

Cycle Préparatoire Médecin–Ingénieur 2011–2012

Cours de résistance des matériaux

Pierre Badel
Ecole des Mines Saint Etienne

- Première notions de mécanique des solides déformables
- Premières notions de comportement des matériaux
- Aborder des situations classiques en RDM
- Résoudre des problèmes simples de dimensionnement

Ch. 1 – Introduction à la RDM

Ch. 2 – Equilibre global des structures

Ch. 3 – Définitions et hypothèses de la RDM

Ch. 4 – Torseur des efforts internes (ou de cohésion)

Ch. 5 – Les sollicitations simples

Objet de la RDM

De façon générale, Mécanique = étude des **effets d'actions extérieures sur des solides et fluides**.

Choix d'une modélisation = fonction de l'application, des objectifs visés, des hypothèses fixées...

Exemple : étude dynamique du mouvement d'un pendule → méca. des solides rigides

En mécanique des **solides déformables**, on étudie

- les **déplacements relatifs** entre points d'un solide (notion de déformations)
- les **efforts intérieurs** associés (notion de contraintes)

L'objectif est de déterminer, par le calcul, des pièces de machine, des éléments de structures :

- **Dimensionner** ces pièces (objectifs d'économie)
- **Vérifier** leur tenue mécanique (déformations / contraintes limites imposées)

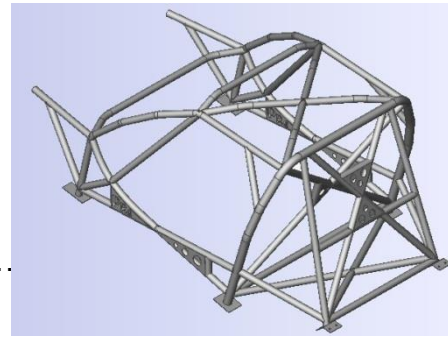
RDM = Etude des déformations, déplacements et contraintes d'objets de forme simple. Dans la cadre de ce cours, des poutres.

Elle est issue de la théorie, plus générale, de la Mécanique des Milieux Continus.

Champ d'application de la RDM

→ Calcul de structures

- Bâtiments, charpentes, structures métalliques...
- Ouvrages de génie civil...
- Squelette structural de systèmes divers



→ Calcul de pièces mécaniques

- Arbres de transmission
- ...



→ Première approche de calculs complexes

- Etablir un premier résultat simplement



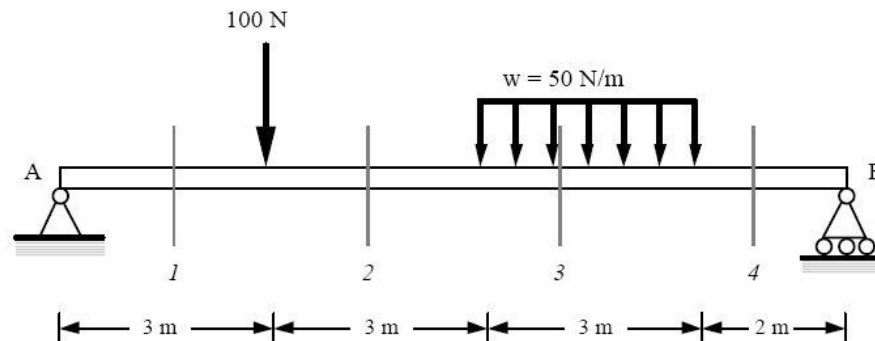
Objectifs du cours

→ Savoir étudier le comportement d'une structure de type « poutre » sous des actions (simples)...

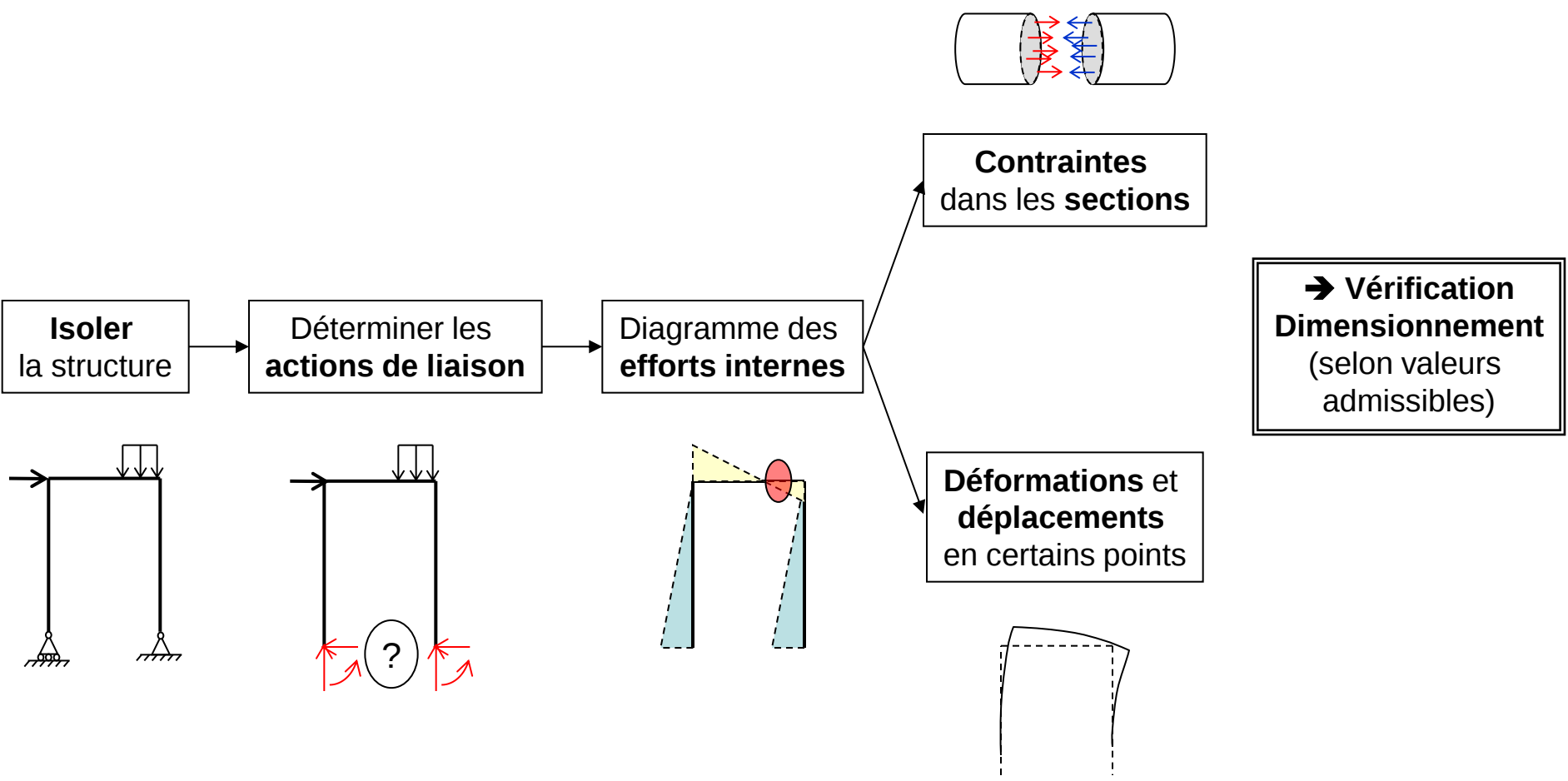
- Calcul des contraintes
- Calcul des déformations et déplacements

→ ... dans le but de les dimensionner / vérifier

- Actions connues + efforts/déplacements admissibles → problème de dimensionnement
- Dimensions connues + actions connues → problème de vérification

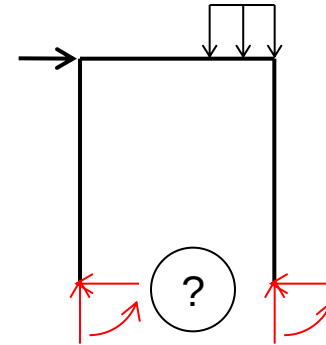


Principe d'étude d'une structure de poutres



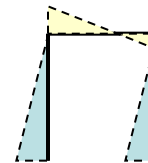
Ch. 1 – Introduction à la RDM

Ch. 2 – Equilibre global des structures

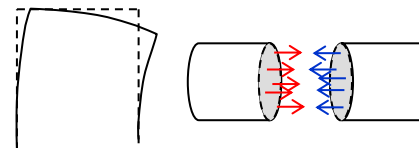


Ch. 3 – Définitions et hypothèses de la RDM

Ch. 4 – Torseur des efforts internes
(ou de cohésion)

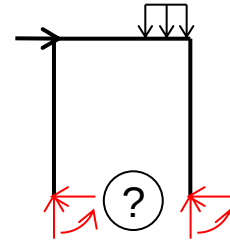


Ch. 5 – Les sollicitations simples



Objectif

- A l'équilibre,
déterminer les actions de liaison qui sont *a priori* inconnues.



Principe de la statique

- PFS :

Sous l'action des efforts extérieurs,
la structure est en équilibre $\leftrightarrow$ chaque élément de la structure est en équilibre.

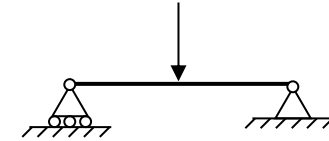
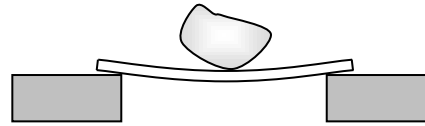
- Pour chaque élément isolé :
$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}(P) = \vec{0} \end{cases}$$

Lois de la mécanique du
solide indéformable !

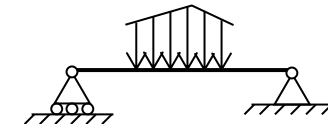
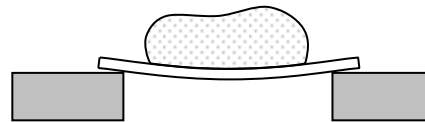
Actions extérieures appliquées

→ Forces de contact

- Ponctuelles

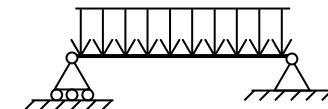


- Réparties

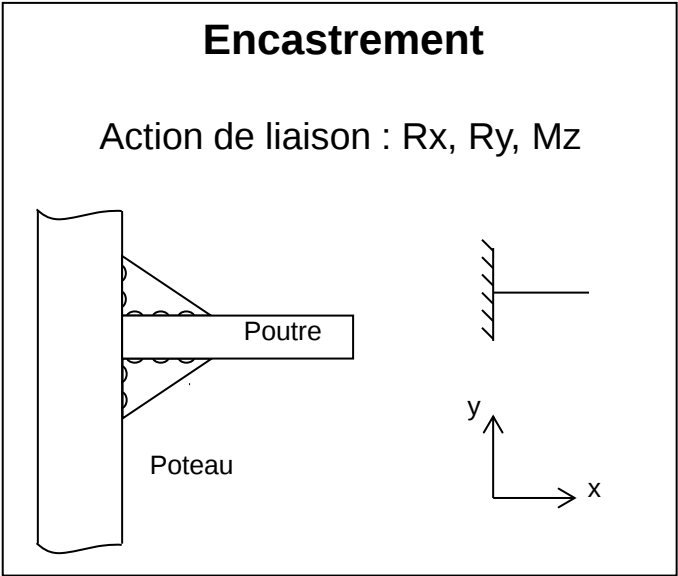
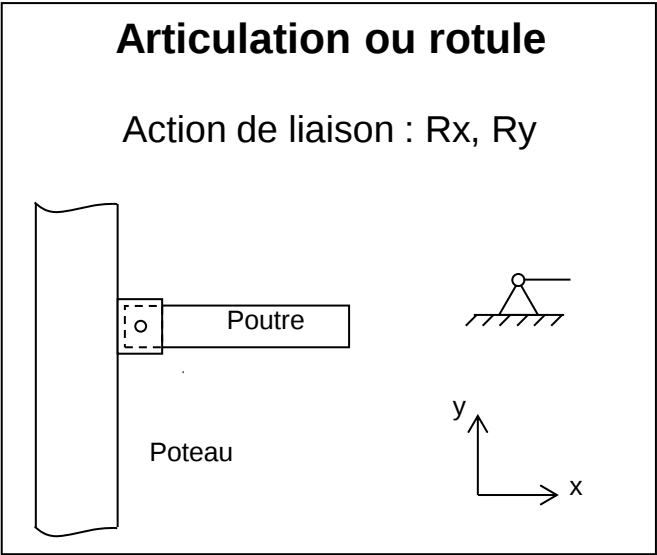
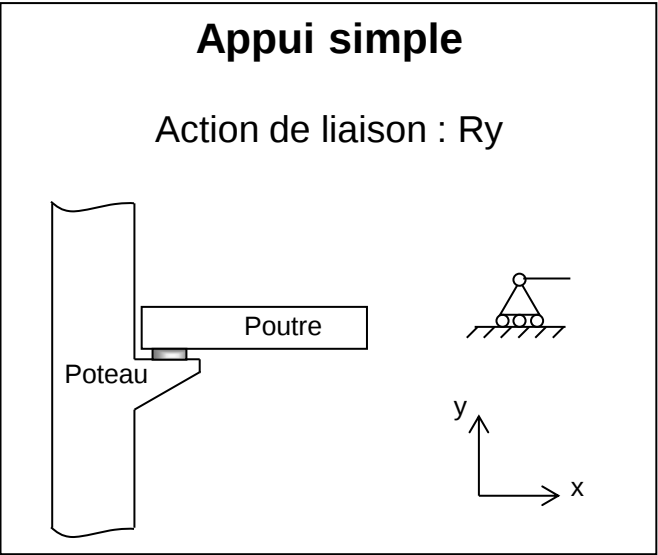


→ Forces de volume

- Les plus courantes : pesanteur

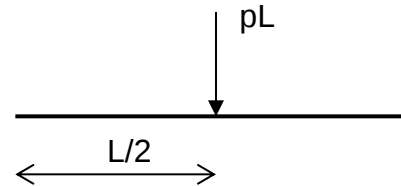
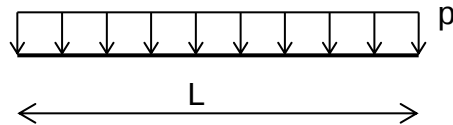


Actions de liaison



Remarque sur les charges réparties

→ Charge équivalente à une charge répartie



Une charge uniformément répartie sur une longueur $\widehat{L}$ est globalement équivalente à une force ponctuelle :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Intensité : } p\widehat{L} \\ \text{Point d'application : au milieu de } \widehat{L} \end{array} \right.$

→ Preuve :

...

