

Section GE

Résistance des Matériaux

P06-2RDMA0

☒ Cours Magistraux

☐ TD

☐ ED

2ème Année

Enseignant : Mr DETREZ

2011-2012

Table des matières

I	Éléments de mécanique des milieux continus	5
I.1	Milieu continu	6
I.1.1	Hypothèse de continuité	6
I.1.2	Continuité des transformations	6
I.1.3	Phénomène ne respectant pas la continuité	7
I.2	Déformation	8
I.2.1	Configuration initiale et configuration actuelle	9
I.2.2	Vecteur déplacement	9
I.2.3	Tenseur gradient de la déformation	9
I.2.4	Tenseur de déformation de Green-Lagrange	11
I.2.5	Hypothèse de Petites Perturbations (H.P.P)	11
I.2.6	Quelques exemples de déformations classique	12
I.3	Contraintes	12
I.4	Loi de comportement	12
I.5	Formulation d'un problème de mécanique des milieux continus	12
I.6	Ce qu'il faut retenir	12
II	Hypothèses de la résistance des matériaux	0
II.1	Solides étudiés	1
II.1.1	Définition générale	1
II.1.2	Cas des poutres droites à plan moyen	2
II.2	Hypothèses sur le matériau	2
II.2.1	Homogénéité	3
II.2.2	Isotropie	4
II.2.3	Elasticité linéaire	4
II.2.4	Etat naturel	5
II.3	Principe de Saint-Venant	5
II.3.1	Enoncé	5
II.3.2	Illustrations expérimentales	5
II.4	Cinématique	7
II.4.1	Torseur des petits déplacement	7
II.4.2	Torseur des petites déformations	8
II.4.3	Détermination des déplacement	8
II.5	Conditions aux limites	10
II.5.1	Les efforts extérieurs	10
II.5.2	Liaisons	11

III	Torseur des efforts intérieurs	13
III.1	Torseur des efforts intérieurs	14
III.1.1	Coupure d'une poutre en équilibre	14
III.1.2	Bilan et règles de calcul	16
III.1.3	Exemple du viaduc d'Austerlitz	17
III.2	Dénomination des composantes et des sollicitations associées	18
III.3	Diagramme	19
III.4	Relations intégrales entre les contraintes et le torseur des efforts intérieurs . .	20
III.4.1	Intégration du vecteur contrainte sur la section droite $\mathcal{S}_s$	20
III.4.2	Problème de De Saint-Venant	22
III.4.3	Bilan et relation de comportement globale	24
III.5	Résolution d'un problème	25
III.5.1	Intérêt de la RdM	25
III.5.2	Problèmes isostatiques	25
III.5.3	Problèmes hyperstatiques	26
IV	Sollicitation élémentaire : la traction	29
IV.1	Définition	30
IV.1.1	Étude d'une grille	30
IV.2	L'essai de traction	32
IV.3	Relation contrainte/déformation	35
IV.4	Relation déformation/déplacement	35
IV.4.1	Application à une poutre encastré	36
IV.5	Critère de dimensionnement	37
IV.6	Concentration des contraintes	38
IV.6.1	Mise en évidence expérimentale	39
IV.6.2	Coefficient de concentration de contraintes	39
IV.6.3	Utilisation d'abaques	41
V	Sollicitation élémentaire : la flexion	43
V.1	Définition	44
V.2	Relation effort tranchant/moment fléchissant	44
V.3	Etude d'un tronçon se déformant	45
V.4	Relation contrainte normale/moment fléchissant	46
V.5	Équation de la déformée	48
V.6	Contraintes tangentielles	50
V.7	Ordre de grandeur des contraintes	52
V.8	Critère de dimensionnement	53
VI	Sollicitation élémentaire : la torsion	55
VI.1	Hypothèse complémentaire	56
VI.2	Définition	56
VI.3	Etude d'un barreau cylindrique	57
VI.4	Relation contrainte/moment de torsion	62
VI.5	Relation contrainte/déformation	64
VI.6	Relation déformation/rotation	64
VI.7	Critère de dimensionnement	65

Chapitre -I-

Éléments de mécanique des milieux continus

Table des Matières

I.1	Milieu continu	6
I.1.1	Hypothèse de continuité	6
I.1.2	Continuité des transformations	6
I.1.3	Phénomène ne respectant pas la continuité	7
I.2	Déformation	8
I.2.1	Configuration initiale et configuration actuelle	9
I.2.2	Vecteur déplacement	9
I.2.3	Tenseur gradient de la déformation	9
I.2.4	Tenseur de déformation de Green-Lagrange	11
I.2.5	Hypothèse de Petites Perturbations (H.P.P)	11
I.2.6	Quelques exemples de déformations classique	12
	I.2.6.1 Illustration 1 : Solide en rotation	12
	I.2.6.2 Illustration 2 : Elongation	12
	I.2.6.3 Illustration 3 : Cisaillement simple	12
	I.2.6.4 Illustration 4 : Cisaillement pur	12
I.3	Contraintes	12
I.4	Loi de comportement	12
I.5	Formulation d'un problème de mécanique des milieux continus .	12
I.6	Ce qu'il faut retenir	12

I.1 Milieu continu

Tous les développements de la Mécanique sont basés sur la conception fondamentale d'un milieu continu dont les transformations sont continues.

I.1.1 Hypothèse de continuité

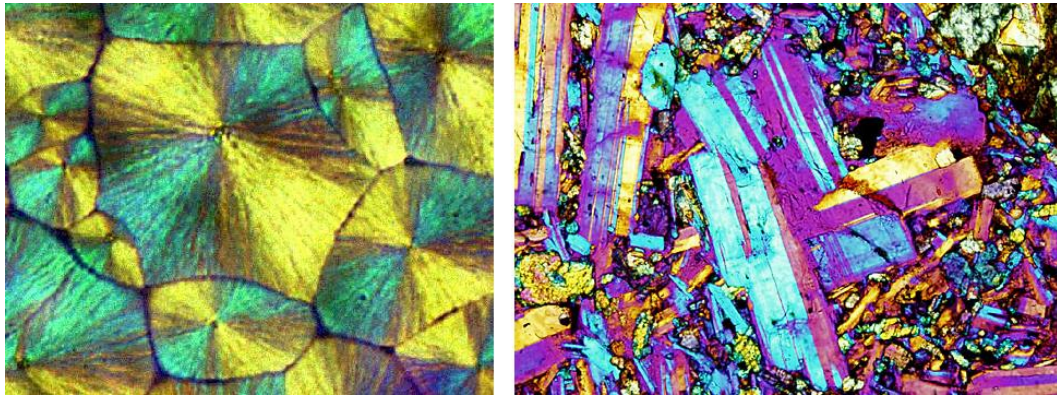


Figure I.1 – Sphérolites dans le polyéthylène haute densité (HDPE) (à gauche). Microstructure d'une roche constituée d'olivine et de pyroxène andésite (à droite)

Un milieu continu est un milieu dans lequel les propriétés physiques varient d'une façon continue d'un point à un autre. Nous savons bien que la matière est discontinue à l'échelle moléculaire, souvent même à une échelle beaucoup plus grande : échelle des grains constituant un métal ou une roche ou à l'échelle des sphérolites dans les polymères semi-cristallins (Figure I.1). Mais la mécanique des milieux continus se place à une échelle macroscopique. A cette échelle la matière apparaît comme un milieu continu. *Le point de vue macroscopique offre l'avantage d'éviter toute hypothèse sur la constitution intime de la matière.*

I.1.2 Continuité des transformations

On admet que deux points matériels infiniment voisins à l'instant 0 restent infiniment voisins à tout instant ultérieurs t . On admettra également que deux points matériels infiniment voisins à l'instant t proviennent de 2 points infiniment voisins à l'instant 0. On exclut donc la possibilité de la superposition c'est-à-dire du mélange de deux portions initialement distinctes.

L'hypothèse de continuité des transformations entraîne un certain nombre de conséquences :

1. Des points matériels qui à l'instant 0 forment un ensemble continu, courbe ou surface, forment encore un ensemble continu à l'instant t et réciproquement. A un ensemble fermé correspond un ensemble fermé.
2. Les points matériels qui à l'instant initial se trouvent à l'intérieur d'une surface fermée restent à tout instant à l'intérieur de la surface transformée.
3. *La masse contenue à l'intérieur d'une surface matérielle fermée reste constante au cours du temps.*
4. *Les éléments matériels qui à un instant donné forment la frontière d'un milieu continu en forment encore la frontière à tout autre instant.*

Exemple 1 Soit, par exemple, un iceberg flottant en mer (Figure I.2). Si l'on suppose que la transformation du liquide est continue alors les molécules d'eau qui sont à l'interface avec

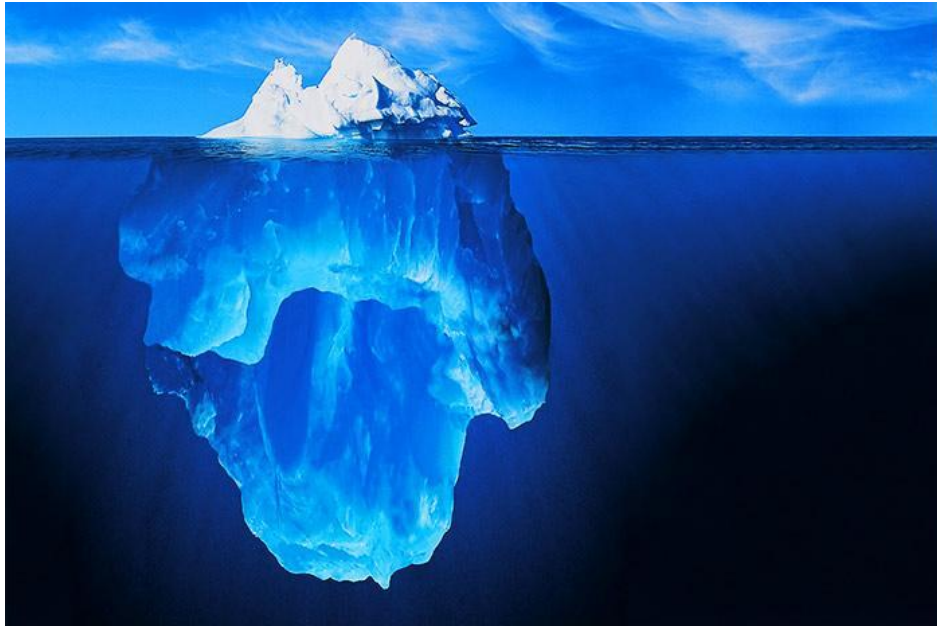


Figure I.2 – Montage photographique composé de 4 images et réalisé par le photographe Ralph A. Clevenger

la glace de l'iceberg le reste à tous instant. Le constat est identique avec les molécules à l'interface entre l'air et l'eau.

I.1.3 Phénomène ne respectant pas la continuité

On devine par l'exemple précédent dans l'hypothèse de la continuité des transformations doit quelquefois être trop absolue. Il est manifeste qu'elle n'est pas vérifiée dans les cas suivants :

1. formation de trous : cavitations dans les liquides, fissures dans les solides ;
2. glissement relatif de parties du milieu : sillage dans les liquides, glissement où faille dans les solides ;
3. choc de 2 veines fluides

La figure I.3 donne des exemples de phénomènes qui ne vérifient pas l'hypothèse de continuité.



Figure I.3 – Le Champagne un exemple de formation de cavités dans un liquide (à gauche). Exemple de failles superficielles suite à un tremblement de terre à Christchurch (au centre, photo The Herald). La vague qui se brise est un exemple de choc entre 2 veines de fluide (à droite)

L'hypothèse de continuité des transformations est, dans le cas des fluides, en contradiction avec la théorie moléculaire. En effet, dans un fluide, 2 molécules infiniment voisines à l'instant initial ne restent pas infiniment voisines.

L'hypothèse de continuité confère à un élément de matière macroscopique une existence durable. Elle implique l'existence d'une petite surface fermée, frontière de l'élément, à l'intérieur de laquelle resteraient toujours les mêmes particules matérielles. Ceci n'est acceptable que dans le cas des solides. Dans les fluides et surtout dans les gaz, les éléments de matière macroscopiques se désintègrent en un temps très court par suite à l'agitation thermique.

Cependant c'est un fait que la théorie fondée sur l'hypothèse de continuité donne une représentation très exacte de la plupart des phénomènes. La validité de cette hypothèse doit être considérée comme établie par l'accord de ses conséquences avec la réalité. L'accord entre la théorie moléculaire et la théorie des milieux continus se rétablit dans le cas des fluides et des gaz si l'on ne considère que la vitesse moyennes de particules. Autrement dit *la théorie des milieux continus ne retient que la vitesse moyenne des molécules* et fait abstraction de leur vitesse d'agitation.

I.2 Déformation

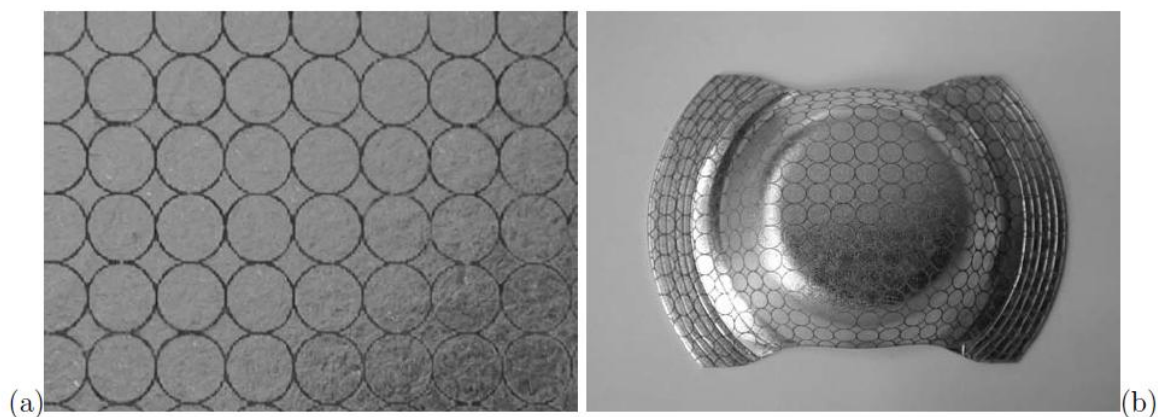


Figure I.4 – Déformation d'un réseau de cercle gravés électrolytiquement sur une tôle d'acier galvanisé : (a) réseau initiale au centre de la tôle, (b) échantillon déformé par emboutissage

Les changements de forme des matériaux ou des structures jouent un rôle essentiel dans les procédés de fabrication de composants industriels mais aussi dans leur tenue en service. La figure I.4 montre un réseau régulier de cercles tracés sur une tôle d'acier galvanisée destinée à l'emboutissage de pièces dans l'industrie automobile (portières, ailes, ...). Un exemple d'embouti obtenu à partir de cette tôle par poinçonnage est donné sur la figure I.4. On constate sur cette pièce que les cercles ont gardé leur forme initiale dans certaines zones et sont devenues des ellipses dans d'autres. La « déformation » de la pièce n'a donc pas été homogène. L'objectif de ce chapitre est de mettre des concepts, des outils mathématiques et des chiffres derrière le mot déformation. Dans le cas de l'emboutissage, l'enjeu est alors de déterminer quelles sont les déformations critiques que peut supporter une telle tôle avant de rompre localement.

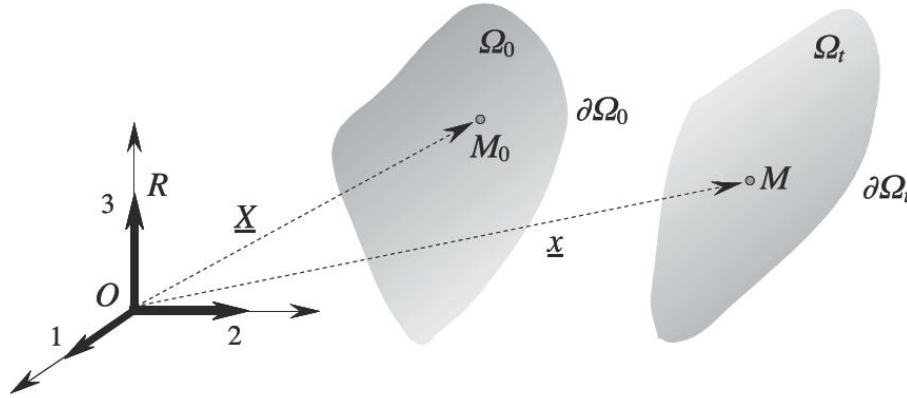


Figure I.5 – Configuration initiale Ω_0 et actuelle du solide Ω_t

I.2.1 Configuration initiale et configuration actuelle

Afin d'étudier la déformation des milieux continus, il est nécessaire d'introduire les notions de configuration initiale et de configuration actuelle d'un solide Ω_0 de frontière $\partial\Omega_0$ initialement au repos. A l'instant t le solide Ω est déformé, il se trouve dans la **configuration dite actuelle** notée Ω_t (Figure I.5). Un point M_0 de la **configuration initiale** Ω_0 , coordonnée (X, Y, Z) dans la base $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est transformé en un point noté M à l'instant t et il a pour coordonnées (x, y, z) dans la base $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Les coordonnées du point M dans la configuration initiale dépendent à la fois des coordonnées de M_0 et du temps t

$$\begin{cases} x = f(X, Y, Z, t) \\ y = g(X, Y, Z, t) \\ z = h(X, Y, Z, t) \end{cases}$$

Cette dernière expression peut être condensée, en introduisant la fonction placement φ^t

$$M = \varphi^t(M^0)$$

I.2.2 Vecteur déplacement

Lorsque l'on veut dimensionner des structures telles que des ouvrages d'arts (ponts, gratte-ciel, etc.) ou des pièces mécanique (bielles, arbres de transmissions, etc.), il est intéressant de définir le vecteur déplacement qui définit le déplacement d'un point matériel M_t par rapport à sa position initiale M_0 , on le note $\vec{U}_t(M_0)$. Autrement dits c'est le vecteur qui lie le point initial au point actuel

$$\vec{U}_t(M_0) = \overrightarrow{M_0 M} = \begin{pmatrix} x - X \\ y - Y \\ z - Z \end{pmatrix}_{(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} = \begin{pmatrix} f(X, Y, Z, t) - X \\ g(X, Y, Z, t) - Y \\ h(X, Y, Z, t) - Z \end{pmatrix}_{(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

I.2.3 Tenseur gradient de la déformation

L'objectif de cette section est de décrire le changement de forme locale de la matière. Pour se faire, on considère un "petit" cube élémentaire de matière dV_0 émergeant du point M_0 et engendré par les vecteurs $d\vec{X}$, $d\vec{Y}$, $d\vec{Z}$ (Figure ??). On cherchera ensuite à décrire sa transformation en un cube dV_t émergeant du point M_t et engendré par les vecteurs $d\vec{x}$, $d\vec{y}$, $d\vec{z}$

qui sont respectivement les transformations des $\overrightarrow{dX}$, $\overrightarrow{dY}$, $\overrightarrow{dZ}$. Tout d'abord, nous définissons ces vecteurs

$$\overrightarrow{dX} = \overrightarrow{M_0 M_0^x} = dX \vec{e}_1, \quad \overrightarrow{dY} = \overrightarrow{M_0 M_0^y} = dY \vec{e}_2, \quad \overrightarrow{dZ} = \overrightarrow{M_0 M_0^z} = dZ \vec{e}_3$$

Or, le vecteurs $\overrightarrow{dx} = \overrightarrow{M_t M_t^x}$ avec $M_t = \varphi_t(M_0)$ et $M_t^x = \varphi_t(M_0^x)$ qui a pour expression

$$\varphi_t(M_0^x) = \begin{pmatrix} f(X + dX, Y, Z, t) \\ g(X + dX, Y, Z, t) \\ h(X + dX, Y, Z, t) \end{pmatrix}_{(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Puisque dX est "petit", $dX \ll 1$, l'expression de M_t^x peut être approximée par un développement limité

$$\varphi_t(M_0^x) \approx \begin{pmatrix} f(X, Y, Z, t) + \frac{\partial f}{\partial X}(X, Y, Z, t) dX + \dots \\ g(X, Y, Z, t) + \frac{\partial g}{\partial X}(X, Y, Z, t) dX + \dots \\ h(X, Y, Z, t) + \frac{\partial h}{\partial X}(X, Y, Z, t) dX + \dots \end{pmatrix}_{(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

d'où l'expression du vecteur $\overrightarrow{dx} = \overrightarrow{M_t M_t^x}$ à l'instant t

$$\overrightarrow{dx} = \left[\frac{\partial f}{\partial X}(X, Y, Z, t) \vec{e}_1 + \frac{\partial g}{\partial X}(X, Y, Z, t) \vec{e}_2 + \frac{\partial h}{\partial X}(X, Y, Z, t) \vec{e}_3 \right] dX$$

Les vecteurs $\overrightarrow{dy} = \overrightarrow{M_t M_t^y}$ et $\overrightarrow{dz} = \overrightarrow{M_t M_t^z}$ se définissent de façon analogue

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dy} &= \left[\frac{\partial f}{\partial Y}(X, Y, Z, t) \vec{e}_1 + \frac{\partial g}{\partial Y}(X, Y, Z, t) \vec{e}_2 + \frac{\partial h}{\partial Y}(X, Y, Z, t) \vec{e}_3 \right] dY \\ \overrightarrow{dz} &= \left[\frac{\partial f}{\partial Z}(X, Y, Z, t) \vec{e}_1 + \frac{\partial g}{\partial Z}(X, Y, Z, t) \vec{e}_2 + \frac{\partial h}{\partial Z}(X, Y, Z, t) \vec{e}_3 \right] dZ \end{aligned}$$

Ces relations peuvent être condensées en utilisant le tenseur gradient des transformations, noté $\tilde{\mathbf{F}}$, qui se définit par

$$\tilde{\mathbf{F}} = \nabla \varphi^t(M^0) = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \overrightarrow{OM^0}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} & \frac{\partial f}{\partial Z} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} & \frac{\partial g}{\partial Z} \\ \frac{\partial h}{\partial X} & \frac{\partial h}{\partial Y} & \frac{\partial h}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

Le tenseur $\tilde{\mathbf{F}}$ permet de passer linéairement de $\overrightarrow{dX}$ à $\overrightarrow{dx} = \tilde{\mathbf{F}} \overrightarrow{dX}$, il en va de même pour passer de tous vecteurs infinitésimales $\overrightarrow{dM_0}$ émergeant de M_0 à $\overrightarrow{dM_t}$

$$\overrightarrow{dM_t} = \tilde{\mathbf{F}} \overrightarrow{dM_0}, \quad \overrightarrow{dx} = \tilde{\mathbf{F}} \overrightarrow{dX}, \quad \overrightarrow{dy} = \tilde{\mathbf{F}} \overrightarrow{dY}, \quad \overrightarrow{dz} = \tilde{\mathbf{F}} \overrightarrow{dZ}$$

Puisque $\overrightarrow{dx}$ et $\overrightarrow{dX}$ ont la même unité les mètres alors le tenseur gradient de transformation n'a pas unité.

Le tenseur $\tilde{\mathbf{F}}$ peut s'obtenir également à partir du gradient du vecteur déplacement $\overrightarrow{U}_t(M_O)$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{I}} + \nabla \overrightarrow{U}_t(M^0)$$

où $\tilde{\mathbf{I}}$ est le tenseur identité.

I.2.4 Tenseur de déformation de Green-Lagrange

Nous venons de voir que $\tilde{\mathbf{F}}$ permet de passer linéairement de dV_0 à dV_t , mais il ne permet pas de modéliser le changement de forme d'un volume élémentaire de matière car il n'est pas nulle pour un mouvement de corps rigide (*cf.* l'exemple du solide en rotation). Or la grandeur « déformation » doit absolument être nulle pour un mouvement de solide indéformable. Par conséquent, nous définissons le tenseur de Green-Lagrange $\tilde{\mathbf{E}}$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{I})$$

Comme le tenseur de gradient de transformation, le tenseur de Green-Lagrange $\tilde{\mathbf{E}}$ n'a pas de dimension physique. De plus, le tenseur de Green-Lagrange $\tilde{\mathbf{E}}$ peut s'exprimer en fonction de vecteur déplacement

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left(\nabla \vec{U}_t^T + \nabla \vec{U}_t + \nabla \vec{U}_t^T \nabla \vec{U}_t \right)$$

Cette formule met en évidence la **non-linéarité** de la relation entre le vecteur déplacement et le tenseur de déformation de Green-Lagrange.

Propriété I.1 *Le tenseur des déformations de Green-Lagrange, $\tilde{\mathbf{E}}$ est symétrique, c'est-à-dire que*

$$\tilde{\mathbf{E}}^T = \tilde{\mathbf{E}}, \quad E_{ij} = E_{ji}, \quad \tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix}$$

I.2.5 Hypothèse de Petites Perturbations (H.P.P)

Dans de nombreux problèmes de l'ingénieur, les déformations restent faibles, c'est-à-dire inférieures à dix pour-cent comme dans le cas des structures du génie civil en béton où des pièces métallique de construction. Ce genre de problèmes de dimensionnement des structures peut être traité dans le cadre de l'Hypothèse de Petites Perturbations (H.P.P).

