

**Université Lille 1 — UFR de Mathématiques**  
**Licence de Mathématiques (L3, S5, année 2006–2007)**

**M305 : ANALYSE COMPLEXE**

**Responsable : Jean-François Burnol**

**Mots-clés :** Fonctions d'une variable complexe, analyse complexe, théorème des résidus.

La théorie des fonctions holomorphes a longtemps été considérée comme particulièrement adaptée à la troisième année de l'enseignement mathématique supérieur, puisque, s'appuyant essentiellement sur les outils de base de l'Analyse (limites de suites et de séries, calcul différentiel, topologie) elle permet aux étudiants de savourer les fruits de leurs efforts passés, et de prendre pied dans un domaine frôlant la magie par moment, un domaine qui a tellement fasciné des générations de mathématiciens et d'ingénieurs que pendant des décennies on y a fait référence sous l'appellation majestueuse de « La Théorie des Fonctions ». La théorie a de plus un support géométrique qui lui aussi devrait pouvoir aider à la rendre, au premier abord, moins abstraite ; en réalité on constate que ce support géométrique est la source de certaines difficultés pédagogiques.

De nos jours, il nous faut inscrire cet enseignement dans un contexte plus fragmenté, et dans un volume horaire plus restreint, et on se sent proche du point où il ne sera plus vraiment possible d'envisager quelque chose de cohérent ; en tout cas quelque chose qui dépasse la simple application de recettes de cuisine. Mais, avouons-le, le Professeur moderne est tout de même heureux d'enseigner ce cours car avec le Théorème des Résidus il tient là la source d'exercices à peu près standardisés, il a donc LA recette de cuisine qui lui permettra de composer un sujet d'examen lui laissant espérer un taux de réussite nommable.

Je regrette tout de même que le polycopié, qui rassemble trois chapitres distribués durant le semestre, trouve sa conclusion si rapidement après l'énoncé des théorèmes des résidus ! dans la pratique du cours je me suis efforcé de les énoncer aux alentours de la huitième semaine, d'en décrire une démonstration peu de temps après et d'aller un peu au-delà ensuite.

Mais que peut-on faire en douze semaines de deux heures ? le Professeur fatigué répondra : « de moins en moins année après année ». . . le lecteur surpris de la fatigue du Professeur évoquera peut-être que Weierstrass, lui, savait présenter les bases en une seule leçon de six heures ! à cela le Professeur et ses étudiants piqués au vif rétorqueront, « Il y a tout de même beaucoup de choses ici en un volume assez restreint d'environ soixante pages, et même des choses que Monsieur Weierstrass n'enseignait point ! ».

Il faudra ensuite, pour supporter la comparaison avec les étudiants de Weierstrass, aller se renseigner secrètement sur ce dont il n'est pas question ici. En premier lieu, je pense aux fonctions Gamma et Béta : là c'est simple, il y a sur mon site [jf.burnol.free.fr/ens.html](http://jf.burnol.free.fr/ens.html) un chapitre du cours 2005 qui leur est dédié. Il serait bon aussi d'en savoir plus sur les fonctions harmoniques : là aussi mon cours 2005 contient quelques renseignements. Ensuite il faudrait lire un cours sur les fonctions elliptiques ; plusieurs livres existent. Plus généralement, le grand classique de Whittaker et Watson « Modern Analysis » reste une référence essentielle en ce qui concerne les fonctions « transcendantes ».

Lille, le 19 décembre 2006,

Jean-François Burnol

## Table des matières

1	Le plan complexe	4
2	Suites et Limites ; Séries	5
3	Séries entières	5
4	Topologie ; Fonctions et limites	6
5	Différentiabilité	8
6	Dérivabilité et Équations de Cauchy-Riemann	9
7	Opérateurs $d$ et $d\bar{\phantom{z}}$	11
8	Dérivabilité des séries entières	12
9	Fonctions analytiques	14
10	Le Théorème de Cauchy-Goursat	15
11	La fonction exponentielle	18
12	Le Théorème de Liouville et une application	18
13	Racine carrée et Logarithme complexe	19
14	La méthode de Goursat	21
15	Séries de Laurent (et séries de Fourier)	22
16	Le Théorème d'analyticité et le Théorème de la fausse singularité	25
17	Classification des singularités isolées ; Pôles, Résidus	26
18	Zéros (I) : Multiplicités	27
19	Petit Précis sur la Connexité	28
20	Zéros (II) : Théorème de l'Identité Analytique	31
21	Formule de la Moyenne et Principe du Maximum	32
22	Ouverts étoilés et primitives	34
23	Triangles et Théorème de Morera	35
24	Limites uniformes de fonctions holomorphes	36
25	Intégrales le long de chemins	37

	3
<b>26 Formules intégrales de Cauchy</b>	<b>41</b>
<b>27 Le théorème de Cauchy-Goursat</b>	<b>43</b>
<b>28 Indices de lacets</b>	<b>47</b>
<b>29 Le théorème des résidus avec indices</b>	<b>49</b>
<b>30 Le théorème des résidus pour les contours de Jordan</b>	<b>50</b>
<b>31 Le principe de la variation de l'argument</b>	<b>52</b>
<b>32 Propriétés locales : préservation des angles, application ouverte</b>	<b>54</b>
<b>33 Formules de Lagrange pour l'inversion</b>	<b>55</b>
<b>34 Homographies</b>	<b>57</b>
<b>35 Annexe : Sur les cycles homologiquement triviaux</b>	<b>60</b>
<b>36 Annexe : la formule du produit infini pour <math>\sin(z)</math></b>	<b>62</b>

# 1 Le plan complexe

**1.a** En posant  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$  et  $(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$  on munit  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  d'une addition et d'une multiplication commutatives et associatives, qui étendent celles de  $\mathbf{R}$  (en identifiant  $x$  au couple  $(x, 0)$ ). En notant  $i = (0, 1)$ , et donc  $(x, y) = x + iy = x + yi$ ,<sup>1</sup> on voit que  $i^2 = -1$  et que réciproquement en imposant  $i^2 = -1$  on retombe sur les lois précédentes. On notera  $\mathbf{C}$  l'anneau commutatif ainsi défini.

**1.b** Si  $z = x + iy$  et si l'on pose  $\bar{z} = x - iy$  on calcule  $z\bar{z} = x^2 + y^2$ . Donc si  $z \neq 0$  et si  $w = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$  alors  $zw = wz = 1$ . L'anneau  $(\mathbf{C}, +, \times)$  est donc un *corps* : tout élément non nul est inversible.

**1.c** On peut considérer que le nombre complexe  $z = x + iy$  correspond au point  $P$  d'un plan cartésien, de coordonnées  $(x, y)$  dans un repère orthonormé. Alors  $z\bar{z} = x^2 + y^2$  est le carré de la distance à l'origine. On note  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$  la distance elle-même.

**1.d** L'addition correspond à la construction d'un parallélogramme, ou d'un triangle, et sur cette base, ou géométriquement, on obtient l'importante inégalité :

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

**1.e** La multiplication a elle-aussi une interprétation géométrique. Tout d'abord la multiplication par  $i$  agit selon  $(x, y) \mapsto (-y, x)$  c'est-à-dire une rotation de  $90^\circ$  autour de l'origine des coordonnées, dans le sens dit « direct », ou « trigonométrique » (qui est l'opposé du sens de rotation des aiguilles d'une montre).

Plus généralement si  $z \neq 0$  on peut écrire en coordonnées polaires  $z = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta)$ ,  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Alors, par les identités trigonométriques de base, on obtient :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Autrement dit la multiplication par  $z_1$  agit par rotation autour de l'origine par un angle  $\theta_1$  et dilatation des coordonnées d'un facteur  $r_1$ . Notons aussi l'importante égalité :

$$|zw| = |z||w|$$

**1.f** C'est cette interaction entre la condition algébrique  $i^2 = -1$  et les transformations affines du plan qui justifie que l'on parle du « plan complexe », ou « plan de Argand-Gauss » à propos du corps  $\mathbf{C}$ .<sup>2</sup> Car le fait qu'un espace vectoriel de dimension deux sur  $\mathbf{R}$  corresponde à un plan n'a rien de spécialement notable. L'algèbre (via  $i^2 = -1$ , la distributivité, la commutativité, l'associativité) correspond à la géométrie des rotations et dilatations : ça c'est notable.

**1.g** Hamilton<sup>3</sup> a montré que les rotations de l'espace avaient aussi un pendant « algébrique » : mais pour cette compréhension des rotations de l'espace de dimension trois il est nécessaire d'introduire un corps de dimension quatre : le corps des quaternions  $q = x + ia + jb + kc$ ,  $x, a, b, c \in \mathbf{R}$ ,  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ,  $ij = k$ ,  $jk = i$ ,  $ki = j$ , mais  $ij = -ji$ ,  $jk = -kj$ ,  $ki = -ik$ . Le corps de Hamilton est donc *non-commutatif*. Il existe aussi les octonions de Cayley<sup>4</sup>, une algèbre qui n'est ni commutative, ni associative, et est

1. on abrège  $z \times w$  en  $zw$ .

2. Gauss 1777–1855 ; Argand 1768–1822

3. Hamilton 1805–1865

4. Cayley 1821–1895

de dimension huit sur  $\mathbf{R}$ . Si cela vous intéresse des recherches sur la toile vous mèneront probablement rapidement à des informations sur ces sujets.

Pour  $z = x + iy$  on dit que  $x$  est la partie réelle  $\operatorname{Re}(z)$  et  $y$  la partie imaginaire  $\operatorname{Im}(z)$  (la partie imaginaire est  $y$  et non pas  $iy$  alors que l'on dit que  $z$  est imaginaire pur si il est de la forme  $iy$ ; comprenez qui pourra). On a les formules :

1.h

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

## 2 Suites et Limites ; Séries

On dit qu'une suite  $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de nombres complexes converge vers la limite  $w$  si la suite de nombres réels  $|z_n - w|$  converge vers 0 ; c'est-à-dire si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $N$  tel que  $|z_n - w| \leq \epsilon$  pour  $n \geq N$ . On écrira  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$  on plus brièvement  $\lim z_n = w$ . Ceci équivaut aux deux limites de suites réelles :  $\lim \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(w)$ ,  $\lim \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(w)$ . Lorsqu'une limite existe elle est unique. La limite d'une somme est la somme des limites, d'un produit, le produit des limites, d'un quotient, le quotient des limites si le dénominateur ne tend pas vers zéro.

2.a

Une série  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  est la même chose que la suite de ses sommes partielles  $S_0 = u_0$ ,  $S_1 = u_0 + u_1$ , ...,  $S_n = u_0 + \dots + u_n$ . On dit que la série converge si la suite  $(S_n)$  converge. Si c'est le cas et si  $S = \lim S_n$  alors on écrit  $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ , et on dit que  $S$  est la somme de la série. Une série converge si et seulement si ses parties réelles et imaginaires convergent.

2.b

Une série de terme général  $u_n$  est dite absolument convergente si la série de terme général  $|u_n|$  est convergente, ce qui équivaut à dire qu'il existe une borne supérieure finie aux sommes partielles  $\sum_{n=0}^N |u_n|$  (puisque'une suite croissante de nombres réels converge si et seulement si elle est bornée supérieurement). Toute série absolument convergente est convergente. En effet comme  $|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$  et  $|\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|$ , les parties réelles et imaginaires sont absolument convergentes, donc convergentes par un théorème connu sur les séries de nombres réels.

2.c

Le terme général  $u_n$  d'une série convergente tend automatiquement vers 0. En effet  $u_n = S_n - S_{n-1}$  et les deux suites  $(S_n)$  et  $(S_{n-1})$  ont la même limite.

2.d

## 3 Séries entières

Une série entière est une série de la forme  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ , vue comme fonction du paramètre  $z$ . Elle converge au moins pour  $z = 0$ , mais parfois seulement pour  $z = 0$  ; on dit alors que le rayon de convergence est nul. Si elle converge pour tous les  $z$  on dit que le rayon de convergence est infini.

3.a

Dans le cas général il existe  $R \in [0, +\infty]$  tel que  $|u_n| r^n$  tende vers zéro pour tout  $r < R$  et ne soit pas borné pour  $r > R$ . Ce  $R$  unique s'appelle le rayon de convergence de la série. Preuve : soit  $A$  l'ensemble des  $r$  tels que  $|u_n| r^n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ .  $A$  est non vide car il contient 0 ; soit  $R$  sa borne supérieure. Si  $r \in A$  alors tout  $r' \in [0, r]$  est aussi dans  $A$ . On en déduit que  $A = [0, R[$  ou  $A = [0, R]$ . Soit  $r$  telle que la suite  $|u_n| r^n$  soit bornée par une constante  $M < \infty$  ; alors pour tout  $r' < r$  on a  $|u_n| (r')^n \leq M (r'/r)^n \rightarrow 0$ . Donc  $r' \in A$  et par conséquent  $r' \leq R$ . Comme cela est vrai pour tout  $r' < r$  on en déduit  $r \leq R$ . Donc a contrario si  $r > R$  la suite  $(|u_n| r^n)$  n'est pas bornée. . .

3.b

...et en particulier ne tend pas vers zéro, et donc la série  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$  est divergente

3.c

pour tout  $z$  tel que  $|z| > R$ . Par contre pour tout  $z$  tel que  $|z| < R$  la série  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$  est absolument convergente. En effet prenons  $r = \frac{1}{2}(|z| + R)$  si  $R < \infty$  et  $r = |z| + 1$  si  $R = \infty$ . Alors  $|z| < r < R$ . On a  $\lim |u_n| r^n = 0$  puisque  $r < R$  donc il existe  $C$  tel que  $|u_n| r^n \leq C$  pour tout  $n$ . Alors  $\sum_{n=0}^N |u_n z^n| = \sum_{n=0}^N |u_n| |z|^n \leq \sum_{n=0}^N C (|z|/r)^n \leq \frac{C}{1 - \frac{|z|}{r}} < \infty$ . Donc la série  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$  est absolument convergente pour  $|z| < R$ .

**3.d** Pour les  $z$  avec  $|z| = R$  il n'y a pas de règle générale pour la convergence ou la divergence. Cela dépend de chaque  $z$  individuellement.

**3.e** Avec la notion de limite supérieure, on peut donner la formule suivante (dite de Hadamard<sup>5</sup>) pour le rayon de convergence :

$$\frac{1}{R} = \limsup |u_n|^{1/n}$$

Dans le cas particulier où  $\lim \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$  existe on a

$$\frac{1}{R} = \lim \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$$

**3.f** Le rayon de convergence reste inchangé par la modification d'un nombre fini quelconque des  $u_n$ , en particulier les restes  $\sum_{n \geq N} u_n z^n$  ont le même rayon de convergence.

**3.g** Soit  $P(n)$  un polynôme non identiquement nul en  $n$ . Alors les deux séries entières de coefficients respectifs  $u_n$  et  $P(n)u_n$  ont le même rayon de convergence (bon exercice).

**3.h** Sur tout disque  $\overline{D}(0, r) = \{0 \leq |z| \leq r\}$  avec  $r < R$  la convergence de la série entière est normale : il existe  $a_n$  avec  $|u_n z^n| \leq a_n$  pour tout  $n$  et tout  $z$  du disque, et  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ . En effet on prend  $\rho > r$  mais  $< R$  de sorte que  $|u_n| \rho^n \rightarrow 0$ . On pose  $C = \sup |u_n| \rho^n$  et alors on peut utiliser  $a_n = C(r/\rho)^n$ .

## 4 Topologie ; Fonctions et limites

**4.a** Un disque ouvert est un ensemble de la forme  $D(z_0, \rho) = \{z \mid |z - z_0| < \rho\}$ . Un sous-ensemble  $G \subset \mathbf{C}$  est dit « ouvert » si pour tout  $z_0 \in G$  il existe  $\rho > 0$  avec  $D(z_0, \rho) \subset G$ . Toute union d'ouverts est un ensemble ouvert.

**4.b** Un ensemble  $F$  est dit « fermé » si son complémentaire  $G = \mathbf{C} \setminus F$  est ouvert. On montre que cela équivaut à la propriété suivante : toute suite convergente  $(z_n)$  de points de  $F$  a sa limite dans  $F$ . Toute intersection de fermés est un fermé.

**4.c** Un point d'accumulation  $z_0$  d'un ensemble  $E$  est un point de  $\mathbf{C}$  ayant la propriété que tout disque ouvert  $D(z_0, \rho)$  avec  $\rho > 0$  a une intersection avec  $E$  non vide et non réduite à  $\{z_0\}$ . Un point d'accumulation peut appartenir ou ne pas appartenir à  $E$ . Il est équivalent de demander que  $z$  est la limite d'une suite dans  $E$  de points *mutuellement distincts*.

**4.d** Un ensemble  $E$  est fermé si et seulement si il contient tous ses points d'accumulation. L'adhérence  $\overline{E}$  d'un ensemble  $E$  est le plus petit fermé contenant  $E$ , ou encore l'intersection de tous les fermés contenant  $E$ . Il est l'union de  $E$  et des points d'accumulation de  $E$ .

**4.e** Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles, ou complexes, définie sur un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbf{C}$ . Soit  $z_0$  un point d'accumulation de  $E$ . On écrit  $L = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $z \neq z_0$  avec  $z \in E \cap D(z_0, \delta)$  on a  $|f(z) - L| \leq \epsilon$ . Attention,

---

5. Hadamard 1865–1963

il faudrait écrire  $L = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z)$  au cas où  $f$  est la restriction à  $E$  d'une fonction sur un ensemble plus grand. Si  $z_0 \in E$  est un point d'accumulation on dit que  $f$  est continue au point  $z_0$  si  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existe et coïncide avec  $f(z_0)$ . Si  $z_0 \in E$  n'est pas un point d'accumulation (point isolé) on convient que toute fonction est continue en  $z_0$ .

Une fonction  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  définie sur un sous-ensemble de  $\mathbf{C}$  et à valeurs dans  $\mathbf{R}$  est dite **continue sur  $E$**  si la propriété suivante est vérifiée : pour toute suite  $(z_n)$  dans  $E$  avec une limite  $w$  dans  $E$  on a  $f(w) = \lim f(z_n)$ . Une fonction  $f$  est continue si et seulement si  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  le sont. Une fonction  $f$  est continue sur  $E$  si et seulement si elle est continue en chaque point de  $E$  (en tant que fonction sur  $E$ ) au sens de l'alinéa précédent. 4.f

Une définition équivalente de la continuité de  $f$  sur  $E$  est : 4.g

$$\forall z_0 \in E \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in E \quad 0 \leq |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| \leq \epsilon$$

Lorsque  $E = G$  est un ouvert la continuité de  $f : G \rightarrow \mathbf{C}$  équivaut au fait que l'image réciproque de tout disque ouvert par  $f$  est un ensemble ouvert. Cette propriété s'étend au cas général à condition d'utiliser la notion de topologie induite sur  $E$ , c'est-à-dire de définir les ouverts  $A$  de  $E$  comme étant les intersections de  $E$  avec les ouverts de  $\mathbf{C}$  (ces ouverts de  $E$  n'ont pas de raison d'être ouverts dans  $\mathbf{C}$ ). 4.h

Soit  $f_n : E \rightarrow \mathbf{C}$  des fonctions sur un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbf{C}$ . On dit que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $E$  vers la fonction  $f$  et on note  $f_n \Rightarrow_E f$  si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $N$  tel que pour tout  $z \in E$  et pour tout  $n \geq N$  on a  $|f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon$ . 4.i

**Théorème :** si  $f_n \Rightarrow_E f$  et si les  $f_n$  sont continues sur  $E$  alors  $f$  est continue sur  $E$ . 4.j  
 Preuve : soit  $z_0 \in E$  et soit  $\epsilon > 0$ . Soit  $N$  tel que  $\forall z \in E \quad |f_N(z) - f(z)| \leq \epsilon$ . Soit  $\delta > 0$  tel que  $z \in E \cap D(z_0, \delta) \implies |f_N(z) - f_N(z_0)| \leq \epsilon$ . Alors pour ces mêmes  $z$  on a

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| \leq 3\epsilon$$

d'où la continuité de  $f$ , comme fonction sur  $E$ , au point  $z_0$ .

On peut aussi former des séries  $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$  de fonctions sur un ensemble  $E$ . Si la série converge normalement, elle converge uniformément. Donc  $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$  est une fonction continue sur  $E$  si chaque fonction  $g_n$  est continue sur  $E$  et si la série converge normalement. 4.k

Ce qui précède s'applique aux séries entières. Les monômes  $u_n z^n$  sont des fonctions continues sur  $\mathbf{C}$ . Donc la somme  $S(z)$  d'une série est une fonction continue sur tout disque fermé  $\overline{D}(0, \rho)$  avec  $\rho < R$ , puisqu'il y a convergence normale sur tout tel disque. On en déduit que  $S(z)$  est une fonction continue de  $z$  sur le disque ouvert  $D(0, R)$  puisque qu'elle est continue en tout point  $z_0$  de ce disque ouvert. 4.l

Les sommes  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$  de séries entières ont des propriétés bien plus fortes que la seule continuité : c'est justement ce que nous étudierons dans ce cours. 4.m

Parmi les notions de topologie essentielles pour ce cours et non encore citées ici, je mentionnerai la *compacité* et la *connexité*. Lorsque j'aurai besoin de savoir ce qu'est un compact, je supposerai que vous aurez acquis cela dans votre formation par ailleurs. Pour la connexité (principalement pour les ouverts) je donnerai les explications nécessaires le temps venu. 4.n

Posons  $f(x + iy) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0) = 0$ . Pour chaque  $x$ , la fonction  $y \mapsto f(x + iy)$  est une fonction continue de  $y$  sur  $\mathbf{R}$  (clair pour  $x \neq 0$ , et pour  $x = 0$  on a identiquement  $f(iy) = 0$  pour tout  $y$ ). De même pour chaque  $y$  la fonction  $x \mapsto f(x + iy)$  4.o

est une fonction continue de  $x$  sur  $\mathbf{R}$ . Par contre la fonction  $z \mapsto f(z)$  n'est pas continue au point  $z_0 = 0$ , puisque  $f(\frac{1}{n} + i\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$  pour tout  $n \geq 1$  tandis que  $f(0) = 0 \neq \frac{1}{2}$ . Il y a donc une différence entre la continuité comme fonction du couple  $(x, y)$  et la notion plus faible de continuité séparée en chacune des variables  $x$  et  $y$ .

## 5 Différentiabilité

- 5.a** Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  et  $t_0 \in I$ . On dit que  $f$  est dérivable au point  $t_0$  si la limite  $L = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$  existe. Cela équivaut à pouvoir écrire pour  $h \neq 0$  :

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + Lh + h\epsilon(h)$$

avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ . Pour une raison qui apparaîtra plus tard on note que l'on peut définir implicitement une variante de  $\epsilon$  via :

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + Lh + |h|\epsilon(h)$$

ce qui donne une condition  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$  équivalente à la précédente. Si un tel  $L$  existe il est unique et on le note  $L = f'(t_0)$ . La notation différentielle de Leibnitz est très utile  $L = \frac{df}{dt}(t_0)$ . Lorsque  $f'$  existe non seulement au point  $t_0$  mais pour tout  $t$  d'un intervalle  $J$  ouvert contenant  $t_0$ , alors on peut se poser la question de l'existence de la dérivée seconde  $f''(t_0)$ , aussi notée  $\frac{d^2f}{dt^2}(t_0)$ . La formule de Taylor-Young<sup>6</sup> nous dit

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + f'(t_0)h + \frac{f''(t_0)}{2}h^2 + h^2\epsilon(h) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$$

lorsque  $f''(t_0)$  existe.

- 5.b** Soit  $G$  un ouvert de  $\mathbf{C}$  et soit  $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ . On dira que la fonction  $f : G \rightarrow \mathbf{C}$  est *différentiable* au point  $z_0$  si il existe  $A$  et  $B$  tels que la fonction  $\epsilon(h + ik)$  définie implicitement pour tout couple réel  $(h, k) \neq (0, 0)$  avec  $z_0 + h + ik \in G$  par la formule :

$$f(z_0 + h + ik) = f(z_0) + Ah + Bk + |h + ik|\epsilon(h + ik)$$

vérifie  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \epsilon(h + ik) = 0$ . En se restreignant à  $k = 0$  on constate qu'une condition nécessaire est l'existence de la dérivée de  $f(x + iy_0)$  comme fonction de  $x$  au point  $x = x_0$ , et que  $A$  est cette dérivée. Lorsque que l'on manipule des dérivées par rapport à une variable les autres étant fixées on adopte la notation  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + iy_0)$ , ou, plus précisément  $\frac{\partial f(x+iy)}{\partial x} \Big|_{y=y_0}(x_0 + iy_0)$ . En se restreignant à  $h = 0$  on constate pareillement la nécessité de l'existence de  $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + iy_0)$ .

- 5.c** Une fonction différentiable au point  $z_0$  de l'ouvert  $G$  est automatiquement continue au point  $z_0$  (exercice).

- 5.d** La fonction considérée précédemment  $f(x + iy) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  pour  $x + iy \neq 0$  et  $f(0) = 0$  admet les deux dérivées partielles  $A = \frac{\partial f(x+iy)}{\partial x} \Big|_{y=0}(0) = 0$  et  $B = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$ , puisque identiquement  $f(x) = 0$  et identiquement  $f(iy) = 0$ . Cependant elle n'est pas différentiable au point 0 puisqu'elle n'est même pas continue en ce point.

- 5.e** **Théorème** : soit  $f$  une fonction sur un ouvert  $G$  de  $\mathbf{C}$  telle que les deux fonctions

6. Taylor 1685–1731 ; Young 1863–1942

dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existent en tout point de  $G$  et soient des fonctions continues sur  $G$ . Alors  $f$  est différentiable en tout point de  $G$ .

Ce théorème est établi dans le Cours de Calcul Différentiel. On en trouvera une preuve dans le Chapitre 1 du Cours d'Analyse Complexe, année 2005–2006.

Lorsqu'une fonction  $f$  vérifie les conditions du théorème de l'alinéa précédent on dit que  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $G$ . Une fonction continue est dite de classe  $C^0$ . Une fonction est dite de classe  $C^2$  si elle est de classe  $C^1$  et si  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont de classe  $C^1$ . Une fonction est dite de classe  $C^3$  si elle est de classe  $C^1$  et si  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont de classe  $C^2$ , etc. .... et on dit qu'elle est de classe  $C^\infty$  si elle est de classe  $C^n$  pour tous les  $n \in \mathbf{N}$ .

**Théorème :** soit  $f$  de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $G$ . Alors les deux dérivées partielles secondes mixtes coïncident identiquement :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Ce théorème est établi dans le Cours de Calcul Différentiel. On en trouvera une preuve dans le Chapitre 2 du Cours d'Analyse Complexe, année 2005–2006. On en déduit que lorsque  $f$  est de classe  $C^n$  toutes les dérivées partielles où l'on dérive  $a$  fois par rapport à  $x$  et  $b$  fois par rapport à  $y$  avec  $a + b = m \leq n$  ne dépendent que de  $a$  et de  $b$  et pas du choix de  $x$  ou de  $y$  à chaque dérivation. Notation :  $\frac{\partial^{a+b} f}{\partial x^a \partial y^b}$  ou  $\frac{\partial^{a+b}}{\partial x^a \partial y^b} f$  ou encore  $\partial_x^a \partial_y^b (f)$ .

**Théorème :** soit  $f$  de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $G$  et soit  $z_0 \in G$ . On a alors la formule de Taylor-Young à deux variables :

$$f(z_0 + h + ik) = f(z_0) + Ah + Bk + \alpha h^2 + \beta hk + \gamma k^2 + (h^2 + k^2)\epsilon(h + ik) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \epsilon(h + ik) = 0$$

et  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ ,  $B = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ ,  $\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0)$ ,  $\beta = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_0)$  et  $\gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_0)$ . Plus généralement si  $f$  est de classe  $C^n$  alors on a la formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  :

$$f(z_0 + h + ik) = \sum_{m=0}^n \sum_{\substack{0 \leq a, b \\ a+b=m}} \frac{1}{a!} \frac{1}{b!} \frac{\partial^m f}{\partial x^a \partial y^b}(z_0) h^a k^b + |h + ik|^n \epsilon(h + ik) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \epsilon(h + ik) = 0$$

Ce Théorème est démontré dans le Cours de Calcul Différentiel.

## 6 Dérivabilité et Équations de Cauchy-Riemann

Soit  $f$  une fonction (à valeurs complexes) définie sur un ouvert  $G$  de  $\mathbf{C}$ . On dit que  $f$  est dérivable au sens complexe au point  $z_0$  de  $G$  si  $L = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  existe. Ceci équivaut à dire que l'on peut écrire :

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + Lw + |w|\epsilon(w) \quad \lim_{w \rightarrow 0} \epsilon(w) = 0$$

On utilise alors la notation  $f'(z_0)$  pour  $L$ .

En comparant avec la section précédente on voit en écrivant  $w = h + ik$  que cela est équivalent à la condition de la différentiabilité de  $f$  au point  $z_0$  et à la condition supplémentaire  $B = iA$ , avec  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ ,  $B = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ . La condition  $B = iA$  ou encore :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

s'appelle Condition de Cauchy-Riemann<sup>7</sup>. Une méthode mnémotechnique pour s'en rappeler est de se dire «  $iy$  est comme  $x$  dans  $z = x + iy$  ». On a les formules  $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ .

**6.c** On dit qu'une fonction est *holomorphe* sur  $G$  si elle est dérivable au sens complexe en tout point de  $G$ . Une condition nécessaire et suffisante pour l'holomorphie de  $f$  sur  $G$  est donc que  $f$  est différentiable et vérifie la condition de Cauchy-Riemann en tout point de  $G$ . L'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

s'appelle Équation de Cauchy-Riemann. En écrivant  $f = u + iv$  avec  $u = \operatorname{Re}(f)$  et  $v = \operatorname{Im}(f)$  on obtient Cauchy-Riemann sous la forme de deux équations réelles reliant de manière croisée les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

On notera que l'on utilise préférentiellement les notations  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  plutôt que  $u(x + iy)$  et  $v(x + iy)$  pour bien signifier que  $u$  et  $v$  sont vues comme des fonctions (réelles) de *deux* variables réelles.

**6.d** La fonction  $f(z) = z$  est un cas particulier de fonction holomorphe sur  $\mathbf{C}$ . On a  $f'(z) = 1$ . Plus généralement  $f(z) = z^n$  est holomorphe avec  $f'(z) = nz^{n-1}$ . Cela peut se démontrer par récurrence en utilisant la règle de Leibnitz :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

valable pour deux fonctions holomorphes et démontrée comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle.

**6.e** Avec  $f(z) = z$ , on a  $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = y$ . Cela permet de se rappeler que la première équation de Cauchy-Riemann est nécessairement  $\frac{\partial u}{\partial x} = +\frac{\partial v}{\partial y}$ . On sait alors qu'il y a un signe  $-$  dans la seconde.

**6.f** Supposons que  $f$  holomorphe soit de classe  $C^2$  (on verra que cela est en fait automatique). Alors  $u = \operatorname{Re}(f)$  et  $v = \operatorname{Im}(f)$  sont aussi de classe  $C^2$  et en utilisant les équations de Cauchy-Riemann et la commutativité des dérivées partielles on obtient que chacune vérifie l'Équation de Laplace<sup>8</sup> :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

**6.g** Nous allons développer la théorie pour les fonctions holomorphes de classe  $C^1$  c'est-à-dire les fonctions dérivables au sens complexe pour lesquelles on suppose **de plus** que  $f'(z)$  est une fonction continue de  $z$ . Nous prouverons le résultat surprenant que toute fonction holomorphe  $C^1$  **est automatiquement de classe  $C^n$  pour tout  $n$** . À ce propos il est aussi vrai que toute fonction holomorphe **est automatiquement de classe  $C^1$** . Nous verrons cela plus tard.

