

# Mécanique des fluides

par *Emmanuel Plaut* à Mines Nancy

Version du 13 mai 2016

Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Bases de la modélisation en mécanique des fluides</b>	<b>9</b>
1.1 Modèle du milieu continu fluide, liquide ou gaz	9
1.2 Cinématique	10
1.2.1 Descriptions du mouvement	10
1.2.2 Dérivées particulières	10
1.2.3 Tenseur des taux de déformation	11
1.2.4 Transport d'un volume infinitésimal en description eulerienne	11
1.2.5 Transport d'une quantité extensive définie par une densité volumique	11
1.3 Bilan de masse	11
1.3.1 Conservation de la masse - Débits - Vitesse débitante	11
1.3.2 Transport d'une quantité extensive définie par une densité massique	12
1.4 Bilan de quantité de mouvement	12
1.4.1 Expression cinématique du taux d'évolution de la quantité de mouvement	12
1.4.2 Bilan dynamique - Tenseur des contraintes	12
1.5 Comportement des fluides visqueux - Équation de Navier-Stokes	13
1.5.1 Cas de fluides compressibles	13
1.5.2 Cas de fluides incompressibles	15
1.6 Compléments : origine et estimation physique de la viscosité	16
1.6.1 Cas de liquides	16
1.6.2 Cas de gaz	17
1.7 Bilans d'énergie cinétique	18
1.8 Application : pertes de charge dans un écoulement ouvert	18
1.9 Bilans d'énergie interne	19
1.10 Exercices, problème et compléments	22
Ex. 1.1 : Estimation de la poussée d'un moteur fusée	22
Ex. 1.2 : Propulsion de fusées ou vaisseaux spatiaux idéaux	23
Ex. 1.3 : Estimation des poussées de turboréacteurs simple et double flux	24
Ex. 1.4 : Écoulement laminaire dans un tuyau	26

Pb. 1.1 : Étude d'écoulements de Couette cylindrique - Applications . . . . .	27
Comp. 1.1 : Sur la première instabilité de l'écoulement de Couette cylindrique . . . . .	29
Comp. 1.2 : Sur les paliers réellement utilisés en centrales . . . . .	30
<b>2 Conditions à une interface entre fluides - Tension superficielle</b>	<b>31</b>
2.1 Conditions de nature cinématique . . . . .	31
2.2 Forces linéiques de tension superficielle - Interprétation . . . . .	32
2.3 Condition dynamique à une interface . . . . .	33
2.3.1 Cas d'une interface plane . . . . .	33
2.3.2 Cas d'une interface courbe bidimensionnelle . . . . .	34
2.3.3 Cas d'une interface courbe tridimensionnelle . . . . .	35
2.4 Problème faisant intervenir les conditions d'interface . . . . .	37
Pb. 2.1 : Lubrification d'un écoulement en tuyau de fluide très visqueux . . . . .	37
<b>3 Modèle du fluide parfait - Applications</b>	<b>41</b>
3.1 Généralités . . . . .	41
3.1.1 Le fluide parfait : un modèle très simplifié . . . . .	41
3.1.2 Équation d'Euler . . . . .	41
3.1.3 Premier théorème de Bernoulli . . . . .	42
3.1.4 Équation de la vortacité - Dynamique de la vortacité . . . . .	42
3.2 Écoulements potentiels en général . . . . .	42
3.2.1 Définition . . . . .	42
3.2.2 Second théorème de Bernoulli . . . . .	43
3.2.3 Écoulements bidimensionnels : fonction courant . . . . .	43
3.3 Ondes d'interface avec tension superficielle - Introduction aux instabilités . . . . .	44
3.3.1 Principes de l'analyse linéaire de stabilité . . . . .	44
3.3.2 Analyse des ondes d'interface . . . . .	46
3.4 Effets de compressibilité dans les fluides : ondes sonores . . . . .	47
3.4.1 Théorie générale en milieu fluide « infini » . . . . .	47
3.4.2 Cas des liquides . . . . .	48
3.4.3 Cas des gaz parfaits . . . . .	48
3.4.4 Critère d'effets de compressibilité dans un écoulement macroscopique . . . . .	49
3.5 Écoulements potentiels 2D par analyse complexe . . . . .	50
3.5.1 Description par un potentiel complexe . . . . .	50
3.5.2 Premier exemple simple : puits et source ponctuels . . . . .	51
3.5.3 Deuxième exemple simple : tourbillon ponctuel . . . . .	51
3.5.4 Un exemple plus compliqué : écoulement autour d'un disque . . . . .	52
3.6 Écoulements potentiels 2D par analyse complexe - transformation conforme . . . . .	52
3.6.1 Généralités . . . . .	52
3.6.2 Transport des lignes de courant . . . . .	53
3.6.3 Transport du vecteur vitesse . . . . .	53
3.6.4 Transport de la circulation et du débit réduit . . . . .	54

3.6.5	Transport d'une force appliquée à un obstacle . . . . .	54
3.7	Problème faisant le lien fluides parfaits - fluides visqueux . . . . .	55
	Pb. 3.1 : Écoulements plans produits par un gradient de pression oscillant . . . . .	55
3.8	Exercice et problèmes sur interfaces - tension superficielle - instabilités . . . . .	56
	Ex. 3.1 : Modes de ballonnement d'une cuve rectangulaire . . . . .	56
	Pb. 3.2 : Étude détaillée d'ondes de surface en eau profonde . . . . .	57
	Pb. 3.3 : Instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor . . . . .	59
	Comp. 3.1 : On the Rayleigh-Taylor Instability . . . . .	59
	Comp. 3.2 : Sur les instabilités de Kelvin-Helmholtz . . . . .	61
	Pb. 3.4 : Rôle de la tension superficielle dans diverses instabilités . . . . .	62
	Pb. 3.5 : Étude de la stabilité d'un fluide pesant continûment stratifié . . . . .	65
	Pb. 3.6 : Modélisation de phénomènes en lien avec la cavitation . . . . .	68
	Pb. 3.7 : Étude de quelques phénomènes dans une centrale hydraulique . . . . .	72
3.9	Exercice faisant le lien ondes d'interface - ondes sonores . . . . .	74
	Ex. 3.2 : Analogie entre ondes d'interface et ondes acoustiques . . . . .	74
3.10	Exercices et problème sur les ondes sonores . . . . .	75
	Ex. 3.3 : Étude détaillée des ondes sonores planes en milieu infini . . . . .	75
	Ex. 3.4 : Étude sommaire de l'effet coup de bélier dans une conduite d'eau . . . . .	76
	Pb. 3.8 : Effets de la viscosité sur des ondes de type sonore . . . . .	77
3.11	Exercice et problèmes sur l'aérodynamique potentielle . . . . .	79
	Ex. 3.5 : Étude locale du champ de vitesse d'un tourbillon potentiel . . . . .	79
	Pb. 3.9 : Écoulements d'un fluide parfait autour d'un disque avec circulation . . . . .	79
	Pb. 3.10 : Modèles d'écoulements autour d'une aile d'avion à section elliptique . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Écoulements de Stokes</b> . . . . .	<b>85</b>
4.1	Définition . . . . .	85
4.2	Propriétés . . . . .	86
	4.2.1 Linéarité . . . . .	86
	4.2.2 Réversibilité cinématique . . . . .	86
	4.2.3 Unicité de la solution . . . . .	86
	4.2.4 Minimum de dissipation . . . . .	87
4.3	Remarques de conclusion . . . . .	88
4.4	Exercice et problèmes . . . . .	88
	Ex. 4.1 : Étude d'écoulements de Couette diphasiques . . . . .	88
	Pb. 4.1 : Écoulement de Stokes autour d'une sphère ; application : sédimentation . . . . .	89
	Pb. 4.2 : Écoulements de Stokes dans et autour d'une inclusion sphérique . . . . .	93
	Pb. 4.3 : Étude d'un fluide généralement non newtonien par rhéomètre plan-cône . . . . .	96
4.5	Problème : écoulement faiblement inertiel . . . . .	98
	Pb. 4.4 : Étude de l'écoulement dans une cavité rotor-stator étendue . . . . .	98

<b>5 Couches limites</b>	<b>103</b>
5.1 Introduction - Équations de Prandtl	103
5.2 Couche limite de Blasius au dessus d'une plaque plane	104
5.3 Problèmes	107
Pb. 5.1 : Étude de la couche limite de Blasius	107
Pb. 5.2 : Calcul de la fonction de Blasius à l'aide d'une méthode de tir	110
Pb. 5.3 : Couches limites : généralités, couches limites aspirée et standard	112
Pb. 5.4 : Étude des couches limites de Falkner-Skan	114
<b>6 Écoulements turbulents</b>	<b>121</b>
6.1 Décomposition en champs moyens et fluctuations	122
6.2 Échelles caractéristiques de la turbulence et cascade de Kolmogorov	123
6.3 Théorie de Kolmogorov : corrélations et spectres	126
6.3.1 Principales hypothèses de la théorie de Kolmogorov	126
6.3.2 Corrélation et densité spectrale d'énergie 3D	128
6.3.3 Corrélations et densités spectrales d'énergie 1D	128
6.3.4 Hypothèse de Taylor	129
6.3.5 Spectre de Kolmogorov	130
6.4 Équations de Reynolds	131
6.5 Modèle de Boussinesq - Viscosité turbulente	133
6.6 Modèle de longueur de mélange de Prandtl	134
6.7 Équations d'évolutions supplémentaires	134
6.7.1 Motivation : mise en place du modèle $K - \varepsilon$ . Dissipations	134
6.7.2 Équation d'évolution de la vitesse fluctuante	135
6.7.3 Équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente	136
6.7.4 Équation d'évolution de la pseudo-dissipation turbulente	137
6.8 Modèle $K - \varepsilon$	138
6.8.1 Équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente modélisée	138
6.8.2 Équation d'évolution de la pseudo-dissipation turbulente modélisée	138
6.8.3 Modèle $K - \varepsilon$ de la viscosité turbulente	139
6.9 Diffusion turbulente d'un champ scalaire	139
6.10 Éléments de conclusion	141
6.11 Exercices et problèmes	142
Ex. 6.1 : Estimation d'ordres de grandeur en écoulement turbulent	142
Ex. 6.2 : Calcul tensoriel	142
Ex. 6.3 : Dissipations en turbulence homogène et isotrope	142
Pb. 6.1 : Modèle simplifié de turbulence en proche paroi - Lois de paroi	143
Ex. 6.4 : Modèle $K - \varepsilon$ de turbulence de grille et mesure de la constante $C_{2\varepsilon}$	145
Pb. 6.2 : Écoulements dans un tuyau : cas laminaire et turbulent en modèle $K - \varepsilon$	146
<b>A Analyse dimensionnelle</b>	<b>151</b>
<b>B Phénomènes de dispersion d'ondes</b>	<b>153</b>

<b>C</b>	<b>Éléments de correction des exercices et problèmes - Compléments</b>	<b>155</b>
C.1	Corrigés du chapitre 1 - Bases . . . . .	155
	Ex. : Estimation de la poussée d'un moteur fusée . . . . .	155
	Ex. : Propulsion de fusées ou vaisseaux spatiaux idéaux . . . . .	155
	Ex. : Estimation des poussées de turboréacteurs simple et double flux . . . . .	157
	Ex. : Écoulement laminaire dans un tuyau . . . . .	159
	Pb. : Étude d'écoulements de Couette cylindrique - Applications . . . . .	160
C.2	Corrigé du chapitre 2 - Conditions d'interface, tension superficielle . . . . .	160
	Pb. : Lubrification d'un écoulement en tuyau de fluide très visqueux . . . . .	160
C.3	Corrigés du chapitre 3 - Modèle du fluide parfait . . . . .	165
	Pb. : Écoulements plans produits par un gradient de pression oscillant . . . . .	165
	Ex. : Modes de ballonnement d'une cuve rectangulaire . . . . .	166
	Pb. : Étude détaillée d'ondes de surface en eau profonde . . . . .	167
	Pb. : Instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor . . . . .	172
	Pb. : Rôle de la tension superficielle dans diverses instabilités . . . . .	172
	Pb. : Étude de la stabilité d'un fluide pesant continûment stratifié . . . . .	175
	Pb. : Modélisation de phénomènes en lien avec la cavitation . . . . .	178
	Pb. : Étude de quelques phénomènes dans une centrale hydraulique . . . . .	183
	Ex. : Analogie entre ondes d'interface et ondes acoustiques . . . . .	185
	Ex. : Étude détaillée des ondes sonores planes en milieu infini . . . . .	186
	Ex. : Étude sommaire de l'effet coup de bélier dans une conduite d'eau . . . . .	187
	Pb. : Effets de la viscosité sur des ondes de type sonore . . . . .	187
	Ex. : Étude locale du champ de vitesse d'un tourbillon potentiel . . . . .	189
	Pb. : Écoulements d'un fluide parfait autour d'un disque avec circulation . . . . .	190
	Pb. : Modèle d'écoulements autour d'une aile d'avion à section elliptique . . . . .	191
	Comp. C.1 : Éléments d'aérodynamique du vol . . . . .	193
C.4	Corrigés du chapitre 4 - Écoulements de Stokes . . . . .	193
	Ex. : Étude d'écoulements de Couette diphasiques . . . . .	193
	Pb. : Écoulement de Stokes autour d'une sphère ; application : sédimentation . . . . .	194
	Pb. : Écoulements de Stokes dans et autour d'une inclusion sphérique . . . . .	196
	Pb. : Étude d'un fluide généralement non newtonien par rhéomètre plan-cône . . . . .	198
	Pb. : Étude de l'écoulement dans une cavité rotor-stator étendue . . . . .	202
C.5	Corrigés du chapitre 5 - Couches limites . . . . .	206
	Pb. : Étude de la couche limite de Blasius . . . . .	206
	Pb. : Couches limites : généralités, couches limites aspirée et standard . . . . .	208
	Pb. : Étude des couches limites de Falkner-Skan . . . . .	211
C.6	Corrigés du chapitre 6 - Écoulements turbulents . . . . .	212
	Ex. : Estimation d'ordres de grandeur en écoulement turbulent . . . . .	212
	Pb. : Modèle simplifié de turbulence en proche paroi - Lois de paroi . . . . .	212
	Comp. C.2 : Lois de paroi . . . . .	213
	Ex. : Modèle $K - \varepsilon$ de turbulence de grille et mesure de la constante $C_{2\varepsilon}$ . . . . .	214

Pb. : Écoulements en tuyau : cas laminaire et turbulent en modèle $K - \varepsilon$ . . . . .	214
<b>Bibliographie</b>	<b>219</b>

# Introduction

Ceci constitue le document de cours-TD de *Mécanique des fluides* destiné aux élèves de deuxième année de l'école nationale supérieure des Mines de Nancy ayant choisi le département *Énergie & Fluides*. Ce cours se situe évidemment dans la continuité de mon cours de *mécanique des milieux continus solides et fluides* de première année (Plaut 2015b). En particulier j'utilise le *calcul tensoriel* (Plaut 2015a) et des notations identiques : les caractères gras surmontés d'une barre (exemple :  $\bar{\mathbf{v}}$ ) désignent les vecteurs, les caractères gras surmontés de deux barres (exemple :  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ ) désignent les tenseurs d'ordre 2, etc...

Je reprends et complète dans le chapitre 1 les *bases générales de la modélisation en mécanique des fluides*, en allant notamment jusqu'au bilan d'énergie interne, i.e., en abordant la *thermomécanique des fluides*. Le chapitre 2 se focalise sur les lois fondamentales régissant les *phénomènes interfaciaux*. Le chapitre 3 est consacré au *modèle du fluide parfait* et à ses principales applications : ondes de surface et ondes sonores, instabilités, aérodynamique<sup>1</sup>. Le chapitre 4 est consacré au *modèle des écoulements de Stokes* et le chapitre 5 à la *théorie des couches limites*. Le chapitre 6 présente quelques éléments sur les *écoulements turbulents* et leur modélisation. L'annexe A étend l'analyse dimensionnelle développée dans Plaut (2015b) au cadre de la thermomécanique des fluides. Enfin, l'annexe B présente des éléments sur les phénomènes de dispersion d'ondes.

Ce cours s'adresse « idéalement » à un futur ingénieur Recherche et Développement (R & D). Tous ceux qui le suivront ne feront pas carrière dans la R & D, loin s'en faut, mais je me donne a priori cet objectif de formation,

- pour son intérêt intellectuel ;
- parce que « qui peut le plus peut le moins » ;
- parce qu'une bonne R & D, et de bons bureaux d'études, sont sans doute les leviers qui permettront d'offrir un avenir à notre industrie (au sens large).

En conséquence cet enseignement est en partie basé sur l'utilisation d'un outil logiciel moderne<sup>2</sup>, à savoir Mathematica, pour illustrer quelques phénomènes, résoudre numériquement certains modèles, faire tel ou tel calcul formel lourd, etc...

---

1. Malheureusement, suite à une réforme du tronc commun de mathématiques effectuée en 2014, l'*Analyse complexe* ne fait plus partie du bagage des élèves de l'école. Les sections 3.5, 3.6 et 3.11 de ce document seront donc peu exploitées, comme cela est expliqué dans la remarque de la fin de la section 3.2.3. Ainsi, le calcul d'écoulements autour d'une aile ou d'un aileron à partir de modèles potentiels ne sera qu'abordé en cours, sans TD dédié. Heureusement, l'étude des moteurs fusée, couches limites, écoulements turbulents ont une pertinence élevée, par rapport aux problématiques de l'aérodynamique... De plus, le TP expérimental associé à ce module relève de l'aérodynamique...

2. Prototypage des outils logiciels utilisés en R & D.

Des références intéressantes et pédagogiques en mécanique des fluides, complémentaires des éléments de cours donnés ci-après, volontairement succints, sont [Huerre \(1998\)](#), [Chassaing \(2000a,b\)](#), [Guyon et al. \(2001\)](#). Des traités plus pointus, rédigés dans la langue de Shakespeare, sont ceux de [Batchelor \(1967\)](#) et [Davidson \(2004\)](#).

D'un point de vue pratique, le déroulement de ce module, avec des consignes pour un travail préparatoire avant chaque séance, est présenté sur la page web dynamique

<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mf> .

Cette page contient une version PDF complète de ce document <sup>3</sup>, et les fichiers amphi\*.pdf des présentations vidéos données lors des cours <sup>4</sup>.

Je remercie Mohamed Souhar <sup>5</sup>, responsable d'un cours similaire à l'école nationale supérieure d'électricité et de mécanique <sup>6</sup>, ainsi que Didier Bernardin et Olivier Botella, pour des discussions intéressantes. Je signale que je les côtoie au laboratoire d'énergétique et de mécanique théorique et appliquée (Lemta), situé sur le campus de Brabois de l'Université de Lorraine, dans lequel je mène mes activités de recherche. Merci aussi à Nicolas Tantot, de SAFRAN Snecma, pour la fourniture des données numériques de l'exercice [1.3](#), et à Jean Marc Dorey, de EDF R&D, pour les renseignements qui m'ont permis de créer la deuxième partie du problème [1.1](#) ainsi que le complément [1.2](#). Je remercie enfin mon ex-collègue Jean-Régis Angilella pour avoir attiré mon attention sur le site web que je cite dans le complément [3.1](#), et, surtout, pour m'avoir permis de m'inspirer des cours et TD de turbulence qu'il a donné à l'école des Mines jusqu'en 2010, afin de rédiger une première version du chapitre 6.

Nancy, le 13 mai 2016.

Emmanuel Plaut.

---

3. À la fin de cette version PDF, en annexe [C](#), figurent des corrigés succints des exercices et problèmes. Merci de jouer le jeu et de ne consulter ces corrigés qu'après les TD!..

4. Ces fichiers correspondent à une version statique des présentations vidéos, sans films, etc... Ils seront mis en ligne au fur et à mesure, après chaque séance de cours.

5. J'ai aussi une pensée pour mon ex-collègue Jean-Pierre Brancher.

6. L'ENSEM, une autre école de l'Université de Lorraine.



# Chapitre 1

## Bases de la modélisation en mécanique des fluides

Une présentation moins succincte de ces bases, en ce qui concerne toutes celles-ci exceptées la loi de comportement des fluides compressibles (section 1.5) et le bilan d'énergie interne (section 1.9), est accessible dans mon document de cours de première année [Plaut \(2015b\)](#). Par rapport à ce cours « élémentaire », on donne aussi en plus ici section 1.6 quelques compléments sur la physique de la viscosité. Vous noterez qu'un plan de ce cours de deuxième année est donné ci-après, naturellement, à la fin de la section 1.5.

### 1.1 Modèle du milieu continu fluide, liquide ou gaz

Ce modèle, introduit dans la section 1.1 de [Plaut \(2015b\)](#), suppose que la matière est constituée de « *particules matérielles* » ou « *volumes élémentaires représentatifs* » de diamètre caractéristique  $d$  **dans un état local homogène de quasi-équilibre thermodynamique**, suffisamment gros pour contenir suffisamment d'atomes ou de molécules pour que cette notion de quasi-équilibre ait un sens du point de vue de la physique statistique,

$$d \gg \ell \text{ échelle des hétérogénéités atomiques ou moléculaires,} \quad (1.1)$$

suffisamment petits pour qu'ils méritent le titre de « particules »,

$$d \ll L \text{ échelle des hétérogénéités « macroscopiques » } \simeq 1 \text{ cm.} \quad (1.2)$$

Dans le cas de **liquides « simples »**,  $\ell \simeq 10 \text{ \AA}$  donc (1.1) est satisfaite si  $d \simeq 1 \mu\text{m}$ .

Dans le cas de **gaz**,  $\ell =$  libre parcours moyen des atomes ou molécules, et

$$\ell \ll L \iff K = \text{nombre de Knudsen} = \frac{\ell}{L} \ll 1. \quad (1.3)$$

En général

$$\ell = \frac{1}{\sigma_c n} \quad (1.4)$$

avec  $\sigma_c$  la section efficace de collision entre deux atomes ou molécules,  $n$  la densité atomique ou moléculaire. Si de plus on utilise le modèle du **gaz parfait**,

$$n = \frac{p}{kT} \quad (1.5)$$

avec  $p$  la pression,

$$k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \quad (1.6)$$

la constante de Boltzmann,  $T$  la température absolue, on obtient

$$K = \frac{1}{\sigma_c n L} = \frac{kT}{\sigma_c p L} . \quad (1.7)$$

Le modèle du milieu continu ne sera pas valable pour des gaz très peu denses, i.e. chauds ou à faible pression. Ceci écarte par exemple les **gaz de la haute atmosphère**, ou encore la plupart des **plasmas**, voir à ce sujet les illustrations du cours d'amphi.

Rappelons pour terminer concernant les gaz que la masse volumique  $\rho = mn$  où  $m$  est la masse d'un atome ou molécule du gaz,  $m = M/N_A$  avec  $M$  la masse molaire du gaz<sup>1</sup>,  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}/\text{mol}$  le nombre d'Avogadro. Ainsi une autre forme de la loi des gaz parfaits (1.5) est

$$\rho = Mp/RT \quad (1.8)$$

avec la constante des gaz parfaits  $R = N_A k = 8,314 \text{ J/K/mol}$ .

## 1.2 Cinématique

On retrace ici les grandes lignes des sections 1.2, 2.1 et 2.2 de [Plaut \(2015b\)](#).

### 1.2.1 Descriptions du mouvement

Si le modèle du milieu continu est valable on peut définir la **vitesse**  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  d'une particule matérielle comme une quantité moyenne (au sens de la physique statistique). D'où le **champ de vitesse eulerien**; la **description lagrangienne du mouvement**

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\cdot, t) : D_0 \text{ domaine initialement occupé} &\longrightarrow D_t \text{ domaine actuellement occupé} \\ \bar{\mathbf{X}} \text{ position initiale} &\longmapsto \bar{\mathbf{x}} \text{ position actuelle} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

s'obtient par calcul des **trajectoires** définies par

$$\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{X}} \quad \text{et} \quad \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}(t), t) . \quad (1.10)$$

On note aussi

$$\bar{\mathbf{X}} = \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{x}}, t) . \quad (1.11)$$

En mécanique des fluides on utilisera de préférence la description eulerienne; ainsi le champ de vitesse par exemple

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t) .$$

### 1.2.2 Dérivées particulières

Elles reposent sur l'utilisation de l'opérateur gradient introduit dans [Plaut \(2015a\)](#). Pour un champ scalaire

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\bar{\nabla}_{\mathbf{x}} \rho) \cdot \bar{\mathbf{v}} ; \quad (1.12)$$

pour le champ de vitesse

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\nabla}_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{v}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} . \quad (1.13)$$

1. Par exemple, pour l'air,  $M_{\text{air}} = 28,8 \text{ g mol}^{-1}$ .

### 1.2.3 Tenseur des taux de déformation

C'est le tenseur eulerien

$$\boxed{\overline{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\overline{\nabla}\overline{\mathbf{v}} + \overline{\nabla}\overline{\mathbf{v}}^T)}, \quad (1.14)$$

qui permet de calculer la dérivée particulaire d'un produit scalaire entre petits vecteurs,

$$\boxed{\frac{d(\overline{d\mathbf{x}} \cdot \overline{d\mathbf{x}'})}{dt} = 2\overline{d\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{D}} \cdot \overline{d\mathbf{x}'}}. \quad (1.15)$$

Il permet aussi la *décomposition locale d'un champ de vitesse général*, autour d'un point  $\overline{\mathbf{x}}$  donné,

$$\boxed{d\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}} + d\overline{\mathbf{x}}) - \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\nabla}\overline{\mathbf{v}} \cdot d\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{D}} \cdot d\overline{\mathbf{x}} + \overline{\boldsymbol{\omega}} \wedge d\overline{\mathbf{x}}}. \quad (1.16)$$

avec

$$\overline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \overline{\text{rot}} \overline{\mathbf{v}}. \quad (1.17)$$

Ainsi localement on peut décomposer le mouvement en une *déformation instantanée* (terme  $\overline{\mathbf{D}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}$ ) et une *rotation instantanée* (terme  $\overline{\boldsymbol{\omega}} \wedge d\overline{\mathbf{x}}$ ), cf. la section 2.2 de [Plaut \(2015a\)](#).

### 1.2.4 Transport d'un volume infinitésimal en description eulerienne

Cette formule de transport

$$\frac{d(d^3x)}{dt} = (d^3x) \text{tr} \overline{\nabla}\overline{\mathbf{v}} = (d^3x) \text{div} \overline{\mathbf{v}} \quad (1.18)$$

permet une interprétation immédiate de la divergence du champ de vitesse.

### 1.2.5 Transport d'une quantité extensive définie par une densité volumique

La quantité étant définie par

$$C = \iiint_{D_t} c \, d^3x,$$

on a montré que

$$\frac{dC}{dt} = \iiint_{D_t} \left[ \frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(c\overline{\mathbf{v}}) \right] d^3x = \iiint_{D_t} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial D_t} c\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} d^2S. \quad (1.19)$$

## 1.3 Bilan de masse

Pour plus de détail, reportez-vous aux sections 3.1 et 7.1 de [Plaut \(2015b\)](#).

### 1.3.1 Conservation de la masse - Débits - Vitesse débitante

À l'aide de ce qui précède la *conservation de la masse* s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\overline{\mathbf{v}}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \overline{\mathbf{v}} = 0}. \quad (1.20)$$

En fluide *incompressible* ou *écoulement isovolume*

$$\rho = \rho_0 \quad \text{donc} \quad \text{div} \bar{\mathbf{v}} = 0 . \quad (1.21)$$

En écoulement permanent le long d'un tube de courant on a toujours *conservation du débit massique*

$$\dot{m} = \iint_S \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d^2S \quad (1.22)$$

avec  $S$  une section du tube,  $\bar{\mathbf{n}}$  normale à cette section orientée comme le tube. Enfin en fluide incompressible on a *conservation du débit volumique*

$$q = \frac{\dot{m}}{\rho} = \iint_S \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d^2S , \quad (1.23)$$

qui est souvent écrit  $VA$  avec  $V$  *vitesse débitante* et  $A$  aire d'une section du tube.

### 1.3.2 Transport d'une quantité extensive définie par une densité massique

La quantité étant définie par

$$E = \iiint_{D_t} \rho e \, d^3x ,$$

on a montré que

$$\frac{dE}{dt} = \iiint_{D_t} \rho \frac{de}{dt} \, d^3x = \iiint_{D_t} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} \, d^3x + \iint_{\partial D_t} \rho e \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d^2S . \quad (1.24)$$

## 1.4 Bilan de quantité de mouvement

### 1.4.1 Expression cinématique du taux d'évolution de la quantité de mouvement

À partir de (1.19) et (1.24) on obtient

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{D_t} \rho \bar{\mathbf{v}} \, d^3x = \iiint_{D_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} \, d^3x \quad (1.25)$$

$$\boxed{\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{D_t} \frac{\partial(\rho \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} \, d^3x + \iint_{\partial D_t} \rho \bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \, d^2S} . \quad (1.26)$$

Cette dernière forme de la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps est connue sous le terme « formule d'Euler ».

### 1.4.2 Bilan dynamique - Tenseur des contraintes

On introduit pour décrire les efforts intérieurs dans un fluide le *tenseur des contraintes* (de Cauchy)  $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$  comme dans la section 3.2 de [Plaut \(2015b\)](#). Ainsi, la force exercée sur un élément de surface  $d^2S$  de normale sortante  $\bar{\mathbf{n}}$  par le milieu extérieur est

$$\boxed{d^2\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{T}} \, d^2S = \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d^2S} , \quad (1.27)$$

avec  $\bar{\mathbf{T}}$  le vecteur contrainte. D'après Newton, il vient

$$\boxed{\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{D_t} \bar{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} \, d^3x + \iint_{\partial D_t} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d^2S} . \quad (1.28)$$

En utilisant la formule intégrale de la divergence (cf. [Plaut 2015a](#)) on obtient l'*équation locale d'évolution de la quantité de mouvement*

$$\boxed{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \bar{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} + \overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}}. \quad (1.29)$$

## 1.5 Loi de comportement des fluides visqueux Équation de Navier-Stokes

### 1.5.1 Cas de fluides compressibles

On désire compléter ici la section 7.2 de [Plaut \(2015b\)](#) en écrivant la loi de comportement des *fluides compressibles visqueux isotropes newtoniens*<sup>2</sup>. On a toujours dans ce cas séparation du tenseur des contraintes

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -p\bar{\mathbf{1}} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (1.30)$$

en un tenseur de *pression*  $-p\bar{\mathbf{1}}$  et un tenseur des *contraintes visqueuses*  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ , avec a priori une relation *linéaire* entre  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  et le *tenseur des taux de déformation* (1.14). En effet un mouvement de rotation en bloc du fluide ne doit pas créer de contraintes visqueuses, d'où la proportionnalité de  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  à  $\overline{\nabla}\bar{\mathbf{v}}$  et non  $\bar{\mathbf{D}}$ ; l'hypothèse de linéarité quant à elle est caractéristique du fluide *newtonien*. Comme le fluide est compressible on n'a plus forcément  $\text{tr}\bar{\mathbf{D}} = \text{div}\bar{\mathbf{v}} = 0$ , donc la loi de comportement la plus générale respectant les hypothèses que l'on vient d'énoncer s'écrit

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \eta_1 (\text{tr}\bar{\mathbf{D}}) \bar{\mathbf{1}} + 2\eta_2 \bar{\mathbf{D}}. \quad (1.31)$$

Dans un écoulement de Couette plan comme celui étudié en première année,

$$\bar{\mathbf{v}} = V \frac{y}{\ell} \bar{\mathbf{e}}_x,$$

on a  $\text{tr}\bar{\mathbf{D}} = \text{div}\bar{\mathbf{v}} = 0$ , donc on retrouve une contrainte tangentielle à la paroi  $y = 0$  valant

$$T_x = \bar{\mathbf{e}}_x \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_y = \eta_2 \frac{V}{\ell}.$$

Cette relation de proportionnalité entre la contrainte de cisaillement et le taux de déformation de cisaillement, via  $\eta_2$ , montre que  $\eta_2$  est la *viscosité (dynamique) de cisaillement* déjà rencontrée en première année; on notera en conséquence

$$\eta = \eta_2. \quad (1.32)$$

Pour interpréter la viscosité  $\eta_1$ , considérons au contraire un mouvement de compression pure seulement possible en fluide compressible,

$$\bar{\mathbf{v}} = -V \frac{\bar{\mathbf{x}}}{a}.$$

On a alors

$$\overline{\nabla}\bar{\mathbf{v}} = -\frac{V}{a} \bar{\mathbf{1}} = \bar{\mathbf{D}}$$

2. En première année on désignait par abus de langage les fluides incompressibles visqueux isotropes newtoniens comme les « fluides newtoniens »; on va l'espace de cette section éviter cet abus, auquel on reviendra rapidement.

donc

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = -(3\eta_1 + 2\eta) \frac{V}{a} \bar{\mathbf{1}} = \kappa(\operatorname{div}\bar{\mathbf{v}}) \bar{\mathbf{1}}$$

avec

$$\kappa = \eta_1 + \frac{2}{3}\eta \quad (1.33)$$

le coefficient de proportionnalité entre les contraintes visqueuses liées à la compression et le coefficient de contraction volumique  $\operatorname{div}\bar{\mathbf{v}}$  (cf. l'équation 1.18). On appelle donc  $\kappa$  *viscosité (dynamique) de dilatation-compression volumique*.

On peut faire à partir de la théorie cinétique des gaz faiblement hors de l'équilibre, i.e. en équilibre thermodynamique local seulement<sup>3</sup>, des prédictions concernant le tenseur des contraintes visqueuses, prenant leur source dans les collisions entre atomes ou molécules. Ceci permet de montrer que, pour un gaz monoatomique, la viscosité de dilatation-compression volumique est nulle,

$$\kappa = 0 \iff \eta_1 = -\frac{2}{3}\eta. \quad (1.34)$$

La première « démonstration » de cette propriété a été donnée par Stokes en 1845, voir [Stokes \(1845\)](#)<sup>4</sup>. Il s'avère que dans les gaz polyatomiques et les fluides la viscosité de dilatation-compression volumique est faible ; en conséquence on suppose en général, pour simplifier, la validité de la *relation de Stokes* (1.34). Au bilan on a donc

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -p\bar{\mathbf{1}} + 2\eta\bar{\mathbf{D}} - \frac{2}{3}\eta(\operatorname{tr}\bar{\mathbf{D}})\bar{\mathbf{1}}}. \quad (1.35)$$

Une conséquence importante de ces effets de frottements visqueux est que les fluides visqueux *adhèrent* à une paroi solide, ce qu'exprime la condition d'*adhérence*

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{v}}_{\text{paroi}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \text{ sur la paroi.} \quad (1.36)$$

En remplaçant dans (1.29) et en utilisant le fait que sur la Terre  $\bar{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} = \rho\bar{\mathbf{g}}$  il vient l'*équation de Navier*<sup>5</sup>- *Stokes*

$$\boxed{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho\bar{\mathbf{g}} - \bar{\nabla}p + \eta\bar{\Delta}\bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{3}\eta\bar{\nabla}(\operatorname{div}\bar{\mathbf{v}})}. \quad (1.37)$$

On introduit en général la *viscosité cinématique*

$$\boxed{\nu = \frac{\eta}{\rho}}. \quad (1.38)$$

Des valeurs typiques des viscosités sont présentées sur la table 1.1 ; voir aussi sur ce sujet la section 1.6.

3. Cette théorie, plus complexe que celle des gaz en équilibre thermodynamique global (qui a été vue en première année dans le cours de [Gaudry 2012](#)), est par exemple présentée dans [Huang \(1988\)](#).

4. Stokes, mathématicien et physicien anglais, l'a basée sur des raisonnements mécaniques et non sur la théorie cinétique des gaz.

5. Navier, ingénieur et scientifique français, avait étudié le cas d'un fluide incompressible dès 1822, en proposant le modèle qui correspond à (1.41).

Fluide	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\eta$ [Pa s]	$\nu$ [m <sup>2</sup> /s]
Eau sous $p = 1$ atm, $T = 10^\circ\text{C}$	1000	$1,31 \cdot 10^{-3}$	$1,31 \cdot 10^{-6}$
Eau sous $p = 1$ atm, $T = 20^\circ\text{C}$	998	$1,00 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^{-6}$
Eau sous $p = 1$ atm, $T = 30^\circ\text{C}$	996	$7,98 \cdot 10^{-4}$	$8,01 \cdot 10^{-7}$
Air sous $p = 1$ atm, $T = 20^\circ\text{C}$	1,20	$1,82 \cdot 10^{-5}$	$1,51 \cdot 10^{-5}$
Air sous $p = 1$ atm, $T = 40^\circ\text{C}$	1,13	$1,91 \cdot 10^{-5}$	$1,70 \cdot 10^{-5}$

**Tab. 1.1** – Valeurs typiques de la *masse volumique*  $\rho$ , de la *viscosité dynamique*  $\eta$  et de la *viscosité cinématique*  $\nu = \eta/\rho$  pour divers fluides. On rappelle qu’une atmosphère vaut  $1,013 \cdot 10^5$  Pa soit 1,013 bar. L’unité de  $\eta$  est aussi bien le Pascal seconde [Pa s] que le kilogramme par mètre et par seconde [kg/(m s)]. Les propriétés de l’eau sont tirées de [Lide \(2001\)](#). La masse volumique de l’air peut se déduire de la loi des gaz parfaits (1.8) ; les viscosités sont tirées du site web ‘*Engineering ToolBox*’.

### 1.5.2 Cas de fluides incompressibles

Très souvent les fluides considérés sont supposés *incompressibles*. Alors, en vertu de (1.21),

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (1.39)$$

la loi de comportement (1.35) devient plus simplement

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -p\bar{\mathbf{1}} + 2\eta\bar{\mathbf{D}}, \quad (1.40)$$

tandis que l’équation de Navier-Stokes (1.37) se réécrit

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} - \bar{\nabla} p + \eta \bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}}. \quad (1.41)$$

On rappelle que cette équation est non linéaire du fait de l’existence d’un terme d’advection

$$\left( \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}}$$

dans l’accélération  $d\bar{\mathbf{v}}/dt$ , cf. (1.13), et que l’on peut, à l’échelle du laboratoire où  $\bar{\mathbf{g}} = -g\bar{\mathbf{e}}_z$  est uniforme, regrouper les deux premiers termes du membre de droite dans le gradient de *pression motrice*

$$\hat{p} = p + \rho g z, \quad (1.42)$$

c’est-à-dire écrire

$$\underbrace{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt}}_{\text{termes inertiels}} = \rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left( \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = \underbrace{-\bar{\nabla} \hat{p}}_{\text{terme de pression}} + \underbrace{\eta \bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}}}_{\text{terme visqueux}}. \quad (1.43)$$

C’est le caractère non linéaire de cette équation qui fait toute la richesse de la mécanique des fluides. Rappelons que la « force des non-linéarités » ou plus physiquement l’ordre de grandeur du rapport entre les termes d’advection et les termes visqueux est donnée par le *nombre de Reynolds*

$$Re = \frac{\rho \left( \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}}}{\eta \bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}}} = \frac{VL}{\nu} \quad (1.44)$$

avec  $V$  et  $L$  vitesses et longueurs caractéristiques de l'écoulement, nombre que l'on peut aussi introduire par analyse dimensionnelle (cf. le chapitre 8 de [Plaut 2015b](#)). En première approximation si  $Re \gg 1$  le modèle du « fluide parfait », dans lequel on négligera les effets visqueux, pourra s'appliquer (cf. le chapitre 3), alors que si  $Re \ll 1$  le modèle des écoulements de Stokes, dans lequel on négligera les effets non linéaires, sera plutôt utilisé (cf. le chapitre 4). Dans la réalité les choses sont souvent plus compliquées puisque la valeur du nombre de Reynolds dépend de la zone considérée de l'écoulement et des échelles que l'on considère... d'où la nécessité de développer la théorie des couches limites, près de parois où les effets visqueux importent (cf. le chapitre 5), et celle des écoulements turbulents (cf. le chapitre 6).

