

Résistance des matériaux

Cours et exercices corrigés

La Résistance des matériaux *RDM* est une partie de la mécanique des solides. Elle s'intéresse à l'étude, de manière théorique, de la réponse mécanique des structures soumises à des sollicitations extérieures (traction, compression, cisaillement, flexion et torsion). Elle permet d'évaluer les efforts internes, les contraintes (normale et tangentielle) ainsi que les déplacements des structures.

Cet ouvrage de *RDM* présente des méthodes de calcul, des formules pratiques illustrant des cas réels de dimensionnement des structures. Les nombreuses illustrations de l'ouvrage montrent en détail les éléments de base à prendre en compte lors du dimensionnement d'une structure quelconque en Génie Civil. Les méthodes analytiques les plus utilisées en calcul des systèmes isostatique et hyperstatique sont développées en détail.

À qui s'adresse cet ouvrage ?

- Aux élèves des sections post-baccalauréat de Génie Civil
- DUT : Génie Civil, Génie Mécanique
- BTS : Bâtiment, Travaux publics
- Licence et Maîtrise de Génie Civil
- Aux premières années élèves-ingénieurs
- Aux candidats à la préparation des concours du CAPET, de l'Agrégation de Génie Civil et de l'Agrégation de Génie Mécanique

Sommaire

| | |
|--|----|
| Notations principales | 12 |
| Chapitre 1. Généralités sur la résistance des matériaux | 15 |
| 1.1. Objectifs de la résistance des matériaux RDM | 15 |
| 1.2. Notion de poutre | 15 |
| 1.3. Exemples de sollicitations | 16 |
| 1.3.1. <i>Traction/Compression</i> | 16 |
| 1.3.2. <i>Cisaillement</i> | 17 |
| 1.3.3. <i>Flexion</i> | 17 |
| 1.3.4. <i>Torsion</i> | 18 |

| | |
|--|----|
| 1.4. Conditions aux limites - Fixation des corps | 19 |
| 1.4.1. Notion d'appui | 19 |
| 1.4.2. Appui simple - Appui glissant | 19 |
| 1.4.3. Appui double - Appui articulé | 19 |
| 1.4.4. Appui triple - Encastrement | 20 |
| 1.5. Équilibre d'un corps | 21 |
| 1.5.1. Équations d'équilibre. Principe fondamental de la statique PFS | 21 |
| 1.5.2. Différents systèmes mécaniques | 21 |
| 1.5.2.1. <i>Système astatique - Mécanisme</i> | 21 |
| 1.5.2.2. <i>Système isostatique</i> | 22 |
| 1.5.2.3. <i>Système hyperstatique</i> | 22 |
| 1.5.3. Application | 23 |

| | |
|--|----|
| 1.6. Efforts internes | 24 |
| 1.6.1. Principe de la coupe - Éléments de réduction | 24 |
| 1.6.2. Conventions de signe des efforts internes | 26 |
| 1.6.2.1. Effort normal N_x | 26 |
| 1.6.2.2. Effort tranchant T_y | 26 |
| 1.6.2.3. Moment fléchissant M_z | 27 |
| 1.6.3. Relations entre efforts internes | 27 |
| 1.6.4. Diagrammes des efforts internes | 29 |
| 1.6.5. Application | 30 |
| 1.7. Équation de la déformée | 35 |
| 1.7.1. Calcul de la flèche et de la rotation | 35 |
| 1.7.2. Application | 35 |
| | |
| Chapitre 2. Caractéristiques géométriques des sections planes | 37 |
| Introduction | 37 |
| 2.1. Centre de gravité | 37 |
| 2.2. Moment statique | 38 |
| 2.3. Application | 39 |
| 2.4. Moment d'inertie | 40 |

| | |
|--|-----------|
| 2.5. Théorème des axes parallèles - Théorème de Huyghens..... | 41 |
| 2.6. Moment d'inertie et produit d'inertie - Cas de translation d'axes | 42 |
| 2.7. Moment d'inertie et produit d'inertie - Cas de rotation d'axes..... | 43 |
| 2.8. Application..... | 44 |
| | |
| Chapitre 3. Sollicitations simples | 48 |
| Généralités | 48 |
| | |
| 3.1. Traction pure - Compression pure | 48 |
| 3.1.1. Effet de l'effort normal | 50 |
| 3.1.1.1. <i>Contrainte normale</i> | 50 |
| 3.1.1.2. <i>Déformation et déplacement</i> | 51 |
| 3.1.2. Condition de résistance | 52 |
| 3.1.3. Application | 52 |
| | |
| 3.2. Cisaillement pur | 55 |