**6.h** Par définition on dit que  $f$  est holomorphe au point  $z_0$  si elle est définie et dérivable au

7. Cauchy 1789–1857 ; Riemann 1826–1866

8. Laplace 1749–1827

sens complexe non seulement au point  $z_0$  mais en tout point d'un disque ouvert contenant  $z_0$ . Une fonction  $f$  est dite holomorphe sur un ensemble  $E$  si elle est définie sur un ouvert  $G$  contenant  $E$  et dérivable au sens complexe en tout point de  $G$ .

Soit  $f$  holomorphe de classe  $C^n$ . Dans le calcul de  $\frac{\partial^{a+b}f}{\partial x^a \partial y^b}$ , on peut remplacer la première dérivée par rapport à  $y$  par  $i \frac{\partial f}{\partial x}$ . Puis en utilisant la commutativité des dérivées partielles mixtes on permute le  $\frac{\partial}{\partial x}$  avec tous les  $\frac{\partial}{\partial y}$  restant. On recommence l'opération jusqu'à éliminer toutes les dérivées partielles par rapport à  $y$ . On obtient donc :

6.i

$$\frac{\partial^{a+b}f}{\partial y^b \partial x^a} = \frac{\partial^{a+b}f}{\partial x^a \partial y^b} = i^b \frac{\partial^{a+b}f}{\partial x^{a+b}}$$

En posant  $b = 1$  dans l'équation précédente et en l'écrivant sous la forme  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^a f}{\partial x^a} \right) = i \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^a f}{\partial x^a} \right)$  on constate pour chaque  $a < n$  que la fonction de classe  $C^1$   $\frac{\partial^a f}{\partial x^a}$  vérifie l'Équation de Cauchy-Riemann. Elle est donc elle-aussi holomorphe. Ainsi si  $f$  est holomorphe et  $C^2$  alors elle est deux fois dérivable au sens complexe ; si  $f$  est holomorphe et  $C^3$  elle est trois fois dérivable au sens complexe, etc. . .

6.j

La formule de Taylor-Young pour une fonction holomorphe de classe  $C^n$  prend alors la forme suivante :

6.k

$$\begin{aligned} f(z_0 + h + ik) &= \sum_{m=0}^n \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(z_0) \sum_{\substack{0 \leq a, b \\ a+b=m}} \frac{1}{a!} \frac{1}{b!} h^a (ik)^b + |h + ik|^n \epsilon(h + ik) \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(z_0) (h + ik)^m + |h + ik|^n \epsilon(h + ik) \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$f(z_0 + w) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} f^{(m)}(z_0) w^m + |w|^n \epsilon(w) \quad \lim_{w \rightarrow 0} \epsilon(w) = 0$$

Autrement dit on retrouve la forme habituelle de la formule de Taylor-Young à **une seule** variable réelle. Cela justifie l'appellation classique de « Théorie des Fonctions d'une Variable Complexe » pour désigner la théorie des fonctions holomorphes, que l'on appelle aujourd'hui Analyse Complexe. Il ne faut pas oublier cependant que l'analogie formelle masque la profonde rigidité qu'imposent les équations de Cauchy-Riemann et qui s'illustrera à de nombreuses reprises dans la théorie que nous développerons (par exemple dans le théorème d'unicité, ou d'identité analytique, aussi appelé principe du prolongement analytique que nous verrons plus tard).

## 7 Opérateurs d et dbarre

Revenons à la formule

7.a

$$f(z_0 + h + ik) = f(z_0) + Ah + Bk + |h + ik| \epsilon(h + ik)$$

lorsque  $f$  est différentiable au point  $z_0$ . Avec  $w = h + ik$  on a  $h = \frac{1}{2}(w + \bar{w})$  et  $k = \frac{1}{2i}(w - \bar{w}) = \frac{i}{2}(-w + \bar{w})$ . Alors

$$Ah + Bk = \frac{A - iB}{2}w + \frac{A + iB}{2}\bar{w}$$

Cela motive la définition des opérateurs différentiels

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

car on peut alors écrire :

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + (\partial f)(z_0)w + (\bar{\partial} f)(z_0)\bar{w} + |w|\epsilon(w) \quad \lim_{w \rightarrow 0} \epsilon(w) = 0$$

L'opérateur différentiel  $\partial$ , de degré un, vérifie la formule de Leibnitz, et  $\partial z = 1$ ,  $\partial \bar{z} = 0$ , donc généralement  $\partial(z^k \bar{z}^l) = kz^{k-1} \bar{z}^l$ . Par contre on a  $\bar{\partial}(z^k \bar{z}^l) = lz^k \bar{z}^{l-1}$ . On peut prouver que la formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  pour une fonction de classe  $C^n$  se réécrit de la manière suivante :

$$f(z_0 + w) = \sum_{m=0}^n \sum_{\substack{0 \leq k, l \\ k+l=m}} \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} (\partial^k \bar{\partial}^l f)(z_0) w^k \bar{w}^l + |w|^n \epsilon(w) \quad \lim_{w \rightarrow 0} \epsilon(w) = 0$$

**7.b** L'équation de Cauchy-Riemann prend une forme particulièrement compacte :

$$\bar{\partial} f = 0$$

**7.c** Je regrette déjà de faire cette remarque mais la formule de Taylor-Young suggère d'écrire, d'une manière formelle,  $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$  et  $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ , et de considérer le couple  $(z, \bar{z})$  comme un système de coordonnées au même titre que le système de coordonnées  $(x, y)$ .

$$f(z_0 + w) = \sum_{m=0}^n \sum_{\substack{0 \leq k, l \\ k+l=m}} \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} \left(\frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{\partial^l}{\partial \bar{z}^l} f\right)(z_0) w^k \bar{w}^l + |w|^n \epsilon(w) \quad \lim_{w \rightarrow 0} \epsilon(w) = 0$$

L'équation de Cauchy-Riemann devient  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  et signifie que «  $f$  ne dépend pas de  $\bar{z}$  et est donc uniquement une fonction de  $z$  ». Inutile d'insister sur la confusion que cet alinéa ne manquera pas de déclencher chez le lecteur, sauf si il ou elle a le potentiel pour faire de la physique mathématique.

**7.d** À propos de confusion, c'est le moment d'insister lourdement sur les dangers des notations  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\frac{\partial}{\partial y}$ . Lorsque l'on dérive par rapport à  $x$  c'est à  $y$  constant. Prenons de nouvelles coordonnées par exemple  $x' = x$ ,  $y' = y + x$  (donc  $x = x'$ ,  $y = -x' + y'$ ). L'opérateur  $\frac{\partial}{\partial x'}$  n'est pas du tout le même que  $\frac{\partial}{\partial x}$  bien que l'on ait identiquement  $x' = x$ . En fait  $\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$ .

## 8 Dérivabilité des séries entières

**8.a** Considérons la somme  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$  d'une série entière dans son disque de conver-

gence  $D(0, R)$  (on suppose  $R > 0$ ). On a déjà établi qu'il s'agit d'une fonction continue.

**Théorème :** La fonction  $S(z)$  est holomorphe et

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n z^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) u_{m+1} z^m$$

Par récurrence il en résulte que  $S$  admet des dérivées complexes de tous les ordres, et est donc, en particulier, de classe  $C^\infty$ .

Preuve : on a déjà (exercice) fait la remarque que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} n u_n z^{n-1}$  a aussi  $R$  comme rayon de convergence. Soit  $z_0$  avec  $|z_0| < R$ . Soit  $z_1 \in D(z_0, \rho)$  avec  $\rho$  choisi de sorte que  $0 < \rho$  et  $|z_0| + \rho = r < R$ . La série  $\sum_{n=1}^{\infty} n |u_n| r^{n-1}$  est donc convergente. On écrit pour  $z_1 \in D(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$  :

$$\frac{S(z_1) - S(z_0)}{z_1 - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{z_1^n - z_0^n}{z_1 - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n (z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_0 + \cdots + z_1 z_0^{n-2} + z_0^{n-1})$$

Soit  $N \geq 1$  et notons  $S_N(z) = \sum_{n=0}^N u_n z^n$ . Alors la formule précédente donne :

$$\frac{S(z_1) - S(z_0)}{z_1 - z_0} = \frac{S_N(z_1) - S_N(z_0)}{z_1 - z_0} + \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n (z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_0 + \cdots + z_1 z_0^{n-2} + z_0^{n-1})$$

$$\text{puis } \left| \frac{S(z_1) - S(z_0)}{z_1 - z_0} - \frac{S_N(z_1) - S_N(z_0)}{z_1 - z_0} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| n r^{n-1}$$

Soit maintenant  $\epsilon > 0$  et choisissons  $N$  suffisamment grand pour que  $\sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| n r^{n-1} \leq \frac{1}{3}\epsilon$ . Ensuite on sait que le polynôme  $S_N$  est une fonction holomorphe, donc on peut trouver  $\delta > 0$ , auquel on imposera  $\delta < \rho$ , tel que

$$z_1 \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\} \implies \left| \frac{S_N(z_1) - S_N(z_0)}{z_1 - z_0} - S'_N(z_0) \right| \leq \frac{1}{3}\epsilon$$

Notons de plus que  $S'_N(z_0) = \sum_{n=1}^N n u_n z_0^{n-1}$  vérifie

$$\left| S'_N(z_0) - \sum_{n=1}^{\infty} n u_n z_0^{n-1} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n |u_n| |z_0|^{n-1} \leq \frac{1}{3}\epsilon$$

En combinant tous ces éléments on obtient :

$$z_1 \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\} \implies \left| \frac{S(z_1) - S(z_0)}{z_1 - z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n u_n z_0^{n-1} \right| \leq \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \epsilon$$

Ceci termine la preuve.

Partant de la formule  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$  on a obtenu  $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n z^{n-1}$ . Donc  $S''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) u_n z^{n-2}$ . Et :

$$S^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) u_n z^{n-p}$$

En particulier  $S^{(p)}(0) = p(p-1)\cdots 1u_p = p!u_p$  et donc  $u_p = \frac{1}{p!}S^{(p)}(0)$ . On en déduit l'identité :

$$|z| < R \implies S(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{S^{(p)}(0)}{p!} z^p$$

qui montre que la somme d'une série entière est aussi la somme infinie de son développement de Taylor (donc les restes tendent vers zéro ; on sait que pour une fonction  $C^\infty$  de la variable réelle il n'est pas nécessairement vrai que les restes dans les formules de Taylor-Young à l'ordre  $n$  tendent vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$ ).

- 8.d Supposons que deux séries entières  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$  et  $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$  vérifient  $S(z) = T(z)$  pour  $0 \leq |z| < \rho$  avec un certain  $\rho > 0$ . Comme  $u_p = \frac{1}{p!}S^{(p)}(0)$  et  $v_p = \frac{1}{p!}T^{(p)}(0)$  on en déduit pour tout  $p$  :  $u_p = v_p$ . Il y a donc unicité des coefficients d'une série entière.

## 9 Fonctions analytiques

- 9.a Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $G$  de  $\mathbf{C}$ . On dit que  $f$  est une fonction *analytique* si pour tout  $z_0 \in G$  il existe  $\rho > 0$  et une série entière  $S(z) = \sum u_n z^n$  de rayon de convergence au moins  $\rho$  telle que  $D(z_0, \rho) \subset G$  et  $f(z) = S(z - z_0)$  sur  $D(z_0, \rho)$ . Autrement dit :

$$\exists (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \exists \rho > 0 \forall z \in D(z_0, \rho) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z - z_0)^n$$

Compte tenu de la section précédente une fonction analytique admet des dérivées complexes de tous les ordres et celles-ci sont aussi des fonctions analytiques. L'analyticité équivaut à demander que  $f$  admet des dérivées complexes de tous les ordres, et que pour tout  $z_0 \in G$ , la série de Taylor de  $f$  a un rayon de convergence non nul, et que  $f$  coïncide avec la somme de cette série de Taylor dans un voisinage de  $z_0$ ,

- 9.b **Théorème** : la somme  $S(z)$  d'une série entière de rayon de convergence non nul est une fonction analytique sur son disque de convergence.

Esquissons une preuve possible : soit  $z_0 \in D(0, R)$  et soit  $z = z_0 + w$  avec  $|w| + |z_0| < R$ . Alors, en utilisant le Théorème des Séries Doubles, on justifie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n (z_0 + w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n u_n \binom{n}{m} z_0^{n-m} w^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sum_{n=m}^{\infty} u_n n(n-1)\cdots(n-m+1) z_0^{n-m}}{m!} w^m$$

Pour une preuve détaillée, se reporter au Chapitre 1 du cours 2005–2006 (si on avait commencé par cela, on aurait pu faire l'économie de la preuve donnée précédemment de la dérivabilité de  $S(z)$ , puisqu'il est assez facile de déduire de la formule plus haut  $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{S(z_0+w) - S(z_0)}{w} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n n z_0^{n-1}$ .)

- 9.c Signalons un théorème (de Cauchy) que nous prouverons ultérieurement : si  $f$  est une fonction analytique sur l'ouvert  $G$  et si  $z_0 \in G$  et si  $\rho$  est choisi le plus grand possible de sorte que  $D(z_0, \rho) \subset G$  alors le rayon de convergence de la série de Taylor de  $f$  en  $z_0$  est au moins égal à  $\rho$  et  $f$  est égale à la somme de sa série de Taylor sur  $D(z_0, \rho)$ .

- 9.d Le théorème fondamental suivant est dû principalement à Cauchy : **TOUTE FONCTION HOLOMORPHE EST ANALYTIQUE**. Comme on a vu que les fonctions analytiques étaient holomorphes on voit qu'il y a totale identité de ces deux notions. En particulier toute fonction dérivable au sens complexe une fois (sur un ouvert) est dérivable

au sens complexe autant de fois que l'on veut ! Cauchy et les autres mathématiciens qui le suivirent travaillaient sous l'hypothèse additionnelle que  $f'$  est une fonction continue. En 1904, Goursat<sup>9</sup> a montré un certain théorème clé de la théorie de Cauchy en supposant seulement l'existence de  $f'$ . À partir de ce théorème clé, et comme je l'explique dans la section suivante, on prouve le théorème fondamental qui dit que la fonction holomorphe  $f$  est analytique et donc non seulement  $f'$  est automatiquement continue, on a même que  $f$  est infiniment dérivable au sens complexe.

## 10 Le Théorème de Cauchy-Goursat

La clé de la théorie de Cauchy pour comprendre la dérivabilité au sens complexe est de s'intéresser à des *intégrales* !<sup>10</sup> Dans le domaine complexe on peut calculer des dérivées en faisant des intégrales, et on peut calculer des intégrales en faisant des dérivées !

10.a

Soit  $R$  le rectangle (et son intérieur) défini par les inégalités  $x_0 \leq x \leq x_1$  et  $y_0 \leq y \leq y_1$ . On note  $\partial R$  le « bord » du rectangle, composé de quatre segments rectilignes (Est, Nord, Ouest, et Sud). Ce bord est considéré avec une orientation, celle du sens de parcours Est→Nord→Ouest→Sud→Est. Soit  $f$  une fonction continue sur  $R$  (ou seulement sur son bord). On utilisera alors la notation

10.b

$$\int_{\partial R} f(z) dz$$

pour représenter, par définition :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x + iy_0) dx + i \int_{y_0}^{y_1} f(x_1 + iy) dy - \int_{x_0}^{x_1} f(x + iy_1) dx - i \int_{y_0}^{y_1} f(x_0 + iy) dy$$

Nous n'utiliserons ici que de tels rectangles aux bords parallèles aux axes, qui nous suffiront. On suppose toujours  $x_0 < x_1$  et  $y_0 < y_1$ .

**Théorème de Cauchy-Goursat** : soit  $f$  une fonction holomorphe sur un rectangle  $R$ . Alors  $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$

10.c

Il est essentiel pour la validité du théorème que l'on suppose  $f$  holomorphe non seulement sur le bord du rectangle mais aussi en tout point de son intérieur. Le théorème vaut pour tous les rectangles, pas seulement ceux aux bords parallèles aux axes, et aussi pour les triangles, etc. . . , mais nous verrons cela après avoir défini les notions nécessaires d'intégration le long de chemins. Nous allons prouver ce théorème en supposant la fonction  $C^1$ . Goursat a trouvé une autre méthode de démonstration qui ne fait pas cette hypothèse. Nous la verrons aussi, plus loin.

Preuve pour  $f$  holomorphe supposée  $C^1$  :

10.d

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x + iy_0) dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x + iy_1) dx = - \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial f}{\partial y}(x + iy) dy \right) dx$$

$$\int_{y_0}^{y_1} f(x_1 + iy) dy - \int_{y_0}^{y_1} f(x_0 + iy) dy = + \int_{y_0}^{y_1} \left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x}(x + iy) dx \right) dy$$

9. Goursat 1858–1936

10. Il y a des alternatives : par exemple on peut montrer directement si  $|\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n| \leq M$  sur le cercle de rayon  $\rho$  alors  $|c_n| \rho^n \leq M$  pour tout  $n$ , et montrer beaucoup de choses à partir de là ; mais il s'agirait d'une alternative à la Weierstrass qui part des séries, alors que l'esprit de mon cours est plus à la Riemann et part des équations de Cauchy-Riemann. Lorsque l'on a des équations aux dérivées partielles, on fait des intégrations c'est logique, c'est obligé, et c'est beau aussi.

Il suffit alors d'utiliser l'équation de Cauchy-Riemann :

$$-\frac{\partial f}{\partial y}(x+iy) + i\frac{\partial f}{\partial x}(x+iy) = 0$$

valable en tout point de l'intérieur et du bord du rectangle et aussi le fait que des intégrales itérées (de fonctions continues) peuvent se calculer dans n'importe quel ordre. On consultera la Chapitre 2 de l'année 2005-2006 pour ce théorème sur les intégrales doubles.

10.e

Nous allons maintenant prouver à la suite d'une série de raisonnements astucieux que toute fonction holomorphe est analytique. Soit  $f$  holomorphe sur l'ouvert  $G$ , et  $R$  un rectangle entièrement inclus (intérieur et bord) dans  $G$ . Soit alors  $a$  situé dans l'intérieur du rectangle  $R$  et soit  $\eta > 0$  très petit et  $R_\eta$  le petit carré de centre  $a$  et de côté  $\eta$ . Prolongeons les côtés de  $R_\eta$  jusqu'à intersecter le bord de  $R$ . Nous voyons maintenant  $R$  comme l'union de neuf rectangles, dont le petit carré  $R_\eta$  centré en le point  $a$  et huit autres rectangles qui l'entourent. Appliquons le théorème de Cauchy-Goursat à la fonction holomorphe  $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$  sur chacun des huit rectangles périphériques et faisons la somme des huit identités obtenues. Vous constaterez que les contributions des bords se compensent mutuellement à cause de sens de parcours opposés, et que ne subsistent, avec le signe plus le bord extérieur  $\partial R$ , et avec le signe moins le bord intérieur  $\partial R_\eta$ . Donc :

$$\int_{\partial R} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz = \int_{\partial R_\eta} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz$$

Comme  $f'(a)$  existe il existe  $C < \infty$  et  $\delta > 0$  tels que  $\left| \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \right| \leq C$  pour  $|z-a| \leq \delta$ . Donc pour  $\eta$  suffisamment petit on a

$$\left| \int_{\partial R_\eta} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz \right| \leq 4\eta C$$

En passant à la limite lorsque  $\eta \rightarrow 0$  on obtient alors :

$$\int_{\partial R} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz = 0 \quad \text{donc} \quad \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) \int_{\partial R} \frac{1}{z-a} dz$$

10.f

Nous allons prouver la formule (surprenante, puisqu'indépendante de  $a$ ) :

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i$$

Pour cela, nous commençons par observer (puisque la fonction  $z \mapsto \frac{1}{z-a}$  est holomorphe sur  $\mathbf{C} \setminus \{a\}$ ), et en reprenant la méthode de l'alinéa précédent, que pour tout  $\eta > 0$  suffisamment petit on a :

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z-a} dz = \int_{\partial R_\eta} \frac{1}{z-a} dz$$

En revenant à la définition il s'agit de calculer ;

$$\int_{-\frac{\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}} \frac{dx}{x-i\frac{\eta}{2}} + i \int_{-\frac{\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}} \frac{dy}{\frac{\eta}{2}+iy} - \int_{-\frac{\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}} \frac{dx}{x+i\frac{\eta}{2}} - i \int_{-\frac{\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}} \frac{dy}{-\frac{\eta}{2}+iy}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}} \frac{i\eta dx}{x^2 + \frac{1}{4}\eta^2} + \int_{-\frac{\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}} \frac{i\eta dy}{y^2 + \frac{1}{4}\eta^2} \\
&= 2i\eta \int_{-1}^1 \frac{\frac{\eta}{2} dt}{(1+t^2)\frac{1}{4}\eta^2} = 4i \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = 4i[\text{Arctg}(t)]_{-1}^1 = 4i\frac{\pi}{2} = 2\pi i
\end{aligned}$$

Nous avons donc à ce stade prouvé un cas particulier des Formules Intégrales de Cauchy : **10.g**  
**Théorème** : soit  $f$  une fonction holomorphe (et  $C^1$ ) sur un rectangle plein  $R$ . Alors pour tout  $a$  dans l'intérieur de  $R$  on peut calculer  $f(a)$  par la formule intégrale :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Soit maintenant  $z_0 \in G$  et prenons pour  $R$  un carré de centre  $z_0$  et de côté  $L$  entièrement inclus dans l'ouvert  $G$ . Soit  $a \in D(z_0, \frac{L}{2})$ . On a pour tout tel  $a$  fixé et tout  $z$  sur le bord du carré : **10.h**

$$|z - z_0| \geq \frac{L}{2} > |a - z_0| \quad \text{donc} \quad \frac{|a - z_0|}{|z - z_0|} \leq \frac{|a - z_0|}{\frac{1}{2}L} < 1$$

Nous avons donc la série, normalement convergente sur le bord du rectangle :

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-z_0 - (a-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{a-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

La série étant normalement convergente il est licite de permuter l'intégrale le long du bord (qui n'est rien d'autre qu'une combinaison linéaire de quatre intégrales usuelles sur des intervalles réels) avec la sommation infinie et on obtient la formule suivante :

$$|a - z_0| < \frac{L}{2} \implies f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right) (a-z_0)^n$$

À ce stade nous avons prouvé que la fonction  $f$  est analytique puisqu'elle est donnée dans un certain voisinage de  $z_0$  comme la somme d'une certaine série entière. Nous savons que les coefficients de la série entière sont uniques et donnés par les formules de Taylor. Cela donne les égalités intégrales de Cauchy suivantes : **10.i**

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Soit  $\rho > 0$  le plus grand tel que  $D(z_0, \rho) \subset G$ . La méthode suivie nous dit que le rayon de convergence de la série de Taylor de  $f$  au point  $z_0$  est au moins  $\frac{1}{\sqrt{2}}\rho$  (car tout disque de rayon strictement inférieur est inclus dans un carré centré en  $z_0$  inclus avec son bord dans  $D(z_0, \rho)$ ) et que  $f$  coïncide avec sa série dans le disque  $D(z_0, \frac{1}{\sqrt{2}}\rho)$ . Nous montrerons plus tard, lors de l'étude des séries de Laurent, que le rayon de convergence est au moins  $\rho$ . **10.j**

Lorsque  $G = \mathbf{C}$  tout entier on a  $\rho = \infty$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}\rho$  est à nouveau  $+\infty$ , et on obtient la conclusion que le rayon de convergence de la série en n'importe quel point  $z_0$  est infini. Les fonctions holomorphes sur  $\mathbf{C}$  tout entier sont appelées *fonctions entières*. **10.k**

## 11 La fonction exponentielle

11.a L'exemple par excellence de fonction entière est la fonction exponentielle :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

En dérivant terme à terme on constate

$$\exp'(z) = \exp(z)$$

Donc pour  $z$  réel on retombe sur la fonction exponentielle réelle qui est souvent définie par cette équation différentielle et la condition  $\exp(0) = 1$ . En utilisant l'équation différentielle, ou plus directement en utilisant le théorème des séries doubles on montre (voir les sections appropriées du Chapitre 1 du cours 2005–2006) :

$$\forall z, w \quad \exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$$

On écrira souvent  $\exp(z) = e^z$ , et  $e = \exp(1) = 2,71828\dots$

11.b Pour  $z = it$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , en posant  $g(t) = \exp(it)$  on obtient que  $g''(t) + g(t) = 0$ . Dans le Cours sur les Équations Différentielles on prouve que les solutions sur  $\mathbf{R}$  de cette équation sont toutes de la forme  $\alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$ . Comme  $g(0) = 1$  on a  $\alpha = 1$ ; comme  $g'(0) = i$  on a  $\beta = i$ . Donc on obtient la formule d'Euler<sup>11</sup>

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

En utilisant le développement en série de  $e^z$  et en séparant parties réelles et imaginaires dans le cas particulier  $z = it$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , on obtiendrait les représentations bien connues des fonctions  $\cos$  et  $\sin$  en séries infinies. Je signale que c'est Euler qui a le premier considéré  $\cos$  et  $\sin$  comme des fonctions et en a donné les développements en série de monômes.

11.c En particulier  $e^{\pi i} = -1$  et  $e^{2\pi i} = 1$ . Bien sûr cette discussion présuppose la connaissance des fonctions  $\cos$  et  $\sin$ , et du nombre  $\pi$ . Il est en fait devenu usuel de les *définir* en partant de l'exponentielle complexe. Ce point de vue n'est pas satisfaisant pour moi, et je ne vois pas l'intérêt de vouloir faire l'économie de l'étude des cercles et des triangles... étude qui, combinée aux notions de base de l'analyse réelle, mène à  $\pi$  par exemple sous la forme  $\pi = 4 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ ; l'étude définira des fonctions  $\sin$  et  $\cos$ , prouvera leurs périodicité, prouvera les formules d'addition trigonométrique de base, démontrera que  $\pi$  est aussi le premier zéro strictement positif de  $\sin$ , ou encore le double du premier zéro de  $\cos$ , etc... Certainement un point clé de la discussion sera à un moment de montrer  $\sin' = \cos$  et  $\cos' = -\sin$ .

## 12 Le Théorème de Liouville et une application

12.a Soit  $f$  une fonction entière. Le Théorème de Liouville<sup>12</sup> affirme que si  $f$  est bornée sur  $\mathbf{C}$  elle est en fait constante. Pour la preuve on peut utiliser les formules intégrales de Cauchy :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

---

11. Euler 1707–1783

12. Liouville 1809–1882

Je rappelle qu'ici  $R$  est un carré centré en  $z_0$  (en fait on pourrait avoir un rectangle quelconque avec  $z_0$  dans son intérieur), de côté  $L$ . Prenons en fait  $z_0 = 0$ , et notons aussi  $C = \sup_{\mathbf{C}} |f(z)|$ . On majore :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi} C \frac{1}{(L/2)^{n+1}} 4L$$

Lorsque  $n \geq 1$  on obtient en faisant tendre  $L$  vers  $+\infty$  :

$$\forall n \geq 1 \quad f^{(n)}(0) = 0$$

On sait que  $f$  est égale dans tout  $\mathbf{C}$  à la somme de sa série de Taylor à l'origine. Donc :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad f(z) = f(0)$$

Soit maintenant  $P(z)$  une fonction polynomiale de degré au moins 1. Supposon que  $P$  n'ait aucune racine complexe. Alors la fonction  $f(z) = \frac{1}{P(z)}$  est une fonction entière. On prouve facilement  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , donc certainement  $f$  est bornée sur  $\mathbf{C}$  (il existe  $r$  tel que  $|f(z)| \leq 1$  pour  $|z| \geq r$  et  $f$  étant continue est bornée sur le compact  $\{|z| \leq r\}$ ). Par le théorème de Liouville, la fonction  $f$  est constante. Mais cela est évidemment faux. L'hypothèse était donc absurde. Ainsi nous avons prouvé le **théorème fondamental de l'algèbre** : *tout polynôme non constant admet une racine dans  $\mathbf{C}$  (et donc se factorise entièrement dans  $\mathbf{C}$ ).*

12.b

### 13 Racine carrée et Logarithme complexe

Soit  $\Omega$  l'ouvert  $\mathbf{C} \setminus ]-\infty, 0]$ . Dans cet ouvert on peut utiliser des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ ,  $-\pi < \theta < +\pi$ . Si  $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$  et si l'on pose  $w = \sqrt{r}(\cos(\frac{\theta}{2}) + i \sin(\frac{\theta}{2}))$  on constate (par un calcul que vous ferez) que  $w^2 = z$ . De plus  $w$  est dans le demi-plan  $\text{Re}(w) > 0$  et l'autre racine carrée de  $z$  est dans le demi-plan complémentaire  $\text{Re}(w) < 0$ . On écrira  $\sqrt{z}$  pour  $w$ .

13.a

Montrons que la fonction Racine carrée est holomorphe sur  $\Omega$ . Pour cela nous allons obtenir d'autres formules pour  $u = \text{Re}(w)$  et  $v = \text{Im}(w)$ . On a  $(u + iv)^2 = x + iy$ , donc  $u^2 - v^2 = x$  et  $2uv = y$ . De plus  $|u + iv|^2 = |x + iy|$  donc  $u^2 + v^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Alors :

13.b

$$2u^2 = (u^2 - v^2) + (u^2 + v^2) = x + \sqrt{x^2 + y^2} \quad u = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}$$

On a utilisé le fait que  $u > 0$  et on rappelle que lorsque l'on travaille avec des nombres réels positifs,  $\sqrt{t}$  est la racine carrée positive. En tout cas nous voyons que  $u$  est de classe  $C^1$  comme fonction de  $(x, y)$ . Par la formule  $v = \frac{1}{2}yu^{-1}$  cela sera aussi le cas de  $v$ . En dérivant les relations de base  $u^2 - v^2 = x$  et  $2uv = y$  on obtient :

$$\begin{aligned} 2u \frac{\partial u}{\partial x} - 2v \frac{\partial v}{\partial x} &= 1 & 2u \frac{\partial u}{\partial y} - 2v \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ 2v \frac{\partial u}{\partial x} + 2u \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 & 2v \frac{\partial u}{\partial y} + 2u \frac{\partial v}{\partial y} &= 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u}{2(u^2 + v^2)} & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-v}{2(u^2 + v^2)} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{v}{2(u^2 + v^2)} & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{u}{2(u^2 + v^2)}\end{aligned}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann  $\frac{\partial u}{\partial x} = +\frac{\partial v}{\partial y}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  sont bien vérifiées : la fonction  $z \mapsto \sqrt{z}$  est donc holomorphe sur  $\Omega$ . De plus :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sqrt{z} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{z} = \frac{u - iv}{2(u^2 + v^2)} = \frac{1}{2(u + iv)} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

comme on pouvait l'imaginer.

