe après le cours général d'éléments finis dont il constitue un prolongement naturel. Il est donc nécessaire de maîtriser parfaitement le cours d'éléments finis général dont les notions sont supposées connues pour le présent cours de structure (PPV, passage domaine parent-réel, fonctions d'interpolation, construction des matrices élémentaires, intégration numérique...). De même, la connaissance du cours général de mécanique des milieux continus est requise (on pourra se référer par exemple aux ouvrages de Duvaut [1] ou de Germain [2]).

Le lecteur pourra se reporter à d'autres ouvrages de la littérature afin d'approfondir ses connaissances du calcul des structures par éléments finis. Si à l'issue du cours plus général du module "Modélisation Numérique", la notion d'éléments finis ne vous inspire toujours pas, il est temps de vous plonger dans la lecture du petit livre de D. Gay [3]. Pour ce qui concerne la modélisation des structures, on citera par exemple l'ouvrage de J. C. Craveur [4] qui présente une base du calcul de structures par éléments finis ainsi que des exemples de modélisation (poutres, plaques, coques) du point de vue d'un utilisateur de code de calcul.

D'un point de vue de la formulation des éléments finis de poutres, des détails et des compléments concernant les méthodes présentées dans ce cours pourront être trouvés dans les deux premiers volumes de la série publiée par J. L. Batoz [5] [6], ou dans les livres de J. F. Imbert [7] et P. Trompette [8].

Enfin, on pourra se référer aux ouvrages de Zienkiewicz [9], Bathe [10] ou Hughes [11] qui constituent 3 ouvrages de référence en anglais.

**ATTENTION : Ce polycopié est un résumé succinct du contenu du cours de Structures.**





---

**Première partie**

**Eléments finis de plaques**

---



# 1

## Elément fini $C^0$ de plaque

---

### 1.1 Présentation générale

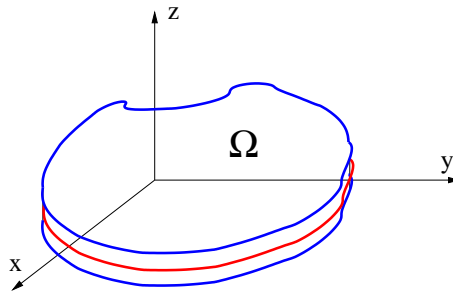


FIG. I.1.1 – Description géométrique de la plaque

Dans un système de coordonnées rectangulaires  $(x, y, z)$ , le domaine  $\Omega$  de la plaque est défini par :

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 ; z \in \left[ -\frac{h}{2}; \frac{h}{2} \right] ; (x, y) \in A \subset \mathbf{R}^2 \right\}$$

avec comme notations :

- $h$  épaisseur de la plaque
- $\Gamma_m$  surface de référence (surface moyenne)

On complète cette définition par un ensemble d'hypothèses :

L'épaisseur  $h$  de la plaque est beaucoup plus petite que la plus petite des dimensions latérales dans le plan  $xOy$ .

$$\text{Max} \|z\| \ll \text{Min}(\text{Max} \|x\| ; \text{Max} \|y\|) ; (x, y, z) \in \Omega$$

On effectue alors un DL du champ de déplacements  $\mathbf{U}$  dans la plaque en puissances de  $z$  autour du point à  $z = 0$ . On écrit alors classiquement :

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{U}_0(x, y, t) + z\Omega_1(x, y, t) + z^2\Omega_2(x, y, t) + \dots + z^p\Omega_p(x, y, t) \quad (1.1)$$

avec  $p \in \mathbf{N}^+$  et :

$$\mathbf{U}_0^T = \{u(x, y, t), v(x, y, t), w(x, y, t)\}$$

$$\Omega_p^T = \{\omega_{x_p}(x, y, t), \omega_{y_p}(x, y, t), \omega_{z_p}(x, y, t)\}$$

On peut donc construire diverses théories plus ou moins raffinées. Dans le cas de la théorie naturelle, on prend alors :

$$p = 1 \text{ et } \varepsilon_{zz} = 0$$

Une section droite avant déformation à la ligne moyenne demeure donc droite après déformation. Le champ de déplacements est alors donné ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_x = u(x, y, t) + z\omega_x \\ \mathbf{U}_y = v(x, y, t) + z\omega_y \\ \mathbf{U}_z = w(x, y, t) \end{cases} \quad (1.2)$$

Dans le cas de l'hypothèse HPP, on considèrera que l'interaction des phénomènes de membrane et de flexion est négligée.

Si on considère que la section droite au plan moyen reste perpendiculaire à ce plan au cours de la déformation, on obtient la théorie des plaques minces de Love-Kirchoff qui néglige le cisaillement transverse dans la plaque.

L'hypothèse suivante est alors introduite dans le modèle :

On considère que la contrainte normale transverse est nulle dans la plaque (c'est à dire que  $\sigma_{zz} = 0$ ). On est donc dans un cas de contraintes planes.

Cette hypothèse est en contradiction avec l'hypothèse précédente ( $\varepsilon_{zz} = 0$ ). Sa justification est purement "pratique". Cette particularité devra être supportée par la loi de comportement de la plaque.

Les déplacements généralisés  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\omega_x$  et  $\omega_y$  sont :

- $u$  et  $v$  : fonctions de  $x$  et  $y$ , caractérisent la traction dans le plan de la plaque suivant les directions  $x$  et  $y$  respectivement.
- $w$  : est colinéaire à  $z$  (vecteur perpendiculaire au plan moyen). C'est le déplacement normal, c'est à dire la déflection de  $\Omega$ .
- $\omega_x$  et  $\omega_y$  : rotations d'un segment droit prélevé sur l'épaisseur de  $\Omega$  initialement perpendiculaire au plan moyen de la plaque.

Un développement à un ordre  $> 1$  conduit à des théories plus raffinées (Reddy) permettant de mieux modéliser le cisaillement transverse et de prendre en compte  $\varepsilon_{zz} \neq 0$  et  $\sigma_{zz} \neq 0$ .

## 1.2 Tenseur des déformations

Dans le cadre de la théorie naturelle, on pose alors :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

d'où l'écriture des déformations est donnée ci-dessous :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{,x} + z\omega_{x,x} = \varepsilon_{xx}^0 + zK_{xx} \\ \varepsilon_{yy} = v_{,y} + z\omega_{y,y} = \varepsilon_{yy}^0 + zK_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^0 + zK_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz}^0 \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz}^0 \end{cases} \quad (1.3)$$

avec les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{xx} = \omega_{x,x} \\ K_{yy} = \omega_{y,y} \\ K_{xy} = \omega_{x,y} + \omega_{y,x} \end{array} \right. \quad \text{courbures} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}^0 = u_{,x} \\ \varepsilon_{yy}^0 = v_{,y} \\ \varepsilon_{xy}^0 = u_{,y} + v_{,x} \end{array} \right. \quad \text{dilatations} \quad (1.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}^0 = \omega_y + w_{,y} \\ \gamma_{xz}^0 = \omega_x + w_{,x} \end{array} \right. \quad \text{distorsions}$$

La théorie de Love-Kirchoff implique alors que :

