Introduction

Les nombres réels résultent de la recherche d'un système (un ensemble abstrait avec certaines règles) qui contient les rationnels et permet d'obtenir les solutions de certaines équations polynomiales, comme par exemple $x^2 - 2 = 0$.
Historiquement, des considérations similaires donnent une extension des nombres réels. Dans le seizième siècle, G. Cardan considère des équations quadratiques (cubiques) comme $x^2 + 2x + 2 = 0$, qui ne sont satisfaites par aucun nombre réel x.

Les formules $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ donnent une expression "formelle" des solutions de l' équation $ax^2 + bx + c = 0$. Mais, cette formule contient des racines carrées de nombres réels négatifs. G. Cardan note que si ces "nombres complexes" sont traités comme des nombres ordinaires avec la règle additionnelle : $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$, ils résolvent ces équations. L'expression $\sqrt{-1}$ a maintenant est désignée $i = \sqrt{-1}$.

Progressivement , et particulièrement après les travaux de L. Euler dans le dixhuitième siècle, ces quantités "imaginaires" viennent jouer un role fondamental. Par exemple, la formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ révèle une profonde relation entre les nombres complexes et les fonctions trigonométriques.

L'analyse complexe qui est le sujet de ce cours, a été développée dans le dixneuvième siècle, essentiellement par A. Cauchy (1789-1857).

Sa théorie a été rendue plus rigoureuse et étendue par des mathematiciens comme P.Dirichlet (1805-1859), K.Weierstrass(1815-1897), B.Riemann(1826-1866). La recherche de méthodes pour décrire la conduction de la chaleur a énormément influencé le développement de la théorie.

La théorie a aussi des applications mathématiques à des problème qui à priori ne semblent pas concerner les nombres complexes. Par exemple, la preuve que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ ou $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$ pour $0 < \alpha < 1$, peut être difficile voir impossible en utilisant le calcul différentiel élémentaire, mais ces identités sont facilement établies en utilisant les techniques des variables complexes.

L'analyse complexe est devenue indispensable et un outil standard pour les mathématiciens, physiciens et ingénieurs ; le négliger peut être un handicap serieux dans tout domaine de recherche et d'applications faisant appel aux idées et techniques mathématiques.

References :

W. Rudin : *Analyse réelle et complexe*, Dunod (3eme edition) 2009.
Henri Cartan : *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, (6eme edition) Hermann, 1997.
Lars V. Ahlfors : *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1966.

Chapitre 1

Fonctions holomorphes

Dans ce chapitre les idées de base sur les nombres complexes et les fonctions analytiques sont introduites.

L'organisation du texte est analogue à celle de l'analyse élémentaire où on commence avec la droite réelle $\mathbb{R}$ et une fonction réelle $f(x)$ de la variable rélle x et après on étudie la dérivabilité de f.

De façon similaire en analyse complexe on commence par les nombres complexes et après on étudie la dérivabilité de la fonction $f(z)$.

L'analogie n'est pas tout à fait exacte car l'analyse complexe est une théorie beaucoup plus riche.

1.0.0 Rappel d'analyse sur $\mathbb{C}$

L'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2, $\mathbb{R}^2$ des couples ordonnés (x,y) de nombre réels muni de la multiplication :

$$(x_1,y_1).(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

et de l'addition des vecteurs est un corps commutatif, noté $\mathbb{C}$, appelé le corps des nombres complexes.

En posant $1 := (1,0)$ et $i := (0,1)$, on aura $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x + iy$, ainsi $\mathbb{C} = \{x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$.

1. Pour ce produit on a : $1^2 = 1.1 = 1$ et $i^2 = i.i = -1$.
2. Pour un nombre complexe $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathfrak{Re}(z) := x$ est la partie réelle de z et $\mathfrak{Im}(z) := y$ est la partie imaginaire de z.
3. le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est le conjugué de z
4. $|z| = \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ est le module de z
5. Pour $z \neq 0$, on a $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
6. $\mathbb{R}$ est identifié au sous-ensemble $\{z \in \mathbb{C}, \mathfrak{Im}(z) = 0\}$.

1.0.1 Applications $\mathbb{C}$-linéaires

Soit $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, une application $\mathbb{C}$-linéaire, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $L(z) = z.L(1) = wz$, où $w = L(1)$. Si $w \neq 0$, on écrit $w = \rho e^{i\theta}$, on obtient $L(z) = L(x+iy) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)(x+iy) = \rho(x\cos\theta - y\sin\theta) + i\rho(x\sin\theta + y\cos\theta)$

La matrice représentative de L dans la base canonique $\{1, i\}$ est alors :

$$\begin{pmatrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

c'est la matrice d'une similitude vectorielle directe, le produit d'une homothétie de rapport ρ et d'angle θ. Le déterminant est égal à $\rho^2 > 0$, une telle transformation conserve l'orientation et les angles.