**13.c** Une autre, fondamentale, fonction holomorphe sur l'ouvert  $\Omega$  est donnée par le **Logarithme complexe** :

$$\text{Log } z = \ln(r) + i\theta$$

Montrons qu'il s'agit bien d'une fonction holomorphe. Nous supposons dans un premier temps  $x > 0$  de manière à pouvoir utiliser la formule  $\theta = \text{Arctg}(\frac{y}{x})$ . Cette formule montre que  $\theta$  est de classe  $C^1$  et permet de calculer :

$$\frac{\partial}{\partial x} \theta = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial}{\partial y} \theta = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Par ailleurs  $\ln(r) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$  donc

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln(r) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} 2x = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial}{\partial y} \ln(r) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} 2y = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Les équations de Cauchy-Riemann  $\frac{\partial}{\partial x} \ln(r) = \frac{\partial}{\partial y} \theta$  et  $\frac{\partial}{\partial y} \ln(r) = -\frac{\partial}{\partial x} \theta$  sont bien vérifiées. Pour étendre ce résultat à l'ouvert  $\Omega$  tout entier faisons la remarque  $\text{Log } z = 2 \text{Log } \sqrt{z}$ , qui découle directement des diverses définitions. La composition de fonctions holomorphes est holomorphe (exercice) donc le terme de droite est holomorphe sur  $\Omega$  puisque  $\sqrt{z}$  prend ses valeurs dans le demi-plan  $x > 0$  sur lequel nous avons déjà montré que  $\text{Log}$  est holomorphe.

**13.d** On a de plus  $\frac{\partial}{\partial z} \text{Log } z = \frac{\partial}{\partial x} \text{Log } z = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = z^{-1}$ .<sup>13</sup> Calculons la dérivée de la fonction composée  $\exp(\text{Log } z)$  : cela donne (vous aurez d'abord établi que la règle usuelle pour la dérivation de fonctions composées s'applique)  $\exp(\text{Log } z) \frac{1}{z}$ . Calculons maintenant la dérivée de  $\frac{1}{z} \exp(\text{Log } z)$ . Cela donne  $-z^{-2} \exp(\text{Log } z) + z^{-2} \exp(\text{Log } z) = 0$ . La dérivée est identiquement nulle et la fonction  $\frac{1}{z} \exp(\text{Log } z)$  est donc (pourquoi ?) constante sur  $\Omega$ . En  $z = 1$  on trouve qu'elle vaut 1. Ainsi :

$$\forall z \in \Omega \quad \exp(\text{Log } z) = z$$

À vrai dire on s'est fatigué alors que l'on n'avait qu'à dire directement  $\exp(\text{Log } z) = \exp(\ln(r) + i\theta) = r e^{i\theta}$ . Donc, la compatibilité des deux résultats équivaut à la formule d'Euler :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

13. comme nous utilisons ici notre calcul précédent des dérivées partielles, on est restreint à  $x > 0$ . Montrer que le résultat vaut dans tout  $\Omega$ .

On me dira : mais c'est évident on n'avait qu'à utiliser la définition de  $\exp(i\theta)$  via sa série et on voit apparaître les séries de Taylor des fonctions cos et sin. Oui, mais qui a dit que je définissais cos et sin par ces célèbres séries? (voir la section sur la fonction exponentielle). Euler fut le premier à considérer cos et sin comme des fonctions et à en donner les développements en série. C'est aussi lui qui a répondu correctement à la question : « que vaut  $\log(-1)$ ? » (se reporter au Chapitre 1 du cours 2005–2006).

Je commence à voir poindre la nécessité d'un Chapitre  $-1$  ..bon, une autre année peut-être.

## 14 La méthode de Goursat

Nous connaissons déjà le très important **Théorème de Cauchy-Goursat** :

14.a

Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un rectangle  $R$ . Alors  $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$

Notre preuve faisait l'hypothèse additionnelle que  $f'$  est continue sur  $R$  et utilisait le théorème qui dit  $\int_{x_0}^{x_1} (\int_{y_0}^{y_1} g(x, y)dy)dx = \int_{y_0}^{y_1} (\int_{x_0}^{x_1} g(x, y)dx)dy$  lorsque  $g$  est une fonction continue. Une démonstration de ce fait se trouve en appendice du Chapitre 2 du polycopié 2005, disponible sur ma page sur la toile. Le résultat y est présenté comme corollaire de celui sur la dérivabilité d'intégrales à paramètre, et j'aurais pu aussi le prouver en exploitant plus directement l'uniforme continuité de la fonction  $g$  sur le rectangle  $R$ . Bref, en fin de compte, suivant votre niveau de connaissance en Analyse, les choses ne sont donc peut-être pas si simples que cela par cette méthode. Alors, voici la méthode de Goursat, qui ne fait aucune hypothèse sur  $f'$  à part son existence, et qui a l'avantage d'être complètement "self-contained". De plus, en la lisant vous verrez qu'on pourrait l'adapter facilement à d'autres formes que des rectangles, des triangles par exemple.

Soit donc  $R$  le rectangle plein  $\{x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1\}$ , et pour que  $R$  soit vraiment un rectangle je précise explicitement  $x_0 < x_1$  et  $y_0 < y_1$ . Supposons que l'on choisisse un point  $(x, y)$  arbitraire dans l'intérieur de  $R$  et que l'on considère ainsi les 4 sous-rectangles  $R_1, R_2, R_3, R_4$  aux bords parallèles aux axes ayant chacun le point  $(x, y)$  parmi leurs sommets. Je vous laisse vérifier alors  $\int_{\partial R} f(z)dz = \sum_{1 \leq j \leq 4} \int_{\partial R_j} f(z)dz$  pour toute fonction  $f$  (disons, continue sur  $R$ , pour que les intégrales existent). Donc  $|\int_{\partial R} f(z)dz| \leq \sum_{1 \leq j \leq 4} |\int_{\partial R_j} f(z)dz|$  et il existe au moins un des sous-rectangles  $R_j$ , notons-le  $R^{(1)}$ , tel que

14.b

$$\left| \int_{\partial R^{(1)}} f(z)dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R} f(z)dz \right|$$

Pour être spécifique on prendra  $(x, y) = (\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2})$ . En itérant la construction on obtient une suite de rectangles emboîtés  $R = R^{(0)} \supset R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset \dots$  avec  $|\int_{\partial R^{(j+1)}} f(z)dz| \geq \frac{1}{4} |\int_{\partial R^{(j)}} f(z)dz|$  et donc par récurrence :

$$\left| \int_{\partial R^{(j)}} f(z)dz \right| \geq \frac{1}{4^j} \left| \int_{\partial R} f(z)dz \right|$$

Notons  $(X_j, Y_j)$  les coordonnées du point inférieur gauche du rectangle  $R^{(j)}$  (en particulier  $(X_0, Y_0) = (x_0, y_0)$ ). Alors par construction  $X_{j+1} - X_j$  vaut 0 ou  $\frac{x_1-x_0}{2^{j+1}}$  et aussi  $Y_{j+1} - Y_j$  vaut 0 ou  $\frac{y_1-y_0}{2^{j+1}}$ . La suite  $(X_j)$  est croissante et majorée par  $x_1$  donc convergente, et la suite  $(Y_j)$  est croissante et majorée par  $y_1$  donc convergente. Soit  $X_\infty$  et  $Y_\infty$  les limites et  $z_\infty = X_\infty + iY_\infty$ . Chaque rectangle  $R^{(j)}$  est fermé et tous les points  $(X_k, Y_k)$ ,  $k \geq j$  sont dedans, donc aussi leur limite  $(X_\infty, Y_\infty)$ . Puisque la largeur de  $R^{(j)}$  est exactement  $\frac{x_1-x_0}{2^j}$  et sa hauteur  $\frac{y_1-y_0}{2^j}$  il en résulte que pour tout point  $z$  se trouvant sur son bord la quantité  $|z - z_\infty|$  est au pire égale à la diagonale du rectangle  $R^{(j)}$  donc on a l'inégalité :  $|z - z_\infty| \leq \frac{D}{2^j}$  avec  $D = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$ . La fonction  $f$  est

dérivable au sens complexe au point  $z_\infty$ . On peut donc pour tout  $\epsilon > 0$  trouver  $\delta > 0$  tel que pour  $|z - z_\infty| \leq \delta$  on a  $|f(z) - f(z_\infty) - f'(z_\infty)(z - z_\infty)| \leq \epsilon|z - z_\infty|$ . Donc, pour  $\epsilon > 0$  fixé et pour tout  $j$  suffisamment grand, on aura, pour tous les  $z$  sur le bord du rectangle  $R^{(j)}$  :

$$|f(z) - f(z_\infty) - f'(z_\infty)(z - z_\infty)| \leq \epsilon \frac{D}{2^j},$$

puis, en notant  $P = 2|x_1 - x_0| + 2|y_1 - y_0|$  le périmètre de  $R$ , et donc  $\frac{P}{2^j}$  le périmètre de  $R^{(j)}$ , on peut affirmer, pour tout  $j$  suffisamment grand :

$$\left| \int_{\partial R^{(j)}} (f(z) - f(z_\infty) - f'(z_\infty)(z - z_\infty)) dz \right| \leq \epsilon \frac{P}{2^j} \frac{D}{2^j} = \epsilon \frac{PD}{4^j}$$

C'est là où l'on fait la remarque simplificatrice :  $\int_{\partial R^{(j)}} dz = 0$  et  $\int_{\partial R^{(j)}} z \cdot dz = 0$ . Cela vaut pour n'importe quel rectangle et je vous laisse le vérifier par un calcul explicite. Donc d'une part pour tout  $j$  :  $|\int_{\partial R^{(j)}} f(z) dz| \geq \frac{1}{4^j} |\int_{\partial R} f(z) dz|$  et d'autre part pour tout  $j$  suffisamment grand :  $|\int_{\partial R^{(j)}} f(z) dz| \leq \epsilon \frac{PD}{4^j}$ . En combinant les deux on obtient :

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq \epsilon PD$$

Mais  $\epsilon > 0$  est arbitraire. Donc (finalement)  $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$ . CQFD.

**14.c** Déjà dans le paragraphe **10.e** on a pris un  $a$  dans l'intérieur du rectangle  $R$ , et on a expliqué que l'on avait encore  $\int_{\partial R} g(z) dz = 0$  avec  $g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ , bien qu'il ne soit pas du tout clair a priori si la fonction  $g$ , que l'on peut définir en  $a$  par la formule  $g(a) = f'(a)$ , est dérivable au sens complexe aussi au point  $a$  (c'est totalement clair en un point  $z \neq a$ ). Si on relit la méthode on voit qu'elle permet d'établir plus généralement : **soit  $R$  un rectangle (parallèle aux axes) et  $a$  un point dans son intérieur. Alors pour toute fonction  $g$  holomorphe sur  $R \setminus \{a\}$  et bornée au voisinage de  $a$  il est vrai que  $\int_{\partial R} g(z) dz = 0$ .**

**14.d** On pourrait autoriser plusieurs points exceptionnels  $a$ , un seul nous suffira. D'ailleurs on s'apercevra bientôt (théorème de Riemann) que les hypothèses sur  $g$  de l'alinéa précédent font qu'elle est en fait la restriction à  $R \setminus \{a\}$  d'une fonction holomorphe sur  $R$  tout entier, y-compris en  $a$ . L'intérêt de cette version étendue de Cauchy-Goursat est donc strictement provisoire.

## 15 Séries de Laurent (et séries de Fourier)

**15.a** L'inconvénient lorsque le Professeur fait des cours en amphi si complets, c'est qu'ensuite il n'est plus trop motivé pour les rédiger sous forme de polycopié. Alors déjà je vous rappelle sans tout reprendre que nous savons que la fonction entière  $e^z$  est  $2\pi i$ -périodique, que les points de la forme  $re^{i\theta}$  pour  $r$  fixé décrivent le cercle de rayon  $r$  centré à l'origine, etc... Ensuite, je vous préviens que j'ai décidé de présenter ici des preuves **différentes** de celles faites en amphi, en particulier je ne vais utiliser **aucun** théorème de la théorie des séries de Fourier. <sup>14</sup>

**15.b** Je considère une fonction  $f$  holomorphe sur un anneau (on dit aussi couronne)  $\mathcal{A} = \{r_1 < |z| < r_2\}$ . Les cas  $r_1 = 0$  et  $r_2 = \infty$  sont autorisés. Soit  $a$  avec  $r_1 < |a| < r_2$  et considérons la fonction  $F(w)$  définie par la formule :

$$F(w) = \frac{f(e^w) - f(a)}{e^w - a} e^w$$

---

14. Fourier 1768–1830

Cette fonction (ne me demandez pas d'où je la sors !) est holomorphe sur la bande verticale définie par les inégalités  $\log(r_1) < \operatorname{Re}(w) < \log(r_2)$ , à l'exception peut-être des  $w$  avec  $e^w = a$ . Écrivons  $a = |a|e^{i\phi}$  avec  $\phi \in ]-\pi, +\pi]$ . Les mauvais  $w$  sont ceux de la forme  $\log |a| + i\phi + k2\pi i$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Lorsque  $w$  tend vers un mauvais  $w$ ,  $e^w$  tend vers  $a$  et  $F(w)$  tend vers  $f'(a)a$ , donc certainement  $F$  reste bornée au voisinage de  $\log |a| + i\phi$ . Pour la suite on supposera de plus que  $\phi$  ne vaut pas  $+\pi$ .

Prenons  $r < r'$  dans  $]r_1, r_2[$ , tels que  $r < |a| < r'$  et appliquons le théorème (étendu) de Cauchy-Goursat à la fonction  $F(w)$ , pour le rectangle  $R$  des nombres complexes  $w = u + i\theta$  vérifiant les inégalités  $\log(r) \leq u \leq \log(r')$  et  $-\pi \leq \theta \leq +\pi$ . On a supposé  $\phi < \pi$  pour que  $\log |a| + i\phi$  soit dans l'intérieur du rectangle. FAITES UN DESSIN S'IL VOUS PLAÎT. Cela donne le résultat suivant :

15.c

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial R} F(w)dw \\ &= \int_{\log r}^{\log r'} F(u - i\pi)du + i \int_{-\pi}^{+\pi} F(\log r' + i\theta)d\theta \\ &\quad - \int_{\log r}^{\log r'} F(u + i\pi)du - i \int_{-\pi}^{+\pi} F(\log r + i\theta)d\theta \end{aligned}$$

La fonction  $F$  est  $2\pi i$ -périodique donc les deux intégrales "horizontales" s'annulent mutuellement et au final et en revenant à notre fonction d'origine  $f(z)$  on a :

$$r < |a| < r' \implies \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(r'e^{i\theta}) - f(a)}{r'e^{i\theta} - a} r'e^{i\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(re^{i\theta}) - f(a)}{re^{i\theta} - a} re^{i\theta} d\theta$$

Comme on a supposé  $\phi \neq \pi$  la formule n'est pas encore prouvée pour les  $a$  réels négatifs (c'est-à-dire dans  $] -r', -r[$ ). On justifiera plus loin qu'elle est aussi valable pour eux.

On va simplifier ce résultat en utilisant des séries géométriques. À titre d'échauffement, commençons par

15.d

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{re^{i\theta} - a} re^{i\theta} d\theta = - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{1 - \frac{r}{a}e^{i\theta}} \frac{r}{a} e^{i\theta} d\theta = - \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^n} e^{ni\theta} d\theta$$

Vous avez fait attention au  $n = 1$  ? La convergence de la série est normale par rapport à  $\theta$  et on peut donc intégrer terme à terme. Par les formules utiles  $\forall n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ni\theta} d\theta = 0$  il vient :

$$r < |a| \implies \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{re^{i\theta} - a} re^{i\theta} d\theta = 0$$

Par contre pour  $r' > |a|$  le résultat est différent :

15.e

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{r'e^{i\theta} - a} r'e^{i\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{1 - \frac{a}{r'}e^{-i\theta}} d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r'^n} e^{-ni\theta} d\theta = 2\pi,$$

car seul  $n = 0$  donne une contribution non nulle après intégration. En combinant tout on obtient l'intéressante (bien qu'un peu bizarre la première fois qu'on la voit) formule intégrale :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(r'e^{i\theta})}{r'e^{i\theta} - a} r'e^{i\theta} d\theta - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - a} re^{i\theta} d\theta \right)$$

15.f On se rapproche du dénouement final. Rien ne nous interdit de recommencer notre petit jeu avec des séries géométriques, ce qui donne, vérifiez-le :

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{2\pi r'^n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(r'e^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{2\pi a^n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(re^{i\theta}) e^{ni\theta} d\theta$$

Remarquez que la fonction  $f$  est continue donc bornée sur chacun des cercles  $|z| = r$  et  $|z| = r'$  et que cela a été utilisé pour justifier la permutation des séries et des intégrales. On pourra observer aussi, c'est utile, que  $|\int_{-\pi}^{+\pi} f(r'e^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta| \leq \int_{-\pi}^{+\pi} |f(r'e^{i\theta})| d\theta$  est borné indépendamment de  $n$ , et idem pour les intégrales avec  $r$ .

15.g Pour  $|a| = \rho$  fixé on a prouvé la formule lorsque  $a = \rho e^{i\phi}$ ,  $-\pi < \phi < +\pi$ , c'est-à-dire sauf peut-être  $a = -\rho$ . Mais les deux séries à droite sont normalement convergentes par rapport à  $\phi \in \mathbf{R}$  (lorsque l'on écrit  $a = \rho e^{i\phi}$ ). Donc à droite on a une fonction continue de  $\phi$  et à gauche on a la fonction continue  $f(\rho e^{i\phi})$ . Leur identité sur  $] -\pi, +\pi[$  vaut donc aussi sur  $[-\pi, +\pi]$  (et sur  $\mathbf{R}$  par  $2\pi$ -périodicité). La formule est donc valable pour tous les  $a$  de la couronne  $r < |a| < r'$ .

15.h Il est à ce stade naturel de poser par définition pour tout  $R \in ]r_1, r_2[$  et tout  $n \in \mathbf{Z}$  :

$$c_n(f, R) = \frac{1}{2\pi R^n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(Re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta$$

et de réécrire la formule précédente sous la forme simple :

$$r < |a| < r' \implies f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f, r') a^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(f, r) a^n$$

Vous remarquerez que l'on a remplacé  $n$  par  $-n$  dans la deuxième série. Peut-être est-ce aussi le moment de signaler que dans la définition de  $c_n(f, R)$  on peut prendre l'intégrale de  $0$  à  $2\pi$  au lieu de de  $-\pi$  à  $+\pi$ , ou même en fait on peut intégrer de  $t$  à  $t+2\pi$  pour n'importe quel  $t$ ; il s'agit là d'une propriété bien connue de toutes les fonctions  $2\pi$ -périodiques intégrables, que je vous invite à vérifier par vous-même.

15.i Écrivons  $a = \rho e^{i\phi}$  et intégrons de  $\phi = -\pi$  à  $\phi = +\pi$  terme à terme grâce à la convergence normale. Cela donne :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\phi}) d\phi = 2\pi c_0(f, r').$$

Ceci donne  $c_0(f, \rho) = c_0(f, r')$ . Donc en fait  $c_0(f, R) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(Re^{i\theta}) d\theta$  ne dépend pas de  $R$  et on écrira simplement  $c_0(f)$  ou même  $c_0$  tout court. On fait la remarque que  $c_n(f, R) = c_0(f(z)z^{-n}, R)$  donc les  $c_n$  eux aussi ne dépendent que de  $f$ . Je redonne ici leurs formules :

$$r_1 < R < r_2 \implies c_n = \frac{1}{2\pi R^n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(Re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta$$

15.j Notre conclusion, en écrivant  $z$  là où nous avons  $a$ , est donc le **Théorème de Laurent** <sup>15</sup> : soit  $f$  holomorphe dans une couronne  $r_1 < |z| < r_2$ . Il existe alors des nombres complexes  $c_n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , ne dépendant que de  $f$ , tels que pour tout  $z$  de la couronne

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n z^n$$

15.k **Unicité** : la convergence de  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  en un  $z$  implique (POURQUOI ?) la convergence

---

15. Laurent 1813–1854

normale sur tout cercle de rayon strictement inférieur à  $|z|$  et de même la convergence de  $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n z^n$  en un  $z$  implique la convergence normale sur tout cercle de rayon  $> |z|$ . Donc (!! ) il y a nécessairement convergence normale de chacune des deux séries sur tout cercle  $z = r e^{i\phi}$  avec  $r_1 < r < r_2$ , et en intégrant  $f(r e^{i\phi}) e^{-ni\phi}$  terme à terme sur  $[-\pi, +\pi]$  on a que nécessairement les coefficients  $c_n$  doivent vérifier  $\int_{-\pi}^{+\pi} f(r e^{i\phi}) e^{-ni\phi} d\phi = 2\pi c_n r^n$ , c'est-à-dire aucun autre choix pour les  $c_n$  n'est possible que celui que nous avons déjà. Il y a ainsi unicité des coefficients de la série de Laurent. On remarque aussi que la première série a rayon de convergence au moins  $r_2$  puisqu'elle converge pour des  $z$  avec des  $|z| < r_2$  arbitrairement proches de  $r_2$  et que de même la deuxième série, vue comme série en  $\frac{1}{z}$  a rayon de convergence au moins  $\frac{1}{r_1}$ . En particulier lorsque  $r_1 = 0$  la deuxième série est une fonction entière évaluée en  $\frac{1}{z}$ .

**Séries de Fourier.** Avec  $z = r e^{i\phi}$  la série de Laurent devient :

15.1

$$r_1 < r < r_2 \implies \forall \phi \in \mathbf{R} \quad f(r e^{i\phi}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^n e^{in\phi}$$

À gauche nous avons pour  $r$  donné une fonction  $f(r e^{i\phi})$   $2\pi$ -périodique en  $\phi$ , et à droite nous avons une somme infinie ( $n$  allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ ) des fonctions élémentaires  $e^{in\phi}$ . Cela s'appelle une série de Fourier, et toute fonction raisonnable admet, en des sens plus ou moins généralisés, une telle représentation. Inutile d'en rajouter puisqu'en amphi, j'ai justement pris comme point de départ le fait de vouloir développer  $f(r e^{i\phi})$  en une telle série de Fourier. On voit donc qu'une série de Laurent dans un anneau, c'est en fait des séries de Fourier associées à chaque cercle, dont les  $n^{\text{ièmes}}$  coefficients dépendent du rayon  $r$  du cercle simplement en étant proportionnels à  $r^n$ . Une précision cependant : supposons que je parte d'une série de Fourier  $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\phi}$  que l'on suppose convergente pour tout  $\phi$  ou même absolument convergente, et qui définit donc une fonction sur le cercle de rayon 1. Alors il est très possible que  $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^n e^{in\phi}$  soit divergent dès que  $r \neq 1$ . Pour donner un exemple on n'a qu'à prendre  $c_n = \frac{1}{1+n^2}$ . Car  $\sum_0^{\infty} \frac{r^n}{1+n^2} e^{in\phi}$  ne converge que pour  $r \leq 1$ , tandis que  $\sum_{-1}^{-\infty} \frac{r^n}{1+n^2} e^{in\phi}$  ne converge que pour  $r \geq 1$ . Il est donc impossible d'associer à une telle série de Fourier une fonction holomorphe dans un anneau. C'est le cas typique ! Par contre on peut la décomposer en la somme des valeurs au bord d'une fonction holomorphe pour  $|z| < 1$  et d'une fonction holomorphe pour  $|z| > 1$ , mais j'arrête là car ce sont les prémisses de mathématiques beaucoup plus avancées. Retenez simplement que toute fonction holomorphe dans un anneau donne des séries de Fourier, mais que la réciproque ne vaut pas.

**Exercice :** on se donne une fonction holomorphe  $f$  dans un anneau. Quelle est la série de Laurent de  $f'$  ? justifier.

15.m

## 16 Le Théorème d'analyticité et le Théorème de la fausse singularité

Soit maintenant  $f$  une fonction holomorphe sur le disque  $D(0, \rho) = \{z, |z| < \rho\}$ . Ce qui précède s'applique avec  $r_1 = 0$  et  $r_2 = \rho$ . Comme  $f$  est continue (puisque dérivable au sens complexe) en particulier au point  $z = 0$ , elle est certainement bornée dans un voisinage,

16.a

disons  $|f(z)| \leq M$  pour  $|z| \leq \delta$ , pour un certain  $\delta > 0$ . Utilisons la formule

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta,$$

pour  $0 < r \leq \delta$  pour majorer  $|c_n|$ . On obtient  $|c_n| \leq Mr^{-n}$ . Pour  $n \leq -1$  on fait tendre  $r$  vers 0 et on en déduit  $c_n = 0$ . La série de Laurent se réduit donc à une série entière :

$$0 < |z| < \rho \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

**16.b** On sait que la somme d'une série entière est une fonction continue donc  $c_0 = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0)$ . Donc la formule  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  vaut aussi pour  $z = 0$ . Nous avons ainsi établi le **Théorème d'analyticité de Cauchy** : *toute fonction holomorphe sur un disque  $D(z_0, \rho)$  peut s'écrire sur tout le disque comme la somme d'une série entière en  $z - z_0$  de rayon de convergence au moins égal à  $\rho$ .*

Je rappelle que nous avons déjà un résultat partiel dans cette direction, ce qui nous manquait c'était en particulier la partie relative au rayon de convergence, et aussi accessoirement le fait que nous n'avions le théorème de Cauchy-Goursat que sous l'hypothèse supplémentaire  $C^1$ . Ces deux défauts ont été corrigés ici. Je rappelle aussi que l'analyticité a comme conséquence que  $f$  est non seulement dérivable une fois, mais même autant de fois que l'on veut, au sens complexe, puisque cela est vrai pour les sommes de séries entières.

**16.c** Revenons au cas d'une fonction  $f$  holomorphe sur un disque épointé  $D^*(z_0, \rho) = D(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$ . On a une représentation sous forme de série de Laurent centrée en  $z_0$  :  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ . Faisons l'hypothèse que  $f$  est bornée dans un voisinage de  $z_0$ . Sous cette seule hypothèse on constate que notre preuve donnée plus haut de  $c_n = 0$  pour  $n \leq -1$  fonctionne. Donc  $f$  est la restriction au disque épointé de la fonction  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  holomorphe sur le disque entier. C'est là le **Théorème de la fausse singularité de Riemann** : *une fonction holomorphe sur un disque épointé et bornée au voisinage de son centre s'étend en une fonction holomorphe y-compris au centre.* On parle aussi de **singularité effaçable**. La version "étendue" du théorème de Cauchy-Goursat n'avait donc qu'un intérêt temporaire puisqu'en fin de compte on s'aperçoit que le point exceptionnel autorisé est en fait comme les autres.

## 17 Classification des singularités isolées ; Pôles, Résidus

**17.a** On dit qu'une fonction holomorphe  $f$  a  $z_0$  comme singularité isolée lorsqu'elle est holomorphe sur un disque épointé  $D^*(z_0, \rho)$ . Il lui est associée une série de Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ , et la partie  $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$  ne faisant intervenir que les exposants négatifs est appelée *partie principale* ou encore *partie singulière*. Le **résidu**, noté par exemple  $\text{Rés}(f, z_0)$  est le coefficient  $c_{-1}$ . Autrement dit pour tout  $r \in ]0, \rho[$

$$\text{Rés}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) re^{i\theta} d\theta,$$

une formule que nous réécrivons sous la forme  $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz$  une fois que les intégrales le long de chemins auront été définies. Bien sûr le coefficient  $c_{-1}$  existe dans toute série de

Laurent, mais on ne parle de résidu que lorsque l'anneau est de la forme  $0 < |z - z_0| < \rho$ , c'est-à-dire avec nos anciennes notations  $r_1 = 0$ .

On parle de *fausse singularité* lorsque tous les  $c_n$  pour  $n < 0$  sont nuls, de **pôle** lorsqu'il y a un nombre fini (et au moins un) de  $c_n \neq 0$  pour  $n < 0$ , et de *singularité essentielle* lorsqu'il y a une infinité de  $c_n \neq 0$  avec  $n < 0$ . 17.b

**Théorème** : la singularité isolée  $z_0$  est un pôle si et seulement si  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ . 17.c

Preuve de la nécessité : si on a un pôle on peut écrire  $f(z) = (z - z_0)^{-N}(c_{-N} + c_{-N+1}(z - z_0) + \dots)$  avec  $c_{-N} \neq 0$ , donc, en définissant  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-N}(z - z_0)^n$  on a  $|f(z)| = |z - z_0|^{-N}|g(z)|$  avec  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0) = c_{-N} \neq 0$  donc  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ .

Preuve de la suffisance : si  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ , alors en tout cas  $f(z) \neq 0$  pour  $|z - z_0|$  suffisamment petit et on peut considérer la fonction holomorphe  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  qui vérifie  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$ , et est donc en particulier bornée au voisinage de 0. Par le théorème de Riemann,  $g(z)$  admet la représentation  $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j(z - z_0)^j$  valable pour  $|z - z_0|$  suffisamment petit. L'un des coefficients  $d_j$  doit être non nul sinon  $g(z) = 0$  mais  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  alors c'est impossible. Soit  $N$  l'indice le plus petit avec  $d_N \neq 0$  et écrivons  $g(z) = (z - z_0)^N k(z)$  où  $k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_{j+N}(z - z_0)^j$  est une fonction holomorphe sur un disque  $D(z_0, r)$ , vérifiant  $\lim_{z \rightarrow z_0} k(z) = k(z_0) = d_N \neq 0$ . La fonction  $\frac{1}{k(z)}$  est holomorphe au point  $z_0$ , et admet donc un développement  $\sum_{j=0}^{\infty} e_j(z - z_0)^j$  (avec  $e_0 = d_N^{-1}$ ). Comme  $f(z) = (z - z_0)^{-N} k(z)^{-1}$ , on obtient une série de Laurent  $f(z) = \sum_{j=-N}^{\infty} e_{j+N}(z - z_0)^j$  qui par unicité est la série de Laurent de  $f$  et qui n'a effectivement qu'un nombre fini de coefficients non nuls dans sa partie singulière.

On peut donc résumer de la manière suivante la situation en une singularité isolée : 17.d

1.  $f$  est bornée au voisinage de  $z_0$  : fausse singularité.
2.  $|f|$  tend vers  $\infty$  en  $z_0$  : pôle.
3. ni l'un ni l'autre : singularité essentielle.

Signalons et laissons en exercice le théorème de Casorati-Weierstrass<sup>16</sup> : en une singularité essentielle  $z_0$ , pour tout  $r > 0$  tel que  $f$  existe sur  $D^*(z_0, r)$ , l'ensemble  $f(D^*(z_0, r))$  est dense dans  $\mathbf{C}$ .

On dira que  $f$  a un pôle d'ordre  $N$  ( $N \geq 1$ ) lorsque  $c_{-N} \neq 0$ , et  $c_n = 0$  pour  $n < -N$ . Lorsque  $N = 1$  on dit que  $z_0$  est un **pôle simple**. 17.e

**Exercice** : On a un pôle simple en  $z_0$  si et seulement si  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$  existe et est non nulle. Le Résidu coïncide avec cette limite lorsqu'elle existe. 17.f

Une fonction  $f$  est dite **méromorphe** sur un ouvert  $U$  si elle est définie et holomorphe sur  $U \setminus A$ , avec  $A \subset U$  un sous-ensemble composé de points isolés ( $z_0 \in A \implies \exists \delta > 0 \ 0 < |z - z_0| < \delta \implies z \notin A$ ), qui sont soit de fausses singularités (auquel cas on prolonge comme il faut  $f$  pour effacer la singularité) soit des pôles de  $f$ . Autrement dit  $f$  est dite méromorphe si elle n'a dans  $U$  que des singularités isolées qui sont des pôles. 17.g

## 18 Zéros (I) : Multiplicités

Lorsque  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  est holomorphe au point  $z_0$  et que  $N$  est le plus petit indice avec  $c_N \neq 0$  on dit que  $z_0$  est un zéro de multiplicité  $N$ . Deux cas spéciaux : si 18.a

16. Casorati 1835–1890 ; Weierstrass 1815 - 1897

$N = 0$  il faut comprendre que  $z_0$  n'est, en fait, pas un zéro :  $f(z_0) \neq 0$ , et si  $N = \infty$  il faut comprendre que  $f$  est identiquement nulle sur un voisinage de  $z_0$ .