## 1.6 Compléments : origine et estimation physique de la viscosité

Quelques éléments sur la physique de la viscosité des liquides et des gaz sont présentés ici. Pour une étude plus approfondie, voyez par exemple la section 2.2 de [Guyon et al. \(2001\)](#).

### 1.6.1 Cas de liquides

Dans un liquide la mobilité des molécules est faible. En conséquence la diffusion de quantité de mouvement est gouvernée par des « sauts » dans l'espace sur une longueur comparable à la taille  $\ell$  des molécules, sous l'effet des contraintes internes. Une analyse basée sur la mécanique quantique et statistique, donnée dans la section 2.2.2 de [Guyon et al. \(2001\)](#), montre que l'on peut estimer la viscosité dynamique comme étant

$$\eta \simeq \frac{h}{\ell^3} \exp\left(\frac{\delta E}{kT}\right) \quad (1.45)$$

où

$$h = \text{constante de Planck} = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J K},$$

$\delta E$  est l'énergie d'activation à fournir pour un saut de position lorsque le fluide est au repos sans écoulement. Un tel saut de position se produit par agitation thermique, d'où le facteur de Maxwell-Boltzmann en  $\exp(\delta E/kT)$ . Une loi de ce type, généralisée avec un préfacteur moins contraint,

$$\eta \simeq \eta_0 \exp\left(\frac{\delta E}{kT}\right) \quad (1.46)$$

est appelée « *loi d'Arrhenius* »<sup>6</sup>. Elle prédit que la viscosité doit diminuer avec la température, ce que l'on observe bien expérimentalement dans le cas de l'eau, cf. les données de la table 1.1.

Pour aller plus loin de façon semi-quantitative, on peut supposer physiquement que l'énergie d'activation  $\delta E$  est de l'ordre de  $kT_e$ , où  $T_e$  est la température d'ébullition du liquide. Pour bien reproduire les observations on prend numériquement

$$\delta E = 3,8 kT_e \quad (1.47)$$

ce qui conduit avec (1.45) à l'estimation

$$\eta \simeq \frac{h}{\ell^3} \exp\left(3,8 \frac{T_e}{T}\right). \quad (1.48)$$

Dans le cas de l'eau,  $\ell = 3,4 \text{ \AA}$  et  $T_e = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$  donnent, à  $T = 10 \text{ }^\circ\text{C} = 283 \text{ K}$ ,

$$\eta_{\text{eau}} \simeq 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}. \quad (1.49)$$

6. Physicien et chimiste suédois de la fin XIX<sup>ème</sup>, début XX<sup>ème</sup>.



### 1.6.2 Cas de gaz

La diffusion de quantité de mouvement dans les gaz se fait essentiellement à cause de l'agitation thermique et des collisions. Cette agitation thermique peut être décrite en première approximation grâce à la théorie cinétique des gaz parfaits, cf. par exemple Gaudry (2012). Cette théorie montre que la vitesse d'agitation thermique moyenne<sup>7</sup>

$$V_{\text{therm}} = \sqrt{\langle \mathbf{v}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (1.50)$$

en ordre de grandeur, avec  $m$  la masse d'un atome ou d'une molécule. D'autre part la longueur caractéristique sur laquelle se font les échanges de quantité de mouvement est la distance parcourue par atome ou molécule entre deux collisions, i.e. le libre parcours moyen  $\ell$  déjà introduit équation (1.4). Comme l'analyse dimensionnelle montre que la viscosité cinématique

$$\nu \equiv v \ell ,$$

il est naturel de postuler la relation d'ordre de grandeur<sup>8</sup>

$$\nu \simeq V_{\text{therm}} \ell \iff \eta = \nu \rho \simeq \sqrt{\frac{kT}{m}} \frac{1}{\sigma_c n} mn \simeq \frac{\sqrt{mkT}}{\sigma_c} . \quad (1.51)$$

Dans le cas de diazote à température ambiante, on peut estimer que la section efficace de collision  $\sigma_c$  est de l'ordre de  $\pi r_{\text{N}_2}^2$  où

$$r_{\text{N}_2} = 1,6 \text{ \AA} \quad (1.52)$$

est le rayon de la molécule de diazote. D'autre part

$$m = m_{\text{N}_2} = 14 \text{ uma} ,$$

où l'on rappelle qu'une unité de masse atomique

$$1 \text{ uma} = \frac{1 \text{ g}}{N_A} = \frac{1 \text{ g}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} ,$$

$N_A$  étant le nombre d'Avogadro. On obtient ainsi à 20°C,

$$\eta_{\text{N}_2} \simeq 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ Pa s} . \quad (1.53)$$

Le fait que cette valeur estimée soit 10 fois la viscosité de l'air à température ambiante (donnée dans la table 1.1) illustre que cette théorie est seulement valable semi-quantitativement, en ordre de grandeur<sup>9</sup>.

La formule (1.51) prédit une augmentation de la viscosité (dynamique) lorsque la température donc l'agitation thermique augmentent. Cette augmentation est bien observée expérimentalement : la table 1.1 montre que lorsque la température augmente de 20 à 40°C, la viscosité de l'air augmente de 5%. Cette augmentation est comparable à celle du facteur racine carrée de la température absolue dans la formule (1.51), soit 3% dans ce cas.

7. La moyenne que signifient les crochets est celle de la physique statistique.

8. Le premier à poser cette relation fut le physicien et mathématicien britannique Maxwell, qui vécut au XIX<sup>ème</sup> siècle.

9. Développer des modèles quantitatifs de coefficients de transport comme la viscosité est très difficile...

## 1.7 Bilans d'énergie cinétique

Le *bilan local* s'obtient en multipliant (1.29) scalairement par  $\bar{\mathbf{v}}$ , d'où

$$\rho \frac{de_c}{dt} = \bar{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + (\overline{\mathbf{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad (1.54)$$

$$\text{avec } e_c = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}^2 \text{ la } \mathbf{densit e massique d'énergie cin etique}. \quad (1.55)$$

D'autre part, dans la section 7.5.2 de [Plaut \(2015b\)](#), on a établi que le *bilan global*, sur un volume de fluide  $D_t$ , s'écrit

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{volumiques}} + P_{\text{surfiques}} - P_{\text{dissipée}}} \quad (1.56)$$

avec

$$\begin{aligned} E_c &= \mathbf{énergie cin etique totale} = \iiint_{D_t} \rho e_c d^3x, \\ \frac{dE_c}{dt} &= \iiint_{D_t} \frac{\partial(\rho e_c)}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial D_t} \rho e_c \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S, \\ P_{\text{volumiques}} &= \iiint_{D_t} \bar{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x, \quad P_{\text{surfiques}} = \iint_{\partial D_t} \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^2S, \\ P_{\text{dissipée}} &= 2\eta \iiint_{D_t} \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} d^3x \geq 0. \end{aligned}$$

## 1.8 Application : pertes de charge dans un écoulement ouvert

On considère un écoulement *quasi permanent* dans un tube de courant  $D_t$ , dont les sections d'entrée  $S_e$  et de sortie  $S_s$  se trouvent dans des régions où l'écoulement est établi i.e. quasi unidirectionnel, et sont faiblement étendues dans la direction verticale  $z$ . Dans la section 7.5.3 de [Plaut \(2015b\)](#), on a montré que le bilan (1.56) s'écrit dans ce cas

$$\boxed{\dot{m}g \delta H = \dot{m}g (H_e - H_s) = P_{\text{dissipée}} \geq 0} \quad (1.57)$$

avec

$$\begin{aligned} H_e &= z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{\alpha_e V_e^2}{g} = \mathbf{charge} \text{ au niveau de } S_e, \\ V_e &= \frac{1}{A_e} \iint_{S_e} v d^2S = \frac{q}{A_e} = \text{vitesse débitante sur } S_e, \\ \langle v^3 \rangle_e &= \frac{1}{A_e} \iint_{S_e} v^3 d^2S = \text{vitesse cubique moyenne sur } S_e, \\ \alpha_e &= \frac{\langle v^3 \rangle_e}{V_e^3} = \text{coefficient d'énergie cin etique sur } S_e, \end{aligned} \quad (1.58)$$

en notant  $A_e$  l'aire de la section d'entrée, des formules identiques étant valables au niveau de la sortie  $s$ . Cette notion de *perte de charge* est extrêmement importante pour l'ingénieur, car elle permet le calcul des « circuits hydrauliques ».

Dans le cas d'écoulements dans un tuyau à section cylindrique, l'étude des pertes de charge à l'aide de l'analyse dimensionnelle a fait l'objet de la section 8.2 de [Plaut \(2015b\)](#). Elle a abouti à l'introduction d'un « coefficient de perte de charge » adimensionnel  $\lambda$ , fonction du nombre de

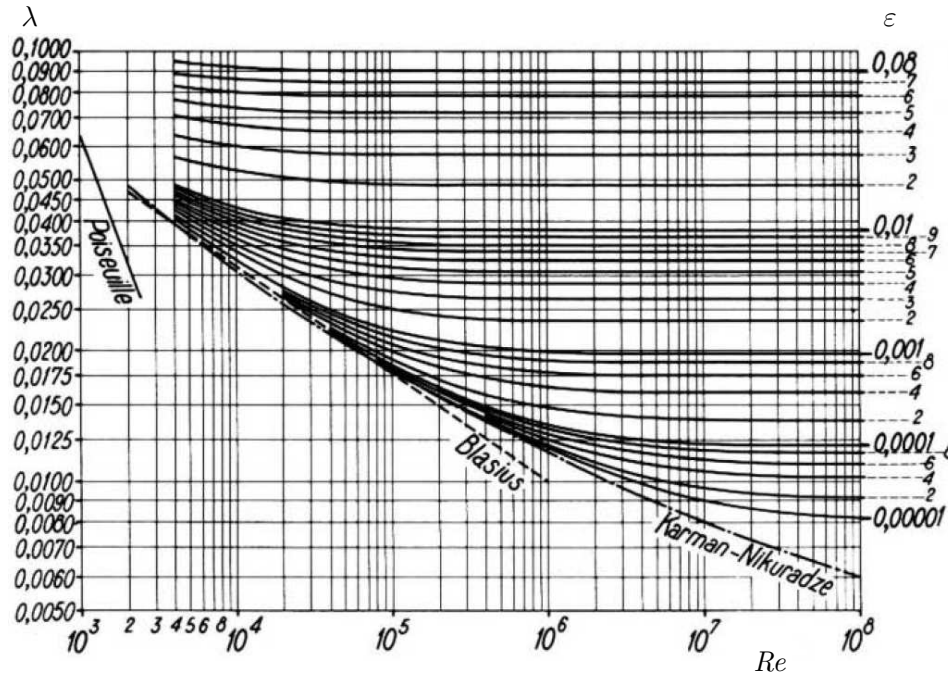


Fig. 1.1 – Coefficients de perte de charge  $\lambda$  des écoulements en tuyau en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  et de la rugosité relative  $\varepsilon$  (Bonnin 1983). La formule associée est l'équation (1.59).

Reynolds  $Re = Vd/\nu$  avec  $V$  la vitesse débitante,  $d$  le diamètre,  $\nu$  la viscosité cinématique, et de  $\varepsilon$  la rugosité relative, quotient de la taille caractéristique des rugosités de la paroi sur  $d$ . Ce coefficient  $\lambda$  permet d'obtenir la perte de charge entre deux sections distantes d'une longueur  $L$  dans la direction de l'axe du tuyau suivant la formule

$$\delta H = \frac{V^2}{2g} \frac{L}{d} \lambda(Re, \varepsilon). \quad (1.59)$$

Des corrélations permettant d'estimer  $\lambda$  sont présentées sur la figure 1.1. Une illustration de la **transition vers la turbulence** et de ses effets, dramatiques, sur les pertes de charge, est donnée sur la figure 1.2.

## 1.9 Bilans d'énergie interne

L'**énergie interne**, ou « chaleur », est aussi de l'énergie cinétique, mais correspondant à des mouvements d'agitation thermique « microscopiques » et « désordonnés ». On définit une **densité massique d'énergie interne**  $e_i$ . Le premier principe de la thermodynamique énonce la **loi d'évolution de l'énergie totale**

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d(E_i + E_c)}{dt} = P_{\text{efforts extérieurs}} + \dot{Q} \quad (1.60)$$

avec  $\dot{Q}$  le taux d'énergie interne (chaleur) reçu,

$$\dot{Q} = \iiint_{D_t} r d^3x - \iint_{\partial D_t} \bar{\Phi}_{\text{chal}} \cdot \bar{n} d^2S, \quad (1.61)$$

$r$  étant le **taux volumique de production de chaleur**,  $\bar{\Phi}_{\text{chal}}$  le **vecteur densité de flux de chaleur**,  $\bar{n}$  la normale unitaire sortant de  $D_t$ . En utilisant le bilan global d'énergie cinétique (1.56),

on établit le *bilan global d'énergie interne*

$$\boxed{\frac{dE_i}{dt} = P_{\text{dissipée}} + \dot{Q}} . \quad (1.62)$$

La puissance dissipée n'est donc pas perdue mais transformée en chaleur. En introduisant la *densité massique d'énergie interne*  $e_i$  il vient, à l'aide des formules de transport établies dans Plaut (2015b),

$$\begin{aligned} \iiint_{D_t} \rho \frac{de_i}{dt} d^3x &= \iiint_{D_t} \frac{\partial(\rho e_i)}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial D_t} \rho e_i \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S \\ \iiint_{D_t} \rho \frac{de_i}{dt} d^3x &= \iiint_{D_t} (2\eta \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{D}} + r) d^3x - \iint_{\partial D_t} \bar{\Phi}_{\text{chal}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S . \end{aligned} \quad (1.63)$$

Par passage du global au local on obtient l'équation locale

$$\rho \frac{de_i}{dt} = 2\eta \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{D}} + r - \text{div} \bar{\Phi}_{\text{chal}} . \quad (1.64)$$

Par définition même de la *capacité calorifique massique*  $c$ , une variation infinitésimale  $dT$  de température équivaut à une variation infinitésimale de densité massique d'énergie interne

$$de_i = c dT . \quad (1.65)$$

Lorsque  $r = 0$ , et que la *loi de Fourier*

$$\bar{\Phi}_{\text{chal}} = -\lambda \bar{\nabla} T \quad (1.66)$$

avec  $\lambda$  la *conductivité thermique* est bien vérifiée, l'*équation de la chaleur* s'écrit

$$\boxed{\rho c \frac{dT}{dt} = 2\eta \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{D}} + \lambda \Delta T} . \quad (1.67)$$

Le terme de dissipation visqueuse est souvent négligeable.

Des valeurs typiques des capacités calorifiques et conductivités thermiques sont

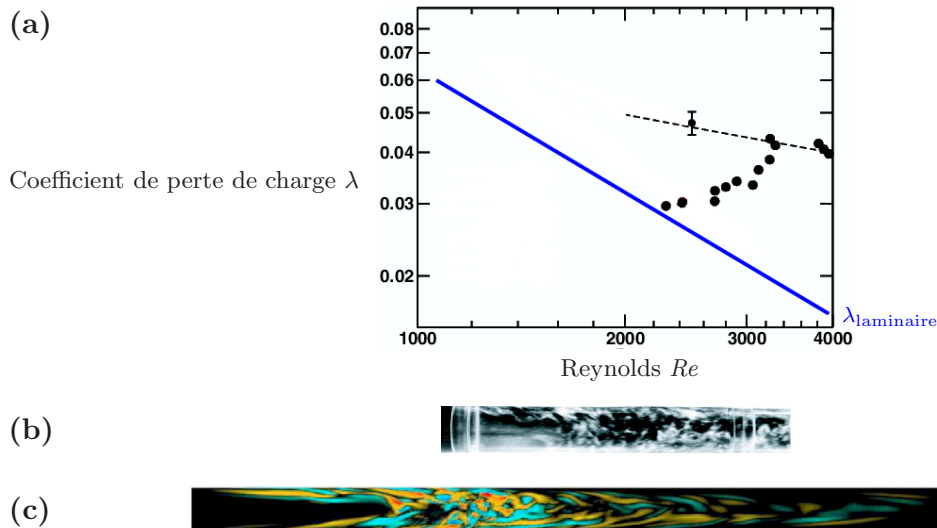
$$\begin{aligned} c = 4180 \text{ J/kg/K}, \quad \lambda = 0,597 \text{ W/m/K} & \quad \text{pour de l'eau à } 20^\circ\text{C} , \\ c = 1006 \text{ J/kg/K}, \quad \lambda = 0,0257 \text{ W/m/K} & \quad \text{pour de l'air à } 20^\circ\text{C} . \end{aligned}$$

On en déduit des valeurs typiques des diffusivités thermiques

$$\begin{aligned} \kappa = \lambda/(\rho c) = 1,43 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} & \quad \text{pour de l'eau à } 20^\circ\text{C} , \\ \kappa = \lambda/(\rho c) = 2,12 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} & \quad \text{pour de l'air à } 20^\circ\text{C} . \end{aligned}$$

Revenons pour terminer sur le bilan global (1.63) dans le cas où  $D_t$  est un tube de courant, de section d'entrée  $S_e$ , de sortie  $S_s$ , et l'écoulement est permanent. Il vient alors, en négligeant la dissipation visqueuse et en revenant à des écritures globales des termes de droite,

$$\iint_{S_e} \rho e_i \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S + \iint_{S_s} \rho e_i \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S = \dot{Q} .$$



**Fig. 1.2** – Propriétés d'écoulements dans un tuyau. (a) : figure tirée de [Schlichting \(1979\)](#); [Faisst & Eckhardt \(2003\)](#). (b) : visualisation expérimentale d'une « bouffée turbulente » (*'puff'* en anglais) à  $Re = 1900$ , grâce à des particules anisotropes minces s'orientant dans l'écoulement et réfléchissant la lumière ([Peixinho & Mullin 2006](#)). (c) : a numerical *'puff'* at  $Re = 1900$  with a  $(r, z)$  section of the axial vorticity ([Willis & Kerswell 2007](#)).

En faisant l'hypothèse que les conditions thermiques sont quasi uniformes sur les sections d'entrée et de sortie du tube de courant, il vient

$$\dot{m} [e_i(\text{sortie}) - e_i(\text{entrée})] = \dot{Q} . \quad (1.68)$$

En faisant enfin l'hypothèse que la relation (1.65) est valable sur toute la plage de température balayée, avec une capacité calorifique  $c$  constante, il vient

$$q_c [T(\text{sortie}) - T(\text{entrée})] = \dot{Q} \quad \text{avec} \quad q_c = \dot{m}c \quad \text{le } \mathbf{\textit{débit calorifique}}. \quad (1.69)$$

Cette équation bilan permet par exemple d'estimer le débit massique du fluide caloporteur circulant dans un réacteur nucléaire,  $T(\text{entrée})$  et  $T(\text{sortie})$  étant fixées par des contraintes de conception du réacteur,  $\dot{Q}$  étant la puissance thermique à évacuer, produite par les réactions de fission nucléaire... Ces bilans d'énergie interne seront repris en long, en large et en travers dans le cours de « **transferts thermiques** » de [Jannot \(2015\)](#). Ce cours complètera l'étude des phénomènes de conduction et convection de la chaleur, abordables en thermomécanique des fluides, mais peu considérés ici, par celle des phénomènes de rayonnement, qui dépasse largement le cadre de la thermomécanique des fluides... Voyez enfin l'annexe A du présent document sur l'analyse dimensionnelle en thermomécanique des fluides...

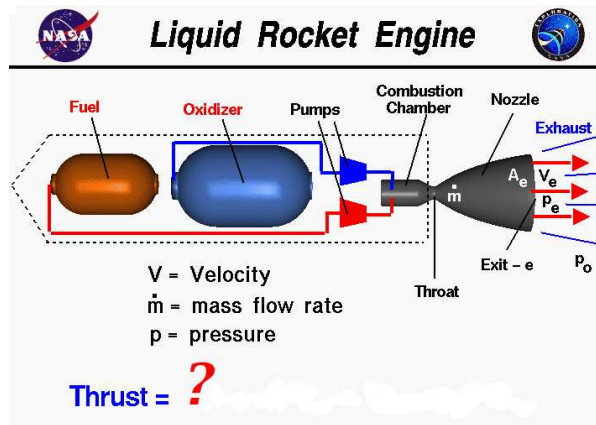


Fig. 1.3 – Schéma de principe d'un *moteur fusée*, tiré d'un site web à but éducatif de la NASA.

## 1.10 Exercices, problème et compléments

### Exercice 1.1 *Estimation de la poussée d'un moteur fusée*

On veut estimer par des bilans globaux la *poussée* (*'Thrust'* en anglais) d'un *moteur fusée* à carburant (*'Fuel'*) et comburant (*'Oxidizer'*) liquides (par exemple du dihydrogène et du dioxygène), du type présenté sur la figure 1.3. Ces liquides sont injectés par des pompes dans la chambre de combustion, les injecteurs débitant en première approximation dans une direction  $y$  perpendiculaire à l'axe d'éjection des gaz brûlés, soit  $Ox$  avec  $O$  le centre de la chambre de combustion. On suppose que la fusée vole à vitesse constante dans un régime stationnaire, et on travaille dans le référentiel de la fusée. Pour les applications numériques, on se focalisera sur le cas du moteur Vulcain 2 d'Ariane 5. Le diamètre de la tuyère (*'Nozzle'*) en sortie est  $d = 1,75$  m. On pose l'hypothèse de type fluide parfait suivante : sur les sections d'entrée  $A_i$  (au niveau des injecteurs) et de sortie  $A_e$  de la tuyère, les vitesses (moyennes, à cause de la turbulence) sont uniformes, et seules des contraintes normales sont exercées par les fluides en amont et aval. En particulier la vitesse d'éjection des gaz brûlés est

$$V_e = 4 \text{ km/s} ,$$

la pression d'éjection est  $p_e = 1 \text{ atm}$ . On note  $p_0$  la pression ambiante. On néglige le poids des fluides contenus dans le volume  $\Omega$  compris dans la chambre de combustion, la gorge (*'throat'*) et la tuyère. Cet ensemble de solides est dorénavant appelé « moteur ».

**1.a** Expliquez pourquoi on peut affirmer que les débits massique d'entrée de carburant et comburant, de sortie de gaz brûlés sont égaux, la valeur pour Vulcain 2 étant

$$\dot{m} = 250 \text{ kg/s} .$$

**1.b** Expliquez pourquoi les débits volumiques d'entrée de carburant et comburant, de sortie de gaz brûlés sont différents. Calculez la valeur numérique du débit volumique de sortie de gaz brûlés. Commentez.

**2** Faites un bilan de quantité de mouvement dans la direction  $x$  pour les fluides contenus dans  $\Omega$ , en partant des formules intégrales de bilan les plus générales. Dédisez de ce bilan l'expression de la force exercée dans la direction  $x$  par le moteur sur les fluides,  $F_x \text{ moteur} \rightarrow \text{fluides}$  .

**3** Faites un bilan de quantité de mouvement dans la direction  $x$  pour le moteur. Le calcul de la force exercée par le milieu ambiant à  $p_0$  sur la tuyère se fera en utilisant la formule intégrale de la divergence. Vous en déduirez la force exercée par le moteur sur la fusée au niveau des fixations du moteur sur la fusée, projetée dans la direction  $x$ , soit  $F_x \text{ moteur} \rightarrow \text{fusée}$ . En soustrayant la projection du poids du moteur, et par un changement de signe de façon à obtenir une quantité positive, vous obtiendrez l'expression analytique simplifiée de la poussée  $P$  du moteur.

**4** Calculez numériquement la poussée au niveau de la mer et la poussée dans le vide, lorsque la fusée a pratiquement quitté l'atmosphère. D'où vient la différence entre ces poussées ? Quelles masses pourraient être compensées par ces poussées ? Commentez ces résultats.

**Exercice 1.2 Propulsion de fusées ou vaisseaux spatiaux idéaux** [test d'octobre 2013]

On prolonge ici l'étude précédente, avec les mêmes notations. Pour les applications numériques on considérera aussi un moteur Vulcain 2. On admet que l'expression de la poussée  $F$  obtenue dans l'exercice 1.1 reste valable même si la fusée ou vaisseau spatial, dénoté ci-après le « vaisseau », ne vole pas à vitesse constante.

**1.a** On étudie la dynamique d'un vaisseau dans le vide, en négligeant l'influence de  $p_e$ , i.e.  $F = \dot{m}V_e$ , et celle de la pesanteur. En supposant de plus le mouvement rectiligne à vitesse  $V$  dans une direction opposée à celle de l'éjection, on admet ainsi que la loi d'évolution de la quantité de mouvement du vaisseau s'écrit

$$m \frac{dV}{dt} = F. \quad (1.70)$$

Montrez que, si le moteur est allumé à  $t = 0$  lorsque la masse totale du vaisseau est  $m_0$ , et fonctionne jusqu'à  $t = t_1$  lorsque la masse totale du vaisseau n'est plus que  $m_1$ , on a pour l'**incrément de vitesse** du vaisseau

$$\delta V = V(t_1) - V(0) = f(V_e, m_0, m_1)$$

avec  $f$  déterminée.

**1.b** Remarquant que  $m_0 = m_e + m_{\text{he}}$ ,  $m_1 = m_{\text{he}}$  avec  $m_e$  la masse d'ergols consommée,  $m_{\text{he}}$  la masse hors ergols, qui contient la charge utile, exprimez le rapport  $m_e/m_{\text{he}}$  en fonction du rapport  $\delta V/V_e$ . Faites l'application numérique dans le cas  $\delta V = 10$  km/s, typique de la mise en orbite « basse » autour de la Terre. Commentez.

**1.c** Exprimez le temps  $t_1$  nécessaire pour atteindre un certain  $\delta V$  en fonction de la masse hors ergols  $m_{\text{he}}$ , du débit massique  $\dot{m}$  et du rapport  $\delta V/V_e$ . Faites une application numérique en calculant  $t_1$ ,  $m_e$  et  $m_0$  avec les paramètres précédents et  $m_{\text{he}} = 8$  t. Commentez.

**2.a** Dans un modèle moins idéalisé d'un problème de lancement - mise en orbite, on prend en compte le poids, supposant la trajectoire verticale, i.e. on remplace  $F$  par  $F - mg$  dans le membre de droite de l'équation (1.70), avec  $g$  l'accélération de la gravité terrestre. On suppose aussi que  $V(0) = 0$ . Calculez  $V(t)$  dans la phase propulsive  $t \in [0, t_1]$ , en fonction de  $V_e$ ,  $g$ ,  $t$ ,  $m_0$  et  $\dot{m}$ . Mettez en évidence un temps caractéristique de la dynamique de ce lancement, soit  $\tau$ , en lequel la vitesse divergerait, si on utilisait à cet instant la formule trouvée pour  $V(t)$ . Vérifiez la cohérence du modèle, i.e. la régularité de  $V(t)$  pour  $t \in [0, t_1]$ .

**2.b** Calculez numériquement  $\tau$  avec les valeurs de la question 1.c.

**2.c** À partir du développement en série de  $\ln(1-x)$  pour  $x \in ]-1,1[$ , montrez que  $V(t)$  est développable en série pour  $t \in [0, t_1[$ , et calculez ce développement en série. Déduisez en que, pour que la fusée décolle, une accélération typique de celle-ci doit être supérieure à  $g$ . Donnez une autre interprétation physique très simple de ce critère. Vérifiez enfin que ce critère est satisfait, dans le cas de la fusée « dimensionnée » question 1.c.

**2.d** Esquissez l'allure de la courbe  $V(t)$ , pour la fusée précédente, et calculez en particulier numériquement la vitesse finale  $V(t_1)$ . Commentez physiquement.

**3** Critiquez succinctement ce modèle de lancement et mise en orbite de charges utiles.

### Exercice 1.3 *Estimation des poussées de turboréacteurs simple et double flux*

[ test d'octobre 2015 ]

On veut estimer les poussées de deux moteurs aéronautiques, à savoir les *turboréacteurs* dont les schémas de principe sont en figure 1.4. On suppose que ces moteurs fonctionnent en régime de croisière, l'avion qu'ils propulsent étant en vol horizontal à la vitesse constante  $V_0$ . On travaille dans le référentiel lié à l'avion, dans lequel l'air ambiant arrive à la vitesse  $V_0$ .

#### §

La figure 1.4a présente un *turboréacteur simple flux* ('*Turbojet*' en anglais, cf. aussi la figure 1.5). On considère que ce turboréacteur est à symétrie de révolution autour de l'axe de son arbre ('*Shaft*'). Il est contenu dans une enveloppe solide représentée en blanc. Par un orifice d'entrée ('*Inlet*') l'air ambiant (en bleu foncé) est aspiré à la vitesse  $V_0$ . Le débit massique d'air ingéré est  $\dot{m}_0$ . Ce flux d'air passe dans le compresseur ('*Compressor*') dont les aubes sont représentées en noir. Une fois comprimé, donc, échauffé, il est mélangé dans la chambre de combustion ('*Burner*' en rouge) au kérosène atomisé, qui se vaporise très rapidement, brûle, et fournit une grande énergie interne. Le débit massique de kérosène injecté est  $\dot{m}_k$ , de sorte qu'en entrée de la turbine ('*Turbine*' en magenta), le débit massique de gaz admis  $\dot{m}_e = \dot{m}_0 + \dot{m}_k$ . L'indice  $e$  signifie '*Exhaust*' pour échappement. En effet, tout ce gaz, après avoir entraîné en rotation l'arbre au niveau de la turbine, est finalement éjecté à la vitesse  $V_e$  à la sortie de la tuyère ('*Nozzle*').

On considère le système constitué de tous les fluides internes au réacteur : air du flux ingéré, kérosène une fois injecté dans la chambre de combustion, puis mélange obtenu en sortie de la chambre de combustion, dit « gaz brûlés ». Ces fluides occupent un domaine  $D_t$ .

**1** En faisant des approximations que vous explicitez, estimez de façon cinématique le taux d'évolution de la quantité de mouvement de ce système fluide en fonction de  $V_0$ ,  $V_e$ ,  $\dot{m}_0$  et  $\dot{m}_e$ . Interprétez la physique.

**2** De même, estimez de façon dynamique le taux d'évolution de la quantité de mouvement de ce système fluide. Déduisez-en la force exercée par les fluides sur le moteur,  $\bar{\mathbf{F}}_{\text{fluides} \rightarrow \text{moteur}}$  en fonction de  $V_0$ ,  $V_e$ ,  $\dot{m}_0$  et  $\dot{m}_e$ . Interprétez la physique.

**3** De même, en écrivant la loi de l'évolution de la quantité de mouvement pour le moteur, supposé fixé à l'avion par un « bras » de taille modeste, estimez la poussée  $F$  de ce moteur. Commentez, en comparant notamment au cas d'un moteur fusée.



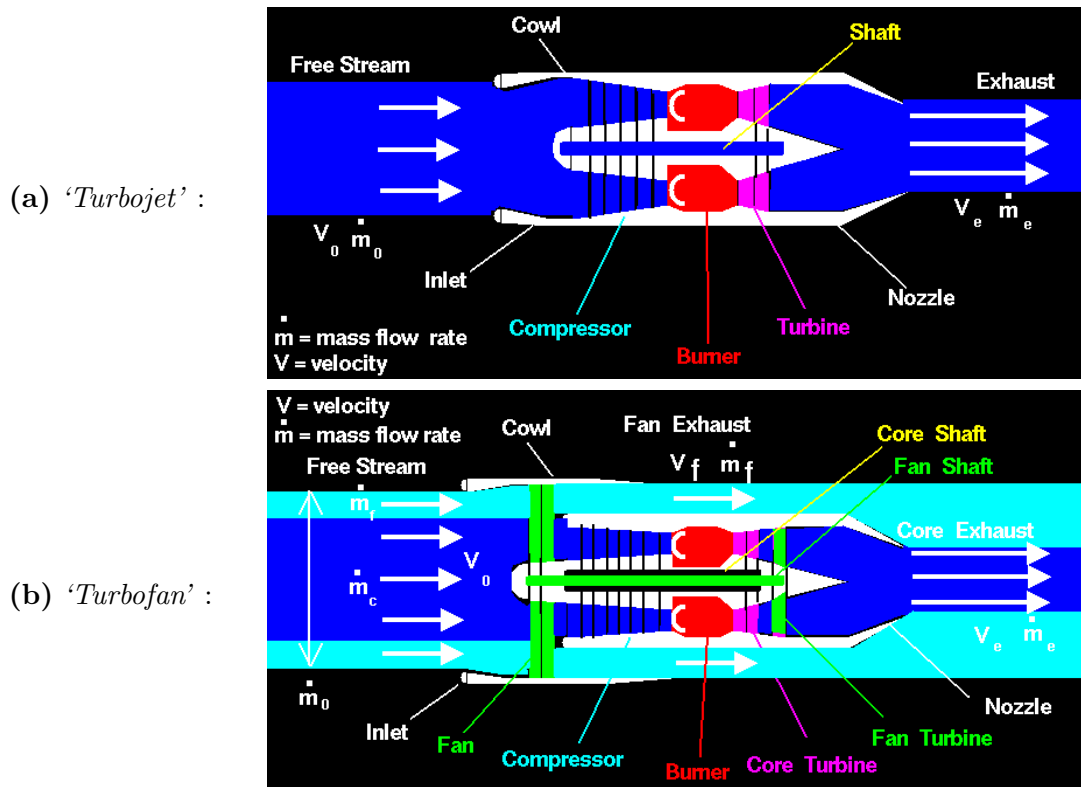


Fig. 1.4 – En couleurs dans la version PDF. Schémas de principe, tirés d'un site web à but éducatif de la NASA, d'un (a) *turboréacteur simple flux - simple corps*, (b) *turboréacteur double flux - double corps*, dans le référentiel lié à l'avion.

4 En pratique, le débit massique de kérosène injecté est négligeable, donc  $\dot{m}_e \simeq \dot{m}_0$ . Donnez en conséquence une expression approximative de  $F$  en fonction de  $\dot{m}_0$ ,  $V_0$  et  $V_e$  seulement.

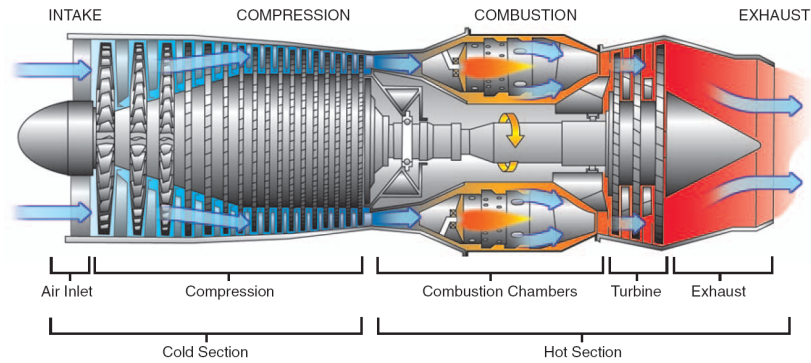
### §

La figure 1.4b présente un *turboréacteur double flux* ('Turbofan'), qui est aussi à *double corps* ('two spool'). En effet, dans l'arbre de cœur ('Core Shaft' en noir), solidaire du compresseur et de la turbine de cœur ('Core Turbine' en magenta), est logé le système représenté en vert, l'arbre du ventilateur ('Fan Shaft') solidaire du ventilateur (ou « soufflante », 'Fan') et de sa turbine ('Fan Turbine'). Ces deux systèmes ont des vitesses de rotation différentes, ce qui permet une certaine flexibilité et de meilleurs réglages.

Un *flux primaire* (ou flux de cœur 'Core Flow' ou flux chaud en bleu foncé) est admis en entrée à une vitesse  $V_0$  avec un débit massique  $\dot{m}_c$ . Il subit une évolution similaire à celle du flux unique du turboréacteur simple flux. Ce flux primaire passe dans le ventilateur, où il est accéléré une première fois. Il est ensuite comprimé dans le compresseur, mélangé dans la chambre de combustion au kérosène atomisé, qui se vaporise et brûle. Le débit massique de kérosène injecté est  $\dot{m}_k$ , de sorte qu'en entrée de la turbine de cœur le débit massique de gaz admis  $\dot{m}_e = \dot{m}_c + \dot{m}_k$ . Tout ce gaz, après avoir entraîné en rotation l'arbre de cœur, au niveau de la turbine de cœur, puis l'arbre du ventilateur au niveau de la turbine du ventilateur, est enfin éjecté en sortie à la vitesse  $V_e$ .

De plus, un *flux secondaire* (ou flux de ventilateur 'Fan Flow' ou flux froid en bleu clair), de débit massique  $\dot{m}_f$ , est admis en entrée à la vitesse  $V_0$ , autour du cœur. Il est accéléré par le ventilateur puis rejeté en sortie à une vitesse  $V_f$ .

‘Turbojet’ :



**Fig. 1.5** – En couleurs dans la version PDF. Schéma plus détaillé d'un *turboréacteur simple flux et simple corps*, tiré d'un document de l'U.S. Federal Aviation Administration.

On appelle taux de dilution (*'Bypass ratio'*) le rapport entre le débit d'air qui évite (*'bypasses'*) la chambre de combustion et le débit d'air qui passe dans la chambre de combustion,  $b = \dot{m}_f / \dot{m}_c$ . Le débit total entrant est la somme de ces deux débits  $\dot{m}_0 = \dot{m}_f + \dot{m}_c$ .

**5** En faisant des approximations analogues à celles utilisées questions 1, 2 et 3, estimez la poussée  $F$  de ce moteur en fonction des débits  $\dot{m}_c$ ,  $\dot{m}_f$ ,  $\dot{m}_e$  et des vitesses  $V_0$ ,  $V_e$ ,  $V_f$ .

**6** En pratique le débit de kérosène est négligeable,  $\dot{m}_e \simeq \dot{m}_c$ .

Remaniez la formule précédente pour exprimer  $F$  comme la somme d'une poussée due au flux primaire ou chaud  $F_c$  et d'une poussée due au flux secondaire ou froid  $F_f$ .

Commentez physiquement.

**7** Exprimez finalement  $F$  en fonction des seules données  $\dot{m}_0$ ,  $\dot{m}_c$ ,  $V_0$ ,  $V_e$ ,  $V_f$  et  $b$ .

**8** On considère un moteur CFM56-5B équipant un Airbus A320 en régime de croisière à Mach 0,8 à une altitude de 35000 pieds soit 10700 m. La température ambiante est d'environ  $-54^\circ\text{C}$ .

**8.a** Estimez la vitesse de vol  $V_0$  de l'avion, en m/s, avec 2 chiffres significatifs.

**8.b** Sachant que  $\dot{m}_c = 23 \text{ kg/s}$ ,  $b = 5,8$ ,  $V_e = 500 \text{ m/s}$ ,  $V_f = 350 \text{ m/s}$ , estimez les poussées  $F_c$ ,  $F_f$  et  $F$ . Commentez physiquement.