| | |
|---|----|
| 3.2.1. Effet de l'effort tranchant | 55 |
| 3.2.1.1. <i>Contrainte de cisaillement</i> | 55 |
| 3.2.1.2. <i>Déformation de cisaillement</i> | 56 |
| 3.2.2. Condition de résistance | 57 |
| 3.2.3. Application | 58 |
| 3.3. Flexion pure | 59 |
| 3.3.1. Effet du moment fléchissant | 60 |
| 3.3.1.1. <i>Contrainte normale</i> | 60 |
| 3.3.1.2. <i>Déformation normale</i> | 62 |
| 3.3.2. Condition de résistance | 63 |
| 3.3.3. Application | 64 |
| 3.4. Torsion pure | 65 |
| 3.4.1. Torsion d'une barre circulaire | 66 |
| 3.4.1.1. <i>Observations expérimentales</i> | 66 |
| 3.4.1.2. <i>Effet du moment de torsion</i> | 67 |
| 3.4.2. Torsion d'une barre rectangulaire | 69 |
| 3.4.3. Condition de résistance | 71 |
| 3.4.4. Application | 71 |

| | |
|---|----|
| Chapitre 4. Sollicitations composées | 73 |
| Généralités | 73 |
| 4.1. Flexion plane | 74 |
| 4.1.1. Contrainte normale | 75 |
| 4.1.2. Contrainte de cisaillement | 75 |
| 4.1.3. Application | 77 |
| 4.1.4. Calcul de la résistance | 78 |
| 4.1.5. Calcul de la rigidité | 79 |
| 4.1.6. Application | 79 |
| 4.2. Flexion déviée | 82 |
| 4.2.1. Contrainte normale | 83 |
| 4.2.2. Contrainte de cisaillement | 84 |
| 4.2.3. Calcul de la résistance | 84 |
| 4.2.4. Calcul de la rigidité | 85 |
| 4.2.5. Application | 86 |

| | |
|---|-----|
| 4.3. Flexion composée | 88 |
| 4.3.1. Contrainte normale | 89 |
| 4.3.2. Contrainte de cisaillement | 90 |
| 4.3.3. Calcul de la résistance | 90 |
| 4.3.4. Calcul de la rigidité | 90 |
| 4.3.5. Application | 91 |
| 4.4. Flexion-torsion | 95 |
| 4.4.1. Contrainte normale | 95 |
| 4.4.2. Contrainte de cisaillement | 96 |
| 4.4.3. Calcul de la résistance | 96 |
| 4.4.4. Application | 97 |
| | |
| Chapitre 5. Systèmes isostatiques à treillis | 99 |
| Généralités | 99 |
| 5.1. Système à treillis | 100 |
| 5.1.1. Détermination du degré d'hyperstaticité | 100 |
| 5.1.2. Exemple | 101 |
| 5.2. Calcul des efforts normaux - Méthode des sections | 102 |

| | |
|---|-----|
| 5.3. Déplacement d'un système à treillis | 103 |
| 5.4. Application - Étude d'une ferme | 103 |
| | |
| Chapitre 6. Systèmes hyperstatiques | 106 |
| Généralités | 106 |
| | |
| 6.1. Poutres continues | 106 |
| 6.1.1. <i>Méthode des trois moments - Formules de Clapeyron</i> | 106 |
| 6.1.2. <i>Relations entre efforts internes et moments aux appuis</i> | 108 |
| 6.1.3. <i>Application - Étude d'une poutre reposant sur quatre appuis</i> | 109 |
| | |
| 6.2. Méthode des déplacements | 114 |
| 6.2.1. <i>Principe de la méthode</i> | 114 |
| 6.2.2. <i>Barres soumises à des charges</i> | 116 |
| 6.2.3. <i>Application - Étude d'un portique</i> | 120 |
| | |
| Bibliographie | 125 |

Chapitre 1

Généralités sur la résistance des matériaux

1.1. Objectifs de la résistance des matériaux RDM

La RDM est une partie de la mécanique des solides déformables. Elle s'intéresse à l'étude, de manière théorique, de la réponse mécanique des structures soumises à des sollicitations extérieures (traction, compression, cisaillement, flexion et torsion). Elle permet d'évaluer les efforts internes, les contraintes ainsi que les déplacements et les rotations des structures.

1.2. Notion de poutre

Les notions abordées dans ce chapitre ne sont valables que pour des solides ayant une forme de poutre (figure 1.1.), c'est-à-dire un solide pour lequel :

- il existe une ligne moyenne l_m , continue, passant par les centres de gravité des sections du solide ;
- la longueur L est supérieure ou égale à 5 fois le diamètre D ;
- il n'existe pas de défauts de variation de section (trous, épaulements) ;
- le solide admet un seul et même plan de symétrie pour le chargement et la géométrie.