Hypothèse 1 *L'Hypothèse de Petites Perturbations (H.P.P.) consiste à supposer que le solide s'écarte peu de sa configuration de référence donc les configurations initiale et actuelle peuvent être confondues. Cette hypothèse implique que les déplacements $\vec{U}_t$ et le gradient de déplacement $\nabla \vec{U}_t$ restent petits.*

Sous cette hypothèse, le terme non-linéaire dans l'expression de tenseur de déformation de Green-Lagrange peut être négligé

$$\tilde{\mathbf{E}}(M_0) \approx \frac{1}{2} \left(\nabla \vec{U}_t^T(M_0) + \nabla \vec{U}_t(M_0) \right) = \boldsymbol{\varepsilon}(M_0)$$

Le tenseur des déformations linéarisé ainsi défini, $\boldsymbol{\varepsilon}$ se nomme le tenseur des petites déformations ou tenseur des déformations infinitésimales. Il est également sans unité et il dépend du point M_0 et de l'instant t , c'est pour cela qu'on le notera indifféremment

$$\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(M_0), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t(M_0)$$

L'H.P.P. n'est pas en règle générale vérifiée, mais elle se justifie dans un grand nombre de problèmes de l'ingénieur comme le dimensionnement des nacelles en aluminium des avions, celui des tabliers en béton des ponts ou celui des poutres en acier dans les ouvrages d'arts, *etc.* Elle est en outre hors de propos pour les problèmes d'écoulements de fluides et ceux de mise en forme des matériaux (pliage, estampage, emboutissage, forgeage, *etc.*)

Remarque 1 *L'H.P.P. suppose que la configuration actuelle est confondue avec la configuration initiale ($M_t \approx M_0$), ceci permet de relier le tenseur taux déformation, $\underline{\underline{D}}(M_t)$, qui est une grandeur définie sur la configuration actuelle au tenseur des déformations infinitésimales, $\underline{\underline{\varepsilon}}_t(M_0)$ qui est défini par rapport à la configuration initiale. Par définition le tenseur taux déformation, $\underline{\underline{D}}(M_t)$ s'écrit*

$$\underline{\underline{D}}(M_t) = \frac{1}{2} \left(\nabla \vec{V}^T(M_t) + \nabla \vec{V}(M_t) \right)$$

dont les composant ont pour unité des $[s^{-1}]$. Or, la dérivée de vecteur déplacement est

$$\vec{U}_t(M_0) = \vec{V}(M_0) \approx \vec{V}(M_t)$$

donc dans le cadre de l'H.P.P., le tenseurs taux de déformation est la dérivée temporelle du tenseur des déformations infinitésimales

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(M_0) \approx \underline{\underline{D}}(M_t)$$

Remarque 2 *Il est évident que le tenseur de déformations infinitésimales, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, et le tenseur taux de déformation, $\underline{\underline{D}}$, sont symétriques comme le tenseur des déformations de Green-Lagrange*

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^T, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^T, \quad D_{ij} = D_{ji}$$

I.2.6 Quelques exemples de déformations classique

En cours de construction

I.2.6.1 Illustration 1 : Solide en rotation

I.2.6.2 Illustration 2 : Elongation

I.2.6.3 Illustration 3 : Cisaillement simple

I.2.6.4 Illustration 4 : Cisaillement pur

I.3 Contraintes

I.4 Loi de comportement

I.5 Formulation d'un problème de mécanique des milieux continus

I.6 Ce qu'il faut retenir

Références

Chapitre -II-

Hypothèses de la résistance des matériaux

Table des Matières

II.1	Solides étudiés	1
	II.1.1 Définition générale	1
	II.1.2 Cas des poutres droites à plan moyen	2
II.2	Hypothèses sur le matériau	2
	II.2.1 Homogénéité	3
	II.2.2 Isotropie	4
	II.2.3 Elasticité linéaire	4
	II.2.4 Etat naturel	5
II.3	Principe de Saint-Venant	5
	II.3.1 Enoncé	5
	II.3.2 Illustrations expérimentales	5
II.4	Cinématique	7
	II.4.1 Torseur des petits déplacement	7
	II.4.1.1 Hypothèse cinématique	7
	II.4.1.2 Torseur des petits déplacements	7
	II.4.2 Torseur des petites déformations	8
	II.4.3 Détermination des déplacement	8
	II.4.3.1 Formules de Bresse	8
	II.4.3.2 Hypothèse de Bernoulli	9
II.5	Conditions aux limites	10
	II.5.1 Les efforts extérieurs	10
	II.5.2 Liaisons	11

La *RdM* est une théorie simplifiée de la mécanique des milieux continus qui nécessite de ne s'intéresser qu'à des solides particuliers. Ainsi un certain nombre de restriction sont nécessaires pour pouvoir utiliser la *RdM*. Ces restrictions portent sur la géométrie du solide étudié, le matériau dont il est constitué, et dans une moindre mesure de la cinématique du milieu continue, des liaisons et des efforts extérieurs.

II.1 Solides étudiés

II.1.1 Définition générale

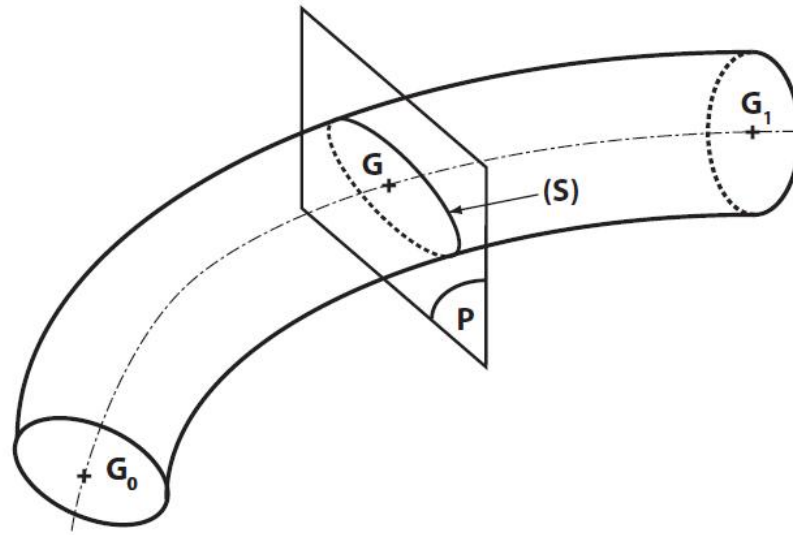


Figure II.1 – Représentation d'un poutre (Boucard, 2007)

Une poutre est un solide engendré par une surface plane $\mathcal{S}_s$ dont le centre d'inertie géométrique G_s décrit une courbe G_0G_1 , le plan de $\mathcal{S}_s$ restant normal à la courbe G_0G_1 , c'est-à-dire que la normale $\vec{n}_s$ à $\mathcal{S}_s$ est confondue avec la tangente, en tout point G_s , de la courbe G_0G_1 (Figure II.1). Le centre d'inertie peut dans de nombreux cas être confondu avec le centre de gravité. Nous avons supposé l'aire $\mathcal{S}_s$ constante. Mais très souvent, en vue de proportionner les dimensions de la poutre aux efforts qu'elle doit supporter, l'aire $\mathcal{S}_s$ varie lorsque son centre de gravité G_s décrit la fibre moyenne; la poutre est alors dite de section variable, et l'on supposera que la section varie continuellement le long de la fibre moyenne (Figure II.2).

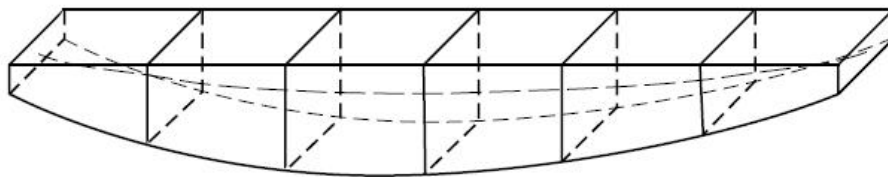


Figure II.2 – Exemple de poutre à section variable (utilisée à Jussieu pour supporter les étages) (Boucard, 2007)

L'aire $\mathcal{S}_s$ est appelée section droite de la poutre. La courbe G_0G_1 est appelée fibre moyenne de la poutre. Le volume engendré le long de G_0G_1 par un élément dS de la surface $\mathcal{S}_s$ porte le nom de fibre; cette définition n'a, bien entendu, aucun rapport avec la structure de la matière. Une poutre gauche est une poutre dont la fibre moyenne est une courbe gauche; une poutre plane est une poutre dont la fibre moyenne est une courbe plane; une poutre droite est une poutre dont la fibre moyenne est un segment de droite orientée. Une poutre à plan moyen est une poutre plane dont un plan de la fibre moyenne est un plan de symétrie, appelé plan moyen, de la poutre.

La fibre moyenne est courbe orientée de l'espace partant de G_0 et arrivant à G_1 . Il suffit d'un seul paramètre scalaire s pour définir la position d'un point matériel G_s sur la fibre moyenne. Le paramètre s est appelé abscisse curviligne, il correspond à la longueur de l'arc G_0G_s . L'équation de la ligne moyenne dans le repère direct $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est

$$\overrightarrow{OG}(s) = f_x(s) \vec{x} + f_y(s) \vec{y} + f_z(s) \vec{z} \quad (\text{II.1})$$

où f_x, f_y, f_z sont des fonctions réelles. En outre, on peut définir le vecteur unitaire tangent $\vec{n}_s$ à la ligne moyen au point G_s par

$$\vec{n}_s = \frac{1}{\left\| \frac{d\overrightarrow{OG}_s}{ds} \right\|} \frac{d\overrightarrow{OG}_s}{ds} = \frac{f'_x(s) \vec{x} + f'_y(s) \vec{y} + f'_z(s) \vec{z}}{\sqrt{(f'_x(s))^2 + (f'_y(s))^2 + (f'_z(s))^2}} \quad (\text{II.2})$$

La section droite $\mathcal{S}_s$ est définie par deux vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{t}_{1s}$ et $\vec{t}_{2s}$, à l'état de référence ils sont choisis de manière que la base $(\vec{n}_s, \vec{t}_{1s}, \vec{t}_{2s})$ soit directe.

Il faut de plus que certaines propriétés de la géométrie soit vérifiée :

- le rayon de courbure de la ligne moyenne est grande par rapport à la plus grande dimension transversale de la section droite (rapport supérieur à 5).
- la longueur de la ligne moyenne est grande par rapport à la plus grande dimension transversale de la section droite (rapport supérieur à 5).

Remarque 3 Dans le cas des poutres droites, le rayon de courbure étant infini, la première propriété est naturellement vérifiée.

II.1.2 Cas des poutres droites à plan moyen

La fibre moyenne d'une poutre droite à plan moyen (Figure II.3) est un segment de droite qui se définit par une origine et par une extrémité. On peut donc orienter la fibre moyenne et associer à la poutre un repère $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Traditionnellement :

- le vecteur $\vec{n}_s = \vec{x}$ est le vecteur unitaire de la fibre moyenne,
- le vecteur $\vec{y}$ est tel que le plan $(\vec{x}, \vec{y})$ est le plan de symétrie ou plan moyen,
- le vecteur $\vec{z}$ est choisi tel que le repère $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ soit direct,
- le point O est positionné à l'origine de la fibre moyenne.

Pour décrire la poutre on peut donc la représenter par sa ligne moyenne et sa section droite.

II.2 Hypothèses sur le matériau

Pour toutes les études que nous allons menés, nous allons considérer que le matériau constitutif de la poutre est

- homogène
- isotrope
- élastique linéaire
- à l'état naturel dans la configuration initiale

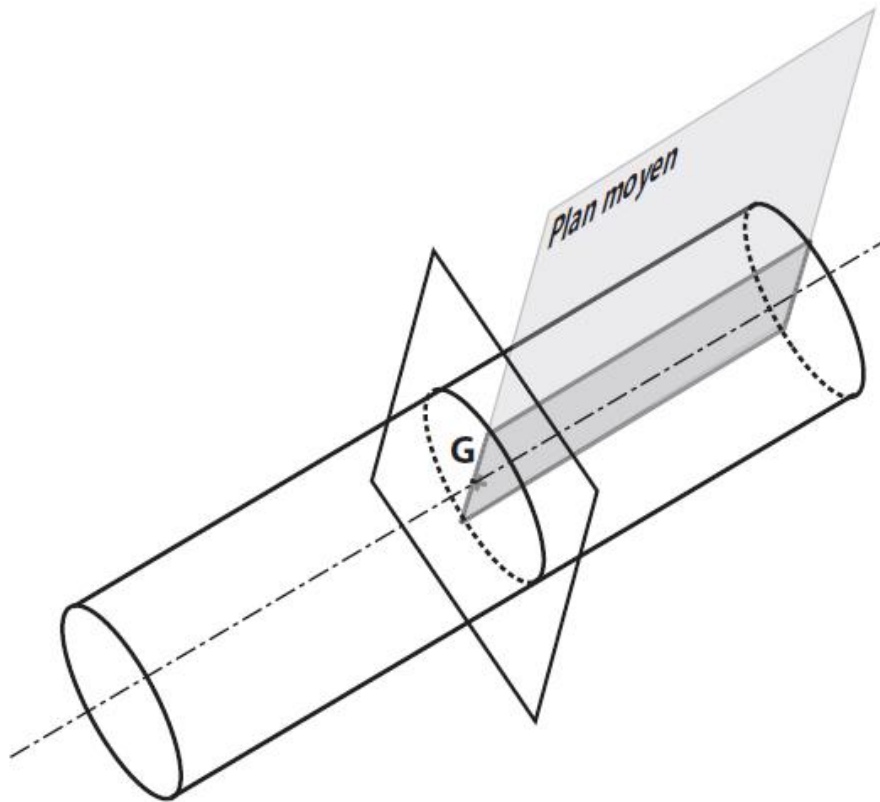


Figure II.3 – Poutre droite à plan moyen (Boucard, 2007)

II.2.1 Homogénéité

La notion la plus importante qu'il faut retenir concernant l'homogénéité est que, pour en parler, il faut nécessairement parler d'échelle. En effet, l'homogénéité se dit d'un milieu matériel qui présente des propriétés constantes dans toute son étendue. Ainsi, un milieu, quel qu'il soit, ne peut être considéré comme homogène qu'au-dessus d'une certaine échelle dimensionnelle qui lui est propre.

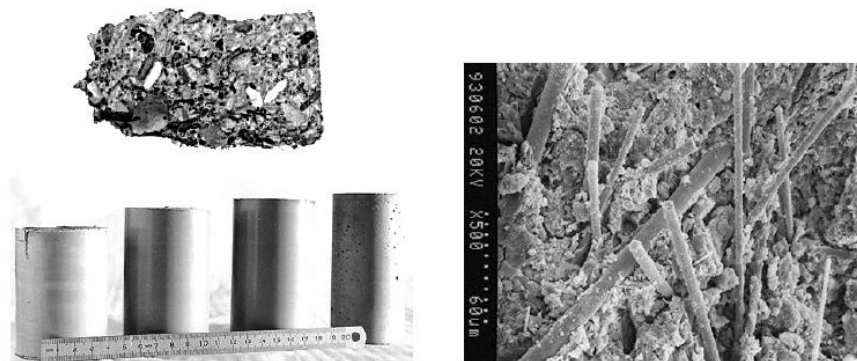


Figure II.4 – Vue des différentes échelles du béton (Boucard, 2007)

Prenons l'exemple d'un matériau très courant comme le béton (Figure II.4) : lorsqu'on

regarde un pilier d'un pont suffisamment loin, on voit le béton comme homogène. Pourtant le béton est un matériau composite de granulats, de ciment, d'eau et d'adjuvants. On peut se poser la même question avec un acier : si à une certaine échelle celui-ci est homogène, on peut descendre à l'échelle des grains qui le composent pour rapidement se rendre compte que c'est, à l'échelle microscopique, un matériau hétérogène.

Il est aussi important de s'intéresser à la répartition spatiale des hétérogénéités dans le matériau. En effet si cette répartition est régulière (périodique par exemple), on pourra se ramener plus facilement à un matériau homogène équivalent. Ainsi, pour l'étude des poutres, il faudra que la plus grande dimension transversale soit grande (supérieure à 10 fois) par rapport à la dimension de la plus grande hétérogénéité présente dans le matériau (taille des granulats du béton par exemple). On peut aussi ajouter qu'en pratique c'est souvent un choix de modélisation de considérer qu'un matériau est homogène.

II.2.2 Isotropie

Un matériau est dit isotrope s'il présente les mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace. Par exemple, on peut le caractériser par le fait qu'un signal quelconque (son, courant électrique, ...) peut se propager de la même manière dans toutes les directions.

De même que l'homogénéité, l'isotropie n'apparaît qu'au-dessus d'une certaine échelle dimensionnelle : par exemple, un polycristal formé d'un grand nombre de grains anisotropes disposés aléatoirement paraît isotrope, à grande échelle. S'agissant des caractéristiques mécanique des matériaux, il est parfois assez intuitif de dire si un matériau est isotrope ou non. Si l'on considère un matériau qui possède des fibres ayant une direction privilégiée (comme le bois), du fait de l'orientation particulière de ces fibres, le bois ne sera pas isotrope.

Une expérience simple menée avec une peau de banane permet facilement de se rendre compte qu'il est plus facile de déchirer la peau en tirant dans la direction perpendiculaire à la plus grande direction (direction orthogonale aux fibres de la peau) qu'en tirant dans la direction des fibres.

II.2.3 Elasticité linéaire

Un matériau est dit élastique s'il retrouve entièrement sa forme ou son volume après avoir subi un cycle de charge/décharge quelconque. Cette notion est implicitement liée à la réversibilité totale et au fait qu'au cours du chargement et du déchargement (*i.e.* au bilan pour tout le cycle) le matériau ne dissipe aucune énergie. On peut aussi dire que lors du chargement, le chemin suivi sera le même que lors de la décharge. L'état actuel du matériau ne dépend donc que des charges appliquées à l'instant considéré et non du chemin suivi.

Remarque 4 *Dans le cas d'un matériau élastique linéaire isotrope, On peut utiliser comme loi de comportement soit*

Loi de Hook

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = 2\mu\underline{\underline{\sigma}} + \lambda\text{Tr}[\underline{\underline{\sigma}}]\underline{\underline{I}} \quad (\text{II.3})$$

Loi de Lamé

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{\nu}{E}\text{Tr}[\underline{\underline{\varepsilon}}]\underline{\underline{I}} \quad (\text{II.4})$$

II.2.4 Etat naturel

Les contraintes dans le matériau $\boldsymbol{\sigma}$ sont liées à la fois aux déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ depuis l'état initial, mais aussi aux contraintes initiales $\boldsymbol{\sigma}^0$. Les contraintes initiales sont appelées contraintes résiduelles, nous les considérerons comme nulle et le solide sera dit à l'état naturel.

En général, s'il n'y a aucune force volumique ni aucune contrainte de surface dans l'état initial, il n'en résulte nullement que l'état initial soit naturel. En effet, les procédés d'obtention des pièces de construction usuels (moulage, forgeage, usinage, extrusion, ...) sont à l'origine de contraintes internes importantes. Toutefois l'hypothèse de l'état naturel est justifiée pour les matériaux métalliques qui ont été soumis à un recuit ou revenu de longue durée : ces traitements, en rapprochant le métal de l'état fluide, font disparaître ou du moins réduisent considérablement les contraintes résiduelles.

II.3 Principe de Saint-Venant

Ce principe découle des travaux de Adhémar Barré de Saint-Venant sur la torsion élastique d'un barreau. En effet dans la pratique, pour ce type d'éléments (barres, poutres) fréquemment rencontrés dans les structures, on est confronté aux conditions suivantes :

- la longueur de la barre est grande vis-à-vis de ses dimensions transversales,
- on connaît la valeur du couple de torsion appliqué aux extrémités de la barre,
- on ne connaît pas précisément la façon dont ce couple est appliqué

C'est à ce propos que Saint Venant a formulé pour la première fois, en 1853, la conjecture connue sous le nom de **Principe de Saint Venant**, dans son *Mémoire sur la torsion des prismes*. Il a développé et précisé ce point dans le *Résumé des leçons* données par Navier à l'Ecole de ponts et chaussées (1864) :

« Nous l'avons dit : des faits suffisamment nombreux montrent le peu d'influence du mode de répartition et d'application, et permettent d'employer les formules soit anciennes soit nouvelles d'extension, torsion, flexion, pour des forces quelconques agissant aux extrémités des prismes très-long par rapport à leurs dimensions transversales en n'ayant égard qu'aux grandeurs de leurs résultantes et de leurs moments résultants. D'où il suffit de donner des démonstrations exactes des formules relativement à un cas ou à un mode particulier d'action des forces aux extrémités, pour la théorie soit établie et qu'on puisse faire l'application de ses résultats aux divers autres cas qui peuvent s'offrir. »

II.3.1 Enoncé

En d'autres termes : étant donné un solide déformable, si sur une partie de sa frontière (Σ) on remplace une distribution de forces appliquées par une autre distribution, constituant un torseur équivalent et agissant également sur (Σ) , les sollicitations restent inchangées dans toute région du solide suffisamment éloignée de (Σ) .

Remarque 5 *La conséquence directe de ce principe est que les résultats obtenus par un calcul de RdM sur une poutre ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des actions mécaniques extérieures concentrées et des liaisons. En pratique on peut considérer que les résultats sont valables à partir d'une distance égale à 2 fois la plus grande dimension transversale.*

II.3.2 Illustrations expérimentales

Pour mettre en évidence le phénomène décrit précédemment, nous allons nous livrer à une expérience utilisant un procédé appelé photoélasticimétrie. Ce procédé optique dû

à Augustin Mesnager (1901), permet de déterminer les intensités et les directions des deux contraintes principales en tout point d'une maquette en lame mince de PMMA (PolyMéthyle MéthAcrylate) qui est transparente biréfringente accidentellement (*i.e.* qui devient biréfringente sous l'action des contraintes mécaniques), traversée par un flux de lumière polarisée, c'est-à-dire orientée.

Dit de manière plus pragmatique, ce procédé permet de visualiser l'intensité des contraintes (plus précisément d'une combinaison des contraintes) sous la forme d'un spectre de couleur et ceci tant que l'on reste dans le domaine élastique.

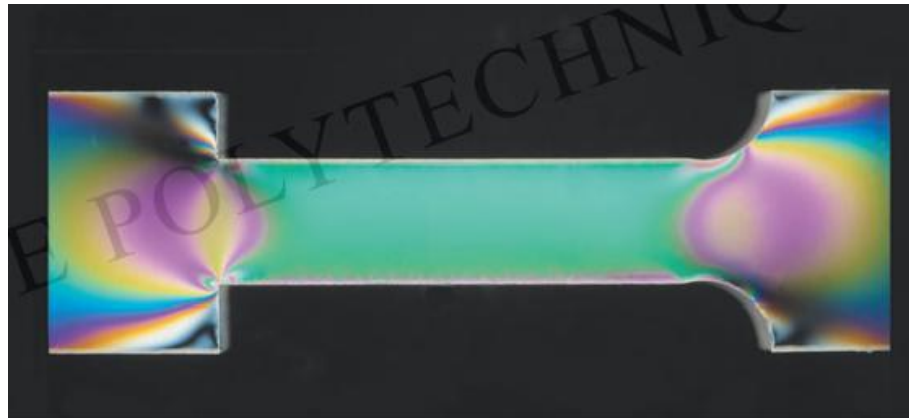


Figure II.5 – Vérification expérimentale du principe de Saint Venant sur l'expérience de traction d'une éprouvette (photo : J. Salençon (Salençon, 2007))

Les franges de la Figure II.5 visualisent le champ de contrainte lors d'un essai de traction. On voit que les effets d'extrémités sont très localisés. Par ailleurs la présence de congés à l'extrémité droite de l'éprouvette atténue beaucoup les concentrations de contraintes par rapport aux angles vifs de l'extrémité de gauche. Sur la Figure II.6, le bloc de gauche est

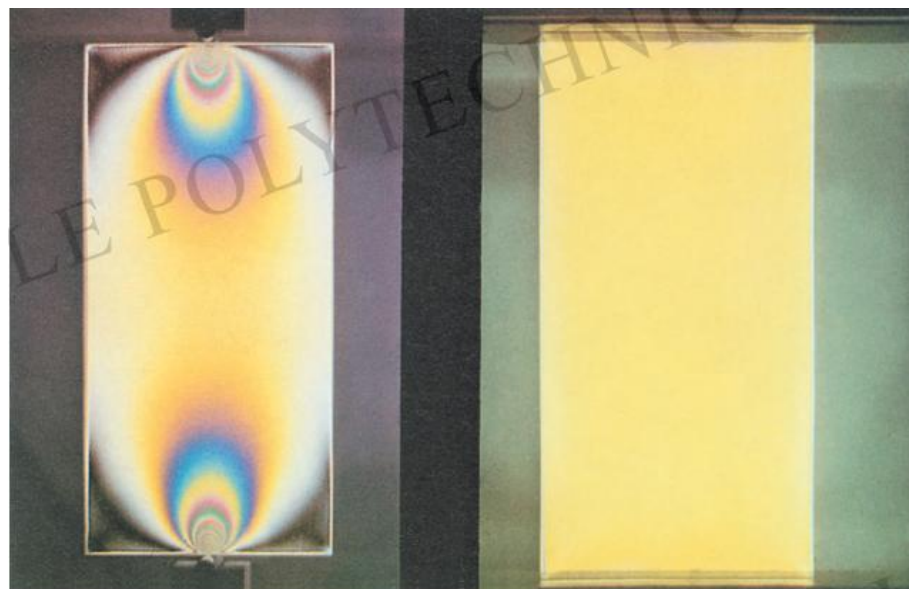


Figure II.6 – Compression d'un bloc (Salençon, 2007)

chargé par des forces concentrées ; dans le bloc de droite on impose, au moyen de traverses indéformables lisses, une translation verticale de la face supérieure. On constate l'absence

totale de franges dans le bloc de droite, ce qui traduit l'homogénéité du champ de contrainte. Dans le bloc de gauche des concentrations de contraintes sont apparentes autour des points d'application des charges concentrées, avec de forts gradients (franges très rapprochées) : mais une bonne homogénéité du champ de contrainte règne dans le corps du bloc. A noter qu'au voisinage des forces concentrées, le comportement du matériaux n'est plus élastique.