#### Exercice 1.4 *Écoulement laminaire dans un tuyau*

**1.a** Calculez l'écoulement laminaire d'un fluide newtonien dans un tuyau cylindrique long à section circulaire de rayon  $a$ . Vous utiliserez des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , avec  $Oz$  l'axe de révolution du tuyau. Vous supposerez que l'écoulement est établi, au sens où l'on se focalise sur une tranche, de longueur  $L$  dans la direction axiale, située loin de l'entrée et de la sortie, de sorte que, dans cette section, le champ de vitesse  $\bar{v}$  est indépendant de  $z$ .

Vous montrerez à l'aide de l'équation locale d'évolution de la quantité de mouvement qu'un gradient de pression motrice de la forme  $-G\bar{e}_z$  est nécessaire pour produire l'écoulement, et relierez  $G$  aux paramètres du problème, notamment, la vitesse au centre  $W > 0$ . Vous interpréterez physiquement cette relation.

**1.b** Représentez le champ de vitesse correspondant.

**1.c** Établissez l'expression du champ de pression physique dans le tuyau, sachant que l'axe de

celui-ci,  $Oz$ , est orienté à un angle  $\alpha$  par rapport au plan horizontal. Interprétez cette expression, grâce à trois figures, en distinguant trois cas.

**2** Reliez la vitesse débitante  $V$  à la vitesse au centre  $W$  ; commentez.

**3** Calculez, à partir de la connaissance du champ de vitesse et de la loi de comportement du fluide, le vecteur contrainte exercé par le fluide sur la paroi du tuyau. Montrez l'existence d'une contrainte normale et d'une contrainte tangentielle, appelée aussi « contrainte pariétale »  $\tau_p$ . Expliquez la physique correspondante.

**4** En supposant pour simplifier le tuyau en appesanteur<sup>10</sup>, faites un bilan global de quantité de mouvement pour la tranche de fluide étudiée. Retrouvez grâce à ce bilan, que vous interpréterez physiquement, l'expression de  $\tau_p$ .

**5** *Questions subsidiaires facultatives dans un premier temps*

**5.a** Calculez les pertes de charge dans cet écoulement, en les mettant sous la forme standard (1.59) faisant apparaître le coefficient de perte de charge (ou de frottement)  $\lambda$ , que vous exprimerez en fonction de la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide, de la vitesse débitante  $V$ , et du rayon  $a$ .

**5.b** Vérifiez par un calcul direct le lien entre ces pertes de charge et la dissipation visqueuse.

### Problème 1.1 *Étude d'écoulements de Couette cylindrique - Applications*

Un rhéomètre de Couette cylindrique (figure 1.6, déjà présentée dans Plaut 2015b, auquel on renvoie pour une légende détaillée) est une cavité comprise entre un cylindre intérieur tournant, de rayon extérieur  $a$ , et un cylindre extérieur fixe, de rayon intérieur  $b$ , remplie du liquide newtonien à étudier. En mesurant le couple appliqué au cylindre tournant en fonction de sa vitesse de rotation constante  $\Omega$ , on veut remonter à la viscosité du liquide. Dans le repère  $Oxyz$  avec  $Oz$  l'axe vertical commun aux cylindres,  $Oxy$  contenant la base du domaine liquide, on utilise naturellement le système des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Comme cela est démontré dans le problème 2.2 de Plaut (2015a), on peut, par symétrie, et, puisque le fluide est incompressible, supposer que le champ de vitesse de l'*écoulement laminaire* est de la forme  $\bar{\mathbf{v}} = V(r) \bar{\mathbf{e}}_\theta$ .

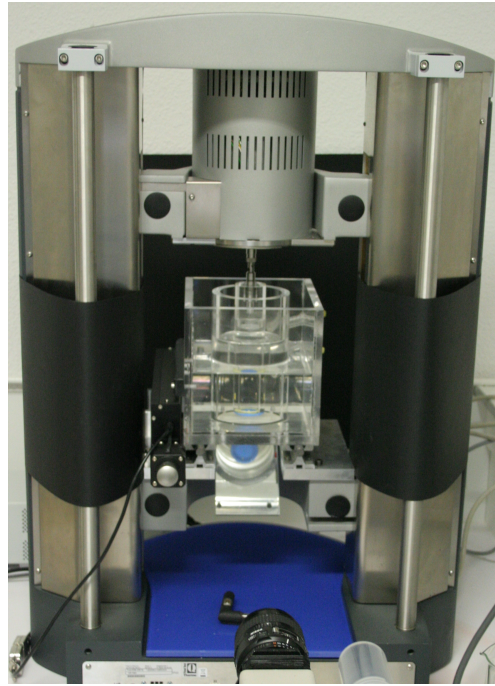
**1** Explicitez le bilan local de quantité de mouvement dans le liquide et montrez à partir de celui-ci que le champ de pression motrice ne dépend que de  $r$  seulement,  $\hat{p} = \hat{p}(r)$ .

**2** Calculez le champ de vitesse dans le liquide, et représentez le champ de vecteurs correspondant sur un dessin.

**3** *Question subsidiaire facultative* : calculez le champ de pression dans le liquide, et précisez la forme de la surface supérieure du liquide en contact avec l'atmosphère, située « en moyenne » en  $z = h$ .

*Indications* : On supposera que le modèle obtenu pour le champ de vitesse est valable jusqu'à la surface libre. L'objectif est surtout de montrer que celle-ci est très peu déformée ; ainsi, avec les paramètres de l'application numérique de la question 7.2, vous devriez pouvoir démontrer que l'on a des variations de hauteur de la surface libre de moins de 1 mm.

10. Pour une étude plus réaliste et complète en présence de pesanteur, voyez le problème 7.1 de Plaut (2015b).



**Fig. 1.6** – *Expérience de Couette cylindrique* du Lemta menée dans l'équipe de Salaheddine Skali-Lami par Ghania Benbelkacem. En haut on distingue le moteur électrique, de l'axe duquel est solidaire le cylindre intérieur (de rayon extérieur  $a$ ). Entre celui-ci et le cylindre extérieur (de rayon intérieur  $b$ ) se trouve le liquide à étudier, dont on distingue la surface libre.

**4** Quelle est la valeur du couple moteur qu'il faut exercer sur le cylindre intérieur pour entretenir son mouvement ? Expliquez comment on peut mesurer la viscosité dynamique  $\eta$  du liquide.

**5** Dans le but d'avoir une bonne précision sur la mesure de  $\eta$ , quelle est la bonne « géométrie » d'un rhéomètre de ce type ?

**6** Indépendamment de toute problématique de thermique, abordée ci-après, d'un point de vue hydrodynamique, à quoi faut-il faire attention lorsque l'on fait de telles mesures rhéologiques ?

**7.1** Faites un bilan global d'énergie cinétique pour ce problème, et interprétez physiquement ce bilan.

**7.2** Si  $a = 2$  cm,  $b = 4$  cm,  $h = 20$  cm, le fluide est une huile 1000 fois plus visqueuse que l'eau, quelle puissance doit développer le moteur pour entretenir un écoulement permanent à la vitesse de rotation  $\Omega = 5$  rad/s ?

**8** Discutez de la thermique de ce système, à partir du bilan global d'énergie interne. Que doit-on supposer sur les flux de chaleur pour que l'expérience ait vraiment lieu en régime permanent ? Si le système était isolé, comment sa température évoluerait-elle ?

**9** Estimez la puissance dissipée et le taux d'élévation de température correspondant à une expérience avec le rhéomètre du Lemta, dont les paramètres sont ceux de la question 7.2. Commentez.

**10.1** On se focalise maintenant sur le cas du film d'huile destiné à la lubrification de l'un des paliers de l'arbre du groupe turboalternateur d'une centrale nucléaire. L'arbre possède un rayon  $a$  grand devant l'épaisseur du film  $d = b - a \ll a$ . Donnez l'expression de la puissance dissipée fonction des

seuls paramètres géométriques  $a$ ,  $d$  et  $h$ , longueur du palier. Que se passe-t-il si l'épaisseur  $d$  est très faible? Expliquez physiquement ce phénomène.

**10.2** Quel est l'ordre de grandeur de la puissance dissipée sur les paliers de l'arbre d'un groupe turboalternateur de centrale nucléaire « moderne »?

On précise que ce groupe comprend une turbine constituée de 4 corps (ou « étages »), 1 corps haute et moyenne pression, 3 corps basse pression, et 1 alternateur. Chaque corps et l'alternateur sont supportés par 2 paliers. Chaque palier est de rayon intérieur  $a = 60$  cm, de longueur  $h = 60$  cm. Le film d'huile est d'épaisseur  $d = 1$  mm. En fonctionnement normal la température de l'huile est  $60^\circ\text{C}$ , elle a une masse volumique  $850\text{ kg/m}^3$  et une viscosité cinématique  $0,2$  Stokes; pour passer de cette unité hors SI à l'unité du SI, on vous suggère par exemple d'utiliser Mathematica. L'arbre tourne à 1500 tours par minute.

Discutez physiquement du résultat obtenu.

### Complément 1.1 *Sur la première instabilité de l'écoulement de Couette cylindrique*

L'écoulement à symétrie de révolution subit une *instabilité* qui mène à des *vortex de Taylor* lorsque le nombre de Reynolds devient grand, voir par exemple Guyon et al. (2001); Charru (2007) ou la figure 1.7, tirée du site web de *Princeton Gas Dynamics Lab*,

[www.princeton.edu/~gasdyn/Research/T-C\\_Research\\_Folder/Intro\\_to\\_T-C\\_Flows.html](http://www.princeton.edu/~gasdyn/Research/T-C_Research_Folder/Intro_to_T-C_Flows.html).

Alors l'hypothèse d'écoulement laminaire purement azimutal et ne dépendant spatialement que du rayon est violée; des « *brisures de symétries* » sont associées à cette instabilité. Plus précisément le critère de « *bifurcation* » des propriétés de stabilité de l'écoulement laminaire purement azimutal<sup>11</sup> est

$$Re = \frac{\Omega a(b-a)}{\nu} = Re_c = 41\sqrt{\frac{a}{b-a}}. \quad (1.71)$$

L'élève intéressé pourra se poser la question des valeurs de  $Re$  et  $Re_c$  dans les cas des questions 7 et 10 du problème 1.1, et en tirer des conclusions physiques...

Un exemple d'application de l'instabilité structurante qui a lieu lorsque  $Re > Re_c$  est le 'Taylor Vortex-based UV Disinfection System' de Georgia Tech, décrit sur

[http://atrp.gatech.edu/pt17-2/17-2\\_p1.html](http://atrp.gatech.edu/pt17-2/17-2_p1.html).

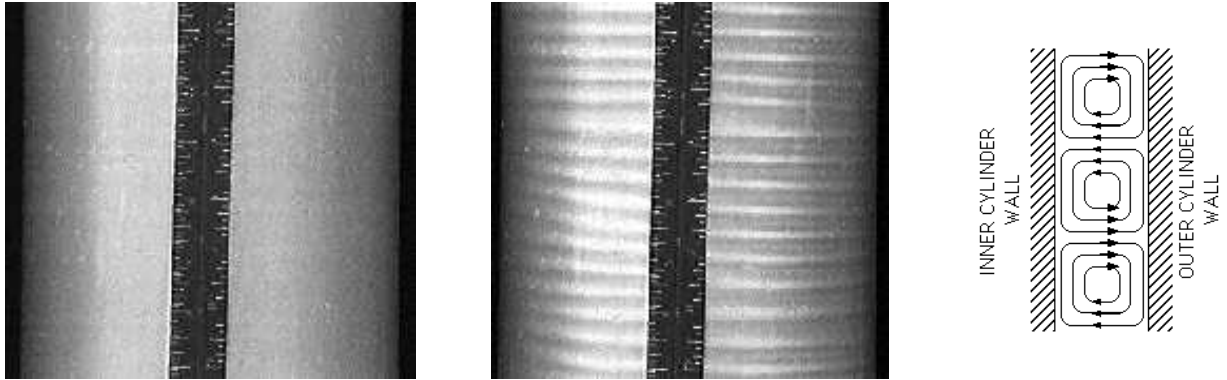
Je cite :

*'Georgia Tech's innovative Taylor vortex-based advanced UV (ultraviolet) disinfection system has proven its effectiveness at pathogen control in turbid liquid streams. Using aerobic plate counts (APC), researchers have shown a 5-log removal of pathogens in sample streams. The high level of inactivation occurs even with juices and beverages that are opaque to germicidal UV light as well as other liquids that contain suspended solids and turbidity (cloudiness)... The Taylor vortex design continuously pushes the liquid to the quartz stator surface where it exposes any bacteria present to a uniform dosage of radiation, thus providing much greater inactivation efficiency.'*

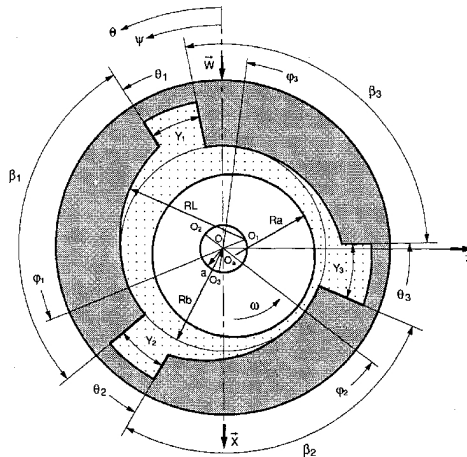
11. On désigne par « *bifurcation* » un changement brutal de comportement, ici l'écoulement laminaire purement azimutal est stable si  $Re < Re_c$  mais instable si  $Re > Re_c$ . On donnera quelques éléments sur la théorie des instabilités en section 3.3.

À bas Reynolds : écoulement laminaire :    À + haut Reynolds : vortex de Taylor :

Schéma de l'écoulement associé :



**Fig. 1.7** – Photographies à gauche et schéma de principe à droite d'écoulements obtenus dans le système de Couette cylindrique. Les visualisations utilisent, comme dans le cas de la figure 1.2b, des particules anisotropes minces s'orientant dans l'écoulement et réfléchissant la lumière.



**Fig. 1.8** – Schéma géométrique d'un palier multilobes asymétrique, tiré de Frêne (1990).

### Complément 1.2 Sur les paliers réellement utilisés en centrales

En réalité les paliers diffèrent selon le corps supporté et le type de centrale. D'autre part on utilise non pas des paliers circulaires mais des paliers *multilobes* le plus souvent asymétriques, du type de celui présenté sur la figure 1.8. Ce type de paliers permet d'améliorer la stabilité du système tout en réduisant la dissipation. Cette problématique de la *lubrification* et les technologies des paliers et butées utilisés dans ce but sont par exemple présentées dans le traité de Frêne (1990).

## Chapitre 2

# Conditions à une interface entre fluides - Tension superficielle

Dans ce chapitre toujours fondamental, on passe en revue les *conditions à une interface entre deux fluides*. On commence par les *conditions de nature cinématique* section 2.1. Les sections suivantes sont consacrées à l'étude de la *condition limite dynamique*, qui repose sur un bilan physique de forces. On s'est inspiré pour cela de [Fermigier \(1999\)](#) et [Guyon et al. \(2001\)](#) pour la partie physique, et de l'article *Courbure* de Wikipedia pour la section 2.3.3. En guise de conclusion, un problème relativement simple faisant intervenir ces conditions est posé.

### 2.1 Conditions de nature cinématique

Une première *condition limite cinématique* universelle, au sens où elle est valable en fluide parfait comme en fluide visqueux, stipule qu'*une particule qui se trouve à un instant donné à une interface y reste toujours*<sup>1</sup>. Si l'interface est d'équation

$$F(\bar{\mathbf{x}}, t) = 0 \quad (2.1)$$

il faut vérifier, pour tout  $\bar{\mathbf{x}}$  et  $t$ ,

$$\boxed{F(\bar{\mathbf{x}}, t) = 0 \implies \frac{dF(\bar{\mathbf{x}}, t)}{dt} = 0} \quad (2.2)$$

Ceci doit être vérifié dans chaque fluide, de part et d'autre de l'interface. Choisissons un système de coordonnées cartésiennes tel que, en un point  $\bar{\mathbf{x}}_0$  et à un instant  $t_0$  donnés,

$$\text{le plan tangent à l'interface soit le plan } z = 0 \quad (2.3)$$

Alors, au voisinage du point  $\bar{\mathbf{x}}_0$  et de l'instant  $t_0$ , l'équation de l'interface peut s'écrire sous la forme

$$F(\bar{\mathbf{x}}, t) = z - f(x, y, t) = 0 \quad (2.4)$$

Dans chaque fluide, repéré par un indice  $i$  valant 1 ou 2, il faut donc vérifier que

$$z = f(x, y, t) \implies \frac{dz}{dt} = v_{zi} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}_i \cdot \bar{\nabla} f \quad (2.5)$$

---

1. On parle pour cette raison d'interface « matérielle ». Cette condition exprime aussi qu'il n'y a pas de transfert de masse à travers l'interface.

Ainsi la *vitesse normale de chaque fluide à l'interface* est la *vitesse normale de l'interface dans ce fluide*. Celle-ci peut dépendre du fluide considéré, si les fluides sont parfaits<sup>2</sup>.

En *fluides visqueux*, il faut rajouter une deuxième condition cinématique de *continuité des vitesses tangentielles à l'interface*, à cause de l'*adhérence* entre les deux fluides.

Travaillant toujours au voisinage d'un point  $\bar{\mathbf{x}}_0$  et d'un instant  $t_0$  vérifiant la condition (2.3), ce qui permet localement d'écrire l'équation de l'interface sous la forme (2.4), on a donc

$$v_{x1}(\bar{\mathbf{x}}_0, t_0) = v_{x2}(\bar{\mathbf{x}}_0, t_0) \quad \text{et} \quad v_{y1}(\bar{\mathbf{x}}_0, t_0) = v_{y2}(\bar{\mathbf{x}}_0, t_0) . \quad (2.6)$$

L'équation (2.5) montre alors que

$$v_{z1}(\bar{\mathbf{x}}_0, t_0) = v_{z2}(\bar{\mathbf{x}}_0, t_0) . \quad (2.7)$$

On retiendra donc qu'*à une interface entre deux fluides visqueux toutes les composantes de la vitesse sont continues*. Ainsi la notion de vitesse normale de l'interface entre deux fluides visqueux est bien définie, i.e. ne dépend pas du fluide considéré.

## 2.2 Forces linéiques de tension superficielle - Interprétation

Afin de préparer l'écriture de la *condition limite dynamique*, considérons une interface plane, placée en  $z = 0$ , séparant un fluide 1 situé dans le demi espace  $z < 0$  d'un fluide 2 situé dans le demi espace  $z > 0$ . Considérons un petit parallélépipède de fluide 1 juste sous celle-ci, comme cela est présenté figure 2.1a. La face située dans le plan de l'interface, carrée de côté  $dx$ , est centrée en  $x\bar{\mathbf{e}}_x + y\bar{\mathbf{e}}_y$ . Les faces latérales sont rectangulaires de grand côté  $dx$  et de petit côté  $dz$ , avec  $dz \ll dx$ . Il existe des *forces linéiques de tension superficielles* qui assurent la cohésion et la planéité de l'interface :

- sur la face latérale située en  $x + dx/2$  est appliquée par les fluides environnants une force

$$\boxed{d\bar{\mathbf{F}} = \gamma dx \bar{\mathbf{e}}_x} ; \quad (2.8)$$

- sur la face latérale située en  $x - dx/2$  est appliquée par les fluides environnants une force

$$-d\bar{\mathbf{F}} = -\gamma dx \bar{\mathbf{e}}_x ;$$

- sur la face latérale située en  $y + dx/2$  est appliquée par les fluides environnants une force

$$d\bar{\mathbf{F}}' = \gamma dx \bar{\mathbf{e}}_y ;$$

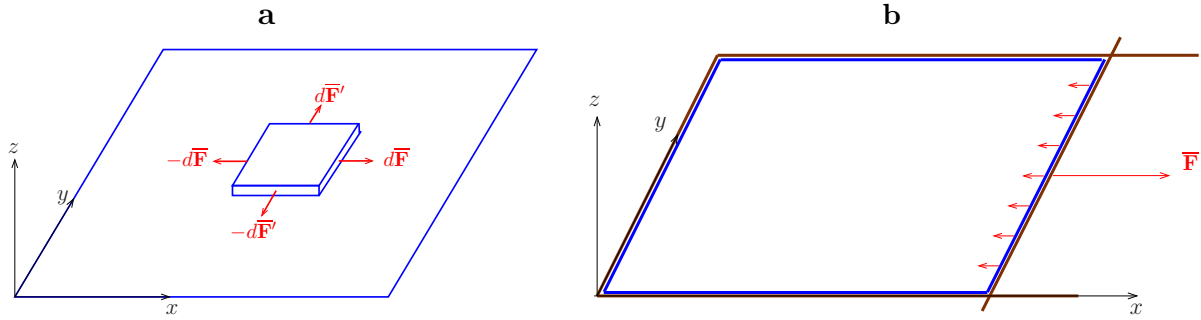
- sur la face latérale située en  $y - dx/2$  est appliquée par les fluides environnants une force

$$-d\bar{\mathbf{F}}' = -\gamma dx \bar{\mathbf{e}}_y .$$

Le *coefficient de tension superficielle*  $\gamma$  est donc la force de tension de surface par unité de longueur. Pour une interface eau-air  $\gamma = 0,074$  N/m. Ce phénomène peut être mis en évidence expérimentalement en étudiant un film de liquide peu lourd (par exemple de l'eau savonneuse) s'appuyant sur un cadre en U, complété par une tige mobile mouillée par le film, comme cela est

2. Méditez sur ce sujet l'exemple du problème 3.3.





**Fig. 2.1** – **a** : Représentation des forces tangentielles de tension superficielle, exercées sur un petit parallélépipède du fluide 1 juste « sous » l'interface plane. Le fluide 2 est situé « au dessus ». **b** : Représentation des forces tangentielles de tension superficielle, exercées sur une tige mobile mouillée par un film de liquide.

représenté sur la figure 2.1b. On observe que la tige doit être maintenue avec une force  $\bar{\mathbf{F}}$  non nulle, dans le plan des deux interfaces air-liquide « inférieure » et liquide-air « supérieure », pour rester immobile. D'autre part on observe que cette force est proportionnelle à la longueur  $l$  de la tige. Ceci montre bien l'existence de forces linéiques de la forme (2.8), puisque pour équilibrer les forces exercées au niveau des deux interfaces air-liquide et liquide-air mouillant la tige, il faut exercer

$$\bar{\mathbf{F}} = -2 \int_{y=0}^l d\bar{\mathbf{F}} = -2 \int_{y=0}^l \gamma dy (-\bar{\mathbf{e}}_x) = 2 \gamma l \bar{\mathbf{e}}_x . \quad (2.9)$$

Pour augmenter la surface des interfaces de  $dS = 2 l dx$ , il faut exercer sur la tige, donc, par transmission, sur les interfaces, un travail

$$dW = F dx = \gamma dS . \quad (2.10)$$

Ainsi le coefficient de tension superficielle peut être vu comme une *énergie par unité de surface* : avoir une interface d'aire  $S$  coûte une *énergie de surface*

$$\boxed{E_{\text{surface}} = \gamma S} . \quad (2.11)$$

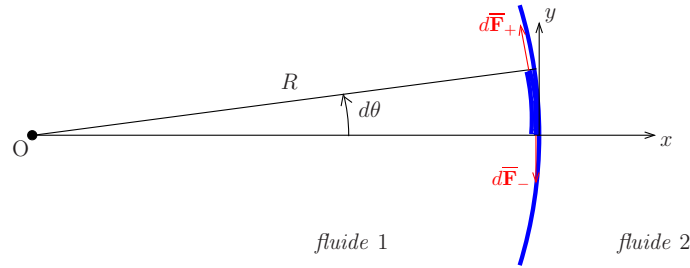
## 2.3 Condition dynamique à une interface

### 2.3.1 Cas d'une interface plane

Faisons un bilan de quantité de mouvement pour le parallélépipède de la figure 2.1a. Comme le volume  $d^3x = (dx)^2 dz$  de celui-ci est un infiniment petit d'ordre supérieur, les termes de volume, i.e. le terme inertiel et le terme de force de pesanteur, sont négligeables. La loi d'évolution de la quantité de mouvement s'écrit en conséquence

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{0}} &= \sum \bar{\mathbf{F}}_{\text{extérieures linéiques}} + \sum \bar{\mathbf{F}}_{\text{extérieures surfaciques}} \\ &= d\bar{\mathbf{F}} - d\bar{\mathbf{F}} + d\bar{\mathbf{F}}' - d\bar{\mathbf{F}}' + d^2\bar{\mathbf{F}}_2 + d^2\bar{\mathbf{F}}_1 \\ \bar{\mathbf{0}} &= d^2\bar{\mathbf{F}}_2 + d^2\bar{\mathbf{F}}_1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

somme des forces exercées par le fluide 2 sur la face « supérieure » et par le fluide 1 sur la face « inférieure ». Les forces de tension de surfaces se compensent donc mutuellement dans le cas d'une



**Fig. 2.2** – Représentation des forces de tension superficielles s'exerçant sur un petit élément de fluide 1 juste « à gauche » d'une interface courbe, présentant un rayon de courbure fini seulement. On confond, à l'échelle de la figure, l'intersection entre l'interface et le plan de la figure avec le cercle osculateur à cette intersection.

interface plane. Les forces de surface  $d^2\bar{\mathbf{F}}_1$  et  $d^2\bar{\mathbf{F}}_2$ , quant à elles, sont définies par les tenseurs des contraintes dans ces deux fluides,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_1$  et  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_2$ ,

$$d^2\bar{\mathbf{F}}_1 = -\bar{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_z d^2S \quad \text{et} \quad d^2\bar{\mathbf{F}}_2 = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_z d^2S$$

avec  $d^2S = (dx)^2$  l'aire des faces « supérieure » et « inférieure ». La loi de la quantité de mouvement (2.12) donne donc, dans le cas d'une interface plane, qu'il y a continuité des vecteurs contraintes :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}, \quad (2.13)$$

en notant  $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{e}}_z$  le vecteur unitaire normal à l'interface, allant du fluide 1 vers le fluide 2.

### 2.3.2 Cas d'une interface courbe bidimensionnelle

Considérons une interface courbe, étendue dans la direction  $z$ , direction d'invariance de cette interface. Au voisinage d'un point, on utilise un repère  $Oxyz$  avec  $O$  centre de courbure de l'interface,  $Ox$  dans la direction normale à l'interface,  $\bar{\mathbf{e}}_y$  vecteur tangent à l'interface. Le **rayon de courbure** de l'interface au point considéré est  $R$ . Une situation typique d'un cas « concave »<sup>3</sup> est présentée figure 2.2. Faisons un bilan de quantité de mouvement sur un petit élément de fluide 1 situé, en coordonnées cylindriques associées à  $Oxyz$ , dans le domaine

$$\Omega = \{(r, \theta, z) \in [R - dr, R] \times [0, d\theta] \times [0, dz]\}.$$

Comme le volume  $d^3x = R dr d\theta dz$  de  $\Omega$  est un infiniment petit d'ordre 3, on peut encore négliger (comme au niveau de l'équation 2.12) les termes de volume dans le bilan de quantité de mouvement. Celui-ci s'écrit donc

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{0}} &= \sum \bar{\mathbf{F}}_{\text{extérieures linéiques}} + \sum \bar{\mathbf{F}}_{\text{extérieures surfaciques}} \\ \bar{\mathbf{0}} &= d\bar{\mathbf{F}}_+ + d\bar{\mathbf{F}}_- + d\bar{\mathbf{F}}_z - d\bar{\mathbf{F}}_z + d^2\bar{\mathbf{F}}_2 + d^2\bar{\mathbf{F}}_1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec

- $d\bar{\mathbf{F}}_+$  la force exercée sur la frontière définie par  $\theta = d\theta$  ;
- $d\bar{\mathbf{F}}_-$  la force exercée sur la frontière définie par  $\theta = 0$  ;
- $d\bar{\mathbf{F}}_z$  la force exercée sur la frontière définie par  $z = dz$  ;
- $-d\bar{\mathbf{F}}_z$  la force exercée sur la frontière définie par  $z = 0$  ;

3. Cf. la fin de cette sous-section.

- $d^2\bar{\mathbf{F}}_2 = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_x d^2S$  la force exercée sur la frontière définie par  $r = R$ ,
- $d^2\bar{\mathbf{F}}_1 = -\bar{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_x d^2S$  la force exercée sur la frontière définie par  $r = R - dr$ ,

$d^2S = R d\theta dz$  étant l'aire de ces deux dernières frontières. Les forces  $d\bar{\mathbf{F}}_z$  et  $-d\bar{\mathbf{F}}_z$  se compensent exactement. Par contre, du fait de la courbure de l'interface, ce n'est plus le cas des forces

$$d\bar{\mathbf{F}}_+ = \gamma dz \bar{\mathbf{e}}_\theta(d\theta) = \gamma dz (-d\theta \bar{\mathbf{e}}_x + \bar{\mathbf{e}}_y)$$

et

$$d\bar{\mathbf{F}}_- = -\gamma dz \bar{\mathbf{e}}_\theta(0) = -\gamma dz \bar{\mathbf{e}}_y .$$

Il vient

$$d^2\bar{\mathbf{F}}_{\text{tension sup.}} := d\bar{\mathbf{F}}_+ + d\bar{\mathbf{F}}_- = -\gamma d\theta dz \bar{\mathbf{e}}_x = -\gamma \frac{d^2S}{R} \bar{\mathbf{n}}, \quad (2.15)$$

en notant  $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{e}}_x$  la normale unitaire à l'interface sortant du fluide 1. La loi d'évolution de la quantité de mouvement appliquée à  $\Omega$ , (2.14), s'écrit en conséquence

$$\bar{\mathbf{0}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S - \gamma \frac{d^2S}{R} \bar{\mathbf{n}} \iff \boxed{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}} = \gamma \frac{1}{R} \bar{\mathbf{n}}} . \quad (2.16)$$

Physiquement, les forces de tension superficielles ne se compensent pas à cause de la courbure de l'interface (d'autant plus que  $R$  est petit), et leur résultante a une composante normale (2.15) qu'il faut compenser par un « *saut de contrainte normale* ». En fluides parfaits, ce saut de contrainte normale se traduit exactement par un saut de pression,

$$p_1 - p_2 = \gamma \frac{1}{R}, \quad (2.17)$$

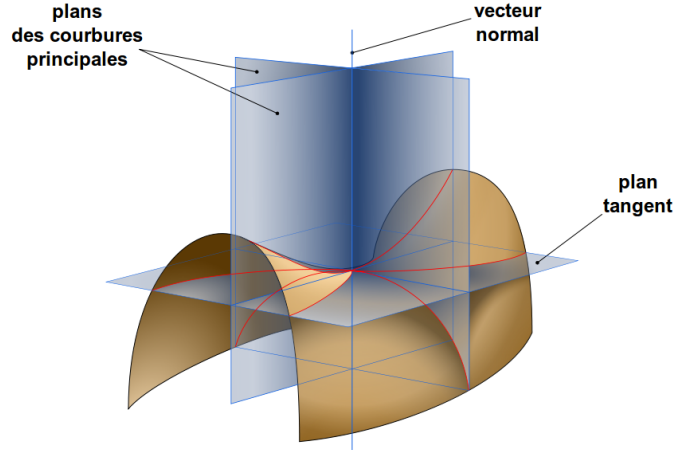
qui exprime que dans le cas de la figure 2.2 il existe une supression dans le fluide 1. Les formules (2.16) et (2.17) sont valables dans le cas d'une interface « concave », pour laquelle le centre de courbure se trouve du côté du fluide 1. Dans le cas d'une interface « convexe », pour laquelle le centre de courbure se trouve du côté du fluide 2, on peut se convaincre (faire un dessin) que le saut de contrainte normale (donc de pression en fluides parfaits) est opposé. Pour cette raison, on définit le rayon de courbure de façon algébrique :

- $R > 0$  dans le cas d'une interface « concave », pour laquelle le centre de courbure se trouve du côté du fluide 1 ;
- $R < 0$  dans le cas d'une interface « convexe », pour laquelle le centre de courbure se trouve du côté du fluide 2.

Alors dans les deux cas les formules (2.16) et (2.17) sont valables.

### 2.3.3 Cas d'une interface courbe tridimensionnelle

Dans le cas d'une interface courbe tridimensionnelle, on peut considérer en un point quelconque  $M$  un plan tournant, perpendiculaire en  $M$  au plan tangent à la surface. Ce plan intersecte la surface considérée en une courbe. À chacune des courbes ainsi construite est associée sa courbure en  $M$ , inverse du rayon de courbure de cette courbe. Les valeurs minimum et maximum de la courbure définissent les *deux rayons de courbure principaux*  $R_1$  et  $R_2$ . En général, ces rayons sont différents et, dans ce cas, les plans correspondants, dits de « courbure principale », sont perpendiculaires entre eux, comme cela est présenté sur la figure 2.3 [ cf. [Courbure sur Wikipedia](#) ]. En écrivant la loi d'évolution de la quantité de mouvement d'un petit élément de surface centré en



**Fig. 2.3** – En couleurs dans la version PDF. Représentation d’une interface tridimensionnelle quelconque et des plans dont les intersections avec l’interface possèdent des cercles osculateurs de rayon  $R_1$  et  $R_2$ , rayons de courbure principaux au point considéré. En l’occurrence  $R_1$  et  $R_2$  sont de signes opposés.

M, on peut se convaincre que dans les deux plans de courbure principale la situation est analogue à celle de la figure 2.2, d’où des contributions de même forme (2.15),

$$-\gamma \frac{d^2 S}{R_1} \bar{\mathbf{n}} \quad \text{et} \quad -\gamma \frac{d^2 S}{R_2} \bar{\mathbf{n}},$$

avec  $\bar{\mathbf{n}}$  la normale unitaire à l’interface allant du fluide 1 vers le fluide 2. On en déduit la condition de saut

$$\boxed{\bar{\bar{\sigma}}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}} - \bar{\bar{\sigma}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}} = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \bar{\mathbf{n}}}. \quad (2.18)$$

Dans cette formule les rayons de courbure sont algébriques ; dans chaque plan de courbure principale la convention de la section 2.3.2 doit être appliquée. On peut aussi noter que dans le cas d’une interface bidimensionnelle, où l’un des rayons de courbure est infini, la formule (2.18) redonne (naturellement!) la formule (2.16). En général on peut définir un champ de normale sortante unitaire  $\bar{\mathbf{n}}$  à l’interface, prolongé de façon régulière de part et d’autre de l’interface. Par exemple, si une interface est définie par

$$z = \zeta(x, y),$$

on utilisera

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{\bar{\nabla}(z - \zeta)}{\|\bar{\nabla}(z - \zeta)\|}$$

a priori régulière dans un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  contenant l’interface. On peut alors montrer que

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{div}(\bar{\mathbf{n}}) \quad (2.19)$$

au point considéré de l’interface. La condition de saut (2.18) s’écrit alors

$$\boxed{\bar{\bar{\sigma}}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}} - \bar{\bar{\sigma}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}} = \gamma \text{div}(\bar{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{n}}}. \quad (2.20)$$

Dans le cas de fluides parfaits, les tenseurs des contraintes se réduisent à la contribution des pressions, et on obtient la condition de saut dite de Laplace

$$\boxed{p_1 - p_2 = \gamma \text{div}(\bar{\mathbf{n}})}. \quad (2.21)$$

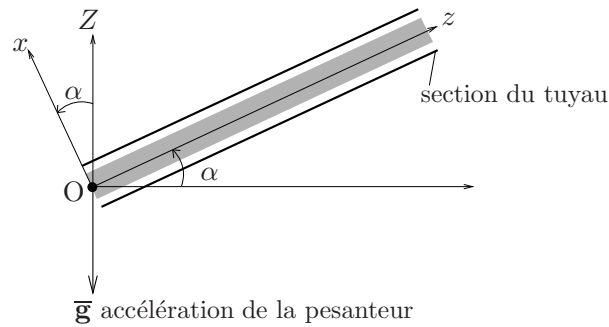


Fig. 2.4 – Géométrie d'un écoulement diphasique dans un tuyau.

## 2.4 Problème faisant intervenir les conditions d'interface

### Problème 2.1 *Lubrification d'un écoulement en tuyau de fluide très visqueux*

On considère l'*écoulement diphasique*, dans un tuyau cylindrique de rayon  $a$  et de longueur  $L \gg a$ , d'un couple de fluides newtoniens incompressibles non miscibles, comme représenté sur la figure 2.4. En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe  $Oz$  l'axe de révolution du tuyau, le fluide 1 de masse volumique  $\rho_1$  et de viscosité dynamique  $\eta_1$  occupe le domaine intérieur  $r \in [0, r_1]$ , tandis que le fluide 2 de masse volumique  $\rho_2$  et de viscosité dynamique  $\eta_2$  occupe le domaine extérieur  $r \in [r_1, a]$ . En dehors des régions d'entrée et de sortie du tuyau, dont on néglige la taille, on suppose l'écoulement des deux fluides unidirectionnel dans la direction  $z$ , axisymétrique, homogène et établi, i.e. le champ de vitesse

$$\bar{\mathbf{v}} = v(r) \bar{\mathbf{e}}_z$$

dans les deux domaines fluides.

- 1 Donnez l'expression intrinsèque du gradient de vitesse dans les deux domaines fluides.
- 2 Déduisez-en la valeur du terme non linéaire dans l'équation de Navier-Stokes.
- 3 Explicitez les composantes de l'équation de Navier-Stokes dans les deux domaines fluides, et déduisez-en que le gradient de pression motrice

$$\bar{\nabla} \hat{p} = -G_1 \bar{\mathbf{e}}_z \text{ dans le domaine fluide 1, } \quad \bar{\nabla} \hat{p} = -G_2 \bar{\mathbf{e}}_z \text{ dans le domaine fluide 2.}$$

Que peut-on dire des fonctions  $G_1$  et  $G_2$ ? Quelle est la nature mathématique des équations obtenues sur les fonctions vitesses que l'on note maintenant  $v_1(r)$  et  $v_2(r)$ ? De combien de conditions limites aura t'on besoin pour résoudre complètement ces équations?

**4.1** On suppose l'existence d'une *tension superficielle* à l'interface entre les deux fluides. Grâce à un calcul intrinsèque des tenseurs des contraintes puis des vecteurs contraintes dans les deux fluides, à l'interface, traduisez la condition dynamique en deux conditions portant l'une sur les pressions à l'interface, l'autre sur les vitesses à l'interface.

**4.2** On suppose que l'axe du tuyau est orienté à un angle  $\alpha \in [-\pi/4, +\pi/4]$  au-dessus du plan horizontal. Montrez que, d'après la condition à l'interface portant sur les pressions, on doit forcément avoir égalité des masses volumiques des deux fluides. Interprétez physiquement cette condition, et donnez toutes les autres conséquences de la condition à l'interface sur les pressions.

*Indications :*

- Vous utiliserez les repères de travail  $Oxyz$  et  $OXYZ$  représentés sur la figure 2.4, avec  $OZ$  vertical appartenant au plan  $xOz$ , pour calculer les pressions à partir des résultats de la question 3.
- L'une des conséquences ultimes de la condition à l'interface sur les pressions est l'existence d'une relation très simple entre  $G_1$  et  $G_2$ .

**4.3** Montrez que l'on peut définir de façon claire une **perte de pression motrice**  $\delta\hat{p}$  dans cet écoulement, malgré le fait qu'il soit diphasique. Cette perte de pression motrice sera supposée positive, ainsi que  $G_1$  et  $G_2$ .