**18.b** Dans le cas d'un zéro  $z_0$  de multiplicité infinie,  $f$  est identiquement nulle sur **tout** disque centré en  $z_0$  inclus dans le domaine ouvert  $U$  de définition de  $f$ . En effet, sur tout tel disque on sait que  $f$  est donnée par sa série de Taylor, or celle-ci est identiquement nulle par hypothèse. On prouvera plus tard (théorème de l'identité analytique) que  $f$  est identiquement nulle sur la composante connexe de  $U$  contenant  $z_0$ .

**18.c** Supposons  $N < \infty$ . On peut factoriser  $f(z) = (z - z_0)^N k(z)$  avec  $\lim_{z \rightarrow z_0} k(z) = c_N \neq 0$ . Il en résulte qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $k(z) \neq 0$  pour  $0 \leq |z - z_0| < \delta$  et donc  $f(z) \neq 0$  pour  $0 < |z - z_0| < \delta$ . Conclusion, dans tout disque suffisamment petit centré en  $z_0$  le seul zéro possible est en  $z_0$  : soit  $f(z_0) \neq 0$  et alors par continuité  $f(z) \neq 0$  pour  $|z - z_0|$  suffisamment petit, soit  $f(z_0) = 0$  et alors  $f(z) \neq 0$  pour  $0 < |z - z_0|$  suffisamment petit par le raisonnement que nous venons de faire. On parle alors d'un **zéro isolé** : zéro isolé  $\iff 1 \leq N < \infty$ .

**18.d** Un zéro isolé de  $f$ , c'est la même chose qu'un pôle de  $\frac{1}{f}$ .

**18.e** Supposons  $f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^N k(z)$  avec  $k(z_0) = c_N \neq 0$ , et  $N \geq 1$ . Alors  $f'(z) = \sum_{n=N}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} = (z - z_0)^{N-1} K(z)$  avec  $K(z_0) = N c_N$ . Donc  $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{K(z)}{k(z)}$  avec  $g(z) = \frac{K(z)}{k(z)}$  holomorphe en  $z_0$  et vérifiant  $g(z_0) = N$ . En remplaçant  $g(z)$  par son développement en série, on obtient que le seul terme singulier dans la série de Laurent de  $\frac{f'}{f}$  est  $\frac{N}{z - z_0}$ . Donc, **un zéro isolé de  $f$ , de multiplicité  $N$ , est un pôle simple de  $\frac{f'}{f}$ , de résidu  $N$ .**

**18.f** Exercice : **un pôle de  $f$ , d'ordre  $N$ , est un pôle simple de  $\frac{f'}{f}$ , de résidu  $-N$ .**

## 19 Petit Précis sur la Connexité

**19.a** Il est impossible de faire quoi que ce soit en Analyse Complexe si on ne maîtrise pas un minimum de Topologie Générale. En particulier il faut savoir ce qu'est un ouvert connexe.

**19.b** Soit  $E \subset \mathbf{C}$  quelconque. On dit que  $A \subset E$  est un ouvert de  $E$ , ou est ouvert dans  $E$ , ou encore est ouvert pour la topologie induite sur  $E$ , si il est de la forme  $U \cap E$  avec  $U$  un ouvert de  $\mathbf{C}$ . Les ouverts de  $E$  vérifient les propriétés suivantes :

- l'ensemble vide et  $E$  sont des ouverts,
- l'intersection de deux, ou plus généralement d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert,
- une union (finie, infinie dénombrable, voire infinie quelconque) d'ouverts est un ouvert.

Les fermés sont par définition les complémentaires des ouverts. Ils sont stables par union finie et par intersection quelconque. En toute généralité, un ensemble  $E$  (pas forcément inclus dans  $\mathbf{C}$ ) qui est muni d'un choix de parties vérifiant les trois axiomes ci-dessus, est dit être muni d'une topologie, ou être un ensemble, ou espace, topologique. Par exemple on peut déclarer que toutes les parties de  $E$  sont ouvertes. Ce n'est pas très intéressant ! Pour nous le plus intéressant ce sont  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$  avec la notion standard d'ouverts, et leurs sous-ensembles munis de la topologie induite.

**19.c** Lorsque  $E \subset \mathbf{C}$  est muni de la topologie induite, il n'est pas trop difficile de montrer qu'une application  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  (ou  $\mathbf{C}$ ) est continue sur  $E$  au sens de « à chaque fois que  $z = \lim z_n$ , avec  $z$  et tous les  $z_n$  dans  $E$ , alors  $f(z) = \lim f(z_n)$  » si et seulement si « pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}$ ,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $E$  ». C'est le job du Professeur de Topologie de répondre à toutes vos questions. Cela étant acquis, on dira donc en toute généralité qu'une application  $f : E \rightarrow F$  entre

deux espaces topologiques est continue si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert. Dans le cas d'espaces métriques on peut parler de limites à peu près comme dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , et la caractérisation de la continuité en termes de limites est valable. C'est le job du Professeur d'Espaces Métriques de répondre à toutes vos questions.

Pour  $E \subset \mathbf{C}$  muni de la topologie induite,  $B \subset E$  est un fermé de  $E$  si et seulement si il existe une écriture  $B = F \cap E$  avec  $F$  un fermé de  $\mathbf{C}$ . 19.d

**Dans le cas particulier** où  $E$  est lui-même ouvert dans  $\mathbf{C}$ , les ouverts de  $E$  c'est la même chose que les ouverts de  $\mathbf{C}$  qui sont inclus dans  $E$ . **Dans le cas particulier** où  $E$  est fermé dans  $\mathbf{C}$ , les fermés de  $E$  c'est la même chose que les fermés de  $\mathbf{C}$  qui sont inclus dans  $E$ . 19.e

L'ensemble vide et  $E$  sont des parties à la fois ouvertes et fermées. Nous dirons que l'espace topologique  $E$  est **connexe** si ce sont les seules. Cela équivaut à dire que si  $E = A \cup A'$  avec  $A \cap A' = \emptyset$  et  $A$  et  $A'$  tous deux ouverts de  $E$  alors soit  $A = E$  (et  $A' = \emptyset$ ) soit  $A' = E$  (et  $A = \emptyset$ ). 19.f

L'intervalle  $[0, 1]$ , muni de la topologie induite de  $\mathbf{R}$ , (ou de  $\mathbf{C}$  ce qui revient au même), est connexe. Faisons la preuve puisque cela est fondamental. Soit donc donnée une partition  $[0, 1] = A \cup A'$  avec  $A$  et  $A'$  ouverts (dans  $[0, 1]$ ). Supposons par exemple  $0 \in A$  (sinon on échange  $A$  et  $A'$ ) donc  $A$  non vide. Soit  $\alpha = \sup A$ . Comme pour toute borne supérieure il existe dans  $A$  une suite croissante  $(a_n)$ ,  $n \geq 1$ , avec  $\lim a_n = \alpha$ . Comme  $A$  est fermé (puisque  $A'$  est ouvert) on en déduit  $\alpha \in A$ . Supposons  $\alpha < 1$ . Comme  $A$  est ouvert il existe  $\delta > 0$  tel que  $[\alpha, \alpha + \delta] \subset A$ , ce qui contredit la définition de  $\alpha$  comme borne supérieure de  $A$ . Donc  $\alpha = 1$  et par conséquent  $1 \in A$ . Nous aurions pu faire tout ce raisonnement, pour chaque  $t \in ]0, 1]$  fixé, en remplaçant  $[0, 1]$  par  $[0, t]$ ,  $A$  par  $[0, t] \cap A$  et  $A'$  par  $[0, t] \cap A'$ . On aurait obtenu  $t \in A$ . Donc effectivement  $A = [0, 1]$ . 19.g

Compte tenu du résultat précédent vous montrerez que tout intervalle  $J$  de  $\mathbf{R}$ , fini ou infini, ouvert ou fermé à gauche ou à droite, est connexe. Mieux, un sous-ensemble (non vide)  $E$  de  $\mathbf{R}$  est **connexe si et seulement si c'est un intervalle** (les singletons comptent parmi les intervalles). Montrons que tout connexe est un intervalle. Supposons  $a, b \in E$  avec  $a < b$ . Supposons qu'il existe  $c \in ]a, b[$  avec  $c \notin E$ . Soit  $A = ]-\infty, c[ \cap E$  et  $A' = ]c, +\infty[ \cap E$ . Alors ils forment une partition de  $E$  en deux ouverts non vides ce qui contredit la connexité de  $E$ . Donc  $a, b \in E \implies [a, b] \subset E$ . Cette propriété caractérise les intervalles, je vous en laisse la rédaction. 19.h

On ne peut pas, mais alors pas du tout, faire la liste des connexes de  $\mathbf{C}$  comme on a fait pour  $\mathbf{R}$ ! Mais on peut assez bien comprendre le cas des ouverts connexes (on a aussi une caractérisation des fermés connexes, mais c'est très différent et je n'en parlerai pas ici). Soit  $z_0, z_1 \in \mathbf{C}$ . Un *chemin*  $\gamma$  allant de  $z_0$  à  $z_1$  est, par définition, une application **continue**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) avec  $\gamma(a) = z_0$ ,  $\gamma(b) = z_1$ . Le plus souvent on prend  $a = 0$ ,  $b = 1$ , mais ce n'est pas obligatoire. Le *support* du chemin est l'ensemble  $\gamma([a, b])$ . Il ne faut pas confondre le chemin et son support. J'écris parfois « chemin continu » mais par définition tous nos chemins sont continus. 19.i

**Proposition** : Soit  $z_0, z_1$  dans une partie  $E$  de  $\mathbf{C}$  tels qu'il existe un chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  les reliant et de support dans  $E$ . Soit  $A$  une partie à la fois ouverte et fermée de  $E$ , pour la topologie induite. Si  $z_0 \in A$  alors on a aussi  $z_1 \in A$ . 19.j

Preuve : Le sous-ensemble  $X = \gamma^{-1}(A)$  de  $[a, b]$  et son complémentaire  $X' = \gamma^{-1}(E \setminus A)$  dans  $[a, b]$  sont tous deux des ouverts de  $[a, b]$ , comme images réciproques d'ouverts de  $E$ , et ils forment une partition de  $[a, b]$ . Par connexité de  $[a, b]$  l'un des deux est vide.  $X$  contient  $a$  puisque  $\gamma(a) = z_0 \in A$ , donc  $X' = \emptyset$  et  $X = [a, b]$ . Mais alors  $\gamma(b) = z_1 \in A$ .

Dorénavant  $U$  est un ouvert de  $\mathbf{C}$ . Soit  $z_0 \in U$  fixé, et définissons  $U_0 \subset U$  comme étant 19.k

l'ensemble de tous les  $z_1 \in U$  que l'on peut rejoindre à  $z_0$  par un chemin de support dans  $U$ . Cet ensemble  $U_0$  est ouvert : en effet si  $z_1 \in U_0$ , comme  $U$  est ouvert il existe  $\delta > 0$  tel que  $D(z_1, \delta) \subset U$ . Soit  $z_2$  dans ce disque et  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  allant de  $z_0$  à  $z_1$ . On peut prolonger  $\gamma$  en le définissant sur  $[b, b + 1]$  par  $\gamma(t) = z_1 + (t - b)(z_2 - z_1)$ . Cela définit un chemin (continu!) dans  $U$  allant de  $z_0$  à  $z_2$ . Donc  $z_2 \in U_0$  et  $U_0$  est bien ouvert. Mais le complémentaire de  $U_0$  dans  $U$  est aussi ouvert dans  $U$ . En effet soit  $z_1 \notin U_0$  dans  $U$  et soit  $\delta > 0$  avec  $D(z_1, \delta) \subset U$ . Si il existait  $z_2$  dans ce disque que l'on pouvait atteindre par un chemin  $\gamma$  venant de  $z_0$  on pourrait prolonger ce chemin pour aller en ligne droite de  $z_2$  au centre  $z_1$  du disque ce qui contredirait l'hypothèse  $z_1 \notin U_0$ . Donc  $D(z_1, \delta)$  est entièrement inclus dans le complémentaire de  $U_0$ . Ce dernier est donc ouvert. En conclusion  $U_0$  est bien à la fois ouvert et fermé dans  $U$ . Comme  $U$  est ouvert,  $U_0$  est un ouvert de  $\mathbf{C}$ .

**19.1** En combinant les deux paragraphes on obtient que l'on peut caractériser  $U_0$  comme étant le plus petit sous-ensemble de  $U$  contenant  $z_0$  et à la fois ouvert et fermé dans  $U$ .

**19.m** Montrons que  $U_0$  est connexe. Soit  $V_0$  le complémentaire dans  $U$  de  $U_0$ , qui est aussi ouvert. Supposons  $U_0 = A \cup A'$  avec  $z_0 \in A$  (sinon on échange  $A$  et  $A'$ ) et  $A$  et  $A'$  ouverts dans  $U_0$  (donc aussi dans  $U$ ). Alors  $U = A \cup A' \cup V_0$  est une partition de  $U$  en trois ouverts qui prouve que  $A$  est fermé puisque son complémentaire dans  $U$  est l'ouvert  $A' \cup V_0$ . L'ensemble  $A$  est à la fois ouvert et fermé dans  $U$  et contient le point  $z_0$ . Par ce qui a été prouvé plus haut on a  $U_0 \subset A$  et donc en fait  $A = U_0$  et  $A' = \emptyset$ . Donc  $U_0$  est connexe.

**19.n** Supposons  $U$  connexe. Comme  $U_0 \subset U$  est ouvert et de complémentaire ouvert, et est non vide, c'est que  $U_0 = U$ . Réciproquement on vient de voir que  $U_0$  est connexe ; donc si  $U_0 = U$  alors  $U$  est connexe. Conclusion : **Un ouvert de  $\mathbf{C}$  est connexe si et seulement si on peut relier tout point donné à tout autre par un chemin continu ne sortant pas de l'ouvert.**

**19.o** Pour un ouvert  $U$  général écrivons  $z \sim z'$  si on peut les relier par un chemin continu inclus dans  $U$ . Cela définit une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence formeront donc une partition de  $U$ . La classe d'équivalence de  $z_0$  est  $U_0$ , donc connexe. Donc chaque classe d'équivalence est un sous-ouvert connexe de  $U$ . On les appelle **composantes connexes** de l'ouvert  $U$ . Ce sont des ouverts, qui comme leur nom l'indique, sont connexes, et sont aussi fermés (dans  $U$ ). L'ouvert  $U$  est partitionné en ses composantes connexes, deux points étant dans la même composante si et seulement si on peut les relier par un chemin dont le support est entièrement inclus dans  $U$ . Tout ouvert-fermé non vide de  $U$ , est par ce qui précède une union de telles classes d'équivalence ; il est connexe si et seulement si il coïncide avec l'une des composantes connexes.

**19.p** Pour un espace topologique  $E$  général, on procède autrement. On commence par observer qu'une union quelconque de connexes ayant un même point en commun est un ensemble connexe : **prouvez-le!**. Avec cela il est facile de voir que l'on définit une relation d'équivalence en écrivant  $P \sim P'$  si il existe un connexe contenant à la fois  $P$  et  $P'$ . La classe d'équivalence de  $P$  est l'union de tous les connexes contenant  $P$ , qui est d'ailleurs LE plus gros connexe contenant  $P$ . Ce sont ces classes d'équivalence que l'on appelle les composantes connexes de l'ensemble topologique  $E$ . Lorsque  $E = U$  est un ouvert de  $\mathbf{C}$  cela est compatible avec la définition précédente. En effet soit  $z_0 \in U$  et  $U_0$  sa composante au sens précédent. Le complémentaire  $V_0$  est ouvert donc, si un connexe  $X \subset U$  contient  $z_0$ , de  $X = (X \cap U_0) \cup (X \cap V_0)$  on déduit  $X = X \cap U_0$ , c'est-à-dire  $X \subset U_0$ . Ainsi  $U_0$  est bien le plus gros connexe (de  $U$ ) contenant  $z_0$ .

**19.q** On définit l'adhérence  $\bar{X}$  d'une partie  $X$  de  $E$  comme étant l'intersection de tous les fermés contenant  $X$ , qui est donc en fait le plus petit fermé contenant  $X$ . Il est facile (exercice!) de montrer que l'adhérence d'un connexe est connexe. Lorsque  $X$  est une composante connexe de  $E$  il est déjà le plus gros possible. Donc les composantes connexes de  $E$  sont des fermés de  $E$ . Si il n'y

a qu'un nombre fini de composantes connexes ce sont (exercice!) aussi des ouverts; mais sinon ce n'est pas nécessairement le cas, contrairement à ce qui passe lorsque  $E$  est un ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}$ .

Il est facile de prouver que l'image  $f(E) \subset F$  par une application continue  $f : E \rightarrow F$  d'un connexe est un connexe. En un sens c'est une généralisation du Théorème des Valeurs Intermédiaires.

19.r

Soit en particulier  $E$  un connexe et  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  une application continue qui a la propriété  $f(E) \subset \mathbf{Q}$ . Comme  $E$  est connexe,  $f(E) \subset \mathbf{R}$  est un intervalle. Donc en fait  $f$  est **constante**.

19.s

On aura besoin de choses plus simples du type suivant : soit  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbf{C}$  et  $f$  une application continue sur  $U$  qui ne prend que des valeurs entières. Alors  $f$  est en fait constante. En effet comme on a une partition du connexe  $U$  en l'union des ouverts  $f^{-1}(\lfloor n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \rfloor)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , c'est que  $U$  coïncide avec l'un d'entre eux. Ou alors vous reliez  $z_0$  fixé dans  $U$  à un point quelconque  $z_1$  par un chemin  $\gamma$  et vous appliquez le théorème des valeurs intermédiaires à  $f \circ \gamma$ .

19.t

Pour finir, **Exercice** : soit  $U \subset \mathbf{C}$  un ouvert connexe et  $z_0 \in U$ . Montrer que pour tout  $z_1 \in U$  on peut trouver une ligne continue partant de  $z_0$  et allant en  $z_1$  et composée d'un nombre fini de segments horizontaux et verticaux. Indication : montrer que les points  $z_1$  avec cette propriété forment une partie à la fois ouverte et fermée de  $U$ . En déduire alors que l'on peut aussi aller de  $z_0$  à  $z_1$  dans  $U$  par un chemin de classe  $C^\infty$  (ind. : à quoi ressemblent grosso modo les chemins paramétrés  $t \mapsto (\pm \epsilon e^{-\frac{1}{1-t}}, \pm \epsilon e^{-\frac{1}{t}})$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ?) Toute question éventuelle sera à poser aux Professeurs de Topologie.

19.u

## 20 Zéros (II) : Théorème de l'Identité Analytique

Le théorème en question s'appelle aussi **Principe du Prolongement Analytique**, mais comme on ne parlera pas vraiment de prolongement analytique dans ce cours, je préfère éviter cette dénomination. On peut aussi l'appeler, comme je le faisais encore l'année dernière, Théorème de l'Unicité Analytique. Il s'agit là de l'un des théorèmes très significatifs de l'Analyse Complexe.

20.a

Soit  $U$  un ouvert **CONNEXE**. Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions holomorphes sur  $U$ .

20.b

**Théorème** : *si on a une suite de points distincts  $z_n \in U$ , possédant une limite dans  $U$ , et tels que  $f(z_n) = g(z_n)$  pour tout  $n$ , alors  $f(z) = g(z)$  partout dans  $U$ .*

Une façon totalement équivalente de formuler ce théorème est la suivante : *si l'ensemble des points de  $U$  où  $f$  et  $g$  coïncident possède un point d'accumulation dans  $U$  alors  $f = g$  partout.*

20.c

Pour la preuve, on remplace  $f$  par  $f - g$  et on veut montrer  $f = 0$  sur  $U$  dès que  $f(z_n) = 0$  pour des  $z_n$ ,  $n \geq 1$  distincts, ayant une limite  $z$  dans  $U$ . Comme les  $z_n$  sont distincts entre eux, au plus l'un d'entre eux coïncide avec  $z$  et quitte à le laisser tomber on peut donc supposer  $z_n \neq z$  pour tout  $n$ . Dans tout disque  $D(z, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , il y a au moins un (en fait tous sauf un nombre fini des)  $z_n$ , et donc au moins un zéro de  $f$  distinct de  $z$ . Par 18.c et par 18.b  $f$  est identiquement nulle sur tout disque  $D(z, \rho) \subset U$ . Soit alors  $A \subset U$  l'ensemble des points  $w \in U$  tel qu'il existe un disque de rayon non nul centré en  $w$  et sur lequel  $f = 0$  identiquement. Cet ensemble (non vide)  $A$  est ouvert (clair) et il est fermé (clair; fermé dans  $U$  bien sûr). Bon, ok, j'explique le deuxième "clair", le premier étant vraiment trop clair. Soit  $(w_n)_{n \geq 1}$  une suite dans  $A$  ayant une limite  $w$  dans  $U$ . Si l'un des  $w_n$  coïncide avec  $w$  alors  $w \in A$ . Sinon, il y a dans tout voisinage non vide de  $w$  au moins un point distinct de  $w$  (en fait, une infinité) qui est un zéro de  $f$  et ainsi par 18.c  $w$  est un zéro de multiplicité infinie, et  $f$  s'annule identiquement sur un (tout) disque centré en

20.d

$w$  et inclus dans  $U$ , c'est-à-dire,  $w \in A$ . Donc  $A$  est aussi fermé<sup>17</sup> et par connexité de  $U$ ,  $A = U$ . Mais alors  $f = 0$  identiquement sur  $U$ .

**20.e** **Théorème des Zéros Isolés :** *soit  $f$  une fonction holomorphe sur un ouvert connexe. Si  $f$  n'est pas identiquement nulle alors l'ensemble des zéros de  $f$  est composé de point isolés et n'a pas de point d'accumulation dans  $U$ .*

En réalité il serait plus efficace de dire seulement “...l'ensemble des zéros n'a pas de point d'accumulation” car la partie “points isolés” en découle! Mais comme les gens insistent pour parler de “Zéros Isolés”, je suis obligé de suivre. Il pourrait paraître pléonastique de rajouter “n'a pas de point d'accumulation” puisque par continuité de  $f$  tout tel point d'accumulation devrait être un zéro et donc devrait être isolé par le début de la phrase et donc ne pourrait pas être un point d'accumulation comme envisagé à la fin de la phrase! Mais dire simplement “les zéros forment un ensemble composé de points isolés” est un peu dangereux car pour qu'un tel ensemble soit vraiment le lieu des zéros d'une fonction holomorphe  $f$  il faut lui imposer d'être fermé (dans  $U$ ). Donc il est important de se rappeler l'énoncé sous la forme plus complète plus haut, ou de manière équivalente “dans un ouvert connexe, les zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle forment un ensemble fermé composé de points isolés” (on parle aussi d'ensemble fermé discret, car la topologie induite est discrète, c'est-à-dire triviale puisque les singletons sont des ouverts. J'espère que vous suivez). En ce qui concerne la preuve, il n'y a rien à faire, ce n'est qu'une formulation trivialement équivalente du Théorème de l'Identité Analytique.

**20.f** Si on prend un compact  $K \subset U$  alors  $f$ , si elle n'est pas identiquement nulle sur  $U$  (supposé connexe) ne peut avoir qu'un nombre fini de zéros dans  $K$ . En effet, sinon par compacité de  $K$  on pourrait former une suite convergente de zéros distincts donc un point d'accumulation dans  $K$  donc dans  $U$ .

**20.g** C'est un théorème assez avancé (de Weierstrass) que tout ensemble fermé (dans  $U$ ) discret est le lieu des zéros d'une fonction analytique sur l'ouvert  $U$ . Dans la même veine<sup>18</sup> (théorème de Mittag-Leffler<sup>19</sup>) si on se donne dans l'ouvert  $U$  un nombre fini ou infini de points, sans point d'accumulation, et si on impose des parties principales en chacun des ces points, alors il existe une fonction méromorphe sur  $U$  ayant les parties principales données. Comme corollaire de ces choses, toute fonction méromorphe sur un ouvert  $U$  est le quotient de deux fonctions holomorphes.

## 21 Formule de la Moyenne et Principe du Maximum

**21.a** Soit  $f$  holomorphe sur le disque  $D(z_0, \rho)$  et soit  $r \in ]0, \rho[$ . On sait alors que  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  avec  $c_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta$ . En particulier

$$f(z_0) = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

C'est ce que l'on appelle la **formule de la moyenne**.

**21.b** **Fonctions harmoniques :** *on dit qu'une fonction  $f$  sur l'ouvert  $U$  est harmonique*

17. cela se voit aussi en disant que  $A$  est l'intersection des fermés  $\{z \in U \mid f^{(n)}(z) = 0\}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .

18. c'est sûr que Weierstrass et Mittag-Leffler démontraient leurs résultats au moins pour  $U = \mathbf{C}$ , et il faudrait que je vérifie si ils le faisaient pour  $U$  général (c'est plus dur techniquement). Sans doute.

19. Mittag-Leffler 1846–1927

si elle est continue et si pour tout  $z_0 \in U$  il existe  $\eta > 0$  avec  $D(z_0, \eta) \subset U$ , et  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt$  pour tout  $r < \eta$ .

Si  $f$  est holomorphe non seulement  $f$  mais aussi  $u = \operatorname{Re}(f)$  et  $v = \operatorname{Im}(f)$  sont des fonctions harmoniques. Réciproquement, on prouve, c'est un théorème relativement avancé, pour  $U$  un disque, que si la fonction à valeurs réelles  $u$  est harmonique sur  $U$ , alors il existe  $f$  holomorphe sur ce disque avec  $u = \operatorname{Re}(f)$ . Pour les ouverts  $U$  plus généraux que les disques, cela n'est valable que sous une hypothèse supplémentaire :  $U$  doit être simplement connexe. On reviendra sur ce "simplement connexe" qui exclut par exemple l'ouvert  $1 < |z| < 2$ . 21.c

Compte tenu du paragraphe précédent si  $u$  est harmonique alors la formule de la moyenne vaut pour tous les cercles  $\{z, |z - z_0| = r\}$  tels que  $\{z, |z - z_0| \leq r\} \subset U$ . En effet on peut supposer  $u$  à valeurs réelles et alors sur tout disque  $D(z_0, \rho) \subset U$ ,  $\rho > r$  il existe une fonction holomorphe  $f$  telle que  $u = \operatorname{Re}(f)$  sur ce disque. La formule de la moyenne vaudra pour  $f$  et le cercle  $\{z, |z - z_0| = r\}$ , donc elle vaudra pour  $u = \operatorname{Re}(f)$  et ce même cercle. 21.d

**Principe du Maximum :** Soit  $U$  un ouvert borné, et soit  $f$  une fonction continue sur  $K = \overline{U}$ , et harmonique sur  $U$ . Soit  $\partial U = K \setminus U$  le "bord" de  $U$ . Soit  $M$  le supremum de la fonction continue  $|f|$  sur le compact  $K$  ( $M = \sup_K |f| < \infty$ ). 21.e

1. il existe un point  $z$  du bord  $\partial U$  avec  $|f(z)| = M$ .
2. supposons  $U$  connexe. Alors, soit on a l'inégalité stricte  $|f(z)| < M$  pour tout  $z \in U$ , soit  $f$  est constante sur  $U$ .

Le bord  $\partial U = K \setminus U = K \cap (\mathbf{C} \setminus U)$  est l'intersection d'un compact et d'un fermé, il est donc compact. Notons  $N = \sup_{\partial U} |f|$ . On a  $N \leq M$ . Supposons  $N < M$  et soit  $F = \{z \in K \mid |f(z)| = M\}$ . L'ensemble (non vide!)  $F$  est fermé dans le compact  $K$ , il est donc compact. On peut donc prendre  $z_0 \in F$  tel que  $|z_0|$  soit maximal. On ne peut pas avoir  $z_0 \in \partial U$  car on a supposé  $N < M$ . Donc  $z_0 \in U$ . Prenons  $r > 0$  suffisamment petit de sorte que le disque fermé de centre  $z_0$  et de rayon  $r$  soit inclus dans  $U$  et que la formule de la moyenne vaille pour le cercle  $|z - z_0| = r$ . On a : 21.f

$$\begin{aligned} f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt &\implies |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{it})| dt \\ &\implies 0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(z_0 + r e^{it})| - |f(z_0)|) dt \end{aligned}$$

Maintenant lorsque l'on a une fonction continue  $g(t)$  avec  $\forall t, g(t) \leq 0$  alors  $\int_0^{2\pi} g(t) dt < 0$  sauf si  $g$  est identiquement nulle (pourquoi??). Donc pour tout  $t \in [0, 2\pi]$  on a  $|f(z_0 + r e^{it})| = |f(z_0)|$ . Donc tous les points du cercle centré en  $z_0$  et de rayon  $r$  sont aussi dans l'ensemble  $F$  : mais parmi eux il y en a forcément un qui vérifie  $|z| > |z_0|$ . Contradiction ! De cette façon on a prouvé  $N = M$  : le maximum est atteint sur le bord.

Supposons maintenant qu'il soit aussi atteint en un point intérieur  $z_0$ . Soit  $A$  l'ensemble de ces points de  $U$  en lesquels  $|f|$  vaut  $M$ . Il est non vide par hypothèse. Il est fermé dans  $U$  car  $|f|$  est une fonction continue. Je prouve qu'il est ouvert dans  $U$  : il suffit de reprendre exactement la méthode utilisée précédemment à partir de la formule de la moyenne pour voir que pour tout  $r > 0$  suffisamment petit tous les points du cercle de rayon  $r$  centré en  $z_0 \in A$  sont aussi dans  $A$ . Donc  $A$  contient un petit disque ouvert  $D(z_0, r)$ . Donc  $A$  est un ouvert. Maintenant, et seulement maintenant on invoque l'hypothèse que  $U$  est connexe. 21.g

On en déduit que  $A$  qui n'est pas vide est égal à  $U$  tout entier. Donc  $|f| = M$  partout.

**21.h** On n'a pas tout-à-fait terminé : on veut montrer que  $f$  elle-même est constante. On peut supposer  $M > 0$ , car sinon  $f$  est identiquement nulle, donc constante. Prenons un  $z_0 \in U$  quelconque, et remplaçons  $f$  par la fonction  $\frac{f}{f(z_0)}$  qui vérifie aussi la formule de la moyenne, de sorte que l'on peut supposer  $f(z_0) = M = 1$ . La fonction  $\operatorname{Re}(f)$  hérite de  $f$  la propriété de la moyenne. Comme  $|\operatorname{Re}(f)| \leq |f| = 1$ , et  $|\operatorname{Re}(f(z_0))| = 1$  la fonction  $|\operatorname{Re}(f)|$  atteint son maximum en le point intérieur  $z_0$ . Donc  $|\operatorname{Re}(f)|$  est constante. Donc  $\operatorname{Re}(f)$  ne peut prendre comme valeur que  $-1$  ou  $+1$ . Comme  $U$  est connexe, et que  $\operatorname{Re}(f)$  est une fonction continue, elle est en fait constante, partout égale dans  $U$  à  $+1$ . On a ainsi à la fois  $|f| = 1$  et  $\operatorname{Re}(f) = 1$ . Cela prouve que  $f$  est partout dans  $U$  égale à  $1$ . Donc  $f$  est constante, ce qu'il fallait démontrer.