II.4 Cinématique

II.4.1 Torseur des petits déplacement

II.4.1.1 Hypothèse cinématique

La base de la théorie des poutres est de considérer que les dimensions transversales étant faibles devant la dimension longitudinale, chaque section droite d'abscisse s se comporte comme un solide. Pour chaque section on a donc une cinématique décrite par le torseur cinématique :

$$\left\{ \mathcal{V}_s \right\}_{G_s} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_s \\ \vec{V}(G_s) \end{array} \right\} \quad (\text{II.5})$$

où pour tout point $M \in \mathcal{S}_s$ a sa vitesse définie par :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(G_s) + \vec{\Omega}_s \wedge \overrightarrow{G_s M} \quad \forall M \in \mathcal{S}_s \quad (\text{II.6})$$

Cette hypothèse cinématique conduit à la théorie naturelle des poutres. Nous verrons plus loin l'hypothèse plus forte de Bernoulli qui permet de montrer les classiques résultats de la RdM .

II.4.1.2 Torseur des petits déplacements

On fait l'hypothèse des petites perturbations (petits déplacement et petite déformation), ce qui permet de construire un champ de déplacement qui soit un champ de moment de torseur. Par définition le déplacement d'un point est

$$\begin{aligned} \vec{U}(M \in \mathcal{S}) &= \int_0^t \vec{V}(M \in \mathcal{S}) \, dt \\ &= \int_0^t \left\{ \vec{V}(G_s) + \vec{\Omega}_s \wedge \overrightarrow{G_s M} \right\} \, dt \\ &= \overrightarrow{U_{G_s}}(s) + \int_0^t \vec{\Omega}_s \wedge \overrightarrow{G_s M} \, dt \end{aligned}$$

L'hypothèse des petites perturbations conduit à confondre la configuration initiale et la configuration finale, le vecteur $\overrightarrow{GM}$ sort de l'intégrale. D'où

$$\begin{aligned} \int_0^t \vec{\Omega}_s \wedge \overrightarrow{G_s M} \, dt &= \int_0^t \vec{\Omega}_s \, dt \wedge \overrightarrow{G_s M} \\ &= \vec{\Psi}(s) \wedge \overrightarrow{G_s M} \end{aligned}$$

Ce qui permet de construire le torseur des petits déplacements dans une section droite d'abscisse s et le moment en G_s est le « petit » déplacement du centre d'inertie de la section

$$\left\{ \mathcal{U}_s \right\}_{G_s} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Psi}(s) \\ \overrightarrow{U_{G_s}}(s) \end{array} \right\} \quad (\text{II.7})$$

II.4.2 Torseur des petites déformations

On définit le torseur des petites déformations $\left\{ \mathcal{D} \right\}$ par la variation du champ de déplacement $\vec{U}$ suivant le sens de la poutre. La dérivé du torseur est

$$\left\{ \mathcal{D}_s \right\} = \frac{d}{ds} \left\{ \mathcal{U}_s \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\gamma}(s) \\ \vec{\varepsilon}_{G_s}(s) \end{array} \right\} \quad (\text{II.8})$$

où $\vec{\gamma}(s)$ est la rotation relative et $\vec{\varepsilon}_{G_s}(s)$ la déformation au points G_s . Ces vecteurs sont définis par

$$\vec{\gamma}(s) = \frac{d\vec{\Psi}(s)}{ds} \quad (\text{II.9})$$

$$\vec{\varepsilon}_{G_s}(s) = \frac{d\vec{U}_{G_s}(s)}{ds} + \vec{n}_s \wedge \vec{\Psi}(s) \quad (\text{II.10})$$

La projection de la résultante sur le vecteur normal $\vec{n}_s$ à la section $\mathcal{S}_s$ permet d'introduire l'angle unitaire de torsion θ_s . Alors que celles sur les deux vecteurs unitaire $(\vec{t}_{1s}, \vec{t}_{2s})$ de la section $\mathcal{S}_s$ introduisent les distorsion angulaires dues à la flexion $\gamma_{t_{1s}}$ et $\gamma_{t_{2s}}$. De même, les projections $\varepsilon_{t_{1s}}$ et $\varepsilon_{t_{2s}}$ du moment en G_s sont des cisaillement (ou distorsion angulaire) entre la tangent à la ligne moyenne section $\vec{n}_s$ et les directions $\vec{t}_{1s}$ et $\vec{t}_{2s}$. L'allongement relatif ε_s provient de l'effort de traction dans la direction $\vec{n}_s$.

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(s) &= \theta_s \vec{n}_s + \gamma_{t_{1s}} \vec{t}_{1s} + \gamma_{t_{2s}} \vec{t}_{2s} \\ \vec{\varepsilon}_{G_s}(s) &= \varepsilon_s \vec{n}_s + \varepsilon_{t_{1s}} \vec{t}_{1s} + \varepsilon_{t_{2s}} \vec{t}_{2s} \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

II.4.3 Détermination des déplacement

II.4.3.1 Formules de Bresse

La résolution d'un problème de poutre permet de déterminer les composantes du torseur des petites déformations. Dès lors il reste à remonter au torseur des petits déplacements par intégration des relations (II.9) et (II.10). Il est clair que l'on devra procéder en deux temps : tout d'abord effectuer l'intégration l'équation des résultantes (équation II.9) de façon à déterminer les rotations de sections $\vec{\Psi}(s)$ et permettre l'intégration de l'équation de moment (équation II.10) pour obtenir $\vec{U}_{G_s}(s)$.

Les deux formules de Bresse permettent de systématiser cette étape. Soient A et B deux point sur la ligne moyenne de la poutre étudiée. Supposons que le déplacement de A soit connu, c'est-à-dire qu'on connaisse $\vec{\Psi}(A)$ et $\vec{U}_A$, on souhaite calculer le déplacement B . La première formule de Bresse permet de calculer la rotation relative au point B

$$\vec{\Psi}(B) = \vec{\Psi}(A) + \int_A^B \left\{ \theta_s \vec{n}_s + \gamma_{t_{1s}} \vec{t}_{1s} + \gamma_{t_{2s}} \vec{t}_{2s} \right\} ds \quad (\text{II.12})$$

La seconde formule de Bresse permet d'obtenir $\vec{u}_B$

$$\vec{U}_B = \vec{U}_A + \vec{\Psi}(B) \wedge \vec{AB} + \int_A^B \vec{\varepsilon}_{G_s}(s) ds + \int_A^B \vec{AG_s} \wedge \vec{\gamma}(s) ds \quad (\text{II.13})$$

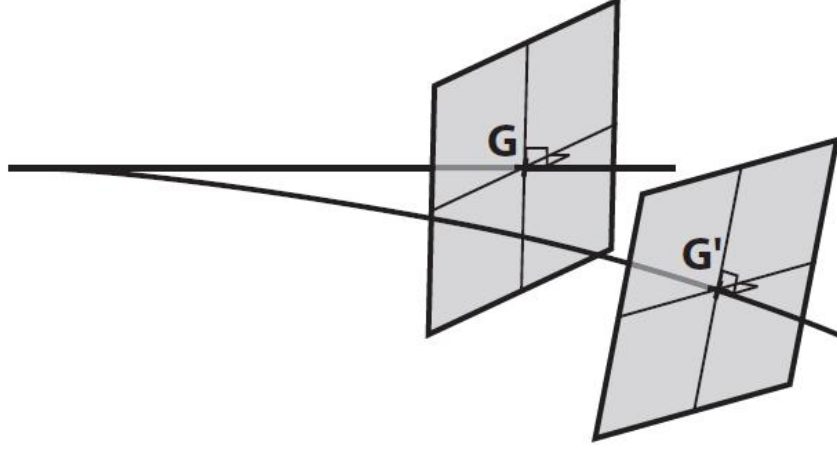


Figure II.7 – Visualisation de l'hypothèse de Bernoulli (Boucard, 2007)

II.4.3.2 Hypothèse de Bernoulli

Hypothèse de Bernoulli : les sections normales à la ligne moyenne restent planes et normales à la ligne moyenne pendant la déformation de la poutre. Un énoncé souvent plus répandu est de dire que toute section droite (*i.e.* plane et perpendiculaire à la ligne moyenne) avant déformation reste droite après déformation. Cette hypothèse géométrique est donc compatible avec ce qui vient d'être développé mais donne une simplification supplémentaire, à savoir que le vecteur tangent à la poutre déformée est normal à la section droite après rotation (Figure II.7). Ceci implique les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{\Psi}_s \cdot \vec{t}_{1s} &= \frac{d\vec{U}_{G_s} \cdot \vec{t}_{2s}}{ds} \\ \vec{\Psi}_s \cdot \vec{t}_{2s} &= \frac{d\vec{U}_{G_s} \cdot \vec{t}_{1s}}{ds}\end{aligned}\tag{II.14}$$

En introduisant ces deux expressions dans l'expression du torseur des petites déformations, on déduit que

$$\varepsilon_{t_1s} = \varepsilon_{t_2s} = 0 \quad \forall G_s \in (G_1G_2)\tag{II.15}$$

Cette hypothèse est bien vérifiée dans de nombreux cas de sollicitations simples, elle permet d'utiliser une version simplifiée du torseur des petites déformations.

$$\left\{ \mathcal{D}_s \right\}_{G_s} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\gamma}(s) \\ \varepsilon_s \vec{n}_s \end{array} \right\}\tag{II.16}$$

Quant on se restreint aux cas des poutres à plans moyens, le fait que la section reste plane permet de caractériser le déplacement de toute section droite par un torseur des petits déplacements $\left\{ \mathcal{U}_s \right\}$ qui ne compte que quatre composantes non nulles associées à :

- déplacement dans la direction $\vec{x}$, noté u_s
- déplacement dans la direction $\vec{y}$, noté v_s
- rotation autour de l'axe $\vec{x}$, noté Θ_s

- rotation autour de l'axe $\vec{z}$, noté ω_s

De plus, les sections droites restent perpendiculaires à la ligne moyenne, on peut relier la rotation de la section autour de l'axe $\vec{z}$ à la dérivée du déplacement dans la direction $\vec{y}$

$$\omega_s = \frac{dv_s}{dx} \quad (\text{II.17})$$

Ainsi, on peut décrire le déplacement global de chaque section droite d'une poutre par ce torseur des petits déplacements :

$$\left\{ \mathcal{U}_s \right\}_{G_s} = \left\{ \begin{array}{l} \Theta_s \vec{x} + \omega_s \vec{z} \\ u_s \vec{x} + v_s \vec{y} \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad \omega_s = \frac{dv_s}{dx} \forall s \quad (\text{II.18})$$

À partir de ce torseur, on peut aussi décrire le déplacement local d'un point quelconque M de la section $\mathcal{S}_s$ en déplaçant le torseur précédent au point M . Avec ce qui précède, nous avons introduit deux notions fondamentales :

- les grandeurs globales, caractéristiques de la section droite,
- les grandeurs locales, caractéristiques d'un point de la section.

La grande force de la *RdM* consiste à résoudre les problèmes en ne travaillant que sur les grandeurs globales. La détermination des grandeurs locales, en particulier les contraintes que nous allons préciser par la suite (mais éventuellement aussi les déformations et les déplacements), est alors utile pour appliquer des critères de dimensionnement tels que par exemple :

- critère en contrainte de type Tresca,
- critère en déformation (utilisé typiquement pour le béton),
- critère en déplacement (par exemple la variation d'entraxe entre deux arbres d'une boîte de vitesse qui doit rester compatible avec les conditions de fonctionnement).

Remarque 6 *L'hypothèse de Bernoulli amène aussi la nécessité de restreindre le cadre d'étude à des sections particulières pour la torsion. En effet, on ne considèrera dans ce cours que la torsion des poutres à section circulaire : l'étude d'autres sections nécessiterait d'abandonner l'hypothèse de Bernoulli pour prendre en compte le gauchissement des sections (pour une section droite, le gauchissement est le fait de se voiler en prenant une forme complexe).*

Il est possible en RdM de faire un calcul en torsion à section non circulaire à condition de prendre en compte un module de rigidité lié au gauchissement, mais ce dernier point ne fait pas partie des objectifs de ce cours.

II.5 Conditions aux limites

Les conditions aux limites qui s'appliquent sur une poutre sont de deux natures. Celles constituées par les liaisons avec l'extérieur, et celles liées à la présence du chargement.

II.5.1 Les efforts extérieurs

Les efforts extérieurs qui s'appliquent au modèle poutre sont principalement de deux types. Les forces extérieures peuvent être : $\vec{U}$ concentrées, $\vec{U}$ réparties de façon continue. L'action mécanique des efforts extérieurs sont classiquement modélisées par des torseurs d'actions mécaniques exprimés au centre de gravité G_s d'une section $\mathcal{S}_s$.

$$\left\{ \tau_{ext \rightarrow Poutre} \right\}_{G_s} = \left\{ \begin{array}{l} R_x \vec{x} + R_y \vec{y} + R_z \vec{z} \\ M_{G_s}^x \vec{x} + M_{G_s}^y \vec{y} + M_{G_s}^z \vec{z} \end{array} \right\}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \quad (\text{II.19})$$

Remarque 7 Lorsqu'on travaille sur des poutres à plan moyen (plan $(\vec{x}, \vec{y})$), on supposera alors que la forme générale du torseur des actions mécaniques extérieures se réduit à :

$$_{G_s} \left\{ \tau_{ext \rightarrow Poutre} \right\} = _{G_s} \left\{ \begin{array}{c} R_x \vec{x} + R_y \vec{y} \\ M_{G_s}^x \vec{x} + M_{G_s}^y \vec{y} \end{array} \right\}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \quad (\text{II.20})$$

II.5.2 Liaisons

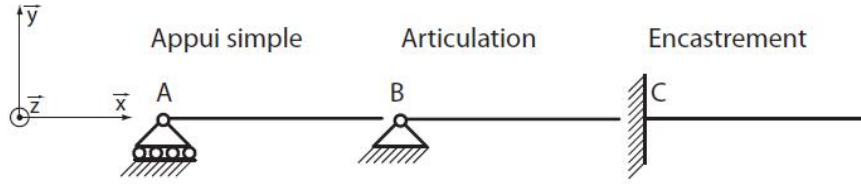


Figure II.8 – Les trois liaisons usuelles du modèle poutre (Boucard, 2007)

Les liaisons que l'on rencontre sont les liaisons classiques déjà connues, on se place bien entendu dans le cas des liaisons parfaites. Néanmoins, dans le cas des poutres à plan moyen chargées dans leur plan, amène à distinguer trois types de liaisons classiquement imposées aux poutres (Figure II.8) :

L'appui simple, constitué, par exemple, par un rouleau cylindrique, donne lieu à une réaction de direction imposée passant par le point d'appui ; cette réaction est définie par une seule composante en résultante perpendiculaire au contact :

$$\left\{ \tau_{ext \rightarrow Poutre} \right\} = _A \left\{ \begin{array}{c} R_y \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (\text{II.21})$$

Les mouvements autorisés par l'appui simple sont un déplacement dans la direction $\vec{x}$, ainsi que les rotations autour des axes $\vec{x}$ et $\vec{z}$, donc le seul déplacement suivant $\vec{y}$ est bloqué, d'où l'expression du torseur des petits déplacements :

$$\left\{ \mathcal{U}_A \right\} = _A \left\{ \begin{array}{c} \Theta_A \vec{x} + \omega_A \vec{z} \\ u_A \vec{x} \end{array} \right\} \Leftrightarrow v_A = 0 \quad (\text{II.22})$$

L'articulation, constituée, pour les poutres métalliques, par une rotule comprise entre deux balanciers en acier moulé et, pour les poutres en béton, par une section fortement rétrécie, donne lieu à une réaction dont on ne connaît pas la direction, mais qui passe par le centre de la rotule ou par le centre de la section rétrécie ; cette réaction est définie par ses deux composantes suivant deux directions non parallèles du plan moyen :

$$\left\{ \tau_{ext \rightarrow Poutre} \right\} = _B \left\{ \begin{array}{c} R_x \vec{x} + R_y \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (\text{II.23})$$

Les mouvements autorisés par l'articulation sont les rotations autour des axes $\vec{x}$ et $\vec{z}$, donc les déplacements suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont bloqués, d'où l'expression du torseur des petits déplacements :

$$\left\{ \mathcal{U}_B \right\} = _B \left\{ \begin{array}{c} \Theta_B \vec{x} + \omega_B \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow u_B = v_B = 0 \quad (\text{II.24})$$

L'encastrement a pour objet d'assurer l'invariabilité de la section d'extrémité d'une poutre ; la réaction d'appui comprend une force passant par le centre de gravité G_s de la section d'encastrement et contenue dans le plan moyen, et un moment normal au plan moyen ; la réaction d'appui est donc définie par trois composantes : les deux projections sur deux axes situés dans le plan moyen et la projection du moment sur l'axe normal au plan moyen.

$$\left\{ \tau_{ext \rightarrow Poutre} \right\} = {}_C \left\{ \begin{array}{l} R_x \vec{x} + R_y \vec{y} \\ M_C^x \vec{x} + M_C^y \vec{y} \end{array} \right\} \quad (\text{II.25})$$

Il n'y a pas de mouvements possibles dans l'encastrement, donc les déplacements suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et les rotations autour des axes $\vec{x}$ et $\vec{z}$ sont bloqués, d'où l'expression du torseur des petits déplacements :

$$\left\{ \mathcal{U}_C \right\} = {}_C \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \Leftrightarrow u_C = v_C = 0 \quad \text{et} \quad \Theta_C = \omega_C = 0 \quad (\text{II.26})$$

En fonction de l'environnement du solide étudié, on choisira donc la liaison la mieux adaptée pour le modèle poutre.

Références

- Boucard, P.-A. (2007). *Cours de Dimensionnement des Structures Resistance des Materiaux*. IUT Cachan. Meca : RDM.
- Salencon, J. (2007). *Mecanique des milieux continus. Tome 2 : Thermoelasticite*. Editions de l'Ecole Polytechnique. Meca MMC.

Chapitre -III-

Torseur des efforts intérieurs

Table des Matières

III.1	Torseur des efforts intérieurs	14
III.1.1	Coupure d'une poutre en équilibre	14
III.1.2	Bilan et règles de calcul	16
III.1.3	Exemple du viaduc d'Austerlitz	17
III.2	Dénomination des composantes et des sollicitations associées . .	18
III.3	Diagramme	19
III.4	Relations intégrales entre les contraintes et le torseur des efforts intérieurs	20
III.4.1	Intégration du vecteur contrainte sur la section droite $\mathcal{S}_s$	20
III.4.2	Problème de De Saint-Venant	22
III.4.3	Bilan et relation de comportement globale	24
III.5	Résolution d'un problème	25
III.5.1	Intérêt de la RdM	25
III.5.2	Problèmes isostatiques	25
III.5.3	Problèmes hyperstatiques	26

Ce chapitre va aborder une notions fondamentales pour la *RdM* : le torseur des efforts intérieurs, qui représente les actions de cohésion globale au niveau de la section de la poutre. Dans un premier temps, la statique nous permettra d'introduire le torseur des efforts intérieurs.

Une relation intégrale reliant les grandeurs locales, vecteur contrainte en tout point M de la section $\mathcal{S}_s$, aux grandeurs globales, torseur des efforts intérieurs sera introduite. Ce passage des grandeurs globales aux grandeurs locales nécessite la connaissance d'une répartition des contraintes sur chaque section droite.

Finalement, la répartition des contraintes ainsi qu'une loi de comportement à l'échelle de la section seront exhibées à l'aide du problème de Saint-Venant.

III.1 Torseur des efforts intérieurs

III.1.1 Coupure d'une poutre en équilibre

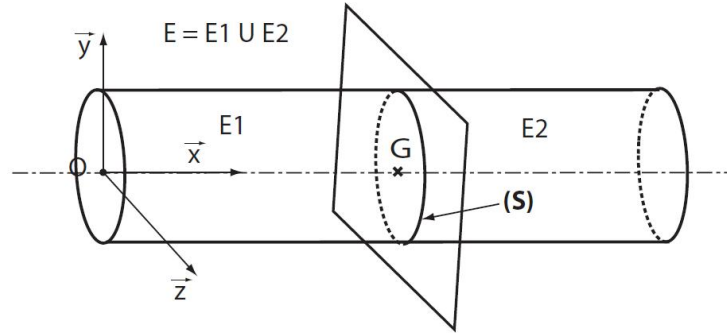


Figure III.1 – Poutre étudiée (Boucard, 2007)

Considérons une poutre E (Figure III.1) que nous séparons artificiellement en deux parties nommées $E1$ et $E2$, de telle sorte que $E = E1 \cup E2$. La séparation artificielle introduite est une coupure au point G_s par une section droite $\mathcal{S}_s$. Compte tenu de l'orientation de l'axe $\vec{x}$, on note $E1$ la partie gauche et $E2$ la partie droite. On suppose que cette poutre est en équilibre sous l'action des actions de l'extérieur.

En isolant la poutre E et en appliquant le principe fondamental de la statique, nous avons donc :

$$\left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow E} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Puisque :

$$\left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow E} \right\} = \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow E1} \right\} + \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow E2} \right\}$$

On peut aussi écrire :

$$\left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow E1} \right\} + \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow E2} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

A partir de la coupure définie précédemment, on peut artificiellement séparer les deux parties de la poutre (Figure III.2). On peut alors isoler un des deux tronçons de la poutre, par exemple le tronçon $E1$. Faisons alors le bilan des actions mécaniques qui s'appliquent à $E1$:

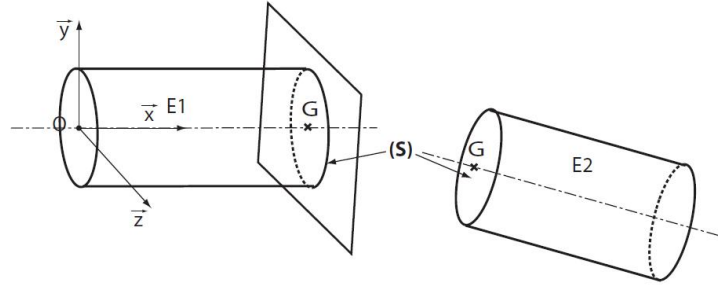


Figure III.2 – Poutre séparée en deux parties (Boucard, 2007)

- ce tronçon est soumis à une partie des actions mécanique extérieures, soit

$$\left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow E1} \right\}$$

- Il est aussi soumis aux actions de la partie $E2$ sur la partie $E1$ à travers la section $\mathcal{S}_s$. Nous ignorons *a priori* la nature de ces actions mécaniques, cependant la liaison entre $E1$ et $E2$ peut transmettre toutes les composantes des actions mécaniques de $E2$ sur $E1$, elle peut donc être modélisée par une liaison encastrement.

$$\left\{ \mathcal{T}_{E2 \rightarrow E1} \right\}$$

Par définition, le torseur d'action mécanique de $E2$ sur $E1$ est appelé torseur des efforts intérieurs ou torseur de cohésion. C'est en effet cette liaison (les efforts et moments qu'elle transmet) qui assure la cohésion des deux éléments $E1$ et $E2$ de la poutre E . Le choix de prendre les actions de la partie droite $E2$ sur la partie gauche $E1$ est une convention. Nous avons donc :

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\} = \left\{ \mathcal{T}_{E2 \rightarrow E1} \right\}$$

Puisque l'on considère une poutre, on exprime naturellement ce torseur au point G_s , centre de la liaison encastrement, soit

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_{G_s} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(E2 \rightarrow E1) \\ \vec{M}_{G_s}(E2 \rightarrow E1) \end{array} \right\}$$

On peut maintenant appliquer le principe fondamental de la statique au tronçon de poutre $E1$:

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_{G_s} + \left\{ \mathcal{T}_{E2 \rightarrow E1} \right\}_{G_s} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_s}$$

Ceci permet donc de donner un moyen de calculer le torseur de cohésion à partir des actions extérieures exercées sur le tronçon $E1$:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_{G_s} &= - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow E1} \right\}_{G_s} \\ &= - \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(ext \rightarrow E1) \\ \vec{M}_{G_s}(ext \rightarrow E1) \end{array} \right\}_{G_s} \end{aligned}$$

Isolons maintenant le tronçons $E2$. Le bilan des actions mécaniques est le suivant :

- les actions mécaniques de l'extérieur sur le tronçon $E2$

$$\left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow E2} \right\}$$

- les actions mécanique de $E1$ sur $E2$ à travers la sections $\mathcal{S}_s$

$$\left\{ \mathcal{T}_{E1 \rightarrow E2} \right\}$$

On peut relier le torseur des actions de $E1$ sur $E2$ au torseur des efforts intérieurs par le principe d'action réciproque, soit :

$$\left\{ \mathcal{T}_{E1 \rightarrow E2} \right\} = - \left\{ \mathcal{T}_{E2 \rightarrow E1} \right\} = - \left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}$$

L'écriture du principe fondamental de la statique appliqué au tronçon $E2$ donne donc :

$$\left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow E2} \right\} - \left\{ \mathcal{T}_{int} \right\} = \underset{G_s}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Ceci permet de donner un autre moyen de calculer le torseur de cohésion à partir des actions extérieures exercées sur le tronçon $E2$:

$$\begin{aligned} \underset{G_s}{\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}} &= + \underset{G_s}{\left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow E2} \right\}} \\ &= + \underset{G_s}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(ext \rightarrow E2) \\ \vec{M}_{G_s}(ext \rightarrow E2) \end{array} \right\}} \end{aligned}$$

III.1.2 Bilan et règles de calcul

Par convention, le torseur des efforts intérieurs représente les actions mécaniques exercées à travers une coupure par la partie située à droite $E2$ de la coupure sur la partie située à gauche $E1$ de la coupure (l'axe étant supposé orienté de gauche à droite). Le torseur s'exprime au point G_s et peut, dans le cas d'un système isostatique, se calculer indifféremment à partir des actions mécanique de l'extérieur sur $E2$ ou à partir des actions mécaniques de l'extérieur sur $E1$. On verra dans les applications qu'il existe souvent un choix plus judicieux que l'autre pour aboutir à la détermination du torseur des efforts intérieurs. On peut donc écrire :

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\} = \left\{ \mathcal{T}_{E2 \rightarrow E1} \right\} = \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow E2} \right\} = - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow E1} \right\}$$

Que l'on peut aussi écrire avec les composantes sous la forme :

$$\begin{aligned} \underset{G_s}{\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}} &= + \underset{G_s}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(ext \rightarrow E1) \\ \vec{M}_{G_s}(E2 \rightarrow E1) \end{array} \right\}} \\ &= + \underset{G_s}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(ext \rightarrow E2) \\ \vec{M}_{G_s}(ext \rightarrow E2) \end{array} \right\}} \\ &= - \underset{G_s}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(ext \rightarrow E1) \\ \vec{M}_{G_s}(ext \rightarrow E1) \end{array} \right\}} \end{aligned}$$

Le torseur de cohésion est modifié lorsque l'on déplace la coupure le long de la poutre. On peut être amené à distinguer plusieurs coupures en particulier lorsqu'on rencontre :

- une discontinuité d'ordre géométrique (changement de direction de la ligne moyenne), cas d'une poutre en équerre par exemple,
- une discontinuité liée à des efforts concentrés ou à une liaison.