**5** En énumérant au passage toutes les conditions limites en vitesse, montrez que l'on peut calculer, par une résolution des équations de Navier-Stokes, les fonctions vitesses  $v_1(r)$  et  $v_2(r)$  en fonction des paramètres de contrôle du système.

*Indications :*

- En  $r = 0$ , il faut considérer la condition naturelle

$$v_1 \text{ et toutes ses dérivées sont finies}$$

comme une condition limite.

- Les fonctions  $v_1$  et  $v_2$  trouvées doivent dépendre de façon polynômiale de  $r$ .

**6** Afin de valider partiellement vos calculs, étudiez les cas limites où  $r_1 = 0$  ou, au contraire,  $r_1 = a$ . Quels écoulements monophasiques doit-on retrouver dans ces deux cas ?

**7** Calculez les **débits volumiques**  $q_1$  et  $q_2$  des fluides 1 et 2 dans le cas général où  $0 < r_1 < a$ .

**8.1** Soit  $q_{10}$  le débit de référence que l'on obtiendrait sous une perte de pression motrice  $\delta\hat{p}$  en écoulement monophasique, i.e. lorsque  $r_1 = a$ . Calculez  $q_{10}$  puis le débit réduit

$$Q_1 = q_1/q_{10}$$

où  $q_1$  est obtenu en diphasique, avec  $r_1 < a$ , mais la même perte de pression motrice  $\delta\hat{p}$ . Vous exprimerez le rapport adimensionnel  $Q_1$  en fonction des paramètres de contrôle adimensionnels

$$R = r_1/a \text{ rayon réduit du domaine fluide 1}$$

$$\text{et } M = \eta_1/\eta_2 \text{ rapport des viscosités des deux fluides.}$$

**8.2** Étudiez la fonction  $Q_1(R)$  et tracez l'allure de son graphe dans le cas où  $M = 1000$ . Commentez succinctement ce graphe.

§

Raisonné à perte de pression motrice fixée n'est cependant pas très physique; il faut mieux raisonner à **puissance motrice** fixée; c'est l'objet des questions qui suivent.

§

**9.1** Vérifiez par le calcul direct de ses deux membres la validité générale de l'équation

$$(q_1 + q_2) \delta \widehat{p} = P_{\text{dissipée}} \quad (2.22)$$

avec

$$P_{\text{dissipée}} = 2\eta_1 \iiint_{D_1} \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} d^3x + 2\eta_2 \iiint_{D_2} \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} d^3x ,$$

les domaines  $D_1$  et  $D_2$  étant ceux occupés par les fluides 1 et 2, le tenseur  $\overline{\mathbf{D}}$  étant celui des taux de déformation.

**9.2** Montrez que, dans le cas limite d'un écoulement monophasique atteint lorsque  $r_1 = a$ , l'équation (2.22) peut se déduire de résultats du cours que vous citerez précisément.

**9.3** Quelle est la signification physique de l'équation (2.22) dans un cas diphasique général? Si on suppose que l'écoulement est produit par une pompe, quelle est la puissance  $P$  que doit développer celle-ci?

**10** Dans cette question on suppose que le fluide 2 est de l'eau, que le fluide 1 est une huile 1000 fois plus visqueuse, et que les écoulements ont lieu à une température de 20°C. Le tuyau, horizontal, fait 3 cm de rayon et une longueur de 30 m.

**10.1** Si l'écoulement du fluide 1 se faisait de façon monophasique, i.e. avec  $r_1 = a$ , sous une puissance de pompe  $P = 10$  W, quel débit  $q$  aurait-il?

**10.2** On suppose que l'écoulement du fluide 1 se fait en diphasique avec de l'eau comme lubrifiant extérieur, au delà de  $r_1 = 0,92a$ . La même pompe développant la même puissance  $P = 10$  W est utilisée<sup>4</sup>. En admettant que le débit du fluide 2,  $q_2 \ll q_1$ , estimez le débit  $q_1$  du fluide 1. Quel est l'ordre de grandeur du rapport  $q_1/q$  entre le débit de l'écoulement diphasique lubrifié et celui de l'écoulement monophasique de référence étudié en question 10.1?

**10.3** Donnez des expressions approximatives des fonctions vitesses  $v_1$  et  $v_2$  dans le cas diphasique de la question 10.2, représentez graphiquement l'allure du champ de vitesse de cet écoulement, et proposez une interprétation physique de l'effet de lubrification observé.

---

4. Avec des dispositifs adaptés en entrée.





# Chapitre 3

## Modèle du fluide parfait - Applications

### 3.1 Généralités

#### 3.1.1 Le fluide parfait : un modèle très simplifié

Un fluide parfait est un fluide newtonien de *viscosité nulle*, dans lequel il n'y a pas de dissipation de l'énergie cinétique. Aucun fluide n'est parfait si ce n'est l'hélium 4 à très basse température ( $< 2,2$  K). L'hypothèse de fluide parfait est plutôt une *hypothèse de modélisation*, à peu près raisonnable si le terme visqueux peut être négligé devant un terme inertiel (cf. l'équation annotée 1.43), ce qui peut arriver si on n'est pas trop près d'une paroi solide. C'est surtout un modèle très simplifié qui permet de mettre en évidence quelques phénomènes en mécanique des fluides, qui se trouvent exister aussi pour des fluides visqueux.

En général on supposera le fluide parfait incompressible : cela vaut pour tout ce chapitre, excepté la section 3.4 sur les ondes sonores, et les exercices et problème correspondant section 3.10.

#### 3.1.2 Équation d'Euler

Pour un fluide parfait l'équation de Navier-Stokes perd son terme visqueux donc « dégénère » en l'*équation d'Euler*

$$\boxed{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} - \bar{\nabla} p = -\bar{\nabla} \hat{p}} \quad (3.1)$$

avec

$$\hat{p} = p + \rho g z \text{ la } \textit{pression motrice}, \quad (3.2)$$

l'axe des  $z$  étant orienté vers le haut<sup>1</sup>. Du fait de la disparition des contraintes de frottements visqueux, il faut aussi « dégrader » la condition limite (1.36) en autorisant un *glissement* le long d'une paroi solide. On écrit donc seulement la condition d'*impermeabilité*

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{v}}_{\text{paroi}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \bar{\mathbf{n}} \text{ sur la paroi}, \quad (3.3)$$

---

1. Attention on rappelle que l'égalité  $\rho \bar{\mathbf{g}} = -\bar{\nabla}(\rho g z)$ , qui permet d'introduire la pression motrice, n'est valable qu'en fluide incompressible ou écoulement isovolume.

en notant  $\bar{\mathbf{n}}$  le vecteur normal à la paroi<sup>2</sup>.

On peut montrer en utilisant le tenseur alterné fondamental  $\bar{\bar{\epsilon}}$  (cf. [Plaut 2015a](#)), et la formule correspondante

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp}, \quad (3.4)$$

que l'accélération s'écrit

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{\partial\bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\nabla}\bar{\mathbf{v}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial\bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\nabla}\left(\frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2}\right) + \bar{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \bar{\mathbf{v}} \quad (3.5)$$

avec

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \overline{\mathbf{rot}\bar{\mathbf{v}}} \text{ la } \mathbf{vorticité}. \quad (3.6)$$

### 3.1.3 Premier théorème de Bernoulli

Dans un écoulement stationnaire, le long d'une trajectoire on a *conservation de la charge*,

$$H = \frac{\hat{p}}{\rho g} + \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2g} = \text{constante}. \quad (3.7)$$

### 3.1.4 Équation de la vorticité - Dynamique de la vorticité

En prenant le rotationnel de l'équation d'Euler on établit l'*équation de la vorticité*

$$\boxed{\frac{\partial\bar{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial t} = \overline{\mathbf{rot}(\bar{\mathbf{v}} \wedge \bar{\boldsymbol{\Omega}})}}, \quad (3.8)$$

qui montre qu'*il n'existe pas de mécanismes de création de vorticité en fluides parfaits*<sup>3</sup>.

## 3.2 Écoulements potentiels en général

### 3.2.1 Définition

En conséquence de ce qui précède on fait souvent, en fluides parfaits, l'hypothèse que l'écoulement est « *irrotationnel* »,

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \overline{\mathbf{rot}\bar{\mathbf{v}}} = \bar{\mathbf{0}}. \quad (3.9)$$

On a alors existence<sup>4</sup> d'un « *potentiel des vitesses* »  $\phi$  tel que

$$\boxed{\bar{\mathbf{v}} = \bar{\nabla}\phi}. \quad (3.10)$$

L'équation de conservation de la masse montre que  $\phi$  est *harmonique*,

$$\text{div}\bar{\mathbf{v}} = 0 \iff \boxed{\Delta\phi = 0}. \quad (3.11)$$

2. Pour alléger les notations on n'a pas rappelé que  $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ .

3. Cette « démonstration » comporte une petite faiblesse, dans le cas où le domaine fluide évolue avec le temps. Les puristes préoccupés par ce cas montreront à l'aide du calcul tensoriel qu'une écriture équivalente de l'équation de la vorticité (3.8) est

$$\frac{d\overline{\mathbf{rot}\bar{\mathbf{v}}}}{dt} = (\bar{\nabla}\bar{\mathbf{v}}) \cdot \overline{\mathbf{rot}\bar{\mathbf{v}}};$$

ils conclueront alors sur la validité générale de la propriété  $\overline{\mathbf{rot}\bar{\mathbf{v}}} = \bar{\mathbf{0}}$  à  $t_0 \implies \overline{\mathbf{rot}\bar{\mathbf{v}}} = \bar{\mathbf{0}} \forall t > t_0$ .

4. Si le domaine d'écoulement est simplement connexe, ou dans une sous-partie simplement connexe du domaine d'écoulement.

### 3.2.2 Second théorème de Bernoulli

Dans un écoulement potentiel l'équation d'Euler s'écrit

$$\rho \left[ \bar{\nabla} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \bar{\nabla} \left( \frac{\bar{v}^2}{2} \right) \right] = -\bar{\nabla} \hat{p}$$

$$\iff \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\bar{v}^2}{2} + \frac{\hat{p}}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\bar{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{\partial \phi}{\partial t} + gH \quad \text{est indépendant de } \bar{x} .$$
(3.12)

### 3.2.3 Écoulements bidimensionnels : fonction courant

On considère des écoulements bidimensionnels  $xy$ ,

$$\bar{v} = u(x,y,t) \bar{e}_x + v(x,y,t) \bar{e}_y ,$$
(3.13)

pas forcément potentiels pour l'instant. De plus le plan  $xy$  n'est pas forcément horizontal. Donc attention à ne pas confondre le  $z$  qui va vers le haut et le  $z$  de l'équation (3.48) ci-dessous ; pour éviter d'autres collisions au niveau des notations on notera  $\bar{e}_3$  le vecteur unitaire formant avec  $\bar{e}_x$  et  $\bar{e}_y$  une base orthonormée directe  $\{\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_3\}$ . De manière générale<sup>4</sup>

$$(3.13) \quad \text{et} \quad \text{div} \bar{v} = 0$$

$$\iff \exists \text{ une } \ll \text{fonction courant} \gg \psi(x,y,t)$$

$$\text{telle que } \boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{i.e.} \quad \bar{v} = (\bar{\nabla} \psi) \wedge \bar{e}_3} .$$
(3.14)

Cette fonction courant donne immédiatement les **lignes de courant** de l'écoulement, puisque

$$\begin{aligned} \bar{v} \parallel d\bar{x} &\iff \bar{v} \wedge d\bar{x} = \bar{0} \iff udy - vdx = 0 \\ &\iff \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0 \\ &\iff d\psi = 0 \iff \psi = \text{constante} . \end{aligned}$$
(3.15)

Le débit volumique entre deux lignes de courant  $\psi = \psi_1$  et  $\psi = \psi_2$ , sur une tranche d'écoulement de hauteur  $L_3$  dans la direction  $\bar{e}_3$ , est donné par

$$q = L_3 (\psi_2 - \psi_1) .$$
(3.16)

*Il serait ici, d'un point de vue scientifique et pédagogique, pertinent d'étudier les applications de l'Analyse complexe à la description et au calcul d'écoulements potentiels. En effet, cette approche par Analyse complexe a joué, au début du XX<sup>ème</sup> siècle, un rôle majeur dans le développement de l'aérodynamique, même si, de nos jours, dans le milieu industriel, l'approche numérique lui est exclusivement préférée. L'Analyse complexe ne faisant plus partie, à compter de 2014, du bagage des élèves, nous reléguons les sections correspondantes 3.5, 3.6 et 3.11 en fin de chapitre. Ces sections ne seront pas exploitées en TD, par contre, je présenterai en cours un résumé de cette approche et, surtout, des résultats qu'elle permet d'obtenir.*

### 3.3 Ondes d'interface avec tension superficielle

#### Introduction aux instabilités

Afin notamment de préparer l'étude, qui sera faite en TD<sup>5</sup>, de phénomènes d'*instabilités*, et d'autre part de s'initier à l'étude de phénomènes *diphasiques*<sup>6</sup>, nous développons un *modèle à un seul fluide pesant des ondes à l'interface entre deux fluides*. Nous étudions donc la dynamique d'une interface entre un liquide, typiquement de l'eau, et un gaz, typiquement de l'air, comme représentée sur la figure 3.1. On utilise le modèle des fluides parfaits incompressibles, dans le cas d'écoulements potentiels. Le gaz est supposé « non pesant », donc en pratique il sera isobare et les écoulements qui pourraient y avoir lieu ne joueront aucun rôle.

#### 3.3.1 Principes de l'analyse linéaire de stabilité

On suppose que l'étendue de liquide a une profondeur  $h$ , et on considère des *modes linéaires de perturbation*, ou « *modes normaux* », de cette surface libre correspondant à une position de la surface libre :

$$z = h + \zeta \quad \text{avec} \quad \zeta = \zeta(x, t) = \text{Re}[A \exp(ikx) \exp(\sigma t)] . \quad (3.17)$$

Ces modes sont en fait des modes de Fourier en  $x$  : ce passage en modes de Fourier est judicieux, et permettra des calculs relativement « simples », parce que la configuration de base du système est indépendante de  $x$ . Cette proportionnalité en écriture complexe à  $A \exp(ikx + \sigma t)$  doit être vérifiée par tous les champs du mode normal, par exemple le potentiel de l'écoulement du mode considéré est de la forme

$$\phi = \phi(x, z, t) = \text{Re}\left\{ A f(z) \exp(ikx + \sigma t) \right\} . \quad (3.18)$$

Ainsi tous les champs ont le même type de dépendance en  $x$  et  $t$ , coordonnées d'invariance de la configuration de base. Dans les formules (3.17) et (3.18),  $A$  est l'amplitude complexe du mode considéré, supposée petite. Le *nombre d'onde*  $k$  du mode, égal à  $2\pi/\lambda$  avec  $\lambda$  la période spatiale, est un paramètre géométrique que l'on se donne, et que l'on va faire varier. Enfin  $\sigma$  est un nombre complexe que l'on veut calculer, fonction de  $k$  (et des paramètres de contrôle du système) et qui va caractériser la réponse du système à ce mode de perturbation. L'adjectif « *linéaire* » signifie que l'on va *linéariser* les équations de la mécanique des fluides à l'ordre  $A$ , en négligeant tous les termes non linéaires d'ordre  $A^2$ . Ainsi chaque mode (3.17) est une *petite perturbation* de la configuration de base, au repos, et nous menons une « *analyse linéaire de stabilité* » de cette configuration de base.

La signification précise de cette analyse se comprend en raisonnant en terme de réponse du système à de petites perturbations initiales quelconques. Une condition initiale quelconque, engendrée par toutes sortes de « bruits », pourrait en effet, par transformée de Fourier, s'écrire

$$\zeta(x, t = 0) = \text{Re}\left\{ \sum_k A(k) \exp(ikx) \right\} . \quad (3.19)$$

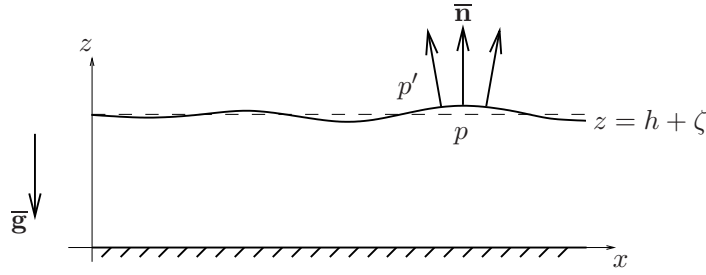
Par linéarité, la solution aux temps courts serait alors

$$\zeta(x, t) = \text{Re}\left\{ \sum_k A(k) \exp(ikx + \sigma(k)t) \right\} , \quad (3.20)$$

superposition des solutions pour chaque mode normal...

5. Cf. le problème 3.3 sur les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor.

6. À ce stade la lecture du chapitre 2 devient indispensable.



**Fig. 3.1** – Schéma de principe de la configuration bidimensionnelle étudiée pour le calcul d'*ondes à l'interface entre deux fluides*.

Revenant au cas d'un seul mode normal (3.17), (3.18), pour simplifier, il faut bien réaliser que  $A$  et  $\sigma$  sont des variables complexes,

$$A = |A| \exp(i \arg A), \quad \sigma = \sigma_r + i\sigma_i. \quad (3.21)$$

Du fait que

$$\operatorname{Re}[A \exp(ikx + \sigma t)] = |A| \cos(kx + \sigma_i t + \arg A) \exp(\sigma_r t), \quad (3.22)$$

trois cas sont à distinguer, concernant le caractère amplifié ou non des modes :

- soit  $\sigma_r > 0$ , auquel cas on a affaire à un mode **amplifié** ; la configuration de base est instable ;
- soit  $\sigma_r = 0$ , auquel cas on a affaire à un mode **neutre** ; la configuration de base est marginalement stable vis-à-vis de ce mode ;
- soit  $\sigma_r < 0$ , auquel cas on a affaire à un mode **amorti** ; la configuration de base est stable vis-à-vis de ce mode.

Dans le cas  $\sigma_r > 0$ ,  $\sigma_r$  est le **taux de croissance** du mode amplifié ; dans le cas  $\sigma_r < 0$ ,  $-\sigma_r$  est le **taux d'amortissement** du mode amorti. Dans le premier cas, le mode amplifié par l'**instabilité** est une **petite perturbation** qui devient une **grande perturbation** : ce phénomène, illustré par exemple sur les figures 3.5 et 3.6, est l'essence même d'une instabilité.

De même, trois cas sont à distinguer concernant le caractère propagatif ou non des modes :

- soit  $\sigma_i > 0$ , auquel cas on pose  $\sigma_i = \omega$  et le mode considéré est une **onde gauche** se propageant à la vitesse de phase  $-\omega/k$  ;
- soit  $\sigma_i = 0$ , auquel cas le mode considéré est **stationnaire non propagatif** ;
- soit  $\sigma_i < 0$ , auquel cas on pose  $\sigma_i = -\omega$  et le mode considéré est une **onde droite** se propageant à la vitesse de phase  $\omega/k$ .

Dans les cas  $\sigma_i \neq 0$ ,  $\omega = |\sigma_i|$  est la **fréquence angulaire** de l'onde, égale à  $2\pi/T$  avec  $T$  la période temporelle de l'onde.

Les cas où les modes les plus « dangereux », de  $\sigma_r > 0$  maximum, correspondent à  $k \neq 0$ , conduisent à l'émergence de motifs structurés de longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$  finie, on appelle donc ces instabilités **structurantes**. Au contraire, si les modes les plus « dangereux » correspondent à  $k = 0$ , on appelle les instabilités **homogènes**.

Cette étude se fait effectivement en fonction des paramètres de contrôle du système. Lorsque l'on observe un changement des propriétés de stabilité d'une configuration par variation d'un paramètre de contrôle, on a une « **bifurcation** », comme déjà évoqué dans le complément 1.1.

De façon moins générale, dans le cas présent, nous allons trouver que  $\sigma_r = 0$ ,  $\sigma_i \neq 0$  toujours, i.e. nous avons affaire à des **ondes neutres**, indifféremment droites ou gauches, ce qui se comprend

puisque'il n'y a pas de direction privilégiée dans le système. Des exemples d'instabilités conduisant à des ondes droites seulement seront donnés dans le problème 3.3.

### 3.3.2 Analyse des ondes d'interface

Revenant à la physique de notre problème, grâce à la condition d'incompressibilité et à la **condition cinématique à l'interface**, qui stipule qu'une particule qui s'y trouve à un instant donné y reste toujours<sup>7</sup>,

$$\frac{d}{dt}[z - (h + \zeta)] = 0 \quad \text{si} \quad z = h + \zeta, \quad (3.23)$$

on montre que le potentiel de l'écoulement dans le liquide est donné par

$$\phi = \phi(x, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ A \frac{\sigma}{k \sinh(kh)} \exp(ikx + \sigma t) \cosh(kz) \right\}. \quad (3.24)$$

En prenant en compte l'effet d'une **tension de surface**  $\gamma$  non nulle, il existe, d'après le chapitre 2, un saut de pression à l'interface donné par la **loi de Laplace**

$$p - p' = \gamma \operatorname{div}(\bar{\mathbf{n}}), \quad (3.25)$$

avec  $\bar{\mathbf{n}}$  la normale sortante unitaire à l'interface, prolongée de façon régulière de part et d'autre de l'interface. On obtient alors, après calcul du champ de pression dans le fluide pesant par un théorème de Bernoulli, que les valeurs possibles de  $\sigma$  à  $k$  fixé vérifient l'**équation caractéristique**

$$\rho \sigma^2 = -\rho g k \tanh(kh) - \gamma k^3 \tanh(kh) \quad (3.26)$$

où  $\rho$  est la densité du liquide. Il est normal que l'amplitude  $A$  n'apparaisse pas dans cette relation : elle peut être factorisée et sa valeur précise ne joue pas de rôle ici, tant qu'elle reste petite<sup>8</sup>.

Ainsi  $\sigma$  est un imaginaire pur, ce qui confirme que l'on a affaire à des ondes neutres. Posant  $\sigma = i\omega$ , on obtient la **relation de dispersion** donnant la **vitesse de phase**  $c$  de l'onde :

$$\boxed{c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \underbrace{\frac{g}{k} \tanh(kh)}_{\text{terme de gravité}} + \underbrace{\frac{\gamma k}{\rho} \tanh(kh)}_{\text{terme capillaire}}}. \quad (3.27)$$

La fonction  $\omega(k)$  donnée par (3.27) est strictement croissante, ce qui signifie qu'à fréquence  $\omega$  donnée ne se propagent que des ondes, indifféremment droite ou gauche, de nombre d'onde  $k$  bien défini.

Pour une interface eau-air le coefficient de tension superficielle  $\gamma = 0,074$  N/m donc le terme capillaire ne domine que pour des longueurs d'ondes  $\lambda = 2\pi/k$  plus petites que la **longueur capillaire**

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} = 2,7 \text{ mm}, \quad (3.28)$$

auquel cas on a affaire à des **ondes capillaires**. Compte tenu de la petitesse de  $l_c$ , on a plus souvent affaire à des **ondes de gravité** vérifiant  $\lambda \gg l_c$  et  $c^2 \simeq g \tanh(kh)/k$ . On méditera avec profit les courbes exemples présentées en cours.

7. Cf. la première section du chapitre 2.

8. Cette remarque vaut pour toute analyse linéaire de stabilité.

Au sens expliqué dans l'annexe générale B, il s'agit bien d'ondes *dispersives*<sup>9</sup> puisque  $c$  dépend de  $k$  (ou  $\omega$ ) i.e.

$$\frac{dc}{dk} \neq 0.$$

Alors pour un paquet d'ondes centré sur  $k_0$  on constate une propagation de l'enveloppe à la *vitesse de groupe*

$$v_g(k_0) = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}.$$

Cette vitesse de groupe dépend du nombre d'onde moyen  $k_0$  lui-même, d'où la dispersion proprement dite du paquet d'ondes, dont les diverses composantes de nombre d'onde moyen  $k_0, k'_0, k''_0$ , etc... se « séparent » puisque chacune a sa propre vitesse de groupe.

### 3.4 Effets de compressibilité dans les fluides : ondes sonores

L'objet de cette section est de donner des rudiments d'*acoustique*<sup>10</sup> en utilisant le modèle du fluide parfait. En préliminaire, notez que les ondes de vibration de l'air que l'oreille humaine peut entendre ont une fréquence  $f$  comprise entre environ 16 Hz et 20 kHz. Pour une première étude des effets de la viscosité sur des ondes de type sonore, voyez le problème 3.8.

#### 3.4.1 Théorie générale en milieu fluide « infini »

La propagation d'ondes sonores dans un fluide, considéré au repos pour simplifier, est liée à des effets de *compressibilité*. Elle consiste en de petites fluctuations de pression  $p'$  et de masse volumique  $\rho'$  autour de valeurs moyennes  $p_0$  et  $\rho_0$ ,

$$p = \underbrace{p_0}_{\text{moyenne}} + \underbrace{p'}_{\text{perturbation}}, \quad \rho = \underbrace{\rho_0}_{\text{moyenne}} + \underbrace{\rho'}_{\text{perturbation}}, \quad (3.29)$$

auxquelles correspondent des petits mouvements du fluide donc un champ de vitesse  $\bar{\mathbf{v}}$ . On considère que ce phénomène se fait de façon *adiabatique*<sup>11</sup> donc *isentropique*. On peut alors introduire le *coefficient de compressibilité isentropique* du fluide<sup>12</sup>

$$\kappa_S = \left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_S = - \left. \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p} \right|_S \quad (3.30)$$

en notant  $\mathcal{V}$  le volume occupé par une particule fluide. Ce coefficient supposé constant permet de faire le lien entre les fluctuations de pression et de densité introduites en (3.29) en écrivant que

$$\rho' = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_S p' = \rho_0 \kappa_S p' \quad (3.31)$$

9. D'où le terme « *relation de dispersion* » utilisé pour l'équation (3.27).

10. Du grec « *akouein* » : entendre.

11. Les particules fluides n'ont « pas le temps » d'échanger de la chaleur compte tenu des fréquences temporelles relativement élevées des ondes sonores.

12. Alternativement on pose parfois

$$\kappa_S = \frac{1}{K_S}$$

avec  $K_S$  le *module de compression isentropique*.

En utilisant alors un modèle de *fluide parfait non pesant*, la loi de conservation de la masse conduit à

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}, \quad (3.32)$$

tandis que l'équation d'Euler donne

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} = -\bar{\nabla} p'. \quad (3.33)$$

Au bilan il vient l'équation de propagation (dite aussi équation de d'Alembert)

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \kappa_S} \Delta p'. \quad (3.34)$$

Ceci montre que les ondes sonores sont des ondes neutres (ni amplifiées ni amorties) *non dispersives*<sup>13</sup> se propageant à une vitesse<sup>14</sup>

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \kappa_S}} = \frac{1}{\sqrt{\rho \kappa_S}} \quad (3.35)$$

en omettant de rappeler que  $\rho$  est une valeur de référence moyenne. L'équation (3.33) montre aussi que les directions de vitesse des particules fluides sont dans la direction du vecteur d'onde, il s'agit d'*ondes longitudinales de compression dilatation*.

### 3.4.2 Cas des liquides

Un liquide tel que l'*eau* à température ambiante présente une très faible compressibilité

$$\kappa_S \simeq 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1} \quad (3.36)$$

d'où

$$c \simeq 1400 \text{ m/s}. \quad (3.37)$$

### 3.4.3 Cas des gaz parfaits

Dans un *gaz « parfait »* tel que l'air à température ambiante, pour estimer  $\kappa_S$  on part de la loi de Laplace

$$p \mathcal{V}^{\gamma^g} = \text{constante} \quad (3.38)$$

valable lors d'une transformation adiabatique, avec

$$\gamma^g = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\text{capacité calorifique à pression constante}}{\text{capacité calorifique à volume constant}}. \quad (3.39)$$

On en déduit que

$$\kappa_S = -\frac{1}{\mathcal{V}} \left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p} \right|_S = \frac{1}{\gamma^g p}, \quad (3.40)$$

d'où

$$c = \sqrt{\frac{\gamma^g p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma^g RT}{M}} \quad (3.41)$$

13. C'est heureux pour les amateurs de musique!...

14. À la fois vitesse de phase et vitesse de groupe; on dit parfois « célérité ».



en utilisant la loi des gaz parfaits,  $R = 8,314 \text{ J/K/mol}$  étant la *constante des gaz parfaits*,  $T$  la température en Kelvins et  $M$  la masse molaire du gaz. Pour l'air, gaz essentiellement diatomique,

$$\gamma^g = \frac{7}{5} \quad \text{et} \quad M = 29,0 \text{ g/mol} \quad (3.42)$$

donnent, à température ambiante ( $20^\circ\text{C}$ ) et à une atmosphère,

$$\kappa_S = 7,05 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1} \quad \text{et} \quad c = 343 \text{ m/s} . \quad (3.43)$$

En général on peut remarquer que, compte tenu des relations

$$R = N_A k \quad \text{et} \quad M = N_A m \quad (3.44)$$

avec  $N_A$  le nombre d'Avogadro,  $k$  la constante de Boltzmann et  $m$  la masse d'une molécule ou atome, on a

$$c = \sqrt{\gamma^g} V_{\text{therm}} \simeq V_{\text{therm}} = \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (3.45)$$

vitesse d'agitation thermique typique du gaz (cf. l'équation 1.50 et la discussion correspondante).

#### 3.4.4 Critère d'effets de compressibilité dans un écoulement macroscopique

Comme on le verra dans l'exercice 3.3, les ondes sonores sont typiquement associés à des écoulements « microscopiques » de faibles vitesses physiques (inférieures à  $10 \text{ cm/s}$ ) et faibles déplacements (inférieurs à  $30 \mu\text{m}$ ). Pour que des effets de compressibilité se manifestent dans des écoulements « macroscopiques » de vitesses physiques plus grandes et plus grands déplacements, il faut que l'amplitude réduite  $\rho'/\rho_0$  des fluctuations macroscopiques de masse volumique soit de l'ordre de 1%. D'après les théorèmes de Bernoulli, les fluctuations macroscopiques de pression sont de l'ordre de

$$p' = \rho_0 V^2$$

avec  $V$  l'ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement macroscopique. Le modèle thermodynamique (3.31) donne alors

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \kappa_S p' = \kappa_S \rho_0 V^2 = M^2 \quad (3.46)$$

avec

$$M = \frac{V}{c} \quad (3.47)$$

le *nombre de Mach*<sup>15</sup>. Ainsi le nombre de Mach doit être de l'ordre de  $1/10$  au moins pour que des effets de compressibilité influent sur un écoulement macroscopique. Le couplage entre ces effets de compressibilité et des écoulements macroscopiques rapides conduit à des effets importants tels celui de la création d'« ondes de choc », qui seront abordés en troisième année dans le cours de [Castanet & Penanhoat \(2013\)](#).

15. En hommage au physicien et philosophe autrichien Ernst Mach, actif à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle.

## 3.5 Écoulements potentiels bidimensionnels par analyse complexe

### 3.5.1 Description par un potentiel complexe

Dorénavant on suppose l'écoulement bidimensionnel *et* irrotationnel. En identifiant les écritures de  $\bar{\mathbf{v}}$  en termes de  $\phi$  (équation 3.10) et  $\psi$  (équation 3.14) on obtient, en identifiant le plan euclidien au plan complexe suivant

$$z = x + iy, \quad (3.48)$$

que  $\phi$  et  $\psi$  vérifient les conditions de Cauchy (cf. Appel 2005 ou Plaut 2006)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.49)$$

Ainsi

$$f(z) = \phi(z) + i\psi(z) \text{ est } \mathbf{holomorphe} ; \text{ c'est le } \ll \mathbf{potentiel complexe} \gg \text{ de l'écoulement.} \quad (3.50)$$

Sa partie réelle est le *potentiel des vitesses*  $\phi(z)$ , sa partie imaginaire est la *fonction courant*  $\psi(z)$ . D'après les expressions possibles de la dérivée d'une fonction holomorphe, on a

$$f'(z) = u(z) - iv(z). \quad (3.51)$$

Si  $C$  est un chemin orienté du plan complexe, on montre que

$$\int_C f'(z) dz = \Gamma + iQ \quad (3.52)$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_C \bar{\mathbf{v}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} \text{ la } \ll \mathbf{circulation} \gg \text{ de } \bar{\mathbf{v}} \text{ le long de } C, \\ Q &= \frac{q}{L_3} = \int_C \bar{\mathbf{v}} \cdot (d\bar{\mathbf{x}} \wedge \bar{\mathbf{e}}_3) \text{ le } \mathbf{débit réduit} \text{ à travers } C. \end{aligned}$$

En vertu du théorème de Cauchy pour deux circuits homotopes, si  $C$  et  $C'$  sont deux circuits homotopes dans le domaine fluide<sup>16</sup>, alors la circulation de  $\bar{\mathbf{v}}$  le long de  $C$  égale la circulation de  $\bar{\mathbf{v}}$  le long de  $C'$ , et le débit réduit à travers  $C$  égale le débit réduit à travers  $C'$ . Ceci permet de définir la *circulation de la vitesse autour d'un obstacle de taille finie immergé dans l'écoulement*, comme étant la circulation le long d'un circuit homotope à la frontière de cet obstacle, parcourue dans le sens trigonométrique.

Dans un écoulement stationnaire, si justement une ligne de courant  $C$  fermée, orientée dans le sens trigonométrique, décrit la frontière d'un obstacle immergé dans l'écoulement, alors la résultante des forces de pression en  $-\rho\bar{\mathbf{v}}^2/2$  (d'après le second théorème de Bernoulli) exercées par le fluide sur cet obstacle est donnée par la *formule de Blasius*

$$\frac{F_x - iF_y}{L_3} = \frac{\rho i}{2} \int_C [f'(z)]^2 dz \quad (3.53)$$

16. En général  $f'$  est régulière (holomorphe) dans tout le domaine fluide; ce n'est pas forcément le cas de  $f$ .

où l'on a de facto négligé les effets de pesanteur<sup>17</sup>. Si on utilise le théorème des résidus pour calculer cette intégrale, en supposant que  $C$  contient les points singuliers  $z_k$  de  $f'$ , on obtient

$$\frac{F_x - iF_y}{L_3} = -\rho\pi \sum_k \text{Res}\{[f'(z)]^2, z_k\}. \quad (3.54)$$

Il faut souvent, cependant, préférer à ce théorème des résidus l'usage d'un développement en série de Laurent dans un domaine contenant  $C$ , comme cela est expliqué dans la question 4.1 du problème 3.10.

On peut prendre en compte les effets de pesanteur avec un modèle d'écoulement bidimensionnel potentiel, à condition que le vecteur accélération de la gravité  $\bar{\mathbf{g}}$  soit dans le plan  $xOy$ . Le champ de pression est alors corrigé d'un terme  $\rho\bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{x}}$ . En construisant un cylindre s'appuyant sur  $C$  étendu dans la direction  $x_3$ , en transformant l'intégrale sur le contour  $C$  du terme de force correspondant en intégrale de surface, puis en intégrale de volume avec la formule intégrale de la divergence, on montre que l'effet d'un champ de pression en  $\rho\bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{x}}$  sur l'obstacle est la création d'une **puissance d'Archimède**, souvent négligeable en aérodynamique, souvent importante en hydrodynamique.

### 3.5.2 Premier exemple simple : puits et source ponctuels

Notant  $Q$  le débit réduit sortant de la **source** si  $Q > 0$ , rentrant dans le **puits** si  $Q < 0$ , on montre que<sup>18</sup>

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (3.55)$$

avec  $z_0$  le point source ou puits. En effet on en déduit, si  $z = z_0 + r \exp(i\theta)$ ,

$$f'(z) = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z - z_0} \iff u + iv = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{r} \exp(i\theta) \quad (3.56)$$

correspondant à un écoulement purement radial.

### 3.5.3 Deuxième exemple simple : tourbillon ponctuel

Notant  $\Gamma$  la circulation du **tourbillon** centré en  $z_0$ , on montre que<sup>18</sup>

$$f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0). \quad (3.57)$$

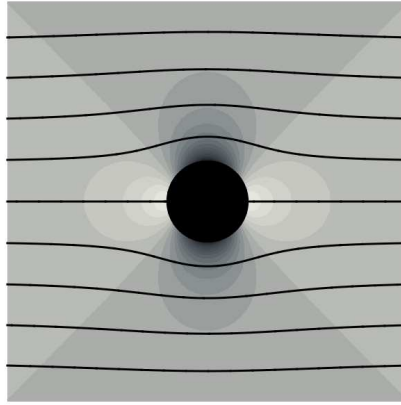
En effet on en déduit, si  $z = z_0 + r \exp(i\theta)$ ,

$$f'(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0} \iff u + iv = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \exp[i(\theta + \pi/2)] \quad (3.58)$$

correspondant à un écoulement purement orthoradial, d'intensité décroissant avec la distance au centre du tourbillon.

17. La formule de Blasius s'obtient par des manipulations analytiques simples à partir de la formule réelle où l'on intègre  $(\rho\bar{\mathbf{v}}^2/2)\bar{\mathbf{n}}dl$  sur le contour  $C$  de l'obstacle,  $\bar{\mathbf{n}}$  étant la normale sortant de l'obstacle,  $dl$  étant un élément de longueur. Le vecteur  $d\bar{\mathbf{l}}$  correspondant a bien sûr comme affixe  $dz = dx + idy...$  De plus, il faut exploiter le fait que le contour  $C$  est une ligne iso- $\psi$ , d'où  $df = f'(z)dz = d\phi = df^*$  lorsque  $z$  varie sur  $C$ , l'étoile désignant la conjugaison complexe...

18. On rappelle que  $\ln z = \ln|z| + i \arg z$  ou  $\arg$  est une détermination de l'argument, définie sur une coupure de  $\mathbb{C}$  seulement, voir [Appel \(2005\)](#) ou [Plaut \(2006\)](#).



**Fig. 3.2** – Lignes de courant et champ de pression (niveaux de gris) de l'*écoulement d'un fluide parfait autour d'un disque*, dans le cas sans circulation (3.60). Notez les surpressions aux deux points d'arrêt placés symétriquement en amont et en aval du disque, les dépressions autour des points de survitesse.

### 3.5.4 Un exemple plus compliqué : écoulement autour d'un disque

Le disque est de rayon  $a$ . On travaille dans le référentiel lié au disque, dans lequel le fluide arrive de l'infini avec une vitesse

$$\bar{\mathbf{U}} = U\bar{\mathbf{e}}_x . \quad (3.59)$$

On recherche le potentiel complexe  $f(z)$  de l'écoulement sous la forme d'une série de Laurent

$$f(z) = a_1z + a_{-1}z^{-1} .$$

En explicitant la condition limite à l'infini et la condition limite sur le cercle  $C = \partial D$ , on montre qu'une solution possible est

$$f(z) = U(z + a^2/z) . \quad (3.60)$$

On peut alors étudier cet écoulement soit directement, soit avec Mathematica, cf. le programme `Ecautourdisque.nb` disponible sur la page web de ce cours, qui a produit la figure 3.2. Notez que la cinématique de cet écoulement a été étudiée dans le problème 1.1 de [Plaut \(2015b\)](#).