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_x = -w_{,x} \\ \omega_y = -w_{,y} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Les déformations ne dépendent plus alors que du déplacement  $w$  de flexion.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon_{xx})_F = -zw_{,xx} \\ (\varepsilon_{yy})_F = -zw_{,yy} \\ (\varepsilon_{xy})_F = -zw_{,xy} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{xx} = -w_{,xx} \\ K_{yy} = -w_{,yy} \\ K_{xy} = -2w_{,xy} \end{array} \right. \quad (1.6)$$

### 1.3 Contraintes généralisées :

On introduit maintenant les contraintes généralisées suivantes :

efforts normaux par unité de longueur :

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (1.7)$$

moments fléchissants et moment de distorsion par unité de longueur

$$(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (1.8)$$

efforts tranchants par unité de longueur

$$(Q_{yz}, Q_{zx}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{yz}, \sigma_{zx}) dz \quad (1.9)$$

On définit de la même manière les résultantes des efforts appliqués sur la structure par les relations suivantes :

$$(\bar{n}_{xx}, \bar{n}_{yy}, \bar{n}_{zz}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (f_x, f_y, f_z) dz \quad (1.10)$$

$$(\bar{m}_{xx}, \bar{m}_{yy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z (f_x, f_y) dz \quad (1.11)$$

$$(\bar{N}_{xx}, \bar{N}_{yy}, \bar{N}_{zz}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\hat{F}_x, \hat{F}_y, \hat{F}_z) dz \quad (1.12)$$

$$(\overline{M}_{xx}, \overline{M}_{yy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z (\widehat{F}_x, \widehat{F}_y) dz \quad (1.13)$$

Le vecteur contrainte à ainsi la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ \hline M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ \hline Q_{yz} \\ Q_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{N}\} \\ \{\mathbf{M}\} \\ \{\mathbf{Q}\} \end{Bmatrix} \quad (1.14)$$

## 1.4 Loi de comportement en variables généralisées

En adoptant une loi de comportement thermo-visco-élastique linéaire et anisotrope, permettant l'analyse des structures composites, la loi de comportement générale est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} + \widetilde{\mathbf{C}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} + \widetilde{\mathbf{C}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\sigma}^\theta + \boldsymbol{\sigma}^\sigma \quad (1.15)$$

avec les définitions suivantes de  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx}\}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\theta = -\mathbf{C}\{\alpha\}(T - T_0)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^T = \{\alpha_x, \alpha_y, 2\alpha_{xy}, 0, 0\}$$

### 1.4.1 Forme générale de la matrice $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}'_p & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_t \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C}'_p$  est obtenue à partir des termes de la matrice tri-dimensionnelle générale en prenant en compte le fait que  $\sigma_{zz} = 0$ . On obtient donc les écritures suivantes pour  $\mathbf{C}'_p$  et  $\mathbf{C}_t$  :

$$\mathbf{C}'_p = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{26} \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{66} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Remarque : Dans le cas où le matériau est isotrope, on a :

$$\mathbf{C}'_p = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{C}_t = \frac{5}{6} \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Le coefficient  $\frac{5}{6}$  est un coefficient correcteur de cisaillement destiné à compenser la mauvaise distribution du cisaillement transverse (distribution constante en  $z$ ).

### 1.4.2 Ecriture en variables généralisées

L'écriture de la loi de comportement en variables généralisées conduit à l'expression suivante après intégration sur  $z$  de la loi constitutive :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\text{élastique}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \mathbf{K} \\ \boldsymbol{\gamma}^0 \end{Bmatrix}}_{\text{thermique}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{N}^\theta \\ \mathbf{M}^\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{precontrainte}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{N}^\sigma \\ \mathbf{M}^\sigma \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{precontrainte}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} & 0 \\ \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{D}} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{E}} \end{bmatrix}}_{\text{visco-élastique}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{,t}^0 \\ \mathbf{K}_{,t} \\ \boldsymbol{\gamma}_{,t}^0 \end{Bmatrix}}_{\text{visco-élastique}} \quad (1.18)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^T &= \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}\} & \mathbf{M}^T &= \{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\} \\ \mathbf{Q}^T &= \{Q_{yz}, Q_{zx}\} & \boldsymbol{\varepsilon}^{0T} &= \{\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0\} \\ \mathbf{K}^T &= \{K_{xx}, K_{yy}, K_{xy}\} & \boldsymbol{\gamma}^{0T} &= \{\gamma_{yz}^0, \gamma_{zx}^0\} \end{aligned}$$

Et les définitions ci dessous :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{C}'_p dz & \mathbf{B} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \mathbf{C}'_p dz & \mathbf{D} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \mathbf{C}'_p dz \\ \mathbf{E} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{C}_t dz & \mathbf{N}^{(\theta, \sigma)} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \sigma_{xx}^{(\theta, \sigma)}, \sigma_{yy}^{(\theta, \sigma)}, \sigma_{xy}^{(\theta, \sigma)} \right\}^T dz \end{aligned} \quad (1.19)$$

- $\mathbf{A}$  : comportement global de membrane
- $\mathbf{D}$  : comportement global de flexion
- $\mathbf{E}$  : comportement global de cisaillement
- $\mathbf{B}$  : couplage membrane-flexion ( $\mathbf{B} = 0$  si la plaque est construite symétriquement par rapport à  $Oxy$ )

### 1.4.3 Cas particuliers de comportement

#### 1.4.3.1 Théorie des plaques minces en flexion pure

On a dans ce cas là :  $\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{B} = 0$  et  $\mathbf{M} = \mathbf{D}\mathbf{K}$ .

Dans le cas où de plus la plaque est isotrope :

$$\mathbf{C}'_p = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

et on a :

$$\mathbf{D} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \mathbf{C}'_p dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Pour une plaque mince, dans le cas de l'hypothèse de Love-Kirchoff, on a alors en posant pour simplifier l'écriture que :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

soit :

$$\mathbf{D} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

et par suite :

$$\begin{aligned} M_{xx} &= D(K_{xx} + \nu K_{yy}) \\ M_{yy} &= D(K_{yy} + \nu K_{xx}) \\ M_{xy} &= 2D\frac{1-\nu}{2}K_{xy} \end{aligned} \quad (1.23)$$

### 1.4.3.2 Plaques composites stratifiées :

Chaque couche de la plaque est composée d'un matériau caractérisé par une matrice de comportement  $\mathbf{C}^*$  exprimée dans les axes d'orthotropie, déduite de l'écriture de la matrice de comportement  $\mathbf{C}$  précédemment établie. Dans le repère de la structure, cette matrice de comportement devient d'après les relations de changement de base des tenseurs de rang 2 applicables à  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\mathbf{C}_p^{(k)} = \mathbf{T}^{-1(k)} \mathbf{C}_p^{*(k)} \mathbf{T}^{(k)} \quad (1.24)$$

où  $k$  est le numéro de la couche, et  $\mathbf{T}$  est défini par :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -2\cos\theta\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

avec  $\theta$  défini par l'angle de rotation autour de l'axe  $\vec{z}$ .