Remarque 8 *On notera que dans tout ce qui précède, il n'a jamais été fait mention que la poutre devait être droite et chargée dans son plan de symétrie. Les définitions données ici sont valables pour tout type de poutre.*

III.1.3 Exemple du viaduc d'Austerlitz



Figure III.3 – Viaduc d'Austerlitz

Pour mieux illustrer ces propos, on considère le viaduc d'Austerlitz présenté sur la figure III.3. On s'intéresse ici exclusivement au tablier du pont. Pour étudier ce tablier, on en propose la modélisation représentée sur la figure III.4 pour laquelle on néglige dans un premier temps variations de section du tablier et on a volontairement choisi de modéliser les liaisons avec les berges de la Seine par une articulation et un appui simple. On suppose dans un premier temps que la seule action mécanique extérieure est celle du poids d'un métro qui est représentée par un glisseur de direction $\vec{y}$, appliqué au point A . Pour justifier la forme de cette action extérieure, il faut préciser que l'on néglige les actions axiales liées à la distribution

Si on isole le tablier. Le bilan des actions mécaniques extérieures est

En O Articulation

$$\left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow \text{tablier}} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} X_O \vec{x} + Y_O \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

En A Action du poids du métro

$$\left\{ \mathcal{T}_{metro \rightarrow \text{tablier}} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

En B Appui simple

$$\left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow \text{tablier}} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} +Y_B \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

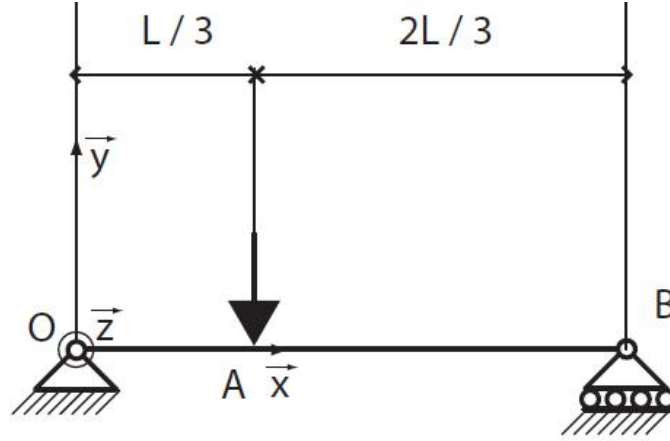


Figure III.4 – Modélisation du tablier du viaduc (Boucard, 2007)

Le principe fondamentale de la statique donne

$$X_0 = 0 \quad Y_0 = \frac{2F}{3} \quad Y_B = \frac{F}{3} \quad (\text{III.1})$$

Les opérations de coupure sur le tablier permettent de calculer le torseur de cohésion pour $x \in [0, L]$

Première partie $x \in [0, \frac{L}{3}]$

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_{G_x} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2F}{3} \vec{y} \\ \frac{2F}{3} x \vec{z} \end{array} \right\}$$

Deuxième partie $x \in [\frac{L}{3}, L]$

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_{G_x} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{F}{3} \vec{y} \\ \frac{F}{3} (L - x) \vec{z} \end{array} \right\}$$

III.2 Dénomination des composantes et des sollicitations associées

Une fois le torseur des efforts intérieurs calculé, il est intéressant de l'exprimer dans le repère local à la section droite. Dans le cas de l'étude d'une poutre droite, le repère local est confondu avec le repère global de la poutre, mais ce n'est pas le cas dans l'étude d'un assemblage de deux poutres en équerre par exemple. Considérons ici le cas générale d'une poutre gauche. Le repère local est alors le repère $(G_s, \vec{n}_s, \vec{t}_{1s}, \vec{t}_{2s})$ qui est le repère associé à la section droite S_s . On exprime alors le torseur des efforts intérieurs dans ce repère local, et l'on écrit sous sa forme générale :

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_{G_s} = \left\{ \begin{array}{l} N_s \vec{n}_s + T_{1s} \vec{t}_{1s} + T_{2s} \vec{t}_{2s} \\ M_{ts} \vec{n}_s + M_{f1s} \vec{t}_{1s} + M_{f2s} \vec{t}_{2s} \end{array} \right\}$$

Les noms choisis sont des abréviations des noms des composantes. Ainsi on a :

Effort Normal : N_s , perpendiculaire (normal) à la section droite

Efforts Tranchants : T_{1s} et T_{2s} , ont tendance à trancher la poutre perpendiculairement à la ligne moyenne

Moment de Torsion : M_{ts} , a tendance à tordre la poutre autour de la ligne moyenne

Moments de Flexions : M_{f1s} et M_{f2s} , ont tendance à faire fléchir la poutre autour d'un axe perpendiculaire à la ligne moyenne

Dans le cas des poutres droites à plan moyen (et dont le plan moyen est le plan $(\vec{x}, \vec{y})$), le tenseur des efforts intérieurs se réduit à quatre composantes non nulles.

$$_{G_s} \left\{ \mathcal{T}_{int} \right\} = _{G_s} \left\{ \begin{array}{l} N \vec{x} + T_y \vec{y} \\ M_t \vec{x} + M_{fz} \vec{z} \end{array} \right\}$$

On peut alors, en fonction de la nullité ou non de ces quatre composantes, identifier un certain nombre de sollicitations dites élémentaires qui sont caractéristiques des cas de charges couramment rencontrés. Le tableau des sollicitations élémentaires est présenté dans le tableau III.1.

Sollicitation élémentaire	Composante(s) non nulle(s)	$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}$
Traction/Compression	N	$_{G_s} \left\{ \begin{array}{l} N \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$
Cisaillement pur	T_y	$_{G_s} \left\{ \begin{array}{l} T_y \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$
Torsion	M_t	$_{G_s} \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ M_t \vec{x} \end{array} \right\}$
Flexion pure	$M_{fz} = C^{st}$	$_{G_s} \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ M_{fz} \vec{z} \end{array} \right\}$
Flexion simple	T_y et M_{fz}	$_{G_s} \left\{ \begin{array}{l} T_y \vec{y} \\ M_{fz} \vec{z} \end{array} \right\}$

Table III.1 – Sollicitations élémentaires

Remarque 9 *Le cas du cisaillement pur ne peut se rencontrer que dans une section particulière d'une poutre.*

III.3 Diagramme

La *RdM* est une science qui permet de dimensionner les pièces. Ainsi pour pouvoir appliquer des critères de dimensionnement (qui portent sur les grandeurs locales), il est utile de repérer la section de la poutre qui est la plus sollicitée. En effet, nous verrons que lorsque les efforts intérieurs sont maximaux alors il existe au moins un point de la section où les grandeurs locales le sont aussi. On utilise couramment des diagrammes de sollicitation qui permettent de visualiser rapidement les sections de la poutre les plus chargées.

En pratique, cela consiste à tracer en fonction de l'abscisse curviligne s du point de coupe, l'évolution des différentes composantes non nulles du torseur des efforts intérieurs.

Pour le cas du viaduc d'Austerlitz, on trouvera le diagramme des efforts tranchant T_y et du moment fléchissant M_{fz} sur la figure III.5.

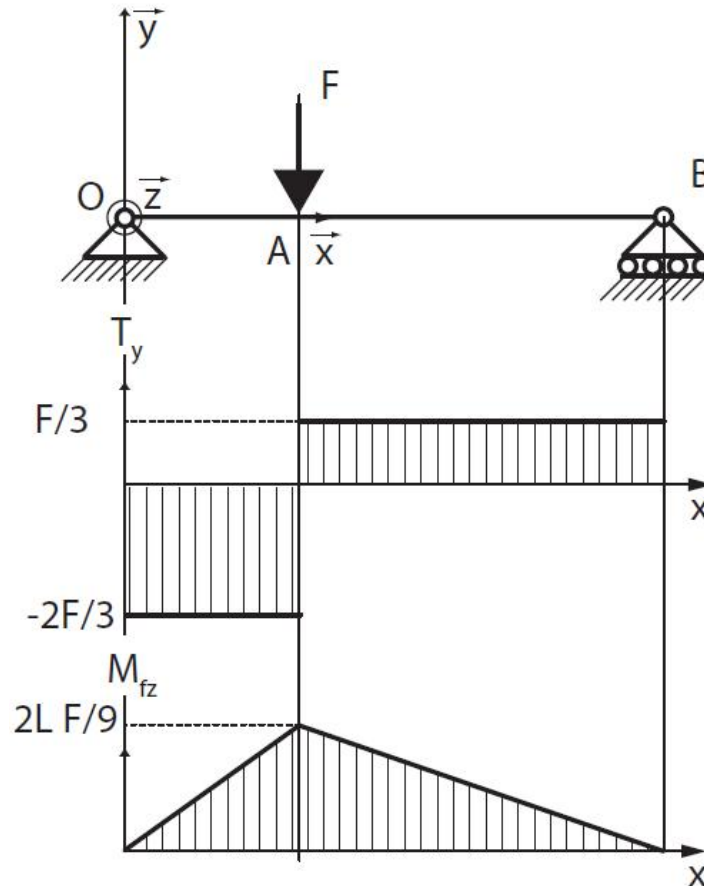


Figure III.5 – Diagramme de l'effort tranchant T_y et du moment fléchissant M_{fz} (Boucard, 2007)

III.4 Relations intégrales entre les contraintes et le torseur des efforts intérieurs

III.4.1 Intégration du vecteur contrainte sur la section droite S_s

Nous avons vu précédemment que les actions mécaniques de cohésion sont les efforts que le tronçon $E2$ exerce sur le tronçon $E1$ à travers la section droite S_s . Nous avons modélisé ces actions mécaniques par le torseur des efforts intérieurs caractérisé au point G_s , centre de la section droite.

Mais ce torseur ne représente qu'une vision globale sur la section droite de toutes les actions mécaniques qui s'appliquent localement en chaque point de la surface. Ces actions mécaniques locales sont réparties sur toute la surface suivant une loi *a priori* inconnue. Pour les représenter, considérons un point M de la surface S_s . Autour de ce point M on considère un petit élément de surface dS de normale $\vec{n}$ (voir figure III.6). Ici la surface dS

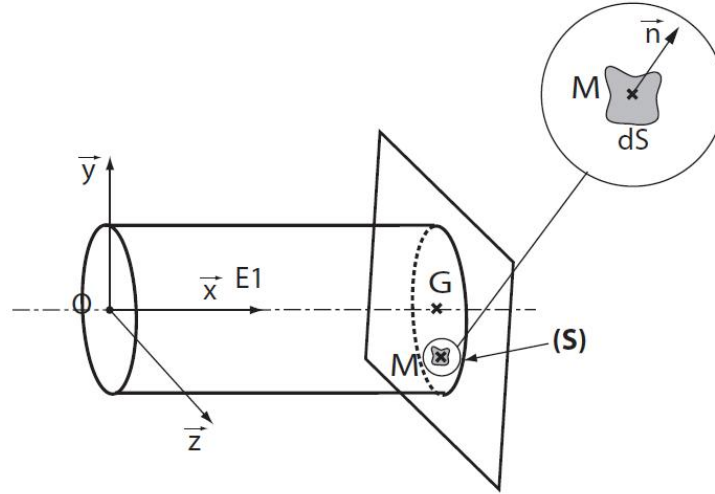


Figure III.6 – Zoom local sur le point de coupure M (Boucard, 2007)

est perpendiculaire à la ligne moyenne, mais l'on peut faire cette étude locale avec une surface, et donc une normale, quelconque.

En Mécanique des Milieux Continus, et donc en RdM, les efforts intérieurs exercés sur dS sont une densité surfacique d'efforts ou densité de force par unité de surface. Cette densité surfacique d'effort est caractérisée par le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$. Les actions mécaniques qui s'exercent sur la surface dS sont donc :

$$\vec{d\mathcal{F}}(E2 \rightarrow E1) = \vec{T}(M, \vec{n}) dS = \vec{\sigma}(M) \cdot \vec{n} dS$$

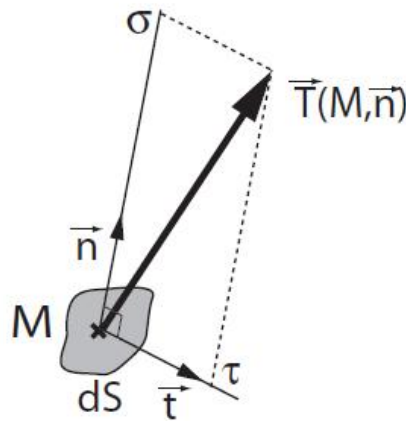


Figure III.7 – Projection du vecteur contrainte (Boucard, 2007)

On rappelle également que le vecteur contrainte peut se décomposer en une contrainte normale σ et contrainte tangentielle τ par projection sur la normale $\vec{n}$ à dS et sur un vecteur tangentiel $\vec{t}$ à dS (Figure III.7). On écrit alors

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma}(M) \cdot \vec{n} dS = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$

Il existe évidemment une relation entre le torseur de cohésion global et les vecteurs contraintes locaux en tout point de la section S_s . Pour exprimer cette relation, exprimons le

torseur des actions mécaniques s'exerçant sur dS au point G_s :

$$_M \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{d\mathcal{F}}(E2 \rightarrow E1) \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} =_{G_s} \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{d\mathcal{F}}(E2 \rightarrow E1) \\ \overrightarrow{d\mathcal{F}}(E2 \rightarrow E1) \wedge \overrightarrow{MG_s} \end{array} \right\}$$

En remplaçant par le vecteur contrainte, on a donc :

$$\begin{aligned} _M \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{d\mathcal{F}}(E2 \rightarrow E1) \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} &=_{G_s} \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{T}(M, \vec{n}) dS \\ \overrightarrow{T}(M, \vec{n}) \wedge \overrightarrow{MG_s} dS \end{array} \right\} \\ &=_{G_s} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\sigma}(M) \cdot \vec{n} dS \\ \boldsymbol{\sigma}(M) \cdot \vec{n} \wedge \overrightarrow{MG_s} dS \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Pour obtenir le torseur de cohésion, il faut alors prendre en compte toutes les actions surfaciques sur la surface $\mathcal{S}_s$ et en faire la somme, ce qui revient d'un point de vue mathématique à intégrer sur toute la surface le torseur écrit précédemment. On peut alors écrire le torseur des efforts intérieurs :

$$\begin{aligned} _{G_s} \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{T}_{int} \end{array} \right\} &=_{G_s} \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{T}_{E2 \rightarrow E1} \end{array} \right\} \\ _{G_s} \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{T}_{int} \end{array} \right\} &=_{G_s} \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}(E2 \rightarrow E1) \\ \overrightarrow{M}_{G_s}(E2 \rightarrow E1) \end{array} \right\} \\ _{G_s} \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{T}_{int} \end{array} \right\} &=_{G_s} \left\{ \begin{array}{c} \iint_{\mathcal{S}_s} \overrightarrow{T}(M, \vec{n}) dS \\ \iint_{\mathcal{S}_s} \overrightarrow{T}(M, \vec{n}) \wedge \overrightarrow{MG_s} dS \end{array} \right\} \\ _{G_s} \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{T}_{int} \end{array} \right\} &=_{G_s} \left\{ \begin{array}{c} \iint_{\mathcal{S}_s} \boldsymbol{\sigma}(M) \cdot \vec{n} dS \\ \iint_{\mathcal{S}_s} \boldsymbol{\sigma}(M) \cdot \vec{n} \wedge \overrightarrow{MG_s} dS \end{array} \right\} \end{aligned}$$

III.4.2 Problème de De Saint-Venant

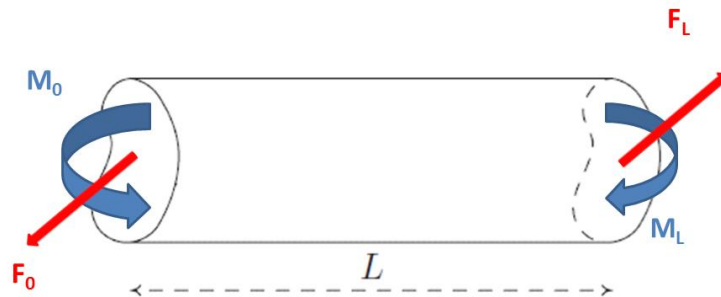


Figure III.8 – Configuration initiale du problème de De Saint Venant

Le problème de De Saint Venant est un problème d'élasticité linéaire isotrope donnant la forme de la répartition des contraintes sans le cas des solides élancés. Il s'agit d'étudier l'équilibre d'une poutre droite à section constante, de longueur L , qui n'est chargée que sur ses deux bases, $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_L$ (Figure III.8). On souhaite analyser l'équilibre de ce cylindre sous des conditions de chargement constituées exclusivement d'effort surfacique sur les sections

extrêmes. En particulier, l'effort volumique extérieur est choisi identiquement nul et la paroi latérale est supposée libre de contrainte. Le torseur des efforts extérieurs sur la base $\mathcal{S}_L$ est

$$_{G_L} \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow \mathcal{S}_L} \right\} = _{G_L} \left\{ \begin{array}{l} N^L \vec{x} + T_y^L \vec{y} + T_z^L \vec{z} \\ M_t^L \vec{x} + M_{fy}^L \vec{y} + M_{fz}^L \vec{z} \end{array} \right\}$$

Celui sur sur la base $\mathcal{S}_0$ est

$$_{G_0} \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow \mathcal{S}_0} \right\} = _{G_L} \left\{ \begin{array}{l} N^0 \vec{x} + T_y^0 \vec{y} + T_z^0 \vec{z} \\ M_t^0 \vec{x} + M_{fy}^0 \vec{y} + M_{fz}^0 \vec{z} \end{array} \right\}$$

L'équilibre de la poutre implique

$$\begin{aligned} N^0 &= -N^L T_y^0 = -T_y^L & T_z^0 &= -T_z^L \\ M_t^0 &= -M_t^L M_{fy}^0 = -M_{fy}^L + L T_z^L & M_{fz}^0 &= -M_{fz}^L - L T_y^L \end{aligned}$$

Le torseur de cohésion en un point G , de coordonné x , de la poutre est défini par

$$\begin{aligned} _G \left\{ \mathcal{T}_{int} \right\} &= _G \left\{ \begin{array}{l} N \vec{x} + T_y \vec{y} + T_z \vec{z} \\ M_t \vec{x} + M_{fy} \vec{y} + M_{fz} \vec{z} \end{array} \right\} \\ &= _G \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow \mathcal{S}_L} \right\} \\ &= _G \left\{ \begin{array}{l} N^L \vec{x} + T_y^L \vec{y} + T_z^L \vec{z} \\ M_t^L \vec{x} + \left(M_{fy}^L - (L-x) T_z^L \right) \vec{y} + \left(M_{fz}^L + (L-x) T_y^L \right) \vec{z} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

La résolution de ce problème n'est pas l'objet de ce cours de *RdM*. La distribution des contraintes sur les 2 bases étant laissé arbitraire, de Saint Venant à montrer les résultats suivants :

1. le tenseur des contraintes est de la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

2. La distribution dans une section droite des cissions σ_{12} et σ_{13} ne dépend que du couple longitudinal M_t et de l'effort tranchant T_y et T_z . La déformation angulaire θ autour de $G_0 \vec{x}$ est proportionnelle non à M_t , mais au moment de l'effort résultant par rapport à une parallèle à $G_0 \vec{x}$ dont les coordonnées y_i, z_i dépendent de la forme de la section

$$\theta = \frac{\mathcal{M}_1}{GI_G} \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_1 = M_t + T_y z_i - T_z y_i = \text{couple de torsion}$$

Dans la section droite le point de coordonnées y_i, z_i est appelé *centre de cisaillement*. Dans le cas d'une section possédant 2 axes de symétrie ce point coïncide avec G ($y_i = z_i = 0$, d'où $\mathcal{M}_1 = M_t$).

3. La distribution dans une section droite $\mathcal{S}_s$ des contraintes σ_{11} normales à cette section, la dilatation linéaire ε et des déformation angulaire de la section γ_y et γ_z pour cette

section, ne dépend que de l'effort longitudinal N et des couples fléchissants M_{fy} et M_{fz} relatifs à cette section. On a donc

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S} + z \frac{M_{fy}}{I_{G_z}} - y \frac{M_{fz}}{I_{G_y}}$$

et

$$\varepsilon = \frac{N}{ES} \quad \gamma_y = \frac{M_{fy}}{EI_{G_y}} \quad \gamma_z = \frac{M_{fz}}{EI_{G_z}}$$

La figure III.9 illustre les résultats de De Saint Venant pour une poutre à section circulaire, elle donne les répartitions de contraintes pour trois sollicitations simples

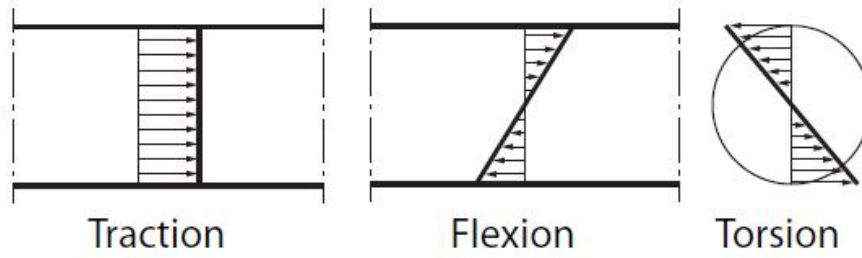


Figure III.9 – Répartition des contraintes dans une poutre cylindrique soumise à de la traction, flexion et torsion

III.4.3 Bilan et relation de comportement globale

En utilisant la loi de Hooke entre le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ et le tenseur des petites déformations $\underline{\varepsilon}$. Or, le résultat de De Saint Venant donnent la distribution des contraintes dans chaque section droite $\mathcal{S}_s$ ce qui permet après intégration sur la section $\mathcal{S}_s$ d'obtenir les relations de comportement globale entre les composants du torseur de petites déformations et celui des efforts de cohésion

$\theta(s) = \frac{M_t(s)}{GI_G}$	$\gamma_1(s) = \frac{M_{f1}(s)}{EI_{G1}}$	$\gamma_2(s) = \frac{M_{f2}(s)}{EI_{G2}}$
$\varepsilon(s) = \frac{N(s)}{ES}$	$\varepsilon_{T1}(s) = \frac{T_1(s)}{GS}$	$\varepsilon_{T2}(s) = \frac{T_2(s)}{GS}$

E et G sont respectivement les modules de Young et de cisaillement. S est l'aire de la section $\mathcal{S}_s$. I_G est le moment quadratique de la section $\mathcal{S}_s$ défini par

$$I_G = \iint_{M \in \mathcal{S}_s} \overrightarrow{G_s M} \cdot \overrightarrow{G_s M} dS = \iint_{\mathcal{S}_s} y^2 + z^2 dS \quad (\text{III.2})$$

Pour les moments fléchissants, il faut imposer que les directions $\vec{t}_{1s}$ et $\vec{t}_{2s}$ soient principales d'inertie pour la section de la poutre. I_{G1} et I_{G2} sont respectivement les moments quadratiques de la section $\mathcal{S}_s$ par rapport aux $G_s \vec{t}_{1s}$ et $G_s \vec{t}_{2s}$. Ils sont définis par

$$I_{G1} = \iint_{M \in \mathcal{S}_s} \left(\overrightarrow{G_s M} \cdot \vec{t}_{1s} \right)^2 dS = \iint_{\mathcal{S}_s} y^2 dS$$

$$I_{G2} = \iint_{M \in \mathcal{S}_s} \left(\overrightarrow{G_s M} \cdot \vec{t}_{2s} \right)^2 dS = \iint_{\mathcal{S}_s} z^2 dS$$

Notons de plus que

$$I_G = I_{G1} + I_{G2}$$

III.5 Résolution d'un problème

III.5.1 Intérêt de la *RdM*

Nous venons de voir qu'il existe une relation entre les contraintes locales et le torseur des efforts intérieurs. Cette relation intégrale n'est bien sûr pas simple à expliciter dans le cas général, sauf si des considérations (notamment expérimentales) permettent de faire une hypothèse sur la répartition des contraintes normales et tangentielles sur la section droite. Dans ce cas on pourra alors trouver des relations explicites entre le torseur des efforts intérieurs et les contraintes normales et tangentielles qui feront intervenir certaines caractéristiques de la section.