## 22 Ouverts étoilés et primitives

**22.a** Un ouvert  $U$  est dit **étoilé** si il existe  $z_0 \in U$  tel que pour tout  $z \in U$  le segment  $[z_0, z]$  est entièrement inclus dans  $U$ . C'est donc une notion plus générale que la **convexité** : un ensemble est dit convexe si il contient le segment  $[z_0, z_1]$  dès qu'il contient les extrémités  $z_0$  et  $z_1$ . Pour un ouvert étoilé on demande seulement qu'il existe un certain  $z_0$  tel que cela soit vrai pour tous les  $z_1$ . Un disque, l'intérieur d'un rectangle, l'intérieur d'un triangle, ou encore un demi-plan sont convexes donc aussi étoilés ; l'ouvert  $\Omega = \mathbf{C} \setminus ]-\infty, 0]$  n'est pas convexe mais il est étoilé (en prenant  $z_0 = 1$ ) ; l'ouvert  $1 < |z| < 2$  n'est ni convexe ni même étoilé (cependant il est connexe). Tout ouvert étoilé est connexe.

**22.b** **Théorème :** *soit  $U$  un ouvert étoilé. Toute fonction holomorphe sur  $U$  admet une primitive holomorphe sur  $U$ .*

Preuve : on va utiliser dans cette preuve un théorème de dérivabilité d'intégrales à paramètres que vous êtes censés connaître. Soit  $U$  étoilé par rapport au point  $z_0$  et soit  $f$  une fonction holomorphe sur l'ouvert  $U$ . Définissons  $g$  par la formule

$$g(z) = \int_0^1 (z - z_0) f(z_0 + t(z - z_0)) dt .$$

La fonction des trois variables réelles  $x, y, t : F(x, y, t) = (z - z_0) f(z_0 + t(z - z_0))$  (avec  $z = x + iy$ ) admet pour  $y$  et  $t$  fixés une dérivée partielle en  $x$  qui est continue en le triplet  $(x, y, t) : \frac{\partial}{\partial x} F(x, y, t) = f(z_0 + t(z - z_0)) + (z - z_0) \cdot f'(z_0 + t(z - z_0)) \cdot t$ . Donc la dérivée partielle  $\frac{\partial}{\partial x} g(x + iy)$  existe, et vaut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g(x + iy) &= \int_0^1 \left( f(z_0 + t(z - z_0)) + (z - z_0) \cdot f'(z_0 + t(z - z_0)) \cdot t \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left( f(z_0 + t(z - z_0)) \cdot t \right) dt \\ &= f(z) \end{aligned}$$

Un calcul semblable prouve  $\frac{\partial}{\partial y} g(x + iy) = i f(x + iy)$ . Donc  $g(x + iy)$  a des dérivées partielles continues sur l'ouvert  $U$  qui vérifient les équations de Cauchy-Riemann. Donc  $g$  est une fonction holomorphe et  $g' = \frac{\partial}{\partial x} g = f$ .

**22.c** **Théorème :** *soit  $U$  un ouvert étoilé. Toute fonction holomorphe sur  $U$  qui n'a pas de*

zéro peut s'écrire comme l'exponentielle d'une autre fonction holomorphe.

Preuve : soit  $f$  ne s'annulant pas sur l'ouvert étoilé  $U$ . La fonction  $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$  est donc holomorphe sur  $U$  et par le théorème précédent admet une primitive  $g(z)$ . Si l'on calcule la dérivée de  $f(z) \exp(-g(z))$  on trouve  $(f'(z) - f(z)g'(z)) \exp(-g(z))$  ce qui donne zéro identiquement. Donc  $f(z) \exp(-g(z))$  est une constante  $C$  (l'ouvert étoilé  $U$  est connexe), nécessairement non nulle, et  $\exp(g(z)) = \frac{1}{C}f(z)$ . On choisit alors  $w$  avec  $e^w = C$  et l'on remplace  $g(z)$  par  $g_1(z) = g(z) + w$ . La fonction  $g_1$  est holomorphe et  $\exp(g_1) = f$  sur  $U$ .

## 23 Triangles et Théorème de Morera

Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un disque  $D(z_0, \rho)$ . Écrivons  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$  et posons  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$ . Le rayon de convergence reste au moins égal à  $\rho$  et on a  $g'(z) = f(z)$ . Donc toute fonction holomorphe admet, sur tout disque, une primitive (au sens de la dérivation complexe). Mais on le savait déjà puisque le disque est étoilé. 23.a

Supposons donnés trois points  $z_0, z_1, z_2$  formant les sommets d'un triangle  $T = \{z = u_0 z_0 + u_1 z_1 + u_2 z_2, u_0 + u_1 + u_2 = 1, 0 \leq u_j \leq 1\}$ . On suppose  $\text{Im} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} > 0$  ce qui signifie que les sommets sont numérotés dans le sens direct. Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $T$  et posons par définition 23.b

$$\begin{aligned} \int_{\partial T} f(z) dz &= \int_0^1 f(z_0 + t(z_1 - z_0))(z_1 - z_0) dt \\ &\quad + \int_0^1 f(z_1 + t(z_2 - z_1))(z_2 - z_1) dt \\ &\quad + \int_0^1 f(z_2 + t(z_0 - z_2))(z_0 - z_2) dt \end{aligned}$$

Comme  $f$  est holomorphe sur  $T$  il existe en fait un triangle  $T'$  avec  $T$  dans son intérieur et tel que  $f$  est définie et holomorphe dans l'intérieur de  $T'$ . 23.c

Justif. : soit  $U$  un ouvert contenant le triangle  $T$  et sur lequel  $f$  est holomorphe. Supposons qu'il existe des suites  $w_n \notin U$  et  $z_n \in T$  avec  $|z_n - w_n| \rightarrow 0$ . On peut supposer en passant à une suite extraite que  $z = \lim z_n$  existe dans  $T$ . Mais alors comme  $z \in U$  qui est ouvert il existe  $\eta > 0$  avec  $w \notin U \implies |z - w| \geq \eta$ . Contradiction puisque  $|z - w_n| \rightarrow 0$ . Donc de telles suites  $(z_n)$  et  $(w_n)$  n'existent pas, ce qui veut dire qu'il existe  $\delta > 0$  avec  $|z - w| \geq \delta$  lorsque  $z \in T$  et  $w \notin U$ , ou encore  $(z \in T)$  et  $|z - w| < \delta \implies w \in U$ . Prenez alors  $Z = \frac{1}{3}(z_0 + z_1 + z_2)$  et  $z'_0 = Z + (1 + \epsilon)(z_0 - Z)$  etc. . . Pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, le triangle  $T'$  de sommets  $z'_0, z'_1, z'_2$  convient, compte tenu de ce qui précède et modulo des explications que vous vous ferez un plaisir de fournir.

Comme l'intérieur de  $T'$  est étoilé, il existe une primitive holomorphe  $g$  de  $f$  et on peut écrire :

$$\int_{\partial T} f(z) dz = (g(z_1) - g(z_0)) + (g(z_2) - g(z_1)) + (g(z_0) - g(z_2)) = 0.$$

En effet  $g(z_1) - g(z_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(z_0 + t(z_1 - z_0)) dt = \int_0^1 (z - z_0) f(z_0 + t(z - z_0)) dt$ , etc. . . Nous venons de démontrer le Théorème de Cauchy-Goursat pour les triangles! Notre preuve repose sur l'existence de primitives dans les ouverts étoilés, elle-même prouvée en utilisant un théorème de dérivabilité d'intégrales à paramètres.

D'autres méthodes existent. Par exemple, subdivisons  $T$  en l'union de quatre triangles 23.d

en considérant les milieux des trois segments du bord de  $T$ , et itérons. On peut vérifier en l'écrivant que  $\int_{\partial T} f(z) dz$  est égale à la somme des quatre intégrales pour les quatre sous-triangles. Après un nombre suffisant d'étapes chaque sous-triangle aura un diamètre suffisamment petit pour être inclus dans un disque contenu dans  $U$  (cela demande une justification du style de celle donnée dans **23.c** en petits caractères). Sur chacun de ces petits disques  $f$  admet une primitive simplement en raisonnant sur la série entière. Donc l'intégrale sur le bord de chaque petit triangle est nulle. En faisant la somme des toutes les intégrales on obtient que celle sur le bord du grand triangle est nulle.

**23.e** Finalement le plus simple, car faisant le moins appel à des notions comme la compacité, ou la dérivabilité d'intégrales par rapport à un paramètre, c'est sûrement de recopier la preuve donnée en section **14.a** pour les rectangles et de l'adapter au cas des triangles. Passons à une « réciproque » des théorèmes de Cauchy-Goursat :

**23.f** **Théorème de Morera**<sup>20</sup> : soit  $f$  une fonction continue sur un ouvert  $U$ . Si  $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$  pour tout triangle inclus entièrement (avec son intérieur) dans  $U$  alors  $f$  est holomorphe. Preuve : l'holomorphie est une propriété locale, on peut d'emblée supposer que l'ouvert  $U$  est un disque, et sans perte de généralité on peut le supposer centré en l'origine. Soit  $(x, y)$  dans ce disque je prétends alors que l'on a l'identité :

$$\int_0^x f(t) dt + i \int_0^y f(x + iu) du = i \int_0^y f(iu) du + \int_0^x f(t + iy) dt$$

Cette identité n'est pas autre chose que la propriété  $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$  pour le rectangle de sommets  $0, x, x + iy$  et  $iy$ , et comme ce rectangle peut être vu comme l'union des deux triangles de sommets  $0, x$  et  $x + iy$  d'une part, et  $0, x + iy$  et  $iy$  d'autre part, on a bien  $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$  à cause de l'hypothèse faite sur  $f$ . Notons  $g(x + iy)$  la fonction ainsi définie. Par la formule de gauche il est évident que  $\frac{\partial}{\partial y} g$  existe et vaut  $if(x + iy)$ . Par la formule de droite il est évident que  $\frac{\partial}{\partial x} g$  existe et vaut  $f(x + iy)$ . Donc les deux dérivées partielles  $\frac{\partial g}{\partial x}$  et  $\frac{\partial g}{\partial y}$  existent, sont des fonctions continues et vérifient l'Équation de Cauchy-Riemann  $\frac{\partial g}{\partial y} = i \frac{\partial g}{\partial x}$ . Donc  $g$  est une fonction holomorphe. Mais alors  $g'$  est aussi une fonction holomorphe. Et  $g' = \frac{\partial g}{\partial x} = f$ . Donc  $f$  est une fonction holomorphe.

**23.g** On remarque que dans la preuve précédente on n'a que très peu utilisé l'hypothèse d'annulation pour les triangles. Notre preuve permet d'affirmer : si  $f$  est continue sur l'ouvert  $U$  et si l'intégrale de  $f$  sur le bord de tout rectangle inclus dans  $U$  et aux côtés parallèles aux axes est nulle, alors  $f$  est holomorphe. C'est un énoncé plus commode car il fait des hypothèses plus faibles, mais pour des raisons que j'ignore les gens sont sentimentalement très attachés à l'énoncé du théorème de Morera avec des triangles arbitraires.

## 24 Limites uniformes de fonctions holomorphes

**24.a** Il me faut bien remplir un peu plus cette page 36 mais je ne veux pas non plus déborder ce qui semble constituer une limite naturelle.

**24.b** **Théorème** : soit  $(f_n)$  une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert  $U$ , qui converge uniformément vers  $f$ . Alors  $f$  est holomorphe.

Preuve : tout d'abord  $f$  est continue, comme limite uniforme de fonctions continues. Ensuite

---

20. Morera 1856–1907

pour tout segment  $[z_0, z_1] \subset U$  :

$$\int_0^1 f(z_0 + t(z_1 - z_0))(z_1 - z_0) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(z_0 + t(z_1 - z_0))(z_1 - z_0) dt$$

par convergence uniforme. Donc pour tout triangle  $T$  entièrement inclus dans  $U$  :  $\int_{\partial T} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial T} f_n(z) dz = 0$ . Il en résulte que  $f$  est holomorphe par le théorème de Morera.

On n'a pas utilisé  $f_n \Rightarrow_U f$  mais seulement  $f_N \Rightarrow_K f$  sur tout compact  $K \subset U$ . Le théorème de Weierstrass affirme que sous cette hypothèse on a également  $f'_N \Rightarrow_K f'$  sur tout compact  $K \subset U$ .<sup>21</sup> 24.c

## 25 Intégrales le long de chemins

Pour nous, un **chemin** sera une application continue  $\gamma$  d'un intervalle réel  $[a, b]$  vers  $\mathbf{C}$ , de classe  $C^1$  par morceaux. On ne doit pas confondre le chemin  $\gamma$  et l'ensemble  $\gamma([a, b]) \subset \mathbf{C}$  que l'on appellera *support* de  $\gamma$ . Le point de départ est  $\gamma(a)$ , le point d'arrivée  $\gamma(b)$ . Lorsque ces deux points sont identiques on dit que l'on a un **lacet**. 25.a

Deux chemins  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbf{C}$  et  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbf{C}$  sont dits équivalents par reparamétrisation si il existe une application  $\psi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ , continue et de classe  $C^1$  par morceaux avec  $\psi' > 0$  (en les  $t$  où la dérivée à gauche diffère de celle à droite on les veut toutes deux positives strictement), avec  $\psi(a_1) = a_2$ ,  $\psi(b_1) = b_2$  et  $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \psi$ . Il s'agit effectivement d'une relation d'équivalence sur les chemins. 25.b

Si l'on a un chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ , alors le chemin défini par la formule  $\gamma_1(t) = \gamma(a+b-t)$ , est dit être obtenu de  $\gamma$  par un renversement du sens de parcours. 25.c

Un chemin est dit **régulier** si  $\gamma'(t) \neq 0$  pour tout  $t$  (remarque semblable à la précédente aux points où les dérivées à droite et à gauche diffèrent), et il est dit **simple** si  $\gamma(t) = \gamma(u)$  n'est possible pour  $t < u$  que si  $t = a$  et  $u = b$ . Un chemin simple est aussi appelé un **arc de Jordan** et un lacet simple est appelé un **contour (fermé) de Jordan**. 25.d

Lorsque l'on a un chemin  $\gamma$ , l'expression  $\gamma'(t)$  peut être vue en tant que nombre complexe et alors  $|\gamma'(t)|$  désigne son module ; on peut aussi visualiser  $\gamma'(t)$  comme un vecteur vitesse  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  avec  $v_x = x'(t)$ ,  $v_y = y'(t)$  en ayant noté  $x(t) = \operatorname{Re}(\gamma(t))$  et  $y(t) = \operatorname{Im}(\gamma(t))$ . Alors  $|\gamma'(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  coïncide avec la norme  $\|\vec{v}(t)\|$  du vecteur vitesse à l'instant  $t$ . On définira la **longueur** du chemin  $\gamma$  par la formule : 25.e

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \|\vec{v}(t)\| dt$$

Cette longueur se comporte additivement lorsque l'on met des chemins bout-à-bout. Elle possède une importante propriété : **elle est invariante par reparamétrisation (et aussi par changement de sens de parcours)**. La vérification est laissée en exercice.

Lorsque l'on a une fonction  $F(x, y)$  définie sur le support de  $\gamma$  et continue, alors la fonction composée  $F(x(t), y(t))$  est une fonction continue et donc l'intégrale de Riemann  $\int_a^b F(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$  existe. On la notera  $\int_\gamma F(x, y) ds$ , de sorte que  $ds$  représente  $|\gamma'(t)| dt = \|\vec{v}(t)\| dt$  et est appelé **élément d'arc**. Cette notion est invariante par reparamétrisation de  $\gamma$ . On a la formule  $L_\gamma = \int_\gamma ds$ . 25.f

Considérons  $\phi(t) = \int_a^t |\gamma'(v)| dv$ . La fonction  $\phi$  est croissante, continue, de classe  $C^1$  par 25.g

21. une démonstration est disponible sur le site web de l'auteur, cours de l'année 2005/2006.

morceaux. Si on suppose le chemin régulier, c'est-à-dire  $|\gamma'(t)| > 0$  pour tout  $t$ , alors  $\phi$  est strictement croissante, et établit une bijection de  $[a, b]$  vers  $[0, L_\gamma]$  dont la réciproque est elle aussi continue et de classe  $C^1$  par morceaux. Notons cette réciproque  $\psi$ . Soit  $\gamma_1$  le chemin  $\gamma \circ \psi$ . Par construction le vecteur vitesse  $\gamma_1'(s) = \gamma'(\psi(s))\psi'(s)$  est partout de norme 1. En effet  $|\gamma'(\psi(s))\psi'(s)| = \phi'(\psi(s))\psi'(s) = \frac{d}{ds}(\phi \circ \psi)(s) = 1$ . On dit que l'on a re-paramétré  $\gamma$  par sa longueur d'arc. On reconnaît le fait qu'un chemin est paramétré par la longueur d'arc lorsque le vecteur vitesse est partout de norme 1.

**25.h** Mais nous utiliserons *assez peu* cela. Notre principal intérêt est dans un autre type d'intégrale :

$$\int_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy := \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

On a utilisé ici par commodité les notations  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , c'est-à-dire  $x(t) = x(\gamma(t))$  et  $y(t) = y(\gamma(t))$  en considérant  $x$  et  $y$  comme des fonctions  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x(z) = \text{Re}(z)$ ,  $y(z) = \text{Im}(z)$ ,  $z = x(z) + iy(z)$ . Vous suivez, j'espère.

**25.i** Dans le cas particulier  $P = F$ ,  $Q = iF$ , on a  $Pdx + Qdy = F \cdot (dx + idy)$  et l'on écrit  $dz$  au lieu de  $dx + idy$ . Notre définition est donc

$$\int_\gamma F(z) dz = \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

Vous noterez bien que l'unique différence avec  $\int_\gamma F(z) ds$  est que dans cette dernière on a  $|\gamma'(t)|$  et non pas  $\gamma'(t)$ . Autrement dit en un certain sens formel on pourra écrire :

$$|dz| = ds$$

Ceci suggère :

$$\left| \int_\gamma F(z) dz \right| \leq \int_\gamma |F(z)| ds \leq L_\gamma \sup_{z \in \gamma([a, b])} |F(z)|$$

C'est correct et vous le vérifierez.

**25.j** Vous vérifierez aussi l'invariance par reparamétrisation de  $\int_\gamma Pdx + Qdy$  comme vous avez déjà vérifié pour les intégrales  $\int_\gamma Fds$ . Notez soigneusement de plus que si  $\gamma_1$  est obtenu à partir de  $\gamma$  par un renversement du sens de parcours alors on a :

$$\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy = - \int_\gamma Pdx + Qdy$$

Par contre pour les intégrales par rapport à l'élément d'arc il n'y a pas de signe.

**25.k** Dans la suite du cours nous étudierons principalement des intégrales d'expressions  $F(z)dz$  qui sont donc des cas particuliers d'expressions, appelées aussi « formes différentielles »  $\omega = Pdx + Qdy$ . On peut multiplier une forme différentielle  $\omega$  par une fonction  $G$  de sorte que  $G\omega = GPdx + GQdy$ . On a aussi une notion importante de « différentielle totale »  $dF$  associée à une fonction  $F$  de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$ . Il s'agit de la définition suivante :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

Signalons la formule de Leibnitz :

$$d(FG) = GdF + FdG$$

En particulier on établit par récurrence  $d(F^n) = nF^{n-1}dF$ .

Remarquons que la formule  $dz = dx + idy$  n'est plus une définition mais un cas particulier de la formule pour une différentielle totale  $dF$ . On a aussi  $d\bar{z} = dx - idy$  et donc on écrira plutôt  $\overline{dz}$ . L'élément d'arc  $ds = |dz|$  n'est pas une forme différentielle : une forme différentielle  $\omega$  « vit » sur un ouvert  $U$  alors qu'un élément d'arc est tributaire d'un certain chemin  $\gamma$ . Les formes différentielles elles ne sont liées à aucun chemin ; mais on peut les intégrer le long de chemins.

25.1

Pour une différentielle totale on a un résultat très sympathique :

25.m

$$\int_{\gamma} dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

En particulier l'intégrale d'une forme différentielle totale le long d'un lacet est toujours nulle. La preuve est si simple que je la laisse en exercice.

**Avant de clore cette section je vous signale un résultat qui est assez important** : la démonstration est un peu technique (j'y ai réfléchi il y a quelques semaines et il me faudrait à peu près une page pour bien l'expliquer), donc pour gagner du temps je ne la rédige pas ici, vu qu'il ne reste que quelques jours avant la fin du semestre et que je suis un peu à la bourre. Je l'incorporerai peut-être plus tard à la version électronique de ce document. *Supposons que l'on ait deux chemins réguliers et simples (arcs de Jordan avec vecteur vitesse partout non nul) qui ont exactement le même support, et ne sont pas des lacets. Alors soit ils sont équivalents par reparamétrisation, soit ils sont équivalents par reparamétrisation et changement du sens de parcours de l'un des deux. Si l'on a affaire à des lacets, c'est la même chose après avoir décalé l'un des deux pour que les points de départ des deux lacets coïncident.* Ceci a comme conséquence que si l'on a un ensemble  $E \subset \mathbf{C}$  qui est le **support** d'un arc de Jordan  $\gamma$ , par exemple un carré, un rectangle, un triangle, un arc de cercle, un morceau d'ellipse, etc. . . alors **toutes** les paramétrisations régulières et simples de cet ensemble sont équivalentes à reparamétrisation, changement du sens de parcours, et choix du point de départ près (pour les contours fermés), et donc  $\int_{\gamma} Pdx + Qdy$  est indépendante du choix de  $\gamma$  à un **signe** près qui ne dépend que du sens de parcours. On a donc le droit de ne pas faire **explicitement** référence à une paramétrisation et d'écrire  $\int_E Pdx + Qdy$  dès que l'on aura spécifié le **sens de parcours**. Ainsi on pratique souvent le genre d'abus suivant : *soit  $\gamma$  le contour fermé  $[-R, +R] \cup C_R$  avec  $C_R$  le demi-cercle de rayon  $R$  dans le plan supérieur, le tout étant parcouru dans le sens direct.* A priori c'est abusif puisque on utilise des notations ensemblistes alors qu'un chemin c'est une paramétrisation. Dans la pratique c'est acceptable puisque les intégrales  $\int_{\gamma} f(z)dz$  ne dépendent que du sens de parcours et du support, donc écrire  $\int_{[-R, +R] \cup C_R} f(z)dz$  est licite, sous la condition tout de même de toujours bien préciser le sens de parcours.

25.n

Soit  $z_0$  et  $z_1$  (les affixes de) deux points du plan complexe. On note  $[z_0, z_1]$  tout chemin allant de  $z_0$  à  $z_1$  en ligne droite, dans la même classe de paramétrisation que le chemin

25.o

canonique  $t \mapsto z_0 + t(z_1 - z_0)$  (ici  $[a, b] = [0, 1]$ ). Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{[z_0, z_1]} F(z) dz &= \int_0^1 F((1-t)z_0 + tz_1) dt \\ \int_{[z_1, z_0]} F(z) dz &= \int_0^1 F((1-u)z_1 + uz_0) du = \int_1^0 F((1-t)z_0 + tz_1) dt \end{aligned}$$

donc

$$\int_{[z_1, z_0]} F(z) dz = - \int_{[z_0, z_1]} F(z) dz$$

Quelques cas particuliers :

$$\begin{aligned} \int_{[1+i, -1+i]} F(z) dz &= \int_1^{-1} F(x+i) dx \\ \int_{[-1+i, -1-i]} F(z) dz &= \int_1^{-1} F(-1+iy) i dy \end{aligned}$$

Nous utiliserons ce genre de formules très souvent. Une ligne brisée continue pourra par exemple être notée  $[z_0, z_1, z_2, \dots, z_N]$  et

$$\int_{[z_0, z_1, z_2, \dots, z_N]} F(z) dz = \int_{[z_0, z_1]} F(z) dz + \dots + \int_{[z_{N-1}, z_N]} F(z) dz$$

25.p

On voit que dans les chapitres précédents notre définition ad-hoc pour les intégrales le long du bord d'un rectangle de sommets  $z_0, z_1, z_2, z_3$  (les sommets sont énumérés dans le sens direct, contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre) peut se ré-écrire maintenant<sup>22</sup> sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{R}} f(z) dz &= \int_{[z_0, z_1, z_2, z_3, z_0]} f(z) dz \\ &= \int_{[z_0, z_1]} f(z) dz + \int_{[z_1, z_2]} f(z) dz + \int_{[z_2, z_3]} f(z) dz + \int_{[z_3, z_0]} f(z) dz . \end{aligned}$$

On notera bien que le résultat dépend du sens de parcours, direct ou rétrograde, et que par convention la notation  $\int_{\partial\mathcal{R}} f(z) dz$  est réservée au sens de parcours direct. On notera aussi que le choix du point du sommet de départ  $z_0$  n'importe pas et aussi que parfois on peut utiliser un chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  parcourant le bord du rectangle dans le sens direct et débutant en un autre point que l'un des sommets.

25.q

Il est commode d'utiliser la notion de **chaîne**. Une chaîne  $\Gamma = n_1\gamma_1 + \dots + n_k\gamma_k$  est une combinaison formelle additive de chemins, à coefficients  $n_j$  en général pris dans  $\mathbf{Z}$ , mais pouvant aussi être des nombres complexes quelconques, de sorte que dorénavant :

$$\int_{\Gamma} F(x, y) dz = n_1 \int_{\gamma_1} F(x, y) dz + \dots + n_k \int_{\gamma_k} F(x, y) dz$$

Aussi, dans ces chaînes on considère que le chemin  $\gamma_1$  obtenu de  $\gamma$  en renversant le sens de parcours et l'expression  $-\gamma$  signifient la même chose puisque  $\int_{\gamma_1} F(z) dz = - \int_{\gamma} F(z) dz$ .

22. ce n'est plus limité au seul cas des rectangles aux bords parallèles aux axes.

## 26 Formules intégrales de Cauchy

Nous pouvons revisiter d'anciennes formules avec nos notations. Tout d'abord si  $R$  est un rectangle, si  $f$  est holomorphe sur  $R$  et si  $a$  est un point intérieur alors

26.a

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

En effet nous avons prouvé cela dès les premières sections, avec une définition ad hoc de l'intégration sur le bord du rectangle, et cette définition est compatible avec les nouvelles que nous venons de faire. Le théorème de Cauchy-Goursat, pour les rectangles, est

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} f(z) dz$$

On notera que si  $a$  est un point extérieur au rectangle alors  $f(z)/(z-a)$  est holomorphe sur le rectangle et donc

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Nous avons aussi prouvé précédemment que  $0 = \int_{\partial T} f(z) dz$  pour les triangles et on peut deviner que

26.b

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} \frac{f(z)}{z-a} dz = \begin{cases} f(a) & a \text{ intérieur} \\ 0 & a \text{ extérieur} \end{cases}$$

Ceci est correct, on pourrait le prouver ici, mais c'est plus simple de le voir comme une conséquence du théorème général des résidus que nous prouverons plus loin.

Pour  $f$  holomorphe sur un disque  $D(z_0, \delta)$  et pour  $r < \delta$  on a  $\int_{|z-z_0|=r} f(z) dz = 0$ . En effet nous savons que  $f$  admet une primitive sur le disque, et le cercle de rayon  $r$  est un lacet. On peut de plus deviner que :

26.c

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \begin{cases} f(a) & \text{lorsque } |a-z_0| < r \\ 0 & \text{lorsque } |a-z_0| > r \end{cases}$$

Ceci est correct et est à nouveau un cas particulier du théorème général des résidus, mais établissons-le ici tout de suite. Je ne choisis pas forcément la méthode la plus simple compte tenu de ce que nous savons, mais je voudrais vous forcer à ce stade à relire très attentivement la section du chapitre précédent sur les séries de Laurent, et je choisis une méthode qui va vous obliger à faire cela. Dans le cas extérieur ( $|a-z_0| > r$ ) la fonction  $z \mapsto f(z)/(z-a)$  est holomorphe sur un disque de centre  $z_0$  et de rayon un peu plus grand que  $r$ , donc l'intégrale est nulle par ce qui précède. Dans le cas intérieur, on procède aux observations suivantes : on sait que  $f(z)$  peut s'écrire sous la forme  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ . Ceci est valable pour tout  $z$  du disque  $D(z_0, \delta)$ , et en particulier c'est valable pour  $a$  :

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (a-z_0)^n$$

On dispose de formules intégrales pour les  $c_n$ , vous les trouverez dans le chapitre sur les séries de Laurent, et si nous réécrivons ces formules avec les notations des intégrales de chemins nous obtenons :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Je rappelle que nous pouvons choisir n'importe quel cercle centré en  $z_0$ , ici nous avons pris celui de rayon  $r$ . En combinant il apparaît que :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z-z_0|=r} f(z) \frac{(a-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Comme  $\left| \frac{a-z_0}{z-z_0} \right| = \frac{|a-z_0|}{r}$  est une constante indépendante de  $z$ , et strictement inférieure à 1, il y a convergence normale sur le cercle de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-z_0)^n}{(z-z_0)^n}$ , dont la somme est d'ailleurs  $\left(1 - \frac{a-z_0}{z-z_0}\right)^{-1}$  ce qui permet d'affirmer ensuite :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{a-z_0}{z-z_0}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) \frac{1}{z-a} dz$$

C'est la célèbre **formule intégrale de Cauchy**.

26.d

On peut appliquer la formule à  $f'$  ce qui donne, pour  $a$  intérieur au cercle de rayon  $r$  :  $f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{z-a} dz$ . Ceci se simplifie par une astuce équivalente à une intégration par parties : la dérivée par rapport à  $z$  de  $\frac{f(z)}{z-a}$  vaut  $\frac{f'(z)}{z-a} - \frac{f(z)}{(z-a)^2}$ , et l'intégrale d'une dérivée sur un lacet est toujours nulle. Donc on a également :

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

Remarquez que cela est équivalent à dériver par rapport à  $a$  sous le signe intégrale la formule pour  $f(a)$  ce que l'on pourrait aussi justifier en invoquant un théorème de dérivation des intégrales par rapport à un paramètre. Quoi qu'il en soit on peut alors remplacer  $f$  par  $f'$  et donc obtenir une formule pour  $f''(a)$ , faire l'astuce de l'intégration par parties et obtenir :

$$f''(a) = 2 \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz$$

Puis par récurrence :

$$f^{(N)}(a) = N! \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{N+1}} dz$$

Toutes ces formules sont appelées formules intégrales de Cauchy. Supposons qu'au lieu d'intégrer sur un cercle contenant  $a$  en son intérieur on le fasse sur un triangle, ou un rectangle : alors les formules restent valables, grâce au théorème d'invariance par déformation que nous démontrons dans la prochaine section. Car les contours que j'ai mentionnés, avec  $a$  dans leurs intérieurs, sont tous déformables continûment, sans quitter le domaine d'holomorphic des fonctions intégrées, en un petit cercle, centré en  $a$  (c'est-à-dire qu'en fait on a là  $a = z_0$ ).