Si on admet que dans chaque couche, les déformations généralisées sont les mêmes (approche grossière), en réalisant une homogénéisation sur l'épaisseur de la structure, on obtient alors :

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mathbf{C}_p^{(k)} dz = \sum_{k=1}^N (z_{k+1} - z_k) \mathbf{C}_p^{(k)} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} z \mathbf{C}_p^{(k)} dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (z_{k+1}^2 - z_k^2) \mathbf{C}_p^{(k)} \quad (1.27)$$

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} z^2 \mathbf{C}_p^{(k)} dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (z_{k+1}^3 - z_k^3) \mathbf{C}_p^{(k)} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mathbf{C}_t^{(k)} dz = \sum_{k=1}^N (z_{k+1} - z_k) \mathbf{C}_t^{(k)} \quad (1.29)$$

### 1.4.4 Coefficient de cisaillement

Les composantes de cisaillement  $\sigma_{yz}$  et  $\sigma_{zx}$  sont supposées uniformes dans la section (car calculées à partir des rotations). En fait cette répartition n'est pas correcte puisque par exemple  $\sigma_{yz}(z = \pm \frac{h}{2}) = 0$ .

Pour en tenir compte, on affecte la matrice de comportement  $\mathbf{C}_t$  de coefficients à partir de considérations d'énergie équivalente. Par exemple, pour un matériau isotrope :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{zx}^0 \end{Bmatrix} \quad (1.30)$$



$$\{\boldsymbol{\sigma}_c\} = [\mathbf{C}^*] \{\boldsymbol{\gamma}^0\} \quad (1.31)$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\boldsymbol{\sigma}_c\}^T \{\boldsymbol{\gamma}^0\} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\boldsymbol{\gamma}^0\}^T [\mathbf{C}^*]^T \{\boldsymbol{\gamma}^0\} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\boldsymbol{\sigma}_c\}^T [\mathbf{C}^*]^{-1} \{\boldsymbol{\sigma}_c\} d\Omega \quad (1.32)$$

Ecrivons alors  $U_c$  sous la forme suivante, en utilisant la relation entre les efforts tranchants et les déformations de cisaillement :

$$\{\boldsymbol{\mathfrak{G}}\} = [\mathbf{C}_t] \{\boldsymbol{\gamma}^0\} \quad (1.33)$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \{\boldsymbol{\mathfrak{G}}\}^T \{\boldsymbol{\gamma}^0\} d\Gamma = \frac{1}{2} \int_A \{\boldsymbol{\gamma}^0\}^T [\mathbf{C}_t]^T \{\boldsymbol{\gamma}^0\} dA = \frac{1}{2} \int_A \{\boldsymbol{\mathfrak{G}}\}^T [\mathbf{C}_t]^{-1} \{\boldsymbol{\mathfrak{G}}\} dA \quad (1.34)$$

La relation entre  $\{\boldsymbol{\sigma}_c\}$  et  $\{\boldsymbol{\mathfrak{G}}\}$  :  $\{\boldsymbol{\sigma}_c\} = f(z) \{\boldsymbol{\mathfrak{G}}\}$

Exemple :

$\{\boldsymbol{\sigma}_c\} = f(z) \{\boldsymbol{\mathfrak{G}}\}$  avec répartition parabolique :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z) dz = 1 \quad \text{et} \quad f(\pm \frac{h}{2}) = 0 \Rightarrow f(z) = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \quad (1.35)$$

On écrit alors :

$$U_c = \frac{1}{2} \int_A \{\boldsymbol{\mathfrak{G}}\}^T \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z) [\mathbf{C}^*]^{-1} f(z) dz \right) \{\boldsymbol{\mathfrak{G}}\} dA \quad (1.36)$$

et aussi :

$$U_c = \frac{1}{2} \int_A \{\boldsymbol{\mathfrak{G}}\}^T [\mathbf{C}_t]^{-1} \{\boldsymbol{\mathfrak{G}}\} dA \quad (1.37)$$

Par identification, il vient alors :

$$[\mathbf{C}_t]^{-1} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f^2(z) [\mathbf{C}^*]^{-1} dz \quad (1.38)$$

dans le cas particulier précédent :  $[\mathbf{C}_t] = \frac{5h}{6} [\mathbf{C}^*]$

Soit finalement l'écriture suivante :

$$[\mathbf{C}_t] = \frac{5h}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

## 1.5 Equations d'équilibre d'une plaque

En partant de l'écriture du PPV et en adoptant un champ de vitesses virtuelles de la forme  $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}_0^* + z\boldsymbol{\Omega}_1^*$ , soit :

$$\begin{cases} U_x^* = u^*(x, y) + z\omega_x^* \\ U_y^* = v^*(x, y) + z\omega_y^* \\ U_z^* = w^*(x, y) \end{cases} \quad (1.40)$$

Le PPV s'écrit alors :

Etant données  $\mathbf{f} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$   
 $\widehat{\mathbf{F}} : \Gamma_F \longrightarrow \mathbf{R}$

trouver  $\mathbf{U} \in U$  tel que  $\forall \mathbf{U}^* \in U^*$  :

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{U}^{*T} \mathbf{U}_{,tt} d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{D}^{*T}(\mathbf{U}^*) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}) d\Omega \\ + \int_{\Omega} \mathbf{U}^{*T} \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_F} \mathbf{U}^{*T} \widehat{\mathbf{F}} d\Gamma_F$$

avec :

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 ; z \in \left[ -\frac{h}{2}; \frac{h}{2} \right] ; (x, y) \in A \subset \mathbf{R}^2 \right\}$$

et  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U})$  est caractérisée par la loi de comportement de  $\Omega$ .

Le calcul explicite de la fonctionnelle précédente s'effectue aisément à l'aide des remarques ci-dessous :

- $\int_{\Omega} (...) d\Omega = \int_0^L \int_A (...) dA dz$
- $\mathbf{D}^{*T}(\mathbf{U}^*)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}) = \sigma_{xx}D_{xx}^* + \sigma_{yy}D_{yy}^* + 2\sigma_{xy}D_{xy}^* + 2\sigma_{yz}D_{yz}^* + 2\sigma_{zx}D_{zx}^*$
- $\mathbf{D}^*(\mathbf{U}^*)$  se calcule en fonction de  $\mathbf{U}^*$  comme  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U})$ .

Compte tenu de l'expression de  $\mathbf{U}^*$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \rho ((u_{,tt} + z\omega_{x,tt})(u^* + z\omega_x^*) + (v_{,tt} + z\omega_{y,tt})(v^* + z\omega_y^*) + w_{,tt}w^*) dAdz \\ = & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A [\sigma_{xx}(u_{,x}^* + z\omega_{x,x}^*) + \sigma_{yy}(v_{,y}^* + z\omega_{y,y}^*) + \sigma_{xy}(u_{,y}^* + v_{,x}^*) \\ & + z\sigma_{xy}(\omega_{x,y}^* + \omega_{y,x}^*) + \sigma_{yz}(\omega_y^* + w_{,y}^*) + \sigma_{zx}(\omega_x^* + w_{,x}^*)] dAdz \\ & + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \mathbf{U}^{*T} \mathbf{f} dAdz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \mathbf{U}^{*T} \widehat{\mathbf{F}} dAdz \end{aligned}$$