Comme le torseur des efforts intérieurs peut s'exprimer en fonction des actions mécaniques extérieures, on pourra alors déterminer, en fonction des actions extérieures et des caractéristiques géométriques de la section, les contraintes au sein du matériau. Ceci est un point fondamental puisque expérimentalement, on peut définir pour chaque matériau une contrainte limite admissible au-delà de laquelle la pièce subit des détériorations de ses caractéristiques mécaniques, dimensionnelles, voire une rupture. Le calcul de *RdM* consiste à vérifier que les contraintes engendrées par les sollicitations extérieures ne dépassent pas la contrainte limite admissible par le matériau, contrainte limite admissible qui sera dans le cadre de ce cours basée sur l'hypothèse que le matériau reste élastique.

Ainsi, connaissant les actions mécaniques extérieures, on peut dimensionner la poutre pour que les contraintes restent inférieures à une contrainte limite admissible. L'utilisation de la loi de comportement globale pour déterminer le torseur des petites déformation et des formules de Bresses pour obtenir les déplacements, on peut dimensionner la poutre que le déplacement maximale ne dépasse certain valeur dépendant de l'application visée.

III.5.2 Problèmes isostatiques

Dans un problème de *RdM* les inconnues, en chaque point G de la ligne moyenne, sont :

- le torseur des petits déplacement $\left\{ \mathcal{U} \right\}_G$
- le torseur des petites déformations $\left\{ \mathcal{V} \right\}_G$
- le torseur de cohésion $\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_G$

Les équations disponibles sont :

- les formules de Bresses entre les déplacements et de les déformations
- le Principe Fondamentale de la Statique et les conditions aux limites en effort
- les équations du comportement élastique global

Nous avons donc 18 inconnues pour 18 équations donc le problème est soluble. La démarche à suivre pour résoudre ce problème et ainsi déterminée les contraintes, les déformation et les déplacement en chaque point de la structure pour appliquer un critère de dimensionnement est la suivante

1. Détermination des actions de liaisons, à l'aide de PFS et des actions extérieurs

2. Détermination du torseur de cohésion en chaque point $\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_G$, grâce à la procédure de coupure
3. Détermination des petites déformations $\left\{ \mathcal{V} \right\}_G$ à l'aide de loi de comportement
4. Détermination des petits déplacements $\left\{ \mathcal{U} \right\}_G$ à l'aide des formules de Bresses et des conditions aux limites en déplacement
5. Détermination des contraintes, des déplacements et déformations locales en tout point de la poutre.
6. Application des critères de dimensionnement.

III.5.3 Problèmes hyperstatiques

Un problème est dit hyperstatique si son degrés d'hyperstatisme est supérieur ou égale à 1. On rappelle que le degrés d'hyperstatisme se calcule en soustrayant le nombre d'équation statiques E_s au nombres d'inconnues de liaison statiques I_s

$$h = I_s - E_s$$

Le nombre d'équations statiques est $E_s = 6n$ dans le cas $3D$, où n est le nombre de poutres de la structure. Dans le cas d'un problème plan, on a $E_s = 3n$. Dans le cas hyperstatique, on ne peut pas calculer toutes les inconnues de liaison, donc il est impossible de faire la première étape de la résolution. Or, dans le cas d'un solide déformable, les équations supplémentaires d'élasticité et les conditions aux limites en déplacement permettent toutefois de résoudre le problème.

Pour ce faire, nous devons abaisser artificiellement le degrés d'hyperstatisme h en transformant h inconnues de liaison en actions mécaniques extérieurs (Force ou couple). Ensuite, on utilise la démarche précédente et une fois que le champs de déplacement est calculé en fonction des efforts extérieurs et des h inconnues de liaisons supplémentaires. On utilise les conditions aux limites en déplacement pour déterminer les h inconnues de liaisons restantes. La démarche à suivre est donc

1. Calcul de degrés d'hyperstatisme h
2. Choix des h inconnues de liaison transformées en actions mécaniques extérieurs
3. Détermination des actions de liaisons, à l'aide de PFS et des actions mécaniques extérieurs
4. Détermination du torseur de cohésion en chaque point $\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_G$, grâce à la procédure de coupure
5. Détermination des petites déformations $\left\{ \mathcal{V} \right\}_G$ à l'aide de loi de comportement
6. Détermination des petits déplacements $\left\{ \mathcal{U} \right\}_G$ à l'aide des formules de Bresses et des conditions aux limites en déplacement et des h inconnues de liaison transformées en actions mécaniques extérieurs
7. Détermination des h inconnues de liaison transformées en actions extérieurs à l'aide des conditions aux limites en déplacement.

8. Détermination des contraintes, des déplacements et déformations locales en tout point de la poutre.
9. Application des critères de dimensionnement.

Références

Boucard, P.-A. (2007). *Cours de Dimensionnement des Structures Resistance des Matériaux*. IUT Cachan. Meca : RDM.

Chapitre -IV-

Sollicitation élémentaire : la traction

Table des Matières

IV.1	Définition	30
IV.1.1	Étude d'une grille	30
IV.2	L'essai de traction	32
IV.3	Relation contrainte/déformation	35
IV.4	Relation déformation/déplacement	35
IV.4.1	Application à une poutre encasté	36
IV.5	Critère de dimensionnement	37
IV.6	Concentration des contraintes	38
IV.6.1	Mise en évidence expérimentale	39
IV.6.2	Coefficient de concentration de contraintes	39
IV.6.3	Utilisation d'abaques	41

IV.1 Définition

Une poutre, ou un tronçon de poutre, est en traction/compression dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_{G_s} = \left\{ \begin{array}{c} N \vec{n}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- Si N est positif, on dira que la poutre, ou le tronçon de la poutre, est soumis à de la traction.
- Si N est négatif, on dira que la poutre ou le tronçon est soumis à de la compression.

Pour pouvoir étudier plus précisément la sollicitation de traction/compression, nous avons besoin de connaître la répartition des contraintes dans la section. Pour cela, nous allons nous livrer à une expérience.

IV.1.1 Étude d'une grille

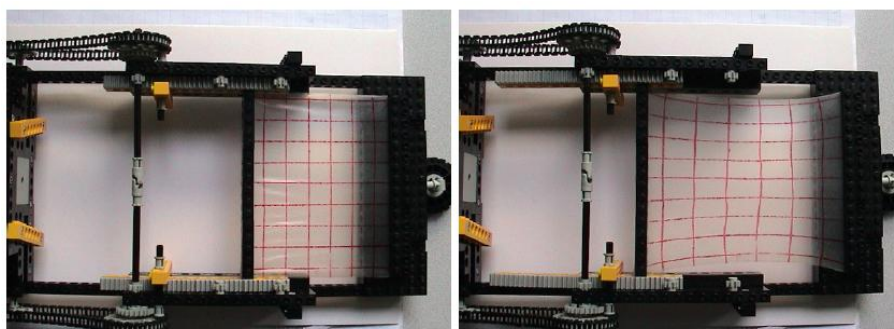


Figure IV.1 – Vue de la grille avant (à gauche) et après (à droite) déformation (Boucard, 2007)

On considère une poutre sur laquelle est dessinée une grille. On sollicite la poutre en traction, et on a représenté sur les photos de la figure III.1 la grille avant et après déformation. Sur la figure III.2 on propose une vision idéalisée du résultat. La grille a suivi les déformations subies par la poutre. On peut donc à partir de l'analyse des grilles avant et après déformation, faire les constats suivants. Conformément au principe de De Saint-Venant, on constate que sur les bords de la grilles, une zone particulière est très déformée. On ne s'intéressera pas à cette zone, les seules constats utiles concernent donc la zone d'intérêt. Dans la zone d'intérêt :

- Chaque carreau de la grille a subi la même transformation. Dans la zone d'intérêt on a donc un état de déformation homogène et constant.
- Une section droite (ou au moins la vue de cette section par sa frontière) représentée par une ligne verticale de la grille s'est déplacée pour donner une ligne verticale plus courte. On a donc à la fois un mouvement global de la section associé à un rétrécissement de celle-ci.
- La grille de longueur initiale L_0 s'est globalement allongée d'une longueur que nous noterons ΔL .

À l'issue de ces différents constats, on peut donc se faire une idée des contraintes présentes dans le matériau :

- L'état de contrainte est homogène et constant dans toute la zone d'intérêt. Si les contraintes variaient, la grille aurait une forme qui changerait.

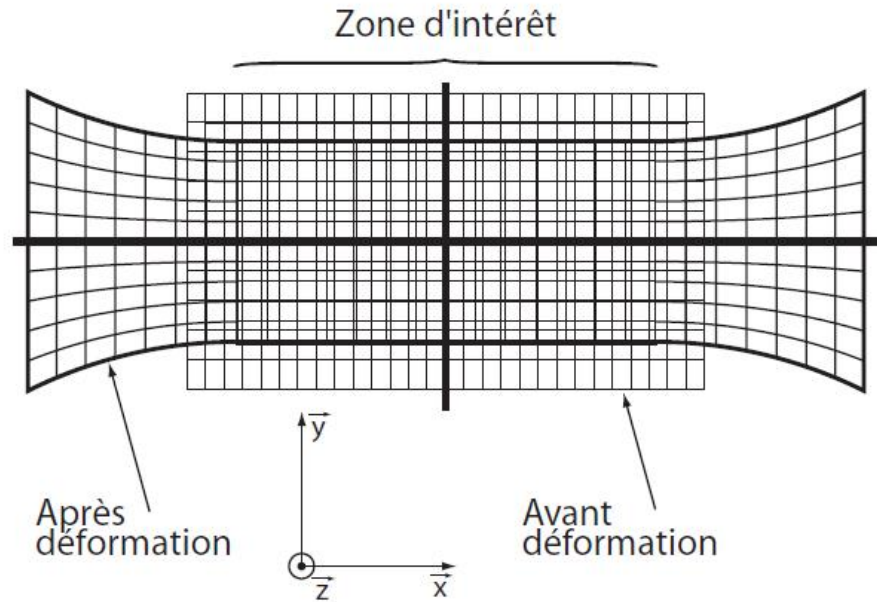


Figure IV.2 – Vue idéalisée de la grille avant et après déformation (Boucard, 2007)

- Les contraintes tangentielles sont nulles. En effet, si elles ne l'étaient pas, On aurait des glissement des sections droites les unes par rapport aux autres. Or on constate sur la grille qu'entre deux sections avant et après déformation, il n'y a eu qu'un allongement de la matière dans la direction horizontale, qui a induit un rétrécissement dans la direction verticale.

Finalement, le vecteur contrainte en tout point M d'une section de normale $\vec{n} = \vec{x}$ s'écrit :

$$\vec{T}(M, \vec{x}) = \sigma \vec{x}$$

avec σ constant. La figure IV.3 illustre l'homogénéité de la répartition de contrainte sur la section d'une éprouvette.

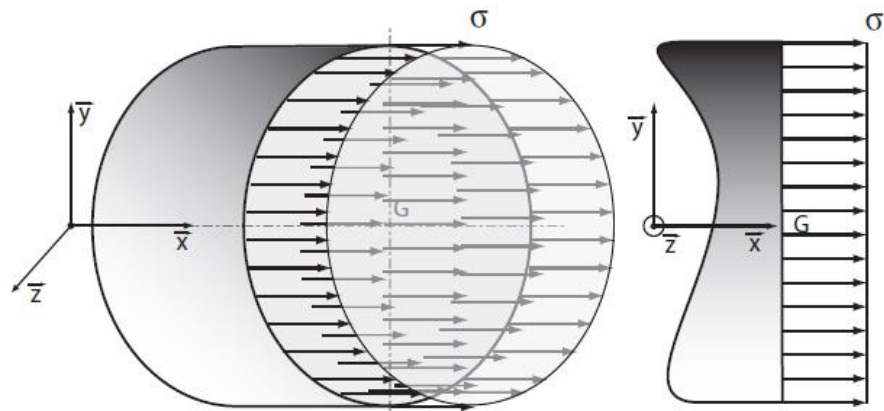


Figure IV.3 – Répartition des contraintes en traction (Boucard, 2007)

Cette première information est extrêmement importante : à partir de la relation intégrale reliant le torseur des efforts intérieurs au vecteur contrainte, nous allons pouvoir exprimer l'effort normal N en fonction de la contrainte σ et des caractéristiques géométriques de la

section.

$$N = \iint_{S_s} \sigma dS = \sigma \iint_{S_s} dS = \sigma S$$

On remarque que ces constations expérimentales sont en accord avec les résultats du problème de De Saint Venant car

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

De plus, puisque le point G_s est le centre de gravité de la section S_s , on vérifie que le moment en G_s engendré par une répartition uniforme de contrainte est nul

$$\vec{M}_{G_s} = \iint_{S_s} \sigma \vec{x} \wedge \overrightarrow{MG_s} dS = \sigma \vec{x} \wedge \iint_{S_s} \overrightarrow{MG_s} dS = \vec{0}$$

Par définition du centre de gravité G_s , c'est-à-dire

$$\iint_{S_s} \overrightarrow{MG_s} dS = \vec{0}$$

Pour pouvoir aller plus loin, nous allons nous intéresser à une deuxième expérience : l'essai de traction.

IV.2 L'essai de traction

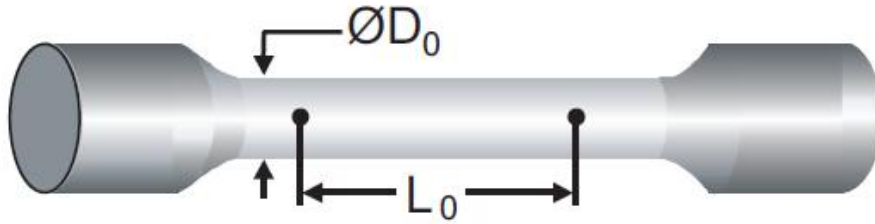


Figure IV.4 – Epreuve de traction (Boucard, 2007)

On réalise un essai de traction sur une éprouvette cylindrique d'acier inoxydable 316. On donne sur la figure IV.4 le schéma de l'éprouvette utilisée. La zone utile de l'éprouvette a une longueur $L_0 = 150$ mm et une section S dont le diamètre est $D_0 = 15$ mm. On a mesuré au cours de l'essai la force exercée sur l'éprouvette, qui est ici exactement l'effort normal N vu par toute section droite de la zone utile, ainsi que l'allongement ΔL de la zone utile.

Sur la figure IV.5, on a représenté au cours de l'essai l'évolution de la courbe effort normal N en fonction de l'allongement ΔL . Cette courbe comporte deux zones : la première zone où l'évolution de l'effort normal en fonction de l'allongement est linéaire est appelée la zone élastique. La deuxième partie de la courbe est appelée la zone plastique. On ne s'intéressera ici qu'à la partie élastique linéaire de la courbe. Sur la courbe précédente, on a donc réalisé un zoom pour ΔL variant entre 0 et 0,6 mm. Nous avons vu précédemment que $\sigma = \frac{N}{S}$. L'effort normal est donc proportionnel à la surface. Pour caractériser uniquement le matériau, indépendamment de la section de l'éprouvette, il faut donc s'intéresser à la contrainte normale σ . De la même manière plutôt que de s'intéresser à un allongement ΔL

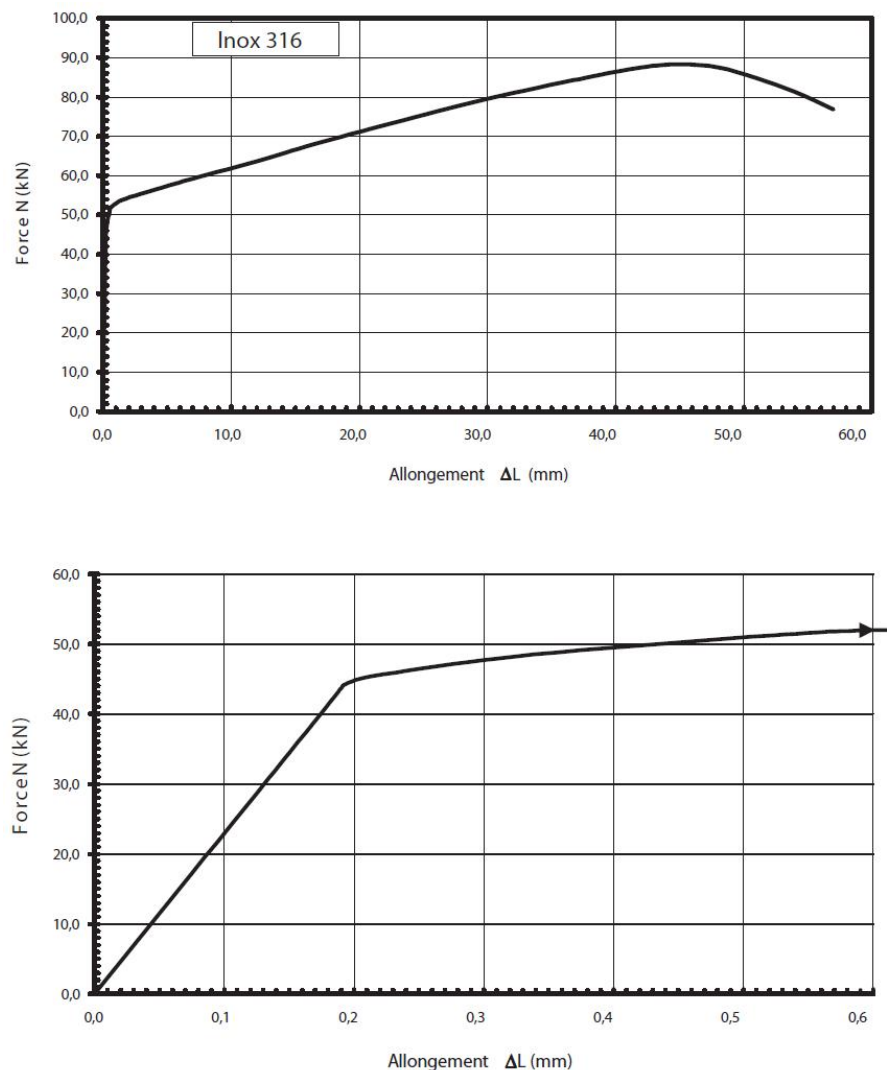


Figure IV.5 – Courbe $N/\Delta L$ pour l'essai de traction (Boucard, 2007)

d'une partie de l'éprouvette de longueur utile L_0 , nous allons nous intéresser à une quantité sans dimension appelée allongement unitaire ou déformation.

La déformation est une grandeur qui n'a pas de dimension. A partir de ces deux grandeurs on peut donc tracer une nouvelle courbe qui montre l'évolution de la contrainte σ en fonction de la déformation ε . On a représenté sur la figure IV.6 l'évolution de σ en fonction de ε . Pour délimiter la zone élastique, on définit une grandeur appelée limite élastique R_e : tant que la contrainte est inférieure à cette limite, le matériau a un comportement élastique linéaire.

Pour certains matériaux on peut avoir du mal à définir la zone de transition entre la partie élastique et la partie plastique. On définit alors une autre limite, très utilisée, dite limite élastique à 0,2% et notée R_p ou $R_p^{0,2}$. Cette valeur est obtenue en traçant une droite parallèle à la droite de comportement élastique et coupant l'axe des abscisses à 0,2%. L'intersection de cette droite avec la courbe d'essai de traction donne la limite à 0,2%.

Dans la zone élastique, on peut écrire une relation linéaire entre la contrainte normale et la déformation. La pente de cette droite est appelée module d'Young : c'est une caractéristique du matériau que l'on notera E . À partir du module d'Young, et dans le domaine d'élasticité, on a :

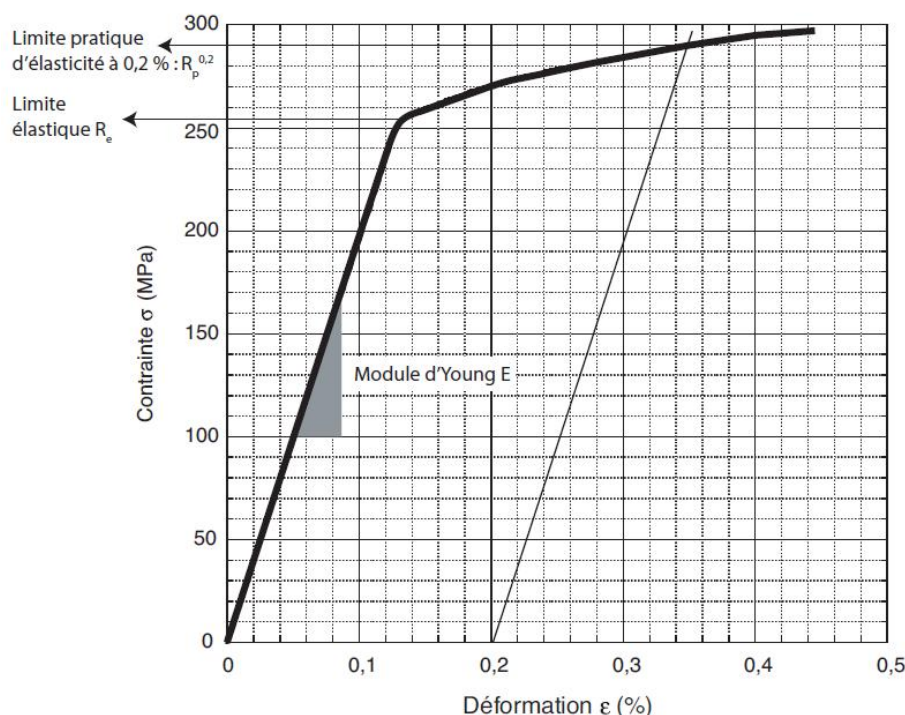


Figure IV.6 – Courbe σ/ε pour l'essai de traction (Boucard, 2007)

$$\sigma = E\varepsilon$$

Cette loi s'appelle la loi de Hooke. L'unité de E est le Pa.

Enfin, on a constaté qu'en plus de la déformation longitudinale ε dans le sens de la traction, le matériau subit aussi une déformation ε_t dans la direction transversale (direction perpendiculaire à la déformation longitudinale). On peut remarquer qu'avec la définition de la déformation, dans un essai de traction ε est positif (allongement ΔL positif) tandis que ε_t est négatif (diminution d'une dimension transversale de l'éprouvette).

Ainsi, dès qu'un matériau subit une déformation dans une direction, il en subit aussi une autre dans l'autre direction. On constate expérimentalement que le rapport $\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$ est constant pour un matériau donné. Ce rapport est appelé coefficient de Poisson et est noté ν (la lettre grecque « nu »). On a donc :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$$

Le coefficient ν est borné : il est positif et inférieur à 0,5. En effet si ν était négatif, on aurait une augmentation du diamètre d'un barreau en traction. La limite supérieure de 0,5 correspond à un matériau incompressible.

Un matériau élastique linéaire isotrope est donc défini par deux constantes élastiques :

- le module d'Young E ,
- le coefficient de Poisson ν .

Pour définir la limite d'élasticité, on utilise couramment la valeur R_p :

- si $\sigma < R_p$, on est dans la zone élastique,
- si $\sigma > R_p$, on est dans la zone plastique.

On trouvera dans le tableau IV.1 des valeurs des coefficients E , ν , et R_p pour quelques matériaux couramment utilisés.

Matériaux	Module d'Young E en MPa	Coefficient de Poisson ν sans unité	Limite pratique d'élasticité R_p en MPa
Acier	210000	0,29	450
Aluminium	70000	0,34	270
Verre	60000	0,24	10 en traction 60 en compression
Béton	35000	0,20	5 en traction 25 en compression
Polystyrène	3000	0,40	48

Table IV.1 – Ordres de grandeur de quelques caractéristiques matériaux

IV.3 Relation contrainte/déformation

À partir du module d'Young, et dans le domaine d'élasticité, on a :

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{loi de Hooke}$$

soit encore :

$$\frac{N}{S} = E\varepsilon$$

Ainsi, on peut aussi exprimer la déformation en fonction de l'effort normal, et retrouver les expressions de la loi de comportement du chapitre III :

$$\varepsilon = \frac{N}{ES}$$

Donc le torseur des petites déformations est

$$\left\{ \mathcal{D} \right\}_{G_s} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \varepsilon \vec{x} \end{array} \right\}$$

On constate que le torseur des petites déformations à une résultante nulle donc la déformation en chaque point M de la section $\mathcal{S}_s$ est constante

$$\vec{\varepsilon}(M) = \vec{\varepsilon}(G_s) + \vec{\gamma}_s \wedge \overrightarrow{G_s M} = \vec{\varepsilon}(G_s) = \varepsilon \vec{x}$$

car $\vec{\gamma}_s = \vec{0}$, ce résultat est en total accord avec les observations expérimentales de l'essai sur la grille

IV.4 Relation déformation/déplacement

La déformation longitudinale ε est directement liée à l'allongement comme nous l'avons vu précédemment. Lorsque la déformation est homogène sur toute la longueur de la poutre, comme c'est le cas dans l'essai de traction, alors on a :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

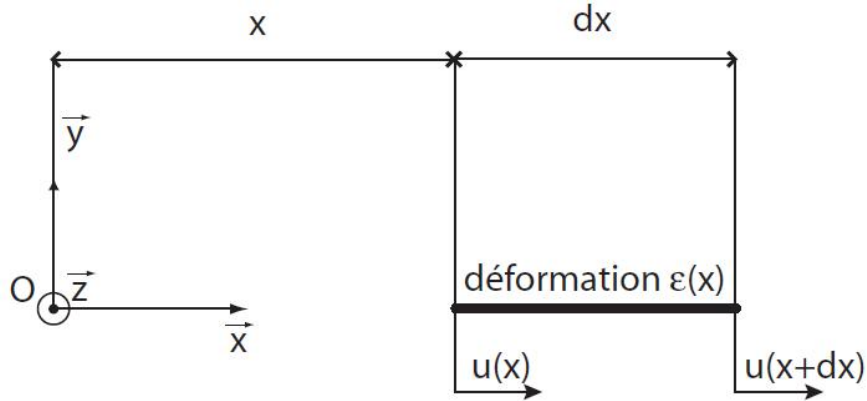


Figure IV.7 – Petit tronçon de poutre en traction (Boucard, 2007)

Mais cette expression n'est pas générale, en particulier, si ε varie en fonction de l'abscisse x le long de la poutre. Pour déterminer une expression plus générale, on isole un petit tronçon de poutre de longueur dx d'abscisse à l'origine x , tel qu'indiqué sur la figure IV.7. On note $u(x)$ le déplacement du point d'abscisse x et $u(x + dx)$ le déplacement du point d'abscisse $x + dx$. Ainsi si $\varepsilon(x)$ est la déformation du petit tronçon de poutre de longueur dx , $\varepsilon(x)$ est le rapport entre l'allongement du tronçon soit $u(x + dx) - u(x)$ et la longueur du tronçon. Donc :

$$\varepsilon(x) = \frac{u(x + dx) - u(x)}{dx}$$

Or le déplacement $u(x + dx)$ s'exprime en fonction de $u(x)$ en exprimant le fait que le déplacement du point d'abscisse $x + dx$ est égal à celui du point d'abscisse x auquel on ajoute une petite variation du déplacement $du(x)$, soit :

$$u(x + dx) = u(x) + du(x)$$

On en déduit donc :

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$$

Que l'on écrit plus simplement :

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}$$

Puisque u ne peut dépendre que de x .