26.e

À propos du cas spécial  $a = z_0$ , la validité des formules s'obtient vraiment très simplement en se rappelant que  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ . On justifie la permutation de la somme et de l'intégrale puis on utilise que  $\int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k dz$  vaut 0 pour  $k \neq -1$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) et vaut  $2\pi i$  pour  $k = -1$ , ce qui est établi immédiatement en écrivant  $z = z_0 + re^{i\theta}$ . Et finalement on constate que les formules sont valables exactement à cause du fait que  $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ , ce

que nous savons depuis très longtemps : le développement en série d'une fonction analytique est sa série de Taylor.

Revenons aux séries de Laurent, donc pour une fonction holomorphe dans une couronne  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ . Alors :

26.f

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Et les coefficients  $c_n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  sont donnés par certaines intégrales faisant intervenir les valeurs de  $f$  sur un cercle quelconque de rayon  $r \in ]R_1, R_2[$ . Vraiment j'insiste, vérifiez que ces formules sont en fait simplement :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Maintenant je vous donne l'exercice très instructif suivant : montrez que si l'on a un point  $a$  dans la couronne et si l'on choisit  $r_1$  et  $r_2$  avec  $R_1 < r_1 < |a - z_0| < r_2 < R_2$  alors :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r_2} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r_1} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Cela va vous obliger à relire ce que nous avons fait sur les séries de Laurent ; vous verrez qu'aux notations près, cette formule y est déjà (et avait été démontrée par une méthode super astucieuse, et ensuite on en avait déduit le développement de Laurent ; ici je vous demande de faire le chemin inverse, vous partez du développement de Laurent et reconstituez cette formule).

Par contre si soit  $|a - z_0| > r_2$  soit  $|a - z_0| < r_1$ , autrement dit si  $a$  est extérieur à la couronne délimitée par les cercles de centre  $z_0$  et de rayons  $r_1$  et  $r_2$  alors :

26.g

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r_2} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r_1} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

En effet la fonction  $z \mapsto \frac{f(z)}{z-a}$  est holomorphe sur cette couronne et d'après le chapitre sur les séries de Laurent, et nos notations nouvelles,  $\int_{|z-z_0|=r} g(z) dz$  ne dépend pas de  $r$  lorsque  $g$  est holomorphe sur une couronne et que l'on fait varier le rayon du cercle tout en restant à l'intérieur la couronne.

Les formules intégrales des deux derniers paragraphes apparaîtront plus tard comme des cas particuliers du théorème des résidus (remarquez que le résidu de la fonction  $z \mapsto \frac{f(z)}{z-a}$  est, au point  $a$ , égal à  $f(a)$ , et que d'ailleurs  $a$  est la seule singularité possible).

26.h

## 27 Le théorème de Cauchy-Goursat

On commence par du routinier :

27.a

**Théorème :** Soit  $U$  un ouvert non vide et soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $U$ . Si la fonction  $f$  possède une primitive  $g$  sur  $U$  alors l'intégrale  $\int_{\gamma} f(z) dz$  le long d'un chemin ne dépend que des extrémités du chemin :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} g'(z) dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

En particulier si la fonction admet une primitive alors son intégrale le long de tout lacet est nulle. Également si  $U$  est un ouvert étoilé alors l'intégrale de toute fonction holomorphe le long de tout lacet tracé dans  $U$  est nulle, et toute intégrale  $\int_{\gamma} f(z)dz$  ne dépend que des extrémités  $\gamma(a)$ ,  $\gamma(b)$  mais pas des autres détails du chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ .

27.b La preuve en est extrêmement rapide : on a

$$\int_{\gamma} g'(z)dz = \int_a^b g'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}g(\gamma(t))dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

27.c Afin de mieux comprendre la preuve précédente signalons que si  $g$  est une primitive de  $f$  au sens de la dérivation complexe,  $g' = f$ , alors on a  $dg = f(z)dz$ . En effet, par définition  $dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy$ , et en utilisant l'équation de Cauchy-Riemann pour  $g$  cela donne  $dg = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot (dx + idy) = f dz$ .

27.d Ainsi si la fonction holomorphe  $f$  possède une primitive sur  $U$  son intégrale le long de tout lacet est nulle. **Théorème :** *réciroquement si l'intégrale de  $f$  le long de tout lacet de  $U$  est nulle, alors  $f$  possède une primitive.* J'ai démontré cette réciproque en amphithéâtre, je ne reproduis pas la preuve ici.

27.e On sait que dans un disque toute fonction holomorphe possède une primitive. Donc localement on peut toujours déformer un chemin  $\gamma$  sans rien changer à  $\int_{\gamma} f(z) dz$ . Ces idées mènent à la notion d'homotopie.

27.f **Homotopie :** Soit  $U$  un ouvert dans  $\mathbf{C}$  et soit  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux chemins dans  $U$  ayant les mêmes extrémités  $z_1$  et  $z_2$  (pour la définition qui suit on suppose seulement que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont continus, ce n'est que lorsque nous les utilisons pour des intégrales que nous supposons de plus qu'ils sont  $C^1$  par morceaux). Nous allons définir une relation d'équivalence sur les chemins ayant des extrémités fixées, relation d'équivalence qui sera compatible aux reparamétrisations (continues<sup>23</sup>) qui ne changent pas le sens de parcours. Donc, pour me simplifier la vie je donne une définition qui a l'avantage d'incorporer immédiatement cette compatibilité, et comme je suis fatigué, je vous laisse vous efforcer de prouver qu'il s'agira bien d'une relation d'équivalence. Notre définition est la suivante : nous dirons que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont **homotopes**, dans  $U$ , à extrémités  $z_1$  et  $z_2$  fixées, si on peut trouver des reparamétrisations de  $\gamma_1$  et de  $\gamma_2$  de sorte qu'ils soient en fait paramétrés par un même intervalle  $[a, b]$ , et qu'il existe une fonction continue  $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$  avec  $H(t, 0) = \gamma_1(t)$ ,  $H(t, 1) = \gamma_2(t)$  et pour tout  $u \in [0, 1]$  on a  $H(a, u) = z_1$  et  $H(b, u) = z_2$ .

27.g **Théorème de Cauchy-Gauss :** *Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbf{C}$ ,  $z_1$  et  $z_2$  deux points de  $U$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux chemins continus,  $C^1$  par morceaux, de supports dans  $U$ , et ayant tous deux  $z_1$  comme point de départ et  $z_2$  comme point d'arrivée, et qui sont homotopes dans  $U$  avec les extrémités fixées en  $z_1$  et  $z_2$ . Alors, pour toute fonction  $f$  holomorphe sur  $U$  on a*

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

27.h Pour la preuve, si  $U$  était un ouvert étoilé, ou même seulement si l'homotopie  $H$  prenait ses valeurs dans un sous-ouvert  $V \subset U$  étoilé, alors nous pourrions affirmer que  $f$  a une primitive (sur  $V$  dans le deuxième cas, ce qui suffit), et nous saurions alors que son intégrale

23. oui je sais je n'ai précédemment utilisé le mot reparamétrisation que dans un contexte  $C^1$  ; mais ici on appelle reparamétrisation toute modification du paramétrage par un homéomorphisme ; non ce n'est pas un gros mot c'est quelque chose que vous DEVEZ avoir appris ailleurs.

le long d'un chemin ne dépend que des extrémités de ce chemin. On n'aurait même pas besoin de supposer  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  homotopes. Mais la situation n'est pas toujours aussi simpliste, alors on va faire la preuve en toute généralité.

**Preuve du théorème de Cauchy-Goursat :** Sans perte de généralité on suppose que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont tous deux paramétrés par  $[0, 1]$  et on note  $H$  l'homotopie les reliant dans  $U$ . On commence par remarquer que  $K = H([0, 1] \times [0, 1])$  est un compact, comme image par une application continue d'un compact. Je prétends qu'il existe  $r > 0$  tel que  $z \in K, w \notin U \implies |w - z| > r$ . Sinon on aurait une suite  $(z_n)$  de  $K$  et une suite  $w_n$  de  $\mathbf{C} \setminus U$  avec  $|z_n - w_n| \rightarrow 0$ . Comme  $K$  est compact, quitte à passer à une sous suite je peux supposer que  $z = \lim z_n$  existe. J'ai alors aussi  $|z - w_n| \rightarrow 0$ . Mais c'est absurde car  $z$  est dans  $K$  donc dans l'ouvert  $U$  donc  $U$  contient un petit disque ouvert non vide centré en  $z$ , tandis que les  $w_n$  eux sont dans le complémentaire de  $U$  par hypothèse.

27.i

Donc on a notre  $r > 0$ , et tout nombre complexe qui est à distance au plus  $r$  d'un point de  $K$  est en fait dans l'ouvert  $U$ . La fonction  $H$  est uniformément continue sur le compact  $[0, 1] \times [0, 1]$  donc on peut trouver  $N \geq 1$  de sorte que  $|t - t'| \leq \frac{1}{N}$  et  $|u - u'| \leq \frac{1}{N}$  impliquent  $|H(t, u) - H(t', u')| < r$ . Considérons les points  $Q_{i,j} = (\frac{i}{N}, \frac{j}{N})$  ( $0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N$ ) du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  et leurs images  $P_{i,j}$  par  $H$  dans le plan complexe. Si l'on fixe un couple d'indice  $(i, j)$  ( $0 \leq i, j < N$ ) les quatre points  $P_{i',j'}$  avec  $i' \in \{i, i+1\}, j' \in \{j, j+1\}$  sont dans le disque ouvert de rayon  $r > 0$ , centré en  $P_{i,j}$ , et ce disque ouvert est entièrement inclus dans l'ouvert  $U$  sur lequel la fonction  $f$  est holomorphe. La ligne brisée  $L_{i,j} = [P_{i,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}, P_{i+1,j}, P_{i,j}]$  forme un lacet entièrement inclus dans le petit disque (tout disque est convexe). Sur ce disque la fonction holomorphe  $f$  admet une primitive, donc :

27.j

$$\int_{L_{i,j}} f(z) dz = 0$$

Faisons la somme de toutes ces identités pour  $0 \leq i < N, 0 \leq j < N$ . Chaque intégrale est la somme de quatre intégrales sur quatre segments. Chaque segment, sauf les segments  $[P_{0,j}, P_{0,j+1}], [P_{i,N}, P_{i+1,N}], [P_{N,j+1}, P_{N,j}], [P_{i+1,0}, P_{i,0}]$  contribue deux fois mais avec des sens de parcours opposés. Donc la somme des  $N^2$  intégrales portant sur les  $4N^2$  segments est en fait une somme sur les  $N + N + N + N = 4N$  segments provenant du bord du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Parmi eux, notons qu'en fait les points  $P_{0,j}$  coïncident tous avec  $z_1$  et les points  $P_{N,j}$  avec  $z_2$ . Il ne reste plus que les segments  $[P_{i,N}, P_{i+1,N}]$  et  $[P_{i+1,0}, P_{i,0}]$ . Pour les premiers nous les remplaçons par le chemin  $\gamma_2(t)$  pour  $\frac{i}{N} \leq t \leq \frac{i+1}{N}$  ce qui est licite puisque le segment comme ce morceau de chemin ont les mêmes extrémités et sont totalement inclus dans un disque sur lequel  $f$  est holomorphe. Pour les segments  $[P_{i+1,0}, P_{i,0}]$  nous les remplaçons par le chemin  $\gamma_1$  parcouru dans le sens contraire de  $t = \frac{i+1}{N}$  à  $t = \frac{i}{N}$ . La somme de toutes nos intégrales sur les  $4N^2$  segments est donc exactement égale à  $\int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz$ . Par ailleurs nous savons cette somme égale à zéro. Le théorème d'invariance par homotopie de Cauchy-Goursat est démontré.

Remarque technique : bien que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soient supposés  $C^1$  par morceaux, l'homotopie  $H$  elle est seulement supposée continue.

27.k

Note : la notion d'homotopie a été introduite formellement par Poincaré<sup>24</sup>, quelques dizaines d'années après les travaux de Cauchy. Plus implicitement elle est déjà très présente chez Riemann et aussi antérieurement dans les travaux de Gauss (pas tous publiés de son

27.l

---

24. Henri Poincaré, 1854–1912

vivant) sur l'électricité et le magnétisme.

**27.m** Nous aurons aussi souvent besoin d'une variante : l'homotopie des lacets, plutôt que l'homotopie à extrémités fixes des chemins. On dira que deux **lacets**  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  à valeurs dans  $U$ , tous deux paramétrés par  $[0, 1]$ , sont homotopes (dans  $U$  ! évidemment si on change  $U$  on change la notion d'homotopie, plus  $U$  est grand plus il est facile de devenir homotopes) si l'on peut trouver une application continue  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  avec  $H(t, 0) = \gamma_1(t)$ ,  $H(t, 1) = \gamma_2(t)$ , et  $H(1, u) = H(0, u)$  pour tout  $u \in [0, 1]$  (autrement dit pour chaque  $u$ ,  $t \mapsto H(t, u)$  est un lacet à valeurs dans  $U$ ).

**27.n** **Théorème :** Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbf{C}$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux lacets continus  $C^1$  par morceaux dans  $U$  et qui de plus sont homotopes dans  $U$  au sens de l'homotopie des lacets. Alors, pour toute fonction  $f$  holomorphe sur  $U$  on a

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

En particulier on a  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  pour tout lacet dans  $U$  qui est homotopiquement trivial dans  $U$ .

**27.o** On dit qu'un lacet est homotopiquement trivial si il est homotope à un lacet constant, autrement dit si on peut le déformer continûment tout en restant dans  $U$  et en faire un lacet constamment égal au même point de  $U$ . Supposons que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soient deux chemins allant de  $z_1$  vers  $z_2$ . Paramétrons  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  par  $[0, 1]$  et considérons le lacet  $\gamma_3$  défini par les formules  $\gamma_3(t) = \gamma_1(t)$  pour  $0 \leq t \leq 1$  et  $\gamma_3(t) = \gamma_2(2 - t)$  pour  $1 \leq t \leq 2$ . Alors  $\gamma_3$  est un lacet que nous noterons  $\gamma_1 \gamma_2^{(-1)}$  : d'abord  $\gamma_1$  de  $z_1$  à  $z_2$  puis  $\gamma_2$  dans le sens contraire de  $z_2$  à  $z_1$ . Exercice pour les hyper-motivés :  $\gamma_3$  est un lacet homotopiquement trivial dans  $U$  si et seulement si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont homotopes à extrémités fixes dans  $U$ . Cela montre le lien entre les deux versions du théorème d'invariance par homotopie (car  $\int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz$ ). En ce qui concerne la preuve de la version pour les lacets, elle est quasi-identique à celle pour les chemins à extrémités fixées, donc je vous laisse le soin de la rédiger.

**27.p** **Le reste de ce chapitre est assez subtil et donné à titre de complément.** Supposons que le lacet  $\gamma$  dans  $U$  ait la propriété

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

pour toute fonction holomorphe  $f$  sur l'ouvert  $U$ . Est-il exact que  $\gamma$  soit homotopiquement trivial ? La réponse est « non, pas forcément ». On peut construire un exemple de la manière suivante : soit  $\gamma_1$  le lacet partant de zéro et parcourant le cercle autour de  $+1$  dans le sens direct, et soit  $\gamma_2$  le lacet partant de zéro et parcourant le cercle autour de  $-1$  dans le sens direct. Formons le lacet  $\Gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^{(-1)} \gamma_2^{(-1)}$ , c'est-à-dire d'abord  $\gamma_1$  puis  $\gamma_2$  puis  $\gamma_1$  dans le sens rétrograde puis  $\gamma_2$  dans le sens rétrograde. Alors, pour toute fonction  $f$  holomorphe sur l'ouvert  $U = \mathbf{C} \setminus \{-1, +1\}$  on a :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0$$

Mais, on peut (bonne chance...) prouver que  $\Gamma$  n'est pas homotopiquement trivial dans  $U$ .

**27.q** En fait  $\Gamma$  a une autre propriété : il est **homologiquement** trivial. Je dirai simplement

que pour discuter de l'homologie il faut, au lieu de lacets, plutôt parler de 1-chaînes qui sont des objets de dimension 1 (nous les avons déjà définies dans un chapitre précédent), introduire la notion de 2-chaînes qui sont des objets de dimension 2, expliquer que le bord d'une 2-chaîne est une 1-chaîne (qui a la propriété que son bord à elle est nul), et définir les 1-chaînes homologiquement triviales comme étant les bords des 2-chaînes. Voilà.

Soit  $\Gamma$  une 1-chaîne. Nous avons défini une 1-chaîne comme une somme formelle  $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_k\gamma_k$  de chemins<sup>25</sup>, avec des coefficients  $c_j$  complexes. De même nous définissons une 0-chaîne comme une combinaison de points  $a_1P_1 + \dots + a_mP_m$ , avec des coefficients complexes. Le bord d'un chemin  $\gamma$  est défini par la formule<sup>26</sup>  $\partial\gamma = P - Q$  avec  $P$  le point d'arrivée et  $Q$  le point de départ de  $\gamma$ . Le bord de la 1-chaîne  $\Gamma$  est défini alors par la formule  $c_1\partial\gamma_1 + c_2\partial\gamma_2 + \dots + c_k\partial\gamma_k$ . Si ce bord est nul on dit que  $\Gamma$  est un 1-cycle. On se convainc<sup>27</sup> que  $\Gamma$  est un cycle si et seulement si on peut réécrire  $\Gamma$  sous la forme  $d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + \dots + d_m\delta_m$  avec les  $\delta_j$  des lacets. De plus si les  $c_i$  sont des nombres entiers, on peut re-écrire  $\Gamma$  sous cette forme avec les  $d_j$  aussi entiers.

27.r

Il se trouve que, par chance, il y a une caractérisation simple des 1-chaînes  $\Gamma$  (ou des lacets) qui sont homologiquement triviales (dans un ouvert donné  $U$ ) : cela équivaut à ce que  $\Gamma$  soit un 1-cycle et que de plus  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 0$  pour tout  $z_0$  du complémentaire de  $U$  dans  $\mathbf{C}$ . On a en fait le théorème suivant :

27.s

**Théorème :** Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbf{C}$  et  $\Gamma$  un 1-cycle dans  $U$ , par exemple un lacet. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

27.t

1.  $\Gamma$  est homologiquement trivial,
2. pour tout  $z_0 \notin U$  on a  $\int_{\Gamma} \frac{1}{z-z_0} dz = 0$ ,
3. pour toute fonction holomorphe  $f$  sur  $U$  on a  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ .

Une démonstration, assez délicate, de 2  $\implies$  3 est décrite dans une annexe. Dorénavant si nous disons d'une chaîne  $\Gamma$  qu'elle est homologiquement triviale, cela sera pour dire qu'elle vérifie la propriété 2., donc également la propriété 3. du théorème ci-dessus. C'est le cas lorsque  $\Gamma$  est un lacet homotopiquement trivial, par exemple lorsque il existe un ouvert étoilé  $V \subset U$  contenant le support de  $\Gamma$  (en effet, tout lacet dans un ouvert étoilé est homotopiquement trivial dans cet ouvert, pourquoi?).

27.u

## 28 Indices de lacets

Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  un chemin de point de départ  $z_1$  et de point d'arrivée  $z_2$ . Soit par ailleurs  $z_0$  un point par lequel ne passe pas  $\gamma$ . Considérons :

28.a

$$F(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u) - z_0} du$$

de sorte que  $F(a) = 0$  et  $F(b) = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}$ . La dérivée de  $(\gamma(t) - z_0) \exp(-F(t))$  vaut  $\gamma'(t) \exp(-F(t)) + (\gamma(t) - z_0) \left(-\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\right) \exp(-F(t)) = 0$ . Donc  $(\gamma(t) - z_0) \exp(-F(t))$  est constant. On a ainsi :

$$\forall t \in [a, b] \quad e^{F(t)} = \frac{\gamma(t) - z_0}{z_1 - z_0}$$

25. en fait : de classes d'équivalence pour la reparamétrisation, et avec la convention  $-\gamma = \gamma^{(-1)}$ . De plus si un chemin  $\gamma$  est obtenu en suivant d'abord  $\gamma_1$  puis  $\gamma_2$  alors en tant que chaîne on a la relation  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ .

26.  $P - Q$  est une expression formelle sans aucun rapport avec la soustraction de nombres complexes.

27. c'est prouvé plus loin dans ce polycopié.

Si l'on écrit en coordonnées polaires  $z_1 - z_0 = r_1 e^{i\theta_1}$ , et  $\gamma(t) - z_0 = r(t) e^{i\theta(t)}$ , on obtient :

$$\forall t \in [a, b] \quad \operatorname{Re}(F(t)) = \log \frac{r(t)}{r_1} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(F(t)) \equiv \theta(t) - \theta_1 \pmod{2\pi}$$

Cela justifie le nom de **variation de l'argument** qui est donnée à  $\operatorname{Im}(F(t))$  : notez bien que  $F(t)$  est une fonction continue de  $t$ , et donc en **définissant**  $\theta(t)$  par  $\theta_1 + \operatorname{Im}(F(t))$  on obtient une fonction **continue** de  $t$  donnant l'**argument** (c'est-à-dire la coordonnée polaire angulaire) de  $\gamma(t) - z_0$ . En particulier pour  $t = b$  la valeur  $\operatorname{Im}(F(b))$  est une détermination de l'argument de  $(z_2 - z_0)/(z_1 - z_0)$ , et pas n'importe laquelle : celle que l'on obtient par continuité en suivant le chemin  $\gamma$ . D'où la définition suivante :

**28.b** **Définition :** Soit  $\gamma$  un chemin  $C^1$  par morceaux, allant de  $z_1$  à  $z_2$  et soit  $z_0$  un point par lequel ne passe pas  $\gamma$ . La **variation de l'argument** de  $z - z_0$  le long de  $\gamma$  est notée  $\Delta_\gamma \arg(z - z_0)$  et est définie par la formule :

$$\Delta_\gamma \arg(z - z_0) = \operatorname{Im} \left( \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \right)$$

Modulo  $2\pi$  la variation de l'argument  $\Delta = \Delta_\gamma \arg(z - z_0)$  ne dépend pas du chemin et est déterminée par

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \left| \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right| e^{i\Delta}$$

Cependant sa valeur exacte elle dépend du chemin  $\gamma$  allant de  $z_1$  à  $z_2$ .

**28.c** Prenons maintenant le cas particulier où  $z_1 = z_2$ , c'est-à-dire  $\gamma$  est un lacet. Alors avec les mêmes notations on a  $e^{i\Delta} = 1$  donc  $\Delta \in 2\pi\mathbf{Z}$ . La variation de  $\arg(z - z_0)$  le long du lacet  $\gamma$  est donc un multiple entier de  $2\pi$ . Cet entier s'appelle « indice du lacet  $\gamma$  par rapport à  $z_0$  » (ou parfois indice du point  $z_0$  par rapport à  $\gamma$ ).

**Définition :** Soit  $\gamma$  un lacet  $C^1$  par morceaux ne passant pas par  $z_0$ . L'indice du lacet  $\gamma$  par rapport à  $z_0$  est un nombre entier relatif qui est noté  $\operatorname{Ind}(\gamma, z_0)$  (ou  $\operatorname{Ind}_{z_0}(\gamma)$ , ou  $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0)$ , ou  $\operatorname{Ind}(z_0, \gamma)$  etc. ...). Il est défini par la formule :

$$\operatorname{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg(z - z_0)$$

On l'appelle aussi « nombre de tours fait par  $\gamma$  autour de  $z_0$  ». Il est invariant par déformation continue de  $\gamma$  et/ou de  $z_0$ , **tant que  $z_0$  ne traverse pas le support de  $\gamma$** .

**28.d** L'invariance par déformation du lacet (un mot moins impressionnant pour « homotopie ») découle du Théorème de Cauchy-Gauss. L'invariance par rapport à changer  $z_0$  aussi (car déplacer  $z_0$  c'est comme le laisser fixe et déplacer le chemin), ou plus simplement parce que l'indice est une fonction continue de  $z_0$  (par sa représentation intégrale), et à valeurs entières, donc constante sur chaque composante connexe de son ouvert de définition. Il y a des méthodes de calculs d'indices, j'en ai parlé en amphithéâtre. Faites les exercices dans les feuilles.

**28.e** On peut définir l'indice des lacets seulement continus (pas nécessairement  $C^1$ ), je le faisais dans le temps, mais justement du temps on n'en a plus.

**28.f** Soit  $\Gamma = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_k\gamma_k$  une 1-chaîne, de bord  $\partial\Gamma = c_1\partial\gamma_1 + c_2\partial\gamma_2 + \dots + c_k\partial\gamma_k$ . Si ce bord est nul on dit que  $\Gamma$  est un 1-cycle. On prouve (là, en bas) que la chaîne  $\Gamma$  est un cycle si et seulement si on peut la réécrire sous la forme  $d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + \dots + d_m\delta_m$  avec

les  $\delta_j$  des lacets. De plus si les  $c_i$  sont des nombres entiers, on peut re-écrire  $\Gamma$  sous cette forme avec les  $d_j$  aussi entiers.

Preuve : on peut supposer les  $c_j$  réels car si  $\sum_j c_j \gamma_j$  est un cycle c'est aussi le cas de  $\sum_j \operatorname{Re}(c_j) \gamma_j$  et de  $\sum_j \operatorname{Im}(c_j) \gamma_j$ . Jetons les  $\gamma_i$  avec  $c_i = 0$ , puis imposons  $\forall i c_i > 0$  en renversant éventuellement le sens de parcours de  $\gamma_i$ . Soit  $P, P', P'', \dots$ , les différents points de départ ou d'arrivée des  $\gamma_i$  dans un ordre quelconque. Comme  $\Gamma$  est un cycle, le point  $Q_1 = P$  ne peut pas être que le point d'arrivée de chemins  $\gamma_i$  : il est le point de départ d'au moins l'un d'entre eux. Choisissons-en un et soit  $Q_2$  son point d'arrivée. Ce point  $Q_2$  est point de départ, etc. ..., d'où une suite  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ . Comme il n'y a qu'un nombre fini de points, il arrive un moment où le nouveau  $Q$  est déjà dans la liste (pas forcément  $= Q_1$ ). De cette manière on forme un lacet  $\delta_1$  en mettant à la file certains des chemins composant le cycle  $\Gamma$ . Parmi les  $c_j$  attachés à ces chemins composant le lacet il y en a un qui est plus petit que les autres, notons le  $d_1$ . Alors  $\Gamma - d_1 \delta_1$  est à nouveau un cycle, et il est composé de moins de chemins que  $\Gamma$ . Donc en itérant un nombre fini de fois on aboutit finalement à la forme voulue  $\Gamma = d_1 \delta_1 + d_2 \delta_2 + \dots + d_m \delta_m$ . De plus si les  $c_j$  sont tous entiers, les  $d_i$  le seront tous aussi, car par construction les  $d_i$  sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des  $c_j$ .

On posera, lorsque  $\Gamma$  est un cycle :

28.g

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Si l'on a une écriture  $\Gamma = d_1 \delta_1 + d_2 \delta_2 + \dots + d_m \delta_m$  avec les  $\delta_j$  des **lacets** alors :

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, z_0) = d_1 \operatorname{Ind}(\delta_1, z_0) + \dots + d_m \operatorname{Ind}(\delta_m, z_0)$$

L'indice d'un cycle appartient donc au  $\mathbf{Z}$ -module<sup>28</sup> engendré par les coefficients  $c_i$  de toute expression de  $\Gamma$  sous la forme  $\sum_i c_i \gamma_i$  (puisque les  $d_j$  appartiennent à ce  $\mathbf{Z}$ -module et que les indices des lacets sont toujours des nombres entiers relatifs). En particulier, les 1-chaînes à coefficients entiers qui sont des cycles ont des indices entiers (positifs ou négatifs) par rapport à tout point  $z_0$  (qui n'est pas dans le support de la chaîne).

Supposons que  $z_0$  soit une singularité isolée de la fonction holomorphe  $f$ . Alors la partie principale (partie singulière)  $g(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n$  de la série de Laurent est une fonction holomorphe sur  $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$  (comme elle est une série en puissance positives de  $\frac{1}{z - z_0}$  et qu'elle converge pour des  $z$  arbitrairement proches de  $z_0$  elle converge en fait pour tous les  $z \neq z_0$ ). Attention : c'est seulement la partie singulière qui a ainsi un domaine d'existence peut-être plus vaste que  $f$  elle-même. Il est intéressant de remarquer (vous êtes censés avoir fait l'exercice **15.m** qui demande de montrer que l'on peut dériver une série de Laurent terme à terme) que la fonction  $k(z) = \sum_{n=-2}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n$  est une dérivée : c'est la dérivée de  $\sum_{n=-2}^{-\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$ . Donc son intégrale sur tout lacet  $\gamma$  dans  $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$ , plus généralement sur tout cycle  $\Gamma$ , est nulle. Donc

28.h

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = c_{-1} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \operatorname{Rés}(f, z_0) 2\pi i \operatorname{Ind}(\Gamma, z_0)$$

C'est une formule qui va nous être immédiatement utile dans la preuve du théorème des résidus.

## 29 Le théorème des résidus avec indices

Avec tout le travail accompli, les choses maintenant viennent très vite.

29.a

**29.b** **Théorème des résidus :** Soit  $U$  un ouvert, soient  $z_1, \dots, z_N$ , des points distincts dans  $U$  et soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $U \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ . Soit  $\Gamma$  un **lacet homotopiquement trivial** dans  $U$  ou, plus généralement, un 1-cycle homologiquement trivial dans  $U$ , ne passant par aucun des points  $z_1, \dots, z_N$ . On a alors la formule suivante :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{1 \leq j \leq N} \text{Ind}(\Gamma, z_j) \text{Rés}(f, z_j)$$

**29.c** Remarques :

1. dans un ouvert étoilé, tout est homotopiquement (donc homologiquement) trivial. Donc la formule du théorème des résidus, dans un ouvert étoilé, vaut pour tous les cycles.
2. cette formule montre bien l'invariance par déformation. Lorsque l'on déforme  $\Gamma$  les indices ne changent pas, et évidemment les résidus ne changent pas non plus, puisqu'ils ne dépendent que de la fonction  $f$ .
3. presque tout le temps on utilise ce théorème lorsque les singularités sont des pôles, c'est-à-dire lorsque  $f$  est une fonction méromorphe sur  $U$ . Mais le théorème vaut aussi lorsqu'il y a des singularités essentielles.
4. on peut autoriser un nombre infini de singularités, à condition que ce soit toutes des singularités isolées. On sait alors qu'elles ne peuvent (par définition) pas avoir de point d'accumulation dans  $U$ . On peut prouver alors que l'indice de  $\Gamma$  par rapport à une singularité est nul, sauf pour au plus un nombre fini d'entre elles : la formule est valable, et elle est une somme finie, en fait.

**29.d** **Preuve du théorème :** soit  $g_j(z)$  la partie singulière du développement en série de Laurent de  $f$  en  $z_j$ . On sait que  $g_j$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbf{C} \setminus \{z_j\}$ . Considérons la fonction  $F = f - g_1 - g_2 - \dots - g_N$ . Cette fonction a en les  $z_j$  de fausses singularités. Elle est donc holomorphe sur  $U$ . On sait d'après le Théorème d'invariance par homotopie de Cauchy-Goursat que  $\int_{\Gamma} F(z) dz = 0$  lorsque  $\Gamma$  est un lacet homotopiquement trivial, et l'on prouve en annexe que cela vaut aussi lorsque  $\Gamma$  est un 1-cycle « homologiquement trivial », c'est-à-dire, un cycle vérifiant  $\text{Ind}(\Gamma, P) = 0$  pour tous les points  $P$  du complémentaire de  $U$  dans  $\mathbf{C}$ . Donc :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{1 \leq j \leq N} \int_{\Gamma} g_j(z) dz$$

Nous avons prouvé dans la section précédente la formule :

$$\int_{\Gamma} g_j(z) dz = \text{Rés}(f, z_j) \int_{\Gamma} \frac{1}{z - z_j} dz = 2\pi i \text{Rés}(f, z_j) \text{Ind}(\Gamma, z_j)$$

En combinant tous ces éléments on a la preuve du théorème des résidus avec indices.