En posant alors :  $R_k = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)z^k dz$  avec  $k = 0, 1, 2$

et en intégrant par parties comme par exemple pour le terme :

$$- \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \sigma_{xx}u_{,x}^* dAdz = - \int_A N_{xx}u_{,x}^* dA = \int_A N_{xx,x}u^* dA - \int_C N_{xx}u^* n_x dS$$

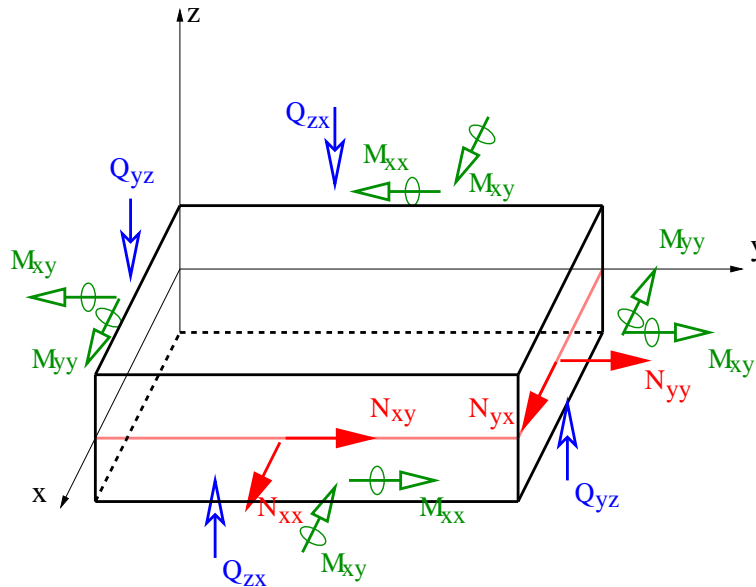


FIG. I.1.2 – descriptif des efforts et moments

On est donc maintenant en mesure de regrouper les termes facteurs des quantités  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$ ,  $\omega_x^*$  et  $\omega_y^*$  et le PPV peut alors être explicité comme suit :

$$\begin{aligned}
& \int_A [R_0 (u_{,tt} u^* + v_{,tt} v^* + w_{,tt} w^*) + R_1 (\omega_{x,tt} u^* + u_{,tt} \omega_x^* + \omega_{y,tt} v^* + v_{,tt} \omega_y^*) \\
& + R_2 (\omega_{x,tt}^* \omega_x^* + \omega_{y,tt}^* \omega_y^*)] dA \\
= & \int_A \underbrace{((N_{xx,x} + N_{xy,y}) u^* + (N_{yy,y} + N_{yx,x}) v^*)}_{\text{membrane}} dA \\
& + \int_A \underbrace{((M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_{zx}) \omega_x^* + (M_{yy,y} + M_{yx,x} - Q_{zy}) \omega_y^*)}_{\text{équilibre des moments}} dA \\
& + \int_A \underbrace{((Q_{yz,y} + Q_{zx,x}) w^*)}_{\text{équilibre effort tranchants}} dA \\
& + \int_A \underbrace{(\bar{n}_{xx} u^* + \bar{n}_{yy} v^* + \bar{n}_{zz} w^* + \bar{m}_{xx} \omega_x^* + \bar{m}_{yy} \omega_y^*)}_{\text{efforts volumiques et charges transversales}} dA \\
& - \int_C [(N_{xx} n_x + N_{xy} n_y) u^* + (N_{yy} n_y + N_{yx} n_x) v^* + (Q_{yz} n_y + Q_{zx} n_x) w^* \\
& + (M_{xx} n_x + M_{xy} n_y) \omega_x^* + (M_{yy} n_y + M_{yx} n_x) \omega_y^*] dS \\
& - \int_C \underbrace{(\bar{N}_{xx} u^* + \bar{N}_{yy} v^* + \bar{N}_{zz} w^* + \bar{M}_{xx} \omega_x^* + \bar{M}_{yy} \omega_y^*)}_{\text{efforts extérieurs sur } \Gamma_F} dS
\end{aligned}$$

Les équations d'équilibre s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{cases}
N_{xx,x} + N_{xy,y} + \bar{n}_{xx} = R_0 \cdot u_{,tt} + R_1 \cdot \omega_{x,tt} \\
N_{yy,y} + N_{yx,x} + \bar{n}_{yy} = R_0 \cdot v_{,tt} + R_1 \cdot \omega_{y,tt} \\
Q_{yz,y} + Q_{zx,x} + \bar{n}_{zz} = R_0 \cdot w_{,tt} \\
M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_{zx} + \bar{m}_{xx} = R_2 \cdot \omega_{x,tt} + R_1 \cdot u_{,tt} \\
M_{yy,y} + M_{yx,x} - Q_{zy} + \bar{m}_{yy} = R_2 \cdot \omega_{y,tt} + R_1 \cdot v_{,tt}
\end{cases}$$

et les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{cases}
\bar{N}_{xx} = N_{xx} n_x + N_{xy} n_y \\
\bar{N}_{yy} = N_{yy} n_y + N_{yx} n_x \\
\bar{N}_{zz} = Q_{yz} n_y + Q_{zx} n_x \\
\bar{M}_{xx} = M_{xx} n_x + M_{xy} n_y \\
\bar{M}_{yy} = M_{yx} n_x + M_{yy} n_y
\end{cases}$$

Remarque : Si  $\Omega$  est homogène,  $R_0 = \rho h$ ,  $R_1 = 0$ ,  $R_2 = \rho \frac{h^3}{12}$ .

Cas particuliers : Plaques minces homogènes en flexion pure soumises à une pression transversale  $P(x,y)$  en statique :

$$\begin{cases}
M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_{zx} = 0 \\
M_{yy,y} + M_{yx,x} - Q_{zy} = 0 \\
Q_{yz,y} + Q_{zx,x} + P = 0
\end{cases}$$

En combinant les 3 équations par élimination des efforts tranchants, on obtient alors l'écriture suivante :

$$M_{,xx,x} + M_{,yy,y} + 2M_{,xy,xy} + P = 0$$

En adjoignant l'expression des courbures :

$$\begin{cases} K_{xx} = \omega_{,x,x} = -w_{,xx} \\ K_{yy} = \omega_{,y,y} = -w_{,yy} \\ K_{xy} = \omega_{,x,y} + \omega_{,y,x} = -2w_{,xy} \end{cases}$$

On obtient alors les expressions suivantes :

$$\begin{cases} M_{xx} = D(K_{xx} + \nu K_{yy}) = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\ M_{yy} = -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \\ M_{xy} = -D(1 - \nu)w_{,xy} \end{cases}$$

Soit finalement :

$$w_{,xxxx} + w_{,yyyy} + 2w_{,xxyy} = \frac{P(x,y)}{D}$$

Soit donc une équation différentielle en  $w$  à résoudre sur le domaine  $A$  avec les conditions aux limites du problème.

$$\Delta\Delta w = \frac{P}{D}$$

## 1.6 Elements finis de plaque

Il existe globalement 3 catégories d'éléments finis de plaque :

- Les éléments de plaque mince basés sur la théorie de Kirchoff.
- Les éléments obtenus à partir d'éléments de volume.
- Les éléments avec prise en compte du cisaillement transverse.