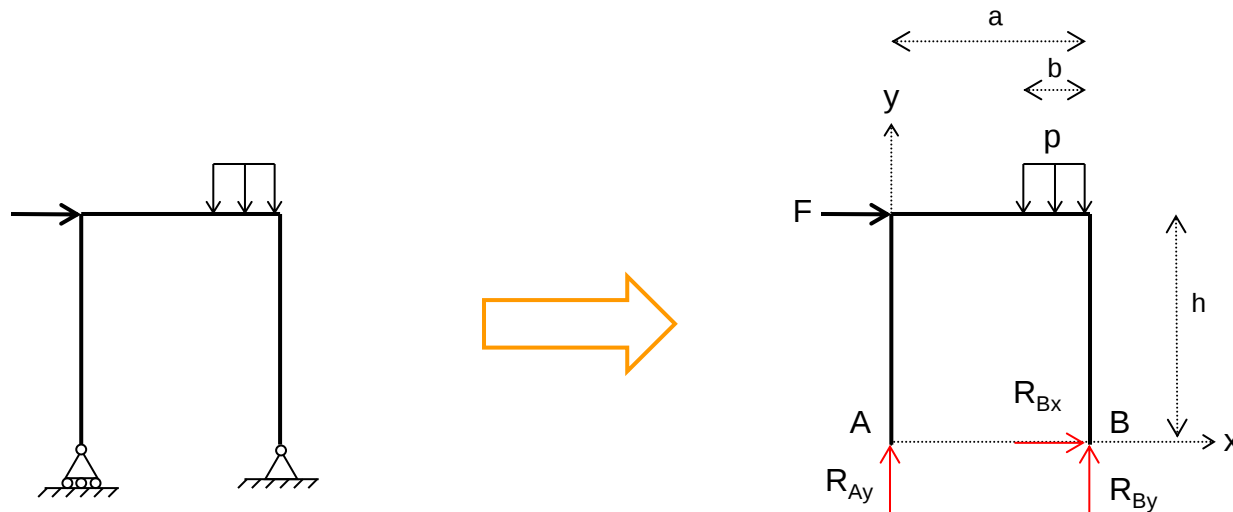
→ Remarque :

Nous avons en fait calculé le torseur de l'action mécanique répartie p .

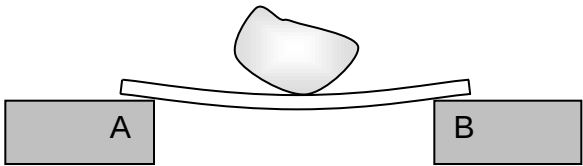
Schéma de calcul

→ Règles de schématisation :

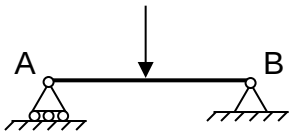
- Poutre → schématisée par sa ligne moyenne (ou fibre de référence)
- Actions de liaison → schématisées par les composantes de réaction
- Actions extérieures → schématisées par les forces réparties/ponctuelles **ramenées à la ligne moyenne**
- Repère de référence à **représenter** (car convention de signe pour les composantes de réaction)
- (Il est recommandé de reporter les indications de longueurs)



Calcul des actions de liaison



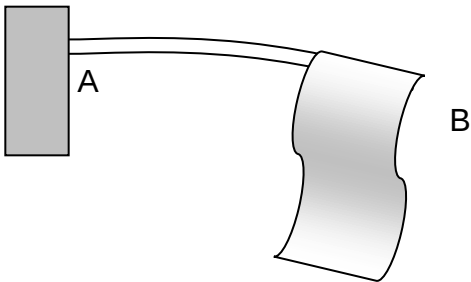
Situation réelle



Modèle

Schéma de calcul

Application numérique : poutre de longueur $2L$, charge P .



Situation réelle

Modèle

Schéma de calcul

Généralités

- Isostatique $\leftrightarrow$ le PFS suffit à déterminer les inconnues statiques
- Hyperstatique de degré $n \leftrightarrow n$ équations supplémentaires sont nécessaires.
- En pratique
 - Pour une structure isostatique :
libérer 1 ddl $\rightarrow$ instabilité (on peut parler alors de mécanisme)
structure hyperstatique de degré n : on peut libérer jusqu'à n ddl et rester stable.
 - Remarque : degré d'hyperstaticité indépendant du chargement.

Degré d'hyperstaticité

→ Si l'on travaille dans le plan (cadre de ce cours) alors nous avons pour équations :

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

$$n = N_r - N_e$$

N_e : nombre d'équations (pour un solide dans le plan, $N_e=3$)

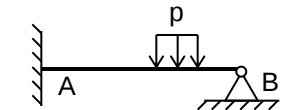
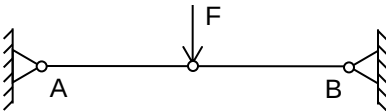
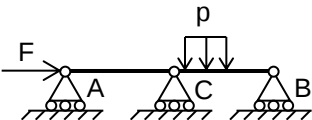
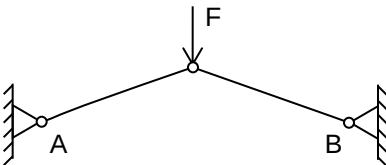
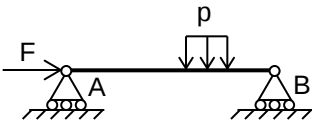
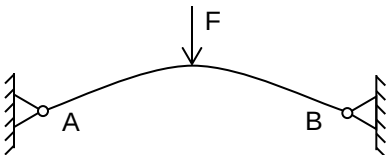
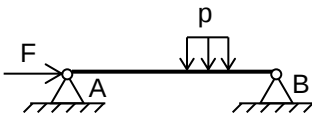
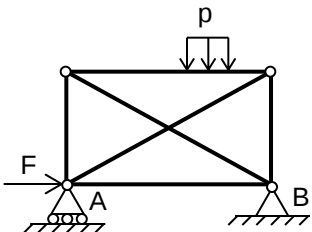
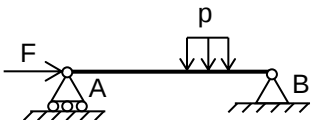
N_r : nombre de composantes de réaction

n : degré d'hyperstaticité

$n = 0 \rightarrow$ isostatique (cadre de ce cours)

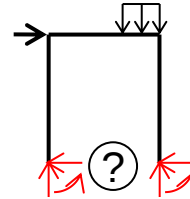
$n < 0 \rightarrow$ hypostatique, instable (pb. insoluble)

Exemples



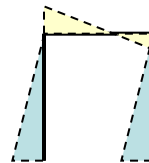
Ch. 1 – Introduction à la RDM

Ch. 2 – Equilibre global des structures

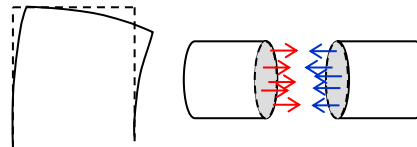


Ch. 3 – Définitions et hypothèses de la RDM

Ch. 4 – Tenseur de cohésion
(ou des efforts internes)



Ch. 5 – Les sollicitations simples

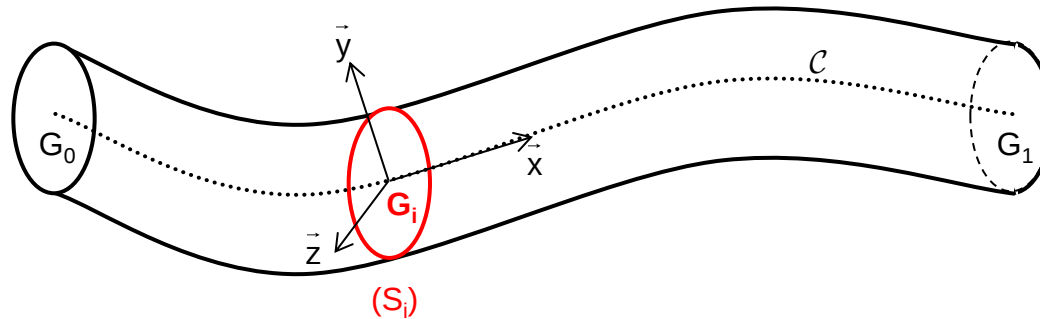


Introduction

- ➔ La RDM est une théorie simplifiée.
- ➔ Elle découle d'un certain nombre d'hypothèses qui cadrent son domaine de validité.
 - On s'intéresse à des solides considérés comme déformables
 - Des restrictions multiples sont nécessaires pour utiliser la RDM.
 - ... sur les géométries
 - ... sur les matériaux
 - ... sur les efforts extérieurs
 - ...
- ➔ Ce chapitre vise à poser l'ensemble de ces hypothèses

Définition

Poutre = volume engendré par une surface S quand G décrit une courbe $\mathcal{C}$.



- $\mathcal{C}$ = **ligne moyenne** = courbe des centres de gravité des sections S .
- (S_i) = **sections droites**, perpendiculaires localement à $\mathcal{C}$ en G_i .
Remarque : (S) peut varier le long de $\mathcal{C}$.

Repérage

- Utilisation d'un repère **local** à chaque section droite S_i . Défini par :

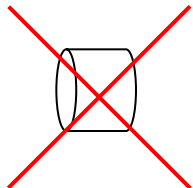
$(G_i, \vec{x})$ tangent à $\mathcal{C}$ en G_i .

$\left. \begin{matrix} (G_i, \vec{y}) \\ (G_i, \vec{z}) \end{matrix} \right\}$ dans le plan de (S_i) . Généralement parallèles aux axes principaux de (S_i)
(= axes de symétrie, s'ils existent).

Hypothèses

Elancement

Dimensions transversales ($\leftrightarrow S_i$) petites devant les dimensions longitudinales.
Remarque : sinon, autre théories : plaques et coques, ou élasticité.

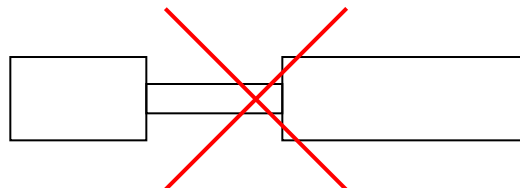


Rayon de courbure

Doivent être limités.

Variations de section

Doivent être lentes et continues.