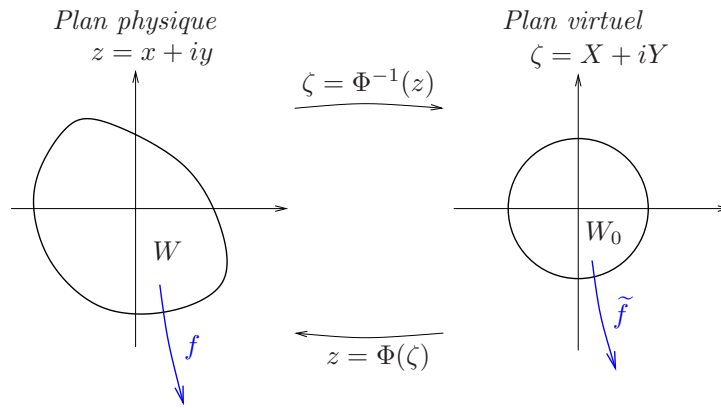
## 3.6 Écoulements potentiels bidimensionnels par analyse complexe - transformation conforme

### 3.6.1 Généralités

On étudie toujours ici des *écoulements potentiels bidimensionnels de fluides parfaits* à l'aide de *potentiels complexes*. Afin d'être capable d'étudier des écoulements dans un domaine fluide  $W$  de forme compliquée<sup>19</sup>, on pense à utiliser une *transformation conforme bijective* envoyant  $W$  sur un domaine  $W_0$  plus simple. Rappelons<sup>20</sup> qu'une transformation conforme d'un ouvert  $W_0$  sur un ouvert  $W$  est une application  $\Phi$  de  $W_0$  dans  $W$ , de classe  $C^\infty$ , dont le gradient est toujours non nul, et qui conserve les angles avec leur sens. Une telle application est forcément *holomorphe*, et vice-versa. Rappelons aussi que si  $\Phi$  est holomorphe et injective sur  $W_0$ , alors

19. Par exemple l'extérieur d'une ellipse, vue comme la section d'une *aile d'avion* ; cf. le problème 3.10.

20. Voir par exemple [Appel \(2005\)](#) ou [Plaut \(2006\)](#).



**Fig. 3.3** – Schéma de principe pour l'utilisation d'une *transformation conforme* afin de développer un modèle d'écoulement potentiel de fluide parfait.

- $\Phi$  est holomorphe et bijective de  $W_0$  sur  $W = \Phi(W_0)$ ;
- $\forall \zeta \in W_0, \Phi'(\zeta) \neq 0$ ;
- $\Phi^{-1}$  est holomorphe et bijective de  $W$  sur  $W_0$ , avec

$$\forall z \in W, \quad (\Phi^{-1})'(z) = \frac{1}{\Phi'(\Phi^{-1}(z))}. \quad (3.61)$$

Rappelons enfin qu'il existe des théorèmes généraux<sup>21</sup> qui permettent d'assurer que  $W$  de forme compliqué peut toujours être ramené par transformation conforme bijective à  $W_0$  de forme très simple, par exemple le disque unité. Si on dispose donc d'un potentiel holomorphe  $\tilde{f}$  dans  $W_0$ , par composition

$$f = \tilde{f} \circ \Phi^{-1} \quad (3.62)$$

pourra être vue comme le potentiel d'un écoulement dans  $W$ . Quelques notations et une représentation schématique de la situation générale évoquée ci-dessus sont donnés sur la figure 3.3.

### 3.6.2 Transport des lignes de courant

Comme

$$\forall z \in W, \quad f(z) = \tilde{f}(\Phi^{-1}(z)) = \tilde{f}(\zeta) \quad \text{si} \quad \zeta = \Phi^{-1}(z), \quad (3.63)$$

lorsque  $\zeta$  se promène sur une ligne de courant

$$\text{Im}[\tilde{f}(\zeta)] = \text{constante}$$

alors  $z = \Phi(\zeta)$  se promène sur la ligne de courant

$$\text{Im}[f(z)] = \text{constante}.$$

### 3.6.3 Transport du vecteur vitesse

Rappelons que les petits vecteurs dans le plan virtuel sont transportés dans le plan physique suivant la règle

$$dz = \Phi'(\zeta)d\zeta \iff |dz| = |\Phi'(\zeta)||d\zeta| \quad \text{et} \quad \arg(dz) = \arg(\Phi'(\zeta)) + \arg(d\zeta), \quad (3.64)$$

21. Du type théorème de Riemann.

qui signifie la similitude de rapport  $|\Phi'|$  et d'angle  $\arg(\Phi')$ . Par dérivation de (3.63) et en faisant usage de (3.61) on obtient d'autre part

$$\forall z \in W, \quad f'(z) = \tilde{f}'(\Phi^{-1}(z)) \frac{1}{\Phi'(\Phi^{-1}(z))} = \frac{\tilde{f}'(\zeta)}{\Phi'(\zeta)} \quad \text{si } \zeta = \Phi^{-1}(z). \quad (3.65)$$

Notons

$$\begin{aligned} u(z) - iv(z) &= f'(z) \text{ l'affixe de la vitesse physique,} \\ \tilde{u}(\zeta) - i\tilde{v}(\zeta) &= \tilde{f}'(\zeta) \text{ l'affixe de la vitesse virtuelle.} \end{aligned}$$

Il vient<sup>22</sup>

$$\begin{aligned} u + iv &= (f')^* = \frac{(\tilde{f}')^*}{(\Phi')^*} = \frac{\tilde{u} + i\tilde{v}}{(\Phi')^*} \\ \iff |u + iv| &= \frac{|\tilde{u} + i\tilde{v}|}{|\Phi'|} \\ \text{et } \arg(u + iv) &= \arg(\Phi') + \arg(\tilde{u} + i\tilde{v}) \end{aligned} \quad (3.66)$$

qui signifie la similitude de rapport  $1/|\Phi'|$  et d'angle  $\arg(\Phi')$ .

### 3.6.4 Transport de la circulation et du débit réduit

Soit  $C_0$  un chemin orienté tracé dans  $W_0$ ,  $C = \Phi(C_0)$  son image par  $\Phi$ . Par changement de variable  $z = \Phi(\zeta)$ , on prouve la conservation de la circulation et du débit réduit correspondants

$$\begin{aligned} \Gamma_0 + iQ_0 &= \int_{C_0} \tilde{f}'(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\Phi(C_0)} \tilde{f}'(\Phi^{-1}(z)) (\Phi^{-1})'(z) dz \\ &= \int_C \frac{\tilde{f}'(\Phi^{-1}(z))}{\Phi'(\Phi^{-1}(z))} dz \\ &= \int_C f'(z) dz \\ \Gamma_0 + iQ_0 &= \Gamma + iQ. \end{aligned} \quad (3.67)$$

### 3.6.5 Transport d'une force appliquée à un obstacle

Si  $C_0$  est fermé et correspond à une ligne de courant, alors  $C = \Phi(C_0)$  est fermé et correspond à une ligne de courant. La formule de Blasius pour la force exercée sur l'obstacle dont  $C$  est la frontière donne

$$\frac{F_x - iF_y}{L_3} = \frac{\rho i}{2} \int_C [f'(z)]^2 dz.$$

En faisant le changement de variable  $\zeta = \Phi^{-1}(z)$  i.e.  $z = \Phi(\zeta)$ , grâce à (3.65) on obtient

$$\frac{F_x - iF_y}{L_3} = \frac{\rho i}{2} \int_{C_0} \left[ \frac{\tilde{f}'(\zeta)}{\Phi'(\zeta)} \right]^2 \Phi'(\zeta) d\zeta = \frac{\rho i}{2} \int_{C_0} [\tilde{f}'(\zeta)]^2 [\Phi'(\zeta)]^{-1} d\zeta \quad (3.68)$$

qui diffère a priori de la force virtuelle exercée par l'écoulement virtuel sur  $C_0$ .

22. On omet pour simplifier de rappeler les points de calcul  $z$  et son correspondant  $\zeta$ .

### 3.7 Problème faisant le lien fluides parfaits - fluides visqueux

#### Problème 3.1 *Écoulements plans produits par un gradient de pression oscillant*

On considère un long canal plan, i.e. un domaine fluide situé entre deux plans solides d'équation  $y = \pm b$ . Les limites de ces plans sont situées en  $x = 0$  et  $L$ ,  $z = 0$  et  $H$  avec  $L$  et  $H \gg b$ . On suppose que l'axe  $y$  est vertical, l'accélération de la pesanteur étant donnée par  $\bar{\mathbf{g}} = -g\bar{\mathbf{e}}_y$  avec  $g > 0$ . On suppose que grâce à une pompe on peut imposer en  $x = 0$ ,  $y = 0$  une pression oscillante

$$p = p_{\text{atm}} + P \cos(\omega t) ,$$

et qu'en  $x = L$ ,  $y = 0$  le fluide sort en un jet à l'air libre, donc

$$p = p_{\text{atm}} .$$

Dans ce problème, on néglige tout effet de compressibilité.

**1** On suppose que sous l'effet de cette pression oscillante en entrée, et pas trop près des bords du canal, dans une région que l'on peut noter  $D$ , on a une situation d'écoulement unidirectionnel

$$\bar{\mathbf{v}} = v(y,t)\bar{\mathbf{e}}_x .$$

Calculez le gradient de vitesse puis le terme non linéaire (en vitesse) dans l'équation locale de la quantité de mouvement. On vous demande des expressions intrinsèques de ces quantités. Concluez sur la nature du problème étudié.

**2** Explicitez les composantes de l'équation locale de la quantité de mouvement dans le domaine  $D$ , en supposant que le fluide est *newtonien incompressible*. Montrez dans un premier temps que l'on peut supposer que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -G \cos(\omega t)$$

et estimez l'amplitude  $G$  de ce gradient de pression oscillant. Donnez ensuite la forme du champ de pression  $p$  dans  $D$ .

**3.1** Calculez le champ de vitesse solution  $v(y,t)$  lorsque le fluide est supposé *parfait*. Ce champ est-il unique? Pourquoi? Commentez et interprétez physiquement la forme du champ, oscillant, finalement obtenu.

**3.2** Calculez le champ de déplacement  $\bar{\mathbf{u}}$  des particules fluides, défini comme la différence entre la position actuelle  $\bar{\mathbf{x}}$  et la position initiale  $\bar{\mathbf{X}}$  à  $t = 0$ . Commentez et interprétez physiquement le résultat obtenu.

**4.1** Calculez le champ de vitesse solution  $v(y,t)$  lorsque le fluide est *visqueux*. Pour cela vous expliquerez pourquoi on peut passer en notations complexes, en posant

$$v(y,t) = \text{Re} \left[ v_c(y) e^{i\omega t} \right] , \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = \text{Re} \left[ G e^{i\omega t} \right] ,$$

et calculerez  $v_c(y)$ .

**4.2** Que se passe t'il si la viscosité cinématique du fluide tend vers l'infini?

**4.3** Afin de permettre une étude analytique élémentaire, on vous demande de calculer la valeur moyenne de l'amplitude complexe des oscillations de vitesse

$$V_c = \int_{-b}^b v_c(y) \frac{dy}{2b}.$$

Étudiez son comportement lorsque la viscosité cinématique du fluide tend vers 0. Que peut-on conclure en lien avec l'étude de la question 3.1 ?

*Indication* : vous serez amené à utiliser les formules d'analyse complexe

$$\tanh(X + Y) = \frac{\tanh(X) + \tanh(Y)}{1 + \tanh(X) \tanh(Y)} \quad \text{et} \quad \tanh(iZ) = i \tan(Z).$$

**4.4** Estimez  $V_c$  dans le cas où le fluide est de l'eau à température ambiante, l'épaisseur du canal étant  $2b = 2$  cm, sa longueur étant  $L = 1$  m, l'amplitude et la fréquence des oscillations de pression étant  $P = 10$  Pa et  $\omega/(2\pi) = 50$  Hz.

**4.5** Créez avec Mathematica une manipulation présentant les graphes de  $v(y, t = \pi/(2\omega))$  pour  $\nu$  variant de  $10^{-2}$  à  $10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s, les autres paramètres étant ceux donnés en 4.4. Montrez grâce à cette manipulation que des « *couches limitées* » se mettent en place en fluide faiblement visqueux pour réconcilier la solution de type « fluide parfait », valable à haute fréquence ou faible viscosité et pas trop près des parois, avec les conditions d'adhérence au bord.

*Indications* : définissez une fonction `g[nu]` traçant le graphe demandé pour `nu` donnée; vous utiliserez ensuite la commande

```
Manipulate[g[nu], {nu, 10^-2, 10^-6, Appearance->"Labeled"}].
```

## 3.8 Exercice et problèmes sur interfaces - tension superficielle - instabilités

### Exercice 3.1 Modes de ballonnement d'une cuve rectangulaire

**1** Soit une cuve dont le fond est horizontal, situé dans le plan  $z = 0$ , dont la surface libre est au repos située en  $z = h$ , dont les parois latérales sont situées en  $x = 0$  et  $a$ ,  $y = 0$  et  $b$ . On y observe expérimentalement que des *ondes stationnaires* de la forme

$$z = h + \zeta \quad \text{avec} \quad \zeta = \zeta(x, y, t) = A \cos(\omega t) F(x, y)$$

n'existent que pour des valeurs discrètes de la fréquence angulaire  $\omega$ , appelées « *fréquences de ballonnement* ». Expliquez cette observation et prédisez ces valeurs en construisant ces ondes stationnaires par superposition d'ondes progressives du type de celles calculées en cours, en prenant garde à satisfaire les conditions d'imperméabilité des parois latérales.

**2** Quelle est la « fréquence fondamentale » de ballonnement d'une cuve de forme cubique

$$a = b = h = 1 \text{ m ?}$$



**Problème 3.2** *Étude détaillée d'ondes de surface en eau profonde* [test de novembre 2015]

**1** Dans un repère  $Oxyz$  cartésien, avec  $z$  vertical, on considère une couche d'eau très profonde au repos, située dans le domaine  $z < 0$ . L'interface supérieure définie par  $z = 0$  peut être considérée comme « libre » car de l'air se trouve dans le domaine  $z > 0$ , air dont on néglige la masse volumique et la viscosité. On considère une perturbation de type « onde pure » de cette configuration, dans laquelle l'interface eau - air est définie par

$$z = \zeta(x,t) = A \cos(kx - \omega t) , \quad (3.69)$$

avec  $A$  une amplitude petite,  $k > 0$  le nombre d'onde,  $\omega > 0$  la fréquence angulaire. On considère que l'eau est un fluide pesant parfait incompressible en écoulement potentiel 2D  $xz$ .

**1.a** Dans le cadre d'une analyse linéaire de stabilité, montrez que le potentiel des vitesses dans l'eau est de la forme

$$\phi = \Phi(z) \sin(kx - \omega t) , \quad (3.70)$$

où  $\Phi(z)$ , d'ordre  $A$ , est connue. Déduisez-en les composantes  $v_x$  et  $v_z$  de la vitesse.

**1.b** Afin de préparer le tracé des lignes de courant instantanées (cf. la question 5.a), établissez par un calcul l'expression d'une fonction courant  $\psi$  décrivant ce champ de vitesse dans le plan  $xOz$ .

**1.c** Établissez par un calcul la relation de dispersion liant  $\omega$  et  $k$ , en présence de tension superficielle à l'interface eau - air. Validez ce calcul par comparaison à un résultat du cours.

**2** On considère dans toute la suite de ce problème une « houle » à la surface d'une « mer »<sup>23</sup> d'eau froide à 10°C, avec  $A = 50$  cm et une longueur d'onde  $\lambda = 50$  m.

**2.a** Calculez la vitesse de phase  $c$  de cette onde, et qualifiez sa nature physique.

**2.b** Calculez la fréquence angulaire  $\omega$  et la période temporelle  $T$  de cette onde.

**3** On désire valider l'hypothèse que l'eau se comporte comme un fluide parfait.

**3.a** Montrez par un calcul précis que le terme visqueux dans l'équation de Navier-Stokes est négligeable.

**3.b** Montrez par un calcul d'ordre de grandeur que le terme visqueux, proportionnel à la viscosité de l'eau, dans l'expression de la condition dynamique à l'interface est négligeable.

**4** Explicitiez le système qu'il faut résoudre pour calculer les trajectoires d'une particule fluide dans ce champ de vitesse. Quelle est sa nature mathématique précise, et pourquoi est-il difficile à résoudre analytiquement ?

**5** Dans cette question on utilisera Mathematica pour une *étude numérique*.

**5.a** À l'aide de Mathematica, représentez, à  $t = 0$ , les lignes de courant du champ de vitesse, avec la commande `ContourPlot`, et ce champ de vitesse, avec la commande `VectorPlot`, dans le domaine

$$D = \{(x,z) \in [0, 50 \text{ m}] \times [-10 \text{ m}, 0]\} .$$

Reproduisez avec quelques lignes de courant et vecteurs vitesses bien choisis ce schéma.

---

23. On néglige tout effet de salinité.

**5.b** Procédez à un calcul numérique de la trajectoire de deux particules fluides qui se trouvent à  $t = 0$  en  $(x, z) = (0, -1)$  m et  $(0, -5)$  m, ce pendant 10 périodes temporelles de l'onde. Vous utiliserez la commande `NDSolve`, avec une syntaxe du type suivant, pour la première particule :

```
sol1= NDSolve[{ ED0x, ED0z, CIx1, CIz1}, {x[t],z[t]}, {t,0,10 T}]
x1[t_]= Replace[ x[t], sol1[[1]]]
z1[t_]= Replace[ z[t], sol1[[1]]]
```

Représentez ces deux trajectoires, en utilisant la commande `ParametricPlot`, dans le domaine

$$D' = \{(x, z) \in [-1 \text{ m}, 2 \text{ m}] \times [-6 \text{ m}, 0]\} .$$

Reproduisez ce schéma à la main sur votre copie.

Décrivez qualitativement et semi-quantitativement ces trajectoires. Donnez une première interprétation physique de celles-ci.

**6** Dans cette question, on revient au cas général de la question 1 et à une *étude analytique asymptotique*, le petit paramètre naturel étant l'amplitude  $A$ . On admet qu'un calcul d'onde non linéaire dans ce système n'introduit pas de corrections à l'ordre  $A^2$ , c'est-à-dire que le champ de vitesse d'une onde non linéaire est

$$\bar{v} = (\bar{v} \text{ calculé en 1}) + O(A^3) . \quad (3.71)$$

On veut étudier la trajectoire d'une particule fluide jusqu'à l'ordre  $A^2$ , à partir d'un développement asymptotique (début d'un développement en série entière en fonction de  $A$ , qui a sans doute un rayon de convergence strictement positif) de la forme

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + Ax_1(t) + A^2x_2(t) + O(A^3) \\ z(t) = z_0 + Az_1(t) + A^2z_2(t) + O(A^3) \end{cases} . \quad (3.72)$$

**6.a** En injectant les développements (3.72) dans les équations écrites en question 4, et en effectuant le début d'un développement en série des vitesses, identifiez  $\dot{x}_1 = dx_1/dt$ ,  $\dot{x}_2 = dx_2/dt$ ,  $\dot{z}_1 = dz_1/dt$  et  $\dot{z}_2 = dz_2/dt$ .

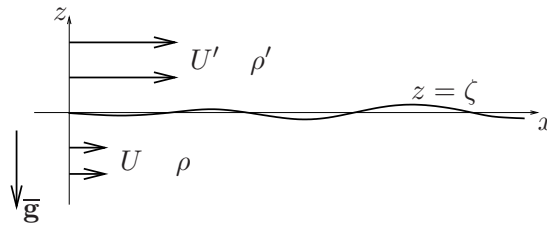
*Indication* : vous aurez intérêt à écrire les deux composantes de la vitesse sous la forme

$$v_i = A \omega V_i(x, z, t)$$

puis à expliciter un développement de Taylor des fonctions  $V_i$ .

**6.b** Calculez  $x_1(t)$  et  $z_1(t)$ ; vous pourrez supposer que les valeurs moyennes de ces fonctions sont nulles, i.e. : à l'ordre  $A$ ,  $(x_0, z_0)$  sont les coordonnées de la position moyenne de la particule. Identifiez la nature géométrique de la trajectoire à l'ordre  $A$ , définie par  $A(x_1(t), z_1(t))$ . Comparez précisément aux résultats numériques de la question 5, et expliquez la physique.

**6.c** Calculez  $\dot{x}_2(t)$  et  $\dot{z}_2(t)$ . Montrez en particulier l'existence d'une « *vitesse de dérive* » à l'ordre  $A^2$  dans la direction  $x$ , que vous quantifierez. Comparez précisément aux résultats numériques de la question 5 et expliquez la physique.



**Fig. 3.4** – Schéma de principe d'une situation pouvant conduire à des *instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor*, étudiée dans le problème 3.3.

### Problème 3.3 *Instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor*

En se restreignant au cas de couches « profondes », le but de cet exercice est d'étendre les calculs faits en cours sur des ondes de surface

- d'une part en prenant en compte l'existence d'une masse volumique non nulle dans la phase supérieure (on va donc développer un modèle à deux fluides pesants) ;
- d'autre part en autorisant un cisaillement quelconque à l'interface.

On étudie donc la stabilité d'une couche d'un fluide de densité  $\rho$  et de vitesse  $U$ , située dans le demi-plan  $z \in \mathbb{R}^-$ , surmontée d'une couche d'un fluide de densité  $\rho'$  et de vitesse  $U'$  située dans le demi-plan  $z \in \mathbb{R}^+$ , comme cela est représenté sur la figure 3.4. A cause de l'invariance par translation dans la direction  $x$ , on peut considérer des perturbations en « modes normaux » correspondant à une forme d'interface

$$\zeta = \zeta(x,t) = A \operatorname{Re}[\exp(ikx + \sigma t)] \quad \text{où } \sigma \text{ est un nombre complexe à calculer.}$$

1 En présence d'une tension superficielle  $\gamma$  à l'interface entre les deux fluides, menez à bien l'analyse linéaire de stabilité, afin d'obtenir une équation caractéristique de la forme

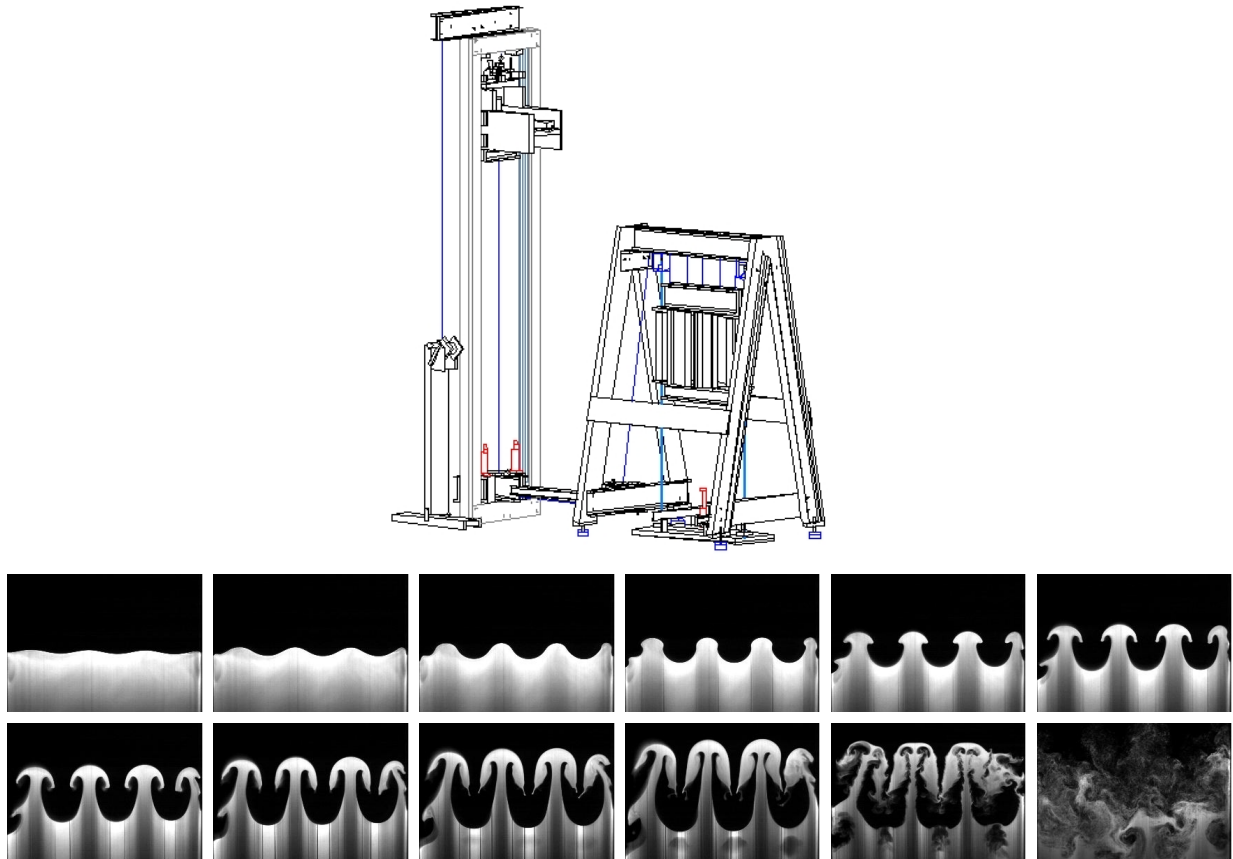
$$a\sigma^2 + 2b\sigma + c = 0 .$$

2 Calculez  $\sigma$  ; vous identifierez les parties réelle et imaginaire de  $\sigma$  en donnant leur interprétation physique et en discutant dans le même temps du devenir des perturbations. Vous mettrez en évidence l'existence possible d'*instabilités de Kelvin-Helmholtz* si  $U' \neq U$ , de *Rayleigh-Taylor* si  $\rho' > \rho$ . D'après ce modèle, à partir de quelle vitesse de vent au-dessus d'une étendue d'eau au repos se créent des vagues ?

### Complément 3.1 *On the Rayleigh-Taylor Instability*

The Rayleigh-Taylor Instability can also occur in a continuously stratified fluid without an interface, as shows the problem 3.5.

On [http://fluidlab.arizona.edu/RT\\_Incomp.html](http://fluidlab.arizona.edu/RT_Incomp.html), people of the Experimental Fluid Mechanics and Instability Laboratory of the Department of Aerospace and Mechanical Engineering at the University of Arizona show and explain experimental results on the *Rayleigh-Taylor Instability*:

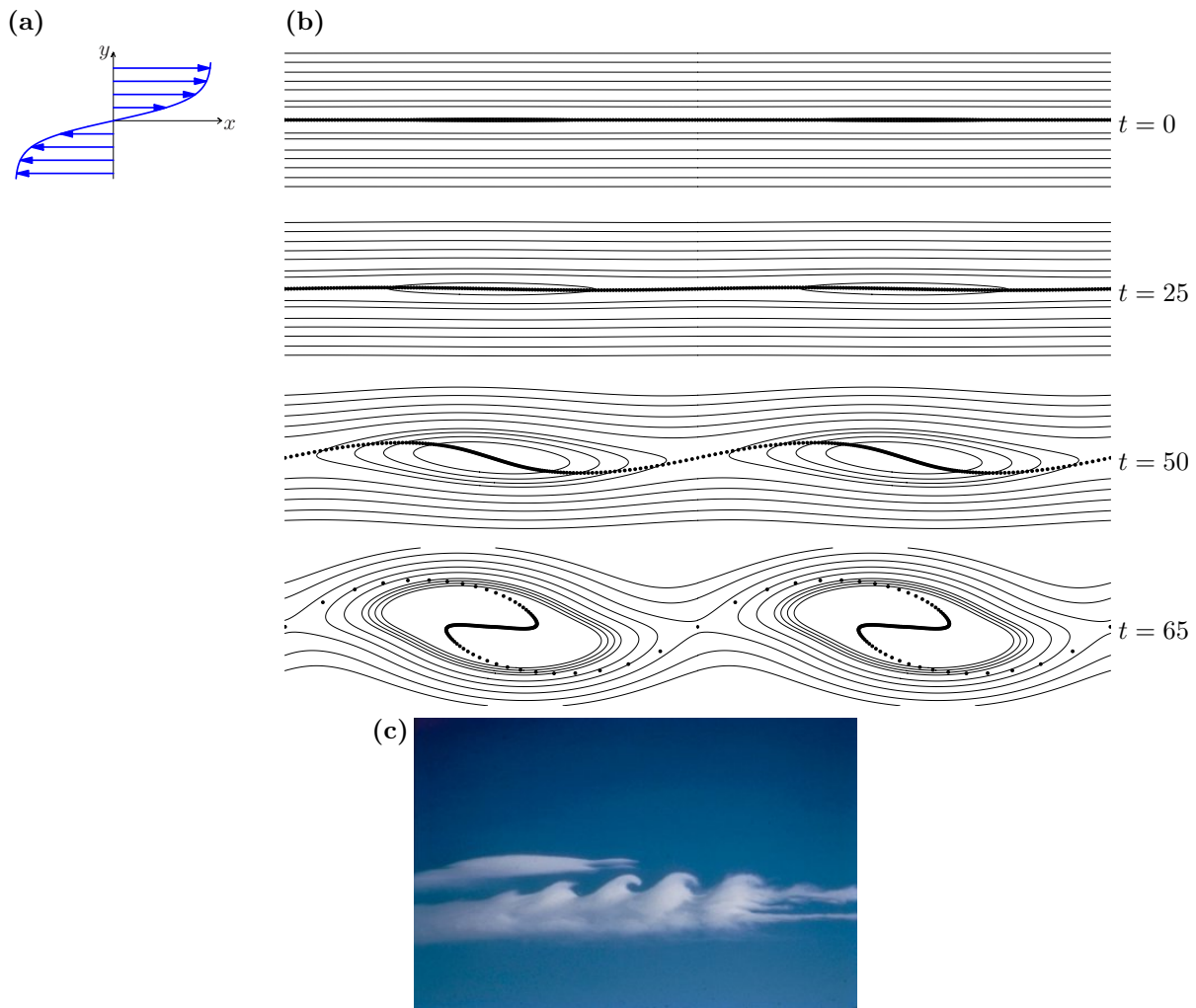


**Fig. 3.5** – Top : Setup devoted to the study of the *Rayleigh-Taylor instability*. Bottom : Snapshots showing the development of the Rayleigh-Taylor instability, as time goes by. For details, see text.

*‘Rayleigh-Taylor instability is generated in our experiments by accelerating a tank containing the two fluids downward at a rate greater than the earth’s gravitational acceleration. The experimental apparatus consists of a tank that is mounted to a linear rail system and attached by a cable to a weight and pulley system.*

*The bottom half of the tank is filled with a heavy liquid and the top half with a lighter liquid. The filled container is then hoisted to the top of the rail system and then oscillated in the horizontal direction giving the interface a sinusoidal initial perturbation. The tank is then released allowing the weight to pull it downward at a rate approximately twice that of the earth’s gravitational field which produces a net gravitational pull approximately equal to that of the earth’s but oriented upward. Thus, the initially stably-stratified system becomes unstable.*

*The fluids are visualized in these experiments using Planar Laser Induced Fluorescence. A fluorescent dye is mixed in one of the liquids and then illuminated with a sheet of laser light passing through the top of the container. The resulting fluorescent images are captured by a CCD camera which travels with the moving container. Picture above shows a sequence of images captured during one of these experiments. In these views the effective gravity pulls the lower heavier fluid upward as if the tank had been inverted but without the disrupted effects of actually turning over the tank.’*



**Fig. 3.6** – (a) : Profil d'écoulement dans une *couche de cisaillement*. (b) : Développement de l'*instabilité de Kelvin-Helmholtz* d'une telle couche légèrement perturbée : lignes de courant en trait continu, suivi de particules fluides avec les disques pleins, pour différents instants  $t$  adimensionnés. (c) : Photographie de nuages par Brooks Martner, du NOAA Environmental Technology Laboratory.

### Complément 3.2 Sur les instabilités de Kelvin-Helmholtz

Elles peuvent exister en l'absence de tension superficielle, i.e. lorsqu'il n'y a pas d'interface en tant que telle, et en présence d'un cisaillement « plus doux » qu'une discontinuité de vitesse. C'est le cas d'un profil de vitesse en « *couche de cisaillement* » comme celui de la Fig. 3.6a. L'instabilité correspondante peut se calculer en fluide parfait à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire numérique, par méthode numérique spectrale, comme évoqué dans [Plaut et al. \(2008\)](#). Elle conduit à l'amplification de *vortex* dont les lignes de courant sont montrées sur la Fig. 3.6b. En suivant une idée de [Corcos & Sherman \(1984\)](#), il est intéressant de suivre les trajectoires de l'« interface » située en  $y = 0$ , initialement plane, pendant le développement de l'instabilité. On calcule ainsi les trajectoires de points matériels régulièrement espacés à l'instant  $t = 0$  sur la droite  $y = 0$ . On obtient les résultats de la figure 3.6b, montrant que l'« interface » s'enroule sous l'effet de l'écoulement associé aux vortex, de plus en plus intense ; voyez aussi l' [animation vidéo sur la page web du module](#). Une « pseudo-interface » qui s'enroule peut parfois se visualiser grâce à des nuages, comme le montre la figure 3.6c. Le résultat net de cette instabilité est que les couches

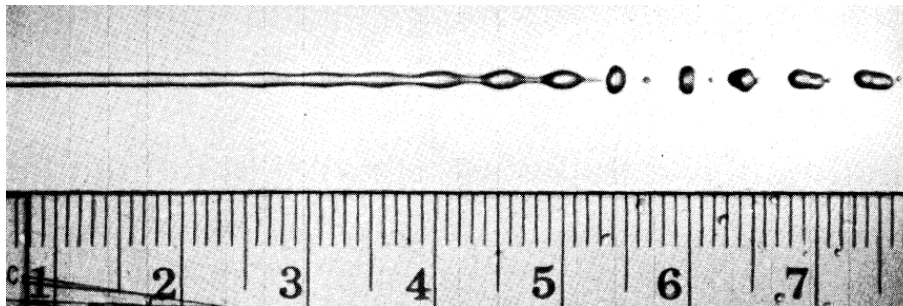
de fluides « inférieure » et « supérieure » à la couche de cisaillement vont se mélanger. Pour cette raison on dit que toute couche de cisaillement devient en général une « *couche de mélange* ». Ce phénomène se produit dans beaucoup d'autres cas, par exemple dans la couche de cisaillement entre les gaz éjectés par un réacteur (turboréacteur, moteur fusée, etc...) et l'air ambiant.

### Problème 3.4 *Rôle de la tension superficielle dans diverses instabilités*

[test de novembre 2010]

#### I Introduction et analyse de résultats expérimentaux

On désire étudier le *rôle de la tension superficielle* dans différentes *instabilités d'interfaces* : les *instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor*, que l'on a déjà abordées dans le problème 2.4, ainsi que l'*instabilité de Rayleigh-Plateau d'une colonne fluide cylindrique*. Cette dernière instabilité se manifeste par le fait qu'un jet fin de liquide, de forme cylindrique a priori, ne le reste pas, mais se déstabilise en faisant apparaître des ondulations de sa surface, qui croissent en général pour mener à une rupture du jet en gouttes. Ce phénomène est visible sur l'image ci-dessous, tirée de l'article historique de [Donnelly & Glaberson \(1966\)](#) :



Dans un tel jet d'eau dans de l'air, il y a un écoulement de la gauche vers la droite<sup>24</sup>, d'où une amplification spatiale des perturbations. On admet que cet écoulement ne joue pas un rôle important, c'est-à-dire que l'*instabilité de Rayleigh-Plateau* existe aussi pour une colonne cylindrique de fluide au repos, avec une amplification temporelle des perturbations.

**I.1** Sachant que la règle graduée est en cm, en mesurant le rayon  $R_0$  du jet à gauche de l'image, là où le jet est le moins perturbé, vérifiez que  $R_0 = 0,43$  mm. Estimez ensuite le rapport entre la longueur d'onde  $\lambda$  de l'instabilité ondulatoire et le rayon  $R_0$ .

#### II Approche semi-quantitative basée sur un critère énergétique de surface minimale

On sait qu'une interface d'aire  $S$  coûte une énergie de surface

$$E_{\text{surface}} = \gamma S$$

avec  $\gamma$  le coefficient de tension superficielle. Cette énergie est minimale si et seulement si l'aire  $S$  est minimale. On adopte donc comme *point de vue phénoménologique* le principe physique que *les effets de la tension superficielle tendent à minimiser les aires d'interface*, tout en respectant les contraintes imposées au système (volume de liquide, forme initiale de l'interface, géométrie imposée, etc...).

24. Ou de haut en bas...

### II.1 Effets de tension superficielle sur une interface plane

On considère la géométrie des instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor, à savoir une interface plane entre deux fluides, définie en coordonnées cartésiennes par  $z = 0$ .

**II.1.1** Dans cette configuration de base, calculez l'aire  $S$  de la zone de l'interface définie par

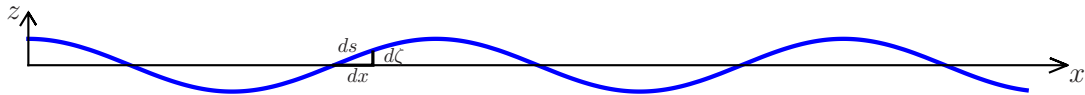
$$(x, y) \in [0, \lambda] \times [0, l_y], \quad (*)$$

$\lambda > 0$  et  $l_y > 0$  étant des longueurs données.

**II.1.2** On considère une petite perturbation de cette interface d'amplitude  $A$ , conduisant à une nouvelle configuration où l'interface est ondulée, définie par

$$z = \zeta(x) = A \cos kx$$

avec  $k$  le nombre d'onde de l'ondulation, qui définit la longueur d'onde spatiale  $\lambda = 2\pi/k$ . Calculez l'aire  $S_n$  de la zone de l'interface toujours définie par (\*), à l'ordre  $A^2$ . Vous introduirez une abscisse curviligne  $s(x)$  le long de la courbe définissant le profil de l'interface, comme présenté ci-dessous.



**II.1.3** Que peut-on dire du rapport  $S_n/S$  quand l'amplitude  $A$  est petite non nulle ? Que peut-on en déduire sur l'effet de la tension superficielle sur les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor ? Expliquez en quoi ce résultat est conforme à ceux de l'analyse linéaire de stabilité du problème 2.4.

### II.2 Effets de tension superficielle sur une interface cylindrique

On considère la géométrie de l'instabilité de Rayleigh-Plateau, à savoir une interface cylindrique définie en coordonnées cylindriques par  $r = R_0$ .

**II.2.1** Dans cette configuration de base, calculez l'aire  $S$  de la zone de l'interface définie par

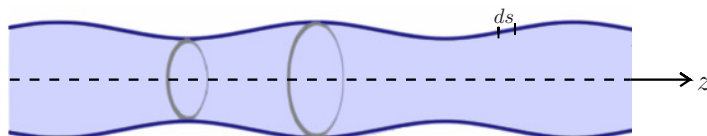
$$z \in [0, \lambda], \quad (**)$$

$\lambda > 0$  étant une longueur donnée. Calculez aussi le volume  $V$  de liquide délimité par cette interface.

**II.2.2** On considère une petite perturbation de cette interface d'amplitude  $A$ , conduisant à une nouvelle configuration où l'interface est ondulée, définie par

$$r = R(z) = R_1 (1 + A \cos kz),$$

le nombre d'onde  $k$  définissant la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ . Calculez le volume  $V_n$  de liquide délimité par la zone de l'interface toujours définie par (\*\*). Montrez que l'incompressibilité du liquide, i.e. l'égalité  $V_n = V$ , n'est assurée que si le rapport  $R_1/R_0$  dépend de  $A^2$ , à des effets d'ordre  $A^4$  près, suivant une relation que vous calculerez. Calculez enfin l'aire  $S_n$  de cette zone d'interface, à l'ordre  $A^2$ . Vous introduirez une abscisse curviligne  $s(z)$  le long de la courbe définissant le profil de l'interface, comme présenté ci-dessous.