### 1.6.1 Elements de type Kirchoff

Il n'est nécessaire de faire qu'une approximation de  $w$  seulement, par polynômes complets du 2<sup>ème</sup> degré au moins (courbure constante); respect de continuité  $C^1$  en adoptant  $w$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_y$  avec  $\theta_x = w_{,y}$  et  $\theta_y = -w_{,x}$ .

Formulation délicate :

- conserver une formulation simple en sacrifiant la conformité de l'élément (problème de convergence).

polynôme complet non conforme (Tocher, Zienkiewicz)

éléments rectangulaires

triangles et quadrilatères conformes (mais quelquefois moins précis ou trop rigides !)

- corriger par formulation en sous domaines
- approximation d'ordre élevé (coûteux)

### 1.6.2 Eléments de volume dégénérés

On transforme l'élément de volume original en imposant certaines modifications tirées de la théorie des plaques : suppression dans l'expression de l'énergie des termes relatifs à  $\sigma_{zz}$ , hypothèse sur la variation du déplacement selon l'épaisseur (élimination de d.d.l), intégration explicite sur l'épaisseur et numérique dans le plan moyen...

### 1.6.3 Éléments $C^0$ avec cisaillement transverse

#### 1.6.3.1 Champ de déplacements

5 champs de déplacement indépendants :  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\omega_x$  et  $\omega_y$ .

Interpolation classique de continuité  $C^0$  seulement :

$$\begin{cases} u \simeq u^h = \sum \varphi_j^u u(g_j) \\ v \simeq v^h = \sum \varphi_j^v v(g_j) \\ w \simeq w^h = \sum \varphi_j^w w(g_j) \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_x \simeq \omega_x^h = \sum \varphi_j^{\omega_x} \omega_x(g_j) \\ \omega_y \simeq \omega_y^h = \sum \varphi_j^{\omega_y} \omega_y(g_j) \end{cases}$$

En général, on adopte  $\varphi_j^u = \varphi_j^v = \varphi_j^w = \varphi_j^{\omega_x} = \varphi_j^{\omega_y} = \varphi_j$ .

#### 1.6.3.2 Relation déformation-déplacements nodaux

On peut poser comme écriture :

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\varepsilon}^0\} &= [\mathbf{B}_m^e] \{\mathbf{q}_m^e\} \text{ avec } \{\mathbf{q}_m^e\}^T = \{u_{g_1}^e, v_{g_1}^e, \dots, u_{g_{ng}}^e, v_{g_{ng}}^e\} \\ \{\mathbf{K}\} &= [\mathbf{B}_f^e] \{\mathbf{q}_p^e\} \text{ avec } \{\mathbf{q}_p^e\}^T = \{w_{g_1}^e, \omega_{x_{g_1}}^e, \omega_{y_{g_1}}^e, \dots, w_{g_{ng}}^e, \omega_{x_{g_{ng}}}^e, \omega_{y_{g_{ng}}}^e\} \\ \{\boldsymbol{\gamma}^0\} &= [\mathbf{B}_c^e] \{\mathbf{q}_p^e\} \end{aligned}$$

Comme on sait que :

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\varepsilon}^0\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,x} + u_{,y} \end{Bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{B}_{m_j}^e] = \begin{bmatrix} \varphi_{j,x}^e & 0 \\ 0 & \varphi_{j,y}^e \\ \varphi_{j,y}^e & \varphi_{j,x}^e \end{bmatrix} \\ \{\mathbf{K}\} &= \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{x,x} \\ \omega_{y,y} \\ \omega_{x,y} + \omega_{y,x} \end{Bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{B}_{f_j}^e] = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_{j,x}^e & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{j,y}^e \\ 0 & \varphi_{j,y}^e & \varphi_{j,x}^e \end{bmatrix} \\ \{\boldsymbol{\gamma}^0\} &= \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{zx}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_y + w_{,y} \\ \omega_x + w_{,x} \end{Bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{B}_{c_j}^e] = \begin{bmatrix} \varphi_{j,y}^e & 0 & \varphi_j^e \\ \varphi_{j,x}^e & \varphi_j^e & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### 1.6.3.3 Matrice élémentaire de rigidité

En identifiant  $P_i^* = - \int_{\Omega} \mathbf{D}^{*T}(\mathbf{U}^*) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}) d\Omega$  avec la forme :

$$P_i^* = - \{\mathbf{q}^{e*}\}^T [\mathbf{K}^e] \{\mathbf{q}^e\} + \{\mathbf{q}^{e*}\}^T [\overline{\boldsymbol{\sigma}}]^\sigma - \{\mathbf{q}^{e*}\}^T [\tilde{\mathbf{C}}^e] \{\dot{\mathbf{q}}^e\}$$

On obtient :

$$[\mathbf{K}^e] = \left[ \begin{array}{ccc} \underbrace{\int_{A_e^h} [\mathbf{B}_m^e]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{B}_m^e] dA}_{\text{membrane}} & & \int_{A_e^h} [\mathbf{B}_m^e]^T [\mathbf{B}] [\mathbf{B}_f^e] dA \\ \underbrace{\int_{A_e^h} [\mathbf{B}_f^e]^T [\mathbf{B}] [\mathbf{B}_m^e] dA}_{\text{couplage membrane flexion}} & \underbrace{\int_{A_e^h} [\mathbf{B}_f^e]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_f^e] dA}_{\text{flexion}} & \underbrace{\int_{A_e^h} [\mathbf{B}_c^e]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}_c^e] dA}_{\text{cisaillement}} \end{array} \right]$$

et :

$$[\overline{\boldsymbol{\sigma}}]^\sigma = \int_{A_e^h} \begin{Bmatrix} [\mathbf{B}_m^e]^T [\mathbf{N}]^\sigma \\ - - - \\ [\mathbf{B}_f^e]^T [\mathbf{M}]^\sigma \end{Bmatrix} dA$$

### 1.6.3.4 Techniques d'intégration réduite

Cet élément serait limité aux plaques semi-épaisses ( $\frac{L}{e} < \lambda_{critique}$ ) si on ne limitait sa rigidité excessive en cisaillement ; c'est le problème du verouillage rencontré en poutres, plaques et coques minces avec les éléments de continuité  $C^0$  prenant en compte le cisaillement transverse. Quand l'épaisseur  $h$  de la structure tend vers zéro, il apparaît une anomalie dans la matrice de rigidité : certains termes de la part relative au cisaillement de la matrice de rigidité deviennent très grands lorsque l'épaisseur de la structure devient très petite (la flexion n'est pas concernée) ; il y a alors surestimation de la rigidité au cisaillement (phénomène souvent appelé verouillage). Pour pallier cet inconvénient, on procède par intégration réduite (éventuellement sélective). Ceci entraîne des singularités nouvelles dans la matrice qui ne correspondent pas forcément à des modes rigides. On écrit alors la matrice de rigidité obtenue précédemment sous la forme suivante :

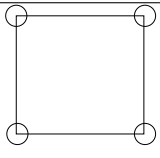
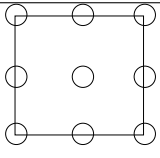
$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_m^e + \mathbf{K}_f^e + \mathbf{K}_c^e$$

avec :

- $\mathbf{K}_m^e$  : part liée aux effets de membrane.
- $\mathbf{K}_f^e$  : part liée aux effets de courbure (flexion).
- $\mathbf{K}_c^e$  : part liée aux effets de cisaillement.