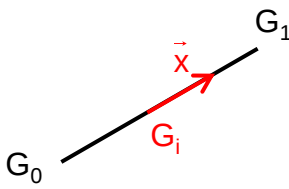


Restrictions dans le cadre de ce cours

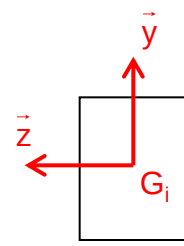
- Poutres droites et problèmes dans le plan.
- Section constante.
- Sections droites symétriques $\rightarrow (G_i, \vec{x}, \vec{y})$ est le plan de symétrie.
- Conclusion : poutre définie par
1 ligne moyenne
1 section droite

Représentation

Ligne moyenne



Section droite

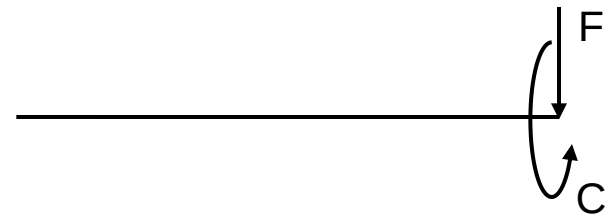
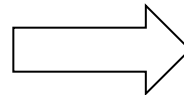
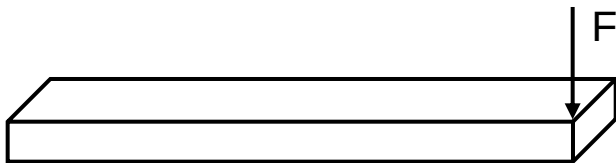
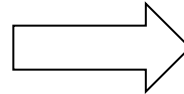
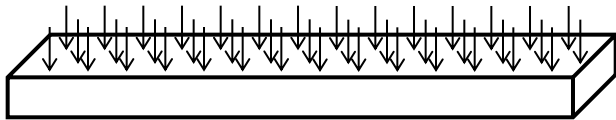


Actions mécaniques

→ Deux types d'actions mécaniques

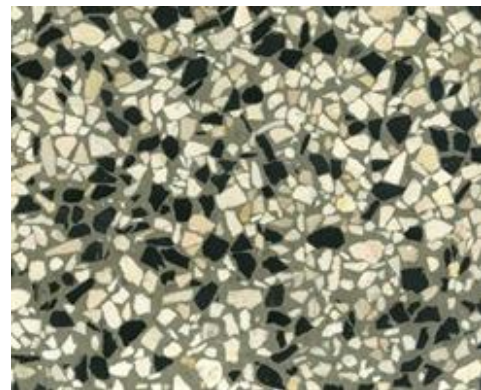
- Localisées
- Réparties

→ Le chargement doit être ramené au niveau de la ligne moyenne.

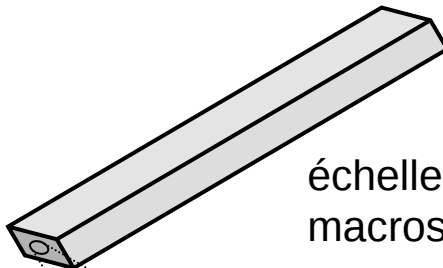
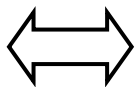
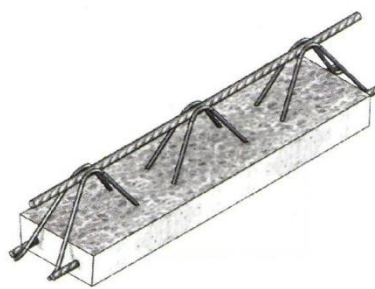


Matériaux

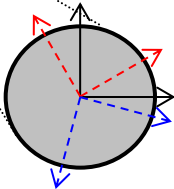
→ Matériaux continus, homogènes et isotropes



échelle « microscopique »



échelle macroscopique

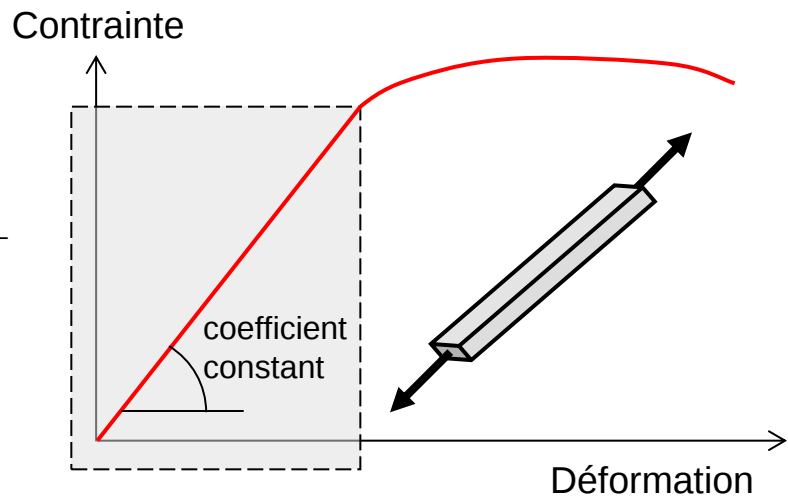


hypothèse d'isotropie

→ Elasticité linéaire

Déformation parfaitement réversible

+



Déformation

→ Hypothèse de petites déformations

On ne considère que la zone de comportement élastique des matériaux

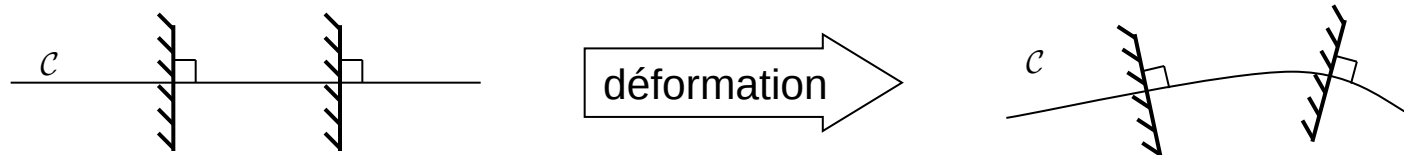
→ Les déformations et déplacements restent petits.

→ Les calculs se font à partir de la structure non déformée.

→ Hypothèse de Navier Bernoulli

Les sections droites et planes restent **droites et planes** après déformation.

↔ La ligne moyenne se déforme mais les sections droites sont « rigides ».



Chargement

→ Principe de St Venant

« Les contraintes (et déformations) dans une section droite **éloignée des points d'application** d'un système de forces ne dépendent que de la résultante et du moment résultant (au centre de gravité de la section) associés à ce système de forces. »

Conséquence :

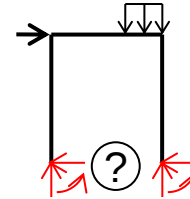
- Les résultats de la RDM sont valables loin des points d'application des forces.
- Quel que soit la nature d'un système de force, seul le **torseur résultant au centre de gravité de la section** détermine l'état de celle-ci.

En pratique :

- On considère qu'au-delà de 2-3 fois de la plus grande dimension transverse, résultats valables.

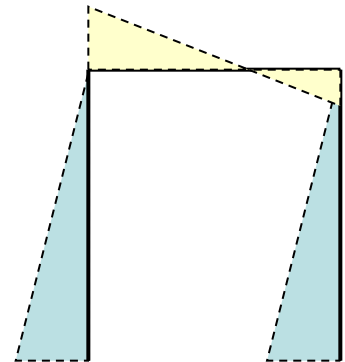
Ch. 1 – Introduction à la RDM

Ch. 2 – Equilibre global des structures

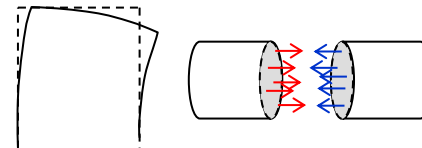


Ch. 3 – Définitions et hypothèses de la RDM

**Ch. 4 – Torseur des efforts internes
(ou de cohésion)**



Ch. 5 – Les sollicitations simples



Introduction

→ Passage de l'échelle globale à l'échelle locale

→ Des efforts extérieurs aux efforts internes

But : connaître la répartition de ces efforts

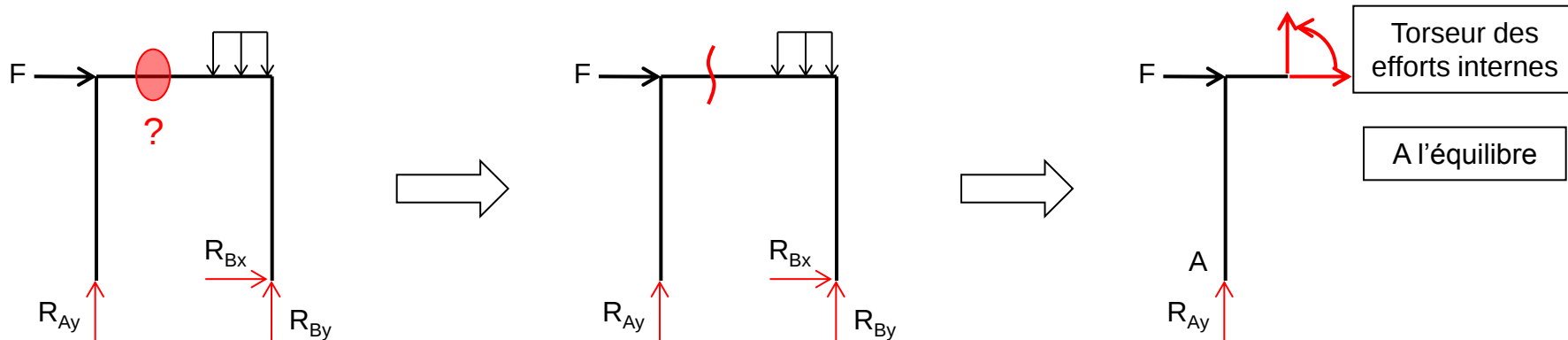
... Les risques de rupture sont liés aux efforts de cohésion de la matière !



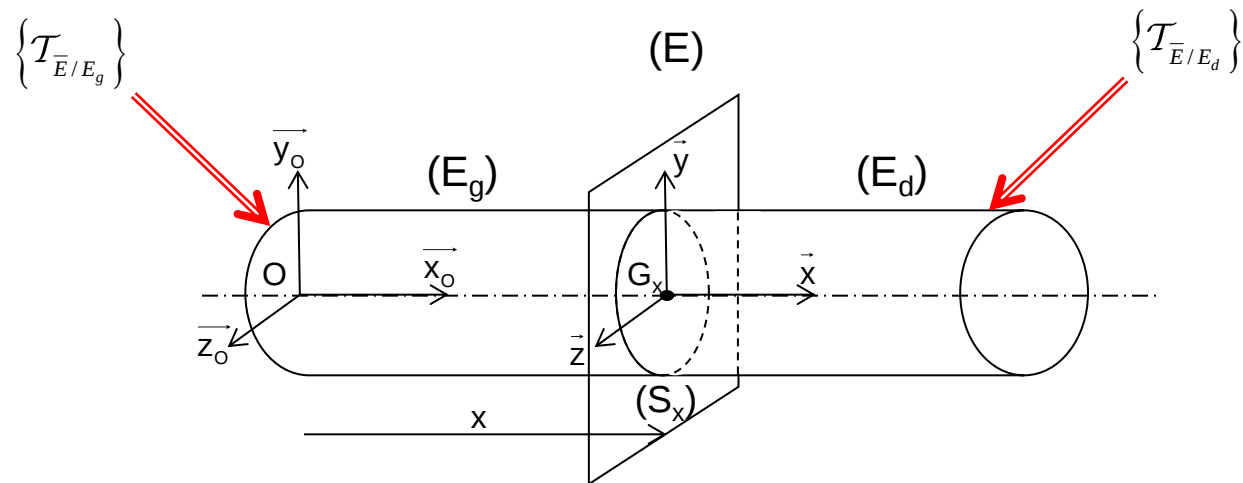
... Et l'objectif de la RDM est de vérifier la tenue mécanique des structures !