**II.2.3** Montrez à partir de l'expression de  $S_n/S$  que la tension superficielle est déstabilisante pour des valeurs de  $k$  inférieures à une valeur critique  $k_c$ , i.e. pour des valeurs de  $\lambda$  supérieures à une valeur critique  $\lambda_c$ . Concluez sur ce que l'on s'attend à voir si la tension superficielle joue un rôle dominant.

### III Analyse linéaire quantitative de l'instabilité de Rayleigh-Plateau

Pour développer un *modèle linéaire quantitatif* de l'instabilité de Rayleigh-Plateau, on considère une colonne cylindrique d'un liquide incompressible, définie par  $r \leq R_0$  en coordonnées cylindriques, au repos dans un gaz parfait non pesant. On étudie sa stabilité vis-à-vis de perturbations infinitésimales menant à une nouvelle position d'interface

$$r = R(z,t) = R_0 + a \cos(kz) \exp(\sigma t)$$

avec  $a \exp(\sigma t) \ll R_0$ ,  $k$  un nombre d'onde réel,  $\sigma$  un nombre réel strictement positif caractérisant l'amplification de certaines perturbations, que l'on anticipe. Les champs de pression et de vitesse auront des dépendances similaires en  $z$  et  $t$ , par exemple

$$p = p_0 + P(r) \cos(kz) \exp(\sigma t) \quad \text{et} \quad v_r = V_r(r) \cos(kz) \exp(\sigma t) .$$

**III.1** Montrez que le fait que l'on puisse négliger les effets de viscosité et de pesanteur peut s'expliquer par deux relations d'ordonnement, que l'on vérifiera a posteriori en III.8. Pour ce qui est de la viscosité vous raisonnerez sur l'équation de Navier-Stokes, en comparant à un terme inertiel. Pour ce qui est de la pesanteur vous raisonnerez sur la pression, en comparant à un saut de pression par tension superficielle.

**III.2** Calculez la pression  $p_0$  dans la configuration de base  $a = 0$ , en fonction notamment de la pression dans le gaz  $p_g$ .

**III.3** Montrez à partir de l'équation d'Euler linéarisée que, dans la configuration perturbée, la fonction  $P(r)$  vérifie l'équation de Bessel modifiée d'ordre 0,

$$P''(r) + r^{-1}P'(r) - k^2P(r) = 0 .$$

On admet que, mathématiquement, les seules solutions régulières sur  $\mathbb{R}^+$  de cette équation sont de la forme

$$P(r) = b I_0(kr)$$

où  $b$  est une constante réelle,  $I_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  est la fonction de Bessel de première espèce modifiée, d'ordre 0, définie par la série entière

$$I_0(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{4^n (n!)^2} .$$

**III.4** Déduisez de ce qui précède et de l'équation d'Euler linéarisée l'expression de  $V_r(r)$ .

**III.5** Explicitiez la condition cinématique à l'interface, linéarisée, et déduisez en la relation entre les amplitudes  $a$  et  $b$ . Vérifiez l'homogénéité de la formule obtenue.

**III.6** Calculez la normale unitaire  $\bar{\mathbf{n}}$  sortant de l'interface perturbée, au premier ordre en  $a$ , sur un voisinage de l'interface. Calculez la divergence de ce champ au même ordre, et explicitiez la condition



dynamique à l'interface, linéarisée. Montrez que cette condition mène à une expression du taux de croissance  $\sigma$  que l'on aurait pu deviner en combinant les résultats d'une analyse dimensionnelle, ceux de la partie II, et une analyse physique reposant sur l'observation que ce système est non dissipatif, à savoir

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 (1 - \alpha^2) J(\alpha)$$

où

$$\sigma_0 = \sqrt{\gamma/(\rho R_0^3)},$$

la variable réduite  $\alpha = k/k_c$ ,  $J$  est une fonction de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  dépendant de  $I_0$  et de sa première dérivée.

**III.7** Dans **Mathematica**, la fonction  $I_0(\alpha)$  est définie par `BesselI[0, alpha]`. En recopiant sur votre feuille des résultats de Mathematica, esquissez l'allure des graphes des fonctions  $I_0(\alpha)$ ,  $J(\alpha)$  et  $\sigma(\alpha)/\sigma_0$ . Montrez que cela confirme l'existence de l'instabilité de Rayleigh-Plateau, et que les plus forts taux de croissance sont de l'ordre de  $\sigma_0$ , atteints pour  $\alpha \simeq \alpha_0$  que vous estimerez.

**III.8** On revient sur l'expérience de [Donnelly & Glaberson \(1966\)](#) décrite en partie I.

**III.8.1** Vérifiez que la valeur optimale  $\alpha_0$  prédite par la théorie est du même ordre de grandeur que la valeur que vous pouvez déduire de vos mesures de la partie I.

**III.8.2** Estimez  $\sigma_0$  puis  $1/\sigma_0$ ; expliquez pourquoi il a fallu utiliser un flash très bref pour observer l'instabilité.

**III.8.3** Discutez de la validité des deux relations d'ordonnement posées en III.1.

**Problème 3.5 Étude de la stabilité d'un fluide pesant continûment stratifié**

[test de novembre 2011]

On désire étudier la **stabilité d'un fluide pesant** placé dans le champ de pesanteur uniforme  $\bar{g} = -g\bar{e}_z$  avec  $Oxyz$  un repère cartésien,  $g > 0$ . Ce fluide est (typiquement) de l'eau salée. Une **stratification de masse volumique** a été préparée dans un réservoir (qui est éventuellement l'objet d'un retournement brutal). À l'instant initial  $t = 0$  on suppose que la masse volumique

$$\rho = \rho_0(z) \tag{*}$$

fonction non constante « donnée ». Plus précisément on suppose que  $\rho'_0(z)$  est non nulle sauf en un nombre fini de valeurs de  $z$ .

On néglige les effets de diffusion de concentration et de vitesse, que l'on suppose lents par rapport à la dynamique des phénomènes étudiés. D'autre part on néglige tout effet de compressibilité. Ainsi  $\rho$  est asservie à la concentration en sel qui est elle-même « gelée » dans le mouvement, donc  $\rho$  est « gelée » dans le mouvement,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\bar{\nabla} \rho) \cdot \bar{v} = 0, \tag{1}$$

$\bar{v}$  étant le champ de vitesse du fluide, qui décrit à la fois le mouvement de l'eau et du sel.

**1.a** À l'aide d'une loi de conservation fondamentale, montrez que

$$\text{div}(\bar{v}) = 0. \tag{2}$$

**1.b** Qu'entend t'on par « effets de diffusion de vitesse »? Puisqu'on les néglige, quel type de modèle de fluide va t'on utiliser? Dans ce cadre, donnez l'équation (3) qui régit la dynamique du champ de vitesse et nommez-la.

**2** On s'intéresse à une configuration idéale d'équilibre du fluide dans laquelle  $\rho$  est donnée par (\*). Montrez qu'un gradient de pression peut bien équilibrer le poids du fluide, et calculez la pression correspondante  $p = p_0(z)$ . Commentez.

**3** Effectuez l'*analyse linéaire de stabilité* de cette configuration idéale d'équilibre en posant

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad p = p_0 + p_1,$$

$\rho_1, p_1$  et  $\bar{\mathbf{v}}$  étant des perturbations infinitésimales.

**3.a** Linéarisez les équations (1), (2) et (3), pour obtenir des équations aux dérivées partielles à coefficients réels sur  $\rho_1, p_1$  et  $\bar{\mathbf{v}}$ .

**3.b** Expliquez pourquoi on peut se restreindre à l'étude de *modes de perturbation* 2D  $xz$  de la forme

$$\begin{aligned} \rho_1 &= R(z) \exp(ikx + \sigma t), \\ p_1 &= P(z) \exp(ikx + \sigma t), \\ \bar{\mathbf{v}}_1 &= U(z) \exp(ikx + \sigma t) \bar{\mathbf{e}}_x + W(z) \exp(ikx + \sigma t) \bar{\mathbf{e}}_z \end{aligned}$$

en notations complexes. Comment nomme t'on  $k$ ? Quelle est sa signification physique?

On admet dorénavant que l'on a toujours  $\sigma \neq 0$ .

**3.c** En utilisant les équations scalaires établies en 3.a, en notations complexes, éliminez les fonctions  $R(z)$  et  $U(z)$ .

**3.d** Explicitez d'autre part les deux composantes non triviales de l'équation vectorielle établie en 3.a, en notations complexes. Éliminez ainsi  $P(z)$ , puis établissez une équation caractéristique de degré 2 pour  $\sigma$ , qui est aussi une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 linéaire en  $W(z)$ , à coefficients non constants.

Bien entendu, vous testerez l'homogénéité dimensionnelle de cette équation.

**3.e** On suppose dorénavant que le fluide est confiné entre deux plans situés en  $z = 0$  et  $h$ . Quelles sont les conditions limites à imposer sur ces parois, qui concernent le champ de vitesse i.e.  $W$ ?

### §

**4.a** De façon *qualitative* générale, on admet que le problème différentiel posé en 3 admet bien des solutions, et que la fonction  $W$  peut toujours être choisie réelle. Montrez que la fonction  $U$  est alors imaginaire pure, et donnez la forme générale du champ de vitesse réel correspondant à l'instant initial de référence  $t = 0$ ,

$$\bar{\mathbf{v}} = \text{Re}(\bar{\mathbf{v}}_1),$$

en terme de  $W$  et de sa première dérivée.

**4.b** Calculez l'expression de l'énergie cinétique totale initiale du mode de perturbation considéré, contenue dans un volume de longueur  $\lambda = 2\pi/k$  dans la direction  $x$ ,  $L_y$  dans la direction  $y$ ,

$$E_c = L_y \int_0^\lambda \int_0^h \frac{1}{2} \rho_0 \bar{\mathbf{v}}^2 dx dz .$$

Vous calculerez aussi l'énergie cinétique volumique initiale moyenne

$$e_c = \frac{E_c}{\lambda L_y h} .$$

**4.c** En multipliant l'équation obtenue en 3.d par  $W$  et en l'intégrant sur l'intervalle  $[0, h]$ , montrez que

$$\sigma^2 e_c = \int_0^h W^2(z) \mu(z) dz ,$$

où  $\mu(z)$  est une fonction ne dépendant que de  $g$ ,  $h$  et la première dérivée de  $\rho_0(z)$ , que vous calculerez.

Bien entendu, vous testerez l'homogénéité dimensionnelle de l'expression de  $\mu$ .

*Indication* : pour faire apparaître l'énergie cinétique  $e_c$ , vous intégrerez par parties l'un des termes de l'équation obtenue en 3.d, multipliée par  $W$ .

**4.d** Montrez à partir de la formule intégrale précédente que, si la masse volumique dans la configuration initiale d'équilibre décroît avec l'altitude, alors cette configuration est marginalement stable. Montrez au contraire que, si la masse volumique dans la configuration initiale d'équilibre croît avec l'altitude, alors cette configuration est instable. De quel *type d'instabilité* s'agit-il?

### §

**5** On veut résoudre *quantitativement* ce problème dans le cas, permettant des calculs analytiques, où la stratification de masse volumique initiale est donnée par

$$\rho_0(z) = \rho_{00} \exp(\alpha z) ,$$

avec  $\rho_{00}$  et  $\alpha$  des constantes données.

**5.a** Montrez qu'alors les coefficients non constants dans l'équation différentielle sur  $W$  établie en 3.d peuvent se factoriser, de sorte que cette équation se ramène à une équation à coefficients constants

$$W'' + 2bW' + cW = 0 .$$

Vous calculerez les valeurs de  $b$  et  $c$ .

**5.b** Cherchez une solution de la forme

$$W(z) = A_+ \exp(q_+ z) + A_- \exp(q_- z)$$

où  $q_+$  et  $q_-$  sont les racines du polynôme  $q^2 + 2bq + c$ ,  $A_+$  et  $A_-$  sont réglés de façon à satisfaire les conditions limites établies en 3.e. Montrez que cela implique aussi une condition sur  $q_+$  et  $q_-$

donc sur  $\sigma$ . À partir de cette condition, montrez l'existence d'un entier naturel strictement positif  $n$  tel que

$$\sigma^2 = \frac{\alpha g}{1 + \beta + \gamma n^2 \pi^2},$$

$\beta$  et  $\gamma$  étant des réels positifs que vous calculerez.

**5.c** Retrouvez à partir de l'équation précédente les propriétés de stabilité de la configuration d'équilibre déjà établies en 4.d.

Dorénavant on se place dans un cas instable.

**5.d** Quelle est la valeur de  $n$  qui maximise le taux de croissance  $\sigma_r = \text{Re}(\sigma)$  ?

**5.e** Quel est l'effet négligé dans le modèle qui fait qu'il prédit, de façon non physique, que le taux de croissance est maximum lorsque  $k \rightarrow +\infty$  ?

**5.f** On considère un système dans lequel  $h = 25$  cm et  $\alpha = 1/h$ . On admet que la valeur de  $k$  qui doit être considérée pertinente est  $k = \alpha$ . Quelle est alors la valeur numérique du taux de croissance de l'instabilité ? Justifiez a posteriori le fait que l'on puisse négliger, pour ce cas précis, les effets de diffusion de vitesse et de concentration.

On rappelle (cf. le chapitre 1 de [Plaut 2015b](#)) que ces derniers effets sont régis par l'équation d'advection-diffusion de la concentration  $c_s$  en sel,

$$\frac{dc_s}{dt} = D \Delta c_s,$$

avec  $D$  un coefficient de diffusion typique d'un liquide. Il s'agit de montrer qu'en première approximation

$$\frac{dc_s}{dt} = 0$$

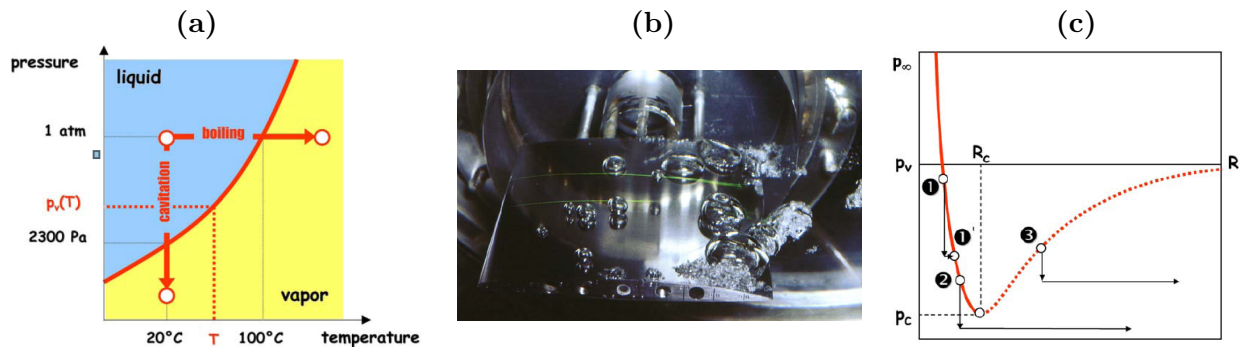
d'où, puisque  $\rho = \rho(c_s)$ ,

$$\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

### Problème 3.6 Modélisation de phénomènes en lien avec la cavitation

[test de novembre 2012]

La **cavitation** dans l'eau est le phénomène de vaporisation de liquide, produisant de la vapeur, à température pratiquement constante, sous l'effet d'une baisse de la pression. Elle se distingue donc nettement de l'ébullition (*'boiling'*), qui elle a lieu à pression pratiquement constante, sous l'effet d'une augmentation de la température. Ces deux phénomènes sont schématisés sur le diagramme thermodynamique de la figure 3.7a ; la fonction représentée est la **pression de vapeur saturante** de l'eau  $p_v(T)$ , pression d'équilibre entre l'eau vapeur et l'eau liquide. La cavitation se manifeste par la formation de **bulles** dans les zones de basse pression d'un écoulement, par exemple sur la face supérieure d'un profil d'aile, comme le montre la photo figure 3.7b prise dans un canal hydraulique. L'expérience montre que la cavitation prend naissance sur des « **germes** », **microbulles de gaz et de vapeur d'eau** éventuellement ancrées sur une microscopique poussière. Pour modéliser la cavitation, il faut donc s'intéresser au devenir d'une telle microbulle, lorsque celle-ci est transportée dans l'écoulement. Dans ce problème, aux échelles considérées, on néglige tout effet de pesanteur.



**Fig. 3.7** – Principe physique (a), exemple pratique (b) et pression d'équilibre (c) en *cavitation* ; toutes ces figures sont tirées de Franc (2006).

### I Étude quasi statique du devenir d'une bulle - Critère de cavitation

On considère une microbulle isolée sphérique de rayon  $R$ , contenant du gaz, par exemple du dinitrogène et dioxygène de l'air, considéré parfait, et de la vapeur d'eau. Le rayon  $R$  est susceptible d'évoluer en fonction essentiellement de la pression ambiante dans l'eau, notée  $p_\infty$ . De fait on travaille dans le référentiel lié à l'eau, et on considère l'écoulement macroscopique d'eau localement uniforme, i.e. dans ce référentiel on a autour de la bulle une situation « d'équilibre », avec une pression dans le liquide  $p_\infty$ .

**I.1** On suppose que la bulle évolue de façon quasi statique et isotherme, et que la quantité de gaz contenue à l'intérieur reste constante. Montrez l'existence d'une constante  $K$  telle que la pression partielle de gaz dans la bulle soit

$$p_g = K/R^3 . \quad (3.73)$$

**I.2** On suppose d'autre part que la pression partielle de vapeur d'eau dans la bulle reste toujours égale à sa valeur thermodynamique  $p_v$ . En prenant en compte l'existence d'une tension superficielle à l'interface entre l'eau et la bulle, établissez la relation « à l'équilibre » entre la pression ambiante dans l'eau  $p_\infty$  et  $R$ .

**I.3** Montrez que la courbe représentative de cette fonction  $p_\infty^{\text{eq}}(R)$  a l'allure présentée sur la figure 3.7c, avec un minimum  $p_c$  pour une valeur critique de  $R$ , soit  $R_c$ . Vous calculerez analytiquement  $p_c$  et  $R_c$ .

**I.4** On suppose que la bulle est soumise de façon quasi statique à une chute de pression ambiante, d'une valeur initiale  $p_\infty$  où elle était à l'équilibre vers une valeur nouvelle  $p'_\infty$ . On suppose que le rayon  $R$  de la bulle va commencer par augmenter sous l'effet de cette dépression. Décrivez le devenir de la bulle, en discutant plus particulièrement la possibilité de trouver un nouveau rayon d'équilibre  $R' > R$ , dans les 3 cas représentés sur la figure 3.7c :

1. lorsque la bulle a un rayon initial  $R < R_c$  et que la pression finale  $p'_\infty > p_c$  ;
2. lorsque la bulle a un rayon initial  $R < R_c$  et que la pression finale  $p'_\infty < p_c$  ;
3. lorsque la bulle a un rayon initial  $R > R_c$ .

Vous concluez en terme de « stabilité » ou « instabilité » des branches de la courbe  $p_\infty^{\text{eq}}(R)$ , et de cavitation ou non, à partir du germe considéré.

**I.5** On considère de l'eau à 20°C, suffisamment pure pour que les plus gros germes de cavitation qu'elle contient soient de rayon  $R_{\max} \simeq 100 \mu\text{m}$ . Sur la base du critère quasi statique développé question I.4, en supposant que  $R_{\max}$  donne aussi la valeur  $R_c$  du rayon critique des plus gros germes, en deçà de quelle valeur analytique et numérique de la pression s'attend-on à avoir cavitation ? Interprétez physiquement l'influence de la tension superficielle.

## II Étude dynamique du devenir d'une bulle : équation générale

Dans cette partie on veut étudier la dynamique de la croissance ou décroissance d'une microbulle isolée, en prenant en compte l'écoulement microscopique d'eau associé à cette dynamique. On néglige les effets de la viscosité de l'eau. On se place toujours dans le référentiel lié à l'eau et on suppose loin de la bulle une situation « d'équilibre », avec une pression dans le liquide  $p_\infty$ .

**II.1** Justifiez succinctement qu'il est raisonnable de considérer que l'écoulement microscopique d'eau associé à la dynamique de la bulle est purement radial, avec un champ de vitesse de la forme

$$\bar{\mathbf{v}} = v_r(r,t) \bar{\mathbf{e}}_r$$

en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ .

**II.2** En faisant l'hypothèse raisonnable que l'eau est incompressible, montrez l'existence d'une fonction  $k(t)$  et d'un exposant  $\alpha$  entier tel que

$$v_r(r,t) = k(t) r^\alpha .$$

**II.3** Montrez qu'un tel écoulement est potentiel, et calculez son potentiel des vitesses  $\phi(r,t)$ .

**II.4** On suppose que la condition cinématique standard est valable à l'interface de la microbulle, située au rayon  $R(t)$  susceptible d'évoluer avec le temps. Explicitez cette condition, et déduisez-en le lien entre  $k(t)$ ,  $R(t)$  et sa première dérivée par rapport au temps  $\dot{R}(t)$ .

**II.5** Calculez le champ de pression dans l'eau, autour de la bulle et jusqu'à la frontière de la bulle.

**II.6** En supposant que dans la bulle il y a du gaz en dynamique isotherme, dont la pression partielle est toujours donnée par l'équation (3.73), et de la vapeur d'eau à la pression partielle  $p_v$ , établissez à l'aide de la condition dynamique à l'interface, en présence de tension superficielle, l'équation d'évolution de  $R(t)$ .

*Indication* : cette équation est différentielle ordinaire d'ordre deux, non linéaire ; les termes sources de la dynamique font intervenir la fonction  $p_\infty^{\text{eq}}(R)$  de la partie I.

**II.7** Justifiez a posteriori les termes de « stabilité » et « instabilité » introduits phénoménologiquement à la question I.4.

## III Implosion d'une bulle

On considère une bulle, composée exclusivement de vapeur d'eau, qui a atteint un rayon  $R_0$  relativement grand sous l'effet de la cavitation. Cette bulle se trouve à la fin de son histoire dans une zone de l'écoulement de pression relativement élevée  $p_\infty > p_v$ . Sous l'effet de cette pression, elle implose. On veut calculer cette évolution en supposant qu'à  $t = 0$ ,  $R = R_0$ ,  $\dot{R} = 0$ , tandis que  $p_\infty$  a atteint sa valeur stationnaire  $p_\infty > p_v$ .

**III.1** Calculez  $d(R^3 \dot{R}^2)/dt$  et faites apparaître cette quantité dans l'équation de la dynamique du rayon de la bulle, dans le cas où il n'y a pas de gaz.

**III.2** Intégrez une première fois l'équation précédente, pour obtenir la loi de vitesse de décroissance du rayon  $R$  en fonction du temps.

**III.3.a** On commence par étudier le cas sans tension superficielle. Montrez en effectuant une intégration de l'équation précédente que le temps  $t_i$  d'implosion complète, durant lequel  $R$  passe de  $R_0$  à 0, est fini et proportionnel à l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^{-3} - 1}} = 0,747 .$$

Expliquez physiquement, à partir de la formule analytique obtenue pour  $t_i$ , comment ce temps dépend des différents paramètres du problème.

**III.3.b** Calculez numériquement la valeur du temps d'implosion  $t_i$  dans la cas d'une bulle de rayon initial  $R_0 = 5$  mm, sous une surpression  $p_\infty - p_v = 1$  bar, toujours dans de l'eau à 20°C.

**III.3.c** Que prédit ce modèle pour la vitesse  $|\dot{R}|$ , lorsque le rayon  $R$  devient infiniment petit? Commentez physiquement.

**III.3.d** Calculez la correction de pression dans l'eau autour de la bulle, à un rayon  $r$  de son centre, associée à l'écoulement de compression de la bulle,

$$\Pi(r,t) = \frac{p(r,t) - p_\infty}{p_\infty - p_v} ,$$

en fonction de  $R = R(t)$ ,  $R_0$  et  $r$  seulement. Montrez que  $\Pi$  est un polynôme en  $X = R/r$ , dont les coefficients ne dépendent que de  $R/R_0$ . À partir de l'étude de cette fonction de  $X$ , montrez que, dès que  $R < R_0/4^{1/3}$ , un maximum de pression est atteint en un certain rayon  $r_{\max}$  que vous calculerez analytiquement. Vous établirez aussi l'expression analytique de la correction de pression correspondante  $\Pi_{\max}$ . Donnez le comportement asymptotique de  $r_{\max}$  et  $\Pi_{\max}$  quand  $R$  tend vers 0. Représentez enfin le graphe de  $\Pi(r,t)$  en fonction de  $r$  à un instant  $t$  où  $R = R_0/4$ . Discutez physiquement et pratiquement ces résultats.

**III.4** En présence de tension superficielle, s'attend t'on à une dynamique d'implosion plus ou moins rapide? Est-ce raisonnable physiquement?

#### IV Influence de la viscosité sur l'implosion d'une bulle

Montrez que l'écoulement calculé questions II.1 à 4 et le champ de pression calculé question II.5 satisfont l'équation de Navier-Stokes. Explicitez la condition dynamique à l'interface d'une bulle implosante. Déduisez-en l'influence de la viscosité de l'eau sur l'implosion de cette bulle, en terme d'accélération ou ralentissement de la dynamique.

**Problème 3.7 Étude de quelques phénomènes dans une centrale hydraulique**

[test d'octobre 2014]

Pour comprendre entièrement et analyser physiquement la dernière partie de ce problème (questions 9 et 10), il faut avoir une bonne connaissance des ondes sonores et phénomènes associés. Ce problème, cependant, n'a pas été placé plus loin dans ce chapitre, car on se restreint, dans les calculs eux-mêmes, à une hypothèse de fluide incompressible.

On étudie une centrale hydroélectrique de taille moyenne, dont le circuit hydraulique principal est représenté sur la figure 3.8a. Un grand réservoir d'eau est retenu par un barrage. L'altitude de sa surface libre est  $z_0$ . Au point 1 situé au fond du réservoir, à l'altitude  $z_1$ , une conduite circulaire de diamètre intérieur  $d$  connecte ce réservoir à une cheminée d'équilibre, puis à une vanne V, et, immédiatement en aval, à une turbine (non représentée). La vanne et la turbine se situent à une altitude  $z_2$ . La longueur totale de la conduite entre sa prise d'eau au point 1 et la bifurcation avec la cheminée au point 2 est  $L$ . La cheminée est un cylindre de diamètre  $D$ , elle contient une colonne d'eau dont la surface libre se trouve à l'altitude  $z$ . Le débit nominal qui circule dans la conduite est  $q_0$ . On donne  $d = 1,5$  m,  $D = 3$  m,  $L = 1400$  m,  $z_0 - z_2 = 100$  m,  $q_0 = 5$  m<sup>3</sup>/s. Au vu des dimensions du système, notamment, on suppose que l'eau est un **fluide parfait incompressible**.

**Étude en régime nominal de production d'énergie**

1 Dans ce régime, le débit  $q_0$  circule dans la conduite, et l'eau dans la cheminée d'équilibre est statique. Étudiez l'évolution de la charge dans l'écoulement du réservoir jusqu'au refoulement de la turbine, qui se fait à la pression atmosphérique  $p_{at}$ . Que peut-on dire des termes d'énergie cinétique dans la charge ? Estimez analytiquement et numériquement la puissance mécanique  $P$  que l'on peut espérer capter sur la turbine. Commentez.

2 Dans ce régime, montrez qu'en première approximation le niveau d'eau  $z$  dans la cheminée d'équilibre égale le niveau  $z_0$  dans le réservoir amont.

**Étude d'oscillations suite à la fermeture de la vanne**

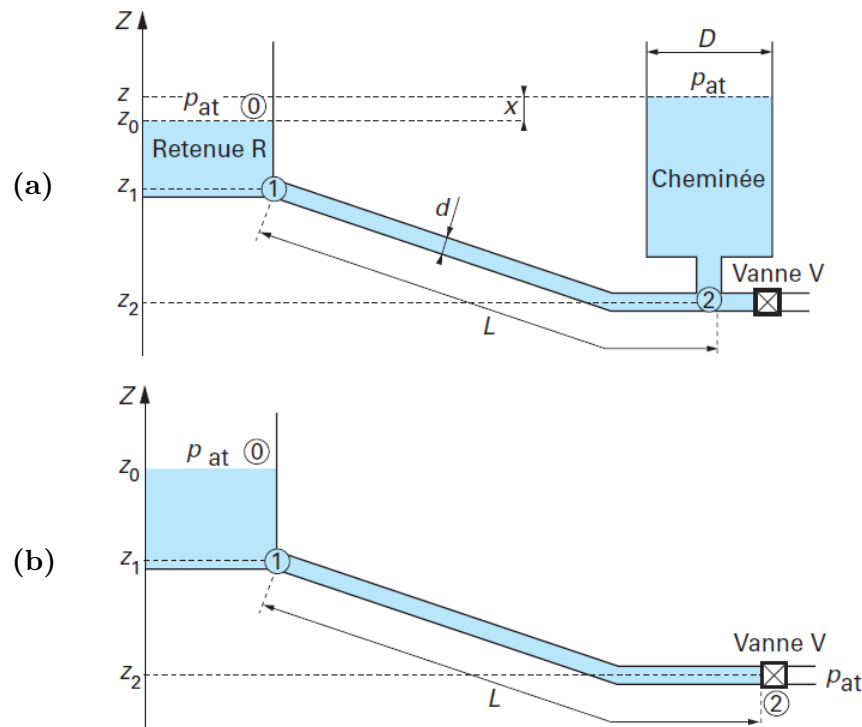
Partant du régime précédent, à l'instant  $t = 0$ , on ferme rapidement la vanne V. Comme le débit qui circulait dans la conduite peut s'évacuer vers la cheminée, une **oscillation lente** du débit dans la conduite et du niveau  $z$  se met rapidement en place, avec une période temporelle  $T$  longue.

**3.a** On introduit une abscisse curviligne  $s$  le long de la conduite, valant 0 au point 1 et  $L$  au point 2. En dehors d'une zone localisée près du coude où la conduite devient horizontale, la conduite est rectiligne :  $s$  est la 1<sup>ère</sup> coordonnée d'un repère cartésien de base  $\{\bar{e}_s, \bar{e}_Y, \bar{e}_Z\}$  (resp.  $\{\bar{e}_s, \bar{e}_y, \bar{e}_z\}$ ) dans la 1<sup>ère</sup> (resp. 2<sup>ème</sup>) portion rectiligne. Montrez que, dans ces portions rectilignes, on peut en première approximation considérer que le champ de vitesse de l'eau  $\bar{v} = V(s,t) \bar{e}_s$ , puis que  $V$  doit être uniforme,  $V(s,t) = V(t)$ .

**3.b** Toujours en travaillant dans la conduite, pas trop près du coude, à l'aide de l'équation locale de la quantité de mouvement établissez un lien entre la dérivée temporelle de la vitesse et une dérivée de la pression motrice.

**3.c** En intégrant l'équation précédente entre les points 1 et 2, et en négligeant l'effet du coude, établissez un lien entre la dérivée temporelle de la vitesse et la différence de pression motrice entre les points 1 et 2.





**Fig. 3.8** – *Centrales hydroélectriques* étudiées dans le problème 3.7, avec (a) et sans (b) cheminée d'équilibre. Ces schémas de principe, tirés de Frelin (2002), ne sont pas à l'échelle.

4 En modélisant de façon simple l'écoulement en amont du point 1, dans le réservoir, et l'écoulement au dessus du point 2, dans la cheminée, reliez la différence précédente à la différence d'altitude  $x = z - z_0$ . Déduisez-en une équation liant exclusivement  $L$ ,  $dV/dt$ ,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $x$ . Interprétez physiquement cette équation.

5 En utilisant une loi de conservation, reliez la vitesse débitante  $V$  dans la conduite à la dérivée  $dx/dt$ .

6 Déduisez de ce qui précède une équation différentielle ordinaire portant sur  $x(t)$ . Confirmez l'existence d'oscillations du niveau  $x$  et de la vitesse  $V$ , en donnant une formule analytique pour la période  $T$  correspondante. Faites l'application numérique et commentez.

7 En utilisant les conditions initiales

- $V(t = 0)$  est la vitesse débitante associée au débit nominal  $q_0$  ;
- $x(t = 0) = 0$  ;

calculez analytiquement  $V(t)$  et  $x(t)$  pour  $t \geq 0$ . En particulier, calculez analytiquement et numériquement l'amplitude  $A$  des oscillations du niveau  $x$ , et commentez.

8 Donnez enfin une expression analytique fermée pour la pression  $p_2(t)$  en amont de la vanne, pour  $t \geq 0$ . Quelle est l'amplitude des oscillations de cette pression, analytiquement et numériquement ? Commentez.

### Étude de l'effet de la fermeture de la vanne en l'absence de cheminée d'équilibre

On considère une autre centrale de dimensions et dessins identiques, mais sans cheminée d'équilibre, comme représenté sur la figure 3.8b.

9 Dans ce cas, lorsque l'on ferme la vanne rapidement, suivant une loi temporelle pour la vitesse débitante

$$V = V_i (1 - t/\tau) ,$$

où  $V_i$  est la vitesse débitante initiale,  $\tau$  le temps caractéristique de fermeture, justifiez que, dans le cadre du modèle adopté ici, dans toute la conduite la vitesse axiale  $V$  satisfait la même loi.

10.a En utilisant le modèle développé question 3, évaluez la différence de pression  $p_2 - p_{at}$  supportée par la vanne, entre son amont et son aval, pour  $t \in [0, \tau]$ .

10.b Évaluez  $p_2 - p_{at}$  numériquement lorsque  $V_i$  est la vitesse débitante correspondant au débit  $q_0$ , et le temps de fermeture  $\tau = 0,4$  s. Discutez physiquement autour du résultat trouvé.

### 3.9 Exercice faisant le lien ondes d'interface - ondes sonores

**Exercice 3.2 Analogie entre ondes d'interface et ondes acoustiques** [test d'octobre 2014]

On veut développer une analogie entre les ondes acoustiques, non dispersives, et les ondes se propageant à l'interface entre une étendue d'eau de profondeur  $h$  et de l'air situé au-dessus. Ceci permettra d'aboutir à la notion de *canal analogique* pour l'étude de problèmes de sillage en écoulement « sonique » ou « hypersonique ». Une photographie obtenue sur le canal analogique de l'ENSEM<sup>25</sup> figure ci-contre, on y distingue, autour d'un obstacle en forme de delta, un « ressaut hydraulique » (bourrelet où l'écoulement ralentit brusquement) analogue à une « onde de choc ».



1 Rappelez d'après le cours l'équation donnant le carré  $c^2$  de la vitesse de phase des ondes linéaires à l'interface entre une étendue d'eau de profondeur  $h$  et de l'air situé au-dessus. Vous ferez apparaître la longueur capillaire  $l_c$ , de sorte que  $c^2$  soit fonction du nombre d'onde  $k$ , de l'accélération de la pesanteur  $g$ , et des seules longueurs  $h$  et  $l_c$ .

2 À partir d'un développement de la fonction  $\tanh(x)$  quand son argument  $x$  tend vers 0, développez  $c^2$  en fonction de  $k$ , pour des grandes ondes telles que  $kh \ll 1$  et  $kl_c \ll 1$ , jusqu'à l'ordre  $(kh)^4$  ou  $k^4$ . Montrez que, par un choix judicieux de la hauteur d'eau  $h$ , on peut annuler le terme d'ordre  $k^2$ . Pour les calculs, vous supposerez que  $h$  et  $l_c$  sont des grandeurs finies du même ordre, alors que  $k$  est infiniment petit.

3 Concluez sur la possibilité de réaliser une analogie exacte ou seulement approximative entre ondes acoustiques et ondes d'interface. Calculez numériquement la hauteur d'eau  $h$  « optimale », ainsi que la vitesse  $c_0$  de propagation des ondes d'interface satisfaisant l'analogie.

### 3.10 Exercices et problème sur les ondes sonores

#### Exercice 3.3 *Étude détaillée des ondes sonores planes en milieu infini*

On désire ici revenir de façon plus précise sur les calculs faits en cours, dans le cas d'une onde sonore plane dans un milieu fluide infini, caractérisée par une perturbation de pression de la forme

$$p' = P \cos(kx - \omega t) . \quad (3.74)$$

**1** Calculez la perturbation de masse volumique  $\rho'$ , et montrez que l'amplitude  $R$  des fluctuations qu'elle décrit peut s'exprimer en fonction de  $P$  et  $c$  seulement.

**2** Menez une réflexion sur les approximations qui consistent à ne pas tenir compte des termes d'advection non linéaire, de pesanteur et visqueux dans l'équation de Navier-Stokes, considérée à la fois pour l'état hydrostatique de base et pour les perturbations liées à l'onde. Vous écrirez cinq relations d'ordonnement de la forme

$$\alpha \ll \beta$$

qu'il conviendra de vérifier numériquement par la suite (cf. la question 6). Vous introduirez d'ores et déjà l'amplitude  $V$  des fluctuations de vitesse et l'amplitude  $U$  des fluctuations de position associées à l'onde.

**3** Calculez le champ de vitesse associé à l'onde sonore. Montrez que l'amplitude  $V$  des fluctuations de vitesse ne dépend que de  $P$ ,  $\rho_0$  et  $c$ .

**4** Calculez le champ de déplacement lagrangien

$$\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}, t) = \bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{X}}, t) - \bar{\mathbf{X}}$$

des particules fluides associé à l'onde, en vous plaçant dans l'hypothèse de petits déplacements et en régime oscillant établi. Il ne faut donc pas voir  $\bar{\mathbf{X}}$  comme une position de référence à un instant de référence, mais plutôt comme la *position moyenne* de la particule fluide, qui repère de façon non ambiguë celle-ci. Afin de pouvoir résoudre l'équation différentielle ordinaire rencontrée, non linéaire, vous ferez une hypothèse de petits déplacements,

$$U \ll L \text{ longueur caractéristique bien choisie,}$$

qu'il faudra aussi valider a posteriori. Montrez que l'amplitude  $U$  des fluctuations de position ne dépend que de  $V$  et  $\omega$ . Représentez le champ  $\bar{\mathbf{u}}$  à un instant  $t$  particulier, et montrez que l'on a affaire à une ***onde longitudinale de compression-dilatation***.