IV.4.1 Application à une poutre encastré

Si on applique ce résultat à une poutre de longueur L_0 encastrée à son origine O , et dont la déformation est $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$. Pour obtenir le déplacement en un point G de la poutre de coordonnée X , il suffit d'intégrer la déformation $\varepsilon(x)$,

$$\begin{aligned} u(G) &= u(O) + \int_0^X \varepsilon(x) dx \\ &= \int_0^X \varepsilon(x) dx \end{aligned} \tag{IV.1}$$

car l'encastrement implique $u(O) = 0$.

Cette dernière formule donne l'expression du déplacement en fonction de la déformation, on la retrouve également à l'aide des formules de Bresses, en effet la première formule donne :

$$\vec{\Psi}(G) = \vec{\Psi}(0) + \int_0^X \vec{\gamma}_x dx = \vec{0}$$

à cause de l'encastrement ($\vec{\Psi}(0) = \vec{0}$) et de l'expression du torseur des petits déplacements ($\vec{\gamma}_x = \vec{0}$). La deuxième formule se simplifie grandement

$$\begin{aligned} \vec{u}(G) &= \vec{u}(0) + \vec{\Psi}(G) \wedge \vec{OG} + \int_0^X \vec{\varepsilon}(x) dx + \int_0^X \vec{OG} \wedge \vec{\gamma} dx \\ \vec{u}(G) &= \vec{u}(0) + \int_0^X \vec{\varepsilon}(x) dx \end{aligned}$$

En projetant cette équation sur la direction de traction $\vec{x}$, on retrouve l'équation IV.1

$$u(G) = \int_0^X \varepsilon(x) dx$$

On aboutit à l'expression du torseur de petit déplacement au point G

$$\left\{ \mathcal{U} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \int_0^X \varepsilon(x) dx \vec{x} \end{array} \right\}$$

Si $\varepsilon(x)$ est constant en tout point de la poutre, comme dans le cas d'un essai de traction sur éprouvette cylindrique, on a

$$\left\{ \mathcal{U} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \varepsilon X \vec{x} \end{array} \right\}$$

Remarque 10 Maintenant si l'on place G à l'extrémité de la poutre, soit $X = L_0$, on retrouve bien

$$u(L_0) = \varepsilon L_0 = \frac{\Delta L}{L_0} L_0 = \Delta L$$

IV.5 Critère de dimensionnement

Pour le dimensionner la poutre on peut utiliser deux types de critères :

- un critère en contrainte
- un critère en déplacement

Le critère en contrainte va traduire le fait que le matériau doit rester dans la zone élastique.

$$\sigma \leq R_p$$

On prend classiquement en compte un coefficient de sécurité $s > 1$ pour vérifier ce critère qui s'écrit alors :

$$s\sigma \leq R_p$$

Le critère en déplacement traduit, moyennant un coefficient de sécurité s_0 , que le déplacement en un point G (par exemple le point où le déplacement est maximum) doit rester inférieur à une valeur donnée dépendant des conditions d'utilisation u_{lim} :

$$s_0 u(G) \leq u_{lim}$$

Remarque 11 Le choix du coefficient de sécurité dépend de l'application. Il y a deux facteurs important à prendre compte pour le choisir

- la légèreté de la structure
- la fréquence des contrôles de la structure

En effet, si l'on veut des structure légère, on prend des coefficients de sécurité faible, de l'ordre de 2. En contre partie, il faut contrôler souvent la structure pour vérifier son intégrité.

Par contre, si l'on veut une structure robuste, on prends un coefficient de sécurité élevé > 5 . Dans ce cas la structure sera surdimensionnée mais elle ne nécessitera pas de contrôle.

IV.6 Concentration des contraintes

La concentration de contraintes est un problème souvent rencontré dans la conception mécanique d'un composant ou organe mécanique. C'est un phénomène d'augmentation locale des contraintes dans une zone comportant une modification géométrique de la pièce. Un exemple d'une telle concentration est représentée sur la figure IV.8. Sur cette figure, on présente pour deux géométries d'un barreau cylindrique la répartition des contraintes normales en traction :

- schémas du haut : le barreau est parfaitement cylindrique,
- schémas du bas : le barreau comporte une réduction locale du diamètre.

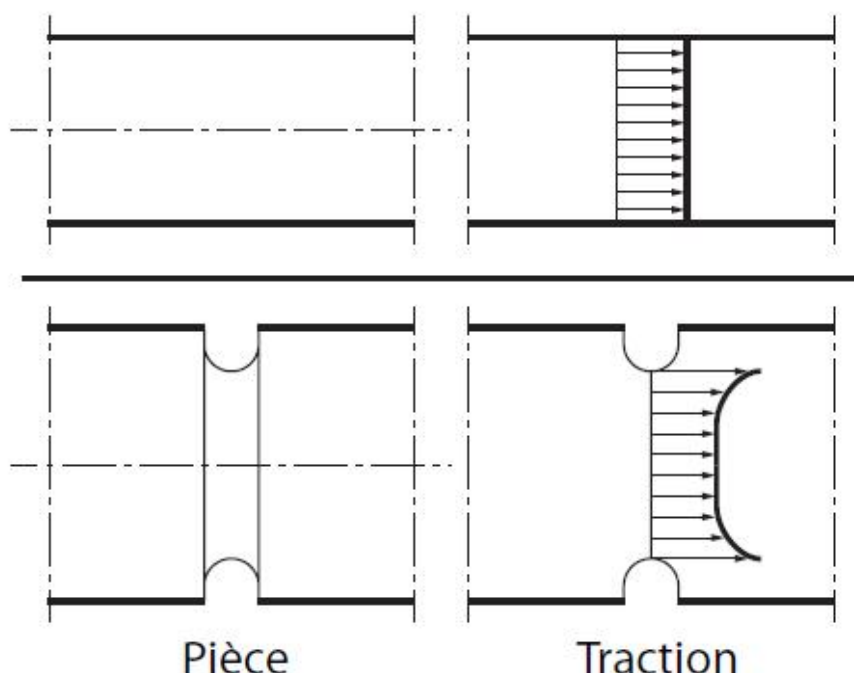


Figure IV.8 – Répartition des contraintes sans et avec variation de section (Boucard, 2007)

La zone de concentration de contraintes est souvent le site d'amorçage de fissures de fatigue mais peut être aussi l'origine d'une rupture brutale dans le cas d'un matériau fragile.

Dans le cas des poutres, le calcul de RdM ne donne plus des résultats corrects dans la zone où les contraintes sont concentrées. Mais les calculs restent valables tant que l'on s'éloigne « suffisamment » de l'accident géométrique (trou, variation brutale de la section, entaille ...).

Ainsi, on va chercher à utiliser les calculs de RdM pour calculer les contraintes comme s'il n'y avait pas d'accident géométrique. On corrigera ensuite ces contraintes localement en utilisant des coefficients déterminés théoriquement, expérimentalement ou numériquement.

IV.6.1 Mise en évidence expérimentale

Pour mettre en évidence le phénomène nous allons utiliser le procédé de photoélasticimétrie sur des éprouvette entaillée, constituée d'un matériaux transparente et biréfringente. Sur la figure IV.9, on présente différentes vues par photoélasticimétrie d'un barreau entaillé pour un effort croissant. On constate autour de l'entaille des variations localisées des contraintes, visualisées par des variations de couleurs. Plus on s'éloigne de l'entaille, moins les couleurs varient, ce qui traduit une variation des contraintes moins importantes. Enfin, suffisamment loin de l'entaille, la couleur redevient uniforme, représentant le fait que les contraintes le sont aussi. On peut donc en déduire qu'au voisinage de l'entaille les contraintes sont plus importantes que loin de l'entaille. Livrons nous maintenant à la même expérience avec le

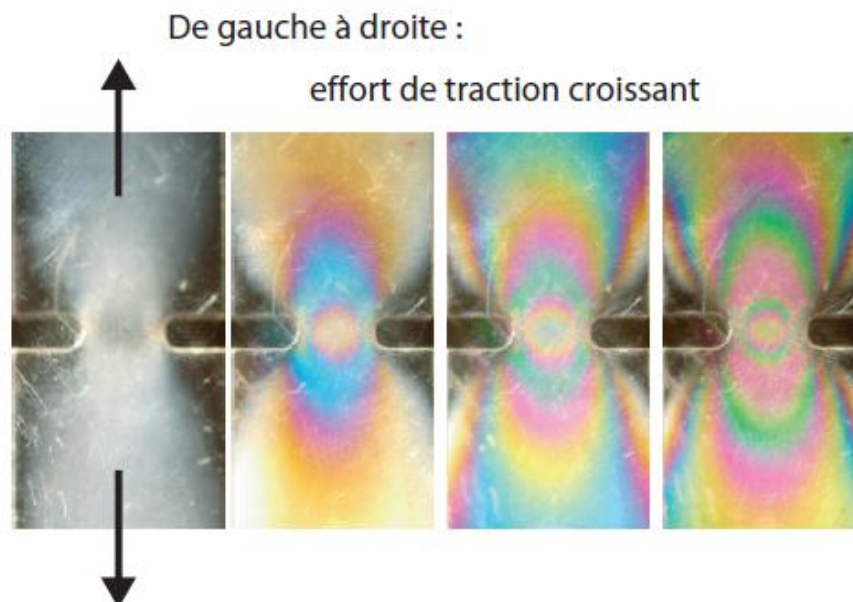


Figure IV.9 – Barreau entaillé soumis à une contrainte de traction croissante (Boucard, 2007)

même barreau, mais cette fois-ci percé par un trou en son centre (cf. figure IV.10). Comme dans l'expérience précédente, on constate que la présence du trou modifie localement les contraintes. Ces différentes expériences montrent l'existence de concentrations de contraintes au voisinage d'un accident géométrique. Le but est alors de dimensionner les structures (ici des poutres) en prenant en compte ces concentrations. Plus précisément, le point important est de pouvoir évaluer la contrainte maximale à partir d'un calcul de RdM . Par exemple, pour le barreau troué, comment déterminer la contrainte maximale située au bord gauche du trou à partir d'un calcul de RdM en traction ?

Bien évidemment, ce phénomène de concentration de contraintes se retrouve aussi pour toutes les sollicitations simples étudiées : traction, torsion, flexion.

IV.6.2 Coefficient de concentration de contraintes

La définition du coefficient de concentration de contraintes qui suit repose sur une constatation fondamentale. Pour un type de chargement donné, le rapport entre la contrainte réelle (dans le cas où elle est inférieure à la limite d'élasticité) et la contrainte nominale en un point ne dépend pas de la valeur de la charge appliquée.

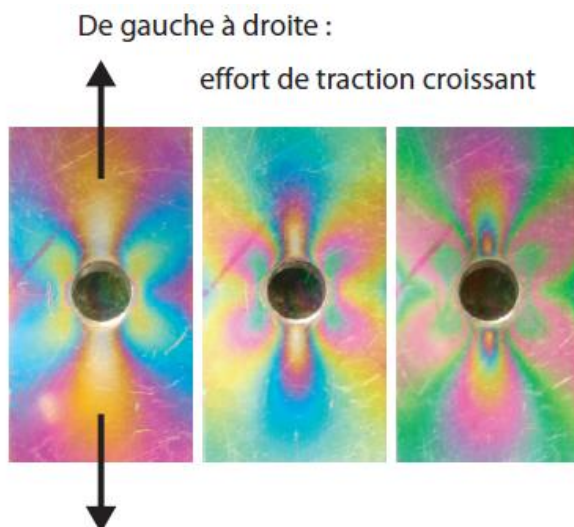


Figure IV.10 – Barreau troué soumis à une contrainte de traction croissante (Boucard, 2007)

Pour que ce constat soit valable il est important de préciser ce qu'on entend par contrainte nominale et par contrainte réelle.

On appelle contrainte nominale, que l'on note σ_{nom} , la contrainte maximale calculée à partir d'une étude de RdM , en supposant que l'on prend en compte la plus petite section sollicitée. Il est important ici de bien noter que la section, ou la distance par rapport à la fibre neutre à prendre en compte n'est pas celle liée à la géométrie réelle de la poutre, mais celle liée à une poutre de section équivalente à la section sans l'accident géométrique. On trouvera sur la figure IV.11 un de calcul de la contrainte nominale en traction.

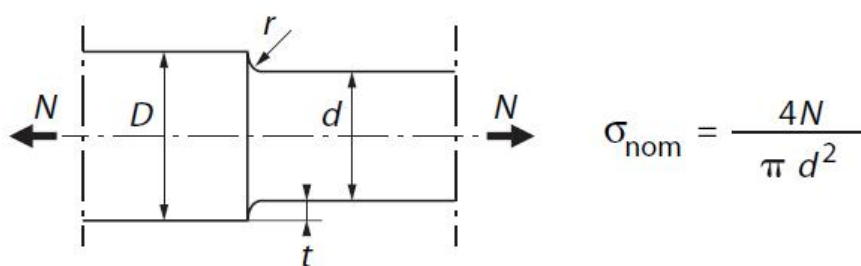


Figure IV.11 – Calcul de la contrainte nominale (Boucard, 2007)

La contrainte réelle notée σ_{max} est la valeur maximale de la contrainte obtenue sur la poutre avec le défaut géométrique qui sera utilisée pour appliquer les critères de dimensionnement déjà présentés.

Le choix du coefficient qui représentera les concentrations de contraintes est alors naturel. On le note K_t , et il est défini par le rapport entre la contrainte réelle et la contrainte nominale :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$$

L'indice « t » est employé pour indiquer que ces coefficients sont théoriques et que leur calcul repose sur les hypothèses de la théorie de la mécanique des milieux continus. Le coefficient

théorique de concentration de contraintes K_t dépend uniquement de la géométrie de la pièce (et en particulier de l'accident géométrique) et du type de sollicitation. Dans ce cas, on suppose que le matériau est élastique, linéaire, homogène et isotrope.

Il faut donc maintenant déterminer la valeur de K_t . Pour cela, plusieurs approches existent : utilisation d'abaques, de formules (souvent approchées) donnant l'expression de K_t sous forme analytique, ou encore utilisation de logiciels.

IV.6.3 Utilisation d'abaques

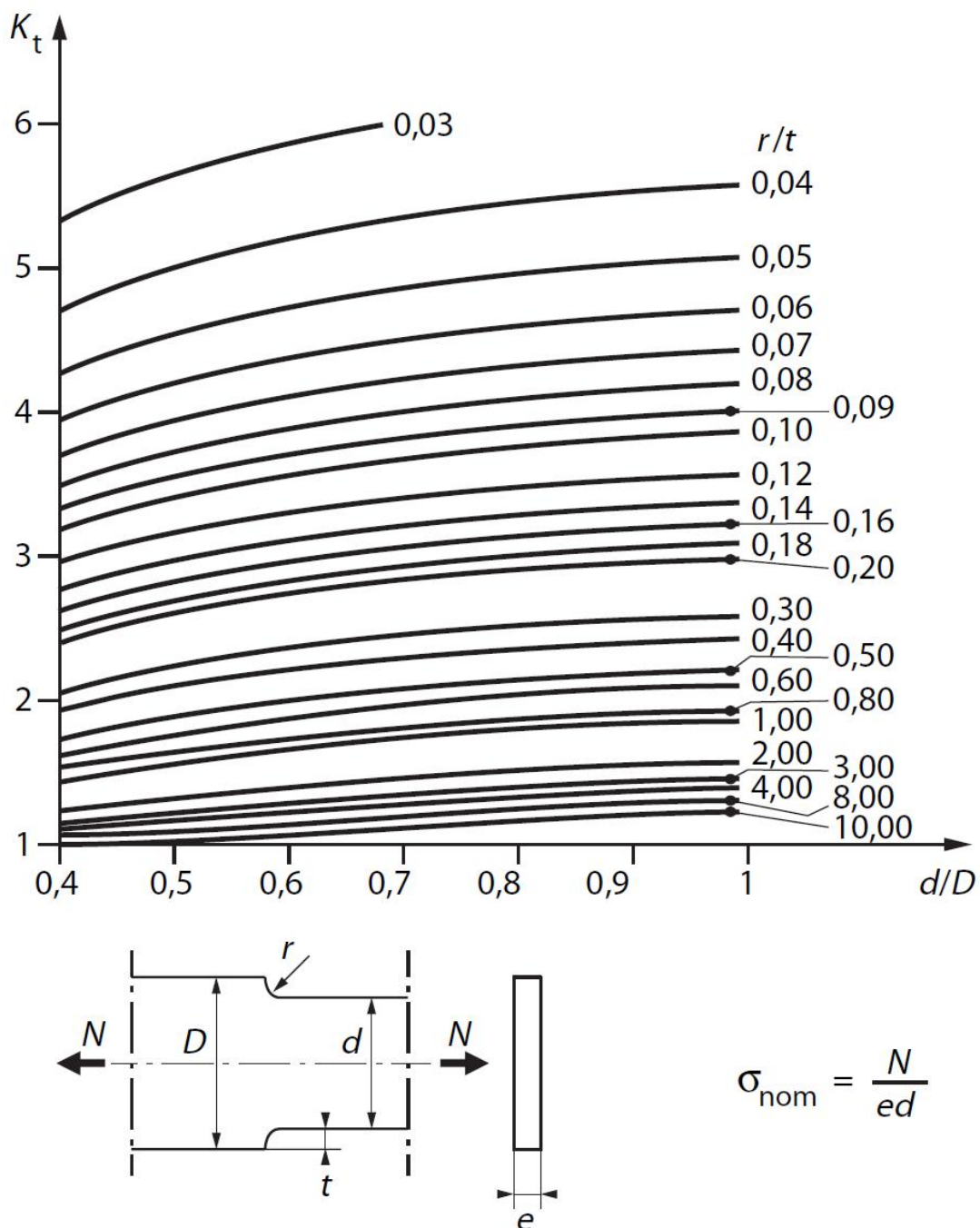


Figure IV.12 – Abaques de K_t pour une plaque en traction (Boucard, 2007)

L'utilisation d'abaques est souvent la méthode la plus simple pour réaliser des calculs de dimensionnement de poutres en prenant en compte les concentrations de contraintes. On donne sur la figure IV.12, un exemple d'un tel abaque.

Comme sur la majorité de ces abaques, on a accès à la valeur de K_t en fonction de deux jeux de paramètres caractéristiques de l'accident géométrique considéré : ici à partir des valeurs de $\frac{d}{D}$ et $\frac{r}{t}$, on peut déterminer la valeur de K_t et en déduire la valeur de σ_{max} connaissant σ_{nom} .

On trouve dans la littérature de nombreux traités proposant des abaques. Les plus connus sont :

- J.P. Faurie, P. Monnier, A. Niku-Lari - « Guide Du Dessinateur : Les Concentrations De Contraintes », Centre Technique Des Industries Mecaniques (CETIM), 1996.
- R.E. Peterson - « Stress Concentration Factors », John Wiley & Sons, 1974.

Références

Boucard, P.-A. (2007). *Cours de Dimensionnement des Structures Resistance des Materiaux*. IUT Cachan. Meca : RDM.

Chapitre -V-

Sollicitation élémentaire : la flexion

Table des Matières

V.1	Définition	44
V.2	Relation effort tranchant/moment fléchissant	44
V.3	Etude d'un tronçon se déformant	45
V.4	Relation contrainte normale/moment fléchissant	46
V.5	Équation de la déformée	48
V.6	Contraintes tangentielles	50
V.7	Ordre de grandeur des contraintes	52
V.8	Critère de dimensionnement	53

V.1 Définition

Une poutre, ou un tronçon de poutre, est sollicitée en flexion simple dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\} =_{G_s} \left\{ \begin{array}{l} T_1 \vec{t}_1 + T_2 \vec{t}_2 \\ M_{f1} \vec{t}_1 + M_{f2} \vec{t}_2 \end{array} \right\}$$

Dans le cas d'une poutre droite à plan moyen, le torseur de cohésion s'écrit

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\} =_{G_s} \left\{ \begin{array}{l} T_y \vec{y} \\ M_{fz} \vec{z} \end{array} \right\}$$

Si de plus, $T_y = 0$, alors on parle de flexion pure.

Avant d'établir les relations entre les composantes du torseur des efforts intérieurs et les contraintes, nous allons établir une relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant.

V.2 Relation effort tranchant/moment fléchissant

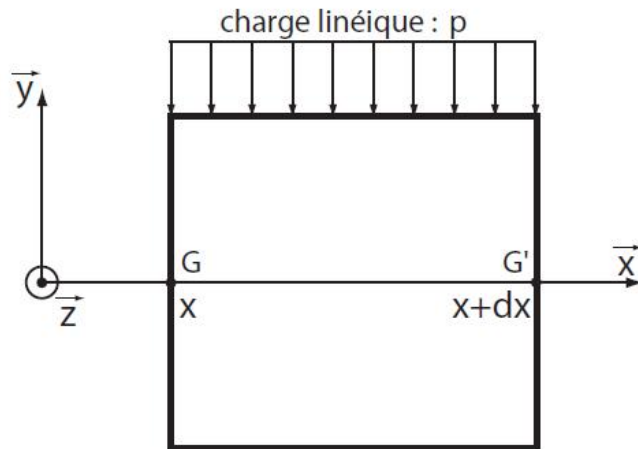


Figure V.1 – Tronçon de poutre isolé (Boucard, 2007)

On considère un petit tronçon de poutre compris entre les abscisses x et $x + dx$ tel qu'il est représenté sur la figure V.1. On suppose que les efforts extérieurs qui s'exercent sur ce tronçon sont une charge linéique uniforme sur toute la longueur dx . On notera que cette hypothèse permet de simplifier la démonstration qui reste valable dans le cas général. On suppose de plus que les torseurs des efforts intérieurs qui s'exercent en G et G' correspondent à de la flexion simple.

Isolons alors le tronçon de poutre de longueur dx . Le bilan des actions mécaniques extérieures sur le tronçon donne :

En G

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\} =_G \left\{ \begin{array}{l} -T_y \vec{y} \\ -M_{fz} \vec{z} \end{array} \right\}$$

En G'

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_{G'} = \left\{ \begin{array}{l} (T_y + dT_y) \vec{y} \\ (M_{fz} + dM_{fz}) \vec{z} \end{array} \right\}$$

La charge linéique s'exprime au point G'' milieu de GG'

$$\left\{ p \rightarrow poutre \right\}_{G''} = \left\{ \begin{array}{l} -pdx \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}$$

Appliquons alors le Principe Fondamental de la Statique au tronçon de poutre.

L'équation en résultante, projetée sur $\vec{y}$ s'écrit :

$$-T_y + T_y + dT_y - pdx = 0$$

L'équation de moment en G' , projetée sur $\vec{z}$ s'écrit :

$$-M_{fz} + T_y dx + M_{fz} + dM_{fz} + \frac{1}{2} p dx^2 = 0$$

En négligeant les termes du second ordre dans l'équation de moment, on en déduit :

$$\boxed{\frac{dT_y}{dx} = p \quad \text{et} \quad \frac{dM_{fz}}{dx} = -T_y}$$

Cette deuxième relation est un outil utile pour vérifier la cohérence du torseur des efforts intérieurs calculés. De plus, on en déduit qu'en flexion pure, puisque $T_y = 0$, on a nécessairement M_{fz} constant (indépendant de l'abscisse x).

Pour aller plus loin, il faut connaître la répartition des contraintes dans la section. Pour déterminer cette répartition, nous allons nous baser sur un constat géométrique.

V.3 Etude d'un tronçon se déformant

On considère un tronçon de poutre soumis à de la flexion. La figure V.2 représente ce tronçon avant et après déformation. Le problème est alors d'évaluer la variation de longueur d'une fibre aa_1 d'ordonnée y par rapport à la ligne moyenne. Cette fibre après déformation se transforme en aa'_1 . On constate expérimentalement que les fibres situées au dessus de la fibre moyenne se raccourcissent, tandis que les fibres situées sous la fibre moyenne s'allongent. La fibre moyenne ne change pas de longueur : on l'appelle aussi fibre neutre.

Les constats précédents amènent à deux conséquences.