Question : Sous-quelles condition une application $\mathbb{R}$-linéaire $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est $\mathbb{C}$-linéaire ? La réponse est donnée par :

1.0.1 PROPOSITION

Soit $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. L est $\mathbb{C}$-linéaire.
2. $L(i) = iL(1)$.
3. Il existe un nombre complexe $w \in \mathbb{C}$, tel que $L(z) = wz$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.
4. La matrice représentative de L dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Démonstration : les implications $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ sont immédiates,$3 \Rightarrow 4$ résulte de la discution précédente . On va montrer que $4 \Rightarrow 1$. Soit $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire, qui est représentée dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par une matrice $A = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors, $L(z) = L(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\lambda x - \mu y, \mu x + \lambda y) = (\lambda x - \mu y) + i(\mu x + \lambda y) = wz$ où $w = \lambda + i\mu$.

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $L(z) = wz$, d'où L est $\mathbb{C}$-linéaire.

$\mathbb{C}$ est muni de la topologie associée à la norme $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$: la distance de deux nombres complexes z et w est $|z - w|$. Une suite de nombres complexes z_n converge vers z si et seulement si $|z_n - z| \longrightarrow 0$ ou si et seulement si les suites réelles $x_n = \mathfrak{Re} z_n$ et $y_n = \mathfrak{Im} z_n$ des parties réelles et imaginaires convergent vers $\mathfrak{Re} z$ et $\mathfrak{Im} z$ respectivement.

Une partie $\Omega \subset \mathbb{C}$ est ouverte si et seulement si, pour tout $z \in \Omega$, il existe un réel $r > 0$ tel que le disque $D(z; r) = \{w \in \Omega | |z - w| < r\}$ soit entièrement contenu dans Ω.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$. Une fonction f de Ω dans $\mathbb{C}$ s'identifie à un couple de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, en décomposant $f(z)$ en partie réelle et partie imaginaire : $f(z) =$

$P(z)+iQ(z)$. En identifiant Ω à un sous-ensemble de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, f peut être considérée comme un couple de fonctions de deux variables réelles (x,y) à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f(x+iy)=P(x,y)+iQ(x,y) \tag{1.1}$$

Réciproquement, à tout couple (P,Q) de fonctions de deux variables réelles $(x,y)\in\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la formule ci-dessus fait correspondre une fonction de Ω, considéré comme sous-ensemble de $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{C}$.

Exemples d'applications du plan complexe

Exemple 1 Soit $a=\alpha+i\beta$ (ou bien $a=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$) un nombre complexe non nul. L'application $f_a:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ qui à z associe $f_a(z)=a.z$, s'écrit $f_a(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$ avec $P(x,y)=\alpha x-\beta y$ et $Q(x,y)=\beta x+\alpha y$. On peut aussi voir f_a comme une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe $(X,Y)=(\alpha x-\beta y,\beta x+\alpha y)$ ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

C'est une similitude d'angle $\theta=argument(a)$ et de rapport $\rho=|a|$.

Exemple 2 Soit $f:\mathbb{C}-\{1\}\longrightarrow\mathbb{C}$ l'application définie par $f(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$.

Soit $y\in\mathbb{R}$, alors $f(iy)=\dfrac{iy+1}{iy-1}=\dfrac{iy+1}{iy-1}.\dfrac{-iy-1}{-iy-1}=\dfrac{y^2-1}{y^2+1}-i\dfrac{2y}{y^2+1}$

Si on pose $u=\dfrac{y^2-1}{y^2+1}$ et $v=-\dfrac{2y}{y^2+1}$ on obtient $u^2+v^2=1$ c-à-d que (u,v) est un point du cercle $C=C((0,0),1)$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1. et réciproquement pour tout point $(u,v)\in C((0,0),1)$ il existe $y\in\mathbb{R}$ telle que $u=\dfrac{y^2-1}{y^2+1}$ et $v=-\dfrac{2y}{y^2+1}$. Donc l'image par f de l'axe imaginaire $i\mathbb{R}=\{z=iy;y\in\mathbb{R}\}$ est le cercle unité.

1.0.2 Exercice Montrer que l'image par l'application $f(z)=z^2$ de la droite verticale $D_a=\{z=a+iy\in\mathbb{C};y\in\mathbb{R}\}$, $a\in\mathbb{R}^*$ est la parabole d'équation $X=a^2-\dfrac{Y^2}{4a^2}$.
Faire de même pour les droites horizontales $D_b=\{z=x+ib\in\mathbb{C};x\in\mathbb{R}\}$, $b\in\mathbb{R}^*$.

1.0.2 Continuité

Soit $\Omega\subset\mathbb{C}$, $a\in\Omega$ et soit f une application de Ω dans $\mathbb{C}$.
On dit que f est continue en a lorsque :

$$\forall\epsilon>0\qquad\exists r>0:\qquad\forall z\in\Omega\cap D(a;r),\qquad|f(z)-f(a)|<\epsilon$$

f est continue dans Ω lorsqu'elle est continue en chaque point a de Ω.