L'intégration réduite sera appliquée aux termes de  $\mathbf{K}_c^e$ , les deux autres matrices étant intégrées au mieux numériquement. Une intégration sélective consiste à choisir un ordre d'intégration plus bas pour seulement certains termes de la matrice élémentaire considérée.

On montre numériquement que l'intégration réduite a un effet bénéfique sur le comportement des éléments dont la tendance est à une surestimation de la rigidité. malheureusement cette technique est d'un emploi délicat car elle peut occasionner, en réduisant la rigidité, la perte de certains modes de déformation. Il faut donc appliquer l'intégration réduite avec parcimonie et vérifier soigneusement la réponse du modèle lorsque  $h \rightarrow 0$ , en contrôlant notamment les modes de corps rigide qui doivent être au nombre de deux en membrane et de trois en flexion. Une intégration réduite mal contrôlée peut conduire à des modes à énergie de déformation nulle supplémentaires qui ne doivent pas exister.

Intégrations		
	Bilinéaire	Biquadratique
Intégration réduite uniforme	1x1	2x2
Intégration réduite sélective	1x1 pour $\mathbf{K}_c^e$ 2x2 pour $\mathbf{K}_f^e$	2x2 pour $\mathbf{K}_c^e$ 3x3 pour $\mathbf{K}_f^e$

Exemples : éléments bilinéaires de Hughes (LR) et quadratiques (QLR).

### 1.6.3.5 Matrice de masse

Par identification de  $P_a^* = \{\mathbf{q}^{e*}\}^T [\mathbf{M}^e] \{\ddot{\mathbf{q}}^e\}$  et de l'expression développée en introduisant les interpolations des champs de déplacement :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_0 \simeq \mathbf{U}_0^h = \sum \mathbf{N}_{0j}^e \mathbf{U}_0^e(g_j) \\ \Omega_1 \simeq \Omega_1^h = \sum \mathbf{N}_{1j}^e \Omega_1^e(g_j) \end{cases}$$

et en adoptant généralement l'écriture suivante :

$$\mathbf{N}_{0j}^e = \varphi_j \Delta \quad (3,3)$$

$$\mathbf{N}_{1j}^e = \varphi_j \Delta \quad (2,2)$$

On obtient finalement :

$$[\mathbf{M}^e] = \begin{bmatrix} \int_{A_e^h} R_0 [\mathbf{N}_0^e]^T [\mathbf{N}_0^e] dA & \int_{A_e^h} R_1 [\mathbf{N}_0^e]^T [\mathbf{N}_1^e] dA \\ \int_{A_e^h} R_1 [\mathbf{N}_1^e]^T [\mathbf{N}_0^e] dA & \int_{A_e^h} R_2 [\mathbf{N}_1^e]^T [\mathbf{N}_1^e] dA \end{bmatrix}$$

de même, on peut écrire :

$$[\bar{f}^e] = \begin{Bmatrix} \int_{A_e^h} [\mathbf{N}_0^e]^T \{\bar{n}\} dA \\ \int_{A_e^h} [\mathbf{N}_1^e]^T \{\bar{m}\} dA \end{Bmatrix}$$

$$[\bar{F}^e] = \begin{Bmatrix} \int_{C_e^h} [\mathbf{N}_0^e]^T \{\bar{N}\} dA \\ \int_{C_e^h} [\mathbf{N}_1^e]^T \{\bar{M}\} dA \end{Bmatrix}$$



---

## **Deuxième partie**

# **Exercices et travaux dirigés**

---



# 1

## Exercices d'application

---

### 1.1 Elaboration mécanique d'un problème de plaque

1) A partir de la loi de comportement local, retrouver quelques termes de la loi de comportement globale exprimée en fonctions des variables généralisées : effort normal, moment fléchissant, ..., dilatation, courbure, distorsion, ...

2) A partir du PPV et de la définition des variables généralisées, retrouver quelques équations d'équilibre et quelques conditions aux limites.

### 1.2 Plaques minces axisymétriques

Intégrer l'équation des plaques minces pour trouver déplacement, moments, courbures..., dans le cas de disques de rayon  $a$  :

- soumis à un moment fléchissant uniforme  $M_r$  sur la périphérie
- encastré à la périphérie et soumis à une force  $F$  normale à son plan en son centre
- en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$

### 1.3 Différences finies

Appliquer la méthode des différences finies pour résoudre le problème d'une plaque mince carrée, de côté  $a$ , simplement appuyée sur son contour et soumise à une densité uniforme de chargement  $p$  appliquée normalement à son plan moyen.

On adoptera une maille carrée de côté  $a/4$  et on exploitera les symétries du problème.

### 1.4 Flambement d'une plaque en flexion cylindrique

Une plaque mince, de longueur infinie, est soumise dans son plan, dans le sens de sa largeur, à un effort de compression  $N_{xx}^0$ .

1) Ecrire l'équation différentielle que doit vérifier le déplacement transversal  $w(x)$ .

2) La plaque est appuyée en  $x = 0$  et  $x = L$  ( $L$  est la largeur) ; donner l'expression du déplacement normal et des charges de flambement. Discuter la charge de flambement critique.

## 1.5 Flambement d'une plaque rectangulaire

Il s'agit de l'étude du flambement linéaire d'une plaque mince, rectangulaire (longueur  $a$  selon  $x$ , largeur  $b$  selon  $y$ ), isotrope, qui fléchit sous l'action d'une charge uniforme de compression  $N_{xx}^0$ . Les hypothèses adoptées sont en outre celles de Von Karman, et on admettra que les conditions aux limites au bord sont du type appui simple.

1) Rappeler les hypothèses de Von Karman et établir que les taux de déformation virtuels associés à la part non-linéaire sont :

$$D_{xx}^* = w_{,x}w_{,x}^*; D_{yy}^* = w_{,y}w_{,y}^*; D_{xy}^* = \frac{1}{2}(w_{,x}w_{,y}^* + w_{,y}w_{,x}^*)$$

2) Montrer que la puissance virtuelle associée aux charges de flambage est :

$$P_i^{*NL} = - \int_A N_{xx}^0 w_{,x}w_{,x}^* dA$$

3) En déduire que l'équation d'équilibre est :

$$M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xx}^0 w_{,xx} = 0$$

4) Montrer alors que l'expression de la charge de compression est :

$$N_{xx,mm}^0 = \pi^2 D \left( \frac{m}{a} + \frac{n^2 a}{mb^2} \right)^2$$

où  $D$  est la rigidité à la flexion de la plaque et  $m, n$  sont des entiers.

5) Le flambement de la plaque apparaît pour la plus faible valeur de la charge, qui intervient pour une valeur fixée de  $m$ , lorsque  $n = 10$ , ce que l'on vérifiera aisément.

Si on pose :

$$N_{xx,m1}^0 = \frac{\pi^2 D}{b^2} K_m; K_m = \left( \frac{\mu}{m} + \frac{m}{\mu} \right)^2; \mu = \frac{a}{b}$$

Le coefficient  $K_m$  est le facteur critique de flambement, lorsque son minimum est atteint. Représenter graphiquement ce facteur en fonction de l'élancement  $a/b$  et de  $m$ .