**5** On suppose que cette onde plane est produite par une membrane (on peut penser à une « ceinte » de chaîne HIFI) située en moyenne en  $x = 0$  et mise en vibration longitudinale avec le champ de déplacement calculé en 4, évalué en  $X = 0$ . Représentez cette situation sur un schéma. Calculez la puissance  $P_{\text{pression}}$  développée par cette membrane sur le fluide. On définit l'***intensité acoustique physique*** de l'onde comme la puissance surfacique moyennée dans le temps

$$I = \frac{1}{S} \langle P_{\text{pression}} \rangle_t \quad (3.75)$$

avec  $S$  la surface de la membrane en contact avec le fluide. Montrez que

$$I = \frac{1}{2}PV = \frac{1}{2} \frac{P^2}{\rho_0 c} = \frac{1}{2} \rho_0 c V^2 . \quad (3.76)$$

**6** Dans le cas où le fluide est l'air en conditions ambiantes, on définit l'*intensité acoustique en décibels* en utilisant une échelle logarithmique,

$$I_{\text{dB}} = 120 + 10 \log_{10} \left( \frac{I}{1 \text{ W/m}^2} \right) . \quad (3.77)$$

**6.1** Une donnée physiologique importante (pour un humain) est la définition du seuil de souffrance physique associé à un son « très intense ». Il est donné par

$$I_{\text{dB}} = 120 \text{ dB} . \quad (3.78)$$

Pour une onde sonore « très intense » correspondant exactement à ce seuil, calculez numériquement toutes les amplitudes de fluctuations  $P$ ,  $R$ ,  $V$  et  $U$ , commentez les résultats obtenus et montrez que toutes les relations d'ordonnement écrites en 2 et 4 sont vérifiées. Vous supposerez que la fréquence de l'onde est celle du « la » des musiciens, i.e.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 440 \text{ Hz} . \quad (3.79)$$

**6.2** Une autre donnée physiologique importante (toujours pour un humain) est le seuil d'audition à 440 Hz, soit

$$I_{\text{dB}} = 0 \text{ dB} . \quad (3.80)$$

Calculez l'intensité acoustique physique correspondante puis les amplitudes de fluctuations  $P$ ,  $R$ ,  $V$  et  $U$ . Dans quel rapport sont-elles avec celles du son « très intense » étudié en 5.1 ? Concluez sur la qualité de l'oreille humaine.

### Exercice 3.4 *Étude sommaire de l'effet coup de bélier dans une conduite d'eau*

On considère des écoulements d'eau dans une conduite. On suppose en première approximation qu'à ces écoulements, même inhomogènes, peuvent se superposer des ondes sonores dont la célérité (vitesse de phase = vitesse de groupe) est la même qu'en milieu infini, c'est-à-dire  $c$  donnée par (3.37). Cette conduite comprend une section rectiligne longue située entre  $x = 0$  et  $x = L$ . Partant d'une situation où de l'eau circule en écoulement uniforme à la vitesse

$$\bar{\mathbf{v}} = v_0 \bar{\mathbf{e}}_x ,$$

on ferme à l'instant  $t = 0$ , de façon quasi instantanée, une vanne située en  $x = L$ . On observe alors que l'eau s'arrête brutalement de couler dans une région initialement localisée près de la vanne, et qui s'étend en « remontant » la conduite à la vitesse du son. Dans toute cette région on a une surpression  $p'$  et une variation de masse volumique  $\rho'$  par rapport à la région en écoulement en amont. En écrivant un bilan global de quantité de mouvement pour l'eau contenue dans la conduite entre  $x = 0$  et  $L - \delta L$ ,  $\delta L$  étant une petite longueur positive, qui permet de rester dans le domaine liquide en amont de la vanne, évaluez la surpression  $p'$ . Commentez la formule obtenue,

$$p' = \delta p = \quad , \quad (3.81)$$

en faisant une application numérique, dans le contexte d'une grande installation industrielle.

**Problème 3.8** *Effets de la viscosité sur des ondes de type sonore* [test de novembre 2009]

### 1 Généralités

On désire étudier les phénomènes de *propagation et d'amortissement d'ondes de type sonore* dans un *fluide compressible visqueux* au repos, avec dans la configuration de référence (sans onde) une pression quasi uniforme (à l'échelle des ondes) égale à  $p_0$ , une masse volumique quasi uniforme égale à  $\rho_0$ . Les ondes (généralisées puisqu'elles peuvent éventuellement être amorties) sont des petites perturbations de cette configuration de référence caractérisées par un champ de vitesse fluctuant de petite amplitude

$$\bar{\mathbf{v}}' = \bar{\mathbf{v}}$$

ainsi que par des fluctuations de masse volumique et de pression de faible amplitude,

$$\rho' = \rho - \rho_0 \ll \rho_0, \quad p' = p - p_0 \ll p_0.$$

On rappelle que ces perturbations peuvent être considérées comme isentropiques, donc que les champs fluctuants  $\rho'$  et  $p'$  sont liés par la relation

$$\rho' = \rho_0 \kappa_S p' = \frac{p'}{c_0^2}$$

avec  $\kappa_S$  le coefficient de compressibilité isentropique,  $c_0$  la vitesse du son dans le fluide s'il était non visqueux.

Montrez que les hypothèses précédentes ainsi que les équations de base de la mécanique des fluides (conservation de la masse et évolution de la quantité de mouvement) sous forme locale permettent d'aboutir à un système d'équations aux dérivées partielles couplées pour  $\bar{\mathbf{v}}$  et  $\rho'$ , de premier ordre en temps, linéaires par rapport à ces deux champs. On négligera dans ce système tout effet de pesanteur, ce que l'on pourra éventuellement justifier a posteriori. Vérifiez que ce système est alors à coefficients constants ne dépendant que de  $\rho_0$ ,  $c_0$  et  $\eta$  viscosité dynamique du fluide.

### 2 Étude d'une onde de « compression - dilatation »

On étudie dans cette partie le cas d'une onde dont le champ de vitesse est de la forme

$$\bar{\mathbf{v}} = U \exp[i(kx - \omega t)] \bar{\mathbf{e}}_x$$

en notations complexes. La fréquence angulaire  $\omega$  est réelle ; on peut imaginer qu'elle est imposée par un haut - parleur. Le nombre d'onde  $k$ , par contre, est éventuellement complexe : sa partie réelle  $K > 0$  est le nombre d'onde classique, mais sa partie imaginaire  $\alpha$ , si elle s'avère non nulle, signifie un amortissement.

**2.1** À partir de l'une des deux équations établies en **1**, calculez les fluctuations de masse volumique associées à cette onde. Justifiez le terme « onde de compression - dilatation ».

**2.2** En utilisant l'autre équation d'évolution établie en **1**, montrez que la « relation de dispersion » des ondes est de la forme

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 (1 \pm i\omega\tau)$$

où vous déterminerez le signe devant l'imaginaire pur (+ ou -), et donnerez l'expression du temps caractéristique  $\tau$ .

*Indication* :  $\tau$  ne dépend que de la viscosité cinématique du fluide et de la vitesse  $c_0 = 1/\sqrt{\rho_0 \kappa_S}$ .

**2.3** Calculez  $K^2$  et  $\alpha^2$ .

*Indication* : exprimez d'abord  $k^2$  d'après la « relation de dispersion » ci-dessus, puis calculez  $|k^2|$  et  $\text{Re}k^2$ .

**2.4** Donnez la valeur physique de  $\tau$  pour de l'air et de l'eau à température et pression ambiantes. Que peut-on en déduire concernant l'ordre de grandeur du produit  $\omega\tau$  pour une onde de type « sonore » ?

**2.5** Compte tenu de l'observation quantitative faite sur le produit  $\omega\tau$ , simplifiez l'expression de  $K$ . Montrez à partir de cette expression que l'effet de la viscosité sur la vitesse de propagation du son est une très légère augmentation de celle-ci, que vous quantifierez. Pourrait-on mesurer cet effet ?

**2.6** Quel doit être le signe de  $\alpha$  pour l'onde se propageant vers les  $x$  croissants que l'on est en train de considérer ? Comment pourrait-on nommer  $\alpha$  ? Calculez  $\alpha$  compte tenu de l'observation faite en **2.4**. Calculez le facteur d'amortissement d'une onde sonore typique sur une distance de 10 m, dans l'air et dans l'eau.

**2.7** Concluez.

### 3 Étude d'une onde de « cisaillement »

On étudie dans cette partie le cas d'une onde dont le champ de vitesse est de la forme

$$\bar{\mathbf{v}} = V \exp[i(kx - \omega t)] \bar{\mathbf{e}}_y$$

en notations complexes. La fréquence angulaire  $\omega$  est réelle ; on peut imaginer qu'elle est imposée par une plaque vibrante. Le nombre d'onde  $k = K + i\alpha$  comme dans la partie **2**.

**3.1** Que peut-on dire des fluctuations de masse volumique associées à cette onde ? Y a-t'il des effets de compression - dilatation ?

**3.2** Établissez la « relation de dispersion » de ces ondes. Calculez  $K$  et  $\alpha$ .

**3.3** Discutez de la physique de ces ondes dans des fluides comme l'air ou l'eau. Représentez le champ de vitesse d'une onde typique, expliquez la terminologie onde de « cisaillement » et concluez.

### 4 Question subsidiaire : application à la tomographie du globe terrestre

Dans le manteau terrestre, solide aux échelles de temps des ondes « sonores », se propagent des ondes de compression - dilatation et des ondes de cisaillement. Que se passe-t'il quand ces ondes arrivent dans le noyau de fer liquide de la Terre ? Expliquez comment ceci a permis de découvrir le noyau liquide.

### 3.11 Exercice et problèmes sur l'aérodynamique potentielle

#### Exercice 3.5 *Étude locale du champ de vitesse d'un tourbillon potentiel*

[test d'octobre 2013]

- 1 Rappelez l'expression du potentiel complexe d'un tourbillon ponctuel centré sur l'origine  $O$  du plan, de circulation  $\Gamma = 2\pi C > 0$  autour de  $O$ . Déduisez en par un calcul les composantes  $(v_x, v_y)$  de  $\bar{\mathbf{v}}$  dans la base cartésienne canonique, en fonction des coordonnées  $(x, y)$ .
- 2 Représentez l'allure du champ  $\bar{\mathbf{v}}$  autour du point  $A$  de coordonnées  $(a, 0)$  avec  $a > 0$ .
- 3 Calculez  $\overline{\overline{\bar{\mathbf{v}}}}$  généralement, puis en ce même point  $A$ . Vous donnerez dans le cas général et en  $A$  une expression matricielle. En  $A$ , vous donnerez aussi une expression intrinsèque.
- 4 Calculez, par la méthode de votre choix, le champ  $d\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}(A + d\bar{\mathbf{x}}) - \bar{\mathbf{v}}(A)$  pour  $d\bar{\mathbf{x}}$  infiniment petit, et représentez le.
- 5 Explicitez la décomposition locale en déformation instantanée et rotation instantanée du champ  $d\bar{\mathbf{v}}$ , en caractérisant au mieux ces deux composantes de ce champ, et en faisant un lien avec la figure précédente; faites pour cela une nouvelle figure. Concluez.

#### Problème 3.9 *Écoulements d'un fluide parfait autour d'un disque avec circulation*

On reprend le problème de l'écoulement d'un fluide parfait autour d'un disque  $D$  de rayon  $a$ , abordé en cours section 3.5.4. On travaille encore dans le référentiel lié au disque, dans lequel le fluide arrive de l'infini avec une vitesse  $\bar{\mathbf{U}} = U\bar{\mathbf{e}}_x$ . La nouveauté par rapport au cours consiste à considérer des cas où une *circulation* s'est établie autour du disque,

$$\Gamma = \int_{\partial D} \bar{\mathbf{v}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} \neq 0.$$

- 1 Montrez que l'on peut décrire un écoulement de ce type en superposant au potentiel (3.60) trouvé en cours le potentiel d'un tourbillon centré en un point bien choisi.
- 2 Calculez les composantes  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  du champ de vitesse grâce à ce modèle. Comparez les à celles données dans l'énoncé du problème 1.1 *Étude de l'écoulement potentiel autour d'un mobile cylindrique* de cours de [Plaut \(2015b\)](#).
- 3 On va considérer le cas générique où  $U > 0$  et  $\Gamma > 0$ . Montrez que par des opérations de symétrie d'espace et de champ simples, on peut déduire de ce cas deux autres cas
  - 3.a  $U < 0$  et  $\Gamma < 0$ .
  - 3.b  $U > 0$  et  $\Gamma < 0$ .
- 4.1 Simplifiez au maximum l'expression de l'affixe complexe conjuguée de la vitesse  $u - iv$  pour un point  $z = a \exp(i\theta)$  sur le cercle frontière du disque  $C(0, a)$ .
- 4.2 Simplifiez au maximum l'expression de la norme carrée de la vitesse pour un point situé à un angle polaire  $\theta$  sur  $C(0, a)$ . Analysez, en essayant de localiser d'éventuels points d'arrêts tels

que  $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}}$  sur  $C(0,a)$ , et en représentant le champ de vitesse sur  $C(0,a)$ , ce qui se passe quand  $\Gamma = 0$  puis lorsque  $\Gamma$  augmente progressivement. Montrez l'existence d'une valeur critique  $\Gamma_c$  de  $\Gamma$  au-dessus de laquelle il n'y a plus de points d'arrêts sur le cercle.

**4.3** Calculez la valeur maximale de la norme carrée de la vitesse sur  $C(0,a)$ . Commentez ce résultat.

**5.1** Donnez l'expression du champ de pression  $p(\theta)$  sur  $C(0,a)$ , et analysez l'évolution de ce champ quand  $\Gamma$  augmente progressivement, en faisant le lien avec les représentations de la question 4.2.

**5.2** Que peut-on conjecturer concernant la force exercée par le fluide sur le disque ?

**6.1** Calculez la valeur exacte de la force  $\bar{\mathbf{f}}$  exercée par le fluide sur le cylindre dont le disque est une section, par unité de longueur dans la direction  $\bar{\mathbf{e}}_3$  de l'axe du cylindre, grâce à la formule de Blasius. Vérifiez la conjecture précédente. En faisant une interprétation « aéronautique » de ce modèle, donnez la « portance » et la « trainée » de l'« aile-disque ».

**6.2** Vérifiez la formule vectorielle donnant cette force, dite « *force de Magnus* »,

$$\bar{\mathbf{f}} = \rho \bar{\mathbf{U}} \wedge \bar{\mathbf{\Gamma}}, \quad (3.82)$$

avec  $\bar{\mathbf{\Gamma}} = \Gamma \bar{\mathbf{e}}_3$  le vecteur circulation du tourbillon<sup>26</sup>.

**7.1** Faites le calcul général de tous les points d'arrêt de l'écoulement autour d'un disque avec circulation, dans les cas  $U > 0$  et  $\Gamma > 0$ . On entend par là que vous chercherez à résoudre  $f'(z) = 0$  non seulement pour  $z \in \partial D$  mais plus généralement pour  $z \in \mathbb{C} - D$ .

**7.2** En vous inspirant du programme Mathematica disponible sur la page web de ce cours, représentez sur 4 graphes les champs de pression et les lignes de courant de l'écoulement autour d'un disque avec circulation, dans les cas  $U > 0$  et  $\Gamma = 0, \Gamma_c/4, \Gamma_c, 5\Gamma_c/4$ . On vous demande d'imprimer ces graphes de sorte qu'ils soient bien lisibles, c'est-à-dire soit en couleur avec l'option

`ColorFunction -> ColorData["TemperatureMap"]`

pour représenter les niveaux de pression, soit en noir et blanc avec l'option

`ColorFunction -> ColorData["GrayTones"]`.

### Problème 3.10 Modèles d'écoulements autour d'une aile d'avion à section elliptique

**1** On veut construire dans cette question une transformation conforme bijective  $\Phi$  qui envoie l'extérieur du disque de centre  $O$  et de rayon  $a$ , domaine que l'on note  $W_0$ , sur l'extérieur de l'*ellipse* de centre  $O$ , de demi grand axe  $a$  dans la direction  $x$ , de demi petit axe  $b$  dans la direction  $y$ , domaine que l'on note  $W$ , comme cela est représenté sur la figure 3.9.

**1.1** Pourquoi une simple affinité  $\Phi(X + iY) = X + i\frac{b}{a}Y$  ne convient pas ?

On demande une réponse pas seulement mathématique, mais qui remonte à la physique du problème : pourquoi, si  $\tilde{f}$  est un potentiel convenable défini dans  $W_0$ , si on pose

$$f = \tilde{f} \circ \Phi^{-1}, \quad \phi = \operatorname{Re}(f), \quad \bar{\mathbf{v}} = \bar{\nabla} \phi,$$

<sup>26</sup> Le vecteur  $\bar{\mathbf{\Gamma}}$  définit le sens de rotation du tourbillon avec la règle de la main droite : si le pouce droit est dans la direction de  $\bar{\mathbf{\Gamma}}$ , l'index droit pointe dans la direction de l'écoulement.



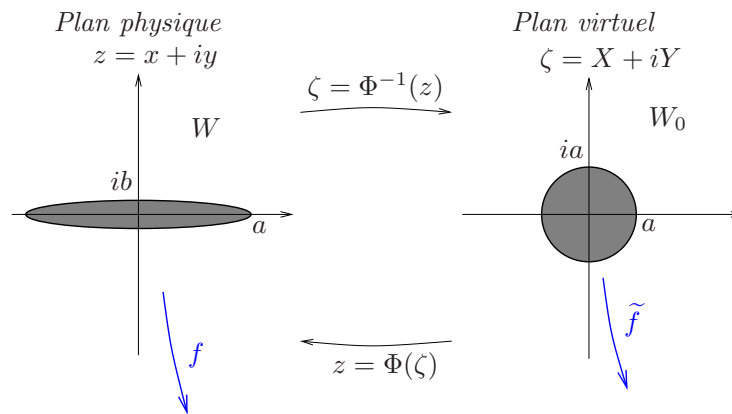


Fig. 3.9 – Géométrie du problème 3.10 étude d'écoulements autour d'une aile de section elliptique.

$\bar{\mathbf{v}}$  ne correspond pas au champ de vitesse d'un fluide parfait ?

1.2 Cherchez  $\Phi$  sous la forme d'une série de Laurent tronquée,

$$\Phi(\zeta) = a_+\zeta + a_-\zeta^{-1}, \tag{3.83}$$

en réglant  $a_{\pm}$ , supposés réels, de sorte que l'image par  $\Phi$  du cercle  $\partial W_0$  soit l'ellipse  $\partial W$ . Pour cela, plus précisément, vous exigerez que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \Phi(a \exp(i\theta)) = a \cos \theta + ib \sin \theta. \tag{3.84}$$

1.3 Montrez que l'image par  $\Phi$  d'un cercle de centre O et de rayon  $r$  est une ellipse de centre O, de demi grand axe  $A(r)$  dans la direction  $x$ , de demi petit axe  $B(r)$  dans la direction  $y$ . Étudiez les fonctions  $A(r)$  et  $B(r)$  et concluez.

1.4 Calculez  $\Phi^{-1}(z)$ . Remarquez qu'une équation du second degré doit être résolue, dont la solution nécessite l'usage de la fonction racine carrée. Montrez par une étude locale au voisinage d'un point de l'axe des imaginaires purs que, pour que  $\Phi^{-1}$  soit bien  $C^\infty$ , le signe devant cette racine carrée doit être pris égal à celui de  $\text{Re}(z)$ .

Attention : cette question plus difficile peut être considérée comme un complément.

2 On veut construire ici le potentiel de l'écoulement dans le plan virtuel, de la forme

$$\tilde{f}(\zeta) = \alpha_+\zeta + \alpha_-\zeta^{-1}, \tag{3.85}$$

qui, une fois transporté suivant la formule du cours

$$f(z) = \tilde{f}(\Phi^{-1}(z)) = \tilde{f}(\zeta), \tag{3.86}$$

assure que

- (i) l'écoulement physique, lorsque  $z$  tend vers l'infini, s'approche d'un écoulement homogène correspondant à une **incidence oblique** de l'aile-ellipse, avec un **angle d'incidence**  $\alpha$ , typiquement situé dans l'intervalle  $[0, 30^\circ]$ ,

$$\bar{\mathbf{v}} \longrightarrow \bar{\mathbf{v}}_\infty = U(\cos \alpha \bar{\mathbf{e}}_x + \sin \alpha \bar{\mathbf{e}}_y); \tag{3.87}$$

(ii) l'ellipse  $\partial W$  est une ligne de courant de l'écoulement physique.

**2.1** En explicitant la condition limite à l'infini spécifiée en (i), calculez  $\alpha_+$ .

**2.2** Réglez alors  $\alpha_-$  de sorte que (ii) soit réalisé. Remarquez que, d'après la propriété de transport des lignes de courant énoncée dans le cours, (ii) équivaut à ce que le cercle  $\partial W_0$  soit une ligne de courant de l'écoulement virtuel. Assurez alors, pour  $\zeta = a \exp(i\theta)$  quelconque sur  $\partial W_0$ , la nullité de  $\text{Im}[\tilde{f}(\zeta)]$ .

**3** On admet que, en aérodynamique réelle, une *circulation*  $\Gamma$  s'établit naturellement autour de l'aile-ellipse, de sorte que le *critère de Kutta<sup>27</sup>-Joukovsky<sup>28</sup>* généralisé<sup>29</sup> soit vérifié :

$$\text{le bord de fuite de l'aile, situé en } z = a, \text{ est un point d'arrêt.} \quad (3.88)$$

**3.1** Montrez que, si on rajoute à la fonction  $\tilde{f}(\zeta)$  calculée à la question 2 un terme

$$-\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta ,$$

les conditions (i) et (ii) sont toujours vérifiées, et de plus on a bien une circulation  $\Gamma$  autour de l'aile-ellipse dans le plan physique.

**3.2** Simplifiez au maximum l'expression de l'affixe complexe conjuguée de la vitesse,  $f'(z)$ , lorsque  $z$ , l'image par  $\Phi$  de  $\zeta = a \exp(i\theta)$ , décrit l'ellipse  $\partial W$ . On vous conseille de travailler d'abord sur le terme proportionnel à  $U$ , puis sur le terme proportionnel à  $\Gamma$ .

**3.3** Explicitiez le critère de Kutta-Joukovsky généralisé et déduisez-en la valeur pertinente d'un point de vue aérodynamique de la circulation  $\Gamma$ .

**3.4** Montrez qu'il existe sur l'aile-ellipse un deuxième point d'arrêt, et localisez-le précisément.

**4.1** Calculez grâce à la formule de Blasius transportée (3.68) la « *portance* » résultante, en supposant que l'avion dont on considère l'aile est en vol horizontal, i.e. l'accélération de la gravité  $\bar{\mathbf{g}}$  est dans la direction de  $\bar{\mathbf{v}}_\infty \wedge \bar{\mathbf{e}}_3$  ( $\bar{\mathbf{v}}_\infty$  étant la vitesse de l'air à l'infini dans le référentiel de l'aile, donnée par l'équation 3.87). Vous vérifierez que l'on trouve une portance donnée par la formule de la *force de Magnus*<sup>30</sup>

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{\bar{\mathbf{F}}}{L_3} = \rho \bar{\mathbf{v}}_\infty \wedge \bar{\mathbf{\Gamma}} . \quad (3.89)$$

*Indication :*

Pour calculer l'intégrale sur le cercle  $\partial W_0$  de  $g = (\tilde{f}')^2 / \Phi'$ , il faut mieux éviter l'usage du théorème des résidus<sup>31</sup>, mais écrire plutôt un développement en série de Laurent de  $g$  dans la couronne  $|\zeta| \geq a$ ,

$$g(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \zeta^n ,$$

27. Mathématicien allemand actif au début du XX<sup>ème</sup> siècle.

28. Mécanicien russe actif au début du XX<sup>ème</sup> siècle.

29. Il était posé plutôt pour une aile présentant un bord de fuite constitué d'un secteur angulaire saillant, ce qui n'est pas le cas de notre aile-ellipse.

30. Dans ce contexte de la théorie bidimensionnelle des ailes, cette formule est aussi attribuée à Kutta et Joukovsky.

31. Parce qu'il y a 3 singularités dans le disque, d'où des calculs très lourds.

et remarquer que

$$\int_{\partial W_0} g(\zeta) d\zeta = 2\pi i a_{-1} .$$

Bien entendu il ne faut surtout pas calculer tous les coefficients  $a_n$ , mais seulement ceux dont on a besoin ; dans l'idéal seulement  $a_{-1}$ .

**4.2** En pratique une aile d'avion peut être vue en toute première approximation comme une ellipse très aplatie, avec  $b \ll a$ . Que vaut alors la portance totale

$$F = |\bar{\mathbf{F}}| = |\bar{\mathbf{f}}|L_3 ?$$

Commentez physiquement la formule obtenue.

**5 Application numérique :** estimez la vitesse de croisière d'un Airbus A320 à l'aide de ce modèle ; pour une aile  $L_3 \simeq 12$  m,  $a \simeq 3$  m,  $\alpha \simeq 3^\circ$  ; la masse totale de l'avion est de l'ordre de  $m \simeq 60$  T.



## Chapitre 4

# Écoulements de Stokes

On donne dans ce chapitre des éléments sur les *écoulements de Stokes*, avant d'étudier dans deux problèmes des applications à la sédimentation ou ascension de petites billes, bulles ou gouttes. Un troisième problème ouvre sur l'étude d'écoulements de type « Stokes » de fluides non newtoniens et sur la « rhéologie ». Enfin, un problème où l'on part d'une situation de type « Stokes » pour ensuite étudier l'influence d'une faible inertie, par un développement systématique en puissance du nombre de Reynolds, termine le chapitre.

### 4.1 Définition

Un fluide newtonien incompressible est dit en *écoulement de Stokes* ou *rampant*<sup>1</sup> si l'on peut négliger les termes inertiels dans l'équation de Navier-Stokes (1.43) devant le terme visqueux diffusif. Le terme non linéaire dit aussi « convectif »<sup>2</sup> est négligeable si le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho(\overline{\nabla\bar{v}}) \cdot \bar{v}}{\eta\Delta\bar{v}} = \frac{VL}{\nu} \ll 1 \quad (4.1)$$

avec  $V$  et  $L$  vitesses et longueurs caractéristiques ; cette condition s'écrit aussi

$$T_{\text{visqueux}} = \text{temps de diffusion visqueuse} = \frac{L^2}{\nu} \ll T_{\text{convectif}} = \text{temps de convection} = \frac{L}{V}. \quad (4.2)$$

Le terme d'évolution temporelle dans l'équation de Navier-Stokes est négligeable (régime « quasi statique ») si

$$N = \frac{\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}}{\eta \Delta \bar{v}} = \frac{L^2}{\nu T_{\text{évolution}}} \ll 1 \quad (4.3)$$

avec  $T_{\text{évolution}}$  temps d'évolution caractéristique ; cette condition s'écrit aussi

$$T_{\text{visqueux}} = \text{temps de diffusion visqueuse} = \frac{L^2}{\nu} \ll T_{\text{évolution}}. \quad (4.4)$$

Les conditions (4.1) et (4.3) requièrent typiquement un système de petite taille ( $L$  petite), ce qui arrive par exemple en *microfluidique* naturelle, autour de poussières, de micro-organismes dans un fluide biologique ou non, ou artificielle, autour de micro-systèmes électromécaniques<sup>3</sup>...

---

1. 'Creeping flow' en anglais.

2. On dit aussi, parfois, « advectif ».

3. 'Micro Electro Mechanical Systems' en anglais.

L'équation de Navier-Stokes se réduit alors (approximativement, puisqu'il s'agit d'un *modèle* !) à l'*équation de Stokes*

$$\boxed{\eta \overline{\Delta} \bar{\mathbf{v}} = \overline{\nabla} \hat{p}} \quad (4.5)$$

avec  $\hat{p} = p + \rho g z$  la pression motrice<sup>4</sup>. Cette équation doit être résolue dans le domaine fluide  $D_t$  avec la condition limite d'adhérence

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{v}}^d(\bar{\mathbf{x}}, t) \text{ donnée sur } \partial D_t \quad (4.6)$$

et une condition de pression donnée quelque part sur le bord

$$p(\bar{\mathbf{x}}_b, t) = p^d(t) \text{ donnée.} \quad (4.7)$$

## 4.2 Propriétés

### 4.2.1 Linéarité

Le problème (4.5), (4.6) est *linéaire* vis-à-vis des « termes sources »  $\overline{\nabla} \hat{p}$  et  $\bar{\mathbf{v}}^d$ . On peut donc résoudre ce type de problème par superposition ; d'autre part si on multiplie  $\overline{\nabla} \hat{p}$  et  $\bar{\mathbf{v}}^d$  par  $\lambda$ , alors la solution  $\bar{\mathbf{v}}$  est multipliée par  $\lambda$ .

### 4.2.2 Réversibilité cinématique

D'un point de vue mathématique celle-ci découle immédiatement de la linéarité, en prenant un coefficient multiplicateur  $\lambda = -1$ . En conséquence si  $\overline{\nabla} \hat{p}$  et  $\bar{\mathbf{v}}^d$  induisent le champ de vitesse  $\bar{\mathbf{v}}$ , alors  $-\overline{\nabla} \hat{p}$  et  $-\bar{\mathbf{v}}^d$  induisent le champ de vitesse  $-\bar{\mathbf{v}}$ . D'un point de vue physique cette réversibilité cinématique peut se visualiser sur une expérience de Couette cylindrique montrée en cours, sous la forme d'un film.

On peut aussi déduire de cette propriété de réversibilité cinématique la symétrie d'un écoulement rampant autour d'un corps immobile de taille finie présentant un plan de symétrie. Ceci est illustré en cours avec le cas d'un écoulement autour d'un cylindre.

Attention, tout écoulement visqueux est associé à une *irréversibilité thermodynamique*, à cause de la dissipation visqueuse.

### 4.2.3 Unicité de la solution

Le problème dit « de Stokes » (4.5), (4.6), (4.7) admet une solution *unique*. La démonstration de ce résultat sera faite en cours. Par soustraction de deux solutions éventuelles, qui peuvent même correspondre a priori à des champs de pression motrices différents, il s'agit déjà de montrer que

$$(\eta \overline{\Delta} \bar{\mathbf{v}} = \overline{\nabla} \hat{p} \text{ dans } D_t \text{ et } \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}} \text{ sur } \partial D_t) \implies (\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}} \text{ dans } D_t). \quad (4.8)$$

Un raisonnement global est nécessaire, en prenant le produit scalaire de l'équation de Stokes avec la vitesse et en intégrant sur le volume, comme lorsque l'on a écrit le bilan d'énergie cinétique dans la section 1.7. Il vient

$$\eta \iiint_{D_t} (\overline{\Delta} \bar{\mathbf{v}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d^3x = \iiint_{D_t} (\overline{\nabla} \hat{p}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d^3x .$$

4. Ici l'axe des  $z$  est choisi vertical.

À l'aide de formules d'analyse tensorielle et de la condition d'adhérence on en déduit

$$\eta \iiint_{D_t} (\overline{\nabla \mathbf{v}})^T : (\overline{\nabla \mathbf{v}}) d^3x = 0$$

d'où, comme la fonction intégrée est positive,

$$(\overline{\nabla \mathbf{v}})^T : (\overline{\nabla \mathbf{v}}) = 0 \iff \overline{\nabla \mathbf{v}} = \overline{\mathbf{0}}.$$

On conclut sur la nullité de  $\overline{\mathbf{v}}$  avec la condition d'adhérence. Finalement  $\hat{p}$  est à gradient nul donc constante. On en déduit l'unicité du champ de pression avec la condition sur la pression (4.7).

#### 4.2.4 Minimum de dissipation

Reprenant le bilan global d'énergie cinétique (1.56),

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{volumiques}} + P_{\text{surfaciques}} - P_{\text{dissipée}}} \quad (4.9)$$

avec

$$P_{\text{dissipée}} = 2\eta \iiint_D \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} d^3x \geq 0, \quad (4.10)$$

on montre, à l'aide de l'analyse tensorielle, que l'écoulement de Stokes solution de

$$\operatorname{div}(\overline{\mathbf{v}}) = 0 \quad \text{et} \quad \eta \overline{\Delta \mathbf{v}} = \overline{\nabla \hat{p}} \quad \text{dans} \quad D, \quad \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{v}}^d(\overline{\mathbf{x}}) \text{ donnée sur } \partial D, \quad (4.11)$$

réalise le *minimum* de  $P_{\text{dissipée}}$  parmi les champs de vitesse solénoïdaux vérifiant les mêmes conditions limites. Explicitement on montre que si  $\overline{\mathbf{v}}'$  vérifie

$$\operatorname{div}(\overline{\mathbf{v}}') = 0 \quad \text{dans} \quad D, \quad \overline{\mathbf{v}}'(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{v}}^d(\overline{\mathbf{x}}) \text{ donnée sur } \partial D, \quad (4.12)$$

si

$$\overline{\mathbf{D}}' = \frac{1}{2} (\overline{\nabla \mathbf{v}}' + \overline{\nabla \mathbf{v}}'^T) \quad (4.13)$$

est le tenseur des taux de déformation associés, alors

$$\boxed{P'_{\text{dissipée}} = 2\eta \iiint_D \overline{\mathbf{D}}' : \overline{\mathbf{D}}' d^3x \geq P_{\text{dissipée}}} \quad (4.14)$$

Cette démonstration se fait en partant de

$$\overline{\mathbf{D}}' : \overline{\mathbf{D}}' = (\overline{\mathbf{D}}' - \overline{\mathbf{D}}) : (\overline{\mathbf{D}}' - \overline{\mathbf{D}}) + \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} + 2\overline{\mathbf{D}} : (\overline{\mathbf{D}}' - \overline{\mathbf{D}}),$$

et en transformant le dernier terme en une divergence à l'aide de formules d'analyse tensorielle. L'intégrale volumique de ce terme devient alors une intégrale sur le bord, nulle à cause des conditions limites.

### 4.3 Remarques de conclusion

D'un point de vue mathématique, il est naturel de se poser la question de la preuve de l'*existence* d'une solution d'un problème de Stokes. Cette preuve nécessite le déploiement de techniques mathématiques avancées : formulation faible, théorie des distributions, espaces de Sobolev, etc... Une présentation synthétique de cette preuve se trouve dans [Dreyfuss \(2012\)](#). En physique, nous retenons qu'en général, une solution existe, et que, comme elle est unique, « tous les coups sont permis » pour la « trouver »...

Remarquons enfin que les conditions limites peuvent dépendre « lentement » du temps, en vérifiant (4.4) : cela n'altérera pas le fait que l'écoulement de Stokes « s'ajuste » à chaque instant pour réaliser le minimum de dissipation au sens précédent. Ceci diffère grandement du cas des écoulements à grands nombres de Reynolds, turbulents, qui dissipent beaucoup plus qu'un écoulement de Stokes, comme on le verra dans le chapitre 6.

### 4.4 Exercice et problèmes

#### Exercice 4.1 Étude d'écoulements de Couette diphasiques

[d'après le test de janvier 2014]

On considère des écoulements de Couette, entre un plan fixe  $y = 0$  et un plan mobile à la vitesse  $\bar{\mathbf{V}} = U\bar{\mathbf{e}}_x$ , défini par  $y = h$ , de deux fluides newtoniens. Le problème est 2D  $xy$ . On néglige les phénomènes d'entrée - sortie, ces écoulements sont supposés laminaires de champ de vitesse

$$\bar{\mathbf{v}} = u(y) \bar{\mathbf{e}}_x .$$

Il n'y a pas de gradient de pression motrice, la source du mouvement est donc exclusivement la mobilité du plan supérieur. Le fluide 1, de masse volumique  $\rho_1$  et de viscosité dynamique  $\eta_1$ , est situé dans le domaine  $y \in [0, \ell]$ . Le fluide 2, de masse volumique  $\rho_2$  et de viscosité dynamique  $\eta_2$ , est situé dans le domaine  $y \in [\ell, h]$ . Les viscosités  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont supposées « élevées ».

**1** Traduisez cette dernière hypothèse par un critère physique précis. Que permet de justifier cette hypothèse ?

**2** À l'aide de l'équation locale d'évolution de la quantité de mouvement, écrite dans chaque fluide, de deux conditions limites et d'une condition cinématique à l'interface entre les deux fluides, montrez que le champ de vitesse est de la forme

$$\forall y \in [0, \ell] , \quad u(y) = \alpha y , \quad \forall y \in [\ell, h] , \quad u(y) = \beta y + \gamma ,$$

avec  $\alpha$  un réel pour l'instant inconnu,  $\beta$  et  $\gamma$  des réels que vous exprimerez en fonction de  $\alpha$ ,  $U$ ,  $\ell$  et  $h$ .

**3** En explicitant la condition dynamique à l'interface entre les deux fluides, calculez  $\alpha$  en fonction de  $U$ ,  $\ell$ ,  $h$  et  $M = \eta_1/\eta_2$ .

**4** Revenant en arrière i.e. au niveau des résultats de la question 2,  $\alpha$  étant toujours inconnu, en utilisant au contraire une approche énergétique reposant sur le calcul de la dissipation comme fonction de  $\alpha$ , déduisez  $\alpha$  du principe de minimum de dissipation généralisé à ce cas diphasique.



**5** Calculez la contrainte de frottement exercée par le fluide supérieur sur la paroi mobile. Dans le cas considéré désormais où  $\ell = h/2$ , montrez que cette contrainte reste la même si on échange les deux fluides.

**6.a** Dans le cas où  $M = 1/100$ , i.e. le fluide le plus visqueux est « en haut », en vous aidant de Mathematica, représentez le champ de vitesse de l'écoulement dans les deux domaines fluides.

**6.b** Même question lorsque  $M = 100$ , i.e. le fluide le plus visqueux est « en bas ».

**6.c** Comparez ces deux cas et expliquez physiquement pourquoi on a dans l'un d'entre eux un effet de « lubrification », qui permet d'augmenter le débit du fluide le plus visqueux, à contrainte de frottement égale.

#### Problème 4.1 *Écoulement de Stokes autour d'une sphère ; application : sédimentation*

On considère une sphère solide indéformable, de petit rayon  $a$ , en mouvement de translation vertical lent dans un fluide newtonien incompressible au repos à l'infini (figure 4.1a). On se place (hormis question 5) dans le référentiel lié au fluide à l'infini. L'écoulement rampant produit par le mouvement de la sphère est supposé axisymétrique autour de l'axe  $Oz$  avec  $O$  le centre de la sphère à l'instant donné considéré et  $z$  la direction verticale du vecteur vitesse de la sphère

$$\bar{\mathbf{v}}_s = U\bar{\mathbf{e}}_z .$$

Le champ de vitesse dans le domaine fluide  $D = \mathbb{R}^3 - \Omega_0$ , avec  $\Omega_0$  le domaine de la sphère, est purement méridien, i.e., en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ , de la forme

$$\bar{\mathbf{v}} = v_r(r, \theta)\bar{\mathbf{e}}_r + v_\theta(r, \theta)\bar{\mathbf{e}}_\theta . \quad (4.15)$$

**1** Montrez à partir de l'une des hypothèses de nature du fluide qu'il existe une fonction  $\psi(r, \theta)$  définie dans  $D$  telle que

$$\bar{\mathbf{v}} = \overline{\text{rot}}\left(\frac{\psi}{r \sin \theta} \bar{\mathbf{e}}_\varphi\right) = \frac{1}{r \sin \theta} (\nabla \psi) \wedge \bar{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \bar{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \bar{\mathbf{e}}_\theta . \quad (4.16)$$

Montrez que cette fonction  $\psi$  est une *fonction courant* c'est-à-dire une fonction dont les iso-lignes tracées dans des plans méridiens  $\varphi = \text{constante}$  sont les lignes de courant.

**2** Quelles sont les conditions limites que doit satisfaire la fonction  $\psi$  sur  $\partial D$ ? Montrez que sur  $\partial\Omega_0$  on peut se contenter d'imposer

$$\psi = \frac{1}{2} U a^2 \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = U a \sin^2 \theta . \quad (4.17)$$

**3** On va chercher une solution à variables séparées

$$\psi = f(r) g(\theta) . \quad (4.18)$$

**3.1** Montrer que d'après (4.17) il est raisonnable de supposer que

$$g(\theta) = \sin^2 \theta . \quad (4.19)$$

Quelles sont alors les conditions limites que doit satisfaire  $f(r)$  en  $r = a$  et  $r \rightarrow +\infty$ ?