Sommes, produits et quotients (lorsqu'ils sont définis) de fonctions continues sont continus.

les fonctions usuelles, $z \mapsto \mathfrak{Re} z$, $z \mapsto \mathfrak{Im} z$, $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto |z|$, $z \mapsto z^n$, $z \mapsto \bar{z}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et celles qu'on peut former par sommes, produits, quotients à partir de celles-ci, sont continues. En particulier, les plynômes, les fractions rationnelles sont continus.

1.0.3 Dérivation complexe

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

1.0.3 DÉFINITION
La fonction $f : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable au point $a \in \Omega$, lorsque la quantité

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{f(a+z) - f(a)}{z} \qquad \left(ou \quad \lim_{\substack{z \longrightarrow a \\ z \neq a}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right) \tag{1.2}$$

existe. Dans ce cas, la limite est notée $f'(a)$ et appelée la dérivée complexe de f au point a.

Remarque : La condition revient à dire qu'il existe un nombre complexe l (noté $f'(a)$) tel que

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists r > 0 : \qquad \forall z \in \Omega \cap D(a;r), \qquad z \neq a \qquad \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - l \right| < \epsilon.$$

ou encore

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists r > 0 : \qquad \forall z \in \Omega \cap D(a;r), \qquad z \neq a \qquad |f(z) - f(a) - l(z-a)| < \epsilon |z-a|.$$

1.0.4 EXEMPLE. Les fonctions $z \mapsto z^n$, $(n \in \mathbb{N})$, sont $\mathbb{C}$-dérivables en tout point de $\mathbb{C}$. En effet

$$\frac{z^n - a^n}{z - a} = z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + \cdots + za^{n-2} + a^{n-1} \tag{1.3}$$

converge vers na^{n-1} lorsque $z \longrightarrow a$.

De même, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point $a \neq 0$. En effet,

$$\frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{a}}{z - a} = -\frac{1}{za} \longrightarrow -\frac{1}{a^2}. \tag{1.4}$$

1.0.5 EXEMPLE. La fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas C-dérivable en aucun point $a \in \mathbb{C}$.
En effet, le quotient $\frac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a}$ vaut $+1$ lorsque $z - a$ est réel, et -1 lorsque $z - a$ est imaginaire pur. Il n'a donc pas de limite lorsque $z - a \longrightarrow 0$.

1.0.6 Exercice Montrer que toute fonction $\mathbb{C}$-dérivable est continue.

1.0.7 Exercice Montrer que les fonctions $z \mapsto \mathfrak{Re}\, z$, $z \mapsto \mathfrak{Im}\, z$, $z \mapsto |z|$ et $z \mapsto |z|^2 = z\bar{z}$ ne sont pas $\mathbb{C}$-dérivables.

Comme pour la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle on a :

1.0.8 THÉORÈME

Soient f et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions $\mathbb{C}$-dérivables en un point $a \in U$. Alors

– Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda f + g$ est $\mathbb{C}$-dérivable en a et

$$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$$

– $f.g$ est $\mathbb{C}$-dérivable en a et

$$(f.g)'(a) = g(a).f'(a) + f(a).g'(a)$$

– Si $f(a) \neq 0$, $\dfrac{1}{f}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$$

– Si $\Omega' \subset \mathbb{C}$ est un ouvert tel que $f(\Omega) \subset \Omega'$ et $h : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $f(a)$ alors, $h \circ f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en a et

$$(h \circ f)'(a) = h'(f(a)).f'(a)$$

Démonstration : La démonstration est analogue à celle des fonctions d'une fonction de la variable réelle.

1.1 Les équations (ou conditions) de Cauchy-Riemann

En identifiant, $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, on voit qu'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en un point, est différentiable, comme fonction d'ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$ 1.1, plus précisément :

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $a \in \Omega$ les conditions suivantes sont équivalentes

1. f est $\mathbb{C}$-dérivable en a
2. f est différentiable au point a, en tant qu'application d'un ouvert de $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, et la différentielle $Df(a) : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ est $\mathbb{C}$-linéaire, i.e. vérifie :
$$Df(a)z = f'(a).z$$

D'après la proposition 1.0.1, $Df(a)$ est représentée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ et d'autre part, si pour $f : \Omega \longrightarrow C$, en écrit $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ avec $P = \mathfrak{Re} f$ et $Q = \mathfrak{Im} f$, la matrice représentaive de $Df(a)$ dans la base canonique, est alors la matrice jacobienne

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(a) & \frac{\partial P}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(a) & \frac{\partial Q}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Par identification on doit alors avoir :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a) = \frac{\partial Q}{\partial y}(a), \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(a) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(a). \tag{CR}$$

En résumé on a montré :

1.1.1 Théorème

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et $a \in \Omega$. Les conditions suivantes sont équivalentes

i) f est $\mathbb{C}$-dérivable en a

ii) f est $\mathbb{R}$-différentiable en a, et si $P = \mathfrak{Re} f$ et $Q = \mathfrak{Im} f$ alors les équations suivantes, appelées **équations (ou conditions) de Cauchy-Riemann**, sont satisfaites :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a) = \frac{\partial Q}{\partial y}(a), \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(a) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(a). \tag{CR}$$

Remarque : On peut aussi obtenir les équation de Cauchy-Riemann, comme suit :

Soit $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ avec $P = \mathfrak{Re} f$ et $Q = \mathfrak{Im} f$ et $a = \alpha + i\beta$.