→ Principe :

On réalise une coupure afin de déterminer le torseur des efforts de cohésion



Coupure fictive et repère local



On considère une **coupure fictive** de la poutre (E) au niveau de la section S_x de centre de gravité G_x

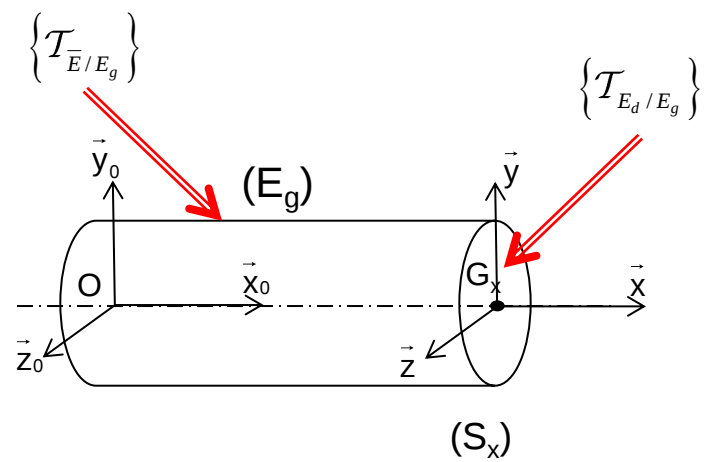
- (E) est partagée à droite, côté x positif, en (E_d) , à gauche, côté x négatif en (E_g) : $(E) = (E_d) \cup (E_g)$
(⚠ importance du sens de parcours donné par la direction x : convention de signe)
- Le repère (G_x, x, y, z) est le repère local à la section droite (S_x) .
- Actions extérieures appliquées à (E) : $\{T_{E/E}\} = \{T_{E/E_d}\} + \{T_{E/E_g}\}$

Équilibre statique de la poutre

$$\Rightarrow \{T_{E/E}\} = 0 \text{ soit } \{T_{E/E_g}\} = -\{T_{E/E_d}\}$$

Torseur des efforts internes (ou de cohésion)

Isolons le tronçon (E_g)



Actions extérieures appliquées à (E_g) : $\{T_{\bar{E}/E_g}\} + \{T_{E_d/E_g}\}$

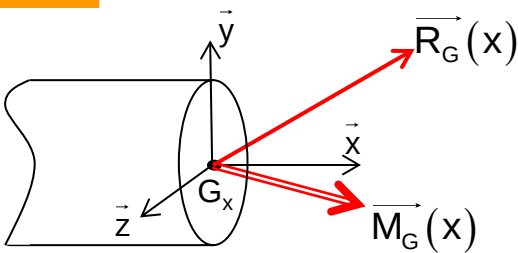
→ Définition :
Le torseur des efforts internes en x est le torseur, en G_x, des actions de (E_d) sur (E_g).

$$\{T_{\text{efforts internes}}\}_x = \{T_{E_d/E_g}\}_{G_x}$$

→ Equilibre statique de (E_g) ⇒ $\{T_{\text{efforts internes}}\}_x = -\{T_{\bar{E}/E_g}\}_{G_x}$ (= - torseur des actions extérieures à gauche)
 $= \{T_{\bar{E}/E_d}\}_{G_x}$ (= torseur des actions extérieures à droite)

Eléments de réduction du torseur de cohésion

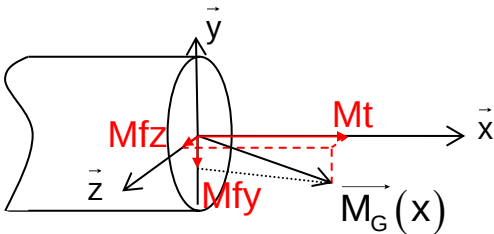
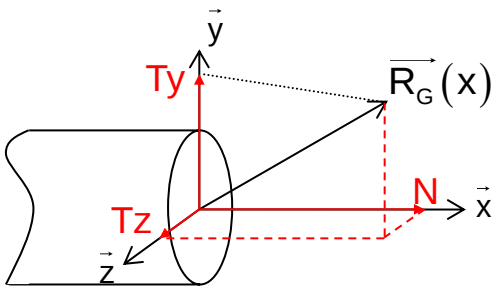
$$\{\mathcal{T}_{\text{efforts internes}}\}_x = \begin{Bmatrix} \vec{R}_G(x) \\ \vec{M}_G(x) \end{Bmatrix}$$



→ En projection dans le repère local, on définit ainsi :

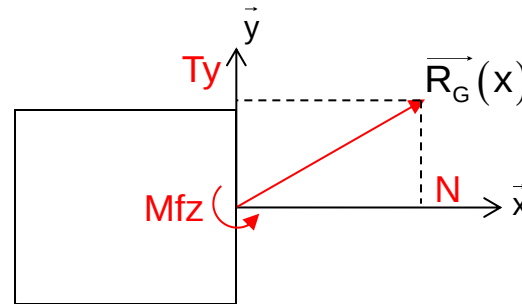
- $\vec{R}_G(x) \cdot \vec{x}$: effort normal $N(x)$
- $\vec{R}_G(x) \cdot \vec{y}$: effort tranchant selon y $Ty(x)$
- $\vec{R}_G(x) \cdot \vec{z}$: effort tranchant selon z $Tz(x)$

- $\vec{M}_G(x) \cdot \vec{x}$: moment de torsion $Mt(x)$
- $\vec{M}_G(x) \cdot \vec{y}$: moment fléchissant selon y $Mfy(x)$
- $\vec{M}_G(x) \cdot \vec{z}$: moment fléchissant selon z $Mfz(x)$



$$\{\mathcal{T}_{\text{efforts internes}}\}_x = \begin{Bmatrix} N(x) & Mt(x) \\ Ty(x) & Mfy(x) \\ Tz(x) & Mfz(x) \end{Bmatrix}_{R_x}$$

Cas des problèmes plans



→ Pour les problèmes plans (= ce cours),
 $\{\mathcal{T}_{\text{eff int}}\}$ se réduit à (z composante hors plan):

$$\{\mathcal{T}_{\text{efforts internes}}\}_x = \left\{ \begin{matrix} N(x) \\ Ty(x) \\ Mfz(x) \end{matrix} \right\}_{R_x}$$

Etape très importante !

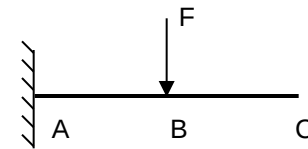
Pour la suite des développements, il est indispensable de déterminer correctement les éléments du torseur des efforts internes.

Calcul des efforts internes

→ Découpage en différents tronçons

Selon les actions mécaniques rencontrées

Selon la géométrie de la ligne moyenne



→ Ecrire le PFS sur chaque tronçon **dans le repère local**

Coupure fictive → on isole la partie droite ou gauche

Détermination des composantes d'efforts internes grâce au bilan des actions extérieures

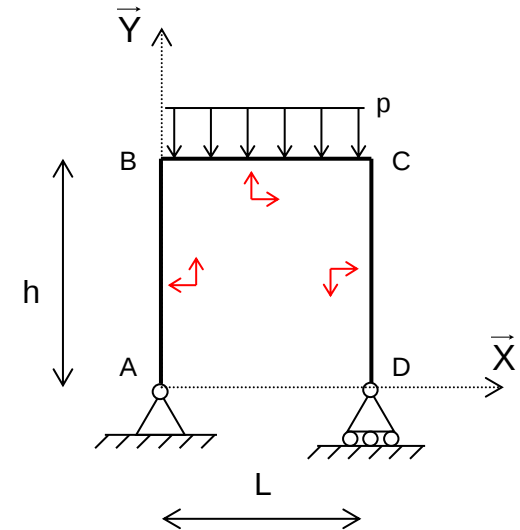
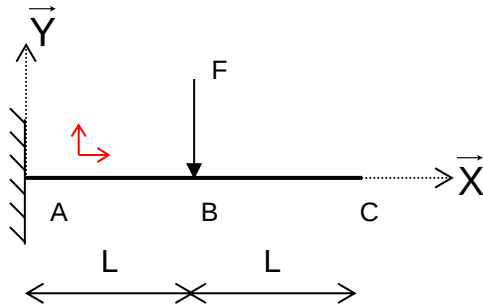


Convention de signe en fonction du sens de parcours.

Repère local $\neq$ repère global le plus souvent.

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{T}_{\text{efforts internes}} \right\}_x &= - \left\{ \mathcal{T}_{\bar{E}/E_g} \right\}_{G_x, R_x} \\ &= \left\{ \mathcal{T}_{\bar{E}/E_d} \right\}_{G_x, R_x} \end{aligned}$$

Exemples de calcul des efforts internes



→ Remarques :

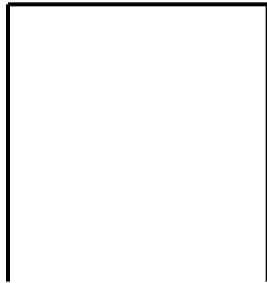
- Choix de la partie droite ou gauche indifférent (sauf sur la simplicité des calculs !)
- Conventions de signe → assurent une compréhension physique. (exemple $N < 0$ signifie compression, quel que soit le tronçon considéré)
- Résultat indépendant du choix du repère local (tant que x est tangent à la ligne moyenne)

Diagramme des efforts internes

→ Intérêt : visualisation rapide des poutres les plus sollicitées

N

A B C

 T_y

A B C

 M_f

A B C



Singularités des diagrammes

→ Discontinuités

Discontinuité du diagramme $\leftrightarrow$ Action ponctuelle correspondant à l'effort interne considéré

Exemple : discontinuité de $T_y \leftrightarrow$ force ponctuelle selon y .

→ Aux extrémités

On retrouve l'intensité des actions ponctuelles en projection dans le repère local

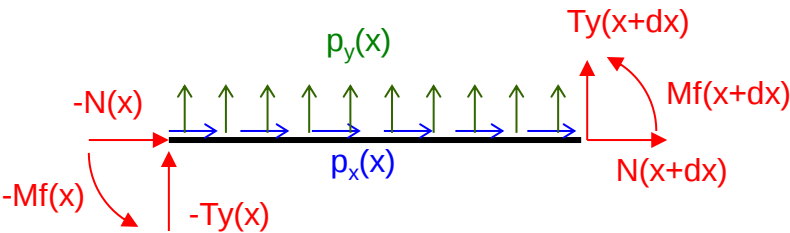
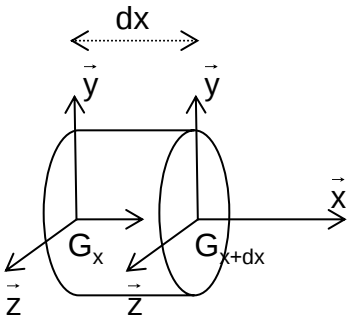
→ Effort tranchant $\leftrightarrow$ Moment fléchissant

Variation des efforts internes

→ Etude d'un tronçon de longueur dx

Hypothèses :

- Tranche dx infiniment fine
- Pas d'actions ponctuelles (St Venant)
- Seulement des forces réparties : $p_x(x)$, $p_y(x)$ (supposées constantes sur dx)



→ Equilibre du tronçon dx

...

$$\frac{dN}{dx}(x) = -p_x(x)$$

$$\frac{dT_y}{dx}(x) = -p_y(x)$$

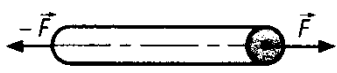
$$\frac{dM_f}{dx}(x) = -T_y(x)$$

Utile en vérification !

Sollicitations simples

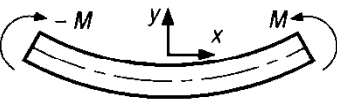
→ Traction/compression simple

$$\{\mathcal{T}_{\text{eff int}}\}_x = \begin{Bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



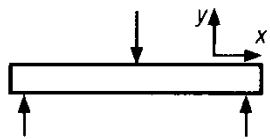
→ Flexion pure

$$\{\mathcal{T}_{\text{eff int}}\}_x = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Mfz \end{Bmatrix}$$



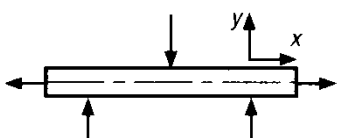
→ Flexion simple

$$\{\mathcal{T}_{\text{eff int}}\}_x = \begin{Bmatrix} 0 \\ T_y \\ Mfz \end{Bmatrix}$$



→ Flexion composée

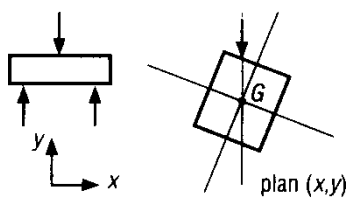
$$\{\mathcal{T}_{\text{eff int}}\}_x = \begin{Bmatrix} N \\ T_y \\ Mfz \end{Bmatrix}$$



→ Autres (problèmes non plans)

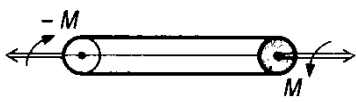
- Flexion déviée

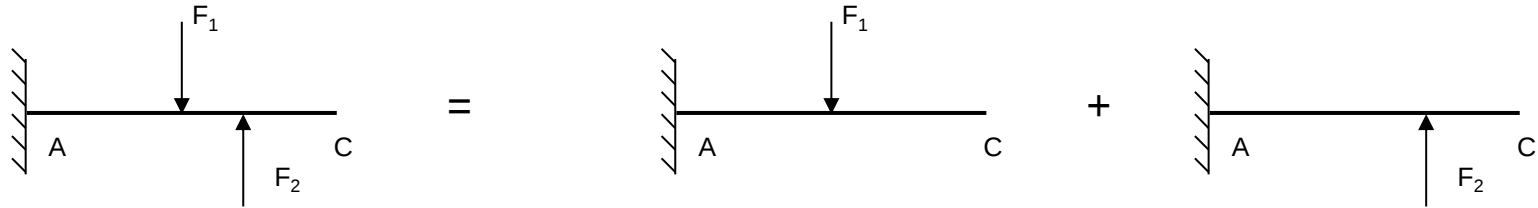
$$\{\mathcal{T}_{\text{eff int}}\}_x = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & Mfy \\ T_z & Mfz \end{Bmatrix}$$



- Torsion pure

$$\{\mathcal{T}_{\text{eff int}}\}_x = \begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$



Principe de superposition

La réponse de la structure sous l'action de F_1 est R_1 (contrainte ou déplacement)

La réponse de la structure sous l'action de F_2 est R_2 (contrainte ou déplacement)

→ La réponse de la structure sous l'action de $F_1 + F_2$ sera $R_1 + R_2$

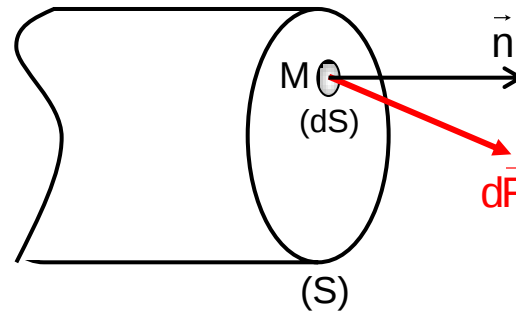
→ Conditions d'application

- Domaine élastique (pas de pertes d'énergie par frottement etc...)
- Domaine linéaire (proportionnalité force/déplacements)
- Forces extérieures indépendantes des déplacements (hypothèses de petites déformations).
- En bref : les hypothèses de la RDM !