- Les fibres s'allongent ou se raccourcissent et sont donc soumises à des contraintes normales.
- Entre chaque fibre, on a des variations de longueur qui induisent des contraintes tangentielles. On a donc à la fois des contraintes tangentielles dites longitudinales (dans le plan $(\vec{z}, \vec{x})$), et par réciproque, des contraintes tangentielles transversales (dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$) comme cela est représenté sur les figures V.4 et V.6.

Nous allons dans un premier temps nous intéresser uniquement aux contraintes normales. Pour cela revenons sur l'allongement subi par la fibre aa_1 . La déformation de cette fibre s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{aa'_1 - aa_1}{aa_1}$$

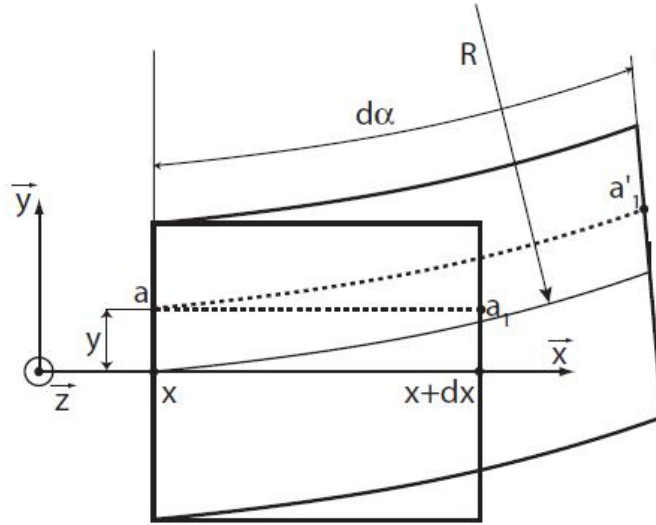


Figure V.2 – Tronçon de poutre avant et après déformation (Boucard, 2007)

avec :

$$aa'_1 = (R - y) d\alpha \quad \text{et} \quad aa_1 = dx$$

Dont on peut déduire que :

$$\varepsilon = \frac{(R - y) d\alpha - dx}{dx} = (R - y) \frac{d\alpha}{dx} - 1$$

Or par définition la courbure, inverse du rayon de courbure R , est :

$$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{dx}$$

Ainsi

$$\varepsilon = 1 - y \frac{d\alpha}{dx} - 1 = -y \frac{d\alpha}{dx} = -\frac{y}{R}$$

Cette déformation engendre alors une contrainte que l'on peut déterminer à partir de la loi de Hooke :

$$\sigma = E\varepsilon = -E \frac{y}{R}$$

Avec cette dernière équation, on connaît la répartition des contraintes dans une section droite. Nous allons pouvoir donc intégrer cette contrainte sur la section.

V.4 Relation contrainte normale/moment fléchissant

Pour déterminer cette relation, il suffit d'écrire la relation intégrale suivante :

$$\left\{ \begin{matrix} T_{int} \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} T_y \vec{y} \\ M_{fz} \vec{z} \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} \iint_S \vec{T}(M, \vec{x}) dS \\ \iint_S \vec{T}(M, \vec{x}) \wedge \vec{MG} dS \end{matrix} \right\}_G$$

avec

$$\vec{T}(M, \vec{x}) = -E \frac{y}{R} \vec{x}$$

La projection de l'équation en résultante sur l'axe $\vec{x}$ est vérifiée et traduit le fait que la ligne ne moyenne ne s'allonge pas ce qui valide l'hypothèse de départ.

Intéressons nous maintenant uniquement aux contraintes normales, alors on ne prend en compte que la projection du vecteur contrainte sur l'axe $\vec{x}$.

Pour déterminer la relation cherchée, il suffit alors de projeter le moment de l'équation précédente sur l'axe $\vec{z}$:

$$M_{fz} = \iint_S \vec{T}(M, \vec{x}) \wedge \overrightarrow{MG} dS \cdot \vec{z} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{MG} = -y\vec{y} - z\vec{z}$$

On en déduit

$$M_{fz} = \frac{E}{R} \iint_S y^2 dS$$

La quantité $\iint_S y^2 dS$ est appelée moment quadratique de la section S par rapport à l'axe $(G, \vec{z})$. En effet cette quantité est l'intégrale de la distance au carré d'un point de la section droite par rapport à l'axe $(G, \vec{z})$. Cette grandeur ne dépend que de la section S , et est notée I_{Gz} . On pose donc :

$$I_{Gz} = \iint_S y^2 dS$$

On a en particulier, pour les section de la figure V.3.

Cas d'une section circulaire

$$I_{Gz} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Cas d'une section rectangulaire

$$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$$

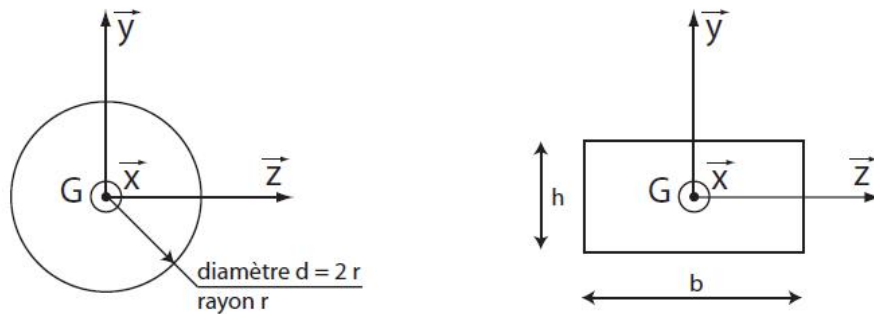


Figure V.3 – Paramètres géométriques des sections (Boucard, 2007)

On écrit alors :

$$M_{fz} = \frac{E}{R} I_{Gz} \quad \text{avec} \quad -\frac{E}{R} = \frac{\sigma}{y}$$

On en déduit la relation recherchée :

$$\sigma = -\frac{M_{fz}}{I_{Gz}} y$$

Cette relation permet de déterminer les contraintes normales en fonction du moment fléchissant. Les contraintes ont une répartition qui est linéaire dans l'épaisseur de la poutre de par la dépendance à la distance à la fibre neutre y . A la fibre neutre, les contraintes normales sont nulles, et leur valeur maximale est obtenue au plus loin de la fibre neutre : pour $y = d/2$ dans le cas d'une section circulaire, et pour $y = h/2$ pour une section rectangulaire.

Cette répartition est représentée sur la figure V.4 dans le cas d'un moment fléchissant négatif.

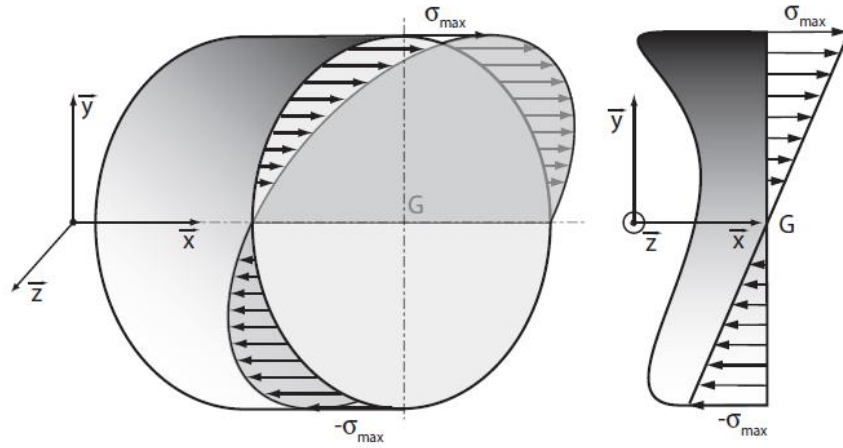


Figure V.4 – Répartition linéaire des contraintes normales dans l'épaisseur (Boucard, 2007)

Remarque 12 En remarquant que l'angle $d\alpha = \omega_z$ est l'angle de petite rotation de la section $S(x + dx)$, on constate toute de suite que $\frac{d\alpha}{dx}$ correspond à la la petite déformation angulaire γ_z de la section $S(x + dx)$ autour de l'axe $\vec{z}$, on retrouve bien la relation de comportement global du Chapitre III

$$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{dx} = \gamma_z = \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}}$$

Le torseur des petites déformation s'écrit de façon général en flexion sous la forme

$$\left\{ \mathcal{D} \right\}_{G'} = \left\{ \begin{array}{c} \gamma_z \vec{z} \\ \varepsilon_{ty} \vec{y} \end{array} \right\}$$

En faisant l'hypothèse classique de Bernoulli, le terme de cisaillement ε_{ty} est négligé, d'où l'expression du torseur des petits déplacements

$$\left\{ \mathcal{D} \right\}_{G'} = \left\{ \begin{array}{c} \gamma_z \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad \gamma_z = \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}}$$

V.5 Équation de la déformée

Sous les actions de flexion, la ligne moyenne de la poutre va se déformer. On caractérise par $v(x)$, l'équation de la courbe caractéristique de la ligne moyenne après déformation (cf figure V.5). La ligne moyenne après déformation est aussi appelée déformée et la valeur de la déformée en un point est appelée flèche.

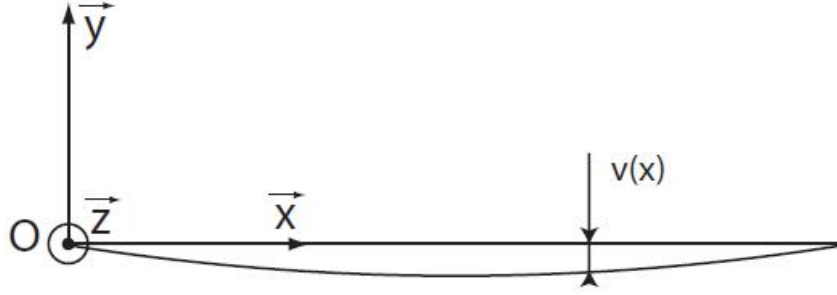


Figure V.5 – Déformée de la ligne moyenne (Boucard, 2007)

Comme l'équation de la ligne moyenne est définie en coordonnées cartésiennes, on peut en déduire l'expression du rayon de courbure R :

$$R = \frac{(1 + v'^2)^{\frac{3}{2}}}{v''}$$

De plus, le fait que l'on se place dans l'hypothèse des petites perturbations permet de négliger dans l'expression précédente le terme v'^2 devant 1, soit $1 + v'^2 \approx 1$. En remplaçant alors $R = \frac{1}{v''}$ dans l'expression $M_{fz} = \frac{E}{R} I_{Gz}$, on en déduit immédiatement l'équation différentielle vérifiée par la déformée $v(x)$, relation de comportement globale entre la flèche et le moment fléchissant :

$$EI_{Gz} v'' = M_{fz} \quad (\text{V.1})$$

L'intégration de l'équation précédente et la prise en compte des conditions aux limites (liaisons de la poutre avec l'extérieur) permettra de déterminer la forme de $v(x)$ (on trouve généralement pour $v(x)$ une expression polynomiale par morceau).

Remarque 13 L'équation V.1 se retrouve aisément à l'aide des formules de Bresses et de l'hypothèse de Bernoulli. Sous l'hypothèse de Bernoulli la deuxième formule de Bresses projetée sur $\vec{y}$ donne

$$\begin{aligned} v(x) &= v(0) + \omega_z(x) \vec{z} \wedge x \vec{x} \cdot \vec{y} + \int_0^x s \vec{x} \wedge \gamma_z(s) \vec{z} \cdot \vec{y} \, ds \\ &= x \omega_z(x) - \int_0^x s \gamma_z(s) \, ds \end{aligned}$$

avec $\omega_z(x)$ la petite rotation autour de $\vec{z}$ de la section S_x et la petite déformation angulaire $\gamma_z(x) = \frac{d\omega_z}{dx}$. En dérivant, l'expression de $v(x)$

$$\begin{aligned} v'(x) &= \omega_z(x) + x \frac{d\omega_z}{dx} - x \gamma_z(x) \\ &= \omega_z(x) \end{aligned}$$

Donc la dérivée seconde de $v(x)$ est bien égale à la petite déformation angulaire de la section

$$v''(x) = \frac{d\omega_z}{dx} = \gamma_z(x)$$

Et vu que la petite déformation angulaire γ_z est reliée au moment fléchissant M_{fz} par la relation de comportement

$$\frac{d^2v}{dx^2}(x) = \frac{d\omega_z}{dx}(x) = \gamma_z(x) = \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}}$$

Et donc le torseur des petits déplacement s'écrit

$$\left\{ \mathcal{U} \right\}_{G_x} = \left\{ \begin{array}{l} v'(x) \vec{z} \\ v(x) \vec{y} \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad v''(x) = \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}}$$

V.6 Contraintes tangentielles

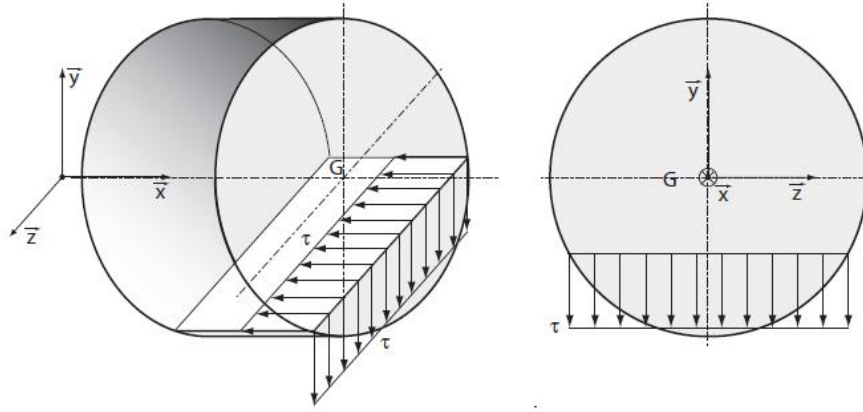


Figure V.6 – Répartition des contraintes tangentielles dans la largeur (Boucard, 2007)

Du fait de la symétrie du tenseur des contraintes σ , les contraintes tangentielles (τ) sont à la fois longitudinales et transversales comme cela est représenté sur la figure V.6. De plus, compte tenu que les contraintes normales ne varient qu'en fonction de la distance à la fibre neutre (elles sont donc constantes dans la largeur), on peut en déduire que les contraintes tangentielles sont elles aussi constantes dans la largeur. Il ne reste donc plus qu'à déterminer leur répartition dans la hauteur de la section (dépendance en fonction de y). Pour commencer, supposons que les contraintes tangentielles ne dépendent pas de y . Elles sont donc uniformes sur toute la section droite. L'écriture de l'équation de résultante en projection sur $\vec{y}$ tirée de la relation intégrale sur le torseur des efforts intérieurs s'écrit dans ce cas :

$$T_y = \iint_S dS$$

Et comme τ est uniforme sur S , on en déduit :

$$\tau = \frac{T_y}{S}$$

On a donc avec cette première expression un moyen de calculer les contraintes tangentielles sous l'hypothèse qu'elles sont uniformes sur la section. Cette expression est souvent utilisée, car elle donne un majorant de la valeur de la contrainte tangentielle. Malheureusement, elle n'est pas exacte, car les contraintes tangentielles ne sont pas uniforme sur la section : elles dépendent de y .

Pour trouver une expression plus générale, isolons un bout de poutre limité par les surfaces S_1 , S_3 , S_2 et la surface extérieure de la poutre, comme cela est représenté sur la figure V.7. Comme précédemment, le bilan des actions mécaniques extérieures fait apparaître :

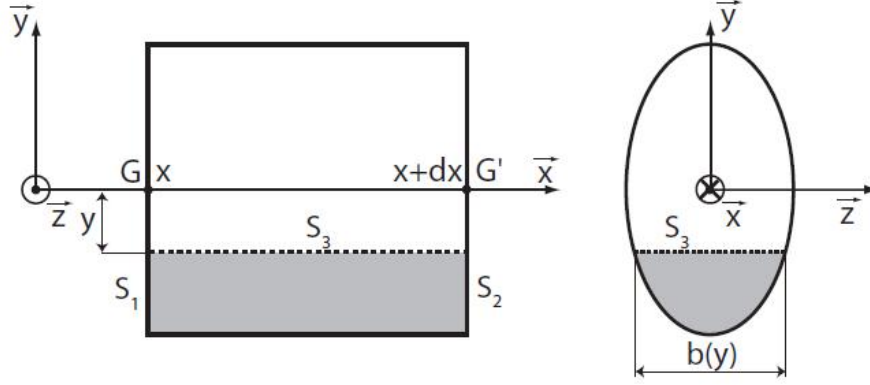


Figure V.7 – Element d'un petit bout de poutre (Boucard, 2007)

En G

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} -T_y \vec{y} \\ -M_{fz} \vec{z} \end{matrix} \right\}_G$$

En G'

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_{G'} = \left\{ \begin{matrix} (T_y + dT_y) \vec{y} \\ (M_{fz} + dM_{fz}) \vec{z} \end{matrix} \right\}_{G'}$$

On peut alors, section par section, lister les contraintes qui s'exercent :

Sur S_1

$$\sigma_1 = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} y \quad \text{et} \quad \tau_1(y)$$

Sur S_2

$$\sigma_2 = -\frac{M_{fz} + dM_{fz}}{I_{Gz}} y \quad \text{et} \quad -\tau_2(y)$$

Sur S_3

$$\tau(y)$$

À partir de ce bilan, écrivons alors l'équilibre statique de ce tronçon, en se concentrant uniquement sur l'équation de résultante en projection sur l'axe $\vec{x}$:

$$\iint_{S_1} \sigma_1 dS + \iint_{S_2} \sigma_2 dS + \iint_{S_3} \tau dS = 0$$

Soit

$$\iint_{S_1} \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} y dS - \iint_{S_2} \frac{M_{fz} + dM_{fz}}{I_{Gz}} y dS + \tau b(y) dx = 0$$

En simplifiant, puisque $S_1 = S_2$, on en déduit :

$$-\iint_{S_1} \frac{dM_{fz}}{I_{Gz}} y dS + \tau b(y) dx = 0$$

Et en divisant par dx :

$$-\frac{1}{I_{Gz}} \frac{dM_{fz}}{dx} \iint_{S_1} y dS + \tau b(y) dx = 0$$

En utilisant le fait que $T_y = -\frac{dM_{fz}}{dx}$, il vient finalement :

$$|\tau(y)| = \frac{T_y A(y)}{b(y) I_{Gz}} \quad \text{avec} \quad A(y) = \iint_{S_1} y dS$$

Cette expression permet d'avoir une meilleure approximation de la contrainte tangentielle dans la section droite. Elle fait en particulier intervenir $A(y)$ qui est le moment statique de la section S_1 par rapport à l'axe $\vec{z}$.

On peut remarquer sur cette expression que lorsqu'on s'éloigne au maximum de la ligne moyenne (soit en $y = d/2$ où $y = h/2$ selon la forme de la section), l'intégrale qui permet de calculer $A(y)$ est nulle puisque la section sur laquelle on intègre est nulle.

Ainsi la contrainte tangentielle est nulle sur les deux surfaces supérieures et inférieures de la poutre.

Après avoir évalué les contraintes normales et tangentielles, nous allons tenter de les comparer, ou au moins d'avoir une idée de leur ordre de grandeur.

V.7 Ordre de grandeur des contraintes

Nous allons noter $\circ(\star)$, l'ordre de grandeur de la quantité $\star$. Par exemple, pour le premier calcul de la contrainte tangentielle :

$$\tau = \frac{T_y}{S}$$

On peut écrire :

$$\circ(\tau) = \frac{T_y}{a^2}$$

où a est une dimension caractéristique de la section.

On peut aussi évaluer l'ordre de grandeur de la contrainte tangentielle obtenue avec la seconde formule :

$$\circ(A(y)) = a^3 \quad \circ(I_{Gz}) = a^4 \quad \circ(b(y)) = a$$

Donc :

$$\circ(\tau) = \frac{T_y}{a^2}$$

On retrouve bien évidemment le même résultat puisque la contrainte tangentielle, quelle que soit la méthode de calcul utilisée, est du même ordre de grandeur. Intéressons nous à la contrainte normale :

$$\sigma = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} y \quad \text{avec} \quad dM_{fz} = -T_y dx$$

Ainsi :

$$\circ(M_{fz}) = T_y L$$

où L est la longueur la poutre. Et on en déduit :

$$\circ(\sigma) = \frac{T_y L}{a^3}$$

On peut donc en déduire le rapport des ordres de grandeur de la contrainte tangentielle et de la contrainte normale :

$$\frac{\circ(\tau)}{\circ(\sigma)} = \frac{a}{L}$$

Or le rapport a/L est l'élancement de la poutre (rapport entre la plus grande dimension transversale et la longueur). Pour que le solide étudié puisse être considéré comme une poutre (cf. les hypothèses de la *RdM* Chapitre II), le rapport a/L est inférieur à $1/5$ et est bien souvent plus faible. On peut donc considérer que dans le cas de la flexion, les contraintes tangentielles sont négligeables devant les contraintes normales. Ainsi, l'hypothèse de Bernoulli est totalement justifiée pour la flexion des solides élancés. De plus, on en conclue que les seules contraintes réellement dimensionnantes en flexion sont les contraintes normales.

V.8 Critère de dimensionnement

Pour dimensionner la poutre on utilise donc uniquement le critère sur la contrainte normale, qui est le même que celui déjà évoqué en traction/compression. On peut aussi prendre en compte un critère sur la flèche maximale, qui traduit, moyennant un coefficient de sécurité s' , que la flèche maximale $v(N)$ en un point N doit rester inférieure à une valeur donnée dépendante des conditions d'utilisation :

$$s'v(N) \leq v_{lim}$$

On pourrait aussi imaginer un critère de rotation maximale de la section droite associé à la grandeur , c'est à dire à

$$\frac{dv}{dx} = v'(x)$$

Références

Boucard, P.-A. (2007). *Cours de Dimensionnement des Structures Resistance des Materiaux*. IUT Cachan. Meca : RDM.

Chapitre -VI-

Sollicitation élémentaire : la torsion

Table des Matières

VI.1	Hypothèse complémentaire	56
VI.2	Définition	56
VI.3	Etude d'un barreau cylindrique	57
VI.4	Relation contrainte/moment de torsion	62
VI.5	Relation contrainte/déformation	64
VI.6	Relation déformation/rotation	64
VI.7	Critère de dimensionnement	65

VI.1 Hypothèse complémentaire

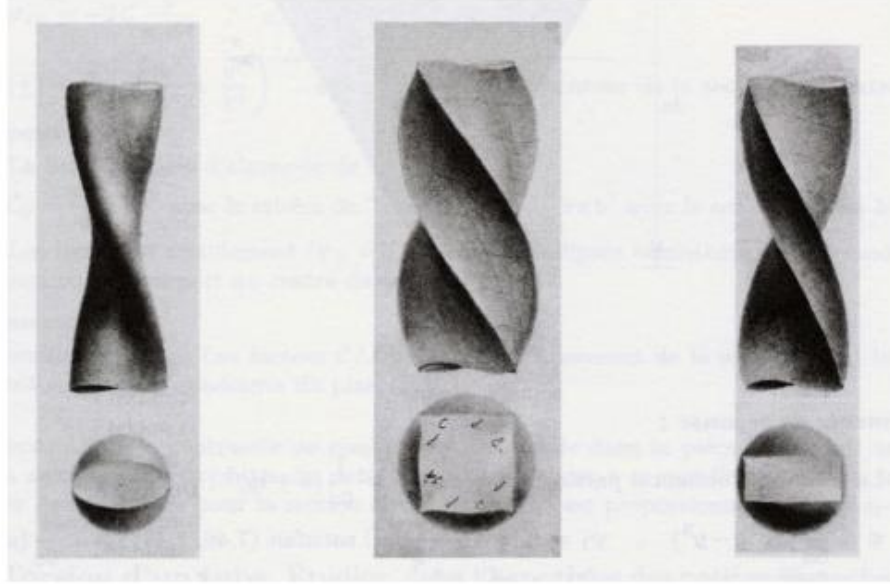


Figure VI.1 – Torsion de barres à sections elliptique, carrée, rectangulaire : dessin originaux de A. Barré de Saint Venant. (Ballard and Millard, 2006)

Pour pouvoir étudier la sollicitation élémentaire de torsion, il faut restreindre le cadre d'application. La torsion des barres à section elliptique, carrée, rectangulaire étudiée par De Saint Venant (Figure VI.1) ne sera pas étudiée dans ce chapitre. En effet, l'étude de la torsion présentée ici se limitera au cadre des poutres droites à sections circulaires. Ainsi, les poutres étudiées sont des cylindres de révolution à base circulaire.

Cette restriction est liée au fait que pour toute section qui n'est pas circulaire, les résultats qui seront présentés sont faux car :

- les sections ne restent pas planes et se gauchissent (Figure VI.2),
- la contrainte de cisaillement qui est perpendiculaire au rayon vecteur (comme nous le verrons par la suite) ne peut pas être tangente au contour non circulaire de la section.

VI.2 Définition

Une poutre, ou un tronçon de poutre cylindrique, est en torsion dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_{G_s} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ M_t \vec{n} \end{array} \right\}$$

Dans le cas d'une poutre droite à plan moyen, le torseur de cohésion s'écrit

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_{G_s} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ M_t \vec{x} \end{array} \right\}$$

Il nous faut maintenant connaître la répartition des contraintes et des déformations dans la section. Pour déterminer cette répartition, nous allons nous baser sur des résultats expérimentaux bien qu'expérimentalement, on atteint uniquement les déplacements et les déformations.