Pour $z = x + i\beta$, le quotient $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ s'écrit

$$\frac{P(x,\beta) - P(\alpha,\beta)}{x-\alpha} + i\frac{Q(x,\beta) - Q(\alpha,\beta)}{x-\alpha} \tag{1.5}$$

Si la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en a, ce quotient tend vers $l = f'(a)$ lorsque $x \longrightarrow \alpha$, $x \neq \alpha$. Il en résulte que P et Q admettent une dérivée partielle par rapport à la première variable x en (α, β) et que

$$l = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha + i\beta) = \frac{\partial P}{\partial x}(\alpha,\beta) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(\alpha,\beta)$$

Pour $z = \alpha + iy$, le quotient vaut $\frac{P(\alpha,y)-P(\alpha,\beta)}{i(y-\beta)} + i\frac{Q(\alpha,y)-Q(\alpha,\beta)}{i(y-\beta)}$ ou bien $-i\frac{P(\alpha,y)-P(\alpha,\beta)}{y-\beta} + \frac{Q(\alpha,y)-Q(\alpha,\beta)}{y-\beta}$ et lorsque la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en a, il tend vers l lorsque $y \longrightarrow \beta$, $y \neq \beta$.
Il en résulte que P et Q admettent une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable y en (α, β) et que

$$l = -i\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha + i\beta) = \frac{\partial Q}{\partial y}(\alpha,\beta) - i\frac{\partial P}{\partial y}(\alpha,\beta)$$

en comparant les deux écritures de l, on obtient :

$$0 = l - l = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha+i\beta) + i\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha+i\beta) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\alpha,\beta) - \frac{\partial Q}{\partial y}(\alpha,\beta)\right) + i\left(\frac{\partial P}{\partial y}(\alpha,\beta) + \frac{\partial Q}{\partial x}(\alpha,\beta)\right)$$

On a ainsi montré :

1.1.2 PROPOSITION
Si $f = P + iQ$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $a = \alpha + i\beta$, alors P et Q admettent des dérivées partielles en (α, β) et

$$\frac{\partial P}{\partial x}(\alpha,\beta) = \frac{\partial Q}{\partial y}(\alpha,\beta), \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(\alpha,\beta) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(\alpha,\beta).$$

on a aussi une réécriture des conditions de Cauchy-Riemann

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0}$$

1.1.3 EXEMPLE. L'existence des dérivées partielles de P et Q au point (α, β) et les conditions de Cauchy-Riemann (**CR**) ne sont pas suffisantes pour entraîner la $\mathbb{C}$-dérivabilité de $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ au point $a = \alpha + i\beta$.

Par exemple, la fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} + i\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

a des dérivées partielles nulle en $(0,0)$ donc vérifie (**CR**), mais n'est même pas continue en 0.

Voici une réciproque à la proposition précédente :

1.1.4 PROPOSITION
Soit $f = P + iQ$. Supposons que P et Q soient de classe C^1 sur Ω. Alors si les conditions (**CR**) ont lieu en $a = \alpha + i\beta$, alors f est $\mathbb{C}$-dérivable en a.

Démonstration : Posons $\lambda = \frac{\partial P}{\partial x}(\alpha,\beta) = \frac{\partial Q}{\partial y}(\alpha,\beta)$, $\mu = \frac{\partial P}{\partial y}(\alpha,\beta) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(\alpha,\beta)$ et $l = \lambda + i\mu$.

La formule de Taylor pour les fonctions de deux variables réelles montre que

$$P(\alpha + x, \beta + y) = P(\alpha,\beta) + x\lambda - y\mu + \epsilon_1(x,y)\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.7}$$

où ϵ_1 est une fonction qui tend vers 0 lorsque $(x,y) \longrightarrow (0,0)$.

$$Q(\alpha + x, \beta + y) = Q(\alpha,\beta) + x\mu + y\lambda + \epsilon_2(x,y)\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.8}$$

où ϵ_2 est une fonction qui tend vers 0 lorsque $(x,y) \longrightarrow (0,0)$.
En multipliant l'équation 1.8 par i et en ajoutant l'équation 1.7, on trouve que

$$f(a+z) = f(a) + lz + |z|\epsilon(z) \tag{1.9}$$

avec $\epsilon(z) = \epsilon_1(z) + i\epsilon_2(z)$. Pour cela, on utilise la relation

$$x\lambda - y\mu + i(x\mu + y\lambda) = (\lambda + i\mu)(x + iy) = lz \tag{1.10}$$

On en déduit que

$$\left|\frac{f(a+z)-f(a)}{z}-l\right| = |\epsilon(z)| \tag{1.11}$$

None

qui tend vers 0 lorsque $z \longrightarrow 0, z \neq 0$.■

1.1.5 EXEMPLE. On voit facilement que les relations de Cauchy-Riemann ne sont pas satisfaites pour les fonctions $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto \mathfrak{Re}\, z$, $z \mapsto \mathfrak{Im}\, z$ donc elles ne sont pas dérivables au sens complexe.