## 30 Le théorème des résidus pour les contours de Jordan

**30.a** Une **courbe de Jordan**<sup>29</sup>, aussi appelée « courbe fermée simple », est l'image d'un

28. «  $\mathbf{Z}$ -module » = groupe commutatif (avec sa loi de groupe notée additivement) !

**lacet continu**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  **sans intersection**, c'est-à-dire, de sorte que pour  $a \leq t < u < b$  on a  $\gamma(t) \neq \gamma(u)$ . Le **théorème de Jordan**<sup>30</sup>, qui n'est pas du tout facile à prouver, exprime quelque chose qui est intuitivement évident<sup>31</sup> : *le complémentaire de  $\gamma([a, b])$  dans  $\mathbf{C}$  (c'est un ouvert bien sûr) a exactement deux composantes connexes*. L'une n'est pas bornée, l'autre, notons-là  $\Omega$ , est bornée. La courbe  $\gamma$  a l'indice nul par rapport aux points de la composante non-bornée (forcément car cet indice ne dépend pas du point  $P$  et si l'on fait tendre le point  $P$  vers l'infini, l'intégrale donnant l'indice tend vers zéro, ou plus simplement si  $P$  est suffisamment loin, le contour sera entièrement inclus dans un demi-plan ne contenant pas  $P$ , et donc on pourra déformer le contour et le ratatiner en un lacet constant, à l'intérieur de ce demi-plan donc sans jamais passer par  $P$ ). La courbe de Jordan  $\gamma$  a soit l'indice  $+1$  par rapport aux points de  $\Omega$ , on dit alors qu'elle est parcourue dans le sens direct (cela signifie que le domaine intérieur  $\Omega$  est toujours sur la gauche des pieds d'un petit bonhomme qui parcourerait ce contour), soit l'indice  $-1$ , on dit alors qu'elle est parcourue dans le sens rétrograde (le domaine intérieur se trouve sur la droite des pieds d'un randonneur sur le bord).

Soit  $U$  un ouvert contenant une courbe de Jordan  $\gamma$  et son intérieur  $\Omega$ . Alors il est relativement aisé (par des techniques du style de celles de l'annexe) de montrer que  $\gamma$  vu comme lacet dans  $U$  est homotopiquement trivial. On peut même prouver<sup>32</sup> que  $\gamma$  est homotopiquement trivial par une homotopie qui prend ses valeurs dans  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \gamma([a, b])$ . Tout cela est franchement difficile lorsque l'on suppose la courbe seulement continue ; c'est nettement plus facile lorsqu'on la suppose  $C^1$  par morceaux, mais une explication totalement détaillée n'est pas simple à rédiger.

30.b

**Théorème des résidus, version classique A :**

30.c

Soit  $\gamma$  un contour de Jordan,  $C^1$  par morceaux, de domaine intérieur  $\Omega$ . Soit  $f$  une fonction sur un ouvert  $U$  contenant  $\gamma$  et  $\Omega$ , holomorphe sauf en un nombre fini de singularités isolées  $z_1, \dots, z_n$ , toutes situées dans  $\Omega$  (aucune sur le contour  $\gamma$  ; et si il y avait eu des singularités à l'extérieur du contour  $\gamma$  on s'en serait débarrassé en remplaçant  $U$  par un ouvert plus petit). Si  $\gamma$  est parcouru dans le **sens direct** :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{1 \leq j \leq n} \text{Rés}(f, z_j)$$

Si  $\gamma$  est parcouru dans le **sens rétrograde** :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \sum_{1 \leq j \leq n} \text{Rés}(f, z_j)$$

Preuve : Ce théorème est un cas particulier de notre théorème général : j'ai expliqué que le contour de Jordan est homotopiquement trivial par une homotopie qui reste dans  $U$  ; et j'ai aussi précisé que le contour de Jordan, lorsqu'il est parcouru dans le sens direct a un indice  $+1$  par rapport à tout point intérieur.

30.d

**Théorème des résidus, version classique B :**

30.e

29. Camille Jordan, 1838–1922

30. la première preuve complète en a été donnée par Oswald Veblen (1880–1960) en 1905.

31. Enfin, qui est censé être intuitivement évident, mais lorsque l'on enseigne les mathématiques on se rend compte rapidement qu'il n'est pas toujours intuitivement évident de déterminer ce qui est intuitivement évident.

32. mais cela est beaucoup plus difficile et lié à un théorème prouvé par Arthur Schönflies (1853-1928) en 1906.

Soit  $\gamma$  un contour de Jordan,  $C^1$  par morceaux, parcouru dans le sens direct, de domaine intérieur  $V$ . Soit  $\gamma_1$  un plus petit contour de Jordan,  $C^1$  par morceaux, parcouru dans le sens direct, tracé dans  $V$ , de domaine intérieur  $V_1$ , puis  $\gamma_2$  un autre, parcouru dans le sens direct, qui avec son domaine intérieur  $V_2$  est intégralement inclus dans  $V \setminus \overline{V_1}$ , puis  $\gamma_3$  qui avec son domaine intérieur  $V_3$  est intégralement inclus dans  $V \setminus \overline{V_1 \cup V_2}$ , etc. ... Notons  $\Omega$  l'ouvert  $V \setminus \overline{\cup_{1 \leq k \leq K} V_k}$ . Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $U$  contenant  $\overline{\Omega}$ , holomorphe sauf en un nombre fini de singularités isolées  $z_1, \dots, z_n$ , toutes situées dans  $\Omega$ . Le Théorème des résidus s'exprime alors par la formule :

$$\int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{1 \leq k \leq K} \int_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{1 \leq j \leq n} \text{Rés}(f, z_j)$$

**30.f** Preuve : Ce théorème est à nouveau un cas particulier de notre théorème général. Notons  $\partial\Omega$  la chaîne  $\gamma - \sum_{1 \leq k \leq K} \gamma_k$ , que nous pouvons appeler « bord orienté » de l'ouvert  $\Omega$ . Comme c'est une combinaison de lacets, c'est un cycle. Pour voir si le cycle est homologiquement trivial nous prenons un point  $P \in \mathbf{C} \setminus U$  et nous examinons  $\text{Ind}(\partial\Omega, P)$ . Soit  $P$  est à l'extérieur de  $\gamma$  et donc aussi de tous les autres et alors  $\text{Ind}(\gamma, P)$  et tous les  $\text{Ind}(\gamma_k, P)$  sont nuls. Soit  $P$  est dans un et un seul des ouverts  $V_k$  alors  $\text{Ind}(\gamma, P) = +1 = \text{Ind}(\gamma_k, P)$  et tous les autres sont nuls. Dans tous les cas on a bien  $\text{Ind}(\partial\Omega, P) = 0$  donc le cycle  $\partial\Omega$  est homologiquement trivial dans l'ouvert  $U$ . Par ailleurs son indice par rapport à chacune des  $n$  singularités  $z_j$  de  $f$  est toujours 1 puisque c'est l'indice du bord extérieur  $\gamma$  tandis que les composantes  $-\gamma_k$  du bord intérieur ont un indice nul. Nous obtenons la formule voulue :

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 2\pi i \sum_{1 \leq j \leq n} \text{Rés}(f, z_j)$$

**30.g** On peut justifier ces théorèmes par d'autres méthodes, plus ou moins aisément rendues rigoureuses. J'en ai mentionné une en amphithéâtre. Consultez le polycopié de l'année dernière sur mon site pour plus de détails.

**30.h** Conclusion : je vous ai donc donné une présentation des formes classiques du théorème des résidus. La formule avec les indices a le petit avantage que les singularités à l'extérieur des contours d'intégration peuvent y figurer, on n'a pas besoin de les exclure puisque ce sont les indices qui s'en chargent, car ils sont nuls. Et d'ailleurs la version avec les cycles et les indices est plutôt plus simple à prouver que les énoncés ci-dessus qui emploient des contours de Jordan, ou la notion de bord régulier d'un domaine, car n'oubliez pas que j'ai simplement admis certaines propriétés « intuitivement évidentes » des contours de Jordan (qui ne seraient néanmoins pas si terriblement difficiles à prouver sous l'hypothèse ici faite de choses  $C^1$  par morceaux). En général les versions classiques sans indices suffisent pour les applications. <sup>33</sup>

## 31 Le principe de la variation de l'argument

**31.a** Soit  $\gamma$  un contour de Jordan, parcouru dans le sens direct, de domaine intérieur  $\Omega$ , soit

---

33. il y a des exceptions notables, par exemple lorsque l'on veut représenter une fonction hypergéométrique de Gauss-Riemann par une intégrale le long d'un chemin ; la subtilité est alors liée d'une part à l'emploi de fonctions multi-valuées, d'autre part à l'emploi de contours d'intégration qui sont certes des lacets, mais qui ne sont pas des contours de Jordan.

$U$  un ouvert connexe contenant  $\bar{\Omega}$ , et soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $U$ . Si  $f$  n'est pas identiquement nulle alors, par le théorème des zéros isolés elle ne possède dans le compact  $\bar{\Omega}$  qu'un nombre fini de zéros. Tout zéro  $z$  a une certaine multiplicité finie  $m$  et nous comptons les zéros en additionnant leurs multiplicités. Soit donc  $N$  le nombre total avec multiplicités des zéros de  $f$  dans le compact  $\bar{\Omega}$ . Nous allons donner une formule pour  $N$ , en supposant que  $f$  n'a pas de zéro sur le contour lui-même :

$$\textbf{Théorème : } N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

La preuve en est simple : nous savons qu'en un zéro  $z$  de  $f$ , de multiplicité  $m$ , la fonction  $f'/f$  possède un pôle simple de résidu  $m$ . Et pour les  $z$  tels que  $f(z) \neq 0$ , alors  $f'/f$  y est régulière. Donc le Théorème est une conséquence directe du théorème des résidus. 31.b

Plus généralement on peut compter le nombre des solutions (avec multiplicités) de l'équation  $f(z) = w$ , à partir du moment où  $f(z) - w$  ne s'annule pas sur le contour lui-même. Il suffit d'appliquer la formule précédente à la fonction  $g(z) = f(z) - w$  et l'on obtient que le nombre de solutions dans  $\Omega$  de l'équation  $f(z) = w$  est  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)-w} dz$ . 31.c

On peut donner une autre interprétation de la formule pour  $N$ . En composant une paramétrisation  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  du contour de Jordan avec la fonction  $f$  on obtient un certain lacet  $\Gamma = f \circ \gamma$ , qui en fait est à valeurs dans  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$  car on a supposé que  $f$  ne s'annulait pas sur le contour lui-même. Ce lacet fait un certain nombre de tours autour de l'origine, qui multiplié par  $2\pi$  est égal à la variation de l'argument de  $f(z)$  lorsque  $z$  fait le tour complet du contour de Jordan. Ce nombre de tours,  $\text{Ind}(\Gamma, 0)$  vaut, nous le savons,  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w}$ . En remplaçant  $w$  par  $f(\gamma(t))$ ,  $a \leq t \leq b$  et de même en exprimant la formule pour  $N$  plus haut comme une intégrale sur  $[a, b]$  on constate que les deux intégrales coïncident. Donc : 31.d

**Théorème :** *on a aussi  $N = \text{Ind}(f \circ \gamma, 0)$ , autrement dit la variation totale de  $\arg f(z)$  lorsque  $z$  fait dans le sens direct le tour du contour de Jordan  $\gamma$  est égale à  $2\pi$  fois le nombre total de zéros de  $f$  à l'intérieur du contour.*

Le support du lacet  $f \circ \gamma$  est un compact dans  $\mathbf{C}$  dont le complémentaire a un certain nombre de composantes connexes. La fonction définie sur ce complémentaire  $w \mapsto N(w) = \text{Ind}(f \circ \gamma, w)$  est, on le sait, constante dans chaque composante connexe. Elle donne le nombre de solutions dans  $\Omega$  de l'équation  $f(z) = w$ . Pour  $|w|$  très petit, il est certain qu'il est dans la composante connexe de 0, donc  $N(w)$  est égal au nombre  $N$  associé à  $w = 0$ . Pour  $|w|$  grand, ou plus généralement dans la seule composante connexe non bornée, le nombre  $N(w)$  vaut 0, puisqu'il est certain que  $f(z) = w$  n'aura pas de solutions si  $|w|$  est très grand (puisque la fonction continue  $f$  est bornée sur le compact  $\bar{\Omega}$ ). 31.e

**Théorème de Rouché :**<sup>34</sup> *soit  $f$  et  $g$  deux fonctions holomorphes sur un contour de Jordan  $\gamma$  et son intérieur  $\Omega$ , et vérifiant  $|g| < |f|$  sur le contour  $\gamma$ . Alors  $f$  et  $f + g$  ont exactement le même nombre total de zéros (avec multiplicités) dans  $\Omega$ .* 31.f

Preuve : remarquons que  $|f| > 0$  et aussi  $|f + g| > 0$  sur  $\gamma$ , on peut donc utiliser le principe de la variation de l'argument et écrire  $N_f = \text{Ind}(f \circ \gamma, 0)$  et  $N_{f+g} = \text{Ind}((f + g) \circ \gamma, 0)$ . Il est facile de le vérifier que  $H(t, u) = f(\gamma(t)) + ug(\gamma(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ ,  $0 \leq u \leq 1$  est une homotopie, ne passant jamais par 0 du lacet  $f \circ \gamma$  vers le lacet  $(f + g) \circ \gamma$ . Les deux lacets ont donc le même indice par rapport à l'origine, et cela prouve le théorème de Rouché. 31.g

Je signale une version plus forte du théorème de Rouché, qui n'est pas aussi connue qu'elle devrait l'être. Au lieu de l'inégalité  $|g| < |f|$  sur le contour, qui équivaut à  $|g/f| < 1$  il 31.h

---

34. Eugène Rouché, 1832–1910

suffit de demander que  $g/f$  prenne ses valeurs dans  $\mathbf{C} \setminus ]-\infty, -1]$ , ou de manière équivalente  $|g| < |f| + |f + g|$  (sur le contour). D'ailleurs il vaut mieux exprimer alors le théorème sous la forme : si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions telles que  $|f_1 - f_2| < |f_1| + |f_2|$  sur le contour alors les deux nombres de zéros  $N_1$  et  $N_2$  dans  $\Omega$  coïncident. Vous remarquerez que l'inégalité  $|z_1 - z_2| < |z_1| + |z_2|$  est équivalente à  $0 \notin [z_1, z_2]$  et donc l'argument par homotopie de la preuve précédente marchera.

**31.i** Revenons à une seule fonction  $f$  mais autorisons à  $f$  un nombre fini de singularités dans  $\Omega$ , qui **sont des pôles**. Soit  $P$  le nombre total de pôles, comptés avec multiplicités. La formule de la variation de l'argument est alors

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

La preuve est la même.

**31.j** Si l'on remplace  $f(z)$  par  $f(z) - w$  on modifie certes les zéros, mais pas les pôles qui restent là où ils sont et avec les mêmes multiplicités. Donc :

$$N(w) - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz$$

Lorsque  $w$  est très grand, le nombre  $N(w)$  ne dépend pas de  $w$  puisque  $N(w) - P$  est l'indice du lacet  $f \circ \gamma$  par rapport à  $w$  et que ce lacet est compact donc borné, donc il existe  $R$  tel que  $\{|w| > R\}$  soit entièrement inclus dans le complémentaire de  $f \circ \gamma$ , donc deux  $w$  grands peuvent être reliés continûment par un chemin ne rencontrant pas ce lacet. Si l'on regarde la formule intégrale on voit qu'elle tend vers zéro lorsque  $|w|$  tend vers l'infini. La conclusion est que pour tout  $w$  suffisamment grand le nombre  $N(w)$  est égal à  $P$  (on peut aussi argumenter directement que  $\text{Ind}(f \circ \gamma, w) = 0$  pour  $|w|$  grand, c'est vrai pour tout lacet).

## 32 Propriétés locales : préservation des angles, application ouverte

**32.a** Soit  $U$  un ouvert connexe et soit  $f$  une fonction holomorphe non constante sur  $U$ . Pour tout  $z_0$  la fonction  $f(z) - f(z_0)$  n'est pas identiquement nulle, donc  $z_0$  en est un zéro isolé. Soit  $N$  la multiplicité de  $z_0$  comme zéro de  $f(z) - f(z_0)$ . On a donc  $f(z_0 + h) = f(z_0) + c_N h^N + c_{N+1} h^{N+1} + \dots$  sur le plus grand disque  $D(z_0, R)$  inclus dans  $U$ , avec  $c_N \neq 0$ . Nous voyons que  $N$  est aussi caractérisé par le fait que  $N - 1$  est la multiplicité de  $z_0$  comme zéro de  $f'(z)$  : la fonction  $f'$  n'est pas identiquement nulle (sinon  $f$  serait constante) et donc presque tous les  $z_0$  ont  $N - 1 = 0$ , c'est-à-dire  $N = 1$ . Les autres, ceux qui ont  $N \geq 2$  sont les zéros de la fonction  $f'$ , et ils sont donc isolés. On les appelle les points critiques de la fonction  $f$ .

**32.b** Revenons à la formule  $f(z_0 + h) = f(z_0) + c_N h^N + c_{N+1} h^{N+1} + \dots$ , et écrivons  $w_0 = f(z_0)$  et  $h = r e^{i\theta}$ . On a donc en première approximation  $f(z_0 + h) = w_0 + c_N r^N e^{Ni\theta} + \dots$  et donc deux demi-droites  $z_0 + e^{i\phi} \mathbf{R}^+$  et  $z_0 + e^{i\psi} \mathbf{R}^+$  sont transformées en deux courbes ayant  $w_0$  comme point commun, et tangentes en  $w_0$  respectivement à  $w_0 + e^{iN\phi + i\alpha} \mathbf{R}^+$  et  $w_0 + e^{iN\psi + i\alpha} \mathbf{R}^+$  (avec  $\alpha = \text{Arg}(c_N)$ ). On a donc deux courbes qui se rencontrent en  $w_0$  avec un angle de  $N(\phi - \psi)$ . Plus généralement deux arcs avec leurs sommets en  $z_0$  et faisant

un certain angle sont transformés en deux arcs avec leurs sommets en  $w_0$  et y faisant le même angle multiplié par  $N$ .

Si  $z_0 \in U$  n'est pas un point critique, on a  $N = 1$  et  $f$  possède donc en  $z_0$  la propriété dite **conforme : elle préserve les angles**. En particulier deux courbes qui sont perpendiculaires en  $z_0$  auront leurs images se croisant perpendiculairement en  $w_0$ . On utilise souvent cette propriété pour comprendre géométriquement l'action d'une fonction holomorphe  $f$ . 32.c

Comme  $z_0$  est un zéro isolé de  $f(z) - w_0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour  $0 < |z - z_0| \leq \delta$  on a  $f(z) \neq w_0$ . Donc le nombre  $N$  est aussi le nombre total de zéros, comptés avec multiplicités de la fonction  $f(z) - w_0$  dans l'ouvert  $\Omega = D(z_0, \delta)$  dont le bord est le contour de Jordan  $|z - z_0| = \delta$ . Par le principe de la variation de l'argument on sait que le nombre de solution  $N(w)$  de l'équation  $f(z) = w$  dans  $\Omega$  est une fonction qui est constante sur chaque composante connexe du complémentaire de l'image par  $f$  du cercle  $|z - z_0| = \delta$ . En particulier en notant  $\eta = \inf_{|z - z_0| = \delta} |f(z) - w_0|$  qui est strictement positif, le disque  $D(w_0, \eta)$  est entièrement inclus dans la composante connexe contenant  $w_0$ , et ainsi  $N(w) = N$  pour tout  $w$  de ce disque. 32.d

En tout cas, et c'est la conclusion qui nous intéresse on a  $N(w) \geq 1$  pour  $|w - w_0|$  suffisamment petit et donc  $f(D(z_0, \delta))$  contient un voisinage ouvert de  $w_0$ . On aurait pu prendre  $\delta$  plus petit et on peut donc affirmer que pour tout ouvert  $V \subset U$  contenant  $z_0$ , l'image  $f(V)$  non seulement contient  $w_0$  mais contient aussi tout  $w$  suffisamment proche. 32.e

Comme cela vaut pour tous les  $z_0$  de  $U$ , on en déduit que l'image par  $f$  de tout ouvert  $V \subset U$  est un ouvert. C'est là le **Théorème de l'application ouverte**. 32.f

Supposons que  $z_0$  n'est pas un point critique, donc  $N = 1$ . Avec les mêmes notations on a  $N(w) = 1$  pour  $|w - w_0| < \eta$ . Donc  $w$  possède pour  $f$  un antécédent  $Z = \phi(w)$  (unique) dans le disque  $D(z_0, \delta)$ . On peut calculer  $Z$ ! En effet considérons l'intégrale 32.g

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \delta} z \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz$$

À l'intérieur du contour il ne peut y avoir de singularité que là où  $f(z) = w$ . Donc en l'unique point  $Z$ , qui est un zéro simple de  $f(z) - w$ . On calcule le résidu de  $z \frac{f'(z)}{f(z) - w}$  au point  $Z$  et on trouve...  $Z$ ! Donc

$$\phi(w) = Z = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \delta} z \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz$$

est une application, visiblement holomorphe (on y revient), qui donne la réciproque locale de la fonction  $f : \phi(w_0) = z_0$  et  $f(\phi(w)) = w$  pour  $|w - w_0| < \eta$ .

Comme  $f$  est continue, il existe  $0 < \delta' \leq \delta$  tel que  $f(D(z_0, \delta')) \subset D(w_0, \eta)$ . Comme  $f(z) = w$  et  $|z - z_0| < \delta' \leq \delta$  on a nécessairement  $z = \phi(w)$ . Donc la restriction de  $f$  à  $D(z_0, \delta')$  est **injective** (on peut le prouver plus élémentairement). **Attention!** On a supposé que  $N = 1$ , c'est-à-dire que  $z_0$  n'est PAS un point critique. En un point critique une application holomorphe n'est PAS localement injective. 32.h

**Conclusion :** en un point non-critique une application holomorphe est localement injective. Sa réciproque, définie localement, est aussi une application holomorphe. 32.i

### 33 Formules de Lagrange pour l'inversion

On considère un point non-critique  $z_0$  d'image  $w_0$  et on veut inverser localement la fonc- 33.a

tion  $f$  c'est-à-dire résoudre l'équation  $f(z) = w$ . On veut  $z - z_0$  en une série de puissances de  $w - w_0$ .

**33.b** Pour simplifier nous supposons  $z_0 = w_0 = 0$ . On a donc une série (de rayon de convergence non nul)  $c_1z + c_2z^2 + \dots$ , avec  $c_1 \neq 0$ , et il s'agit de donner une solution de l'équation

$$c_1z + c_2z^2 + \dots = w$$

sous la forme

$$z = d_1w + d_2w^2 + \dots$$

avec une série entière de rayon de convergence non nul. En première approximation  $c_1z \sim w$ , donc  $z \sim \frac{1}{c_1}w$  mais après cela se complique.

**33.c** Nous pouvons résoudre ce problème avec les méthodes de la section précédente. Avec  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ , soit  $0 < \delta$  suffisamment petit pour que  $f$  soit non nulle pour  $0 < |z| \leq \delta$ , soit alors  $\eta$  l'infimum de  $|f|$  sur le cercle de rayon  $\delta$ , on sait que pour  $|w| < \eta$  il existe une solution unique à l'équation  $f(z) = w$  telle que  $0 \leq |z| < \delta$  et que cette solution est

$$\phi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\delta} z \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz$$

On écrit alors :

$$\phi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\delta} z \frac{f'(z)}{f(z)(1 - w/f(z))} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\delta} z \frac{f'(z)}{f(z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{f(z)^k} dz$$

La convergence de la série est normale par rapport à  $z$  (justifier) et donc on peut permuter somme infinie et intégrale et on obtient effectivement un développement

$$\phi(w) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k w^k \quad d_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\delta} z \frac{f'(z)}{f(z)^{k+1}} dz$$

Pour  $k = 0$ , on a  $d_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\delta} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  et on sait déjà que cela vaut 0. Pour  $k \geq 1$ , on fait une « intégration par parties » puisque la dérivée de  $\frac{z}{f(z)^k}$  vaut  $\frac{1}{f(z)^k} - kz \frac{f'(z)}{f(z)^{k+1}}$  et aura une intégrale nulle sur tout lacet, donc :

$$k d_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\delta} \frac{1}{f(z)^k} dz$$

Ceci donne la formule :

$$k d_k = \text{Rés}\left(\frac{1}{f(z)^k}, 0\right)$$

Comme  $f$  a un zéro simple en 0, ce résidu est aussi le coefficient de  $z^{k-1}$  dans le développement en série à l'origine de la fonction holomorphe  $(z/f(z))^k$ . On peut donc écrire cela sous la forme :

$$k d_k = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \right|_{z=0} \left( \frac{z}{f(z)} \right)^k$$

Ce sont les célèbres formules de Lagrange<sup>35</sup>.

**33.d** Plus généralement on peut se donner une autre fonction holomorphe  $g(z)$  et demander

---

35. Joseph Louis Lagrange, 1736–1813

le développement en série  $g(z) = g(\phi(w)) = e_0 + e_1w + e_2w^2 + \dots$ . Si on suit la preuve précédente il suffira de remplacer le  $z$  (pas tous ! un en particulier, lequel ?) dans l'intégrale par  $g(z)$  et on obtient ensuite la formule

$$k e_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\delta} \frac{g'(z)}{f(z)^k} dz = \text{Rés}\left(\frac{g'(z)}{f(z)^k}, 0\right) = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \right|_{z=0} g'(z) \left(\frac{z}{f(z)}\right)^k$$

Ces formules plus générales furent elles aussi découvertes par Lagrange. On y a pris  $k \geq 1$ , car de toute façon pour  $k = 0$ , on a directement  $e_0 = g(0)$ . Il est plus commode de mémoriser la formule en se disant que  $k e_k$  est le coefficient de  $z^{k-1}$  dans le développement en série de  $g'(z)(z/f(z))^k$ . Bon, j'avoue, les cas où cela permet réellement d'inverser une série (au sens d'obtenir une formule exacte pour les coefficients de la série réciproque) sont assez rares, mais certains sont très intéressants.

## 34 Homographies

Je rajoute à cette édition « DeLuxe » du polycopié 2006 une petite section sur les homographies, reprenant le cours fait en amphithéâtre à la fin du semestre, mais que je n'avais pas eu le temps d'inclure dans le fascicule distribué aux étudiants.

Soient  $a, b, c, d$  des nombres complexes avec  $ad - bc \neq 0$ . L'homographie associée est la transformation  $g$  de  $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$  définie par la formule  $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ; on adopte en fait la convention, lorsque  $c = 0$  ( $g$  est alors une transformation affine) que  $g(\infty) = \infty$  et lorsque  $c \neq 0$  que  $g(-\frac{d}{c}) = \infty$  et  $g(\infty) = \frac{a}{c}$ . Les transformations affines sont donc caractérisées parmi les homographies comme celles ayant  $\infty$  comme point fixe.

Considérons une matrice inversible  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  d'homographie associée  $g$  et une autre  $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  d'homographie associée  $G$ . Un petit calcul (où l'on vérifie que tout se passe bien en ce qui concerne le point spécial  $\infty$ ) montre que l'homographie associée au produit  $MN$  est exactement la composée  $g \circ G$ . En particulier si l'on prend pour  $N$  l'inverse de  $M$  on obtient une homographie  $G$  avec  $g \circ G = Id$  et  $G \circ g = Id$ . Les homographies sont donc des bijections, et la bijection réciproque à l'homographie  $z \mapsto w = \frac{az+b}{cz+d}$  est l'homographie  $w \mapsto z = \frac{dw-b}{-cw+a}$ . Bien sûr on aura remarqué que deux matrices proportionnelles donnent la même homographie. Supposons qu'une matrice donne l'homographie identité; donc aucun point à distance finie n'est envoyé sur  $\infty$ , ainsi  $c = 0$ , et  $\forall z \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z$ , d'où  $a = d$  et  $b = 0$ . Le noyau du morphisme de  $GL(2, \mathbf{C})$  vers le groupe des homographies est donc  $\mathbf{C}^\times \cdot I_2$ , autrement dit le groupe des homographies est isomorphe à  $PGL(2, \mathbf{C}) = GL(2, \mathbf{C})/\mathbf{C}^\times \cdot I_2$ .

Une homographie avec  $g(\infty) = \infty$  est de la forme  $z \mapsto \alpha z + \beta$ . Si de plus  $g(0) = 0$  alors  $\beta = 0$ . Si alors  $g(1) = 1$  alors  $\alpha = 1$  et  $g = Id$ . Supposons que deux homographies  $g$  et  $G$  vérifient  $g(0) = G(0)$ ,  $g(1) = G(1)$  et  $g(\infty) = G(\infty)$ , alors en considérant  $g^{-1} \circ G$  on peut affirmer qu'en fait  $g = G$ .

Réciproquement donnons nous trois points distincts  $z_0, z_1$  et  $z_\infty$  de  $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$  et cherchons  $g$  avec  $g(0) = z_0$ ,  $g(1) = z_1$  et  $g(\infty) = z_\infty$ . Si  $z_\infty \neq \infty$  notons  $k$  l'homographie  $z \mapsto \frac{1}{z} + z_\infty$  de sorte que  $k(\infty) = z_\infty$ . Si  $z_\infty = \infty$  on prend  $k = Id$ . Soit alors  $Z_0 = k^{-1}(z_0)$  et  $Z_1 = k^{-1}(z_1)$ . Comme  $k$  est bijective,  $Z_0$  et  $Z_1$  sont finis et distincts. L'homographie  $m(z) = (Z_1 - Z_0)z + Z_0$  envoie 0 sur  $Z_0$  et 1 sur  $Z_1$  (et  $\infty$  sur  $\infty$ ). Donc la composée  $k \circ m$  envoie 0 sur  $k(Z_0) = z_0$ , envoie 1 sur  $k(Z_1) = z_1$  et envoie  $\infty$  sur  $k(\infty) = z_\infty$ . En conclusion il existe bien une

homographie avec  $g(0) = z_0$ ,  $g(1) = z_1$  et  $g(\infty) = z_\infty$ , et elle est unique par le paragraphe précédent.

**34.f** Notons  $L$  l'homographie  $z \mapsto \frac{1}{z}$ . Soit  $g$  une homographie avec  $g(\infty) \neq \infty$ . Donc  $g$  est de la forme  $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  avec  $c \neq 0$  et en divisant tous les coefficients par  $c$  on peut imposer  $c = 1$ . Alors  $g(z) = a + \frac{b-ad}{z+d}$  peut s'écrire comme la composée  $k \circ L \circ m$  avec  $m(z) = z + d$  et  $k(Z) = a + (b-ad)Z$ . Ainsi toute homographie est soit une transformation affine soit de la forme  $k \circ L \circ m$  avec  $k$  et  $m$  deux transformations affines.