Vecteur contrainte en un point

→ Encore plus local...

Le torseur des efforts internes n'est qu'une vision globale au niveau de la section considérée.
Que se passe-t-il, localement, en chaque point de la poutre ?



- Soit, en M, une facette de surface élémentaire dS .
- $\vec{n}$: normale, en M, à la facette. (ici perpendiculaire à la ligne moyenne, mais peut être quelconque)
- $d\vec{F}$: effort élémentaire s'appliquant sur la facette.

→ Définition

La densité surfacique d'effort s'appliquant sur la facette dS de normale $\vec{n}$ est caractérisée par le vecteur contrainte :

$$\boxed{\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dS}}$$

Vecteur contrainte en un point

→ Remarques :

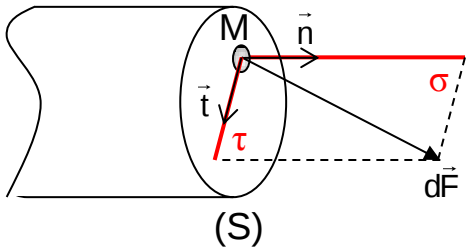
- Unité SI : Pascal, Pa. 1 Pa = 1 N/m² (comme la pression).
- Unité couramment utilisée : Mégapascal, MPa. 1 MPa = 1 N/mm².
- $\vec{T}(M, \vec{n})$ dépend à la fois du point M considéré et de l'orientation $\vec{n}$ de la facette.

→ Contraintes normales et tangentielles

Par projection, on définit :

- σ : contrainte normale.
- τ : contrainte tangentielle.

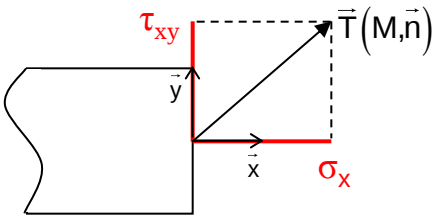
$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$



Remarque :

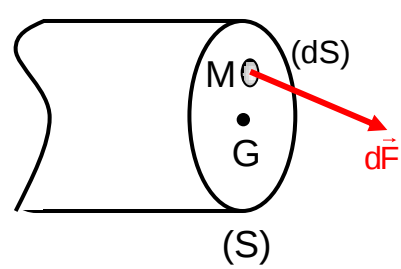
Cas général : $\tau \vec{t} = \tau_{xy} \vec{y} + \tau_{xz} \vec{z}$

Problème plan : $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_x \vec{x} + \tau_{xy} \vec{y}$



Relations contraintes → efforts internes

→ Torseur des actions mécaniques sur une facette dS de la section (S) :

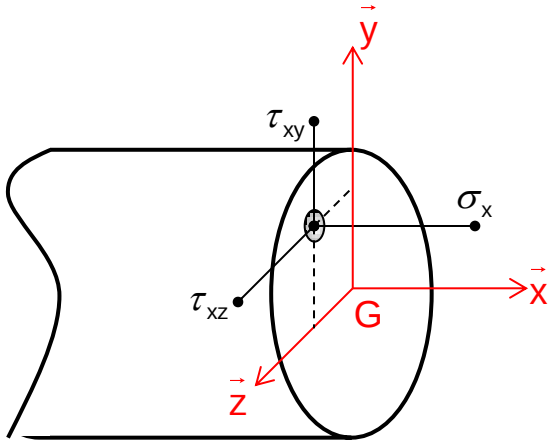


$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} d\vec{F} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M &= \left\{ \begin{array}{c} d\vec{F} \\ \overrightarrow{GM} \wedge d\vec{F} \end{array} \right\}_G \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{T}(M, \vec{n}) dS \\ \overrightarrow{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) dS \end{array} \right\}_G \end{aligned}$$

→ Intégration sur toute la surface de (S) :

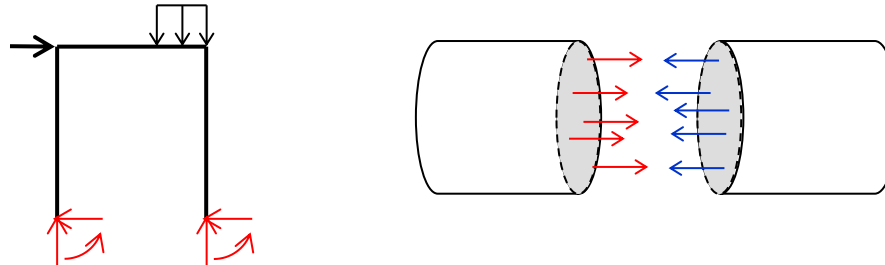
$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{eff int}} \right\}_x = \left\{ \begin{array}{c} \iint_{(S)} \vec{T}(M, \vec{n}) dS \\ \iint_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) dS \end{array} \right\}_G$$

$\Rightarrow \vec{R}_G(x) \left\{ \begin{array}{l} N(x) = \iint_{(S)} \sigma_x dS \\ Ty(x) = \iint_{(S)} \tau_{xy} dS \\ Tz(x) = \iint_{(S)} \tau_{xz} dS \end{array} \right. \vec{M}_G(x) \left\{ \begin{array}{l} Mt(x) = \iint_{(S)} (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) dS \\ Mfy(x) = \iint_{(S)} (\sigma_x \cdot z) dS \\ Mfz(x) = -\iint_{(S)} (\sigma_x \cdot y) dS \end{array} \right.$
--



Intérêt pour la RDM

- Ces relations vont permettre de passer de l'échelle la plus globale (actions extérieures à la structure) à une échelle très locale (cohésion de la matière)



- Afin de faire ce passage inverse (efforts internes → contraintes), d'autres hypothèses seront nécessaires

Hypothèses sur la répartition des contraintes dans les sections.

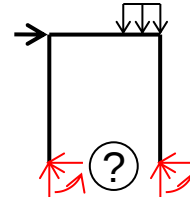
- Rappel :

Déterminer les contraintes au sein de la matière ↔ Vérifier la tenue mécanique
↔ But de la RDM

Critère de tenue mécanique : contraintes limites admissibles fonctions de σ et τ (dépend du matériau).

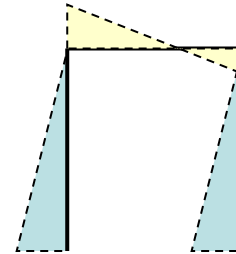
Ch. 1 – Introduction à la RDM

Ch. 2 – Equilibre global des structures

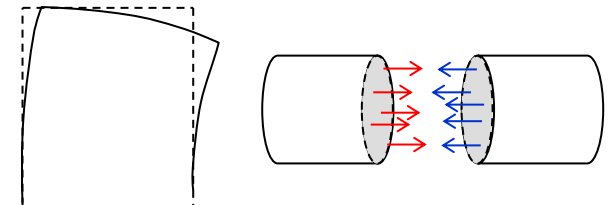


Ch. 3 – Définitions et hypothèses de la RDM

Ch. 4 – Torseur des efforts internes
(ou de cohésion)



Ch. 5 – Les sollicitations simples



Introduction

→ Etude des sollicitations élémentaires pour identifier leurs conséquences

Traction / compression

Flexion

Torsion

- Le principe de superposition permettra de traiter des sollicitations composées

→ Objectif : établir les relations effort interne → contrainte / déformation

Répartition et valeur des contraintes dans les sections droites.

Déformée des poutres

→ Sera abordée : première notion de comportement des matériaux « simples »

→ Principe :

Définir les déformations

Définir / établir les hypothèses sur les contraintes

Etablir les relation contraintes / déformation puis déplacements à partir des lois de comportement.

Définition

→ Une poutre est soumise à une sollicitation de traction/compression lorsque $\{\mathcal{T}_{\text{eff int}}\}_x$ a la forme :

$$\{\mathcal{T}_{\text{eff int}}\}_x = \left\{ \begin{array}{c} N \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

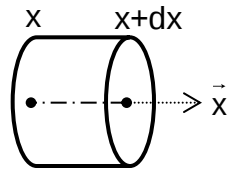
→ Remarques :

- $N > 0 \rightarrow$ traction
- $N < 0 \rightarrow$ compression
- Cas de poutres soumises à deux forces colinéaires, alignées et de sens opposés

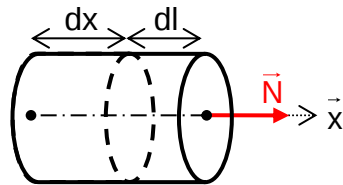


Déformation

→ On appelle déformation le rapport de la variation de longueur sur la longueur de référence :

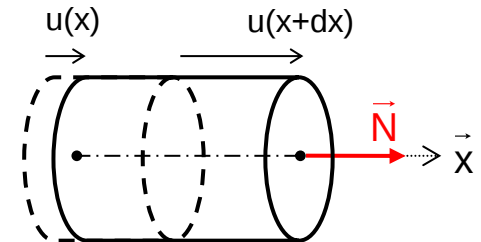


$$\epsilon_x(x) = \frac{dl}{dx}$$



→ Remarques :

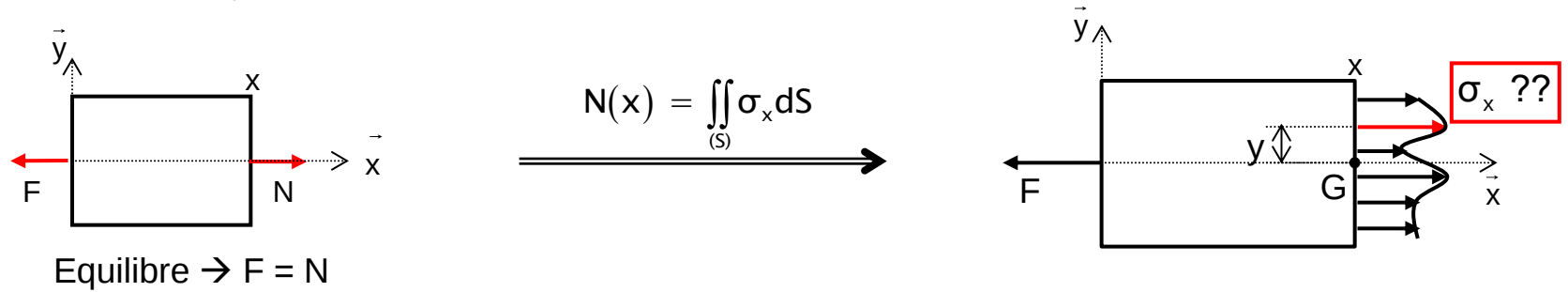
- Grandeur sans dimension
- On a aussi, de manière équivalente : $\epsilon_x(x) = \frac{du}{dx}$



Contrainte

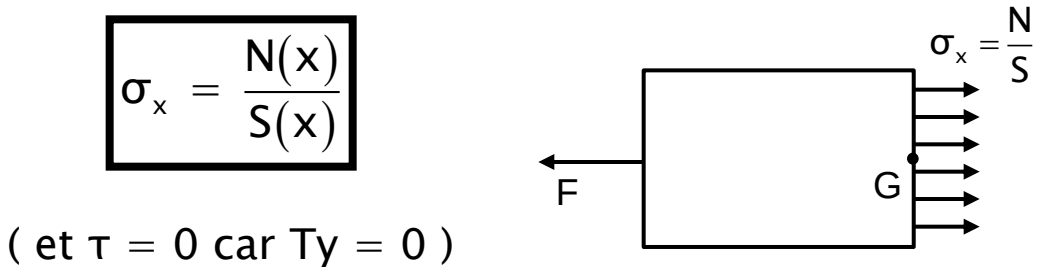
→ Hypothèses sur la répartition des contraintes

On isole un tronçon de poutre soumis à de la traction via une force F



Hypothèse (basée sur des résultats expérimentaux et sur l'hypothèse de linéarité contrainte/déformation) : $\sigma_x = c^{te}$