1.1.6 EXEMPLE. Soit Ω l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Re} z > 0\}$. Soit f la fonction définie sur Ω par la formule

$$f(x+iy) = \frac{1}{2} Ln(x^2+y^2) + i Arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

Pour $P(x,y) = \frac{1}{2} Ln(x^2+y^2)$ et $Q(x,y) = Arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, on a

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad et \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

les relations de Cauchy-Riemann sont satisfaites en tout point de Ω. De plus

$$f'(x+iy) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy}$$

autrement dit $f'(z) = \frac{1}{z}$.

Une autre façon, très pratique de présenter cela est d'utiliser les opérateurs :

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Cette présentation est motivée par les relations :
$x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$ et $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$.
A vec ces notations on aura :

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)}.$$

Ainsi, les conditions de Cauchy–Riemann sont équivalentes à :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0}$$

L'opérateur différentiel, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ est appelé opérateur de Cauchy-Riemann.

Réciproquement, si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction différentiable en tant que fonction de x et y, et $a \in \Omega$, on en déduit des relations entre x, y, z et $\bar{z}$, pour h au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\bar{h} + o(|h|).$$

D'où, si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$, f est $\mathbb{C}$-différentiable en a et la différentielle de f est une similitude $df(a)h = \frac{\partial f}{\partial z}(a).h = f'(a).h$.

En résumé on a

1.1.7 Théorème

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. les condition suivantes sont équivalentes :

1. f est holomorphe sur Ω.
2. f est $\mathbb{R}$-différentiable sur Ω et vérifie l'équation de Cauchy–Riemann $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ en tout point.

1.1.8 Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

On dit que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est **holomorphe** sur Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω.

Plus généralement, soit A un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est holomorphe dans A, s'il existe un ouvert Ω contenant A et une fonction holomorphe $\tilde{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tels que la restriction de $\tilde{f}$ à A soit égale à f.

Notation : On notera par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur Ω.

1.1.9 Exemple. $f(z) = f(x+iy) = x^3y^2 + ix^2y^3$ est dérivable en tout point de $A = \{z = x+iy \in \mathbb{C} | x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ mais n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$

1.1.10 Exercice Soit $\Omega = \{z = x+iy \in \mathbb{C} | x > 0\}$.

Soit $P(x,y) = \sqrt{\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+y^2})}$

On définit $f(z) = P(x,y) + i\frac{y}{2P(x,y)}$

Montrer que f est holomorphe dans Ω et que $f^2(z) = z$.

1.1.11 Exercice Montrer que les sommes, produits, quotients et composées (lorsqu'ils sont définis) de fonctions holomorphes sont holomorphes.

1.1.12 Exercice Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω. Montrer que si de plus P et Q sont de classe C^2, f' est aussi holomorphe dans Ω.

(on verra plus tard que cette condition est automatiquement vérifiée, car si f est holomorphe alors P et Q sont analytiques, donc de classe C^∞.)

Une conséquence du théorème1.1.1 est :

1.1.13 Théorème
Si $f = P + iQ$ est définie sur Ω telle que :

1. $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existent en tout point de Ω
2. P, Q verifient $(\mathbf{CR})$
3. P et Q en tant que fonctions de deux variables réelles sont différentiables

alors f est holomorphe sur Ω.

L'exemple 1.1.3 pourrait laisser penser que ce résultat est optimal, voici un joli résultat dû à H.Looman et amélioré par D.Menchoff :

1.1.14 Théorème (Théorème de Looman-Menchoff)
Soit $f = P + iQ$ une fonction de la variable complexe définie sur un ouvert Ω telle que :

1. $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existent en tout point de Ω
2. P, Q verifient $(\mathbf{CR})$ sur Ω
3. f est continue sur Ω

alors f est holomorphe sur Ω.
(ce résultat est hors programme, pour la preuve, voir le livre de R.Narasimhan "Complex analysis in one variable" (Birkäuser 1985)).

Remarque : La version "localisée", à savoir : f vérifie les conditions 1, 2 et 3 du théorème de Looman-Menchoff, en un point z_0 de Ω, n'entraîne pas que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Par exemple la fonction :
$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

None

est continue sur $\mathbb{C}$, vérifie les conditions $(\mathbf{CR})$ en $z = 0$, mais n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable en ce point.

1.1.1 Rappels sur les séries entières

Une une série entière est une série de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$. (ici a_n et z_0 sont des nombres complexes fixés.)