- Lorsque  $\frac{a}{b} < 2$ , pour quelle valeur de  $m$  le minimum est-il obtenu ? cas particulier de la charge critique de flambement d'une plaque carrée.
- Lorsque  $\frac{a}{b} > 2$ , vérifier que la charge critique est obtenue pour des valeurs  $m > 1$ ,  $m$  donnant également le nombre de demi-ondes associées au mode propre correspondant.

# 2

## Problèmes de plaques

---

### 2.1 Plaque en traction

**Objectif :** étude d'une plaque en traction.

La plaque est repérée dans le système cartésien  $(O, x_1, x_2, x_3)$ . Son plan moyen est supposé contenu dans le plan  $0x_1x_2$ . On fait l'Hypothèse des Petites Perturbations et on suppose que les matériaux considérés sont élastiques, linéaires et isotropes. On utilisera les notations du cours lorsqu'elles ne sont pas précisées.

Les parties 2.1.2 et 2.1.3 sont indépendantes.

#### 2.1.1 Théorie

1) On considère la cinématique suivante associée à la théorie naturelle :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) = v_1(x_1, x_2, t) + x_3 \beta_1(x_1, x_2, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) = v_2(x_1, x_2, t) + x_3 \beta_2(x_1, x_2, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) = w(x_1, x_2, t) \end{cases}$$

Pour le cas d'une plaque en membrane, préciser les termes à négliger, et donner :

- les déformations HPP,
- la relation contraintes-déformations
- la loi de comportement.

2) On rappelle le Principe des Puissances Virtuelles sur le domaine plaque, noté  $V$  ( $V = \Omega \times ]-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}[$ , où  $e$  est l'épaisseur de la plaque) :

Etant données  $\mathbf{f} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$   
 $\widehat{\mathbf{F}} : \Gamma_F \longrightarrow \mathbf{R}$

trouver  $\mathbf{U} \in U$  tel que  $\forall \mathbf{U}^* \in U^*$  :

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{U}^{*T} \mathbf{U}_{,tt} d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{D}^{*T}(\mathbf{U}^*) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{U}^{*T} \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_F} \mathbf{U}^{*T} \widehat{\mathbf{F}} d\Gamma_F$$

On simplifiera l'expression ci-dessus pour le cas d'une plaque sollicitée en membrane en utilisant 1). On ramènera alors le problème tridimensionnel initial en un problème formulé sur le plan moyen en introduisant les grandeurs suivantes :

$R_0, N_{\alpha\beta}, p_\alpha, P_\alpha$  que l'on aura pris soin de définir.

### 2.1.2 Modèle continu

1) A partir des développements du 2.1.1, on explicitera les équations d'équilibre de la plaque :

1. à l'intérieur  $\Omega$ ,
2. sur le bord  $\Gamma_F$ .

2) Introduire le comportement dans les équations d'équilibre.

3) En déduire les équations d'équilibre en terme de déplacement.

4) Pour l'exemple de la figure II.2.1 (plaque de longueur  $L$  et de largeur  $a$ , d'épaisseur  $e$ , encastée sur le bord  $x_1 = 0$ . Elle est soumise à une force de traction  $F_1$  sur le bord  $x_1 = L$ ), on explicitera les conditions aux limites de type cinématique à vérifier.

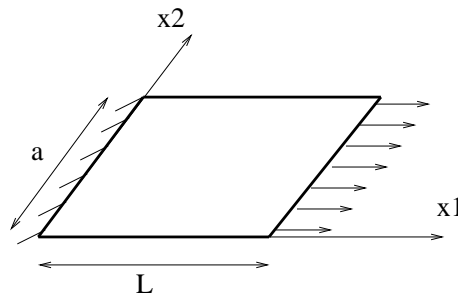


FIG. II.2.1 – Description du chargement de la plaque.

### 2.1.3 Méthode des éléments finis

**Objectif** : construire l'élément fini quadrilatère isoparamétrique à quatre noeuds et deux degrés de liberté (ddl) par noeud ( $v_1, v_2$ ).

On sera amené à résoudre le système algébrique  $\mathbf{K}\mathbf{Q} = \mathbf{g}$ .

- $\mathbf{K}$  matrice de rigidité
- $\mathbf{Q}$  vecteur des degrés de liberté
- $\mathbf{g}$  chargement

1) On adopte les notations matricielles du cours. On discrétise la plaque en utilisant des éléments de plaque au niveau du plan moyen sous la forme  $\Omega = \cup \Omega^e, e = 1, n_{elem}$ . Expliciter le Principe des Puissances Virtuelles sur le domaine discrétisé, en statique et en négligeant les forces de volume  $f_i$ .

2) Rappeler les fonctions d'interpolation  $\mathbf{N}_i^b(\xi, \eta)$  pour  $i = 1, 4$  de l'élément quadrilatère isoparamétrique à quatre noeuds. On en déduira l'interpolation de la géométrie et des grandeurs cinématiques. On précisera l'expression du vecteur des degrés de liberté  $\mathbf{Q}^e$ .

3) Rappeler l'expression de la matrice jacobienne  $J^e$ .

**Notations** : pour alléger l'ensemble des écritures, on notera par la suite :

- $j_{\alpha\beta}$  les composantes de  $J^e$
- $ij_{\alpha\beta}$  les composantes de  $J^{e^{-1}} = IJ^e$ .

4) Construire la matrice de rigidité  $\mathbf{K}^e$  de cet élément fini sur le domaine générique  $\Omega^e$

**Notations** :

- on conviendra de ne pas effectuer les produits matriciels.
- il est conseillé de définir une matrice de transformation géométrique, notée **TM**
- et une matrice contenant les dérivées partielles (par rapport aux coordonnées réduites) des fonctions d'interpolation, notée **BM**.

5) **Application** : on s'intéresse à l'exemple de la figure II.2.1. La plaque est discrétisée avec un seul élément quadrilatère à quatre noeuds.

5-a) Définir alors (à l'aide d'une figure simple) la transformation géométrique entre l'élément de référence et l'élément réel et donner les expressions des matrices suivantes en fonction de  $a$  et de  $L$  :

$\mathbf{J}^e$  et  $\mathbf{J}^{e^{-1}}$ , le déterminant de la matrice jacobienne  $|\mathbf{J}^e|$  et **TM**.

5-b) On convient, afin de simplifier les calculs, d'encasturer le bord  $x_2 = 0$ . Expliciter la restriction de la matrice **BM** et du vecteur **g** au problème considéré.

5-c) On remplace la force de traction sur le bord  $x_1 = L$  par une force appliquée directement au point de coordonnées  $(L, a)$ . Expliciter le second membre **g** du système algébrique.

5-d) Calculer la matrice de rigidité **K** en prenant en compte les simplifications introduites en 5-a -b -c). On utilisera le schéma d'intégration numérique réduite à 1x1 point de Gauss. Les valeurs sont données dans le tableau ci dessous :

schéma d'intégration	coordonnées		poids	
	$\xi_i$	$\eta_i$	$w_{\xi_i}$	$w_{\eta_i}$
1x1	0	0	2	2

6) Résoudre le système algébrique obtenu par la méthode des éléments finis pour les données suivantes :

- dimensions :  $a = 5\text{cm}$
- propriétés du matériau :  $E = 10^6\text{N/cm}^2$  ;  $L = 10\text{cm}$  ;  $\nu = 0,3$  ;  $e = 1\text{cm}$ .
- chargement : force au point de coordonnées  $(L, a)$  orientée suivant l'axe  $x_1$  :  $F_1 = 1\text{N}$ .