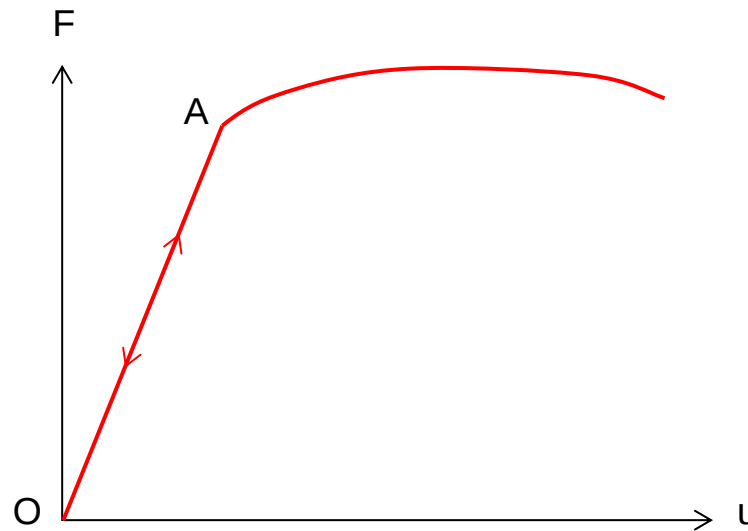
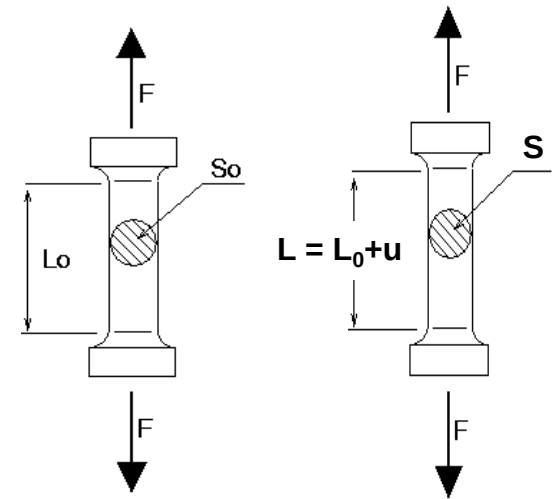
→ On retrouve donc l'état de contrainte de la poutre en traction :



Essai de traction

→ Principe de l'essai

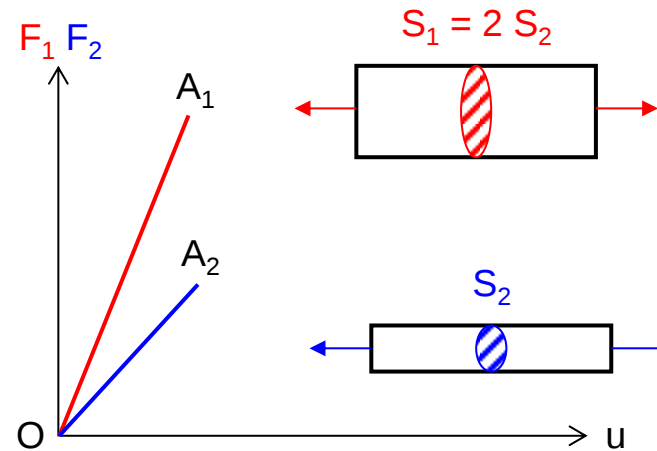
- Essai le plus classique
- Exercer sur une éprouvette de forme normalisée 2 forces colinéaires, alignées et de sens opposés
- Sont mesurés :
 - Le déplacement : u
 - La force exercée : F



Essai de traction

→ Exploitation de l'essai

Problématique :

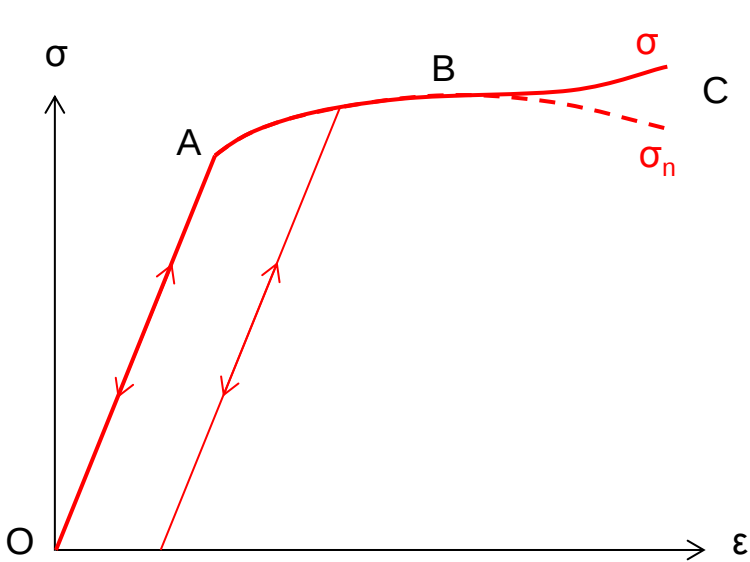


Courbes obtenues pour
un même matériau !
2 éprouvettes différentes

Essai de traction

→ Normalisation

Contrainte / Déformation !



Courbe caractéristique d'un matériau
Ici, matériau « classique » type acier

- Zone élastique
- Zone plastique
- Limite maximale R_m – striction
- Module d'Young E
- Limite élastique R_e
- Limite à la rupture R_y

 $\sigma = \frac{F}{S}$
 $\sigma_n = \frac{F}{S_0}$

Essai de traction, conclusion**→ Loi de Hooke (matériau élastique linéaire isotrope)**

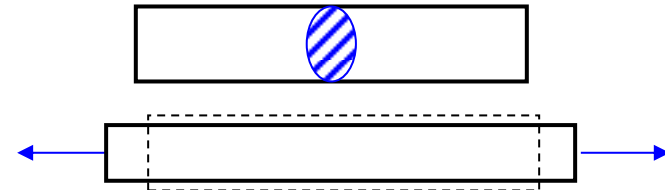
Dans la zone élastique, on peut écrire une relation linéaire entre contrainte et déformation :

$$\sigma = E \epsilon$$

E est le module d'Young, caractéristique du matériau
Unité SI : Pa

→ Autre constat expérimental :

Déformation longitudinale ϵ → Déformation transversale ϵ_t



La relation est linéaire

$$\epsilon_t = -\nu \epsilon$$

ν est le coefficient de Poisson, caractéristique du matériau
sans unité

Un matériau élastique linéaire isotrope est caractérisé par :

- Module d'Young E
- Coefficient de Poisson ν
- Limite d'élasticité définie par R_e (ou $R_{p0.2}$) : $\sigma < R_e$, élasticité ; $\sigma > R_e$, plasticité

→ Exemples...

Exemples de comportement

- ➔ Matériaux ductile/fragile
- ➔ Comportement élastique non linéaire
- ➔ Quelques ordre de grandeur :



Matériau	Module d'Young E (MPa)	Coefficient de Poisson (sans unité)	Limite à rupture R _y (MPa)
Acier	210 000	0.3	450 à 1600
Aluminium	70 000	0.33	180 à 600
Diamant	1 000 000	0.1	Rupture 4 000 à 10 000
Pin (sens des fibres)	17 000	0.45	100
Béton	20 000 à 50 000	0.2	20 à 40 (compression) 2 à 5 (traction)
Fémur	17 000		
Vertèbre lombaire	160		

Relation contrainte/déformation

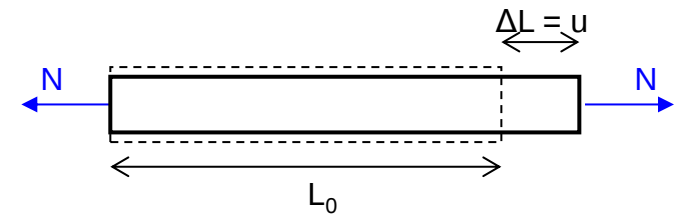
Dans une poutre en traction, on a établi : $\sigma_x = \frac{N(x)}{S(x)}$

→ A partir de la loi de Hooke (dans le domaine élastique) : $\sigma_x = E \epsilon_x$
il vient :

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N(x)}{E.S(x)}$$

→ Par intégration, on obtient :

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \Rightarrow \Delta L = u = \int du = \int \frac{N}{E.S} dx$$

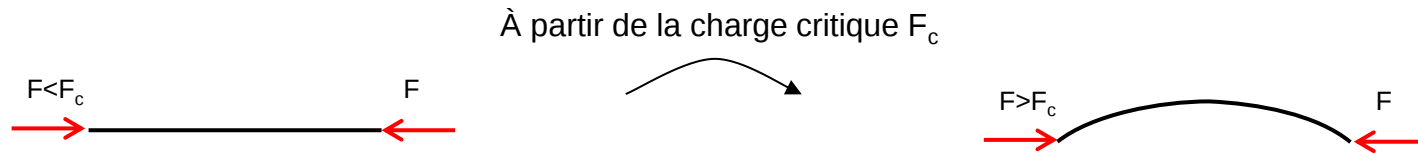


→ Si N , E , S sont constants (c'est le cas en traction sur une poutre « simple »),

$$\Delta L = \frac{N.L_0}{E.S}$$

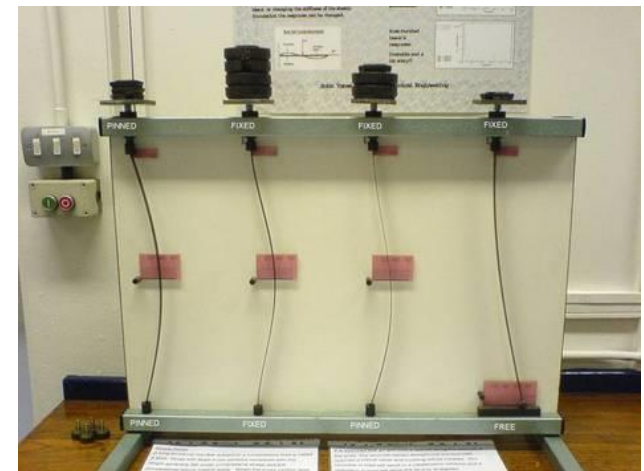
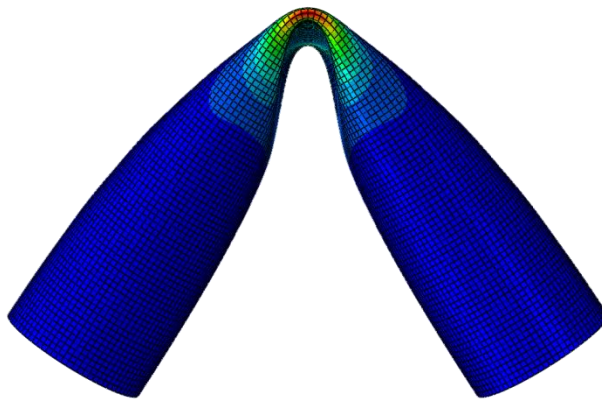
Remarque importante : flambement**Problème d'instabilité en compression**

Deux positions d'équilibre :



→ Attention aux poutres élancées... ce phénomène peut mener à la ruine !!

Il existe des théories spécifiques – comme la théorie d'Euler – car les lois de la RDM ne sont plus valables (hypothèses des petits déplacements non vérifiée)



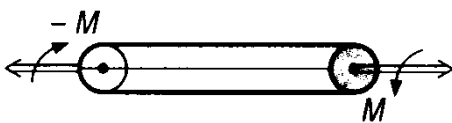
Définition

→ Définition

Une poutre est soumise à une sollicitation de torsion lorsque $\{T_{eff\ int}\}_x$ a la forme :

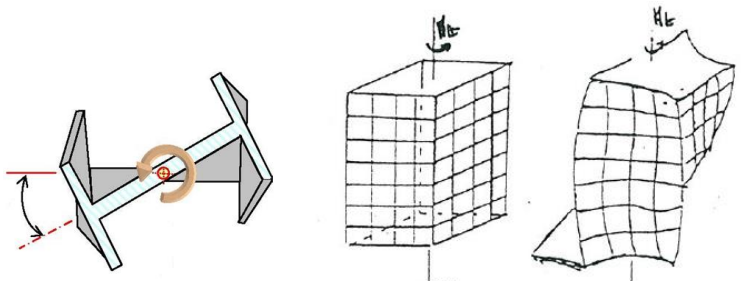
$$\{T_{eff\ int}\}_x = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ Mt\ \vec{x}_G \end{array} \right\}$$

Remarque : Cas de poutres soumise à un couple longitudinal
Exemple : arbre de transmission

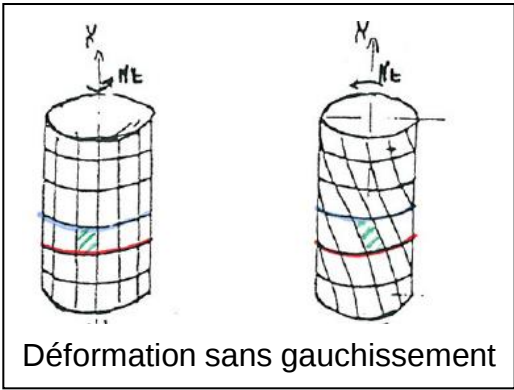


→ Restriction importante

Dans cette partie de cours, on se restreindra à l'étude des poutres à **section droite circulaire**
Sinon, les sections droites ne restent pas planes, elle se gauchissent.