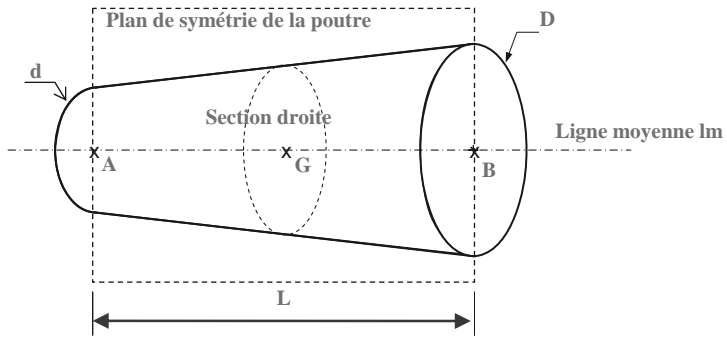


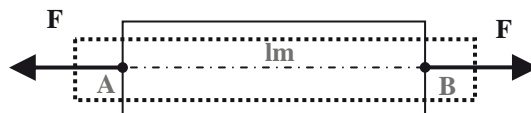
Figure 1.1. Élément de poutre

1.3. Exemples de sollicitations

Ces exemples de sollicitations seront traités, en détail, dans le *chapitre 3*.

1.3.1. Traction/Compression

Une poutre est sollicitée en **traction** (ou en **compression**) lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux forces égales et opposées, portées par la ligne moyenne lm .



(a). Traction (allongement)



(b). Compression (rétrécissement)

Figure 1.2. Traction/compression : (a). Traction, (b). Compression

1.3.2. Cisaillement

La direction du chargement est perpendiculaire à la ligne moyenne lm de la poutre, figure 1.3.

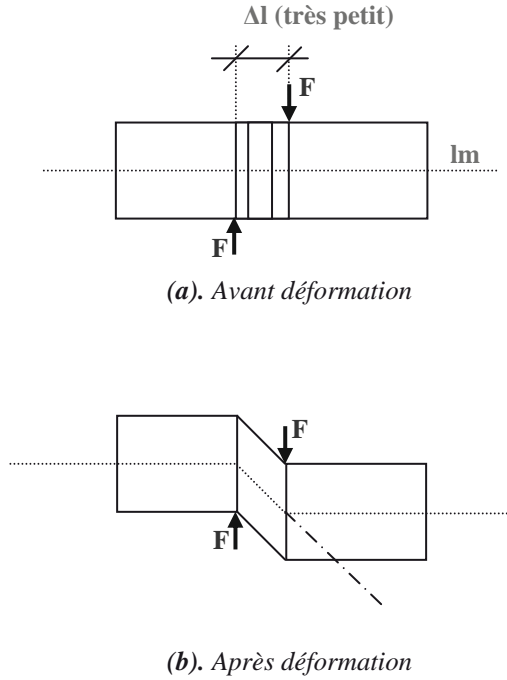
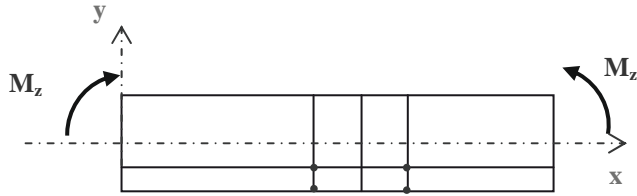


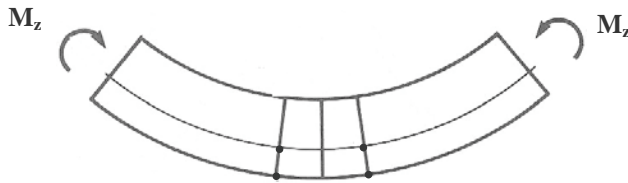
Figure 1.3. Cisaillement pur : (a). Avant déformation, (b). Après déformation

1.3.3. Flexion

Le chargement est un moment autour l'axe Z . Le moment M_z est appelé **moment fléchissant**.



(a). Avant déformation



(b). Après déformation

Figure 1.4. Flexion pure : (a). Avant déformation, (b). Après déformation

1.3.4. Torsion

Une poutre est sollicitée en *torsion* lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux moments de torsion M_t *égaux* et *opposés*, portés par la ligne moyenne lm .