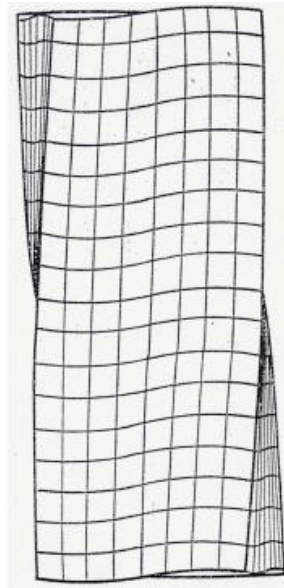


Figure VI.2 – Mise en évidence du gauchissement lors du calcul par éléments finis de la torsion d'un cylindre à section carrée. (Ballard and Millard, 2006)

VI.3 Etude d'un barreau cylindrique

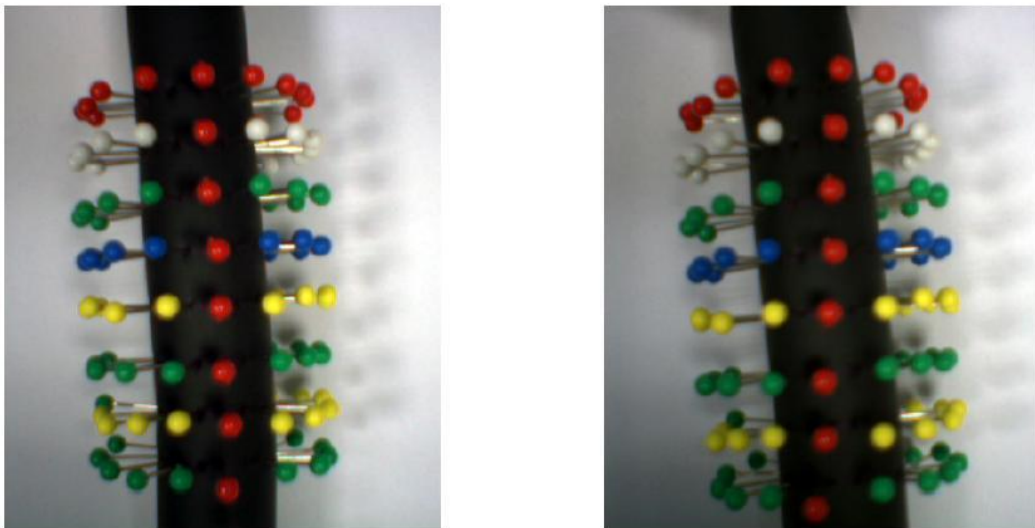


Figure VI.3 – Photos de la « grille » avant (à gauche) et après (à droite) déformation (Boucard, 2007)

On considère un barreau cylindrique soumis à une de ces deux extrémités à un moment porté par l'axe du barreau, et bloqué en rotation à son autre extrémité.

L'étude de ce barreau montre immédiatement que l'on est bien dans le cadre de la torsion pure. Pour visualiser les déformations sur le barreau, on a dessiné une grille sur la surface cylindrique, ainsi que sur l'extrémité du barreau. La grille est matérialisée par des épingles (figure VI.3). Sur la figure VI.4 on a aussi représenté en vue de face et en vue de côté le même barreau. Sur cette figure, on a représenté aussi la grille une fois déformée par le moment de torsion. À l'issue de cette petite manipulation, on peut faire les constats suivants :

- toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe (ce qui vérifie bien l'hypothèse de Navier-Bernoulli présentée précédemment),
- la distance entre deux sections droites données reste sensiblement constante,
- Le mouvement d'une section droite est uniquement une rotation autour de son axe et cette rotation est proportionnelle à sa distance à la section encastrée.

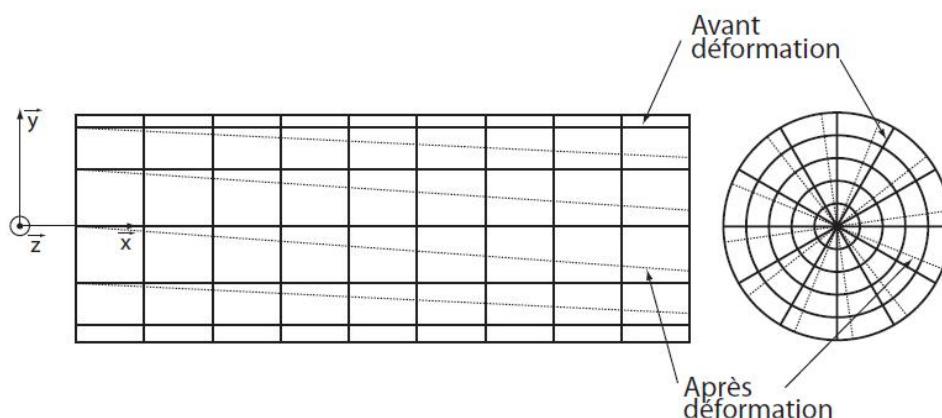


Figure VI.4 – Vue idéalisée de la grille avant et après déformation (Boucard, 2007)

Ainsi, une génératrice du cylindre (une droite avant déformation) se transforme en une hélice sur le cylindre.

Des remarques précédentes on peut donc déduire que :

- dans une section droite, il n'y a pas de déformation longitudinale donc de contrainte normale, les sections ont seulement un mouvement de rotation sans aucune translation,
- les seules contraintes sont donc des contraintes tangentielles.

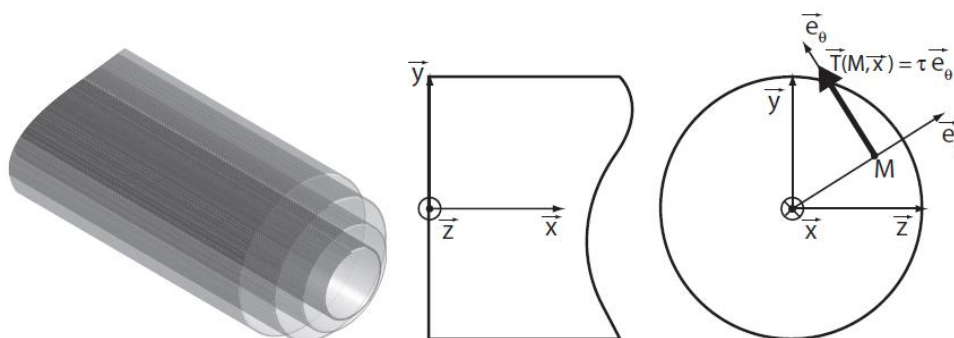


Figure VI.5 – Cylindres tournant les uns par rapport aux autres et vecteur contrainte (Boucard, 2007)

En observant l'extrémité de la poutre, on peut considérer pour mieux comprendre que le barreau se comporte comme une infinité de cylindres de rayons variables, tournant les uns par rapport aux autres (Figure VI.5). Chaque rotation relative de l'un des cylindres par rapport à l'autre génère donc des contraintes tangentielles dont la direction est dans le plan tangent aux cylindres.

Ainsi on peut donc écrire que le vecteur contrainte en tout point M d'une section droite de normale $\vec{x}$ s'écrit :

$$\vec{T}(M, \vec{x}) = \tau \vec{e}_\theta$$

où le repère $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, est le repère polaire associé au point M . Chaque point M d'une section droite est donc soumis uniquement à une contrainte tangentielle qui tend à cisailer la matière.

Il reste alors maintenant à déterminer la répartition des contraintes sur la section droite. Pour cela, on isole un disque du barreau compris entre deux sections voisines distantes de dx .

On appelle $d\phi$ l'angle de rotation entre les deux sections droites. La distorsion qui en découle sur une surface cylindrique quelconque est représentée sur la figure VI.6. C'est une quantité locale dépendant du point dans la section.

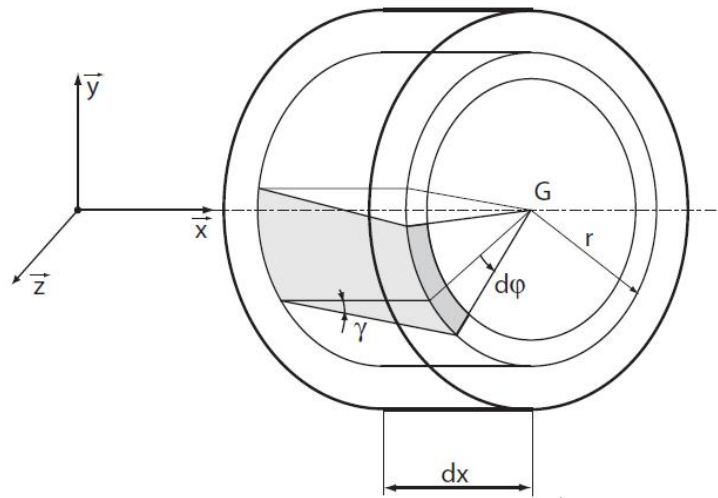


Figure VI.6 – Isolement d'un disque de longueur dx (Boucard, 2007)

γ est l'analogue pour la torsion de la déformation ε pour la traction. C'est une grandeur sans unité que l'on appelle soit distorsion soit déformation de cisaillement.

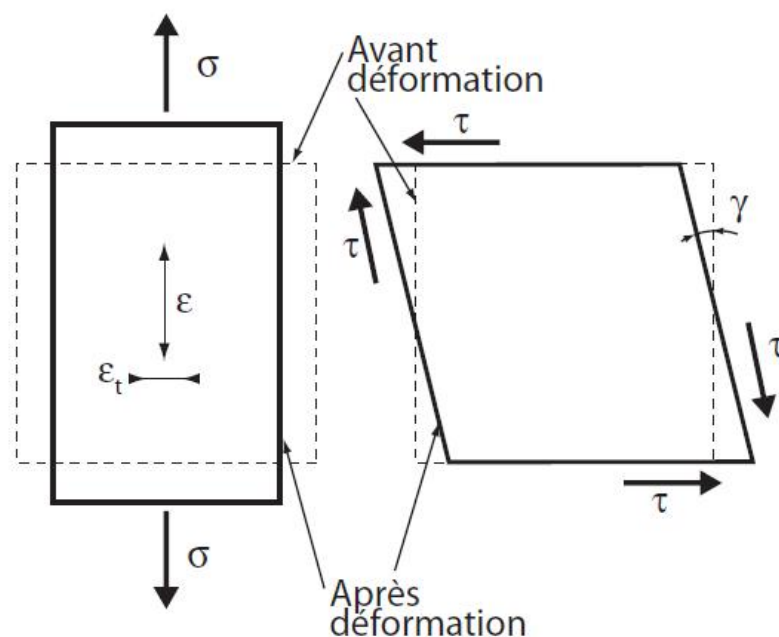


Figure VI.7 – Déformations longitudinale/transverse $\varepsilon/\varepsilon_t$, et de cisaillement γ (Boucard, 2007)

En introduisant cette deuxième déformation, on a maintenant les deux seules déformations subies par la matière. La figure VI.7 montre pour un élément de matière ces deux déformations.

- Sur la partie gauche on soumet le carré à de la traction et il en découle une déformation longitudinale ε et transversale ε_t . Ces deux déformations correspondent à un allongement ou à un rétrécissement de la matière.
- Sur la partie droite de la figure, on soumet le même carré de matière à une contrainte de cisaillement : pour que le système soit en équilibre, les contraintes tangentielles s'exercent sur les quatre bords du carré en respectant le sens indiqué. La déformation qui en découle est la déformation de cisaillement γ .

En reprenant la figure VI.6, et comme on travaille sous l'hypothèse des petites perturbation (HPP), on peut alors aisément calculer la valeur de γ qui est petite. Au premier ordre, on a donc :

$$\tan \gamma \approx \gamma = r \frac{d\phi}{dx}$$

qui traduit une relation locale entre déformation et rotation. On introduit alors la grandeur :

$$\Theta(x) = \frac{d\phi}{dx} \quad \text{en } rad.m^{-1}$$

appelée angle unitaire de torsion qui est une grandeur globale ne dépendant que de x . Ainsi on a :

$$\gamma = r\Theta$$

qui est la relation entre les grandeurs locales et globales sur les déformations. Dans ce cas, le tenseur des petites déformations s'écrit au point G_x centre de la section circulaire $\mathcal{S}_x$

$$\left\{ \mathcal{D} \right\}_{G_x} = \left\{ \begin{array}{c} \Theta \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

On vérifie aisément que la déformation d'un point $M \in \mathcal{S}_x$ est donné par la relation de tenseur

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}(M) &= \vec{\varepsilon}(G_x) + \Theta \vec{x} \wedge \overrightarrow{G_x M} \\ &= \Theta \vec{x} \wedge r \vec{e}_r \\ &= r \Theta \vec{e}_\theta \\ &= \gamma \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Un essai de torsion (non présenté ici) donnerait des résultats tout à fait similaires à un essai de traction en ce qui concerne l'allure de la courbe τ fonction de γ . Ainsi, il existe une zone élastique où la relation entre τ et γ est linéaire, et caractérisée par un coefficient matériau appelé module de cisaillement G . On peut donc écrire dans la partie élastique linéaire la loi de Hooke pour le cisaillement, relation de comportement locale entre contrainte et déformation :

$$\tau = G\gamma$$

De la même façon que la loi de Hooke est valable en traction tant que $\sigma \leq R_p$, en cisaillement la loi de Hooke est valable tant que $\tau \leq R_{pg}$. R_{pg} est la limite d'élasticité en cisaillement, ou limite pratique de glissement (d'où l'indice "pg"). On trouvera dans le tableau VI.1 des valeurs de G et R_{pg} pour quelques matériaux courants.

Matériau	Module de cisaillement G en 10^6 MPa	Limite pratique de glissement R_{pg} en MPa
Acier	80 000	250
Aluminium	26 000	200
Verre	24 000	
Polystyrène	10 500	

Table VI.1 – Ordres de grandeur de quelques caractéristiques matériaux en cisaillement

Il est important de noter que le module de cisaillement peut s'exprimer en fonction de E et ν par l'expression suivante :

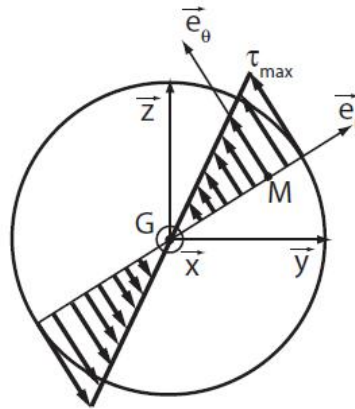
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Ainsi G n'est pas un nouveau coefficient matériau : un matériau élastique linéaire isotrope est caractérisé uniquement par deux coefficients.

En utilisant la loi de Hooke et la relation entre la distorsion et l'angle unitaire de torsion, on peut en déduire :

$$\tau = G\Theta r$$

Cette dernière expression donne donc la répartition des contraintes tangentielles dans la section droite : elles varient linéairement en fonction de la distance au centre G_x de la section (le rayon r). Elles sont donc nulles au centre, et maximales sur la surface extérieure (voir figure VI.8).

**Figure VI.8** – Repère local et contraintes dans la section droite (Boucard, 2007)

On a donc maintenant déterminé à la fois la forme du vecteur contrainte ainsi que sa distribution dans la section droite :

$$\vec{T}(M, \vec{x}) = G\Theta r \vec{e}_\theta$$

ainsi que le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ au point $M(x, r, \theta)$

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & G\Theta r \\ 0 & 0 & 0 \\ G\Theta r & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)}$$

Dans le repère cartésien, le tenseur des contraintes au point $M(x, y = r \cos \theta, z = r \sin \theta)$ s'écrit

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau \sin \theta & \tau \cos \theta \\ -\tau \sin \theta & 0 & 0 \\ \tau \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

La figure VI.9 donne la représentation du champ de contrainte dans les sections droites du cylindres.

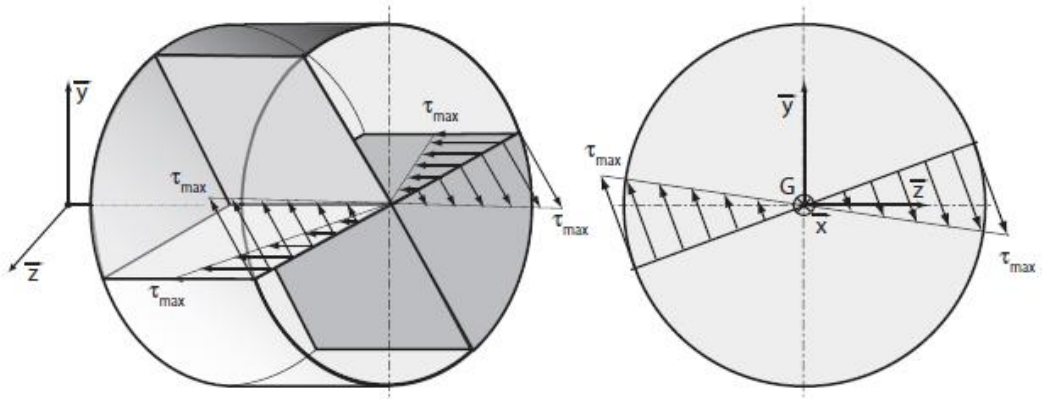


Figure VI.9 – Répartition des contraintes dans la section droite (Boucard, 2007)

VI.4 Relation contrainte/moment de torsion

Pour déterminer la relation contrainte/moment de torsion, il suffit d'intégrer le vecteur contrainte en utilisant :

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ M_t \vec{x} \end{matrix} \right\}_{G_x} = \left\{ \begin{matrix} \iint_{S_x} \vec{T}(M, \vec{x}) dS \\ \iint_{S_x} \vec{G_x M} \wedge \vec{T}(M, \vec{x}) dS \end{matrix} \right\}_{G_x}$$

Soit ici :

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ M_t \vec{x} \end{matrix} \right\}_{G_x} = \left\{ \begin{matrix} \iint_{S_x} r G \Theta \vec{e}_\theta dS \\ \iint_{S_x} \vec{G_x M} \wedge r G \Theta \vec{e}_\theta dS \end{matrix} \right\}_{G_x}$$

Par raison de symétrie de la répartition des contraintes tangentielles par rapport au point G_x , la résultante est nulle.

On peut le démontrer en projetant $\vec{e}_\theta$ sur $\vec{y}$ et $\vec{z}$:

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{y} + \cos \theta \vec{z}$$

D'où l'expression de la résultante :

$$\iint_{S_x} r G \Theta \vec{e}_\theta dS = -\vec{y} \iint_{S_x} r \Theta \sin \theta dS + \vec{z} \iint_{S_x} r G \Theta \cos \theta dS$$

En coordonnées polaires (Figure VI.10) l'expression de dS est : $dS = r dr d\theta$, avec $\theta \in [0, 2\pi]$ et $r \in [0, R]$, où R est le rayon du cylindre. On peut donc en déduire l'expression de la

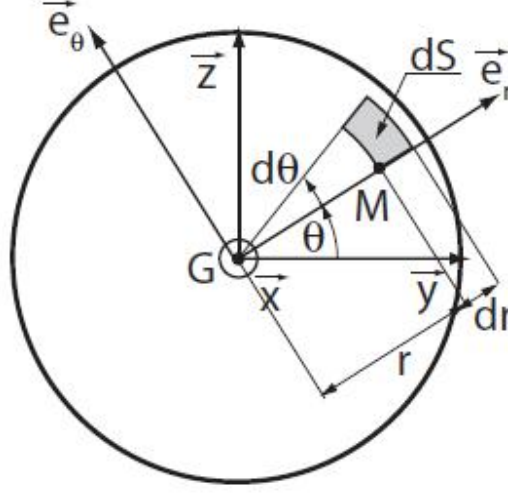


Figure VI.10 – Élément de surface dS en coordonnées polaires (Boucard, 2007)

résultante : D'où l'expression de la résultante :

$$\iint_{S_x} r G \Theta \vec{e}_\theta dS = -G \Theta \vec{y} \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta + G \Theta \vec{z} \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta$$

Or les intégrales entre 0 et 2π des fonctions sin et cos sont nulles, ainsi :

$$\iint_{S_x} G \Theta r \vec{e}_\theta dS = \vec{0}$$

Procédons maintenant au calcul du moment :

$$M_t \vec{x} = \iint_{S_x} \overrightarrow{G_x M} \wedge r G \Theta \vec{e}_\theta dS$$

Or $\overrightarrow{G_x M} = r \vec{e}_r$ donc

$$\overrightarrow{G_x M} \wedge r G \Theta \vec{e}_\theta = G \Theta r^2 \vec{x}$$

d'où l'expression du moment de torsion

$$M_t = G \Theta \iint_{S_x} r^2 dS$$

De plus les deux autres projections sur les axes $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont vérifiées : cela valide l'hypothèse de répartition des vecteurs contraintes sur la section droite. La quantité $\iint_{S_x} r^2 dS$ est appelée *moment quadratique* de la section S_x par rapport à l'axe $(G, \vec{x})$.

En effet cette quantité est l'intégrale de la distance au carré d'un point de la section droite par rapport à l'axe $(G, \vec{x})$. Cette grandeur ne dépend que de la section S_x , et est notée I_{Gx} . On a donc :

$$I_{Gx} = \iint_{S_x} r^2 dS$$

qui vaut dans le cas d'une section circulaire de R

$$I_{Gx} = \frac{\pi R^4}{2}$$

D'où l'expression du moment de torsion (relation de comportement globale) :

$$M_t = G\Theta I_{Gx}$$

on retrouve la relation comportement globale entre le moment de torsion et la déformation angulaire suivant

$$\Theta = \frac{M_t}{GI_{Gx}}$$

et comme

$$\Theta = \frac{\tau}{Gr}$$

On en déduit

$$\tau = \frac{M_t}{I_{Gx}}r$$

Cette dernière expression permet de calculer la valeur de la contrainte en fonction du moment de torsion et du moment quadratique de la section par rapport à $(G, \vec{x})$. En particulier, la contrainte tangentielle maximale dans une section droite est obtenue pour $r = R$, soit :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_{Gx}}R$$

VI.5 Relation contrainte/déformation

Comme nous l'avons vu précédemment, la relation entre la contrainte et la déformation est donnée par la loi de Hooke :

$$\tau = G\gamma$$

On en déduit immédiatement γ :

$$\gamma = \frac{M_t}{GI_{Gx}}r$$

VI.6 Relation déformation/rotation

A partir de la définition de l'angle de torsion unitaire, on peut déduire par intégration, la valeur de la rotation relative d'angle entre deux sections d'abscisses x_1 et x_2 . En effet, on a :

$$\Theta(x) = \frac{d\phi}{dx}(x)$$

d'où par intégration

$$\phi(x_2) - \phi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \Theta(x) dx$$

Et Θ s'exprime en fonction du moment de torsion à partir de l'expression suivante :

$$\Theta = \frac{M_t}{GI_{Gx}}$$

Dans le cadre de l'essai sur le barreau cylindrique présenté précédemment, on peut déterminer l'expression de la rotation en fonction du moment de torsion et de x :

$$\phi(x) - \phi(x=0) = \int_0^x \frac{M_t}{GI_{Gx}} dx$$

En $x=0$, le barreau est encasté, donc la rotation est nulle. De plus dans cet essai, le moment de torsion est constant, donc l'angle unitaire de torsion aussi. Il vient donc directement :

$$\phi(x) = x \frac{M_t}{GI_{Gx}} = x \frac{4M_t}{G\pi R^4}$$

D'où l'expression du torseur des petits déplacements

$$\left\{ \mathcal{U} \right\}_{G_x} = \left\{ \begin{array}{c} \phi(x) \vec{x} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_x} = \left\{ \begin{array}{c} x \frac{M_t}{GI_{Gx}} \vec{x} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_x}$$

La formule de Bresses donne exactement le même résultat par intégration du torseur des petites déformations.

Remarque 14 *Le déplacement d'un point $M(x, r, \theta)$ est donné par la relation de torseur suivante*

$$\begin{aligned} \vec{u}(M) &= u(G_x) + \phi(x) \vec{x} \wedge \overrightarrow{MG_x} \\ &= \phi(x) \vec{x} \wedge r \vec{e}_r \\ &= rx \frac{M_t}{GI_{Gx}} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Remarque 15 *La rotation maximale est donnée pour $x=L$*

$$\phi(L) = L \frac{M_t}{GI_{Gx}} = L \frac{4M_t}{G\pi R^4}$$

Cette dernière expression donne l'angle de rotation de la section droite extrême du barreau en fonction du moment de torsion, du module de cisaillement, et des caractéristiques géométriques du barreau (longueur et rayon).

VI.7 Critère de dimensionnement

Pour dimensionner la poutre on peut utiliser deux types de critères :

- un critère en contrainte
- un critère en rotation

Le critère en contrainte va traduire le fait que le matériau doit rester dans la zone élastique.

$$\tau \leq R_{pg}$$

En prenant un coefficient de sécurité $s > 1$ en compte, on a :

$$s\tau \leq R_{pg}$$

Le critère en déplacement traduit, moyennant un coefficient de sécurité s' , que la rotation en un point N doit rester inférieure à une valeur donnée dépendante des conditions d'utilisation :

$$s'\phi(N) \leq \phi_{lim}$$

où que le déplacement d'un point $M(x, r, \theta)$ de la section $\mathcal{S}_x$ doit rester inférieure à une valeur donnée dépendante des conditions d'utilisation :

$$s'' \|\vec{u}(M)\| \leq u_{lim}$$

ce critère est équivalent au premier, car on détermine $u(M)$ à l'aide de la relation de torseur

$$\begin{aligned}\vec{u}(M) &= \vec{u}(G_x) + \phi(x) \vec{x} \wedge \overrightarrow{G_x M} \\ &= r\phi(x) \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Références

- Ballard, P. and Millard, A. (2006). *Modélisation et calcul des structures élancées (MEC 553)*. Cours de l'X. Meca MMC.
- Boucard, P.-A. (2007). *Cours de Dimensionnement des Structures Resistance des Matériaux*. IUT Cachan. Meca : RDM.