Déformation avec gauchissement

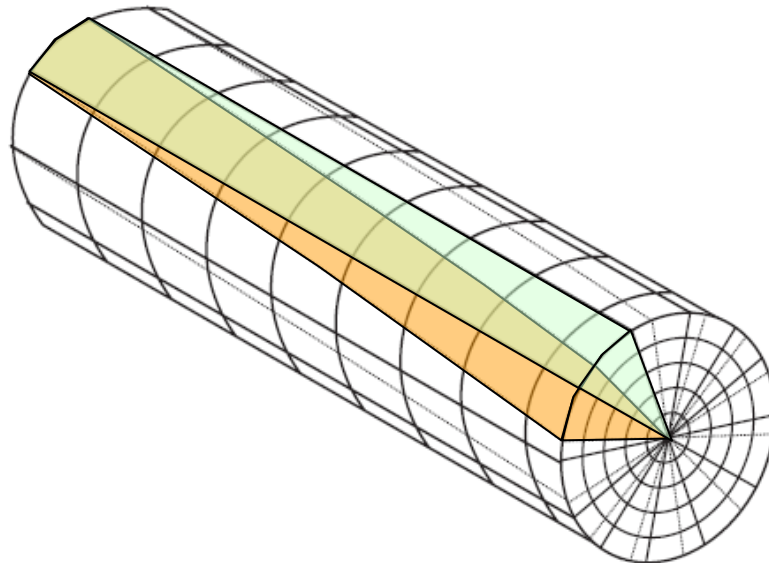


Déformation sans gauchissement

Déformation**→ Observations expérimentales**

Avec des sections droites circulaires ($\neq$ prismatiques) :

- Rotation en bloc des sections droites :
 - pas de gauchissement, les sections restent planes et normales à la ligne moyenne ;
 - pas de déformation longitudinale, les sections gardent des distances relatives constantes ;
- Angle variant linéairement le long de la poutre (si couple constant)



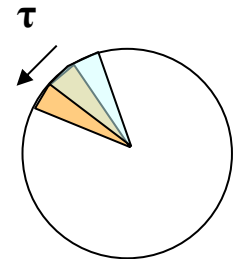
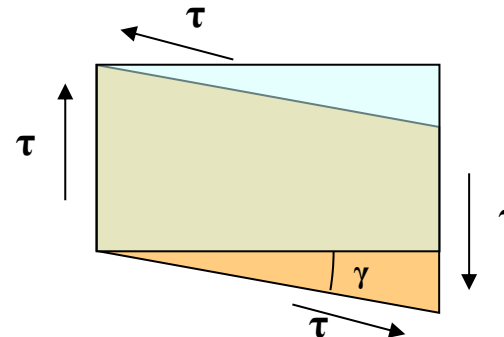
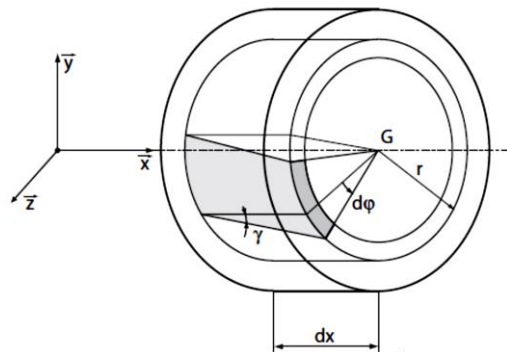
Déformation

→ Isolons un tronçon dx de poutre

$$\tan(\gamma) \simeq \gamma = \frac{r d\varphi}{dx}$$

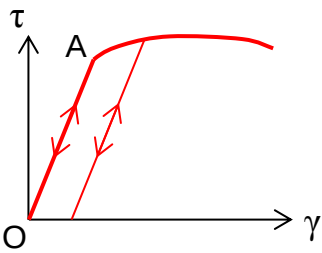
- φ est l'angle de rotation entre 2 sections.
- γ est la **distorsion** qui en découle sur une surface cylindrique.
 γ est une quantité locale dépendant du point dans la section.

γ est l'analogue de la déformation ϵ_x en traction,
 τ est l'analogue de la contrainte σ_x en traction.
 → On dit que la surface cylindrique est « **cisaillée** »



Essai de torsion

→ **Similarité forte avec un essai de traction**
Les courbes de cisaillement $\tau = f(\gamma)$ ont la même allure que les courbes de traction



→ En zone élastique, la loi de Hooke en cisaillement est :

$$\tau = G \gamma$$

G est le module de cisaillement, caractéristique du matériau
Unité : Pa

→ Remarques :

 G n'est pas un nouveau coefficient matériau. On peut montrer (cours d'élasticité) que :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

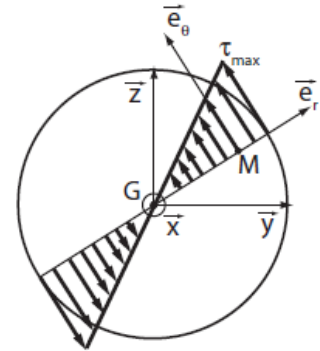
- De la même façon qu'en traction, il existe une limite de glissement au-delà de laquelle les déformations sont irréversibles

Matériau	Module de cisaillement G (MPa)	Limite de glissement R_{pg} (MPa)
Acier	80 000	250
Aluminium	26 000	200

Contrainte tangentielle de torsion

→ La relation contrainte / déformation est alors :

$$\tau = G \gamma = G.r.\frac{d\varphi}{dx}$$



Il y a variation linéaire (en fonction du rayon) des contraintes dans la section

On parle de contrainte de cisaillement « tangentielle » ou « orthoradiale ».

Relation contrainte / moment de torsion

→ Il a été établi (cf. ch. 4) : $Mt(x) = \iint_{(S)} (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) dS$, soit $Mt(x) = \iint_{(S)} \tau \cdot r dS$

→ On en déduit successivement :

$$Mt(x) = \iint_{(S)} G \cdot r \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot r dS = G \frac{d\varphi}{dx} \iint_{(S)} r^2 dS = G \frac{d\varphi}{dx} I_G(S)$$

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dx} = \frac{Mt(x)}{G \cdot I_G(S)}}$$

Rotation élémentaire d'un tronçon dx par rapport à l'axe (G, x)

$$\boxed{\tau = \frac{Mt(x)}{I_G(S)} \cdot r}$$

Contraintes de cisaillement orthoradiale due à Mt

$$\boxed{\text{avec } \iint_{(S)} r^2 dS = I_G(S)}$$

Moment quadratique polaire de la section droite S

→ Remarques

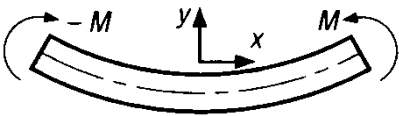
- Vous devez reconnaître une certaine familiarité avec $I_G(S)$ (cf. cours sur géométrie des masses)
- Pour une section circulaire pleine : $I_G(S) = \pi \frac{R^4}{2}$

Définition

→ Flexion pure :

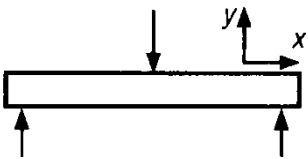
Une poutre est soumise à de la flexion pure lorsque $\{T_{eff\ int}\}_x$ a la forme :

$$\{T_{eff\ int}\}_x = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ Mfz\ \vec{z} \end{Bmatrix}_G$$



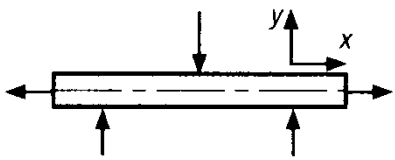
→ Flexion simple :

$$\{T_{eff\ int}\}_x = \begin{Bmatrix} Ty\ \vec{y} \\ Mfz\ \vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

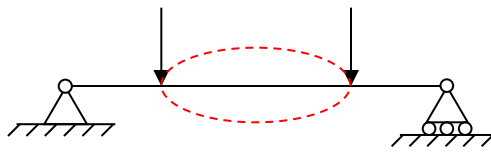


→ Flexion composée :

$$\{T_{eff\ int}\}_x = \begin{Bmatrix} N\ \vec{x} + Ty\ \vec{y} \\ Mfz\ \vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

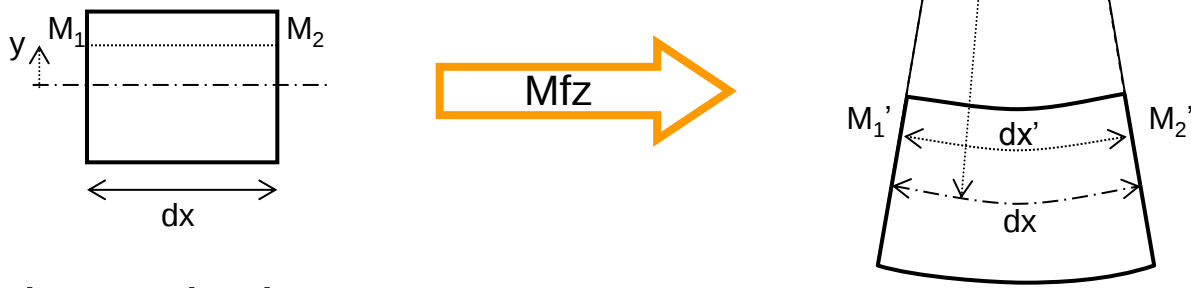


Exemple de zone en flexion pure :



Etude des déformations longitudinales

→ Etude d'un tronçon dx en flexion pure



→ Déformations longitudinales :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x(y) &= \frac{dx' - dx}{dx} \\ d\alpha &= \frac{dx}{r} = \frac{dx'}{r - y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \epsilon_x(y) = \frac{r - y}{r} - 1 = -\frac{y}{r}$$

De façon plus générale,
$$\epsilon_x(x,y) = -\frac{y}{r(x)} = -y \frac{d\alpha}{dx}$$

→ On retrouve l'intuition (et les constats expérimentaux) :

- Les fibres à $y > 0$ se raccourcissent, elles sont comprimées $\rightarrow \epsilon_x < 0$.
Les fibres à $y < 0$ s'allongent, elles sont tendues $\rightarrow \epsilon_x > 0$.
La fibre neutre ne subit pas de contraintes normales.
- Les variations de longueur entre fibres entraînent aussi des glissements $\rightarrow$ cisaillement

Etudes des contraintes normales

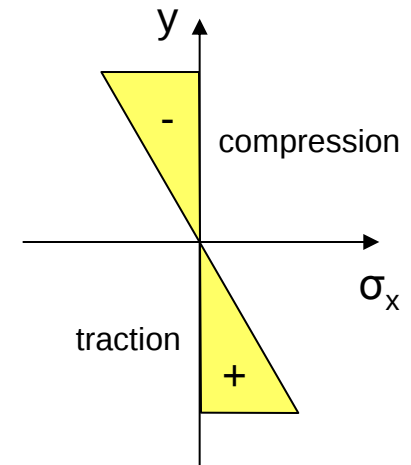
→ Expression de la contrainte normale en flexion pure :

Loi de Hooke

$$\Rightarrow \sigma_x = E \epsilon_x = -E \frac{y}{r}$$

Remarques :

- Répartition linéaire des contraintes normales dans la section droite
- Tension / compression de part et d'autre de la ligne moyenne



Etudes des contraintes normales

→ Relation avec le moment fléchissant :

On introduit les relations précédentes dans la relation générale $Mfz = f(\sigma_x)$

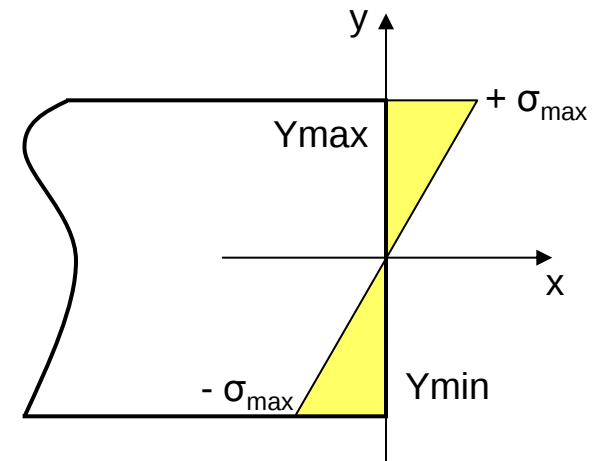
$$\begin{aligned} Mfz &= - \int_S y \cdot \sigma_x dS \\ &= \int_S y^2 \cdot E \frac{d\alpha}{dx} dS = E \frac{d\alpha}{dx} \int_S y^2 dS = - \frac{\sigma_x}{y} \int_S y^2 dS \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_x(x, y) = - \frac{Mfz(x) \cdot y}{\int_S y^2 dS} = - \frac{Mfz(x)}{I_{Gz}(S)} y$$

$$\text{avec } \iint_{(S)} y^2 dS = I_{Gz}(S) \quad \text{Moment quadratique de } S \text{ par rapport à } (G, z)$$