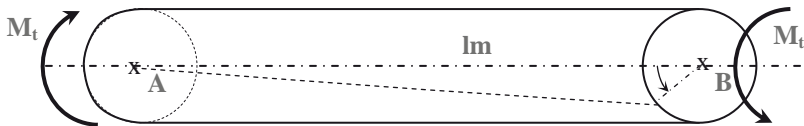


Figure 1.5. Torsion d'une barre circulaire

1.4. Conditions aux limites - Fixation des corps

1.4.1. Notion d'appui

Un appui est un élément extérieur en contact avec la structure étudiée et la réaction d'appui dépend de la nature de la liaison appui-structure.

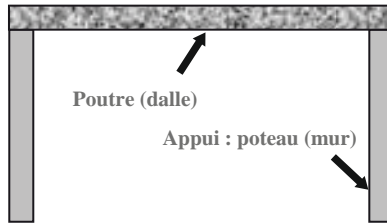


Figure 1.6. Notion d'appui

1.4.2. Appui simple - Appui glissant

Un contact ponctuel avec la structure (figure 1.7.) :

- une inconnue (réaction verticale) ;
- deux degrés de liberté dll (un déplacement suivant x et une rotation).



Figure 1.7. Appui simple

1.4.3. Appui double - Appui articulé

- Deux inconnues (réactions verticale et horizontale) ;
- un dll (une rotation).

3.1.2. Condition de résistance

La condition de résistance s'écrit :

$$\sigma_{\max} = \frac{N_x}{A} \leq \bar{\sigma}_a = \frac{\sigma_e}{s} \quad [3.8.]$$

σ_{\max} : contrainte maximale en MPa ;

$\bar{\sigma}_a$: résistance admissible du matériau en MPa ;

σ_e : résistance élastique du matériau en MPa ;

s : coefficient de sécurité.

3.1.3. Application

Calculer les contraintes et les allongements subis par chacune des barres supportant le corps rigide de section constante et de masse de 3 000 kg.

Les caractéristiques des barres sont :

- Barre (1) : $E_1 = 70\,000$ MPa ; $A_1 = 240$ mm²
- Barre (2) : $E_2 = 210\,000$ MPa ; $A_2 = 180$ mm²

Les barres (1) et (2) sont soumises à une traction sous l'effet du poids du bloc.

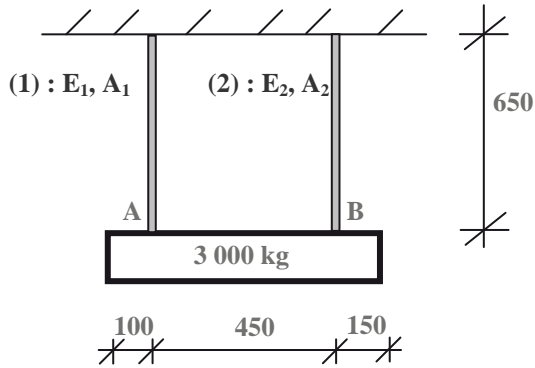


Figure 3.4. Bloc suspendu. Dimensions en mm

On isole le bloc des deux barres (1) et (2).

- On remplace les coupures par des efforts internes (et les efforts extérieurs).
- On vérifie l'équilibre (PFS), on détermine les inconnues du problème.

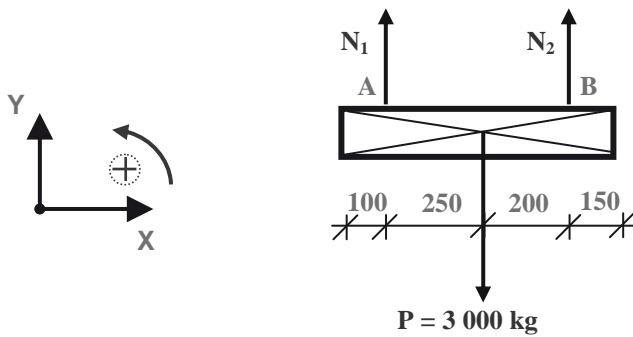


Figure 3.5. Modèle mécanique. Dimensions en mm

Équations d'équilibre :

$$\sum M_{/A} = -P \times 250 + N_2 \times 450 = 0 \Rightarrow N_2 = 1666,67 \text{ kg}$$

$$\sum M_{/B} = P \times 200 - N_1 \times 450 = 0 \Rightarrow N_1 = 1333,33 \text{ kg}$$

$$\text{Vérifiant : } N_1 + N_2 = P \Rightarrow 1333,33 + 1666,67 = 3000 \text{ kg}$$

Contraintes dans les barres :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{13333,3}{240} = 55,55 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{16666,7}{180} = 92,59 \text{ MPa}$$

Allongements dans les barres :

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{13333,3 \times 650}{70000 \times 240} = 0,52 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{16666,7 \times 650}{210000 \times 180} = 0,28 \text{ mm}$$