**34.g** Il est évident que l'image par une transformation affine d'un cercle est un cercle et d'une droite est une droite. On conviendra d'appeler « cercle-droite » tout sous-ensemble de  $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$  qui est soit un cercle  $C$  (de rayon  $> 0$ ) soit  $D \cup \{\infty\}$  avec  $D$  une droite. On essaiera d'adopter la notation  $\mathcal{D}$  lorsque l'on fait référence  $D \cup \{\infty\}$ . Un cercle-droite est un cercle si et seulement si il ne contient pas le point à l'infini. On va montrer que l'image par  $L$  d'un cercle-droite est toujours un cercle-droite, cela sera donc, compte tenu du paragraphe précédent, vrai plus généralement pour toutes les homographies.

**34.h** Soit  $C$  un cercle-droite. Il existe  $A, B, C, D$  réels tels que les points  $z = x + iy$  de  $C \cap \mathbf{C}$  sont ceux qui vérifient l'équation :

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

Pour une droite on aura choisi  $A = 0$ . Avec la notation  $L(z) = x' + iy'$  (pour  $z \neq 0$ ), on a  $z = (x' + iy')^{-1}$  donc  $x = x'/(x'^2 + y'^2)$  et  $y = -y'/(x'^2 + y'^2)$ . De plus  $x^2 + y^2 = |z|^2 = (x'^2 + y'^2)^{-1}$ . Donc  $z$  non nul est sur  $C \cap \mathbf{C}$  si et seulement si  $L(z) = x' + iy'$  vérifie l'équation :

$$A + Bx' - Cy' + D(x'^2 + y'^2) = 0$$

Cette équation, pour  $(x', y') \neq (0, 0)$  décrit exactement l'ensemble  $L(C \cap \mathbf{C}^\times)$ ; elle ne peut donc pas être dégénérée au sens d'avoir comme ensemble de solutions  $\emptyset$ , ou un unique point, ou encore  $\mathbf{C}^\times$ . C'est donc que soit  $D \neq 0$  et alors on a (vraiment) un cercle, soit  $D = 0$  et on a une droite. L'équation ci-dessus contient en plus dans  $\mathbf{C}$  la solution  $z' = 0$  si et seulement si  $A = 0$  c'est-à-dire si  $C$  était une droite ( $\cup \{\infty\}$ ), et donc  $0$  est bien dans l'image de  $C$  car  $L(\infty) = 0$ . L'équation ci-dessus est celle d'une droite si et seulement si  $D = 0$  auquel cas l'équation d'origine montre que  $0$  était dans  $C$ , et donc  $\infty = L(0)$  est bien dans  $L(C)$ . En conclusion on a établi que  $L(C)$  est toujours un cercle-droite. Les droites passant par l'origine deviennent des droites passant par l'origine (leur symétrique par rapport à  $\mathbf{R}$  en fait), les droites ne passant pas par l'origine deviennent des cercles passant par l'origine, les cercles passant par l'origine deviennent des droites passant par l'origine et les cercles ne passant pas par l'origine deviennent des cercles ne passant pas par l'origine.

**34.i** Pour une transformation affine  $g(z) = \alpha z + \beta$  on a  $g'(z) = \alpha \neq 0$  et sinon pour  $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  on a  $g'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ . Aucun point n'est donc critique (et si on munissait  $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$  de sa structure de surface de Riemann cela vaudrait aussi à l'infini et au point  $-\frac{d}{c}$ ). Les homographies sont partout conformes.

**34.j** Cherchons à déterminer l'image d'une droite ou d'un cercle par une homographie  $g$  quelconque. Le cas des transformations affines étant trivial, on supposera que  $g$  n'en est pas une, et soit donc  $z_0$  l'unique nombre complexe avec  $g(z_0) = \infty$ . Soit aussi  $w_0 = g(\infty)$  (qui est lui aussi dans  $\mathbf{C}$ ). Une droite passant par  $z_0$  est transformée en une droite (car elle doit contenir des points de modules arbitrairement grands) passant par  $w_0$  (qui est  $g(\infty)$ ) et il suffit de calculer un seul autre point pour la déterminer.

**34.k** Une droite  $\mathcal{D} = D \cup \{\infty\}$  ne passant pas par  $z_0$  est transformée en un cercle  $C$ , qui

forcément passe par  $w_0$ . Soit  $z_1$  le point de  $D$  le plus proche de  $z_0$  et soit  $E$  la droite passant par  $z_0$  et  $z_1$ . L'image de  $E$  est la droite (privée de  $w_0$ ) passant par  $w_0$  et par  $w_1 = g(z_1)$ . Cette droite doit couper perpendiculairement, par la propriété conforme, le cercle  $g(D)$  au point  $w_1$ . Cela n'est possible que si le centre du cercle est sur cette droite et comme de plus le cercle doit passer par  $w_0$  la conclusion est que  $g(D)$  est LE cercle dont un diamètre est le segment  $[w_0, w_1] = [g(\infty), g(z_1)]$ .

Si l'on a un cercle  $C$  qui passe par  $z_0$  son image est une droite. Soit  $z_1$  le symétrique de  $z_0$  par rapport au centre de  $C$ . La droite passant par  $z_0$  et  $z_1$  est transformée en la droite passant par  $w_0 = g(\infty)$  et  $w_1 = g(z_1)$ . Au point  $w_1$  cette droite doit couper perpendiculairement la droite image de  $C$  et cela détermine cette dernière. 34.1

Finalement si on a un cercle ne passant pas par  $z_0$  on note  $z_1$  et  $z_2$  les deux points d'intersection du cercle avec la droite issue de  $z_0$  et passant par le centre du cercle. On calcule  $w_1 = g(z_1)$  et  $w_2 = g(z_2)$ . Ces deux points sont sur le cercle-image et de plus ce dernier doit y couper perpendiculairement la droite passant par  $w_1$  et  $w_2$  car celle-ci est l'image de la droite passant par  $z_1$  et  $z_2$ . Le cercle recherché est donc déterminé de manière unique comme ayant  $[g(z_1), g(z_2)]$  comme l'un de ses diamètres. 34.m

L'image d'un connexe par une application continue est un connexe. Comme les cercles-droites  $C$  découpent deux composantes connexes dans le plan complexe, l'image de chacune d'elle est entièrement incluse dans l'une des composantes connexes du complémentaire de  $g(C)$ , mais comme  $g$  est surjective, on ne peut rater aucun point à l'arrivée, et donc chacune des deux composantes connexes au départ est biunivoquement identifiée à l'une et pas l'autre des composantes connexes de l'arrivée (compte tenu de  $\infty$ , etc.). 34.n

Prenons par exemple une droite  $D$  délimitant un demi-plan ouvert  $H$  et soit  $z_0$  dans ce demi-plan et  $z_0^*$  son symétrique par rapport à  $D$ . Soit alors  $g(z) = (z - z_0)/(z - z_0^*)$ . Sur la droite  $D$  on a  $|g(z)| = 1$  donc l'image  $g(D)$  ne peut que être le cercle unité  $S^1$  (privé de 1 qui est  $g(\infty)$ ). Par ce qui précède  $g(H)$ , qui contient  $g(z_0) = 0$  est exactement  $D(0, 1)$ . Tout demi-plan est donc holomorphiquement isomorphe à  $D(0, 1)$ . La réciproque est donnée par la formule  $k(w) = (-z_0^*w + z_0)/(-w + 1) = \frac{z_0^*w - z_0}{w - 1}$ . 34.o

Soit  $\alpha \in D(0, 1)$  et  $k_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$ . Si  $|z| = 1$  alors  $|z - \alpha| = |1 - \alpha\bar{z}| = |1 - \bar{\alpha}z|$  et donc  $|k_\alpha(z)| = 1$ . Donc l'image de  $S^1$  par l'homographie  $k_\alpha$  est à nouveau  $S^1$  et comme le point  $\alpha$  est envoyé sur 0, l'image de  $D(0, 1)$  est exactement  $D(0, 1)$ . L'application  $z \mapsto k_\alpha(z)$  est donc une bijection holomorphe de  $D(0, 1)$ , ce que l'on appelle un automorphisme. On note que  $k_\alpha(0) = -\alpha$ . De plus la réciproque de  $\frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$  est  $z \mapsto \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}$ , autrement dit  $(k_\alpha)^{-1} = k_{-\alpha}$ . 34.p

Soit  $f$  un automorphisme de  $D(0, 1)$  et soit  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ . Le composé  $g = f \circ k_{-\alpha}$  est un automorphisme de  $D(0, 1)$  tel que  $g(0) = 0$ . Comme  $|g(z)| < 1$  pour  $|z| < 1$  on a par le Lemme de Schwarz,  $|g(z)| \leq |z|$  pour tout  $z \in D(0, 1)$ . Soit  $k$  la réciproque de  $g$ , on a aussi  $k(0) = 0$  et donc aussi  $|k(z)| \leq |z|$  pour tout  $z$ . Ainsi  $|g(z)| \leq |z| = |k(g(z))| \leq |g(z)|$ , donc  $|z| = |g(z)|$ . Mais la fonction holomorphe  $g(z)/z$  est alors de module constant et est par exemple par le principe du maximum en fait une constante  $w$ , de module 1. En conclusion on a  $f(k_{-\alpha}(z)) = wz$  pour tout  $z \in D(0, 1)$ . En remplaçant  $z$  par  $k_\alpha(z)$  dans cette équation on en déduit : 34.q

$$\forall z \in D(0, 1) \quad f(z) = wk_\alpha(z) = w \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

Le point  $\alpha$  et donc la constante  $w$  sont déterminés de manière unique. On a donc trouvé les automorphismes du disque unité : ce sont les homographies qui envoient  $S^1$  sur  $S^1$  et

l'origine sur un point de module inférieur à 1.

**34.r** Le demi-plan de Poincaré  $\mathcal{H} = \{z \mid \text{Im}(z) > 0\}$  est isomorphe via  $\psi(z) = \frac{z-i}{z+i}$  avec  $D(0, 1)$ . Un automorphisme  $f$  de  $\mathcal{H}$  définit par  $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$  un automorphisme  $g$  de  $D(0, 1)$ , donc comme  $f = \psi^{(-1)} \circ g \circ \psi$  est la composée de trois homographies elle est elle-même (la restriction à  $\mathcal{H}$ ) d'une homographie. De plus on sait que  $g$  comme homographie vérifie  $g(S^1) = S^1$  et que  $\psi$  identifie  $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$  avec  $S^1$  donc  $f$  est la restriction à  $\mathcal{H}$  d'une homographie  $F$  avec  $F(\mathbf{R} \cup \{\infty\}) = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ . Les trois points  $F(0)$ ,  $F(1)$ ,  $F(\infty)$  sont donc réels (ou infini), et si l'on regarde la construction dans **34.e** d'une homographie envoyant 0, 1 et  $\infty$  sur trois points donnés, cette construction donne une homographie  $F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  avec  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et  $d$  réels lorsque  $F(0)$ ,  $F(1)$  et  $F(\infty)$  sont réels.

**34.s** Tout automorphisme du demi-plan de Poincaré est donc de la forme  $z \mapsto F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  avec  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et  $d$  réels. Avec  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et  $d$  réels on a  $F(\mathbf{R} \cup \{\infty\}) = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$  et alors soit  $F(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$  soit  $F(\mathcal{H}) = \{z \mid \text{Im}(z) < 0\}$ , donc en fait  $F(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$  si et seulement si  $\text{Im}(F(i)) > 0$ , c'est-à-dire si  $ad - bc > 0$ . En conclusion les automorphismes du demi-plan de Poincaré sont les homographies associées aux matrices réelles de déterminant  $> 0$ . En multipliant tous les coefficients par une constante (réelle), on peut rendre le déterminant égal à 1. Si une matrice  $M$  correspond à  $F$ , les autres sont les  $\lambda M$ . Si on veut maintenir le déterminant égal à un, il faut  $\lambda^2 = 1$ , c'est-à-dire  $\lambda = \pm 1$ . Le groupe des automorphismes du demi-plan de Poincaré est donc isomorphe au groupe  $PSL(2, \mathbf{R}) = SL(2, \mathbf{R}) / \{\pm I_2\}$  avec  $SL(2, \mathbf{R})$  le groupe des matrices réelles  $2 \times 2$  de déterminant 1.

## 35 Annexe : Sur les cycles homologiquement triviaux

Soit  $U$  un ouvert, soient  $\delta_1, \dots, \delta_m$  des lacets tracés dans  $U$ , soient  $c_1, \dots, c_m$  des nombres complexes et soit  $\Gamma$  le 1-cycle  $c_1\delta_1 + \dots + c_m\delta_m$ . Pour tout point  $P$  non situé sur l'union des supports des lacets  $\delta_j$  on a défini l'indice  $\text{Ind}(\Gamma, P)$  de  $\Gamma$  par rapport à  $P$ . Le but de cette annexe est de décrire une preuve de l'équivalence  $2 \Leftrightarrow 3$  du Théorème de la section **27.t** :

**Théorème :** *La condition nécessaire et suffisante pour que  $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$  pour toute fonction holomorphe  $f$  sur  $U$  est que  $\text{Ind}(\Gamma, P) = 0$  pour tout point  $P$  du complémentaire de  $U$ .*

On a  $\text{Ind}(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0}$  et  $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$  est une fonction holomorphe sur  $U$  lorsque  $z_0 \notin U$ . Cela règle le cas d'une implication et il faut montrer l'autre, à savoir : si  $\text{Ind}(\Gamma, P) = 0$  pour tout point  $P$  du complémentaire de  $U$  alors  $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$  pour toute fonction holomorphe  $f$  sur  $U$ . Tout d'abord une première réduction : a priori les coefficients  $c_j$  du cycle  $\Gamma$  ont le droit d'être complexes  $c_j = a_j + ib_j$ . Notons  $\text{Re}(\Gamma)$  et  $\text{Im}(\Gamma)$  les 1-chaînes  $\sum_j a_j\delta_j$  et  $\sum_j b_j\delta_j$ . Ce sont aussi des cycles (pourquoi) et il est aussi vrai qu'ils ont des indices nuls par rapport à chaque point  $P$  du complémentaire de  $U$  (pourquoi). Si l'on sait que l'intégrale sur eux de  $f(z)dz$  donne zéro on l'a aussi pour  $\Gamma$  (pourquoi). Bref, on peut d'emblée supposer que les  $c_j$  sont des nombres réels.

Pour commencer notons  $[a_j, b_j]$  l'intervalle paramétrant  $\delta_j$ . Lorsque  $t_1 < t_2$  sont donnés dans cet intervalle, on peut considérer, d'une part l'arc  $I$  de  $\delta_j$  allant de  $\delta_j(t_1)$  à  $\delta_j(t_2)$ , d'autre part la corde  $II$  allant en ligne droite de  $\delta_j(t_1)$  à  $\delta_j(t_2)$ , paramétrée linéairement par  $[t_1, t_2]$ , nous noterons cela  $\delta_j^*$  et en troisième part l'homotopie qui déforme  $I$  en  $II$  via  $H(t, u) = (1-u)\delta_j(t) + u\delta_j^*(t)$ ,  $0 \leq u \leq 1$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Si  $t_1$  et  $t_2$  sont suffisamment proches alors l'homotopie a lieu dans  $U$ . Par le théorème de Cauchy-Goursat, le cycle  $\Gamma^*$  obtenu en remplaçant  $\delta_j$  par  $\delta_j^*$  vérifie  $\int_{\Gamma^*} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz$  pour toute fonction holomorphe sur  $U$ , et en particulier il est toujours vrai pour  $\Gamma^*$  qu'il a un indice nul par rapport à tout  $P \notin U$ .<sup>36</sup>

36. on a autorisé dans le cycle  $c_1\delta_1 + \dots + c_m\delta_m$  des coefficients réels donc le mot « indice » ne se limite pas exclusivement à des valeurs entières.

Comme les supports des  $\delta_j$  sont compacts, il existe  $\eta > 0$  tel que tout point du plan complexe à distance au plus  $\eta$  d'un point quelconque du support de  $\Gamma$  est dans  $U$ . Par l'uniforme continuité de la fonction continue  $\delta_j$  on peut subdiviser  $[a_j, b_j]$  en un nombre fini de sous-intervalles  $[t_1, t_2]$  tels que l'arc allant de  $\delta_j(t_1)$  à  $\delta_j(t_2)$  est entièrement inclus dans le disque fermé de centre  $\delta_j(t_1)$  et de rayon  $\eta$ . Ce disque est convexe, donc l'homotopie considérée plus haut reste dans ce disque. Ainsi en un nombre fini d'étapes on transforme les lacets  $\delta_j$  en des lignes brisées, linéairement paramétrées, par des homotopies dans  $U$ .

Pour chaque sommet d'une telle ligne brisée, prenons un point très proche dont les coordonnées réelles et imaginaires sont des nombres rationnels. Nous pouvons réaliser une homotopie dans  $U$  en laissant immobile le sommet d'avant et le sommet d'après et en faisant glisser le sommet considéré, vers le point très proche à coordonnées rationnelles. En un nombre fini d'étapes nous avons transformé ainsi les  $\delta_j$  en des lignes brisées dont les sommets ont des coordonnées rationnelles. Maintenant pour chaque segment je le subdivise en  $N$  segments de même longueur, puis je remplace chaque petit segment par un déplacement horizontal puis un déplacement vertical. Si  $N$  est très grand, la nouvelle ligne brisée, qui est entièrement constituée de segments soit horizontaux soit verticaux, aux sommets à coordonnées rationnelles, est obtenue à partir de l'ancienne par un nombre fini d'homotopies qui restent dans  $U$  et ne changent donc pas les valeurs des intégrales des fonctions holomorphes, en particulier les indices par rapport aux points du complémentaire de  $U$ .

Finalement soit  $Q$  le plus petit commun multiple de tous les dénominateurs des coordonnées horizontales et verticales de tous les sommets ainsi construits. Multiplions par  $Q$  toute la situation, ouvert  $U$ , cycle  $\Gamma$ . Les sommets sont alors à coordonnées entières. Enfin subdivisons encore les segments si nécessaire pour nous ramener à la situation suivante : le cycle  $\Gamma$  est composé de segments horizontaux et verticaux reliant chacun des points à coordonnées entières  $n_1 + in_2$  à soit  $n_1 \pm 1 + in_2$  (segment horizontal vers le plus proche voisin à droite ou à gauche) ou à  $n_1 + in_2 \pm i$  (segment vertical vers le plus proche voisin soit en haut soit en bas). Imaginons le quadrillage du plan complexe donné par toutes les droites verticales d'abscisses entières, et toutes les droites horizontales d'ordonnées entières. Les points d'intersections de toutes ces droites forment un réseau. On dit que deux tels points  $P$  et  $Q$  sont plus proches voisins si au plus une de leurs coordonnées diffère par plus ou moins un. Un **lien** est un segment **orienté** allant soit d'un sommet  $P$  à son voisin à l'Est, soit d'un sommet  $P$  à son voisin au Nord.

Revenons à notre cycle  $\Gamma$ . Il parcourt chaque lien  $L$  un certain nombre de fois dans son sens naturel et un certain nombre de fois dans le sens contraire. Notons  $n_L$  le nombre total algébrique de tels parcours. Seuls un nombre fini de liens ont  $n_L$  non nul.<sup>37</sup> On peut donc écrire  $\Gamma = \sum_L n_L \cdot L$ .

À tout carré du quadrillage  $C$  j'associe le nombre  $n_C$  de la manière suivante :  $n_C = \text{Ind}(\Gamma, P)$  avec  $P$  un point quelconque de l'intérieur du carré  $C$ . **Par hypothèse, si l'intérieur du carré  $C$  contient un point hors de  $U$  alors  $n_C = 0$ .** Supposons même seulement que le bord du carré  $C$  a un point  $Q$  hors de  $U$ . Alors tout point  $Q'$  de l'intérieur très proche de  $Q$  peut être déformé continûment vers  $Q$  tout en évitant le support de  $\Gamma$ . L'indice  $\text{Ind}(\Gamma, Q)$  est nul donc aussi  $\text{Ind}(\Gamma, Q')$  donc  $n_C = 0$ . **Donc tout carré fermé  $C$  qui contient ne serait-ce qu'un point hors de  $U$  vérifie  $n_C = 0$ .** Il n'y aura qu'un nombre fini de carrés  $C$  avec  $n_C \neq 0$  (car tout point suffisamment éloigné du support de  $\Gamma$  a un indice nul). Soit  $\Delta$  la somme formelle finie  $\sum n_C \cdot C$ , où l'on ne retient que les carrés avec  $n_C \neq 0$  : les  $C$  que l'on retient sont donc **tous entièrement inclus dans  $U$** . Soit  $\Gamma' = \partial\Delta$  le cycle égal au « bord » de  $\Delta$  : c'est-à-dire, à chaque lien orienté  $L$  du type Sud-Nord j'associe  $n_L = n_{C_1} - n_{C_2}$  avec  $C_1$  le carré à sa gauche et  $C_2$  le carré à sa droite, et à chaque lien orienté  $L$  du type Ouest-Est, j'associe  $n_L = n_{C_1} - n_{C_2}$  avec  $C_1$  le carré du haut et  $C_2$  le carré du bas. On peut aussi écrire, avec des notations auto-explicatives  $\Gamma' = \sum_C n_C \partial C$ .

**Je prétends que  $\Gamma'$ , c'est exactement la même chose que  $\Gamma$ .** En effet, considérons par exemple un lien  $L$  du type Sud-Nord avec le carré  $C_1$  à sa gauche et le carré  $C_2$  à sa droite. Prenons un point  $P_1$  dans (l'intérieur de)  $C_1$  extrêmement proche du milieu du lien  $L$  et un point  $P_2$  dans  $C_2$

37. attention comme on autorise initialement des coefficients réels  $c_j$  dans le cycle, les  $n_L$  sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des  $c_j$ , ce ne sont pas forcément malgré la notation des nombres entiers.

extrêmement proche du milieu du lien  $L$ . Lorsque nous calculons  $n_{C_1} = \text{Ind}(\Gamma, P_1)$ , la contribution du lien  $L$  est approximativement égale à  $\frac{1}{2}n_L$  :<sup>38</sup> en effet vu de  $P_1$  lorsque l'on parcourt une fois  $L$  suivant son orientation la variation de l'argument  $\arg(z - P_1)$  est de presque  $+\pi$ , on divise par  $2\pi$  cela donne  $+\frac{1}{2}$ . De même lorsque nous calculons  $n_{C_2} = \text{Ind}(\Gamma, P_2)$ , la contribution du lien  $L$  est approximativement égale à  $-\frac{1}{2}n_L$  : vu de  $P_2$  la variation de l'argument lorsque l'on fait  $L$  une fois est de presque  $-\pi$ . La contribution des autres liens formant  $\Gamma$  pour le calcul soit de l'indice par rapport à  $P_1$  soit par rapport à  $P_2$  est quasi-identique pour  $P_1$  et pour  $P_2$ . En faisant tendre  $P_1$  et  $P_2$  vers le milieu du lien  $L$  ce qui ne change rien aux indices, on conclut finalement que  $n_{C_1} - n_{C_2} = +\frac{1}{2}n_L - (-\frac{1}{2}n_L) = +n_L$ . On raisonne de même avec les liens du type Ouest-Est.

En conclusion on a  $\Gamma = \Gamma' = \sum_C n_C \partial C$ . **On peut maintenant terminer la preuve** : si  $f$  est une fonction holomorphe quelconque sur  $U$  on a  $\int_\Gamma f(z) dz = \sum_C n_C \int_{\partial C} f(z) dz$  et par le théorème de Cauchy-Goursat  $\int_{\partial C} f(z) dz = 0$  pour tout carré fermé sur lequel  $f$  est holomorphe.

### 36 Annexe : la formule du produit infini pour $\sin(z)$

Il serait presque criminel de ne pas évoquer la formule d'Euler pour la fonction sinus

$$\sin(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

lorsque l'on fait un cours d'analyse complexe. La question est abordée de manière standard dans la section 14 des **exercices** de mon cours de l'année 2006/07, et aussi dans le **Chapitre III** du polycopié rédigé à l'occasion de l'année 2005/06, que je vous recommande de toute façon aussi, puisqu'il serait tout autant criminel de ne pas parler de la fonction Gamma. Néanmoins, je pense qu'il est profitable de savoir prouver cette formule sans trop déborder sur d'autres notions. On n'a pas besoin de savoir ce qu'est une fonction holomorphe.

Il existe de nombreuses méthodes, et je vais ici en présenter une qui est de celles inventées par Euler lui-même, elle est très belle. On a simplement ajouté la justification d'une certaine interversion de limites, qu'Euler aurait évidemment produite immédiatement si on la lui avait demandée. J'ai cherché à faire tout de la manière la plus élémentaire possible. En particulier je ne mentionnerai même pas ce que l'on dit habituellement sur la convergence d'un produit infini (pour cela, voir la section 15 des **exercices**). Tout ce que nous utilisons ici c'est que  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$  est défini comme la limite de  $\prod_{k=1}^N a_k$  lorsque  $N$  tend vers l'infini, si cette limite existe. Lille, le 15 mars 2007.

#### L'exponentielle

La formule  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n$  est parfois prise comme définition de  $e^z$ . Justifions que cette limite existe et vaut  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ . Par la formule du binôme

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(n)$$

avec  $u_k(n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z^k}{k!}$  pour<sup>39</sup>  $1 \leq k \leq n$  et  $u_k(n) = 0$  pour  $k > n$ . En tout cas  $|u_k(n)| \leq M_k = \frac{|z|^k}{k!}$ , avec  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$ , et pour tout  $k$  fixé, la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_k(n)$  existe (et vaut  $u_k = \frac{z^k}{k!}$ ). Par un argument bien connu (souvent appelé le test de convergence

38. si l'on n'avait pas initialement fait la réduction à des  $c_j$  réels, cette affirmation serait fautive. Pourquoi ?

39. faites attention que pour  $k = 1$  le produit vaut 1 et non pas  $1 - \frac{1}{n}$ . La notation  $\prod_{j=0}^{k-1} (1 - \frac{j}{n})$  serait moins porteuse de risques de malentendu, et marcherait aussi pour  $k = 0$  car par convention un produit vide vaut 1.

normale de Weierstrass), cela justifie que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_k(n)$$

En effet soit  $\epsilon > 0$  et soit  $N$  tel que  $\sum_{k=N+1}^{\infty} M_k < \epsilon$ . Alors  $|\sum_{k=1}^{\infty} u_k(n) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k| \leq \sum_{k=1}^N |u_k(n) - u_k| + 2\epsilon$ . Pour  $n$  suffisamment grand la première somme sera elle aussi  $\leq \epsilon$ . D'où un écart au plus égal à  $3\epsilon$  pour  $n$  grand.

### Le sinus

Euler avait prouvé que  $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ , cela résulte de  $\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$  et de la série pour  $e^z$ . Soit pour  $n$  entier :

$$P_n(z) = \frac{1}{2i} \left( \left(1 + \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} \right)$$

Les racines du polynôme  $P_n$  (qui est de degré  $2n+1$ ) sont faciles à déterminer, ce sont les  $x_k$  tels que  $1 + \frac{ix_k}{2n+1} = e^{2\pi i \frac{k}{2n+1}} \left(1 - \frac{ix_k}{2n+1}\right)$  pour  $k \in \mathbf{Z}$ , ce qui donne après simplification  $x_k = (2n+1) \operatorname{tg}\left(\pi \frac{k}{2n+1}\right)$ . Pour  $k = -n \dots n$  nous obtenons  $2n+1$  racines distinctes, ce sont donc toutes les racines et elles sont simples. On en déduit une factorisation :

$$P_n(z) = C_n \cdot z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)}\right)$$

Comme  $C_n = P'_n(0)$  on a en fait  $C_n = 1$ . Il suffit maintenant de faire tendre  $n$  vers l'infini, et donc, sous réserve de justifier que cela est légitime :

$$\sin(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)}\right) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

### Justification

Posons  $v_0 = z$ ,  $v_k = z \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 j^2}\right)$ , et  $u_0 = z$ ,  $u_k = v_k - v_{k-1}$ , donc  $v_k = z + u_1 + \dots + u_k$ . De plus pour  $k \geq 1$  on a  $u_k = -\frac{z^2}{\pi^2 k^2} v_{k-1}$ . Par ailleurs on peut majorer pour tout  $m$  :  $|v_m| \leq |z| \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{|z|^2}{\pi^2 j^2}\right) \leq |z| e^{\sum_{j=1}^m \frac{|z|^2}{\pi^2 j^2}} \leq |z| e^{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{\pi^2 j^2}}$ . Donc il existe une constante  $C$  (dépendant de  $z$ ) telle que  $|u_k| \leq C \frac{1}{k^2}$  pour tout  $k \geq 1$ .

Nous pouvons faire exactement pareil pour chaque  $n$  fixé avec  $v_0(n) = z$ , pour  $1 \leq k \leq n$  on prend  $v_k(n) = z \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi j}{2n+1}\right)}\right)$ , et pour  $k \geq n$   $v_k(n) = P_n(z)$ . On pose alors  $u_0(n) = z$ , et pour  $k \geq 1$  :  $u_k(n) = v_k(n) - v_{k-1}(n)$ , donc  $v_k(n) = z + u_1(n) + \dots + u_k(n)$ . En remarquant que  $(2n+1)^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi j}{2n+1}\right) \geq \pi^2 j^2$ , on peut majorer chaque  $|v_m(n)|$  puis chaque  $|u_k(n)|$  exactement comme précédemment. Avec la même constante  $C$  on a ainsi  $|u_k(n)| \leq C \frac{1}{k^2}$  pour tout  $k \geq 1$  et tout  $n \geq 0$ .

Les conditions de convergence normale sont donc vérifiées pour  $\lim_{n \rightarrow \infty} (z + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(n))$ , et comme bien sûr on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_k(n) = v_k$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_k(n) = u_k$ , finalement on conclut que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} u_k = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right)$ , ce qu'il fallait démontrer.

La méthode de réécrire un produit (éventuellement infini) sous la forme d'une somme (éventuellement infinie) était bien connue d'Euler, qui l'utilisait souvent.

**La série**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Pour une discussion relativement détaillée du lien entre la formule du produit infini pour  $\sin(z)$  et l'évaluation par Euler des sommes  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}$ ,  $m$  entier, voir le **Chapitre III** du polycopié de l'année 2005/06. On peut profiter ici de l'occasion fournie par la factorisation

$$P_n(z) = \frac{1}{2i} \left( \left(1 + \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} \right) = z \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)} \right),$$

pour observer qu'en prenant le coefficient de  $z^3$  on obtient :

$$\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6(2n+1)^3} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2n+1)^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)}.$$

Notre argument de convergence normale, compte tenu de  $\frac{1}{(2n+1)^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)} \leq \frac{1}{\pi^2 k^2}$  permet à nouveau de passer à la limite pour obtenir :

$$\frac{1}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2},$$

le célèbre résultat d'Euler, intimement lié à sa découverte du produit infini pour  $\sin(z)$ . La démonstration obtenue ici est donc particulièrement courte et élémentaire, mais bien sûr resterait incompréhensible et non motivée si on la détachait complètement du contexte de représenter  $\sin(z)$  comme un produit infini. Le lien découvert par Euler entre les sommes de puissances d'entiers et la « quadrature du cercle » (via l'apparition de  $\pi$ ) reste une source de fascination, d'autant plus que le même Euler a fait rentrer les nombres premiers dans la danse avec ses produits « eulériens » dont  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}$ . Rappelons qu'avec l'observation que  $\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$  il prouva l'infinité du nombre des nombres premiers d'une manière radicalement nouvelle et qui a depuis exercé une influence colossale.