- Permet de déterminer les contraintes normales en tout point de la poutre, selon le moment fléchissant
- Répartition linéaire des contraintes normales
Les contraintes maximales seront situées à $Y_{\max}$ **ou** $Y_{\min}$
Si section symétrique, elles sont à $Y_{\max}$ **et** $Y_{\min}$:

$$\sigma_{x\max} = - \frac{Mfz}{I_{Gz}} y_{\max}$$



Etudes des contraintes normales

Remarques sur le moment quadratique des sections

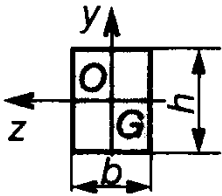
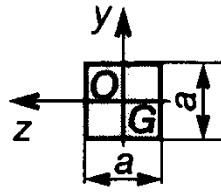
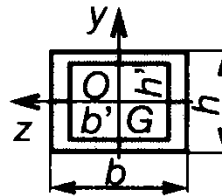
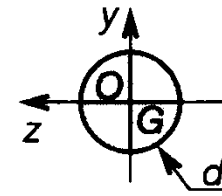
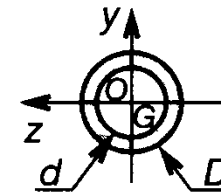
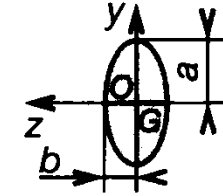
$$I_{Gz}(S) = \iint_{(S)} y^2 dS$$

- I_{Gz} grand $\rightarrow \sigma_x$ petit (cf. page précédente)
- Matière éloignée de la fibre neutre (ou ligne moyenne) $\rightarrow I_{Gz}$ est grand

→ Résistance en flexion ↔ Placer la matière loin de la fibre neutre !



Etudes des contraintes normales

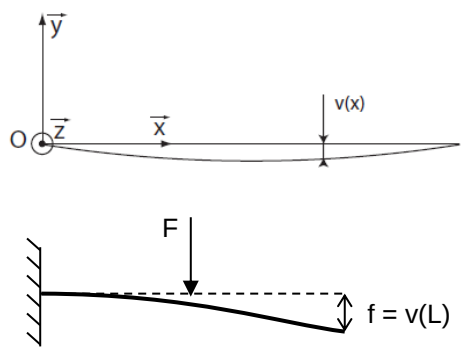
VALEURS DE MOMENTS QUADRATIQUES PARTICULIERS						
SECTIONS PRÉSENTANT UNE SYMÉTRIE CENTRALE						
Sections (S) Caractéristiques						
I_{Gy}	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{hb^3 - h'b'^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$0,784 ab^3$
I_{Gz}	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{bh^3 - b'h'^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$0,784 a^3 b$
$I_G = I_S$	$\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$	$\frac{a^4}{6}$	$I_{Gy} + I_{Gz}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{4}ab(a^2 + b^2)$
Module de flexion * μ_{Gy}	$\frac{hb^2}{6}$	$\frac{a^3}{3}$	$\frac{bh^3 - b'h'^3}{6b}$	$\frac{\pi d^3}{16}$	$\frac{\pi}{16D}(D^4 - d^4)$	$0,784 ab^2$
Module de flexion * μ_{Gz}	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{a^3}{3}$	$\frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$	$\frac{\pi d^3}{16}$	$\frac{\pi}{16D}(D^4 - d^4)$	$0,784 ba^2$

Etude de la déformée

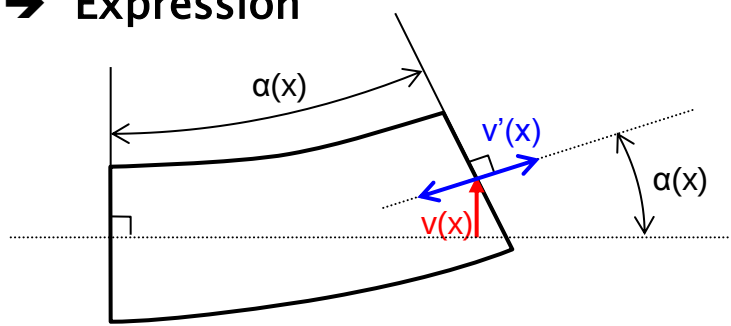
→ Sous les actions de flexion, la ligne moyenne se déforme

On appelle **déformée**, l'équation $v(x)$ de la courbe de la ligne moyenne

La valeur de la déformée en un point est appelée **flèche** :



→ Expression



$v'(x) = \tan(\alpha)$ HPD $\Rightarrow v'(x) \approx \alpha(x)$

Par suite, il vient
$$v''(x) = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{Mfz(x)}{E.I_{Gz}(S)}$$
 (Equation de la déformée)

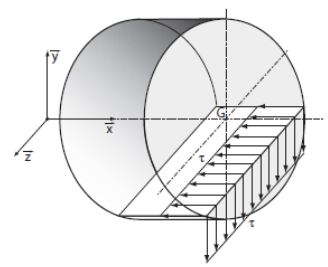
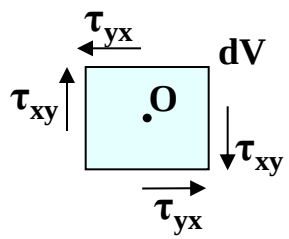
Par intégration, et avec les conditions aux limites, on obtient la déformée $v(x)$.

Contraintes tangentielles (liées à Ty)

→ Principe de réciprocité

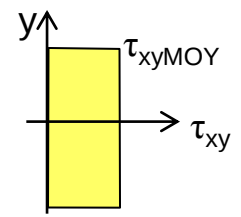
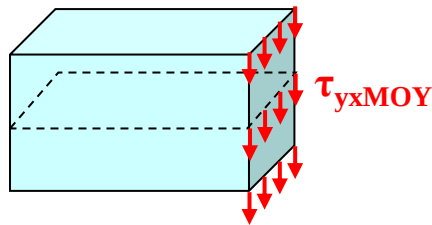
Equilibre (PFS) du volume élémentaire dV → $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

Cisaillement transversal ↔ cisaillement longitudinal



→ Contraintes de cisaillement moyennes

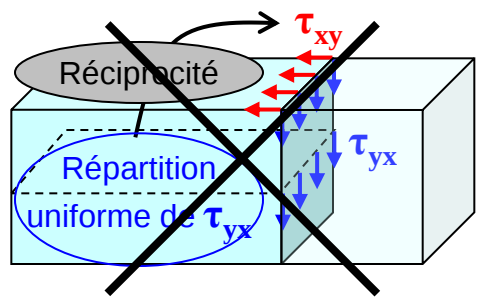
$$T_y(x) = \iint_{(S)} \tau_{xy} dS \Rightarrow \tau_{xyMOY} = \frac{T_y(x)}{S}$$



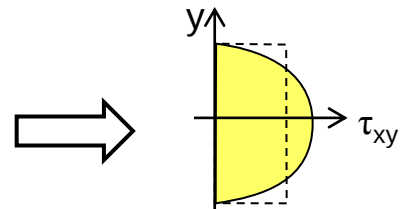
Répartition uniforme de τ_{yx}

→ En réalité...

La répartition des τ n'est pas uniforme !
Preuve : cela conduirait à des aberrations :



Répartition sur les faces libres impossible



Répartition réelle de τ_{yx}

Contraintes tangentielles (liées à Ty)

→ Valeur des contraintes tangentielles
Isolons une portion de poutre...

- Rappel des AME au tronçon :

$$\{\mathcal{T}_{\text{eff int}}\}_x = \begin{Bmatrix} -Ty \vec{y} \\ -Mfz \vec{z} \end{Bmatrix}_G \text{ et } \{\mathcal{T}_{\text{eff int}}\}_{x+dx} = \begin{Bmatrix} (Ty + dTy) \vec{y} \\ (Mfz + dMfz) \vec{z} \end{Bmatrix}_{G'}$$

- Contraintes sur la portion orangée :

Sur S_1 : $\sigma_1 = \frac{Mfz}{I_{Gz}}y$ et $\tau_1(y)$

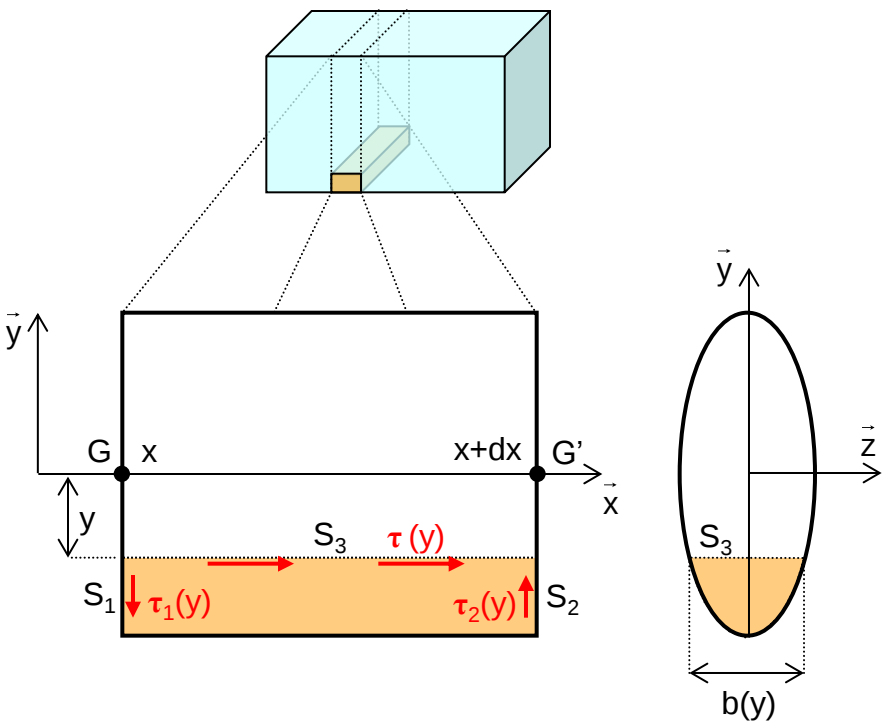
Sur S_2 : $\sigma_2 = -\frac{Mfz + dMfz}{I_{Gz}}y$ et $-\tau_2(y)$

Sur S_3 : $\tau(y)$

- PFS sur cette portion (en projection sur x) :

...

$$|\tau(y)| = \frac{Ty \cdot A(y)}{I_{Gz} \cdot b(y)} \text{ où } A(y) = \int_{S_1} y dS$$



Contraintes tangentielles (liées à T_y)**→ Remarques**

- $A(y)$ s'appelle le moment statique de S_1 par rapport à l'axe z .
- Cette expression permet d'avoir une meilleure approximation de τ dans la section droite. En particulier, on retrouve une contrainte nulle sur les faces supérieures et inférieures.

→ Ordre de grandeur contraintes normales / contraintes tangentielles

- On peut montrer que :

$$\frac{o(\tau)}{o(\sigma)} = \frac{a}{l}$$

- Le rapport d'ordre de grandeur des contraintes tangentielle/normale correspond à l'élancement de la poutre a/l .
- Compte tenu de l'hypothèse sur l'élancement, seules les contraintes normales sont dimensionnantes en flexion.

Contraintes dimensionnantes

Les sollicitations simples considérées mènent à des états de contraintes différents.

Ainsi, la contrainte dimensionnante (celle qui va limiter la capacité de la structure) n'est pas toujours de même nature :

→ Traction / compression

- Contraintes normales

→ Torsion

- Contraintes tangentielles

→ Flexion

- Contraintes normales

Critères de dimensionnement

→ D'une manière générale, les critères de dimensionnement sont de la forme :

$$\text{coefficient de sécurité } s \times \text{variable observée} \leq \text{limite admissible}$$

→ Critères de résistance

Il s'agit de critères portant sur les contraintes maximales admissibles (point de vue sécurité)

$$\forall y, s \cdot \sigma_x(y) \leq R_p$$

$$\forall y, s \cdot \tau(y) \leq R_{pg}$$

→ Critères de service

Il s'agit de critères portant sur les déplacements maximaux autorisés (point de vue de l'utilisateur)

$$\forall \text{ point } N, s' \cdot u(N) \leq u_{\text{lim}}$$

$$\forall N, s' \cdot \varphi(N) \leq \varphi_{\text{lim}}$$

$$\forall N, s' \cdot v(N) \leq v_{\text{lim}}$$