1.1.15 THÉORÈME

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ une série entière. Il existe un nombre $R \geq 0$, appelé rayon de convergence, tel que si $|z-z_0| < R$, la série converge, et si $|z-z_0| > R$, la série diverge. De plus la convergence est uniforme dans tout disque fermé $\overline{D}(z_0;r)$ tel que $0 \leq r < R$.

Démonstration : Soit $R = \sup\{r \geq 0; \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < +\infty\}$. On va montrer que R a les propriétés désirées.

1.1.16 LEMME (D'ABEL)

Soit $r_0 \geq 0$ tel que $|a_n| r_0^n \leq M$ pour tout n, où M est une certaine constante. Alors pour tout $r < r_0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge uniformément dans le disque fermé $\overline{D}(z_0;r)$.

Démonstration : Pour $z \in \overline{D}(z_0;r)$ on a

$$|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n| r^n \leq M\left(\frac{r}{r_0}\right)^n.$$

Comme $\frac{r}{r_0} < 1$, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} M\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ converge et par suite la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge uniformément dans $\overline{D}(z_0;r)$. ■

Maintenant on peut montrer la première partie du Théorème.

Soit $r_0 < R$. Par définition de R, il existe un nombre r_1, $r_0 < r_1 \leq R$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r_1^n$ converge. Par conséquent la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r_0^n$ converge, d'où la suite $|a_n| r_0^n$ est bornée (en effet, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} |a_n| r_0^n = 0$), et d'après le Lemme d'Abel la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge uniformément dans $\overline{D}(z_0;r)$, pour tout $0 \leq r < r_0$. Comme tout z avec $|z-z_0| < R$ appartient à un disque $\overline{D}(z_0;r)$ pour un certain $r < R$ et comme on peut toujours choisir r_0 tel que $r < r_0 < R$, on convergence au point z. Maintenant on suppose, par l'absurde, que $|z_1 - z_0| > R$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_1-z_0)^n$

converge. Alors, la suite $|a_n(z_1 - z_0)^n|$ est bornée. D'après le Lemme d'Abel, si $R < r < |z_1 - z_0|$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge pour $z \in \overline{D}(z_0; r)$, en particulier $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$ converge. Mais, d'après la définition de R, on obtient $R < R$, ce qui est absurde. ■

1.1.17 Proposition (Formule d'Hadamard)

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ une série entière. Alors, son rayon de convergence $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

On rappelle que pour toute suite de nombre réels c_n, sa limite supérieure est définie par $\limsup c_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup\{c_n, c_{n+1}, \ldots\}$.

Démonstration : Posons $L = \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

On obtient les inégalités $L \leq R$ et $R \leq L$, si on montre que si r vérifie $0 < r < L$, alors $r \leq R$ et si s vérifie $L < s$, alors $R \leq s$.

Considérons $0 < r < L$, alors $\frac{1}{r} > \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Par définition de lim sup, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{r} > |a_n|^{\frac{1}{n}}$ pour tout $n \geq n_0$. La suite $|a_n| r^n$ est alors bornée, d'où $r \leq R$.

Considérons maintenant $L < s$, alors $\frac{1}{s} < \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Par définition de lim sup, il existe un sous-ensemble infini M de $\mathbb{N}$ tel que $\forall m \in M$, $\frac{1}{s} < |a_n|^{\frac{1}{n}}$
c-à-d que $|a_n| s^n > 1$. D'où la suite $|a_n| s^n$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum |a_n| s^n$ diverge, on doit alors avoir $s > R$. ■

1.1.18 Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est **analytique** dans Ω si, pour tout point $z_0 \in \Omega$, il existe un disque ouvert $D(z_0; r)$ contenu dans Ω et une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ convergente dans $D(z_0; r)$ tels que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \forall z \in D(z_0; r). \tag{1.13}$$

On dit aussi que f est développable en série entière en $z - z_0$ au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega$.

1.1.19 Remarque

i) Si f est développable en série entière en $z - z_0$ au voisinage de $z_0 \in \Omega$, alors cette série est unique.

ii) Une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ convergente dans un disque $D(0; r)$, est analytique, par définition, au point $z_0 = 0$. On a même plus, elle est analytique en tout point de $D(z_0; r)$, c'est l'objet de la proposition suivante.

1.1.20 PROPOSITION
Une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ convergente dans un disque $D(0;r)$, alors, pour tout $z \in D(0;r)$, il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$ convergente pour $|z-z_0| < r - |z_0|$ et telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n \qquad \forall z \in D(z_0; r-|z_0|). \tag{1.14}$$

En d'autres termes, une série entière est analytique dans son disque de convergence.

1.1.21 PROPOSITION
Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ a pour rayon de convergence R, de plus les coefficients a_n sont donnés par $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Plus généralement pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}$ a pour rayon de convergence R.

1.1.22 COROLLAIRE
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique dans Ω. Alors, f est une fonction holomorphe dans Ω.