## 2.2 Plaque en flexion

Dans les études proposées, le comportement du matériau isotrope est supposé élastique, linéaire, sans amortissement.

### 2.2.1 Etude d'une paroi d'échangeur :

Une plaque carrée, de côté  $2a$ , d'épaisseur  $h$ , sépare, à l'intérieur d'un échangeur de chaleur, un fluide "primaire" (température  $T_1$ ) et un fluide "secondaire" (température  $T_2$ ).

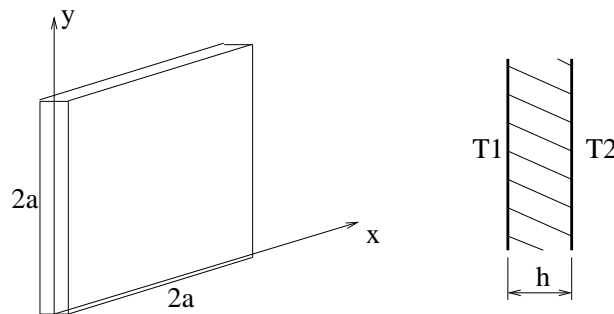


FIG. II.2.2 – représentation de la paroi de l'échangeur

1) Cette plaque est soudée sur un raidisseur périphérique massif que l'on supposera immobile. Quels sont, à votre avis, les points qui doivent être vérifiés pour garantir la tenue mécanique de cette paroi ?

2) Les deux fluides sont à la même température, supérieure à la température de mise en place de la plaque  $T_0$ . ( $T_1 = T_2 = T_m > T_0$ )

1. Exprimer la loi de comportement en termes de contraintes généralisées (efforts de membrane, moments fléchissants...). On précisera les notations utilisées et on explicitera les termes qui interviennent.
2. Quel état de contrainte et de déplacement prévoyez-vous ?

3) Même question, mais cette fois, le régime thermique établi au sein de la paroi est représenté sur la figure II.2.3 :

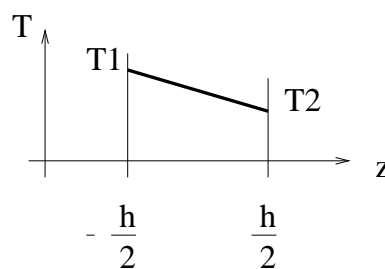


FIG. II.2.3 – répartition de la température :  $T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$

4) Expliquer succinctement quel type de problème poserait la liaison d'éléments de membrane-flexion de continuité  $C^1$  (paroi) et d'éléments de poutre (raidisseurs périphériques) ?

### 2.2.2 Modélisation numérique d'une plaque :

La plaque précédente, encastrée sur le contour, est soumise cette fois à la seule action d'une pression uniforme  $p$  ( $p_1 - p_2$ ) agissant normalement à son plan moyen (voir figure II.2.4). Les forces d'inertie éventuelles sont négligées. On souhaite modéliser cette plaque en utilisant



des quadrilatères à 4 noeuds, isoparamétriques, de continuité  $C^0$ , avec prise en compte du cisaillement transverse, et utilisant les mêmes fonctions d'interpolation pour chacun des degrés de liberté.

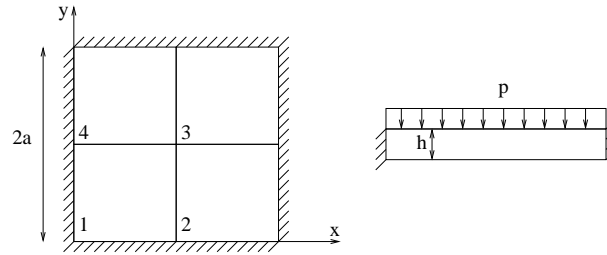


FIG. II.2.4 – modélisation de la plaque

1) Rappeler la nature des degrés de liberté et l'expression des fonctions d'interpolation en coordonnées paramétriques  $(\xi, \eta)$ . Justifier leur validité (notations du cours).

2) Donner l'expression de la matrice jacobienne de la transformation géométrique.

3) Par symétrie, on ne maille qu'un quart de la plaque avec un seul élément fini (voir figure).

a) Préciser la valeur du jacobien pour cet élément ainsi que de son déterminant.

b) Donner l'expression des matrices, relatives à un noeud  $g_j$  liant les déformations et les déplacements nodaux, en distinguant effet de membrane, de flexion et de cisaillement.

c) En considérant le cas particulier étudié, montrer que la matrice de rigidité peut être réduite à un seul terme dont l'expression est :

$$\frac{10h\mu}{3a^2} \int_{\Omega^e} \left[ (\varphi^{g_3})_{,\xi\xi}^2 + (\varphi^{g_3})_{,\eta\eta}^2 \right]$$

–  $\Omega^e$  domaine de l'élément

–  $\varphi^{g_3}$  fonction d'interpolation relative au noeud 3.

Le second membre correspondant est ici :

$$\int_{\Omega^e} \varphi^{g_3}(\xi, \eta) p d\Omega$$

(il n'est pas demandé de le démontrer)

En utilisant une intégration numérique de Gauss à un seul point, déterminer la valeur du déplacement transversal  $w$  au centre de la plaque.

Rappel :

– Point d'intégration  $\xi_1 = \eta_1 = 0$

– poids  $w_1 = 4$



## Bibliographie

- [1] G. Duvaut. *Mécanique des Milieux Continus*. Masson, 1990.
- [2] P. Germain. *Cours de mécanique des milieux continus*. Masson, 1962.
- [3] D. Gay and J. Gambelin. *Une approche simple du calcul des structures par la méthode des éléments finis*. Hermes, 1989.
- [4] J. C. Craveur. *Modélisation des Structures ; Calcul par Eléments Finis*. Masson, 1997.
- [5] J. L. Batoz. *Modélisation des structures par éléments finis - Poutre et plaques*. Hermes, 1990.
- [6] J. L. Batoz. *Modélisation des structures par éléments finis - Solides élastiques*. Hermes, 1990.
- [7] J. F. Imbert. *Analyse des structures par éléments finis*. Cepadues - Sup'Aero, 1984.
- [8] P. Trompette. *Mécanique des structures par la méthode des éléments finis*. Masson, 1992.
- [9] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method (Fourth Edition) Volume I and II*. McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1987.
- [10] K. J. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall - Inc - Englewood Cliffs - New Jersey 07632, 1982.
- [11] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method ; Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice Hall, 1987.



# Index

coefficient de cisaillement, [12](#)

efforts normaux, [9](#)

efforts tranchants, [9](#)

intégration réduite, [19](#)

Love-Kirchoff, [8](#), [9](#)

matrice de masse, [19](#)

matrice de rigidité, [18](#)

moment de distorsion, [9](#)

moments fléchissants, [9](#)

plaque, [7](#)

Reddy, [8](#)