1.1.23 Exercice Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}\sin(nz)$ est une fonction analytique dans le domaine $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ -1 < \mathfrak{Im} z < 1\}$

1.1.24 Exercice Soient ϕ et $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues et $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{\psi(t); t \in [a,b]\}$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$f(z) := \int_a^b \frac{\phi(t)}{\psi(t)-z}dt$$

Montrer que f est holomorphe dans Ω et que $f'(z) = \int_a^b \frac{\phi(t)}{(\psi(t)-z)^2}dt$.

Indication : Il suffit de montrer que f est une fonction analytique dans Ω. Soit $z_0 \in \Omega$ et $r_0 > 0$ tel que $D(z_0;r_0) \subset \Omega$. (c-à-d que pour tout $t \in [a,b]$, $|\psi(t)-z_0| \geq r_0$). On écrit

$$\frac{\phi(t)}{\psi(t)-z} = \frac{\phi(t)}{(\psi(t)-z_0)-(z-z_0)} = \frac{\phi(t)}{\psi(t)-z_0}.\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\psi(t)-z_0}} = \frac{\phi(t)}{\psi(t)-z_0}\sum_{n\geq 0}\Big(\frac{z-z_0}{\psi(t)-z_0}\Big)^n$$

Cette formule est valable si $|\frac{z-z_0}{\psi(t)-z_0}| < 1$ et il suffit pour cela que $z \in D(z_0, r_0)$. En intégrant terme à terme on obtient pour tout $z \in D(z_0; r_0)$
$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ où $a_n = \int_a^b \frac{\phi(t)}{(\psi(t)-z_0)^{n+1}} dt.$

1.1.2 Complément de topologie : Domaines de $\mathbb{C}$

Soient X et Y deux espaces métriques.

1.1.25 DÉFINITION
Une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite localement constante dans X si pour tout $x \in X$ il existe un ouvert U de X contenant x et tel que la restriction de f à U, $f|_U$ est constante.

1.1.26 REMARQUE
En général une fonction localement constante n'est pas constante. Un exemple est donné par la fonction $f :]0,1[\cup]2,3[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f|_{]0,1[} = 0$ et $f|_{]2,3[} = 1$.

1.1.27 Exercice Montrer que toute fonction localement constante est continue.

1.1.28 THÉORÈME
Pour tout espace métrique (X, d) les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Toute fonction localement constante $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est constante.

ii) Le seul sous-ensemble non vide de X qui soit ouvert et fermé à la fois est X lui-même.

Démonstration :
$i) \Rightarrow ii)$ Soit A un sous-ensemble non vide de X qui est à la fois ouvert et fermé . Alors la fonction 'Indicatrice' de A, $1_A : X \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$1_A(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in A, \\ 0 & \text{si } z \notin A. \end{cases}$$

est localement constante puisque A et $X - A$ sont ouverts. Donc constante. Comme $A \neq \emptyset$, cette constante est égale à 1, d'où $A = X$.
$ii) \Rightarrow i)$ Fixons $c \in X$. La fibre $A = f^{-1}(\{f(c)\}) = \{z \in X | f(z) = f(c)\}$ est un ouvert non vide de X car f est localement constante. Comme une fonction localement constante est continue, A est aussi fermé. Il s'en suit que $A = X$ et par suite $\forall z \in X, f(z) = f(c)$ c-à-d que f est constante.

1.1.29 REMARQUE
Ce théorème est vrai, dans le cadre plus large, des espaces topologiques.

1.1.30 DÉFINITION
Un espace métrique X est un espace connexe s'il satisfait à l'une des conditions (équivalentes) du théorème précédent.

1.1.31 COROLLAIRE
L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Démonstration :
Soit X un espace connexe et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue.
Pour montrer que $f(X)$ est connexe, il suffit de montrer que toute application localement constante $g : f(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ est constante.
Comme f est continue et g localement constante, la composée $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est localement constante. X étant connexe, il vient que $g \circ f$ est constante et par suite $g : f(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ est constante. ■

1.1.32 THÉORÈME
Les sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles.

Exercice Démontrer ce théorème.

1.1.33 REMARQUE
Les sous-ensembles connexes de $\mathbb{Z}$ (muni de la topologie standard de $\mathbb{R}$) sont les singletons.

1.1.34 DÉFINITION
On dit qu'un sous-ensemble Ω de $\mathbb{C}$ est un **domaine** s'il est à la fois ouvert et connexe.

1.1.35 EXEMPLE. Tout disque ouvert D dans $\mathbb{C}$ est un domaine de $\mathbb{C}$.

Nous allons maintenant donner une caractérisation des fonctions localement constantes.

1.1.36 THÉORÈME
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Les conditions suivantes sont équivalentes

i) f est localement constante dans Ω.

ii) f est holomorphe dans Ω et $f'(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$.

Démonstration : $i) \Rightarrow ii)$ C'est clair.
$ii) \Rightarrow i)$ Soit $P = \mathfrak{Re} f$ et $Q = \mathfrak{Im} f$.
Comme $f' = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$ et que $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$, notre hypothèse 2. entraîne

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 0$$

pour tout $(x,y) \in \Omega$. Il s'en suit que P et Q sont des fonctions localement constantes et par suite $f = P + iQ$ est localement constante.

1.1.37 COROLLAIRE
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$.
Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est constante si et seulement si $f'(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$.

1.1.38 Exercice Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$.
Déterminer toutes les fonctions holomorphes $f = P + iQ$ dans Ω pour lesquelles les fonctions $g = P^2 + iQ^2$ sont aussi holomorphes dans Ω.

Nous terminons ce paragraphe en montrant qu'un domaine de $\mathbb{C}$ est connexe par arcs par des chemins C^1-par morceaux.

1.1.39 PROPOSITION
Pour que deux points quelconques z_1 et z_2 d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, puissent être reliés par un chemin (C^1-par morceaux) dans Ω il faut et il suffit que Ω soit connexe (i.e. Ω est un domaine de $\mathbb{C}$).

Démonstration : *la condition est nécessaire :* En effet, si deux points quelconques dans Ω peuvent être joints par un chemin (C^1-par morceaux), cela entraîne que Ω est connexe par arcs et donc connexe.
la condition est suffisante : Soit $z_0 \in \Omega$. On va montrer qu'il peut être relié à n'importe quel autre point de Ω par un chemin (C^1-par morceaux). Soit $z_1 \in \Omega$, comme Ω est ouvert il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(z_1, \epsilon)$ soit contenu dans Ω. En juxtaposant un chemin (C^1-par morceaux) de z_0 à z_1 et le segment de z_1 à $z \in D(z_1, \epsilon)$, on voit que z_0 peut être joint à z_1 par un chemin (C^1-par morceaux) si et seulement si il peut être joint, par un chemin (C^1-par morceaux), à tout point $z \in D(z_1, \epsilon)$. Ceci montre que les sous-ensembles suivants de Ω :

$$A = \{z \in \Omega \,|\, z \text{ peut être joint à } z_0 \text{ par un chemin } (C^1\text{-par morceaux})\}$$

et

$$\Omega \setminus A = \{z \in \Omega; z \text{ ne peut être joint à } z_0 \text{ par un chemin } (C^1\text{-par morceaux})\}$$

sont des ouverts. comme Ω est connexe, A ou $\Omega \setminus A$ est vide. Mais, $z_0 \in A$, d'où $\Omega \setminus A = \emptyset$, et par suite $A = \Omega$.$\blacksquare$

1.1.3 Fonctions Harmoniques

Les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, ces équations nous ramène à la notion de fonctions harmoniques

1.1.40 DÉFINITION
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Une fonction $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable est dite **harmonique** si

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

L'expression Δu est appelée le Laplacien de u.

1.1.41 PROPOSITION
Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle $u = \mathfrak{Re}(f)$ $v = \mathfrak{Im}(f)$ soient deux fois différentiable. Alors u et v sont des fonctions harmoniques dans l'ouvert Ω.

Démonstration : On utilise les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. En prenant la dérivée de la première équation par rapport à x et de la seconde par rapport à y, on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

D'après le théorème de Schwarz, les dérivées secondes d'une fonction deux fois différentiable sont symétriques $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$.

En additionant les équations on aura

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

L'identité pour v s'obtient de la même manière. ■

1.1.42 DÉFINITION
Soient u et v des fonctions définies dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, deux fois différentiables. On dit que u et v sont des fonctions **conjuguées harmoniques** si la fonction $f = u + iv : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe.

1.1.43 REMARQUE
On a montrer que conjuguées harmoniques entraîne harmonique.

1.1.44 PROPOSITION

Soit u et v des fonctions harmoniques conjuguées, dans un domaine Ω. Soit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que les courbes $u(x,y) = c_1$ et $v(x,y) = c_2$ soient régulières (c-à-d qu'en tout point le gradient est non nul).

Alors ces courbes s'intersectent orthogonalement i.e. les tangentes aux courbes aux points d'intersection sont orthogonanles.

Démonstration : Soit (x_0, y_0) un point d'intersection des courbes $u(x,y) = c_1$ et $v(x,y) = c_2$. Comme le gradient $\operatorname{grad} u(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ (resp. $\operatorname{grad} v(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$) est orthogonal à $u(x,y) = c_1$ (resp. à $v(x,y) = c_2$), ces courbes sont orthogonales en (x_0, y_0) si et seulement si les vecteurs $\operatorname{grad} u(x_0,y_0)$ et $\operatorname{grad} v(x_0,y_0)$ sont orthogonaux. Leur produit scalaire est égal à

$$< \operatorname{grad} u(x_0,y_0), \operatorname{grad} v(x_0,y_0) >= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0).\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

puisque u et v satisfont aux conditions de Cauchy-Riemann. ■

Example : $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$ et $f(z) = u + iv = z^2$

Pour tout $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$ les courbes $u(x,y) = c_1$ et $v(x,y) = c_2$ sont régulières et donc orthogonales.