**3.2** Montrez que le champ de vorticité de l'écoulement rampant doit être *harmonique*. Compte tenu de la forme proposée pour  $\bar{\mathbf{v}}$ , montrez qu'ici la vorticité est de la forme

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}} = F(r) \sin \theta \bar{\mathbf{e}}_\varphi, \quad (4.20)$$

et établissez dans un premier temps que  $F(r)$  vérifie une équation différentielle ordinaire d'ordre 2, linéaire à coefficients non constants. En superposant deux solutions puissances de  $r$ , déduisez-en la forme générale de  $F(r)$ .   l'aide d'une condition limite à l'infini raisonnable, montrez que  $F(r)$  suit une loi de puissance. Calculez finalement la forme générale de  $f(r)$ .

**3.3** En utilisant les conditions limites établies en 3.1, déterminez complètement  $f(r)$ . Vous veillerez à tester l'homogénéité dimensionnelle du résultat obtenu.

**4** Grâce à une écriture en coordonnées cartésiennes  $(x, z)$  de la fonction courant dans le plan méridien  $\varphi = 0$ , et à l'aide du logiciel Mathematica, représentez les lignes de courant de l'écoulement.

**5** Quel est le champ de vitesse du fluide dans le référentiel lié à la sphère, au même instant considéré? Calculez une fonction courant pour ce nouvel écoulement, puis, grâce à une écriture en coordonnées cartésiennes comme question 4, représentez avec Mathematica les lignes de courant correspondantes.

§

On revient dans tout ce qui suit dans le référentiel lié au fluide à l'infini.

§

**6.1** Calculez le champ de pression motrice  $\hat{p}(r, \theta)$  dans le fluide et représentez son allure au voisinage de la surface de la sphère. Interprétez physiquement le résultat obtenu.

**6.2** Montrez que le champ de pression est de la forme

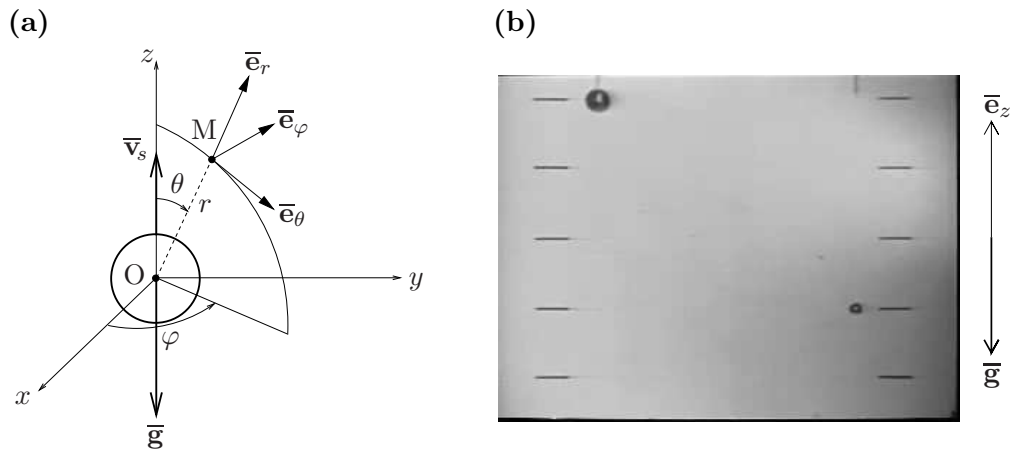
$$p = p_0 + \alpha \frac{\cos \theta}{r^2} + \beta z \quad (4.21)$$

et calculez les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ .

**6.3** Calculez le vecteur contrainte  $\bar{\mathbf{T}}_\alpha$  exercé par le fluide sur un élément de surface  $d^2S$  de la sphère à cause du terme proportionnel à  $\alpha$  dans (4.21). Représentez le champ de vecteurs correspondant sur un schéma. Sans calculer la résultante de ces contraintes, i.e. la force  $\bar{\mathbf{F}}_\alpha$  correspondante, que peut-on postuler sur sa direction ?

**6.4** Calculez le vecteur contrainte  $\bar{\mathbf{T}}_\beta$  exercé par le fluide sur un élément de surface  $d^2S$  de la sphère à cause du terme proportionnel à  $\beta$  dans (4.21). Représentez le champ de vecteurs correspondant sur un schéma. Grâce à la formule intégrale de la divergence, appliquée à un tenseur d'ordre 2 bien choisi, calculez la force  $\bar{\mathbf{F}}_\beta$  résultant sur la sphère. Nommez la et expliquez sa signification physique.

**7** Montrez que la contrainte d'origine visqueuse qui s'exerce sur un élément de surface  $d^2S$  de la sphère est de la forme  $\bar{\mathbf{T}}_\gamma = \gamma \sin \theta \bar{\mathbf{e}}_\theta$  et calculez  $\gamma$ . Représentez le champ de vecteurs correspondant sur un schéma. Quelle est l'interprétation physique de cette force ? Sans calculer la résultante de ces contraintes, i.e. la force  $\bar{\mathbf{F}}_\gamma$  correspondante, que peut-on postuler sur sa direction ?



**Fig. 4.1** – **a** : Géométrie de l'écoulement de Stokes autour d'une sphère. **b** : Photographie tirée d'un film du DVD 'Multimedia Fluid Mechanics' (Homsy et al. 2004, Cambridge University Press ; film réalisé par l'Educational Development Center), présentant une expérience de lâcher de billes (bille de rayon  $a$  à droite,  $a' = 2a$  à gauche) dans un fluide très visqueux.

**8** En remarquant au préalable que la somme  $\bar{\mathbf{T}}_\alpha + \bar{\mathbf{T}}_\gamma$  peut se simplifier, établissez la **formule de Stokes** qui stipule que la somme de la *traînée de pression*  $\bar{\mathbf{F}}_\alpha$  et de la *traînée de frottement*  $\bar{\mathbf{F}}_\gamma$

$$\boxed{\bar{\mathbf{F}}_{\text{Stokes}} = \bar{\mathbf{F}}_\alpha + \bar{\mathbf{F}}_\gamma = -6\pi \eta a \bar{\mathbf{v}}_s} . \quad (4.22)$$

*Commentaire* : plus généralement pour un objet de taille caractéristique  $a$  on introduit le **tenseur de mobilité**  $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$  tel que

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{traînée visqueuse}} = -\eta a \bar{\bar{\mathbf{A}}} \cdot \bar{\mathbf{v}}_s . \quad (4.23)$$

Dans le cas d'une sphère la formule (4.22) montre que

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}} = 6\pi \bar{\mathbf{1}} .$$

**9** Déduisez de ce modèle l'expression de la **vitesse de sédimentation**<sup>5</sup> de petites poussières ou objets sphériques dans un fluide visqueux. Déduisez de cette expression le principe de fonctionnement d'un **viscosimètre à chute de bille**.

**10** On souhaite mesurer avec un tel viscosimètre, en utilisant des billes de verre de masse volumique  $\rho_{\text{verre}} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  et de rayon  $a = 1 \text{ mm}$ ,

**10.1** la viscosité de l'eau

**10.2** la viscosité de la glycérine, dont l'ordre de grandeur est  $\eta_{\text{glycérine}} \simeq 1000 \eta_{\text{eau}}$ .

Donnez l'ordre de grandeur des vitesses de sédimentation qu'il faudrait mesurer et discutez de la possibilité de réaliser ces souhaits.

**11** Soient deux petites billes sphériques constituées du même matériau, plus dense que le fluide, l'une ayant un rayon  $a'$  deux fois plus grand que l'autre qui possède un rayon  $a$ . À l'instant initial  $t = 0$ , on lâche la bille la plus grosse d'une hauteur  $z = 4h$ , alors que la plus petite lâchée plus tôt est déjà en  $z = h$  (figure 4.1b). Que peut-t'on dire des instants  $t$  et  $t'$  de passage des deux billes à l'altitude  $z = 0$ ?

5. Du latin « *sedimentum* » : dépôt, de « *sedere* » : être assis, séjourner.

**12.1** Sur la base d'un raisonnement phénoménologique, proposez une relation entre la *puissance dissipée* dans cet écoulement

$$P_{\text{dissipée}} = 2\eta \iiint_D \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} d^3x ,$$

la force de trainée visqueuse  $\overline{\mathbf{F}}_{\text{Stokes}}$  et la vitesse  $\overline{\mathbf{v}}_s$ ,

$$P_{\text{dissipée}} = P(\overline{\mathbf{F}}_{\text{Stokes}}, \overline{\mathbf{v}}_s) . \quad (4.24)$$

Vérifiez la validité de cette relation à l'aide d'un calcul direct de la puissance dissipée, utilisant par exemple Mathematica pour faire les calculs formels correspondants <sup>6</sup>.

**12.2** Expliquez, toujours en examinant un problème de sédimentation, pourquoi on ne peut pas déduire (4.24) d'un bilan de puissance global. Quels termes posent problème dans ce bilan ? Faites un lien entre ces problèmes et celui de la validité du modèle d'écoulement de Stokes dans une certaine région de l'espace <sup>7</sup>.

### §

**13** On s'intéresse à l'estimation de la trainée visqueuse  $\overline{\mathbf{F}}_{\text{visqueuse}}$  exercée en écoulement de Stokes sur un petit objet non sphérique, dont le centre d'inertie est  $O$  à l'instant considéré, sa vitesse étant  $\overline{\mathbf{v}}_o = U\overline{\mathbf{e}}_z$ . On note  $\overline{\mathbf{v}}$  le champ de vitesse correspondant, défini sur  $D = \mathbb{R}^3 - \Omega$ , avec  $\Omega$  le domaine occupé par l'objet. On suppose que la relation (4.24) est toujours valable, soit

$$P_{\text{dissipée}}(\overline{\mathbf{v}}) = -\overline{\mathbf{F}}_{\text{visqueuse}} \cdot \overline{\mathbf{v}}_o = FU \quad (4.25)$$

en notant  $F = \|\overline{\mathbf{F}}_{\text{visqueuse}}\|$ .

**13.1** On définit la sphère inscrite dans l'objet,  $\Omega_1$ , par son rayon

$$r_1 = \min_{\overline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega} \|\overline{\mathbf{x}}\| .$$

Soit  $\overline{\mathbf{v}}_1$  le champ de vitesse de l'écoulement de Stokes autour de cette sphère se déplaçant à  $\overline{\mathbf{v}}_s = \overline{\mathbf{v}}_o$ . En considérant le champ de vitesse obtenu en prolongeant  $\overline{\mathbf{v}}$  dans  $\Omega - \Omega_1$  par

$$\forall \overline{\mathbf{x}} \in \Omega - \Omega_1, \quad \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{v}}_o ,$$

et en utilisant le principe du minimum de dissipation, donnez une borne inférieure à la force  $F$ . Il pourra être utile de faire un schéma pour représenter cette situation.

**13.2** On définit la sphère circonscrite à l'objet,  $\Omega_2$ , par son rayon

$$r_2 = \max_{\overline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega} \|\overline{\mathbf{x}}\| .$$

6. Vous aurez intérêt à utiliser le package 'Vector Analysis', cf. le tutorial portant ce nom dans le centre de documentation de Mathematica.

7. Indication à n'utiliser qu'après avoir réfléchi seul : des éléments de réponse à cette question se trouvent dans la section 8.4.4 de Guyon et al. (2001).

Soit  $\bar{\mathbf{v}}_2$  le champ de vitesse de l'écoulement de Stokes autour de cette sphère se déplaçant à  $\bar{\mathbf{v}}_s = \bar{\mathbf{v}}_0$ . En considérant le champ de vitesse obtenu en prolongeant  $\bar{\mathbf{v}}_2$  dans  $\Omega_2 - \Omega$  par

$$\forall \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_2 - \Omega, \quad \bar{\mathbf{v}}_2(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{v}}_0,$$

et en utilisant le principe du minimum de dissipation, donnez une borne supérieure à la force  $F$ . Il pourra être utile de faire un schéma pour représenter cette situation.

**13.3** Concluez.

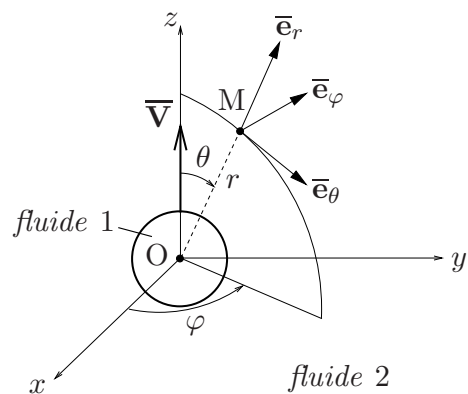
### Problème 4.2 *Écoulements de Stokes dans et autour d'une inclusion sphérique*

[d'après le test d'avril 2011]

On considère une petite inclusion sphérique d'un fluide 1 newtonien incompressible de masse volumique  $\rho_1$  et de viscosité dynamique  $\eta_1$  dans un fluide 2 newtonien incompressible de masse volumique  $\rho_2$  et de viscosité dynamique  $\eta_2$ , au repos à l'infini dans le référentiel du laboratoire. On suppose que, du fait de l'existence d'une tension superficielle élevée, l'interface fluide 1 - fluide 2 reste parfaitement sphérique de rayon  $a$  durant son mouvement, qui est stationnaire, purement vertical. Ainsi, dans le référentiel du laboratoire, la vitesse de l'interface sphérique est

$$\bar{\mathbf{V}} = U\bar{\mathbf{e}}_z$$

où  $U$  est positive. On utilise un repère  $Oxyz$  fixe tel que, à l'instant  $t = 0$  considéré,  $O$  se trouve au centre de l'interface sphérique. Dans ce repère on utilise des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . Les champs de vitesse axisymétriques dans les fluides 1 et 2, notés  $\bar{\mathbf{v}}_i$ , vont être calculés, à  $t = 0$ , dans l'hypothèse de Stokes. Ils sont purement méridiens :  $\bar{\mathbf{v}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_\varphi = 0$  pour  $i = 1, 2$ .



**1** Explicitez l'équation de la sphère de rayon  $a$ , centrée à l'instant  $t$  au point  $A$  de coordonnées cartésiennes  $(x_A, y_A, z_A) = (0, 0, Ut)$ , sous la forme

$$F(x, y, z, t) = 0$$

où  $F$  est choisie très régulière<sup>8</sup>. Montrez que la *condition limite cinématique* à l'interface entre les deux fluides s'écrit, à l'instant  $t = 0$ , dans les fluides  $i = 1, 2$ ,

$$r = a \quad \implies \quad \bar{\mathbf{e}}_r \cdot \bar{\mathbf{v}}_i = \bar{\mathbf{e}}_r \cdot \bar{\mathbf{V}}.$$

**2** Explicitez la condition de *continuité des vitesses* à l'interface entre les deux fluides, à  $t = 0$ . Compte tenu de la condition limite cinématique précédente, montrez qu'une seule composante de cette équation vectorielle devra être vérifiée.

**3** Explicitez la *condition limite dynamique* à l'interface entre les deux fluides, à  $t = 0$ . Vous noterez  $\gamma$  le coefficient de tension de surface entre les fluides,  $p_1$  et  $p_2$  les champs de pression,  $\bar{\bar{\mathbf{D}}}_1$  et  $\bar{\bar{\mathbf{D}}}_2$  les tenseurs des taux de déformation correspondants.

8.  $F$  est une fonction  $C^\infty$  de tous ses arguments.

4 Comme dans le cas du problème 4.1 d'une inclusion rigide, on utilise pour chaque champ une fonction courant  $\psi_i$  telle que

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \bar{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \bar{\mathbf{e}}_\theta . \quad (4.26)$$

Sachant que la solution de ce problème est unique, on se permet de la chercher sous une forme similaire à celle du problème 4.1,

$$\psi_i = f_i(r) \sin^2 \theta \quad \text{pour } i = 1, 2 . \quad (4.27)$$

Montrez que cette forme de solution permet effectivement de satisfaire toutes les conditions limites des questions 1 à 3, que vous transformerez en conditions sur  $f_1$ ,  $f_2$  et leurs dérivées évaluées en  $r = a$ ; bien entendu les pressions  $p_1(a, \theta)$  et  $p_2(a, \theta)$  interviendront aussi<sup>9</sup>.

On donne

$$\bar{\mathbf{v}}_i = 2 r^{-2} f_i(r) \cos \theta \bar{\mathbf{e}}_r - r^{-1} f_i'(r) \sin \theta \bar{\mathbf{e}}_\theta , \quad (4.28)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{D}}}_i = 2 \frac{r f_i'(r) - 2 f_i(r)}{r^3} \cos \theta \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + \frac{2 f_i(r) - r f_i'(r)}{r^3} \cos \theta \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta \quad (4.29)$$

$$+ \frac{r[2 f_i'(r) - r f_i''(r)] - 2 f_i(r)}{2 r^3} \sin \theta (\bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_r) . \quad (4.30)$$

5.1 Comme le champ de vorticité d'un écoulement rampant doit être *harmonique*, sachant que

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\Omega}}}_i = \overline{\mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}}}_i = G_i(r) \sin \theta \bar{\mathbf{e}}_\varphi \quad \text{avec} \quad G_i(r) = \frac{2 f_i(r) - r^2 f_i''(r)}{r^3} , \quad (4.31)$$

$$\bar{\Delta} \bar{\boldsymbol{\Omega}}_i = \bar{\mathbf{0}} \iff 2r G_i'(r) + r^2 G_i''(r) - 2G_i(r) = 0 ,$$

en posant des conditions limites raisonnables sur  $G_1$  en 0 et  $G_2$     l'infini, donnez la forme générale des fonctions  $G_1$  et  $G_2$ .

5.2 Déduisez en la forme générale des fonctions  $f_1(r)$  et  $f_2(r)$ , dépendant de quatre coefficients à déterminer.

6 En faisant usage des conditions établies question 4, déterminez complètement les fonctions  $f_1$  et  $f_2$ . Vous ferez apparaître le rapport des viscosités des deux fluides

$$m = \eta_2 / \eta_1 .$$

On vous recommande d'utiliser Mathematica pour résoudre formellement le système linéaire obtenu sur les coefficients qui définissent les fonctions  $f_1$  et  $f_2$ . Dans ce cas, vous recopierez les commandes utilisées pour ce calcul sur votre copie.

Vous testerez l'homogénéité dimensionnelle des formules obtenues pour  $f_1$  et  $f_2$ .

7 On devrait retrouver la solution du problème 4.1, correspondant à l'écoulement autour d'une sphère rigide mouvante, lorsque  $m$  tend vers une certaine limite. Vérifiez que cela est, afin de valider partiellement vos calculs.

8 Dorénavant on suppose pour simplifier que  $m = 1$ . Passez du référentiel  $\mathcal{R}_0$  du laboratoire au référentiel  $\mathcal{R}$  lié à l'inclusion, tel que  $\bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} = \bar{\mathbf{V}}$ , par la transformation de Galilée. Construisez des

9. Vous n'essaieriez pas de calculer ces pressions.

fonctions courants  $\tilde{\psi}_i$  telles que, dans ce nouveau référentiel, les vitesses des fluides 1 et 2 soient données à  $t = 0$  par

$$\bar{\mathbf{v}}'_i = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial \theta} \bar{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial r} \bar{\mathbf{e}}_\theta .$$

Montrez que ces fonctions courants sont toujours de la forme

$$\tilde{\psi}_i = \tilde{f}_i(r) \sin^2 \theta$$

et calculez les fonctions  $\tilde{f}_1$  et  $\tilde{f}_2$ .

*Indication* : calculez dans un premier temps une fonction courant  $\psi_e$  pour le champ uniforme de vitesse d'entraînement,  $\bar{\mathbf{V}}$ .

**9.a** Dorénavant on travaille, toujours dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , en adimensionnel, avec  $a$  comme unité de longueur et  $U$  comme unité de vitesse. Ceci revient à faire  $a = 1$  et  $U = 1$  partout.

Déduisez de ce qui précède les expressions des composantes  $r$  et  $\theta$  de  $\bar{\mathbf{v}}'_1$  et  $\bar{\mathbf{v}}'_2$ .

Qu'observez-vous concernant  $\bar{\mathbf{v}}'_2$  lorsque  $r \rightarrow +\infty$  ? Est-ce raisonnable ?

**9.b** Faites un schéma montrant les champs  $\bar{\mathbf{v}}'_1$  et  $\bar{\mathbf{v}}'_2$  dans un plan méridien  $y = 0$ , pour diverses valeurs de  $x$  sur l'axe  $z = 0$ , et diverses valeurs de  $z$  sur l'axe  $x = 0$ .

**9.c** Donnez les équations des lignes de courant de l'écoulement dans le fluide 1, dans le plan méridien  $y = 0$ , sous la forme de relations

$$g_1(x, z) = c_1 \text{ paramètre réel.}$$

Donnez de même les équations des lignes de courant de l'écoulement dans le fluide 2, dans le plan méridien  $y = 0$ , sous la forme de relations

$$g_2(x, z) = c_2 \text{ paramètre réel.}$$

Grâce à Mathematica, représentez ces lignes de courant.

**9.d** Qualifiez la géométrie de l'écoulement dans l'inclusion sphérique. Quelle est son origine physique ?

**Problème 4.3 Étude d'un fluide généralement non newtonien par rhéomètre plan-cône**

[test de décembre 2014]

On s'intéresse à l'étude d'un *liquide non newtonien purement visqueux*, dans lequel le tenseur des contraintes

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = -p\overline{\mathbf{1}} + 2\eta\overline{\mathbf{D}} \quad (4.32)$$

avec  $p$  la pression,  $\overline{\mathbf{D}}$  le tenseur des taux de déformation,  $\eta$  la viscosité. Celle-ci n'est pas constante, mais dépend d'une mesure intrinsèque des taux de déformation,

$$\eta = \eta(D_2) \quad \text{avec} \quad D_2 = 2\overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}}. \quad (4.33)$$

Le liquide considéré est aussi supposé incompressible, i.e. sa masse volumique  $\rho$  est constante. Afin de déterminer expérimentalement la fonction  $\eta(D_2)$ , on utilise un « *rhéomètre plan - cône* » comme présenté sur la figure 4.2. Un plan fixe horizontal est surmonté d'un cône de révolution solidaire d'un axe de rotation  $Oz$  vertical et d'un moteur électrique, qui met en rotation le cône à la vitesse angulaire de rotation  $\omega$ . Le couple moteur  $\Gamma$  est alors mesuré. L'origine  $O$  du repère, sommet du cône, est aussi sur le plan fixe. On utilise des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  d'axe  $Oz$ . L'angle d'inclinaison du cône par rapport à l'axe des  $z$  est  $\beta = \pi/2 - \epsilon$  où  $\epsilon$  est très petit<sup>10</sup>. En première approximation, le domaine fluide  $D_f$  a une frontière libre sphérique, soit, en utilisant les notations du cours de calcul tensoriel,

$$D_f = \{ \overline{\mathbf{x}}(r, \theta, \varphi) = r\overline{\mathbf{e}}_r(r, \theta, \varphi) \quad \text{avec} \quad (r, \theta, \varphi) \in [0, a[ \times ]\beta, \pi/2[ \times [0, 2\pi[ \}.$$

On travaille en régime stationnaire et à faible vitesse de rotation  $\omega$ , de sorte que l'on puisse négliger tout effet inertiel i.e. travailler en « *écoulement de Stokes non newtonien* ».

**Première partie : Étude cinématique**

- 1 Expliquez les conditions limites que doit satisfaire le champ de vitesse  $\overline{\mathbf{v}}$  du liquide sur le plan fixe et sur le cône en rotation.
- 2 Expliquez pourquoi il est raisonnable de supposer que le champ de vitesse est de la forme

$$\overline{\mathbf{v}} = \omega r f(\theta) \overline{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Expliquez les conditions limites que doit satisfaire la fonction  $f$ .

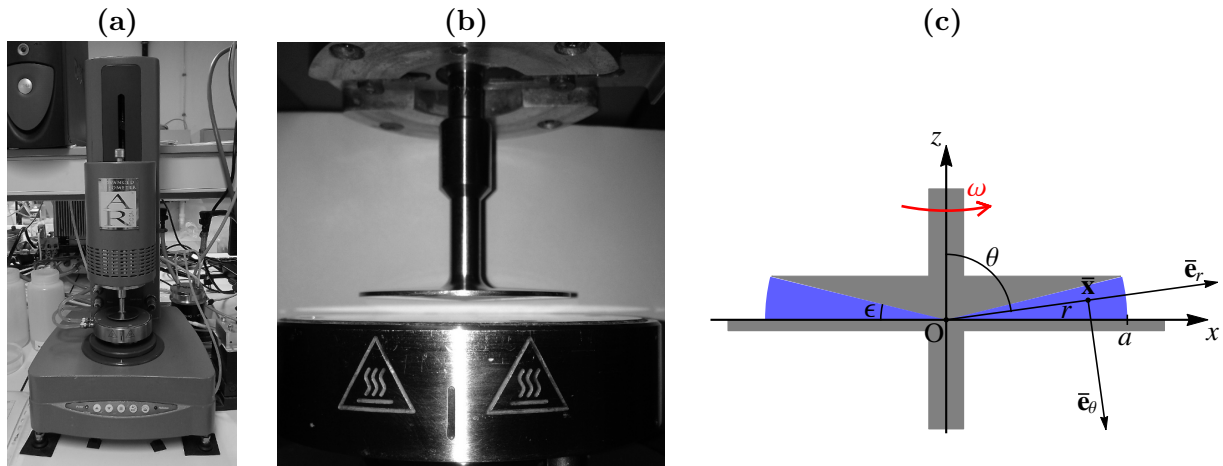
- 3 Calculez la matrice représentative du tenseur gradient de vitesse dans le liquide, dans la base locale des coordonnées sphériques. Que peut-on dire, sans plus de calcul, concernant la condition d'incompressibilité?
- 4 Montrez que le tenseur des taux de déformation dans le liquide est de la forme

$$\overline{\mathbf{D}} = \frac{\dot{\gamma}}{2} (\overline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \overline{\mathbf{e}}_\varphi + \overline{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \overline{\mathbf{e}}_\theta), \quad (4.34)$$

où  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(\theta)$ , le « taux de cisaillement », dépend seulement de  $\omega$ ,  $f(\theta)$ ,  $f'(\theta)$  et d'une fonction trigonométrique de  $\theta$ .

<sup>10</sup> En pratique, afin de ne pas abîmer le plan fixe, le cône est tronqué à une toute petite distance de son sommet « virtuel », mais on ne tiendra pas compte de cette troncature.





**Fig. 4.2** – *Rhéomètre plan-cône* étudié dans le problème 4.3. **a, b** : rhéomètre AR 2000 du Lemta ; sur la photo zoomée **b** on peut observer la faible inclinaison du cône ; par prudence on ne l'a pas mis en contact avec le plan. **c** : schéma de principe.

*Remarque* : cette forme très simple de tenseur des taux de déformation est caractéristique d'un « écoulement viscométrique ».

**5** Établissez l'expression du second invariant du tenseur  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ ,  $D_2 = 2 \overline{\overline{\mathbf{D}}} : \overline{\overline{\mathbf{D}}}$ , en terme de la fonction  $\dot{\gamma}(\theta)$ . Que peut-on remarquer si on calcule  $\sqrt{D_2}$  ?

**6** Montrez que le tenseur des contraintes visqueuses

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = 2\eta \overline{\overline{\mathbf{D}}} = \tau (\overline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \overline{\mathbf{e}}_\varphi + \overline{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \overline{\mathbf{e}}_\theta) \quad (4.35)$$

avec  $\tau = \tau(\theta)$  une fonction dont vous donnerez l'expression générale en terme de la fonction viscosité et de  $\dot{\gamma}(\theta)$ .

### Deuxième partie : Étude dynamique

Dans toute cette partie,  $\tau(\theta)$  sera la principale fonction inconnue, que vous n'essaierez pas de relier à  $\eta$  et  $\dot{\gamma}(\theta)$ .

**7** Justifiez succinctement que le tenseur des contraintes de Cauchy dans le liquide est de la forme

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p(r,\theta) \overline{\overline{\mathbf{1}}} + \tau(\theta) (\overline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \overline{\mathbf{e}}_\varphi + \overline{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \overline{\mathbf{e}}_\theta) . \quad (4.36)$$

**8** Établissez à l'aide du calcul tensoriel l'expression des composantes de la divergence du tenseur des contraintes.

**9** Déduisez-en les composantes de l'équation locale d'évolution de la quantité de mouvement du liquide, dans l'approximation d'un « écoulement de Stokes non newtonien ».

**10** Montrez que  $\tau(\theta)$  vérifie une équation différentielle ordinaire d'ordre 1, non linéaire. Résolvez cette équation pour établir la forme générale de la fonction  $\tau(\theta)$ , proportionnelle à une constante  $A$  et à une puissance d'une fonction trigonométrique de  $\theta$ .

**11** Calculez le couple moteur  $\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}$ , qui est aussi le couple exercé par le cône sur le liquide, au niveau de leur surface de contact. Notez qu'à ce stade le calcul complet du champ de pression est inutile.

Vérifiez que le couple  $\bar{\Gamma} = \Gamma \bar{e}_z$ , et exprimez  $\Gamma$  en fonction de la constante  $A$  et du rayon du domaine fluide  $a$ .

*Indication* : l'élément de surface  $d^2S$  sur l'interface entre le cône et le liquide se calcule à partir de  $d^2S = \|d\bar{x}_r \wedge d\bar{x}_\varphi\|$  où  $d\bar{x}_r$  (resp.  $d\bar{x}_\varphi$ ) est la variation du vecteur position  $\bar{x}$  sous l'effet d'une variation de  $dr$  de  $r$  (resp.  $d\varphi$  de  $\varphi$ ).

### Troisième partie : *Solution approximative générale et application numérique*

**12** De façon approximative, comme  $\theta \in ]\pi/2 - \epsilon, \pi/2[$ , on admet que l'on peut remplacer toutes les fonctions trigonométriques qui apparaissent par leur valeur prise en  $\theta = \pi/2$ . Déduisez-en une solution approchée du problème, où  $\dot{\gamma}$  et  $\tau$  sont constantes,  $f(\theta)$  est une fonction affine de  $\theta$ . Vous supposerez que la fonction  $\tau(\dot{\gamma})$  est bijective, et noterez  $\tau^{-1}$  la fonction réciproque.

Vous déduirez en particulier de ce calcul la valeur du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  en fonction de la vitesse angulaire  $\omega$  et de l'angle  $\epsilon$ .

**13** Expliquez comment on peut déterminer expérimentalement la courbe  $\eta(D_2)$  avec ce système.

**14** En utilisant un rhéomètre plan - cône dont la zone de mesure est de rayon  $a = 4$  cm, l'angle d'inclinaison du cône  $\epsilon = 3^\circ$ , à une vitesse de rotation  $\omega = 0,04$  rad/s on mesure, dans une solution aqueuse de polymères, un couple  $\Gamma = 10^{-4}$  N m. Calculez numériquement la valeur absolue  $|\dot{\gamma}|$  du taux de cisaillement, et la valeur de la viscosité du liquide, pour ce taux de cisaillement. Commentez physiquement.

### Quatrième partie : *Solution rigoureuse en fluide newtonien*

**15** En revenant aux calculs exacts des première et deuxième parties, montrez que l'équation différentielle à résoudre pour  $f(\theta)$  en liquide newtonien prend la forme

$$f'(\theta) - f(\theta)\cotan\theta = B/(\sin\theta)^n \quad (4.37)$$

où  $B$  est une fonction de  $\Gamma$ ,  $a$ ,  $\omega$  et  $\eta$ ,  $n$  est un exposant entier. Récapitulez les conditions limites associées.

**16** À l'aide de Mathematica, résolvez ce problème analytiquement. Établissez en particulier l'expression générale de  $B$  en fonction de  $\epsilon = \pi/2 - \beta$ , une fois les conditions limites prises en compte. À l'aide d'un développement en série de  $\epsilon$ , retrouvez la formule pour la viscosité établie avec la démarche approximative de la troisième partie, en donnant aussi l'ordre de grandeur du reste.

Vous recopiez votre programme Mathematica sur votre copie, ainsi que ses principaux résultats. Vous commenterez physiquement ces résultats.

## 4.5 Problème : écoulement faiblement inertiel

### Problème 4.4 *Étude de l'écoulement dans une cavité rotor-stator étendue*

[d'après le test d'avril 2012]

Des cavités rotor-stator remplies de fluide sont couramment rencontrées dans des machines tournantes. Par exemple de nombreuses liaisons pivot comprennent une telle cavité, souvent remplie d'huile lubrifiante. On s'intéresse à une cavité rotor-stator étendue au sens où elle comprend l'axe de rotation du rotor, et où sa limite radiale extrême joue un rôle négligeable (figure 4.3). En

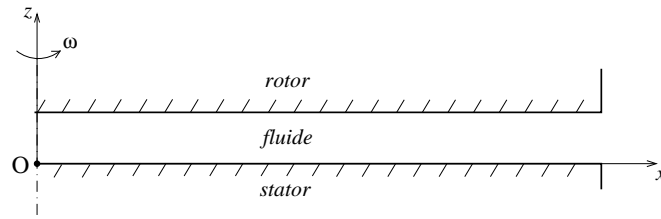


Fig. 4.3 – Schéma de principe d'une *cavité rotor-stator*, telle celle étudiée dans le problème 4.4.

utilisant un repère  $Oxyz$  avec  $Oz$  l'axe de rotation du rotor, le stator solide est<sup>11</sup> un disque de rayon  $a$  situé dans le plan  $z = 0$ , le rotor solide<sup>11</sup> un disque de rayon  $a$  dans le plan  $z = d$ . Ces disques sont coaxiaux. On travaille dans le référentiel du stator, dans lequel la vitesse angulaire de rotation du rotor est  $\omega > 0$ . Le fluide situé dans la cavité, i.e. dans le domaine

$$\Omega = \{(r, \theta, z) \in [0, a] \times [0, 2\pi] \times [0, d]\},$$

en faisant usage de coordonnées cylindriques, est incompressible et visqueux. On note  $\nu$  sa viscosité cinématique.

## I Mise en place d'un modèle auto-similaire

**I.1** Quelle hypothèse doit on faire sur  $a$  et  $d$  afin de pouvoir ne pas se préoccuper des conditions limites en  $r = a$  ?

**I.2** Quelles sont les conditions limites que le champ de vitesse doit satisfaire sur les frontières  $z = 0$  et  $d$  du domaine fluide ?

**I.3** On fait l'hypothèse que la pression motrice, les vitesses radiale et azimutale ne dépendent que de  $r$  et  $z$ , la vitesse axiale ne dépend que de  $z$ ,

$$\hat{p} = \hat{p}(r, z), \quad v_r = v_r(r, z), \quad v_\theta = v_\theta(r, z) \quad \text{et} \quad \boxed{v_z = h(z)}.$$

Montrez à partir d'une équation de conservation que la vitesse radiale est de la forme

$$\boxed{v_r = r f(z)},$$

et établissez une équation différentielle ordinaire liant  $f$  et  $h(z)$ .

**I.4** En explicitant la composante axiale de l'équation de la quantité de mouvement, montrez que la pression motrice est de la forme

$$\hat{p} = \rho [\pi_1(r) + \pi_2(z)],$$

avec  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $\pi_1$  et  $\pi_2$  des fonctions d'une seule variable seulement.

**I.5** En explicitant la composante radiale de l'équation de la quantité de mouvement, montrez que la fonction

$$\pi_3(r, z) = \frac{\pi_1'(r)}{r} - \frac{v_\theta^2(r, z)}{r^2}$$

ne dépend en fait que de  $z$ ; vous exprimerez  $\pi_3$  en fonction de  $f(z)$ ,  $h(z)$  et  $\nu$ .

11. Pour ce qui nous intéresse ici, à savoir ce qui est en contact avec le fluide.

**I.6** En utilisant l'une des conditions limites établies en I.2, montrez que  $\pi_1(r)$  peut être prise de la forme

$$\pi_1(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

avec  $k$  une constante réelle.

**I.7** Montrez l'existence d'une fonction  $g$  telle que

$$\boxed{v_\theta = r g(z)}$$

**I.8** Montrez que la composante radiale de l'équation de la quantité de mouvement se ramène à une équation différentielle ordinaire reliant les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h(z)$ , ainsi que la constante  $k$ .

**I.9** Explicitez enfin la composante azimutale de l'équation de la quantité de mouvement, et montrez qu'elle se ramène à une équation différentielle ordinaire reliant les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h(z)$ .

**NB :**  $\nu$  intervient dans les équations à établir questions I.8 et 9.

## II Adimensionnement du modèle auto-similaire

On adimensionne ce modèle en utilisant  $d$  comme unité de longueur et  $1/\omega$  comme unité de temps. On introduit donc la coordonnée axiale réduite

$$\zeta = \frac{z}{d},$$

et les fonctions profils réduits  $F$ ,  $G$  et  $H(\zeta)$  telles que

$$\boxed{v_r = \omega r F(\zeta), \quad v_\theta = \omega r G(\zeta) \quad \text{et} \quad v_z = \omega d H(\zeta)}$$

**II.1** Explicitez les liens entre ces nouvelles fonctions et les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h(z)$  introduites en partie I.

**II.2** Quelles sont les conditions limites que doivent satisfaire les fonctions  $F$ ,  $G$  et  $H(\zeta)$  ?

**II.3** Quelle est la dimension de la constante  $k$  introduite en I.6 ? Introduisez une constante  $K$  adimensionnée en divisant  $k$  par la combinaison de  $d$  et  $\omega$  adéquate.

**II.4** Montrez que les équations différentielles établies en I.3, I.8 et I.9 s'adimensionnent sous la forme

$$\alpha F + H' = 0, \tag{4.38}$$

$$F^2 - G^2 + F' H = -K + R^{-1} F'', \tag{4.39}$$

$$\beta F G + G' H = R^{-1} G'', \tag{4.40}$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  des entiers que vous calculerez,  $R$  l'unique paramètre de contrôle adimensionnel de ce problème, que vous identifierez et nommerez.

## III Étude du cas $R$ infinitésimal

**III.1** Quelle est la physique du cas où  $R$  est infiniment petit ? Comment nomme t'on ce type de régime ?

**III.2** En annulant les termes facteurs de  $R^{-1}$  dans les équations du système, calculez le champ de vitesse solution, dans cette limite, en adimensionnel puis dimensionnel. Comment pourrait-on nommer cet écoulement ?

#### IV Étude asymptotique du cas $R$ fini et analyse physique

Lorsque  $R$  est petit, on admet que l'on peut rechercher, en cohérence avec les résultats de la question précédente, une solution sous la forme d'un développement en séries de puissances de  $R$ ,

$$\begin{aligned} K &= K_0 + R^2 K_2 + O(R^4), \\ F &= R F_1 + O(R^3), \\ G &= G_0 + R^2 G_2 + O(R^4), \\ H &= R H_1 + O(R^3). \end{aligned}$$

**IV.1** Quelle est, d'après III.2, l'expression de la fonction  $G_0$  ?

**IV.2** Quelles sont les conditions limites que doivent satisfaire les fonctions  $F_1$ ,  $G_2$  et  $H_1(\zeta)$  ?

**IV.3** En injectant ces développements dans l'équation (4.39), établissez, à l'ordre le plus bas, une équation différentielle ordinaire reliant  $F_1$  et  $K_0$ . Résolvez-la, compte tenu des conditions limites que doit vérifier  $F_1$ .

**IV.4** En utilisant l'équation (4.38), écrite à l'ordre  $R^1$ , donnez la forme générale de  $H_1$ . Grâce aux conditions limites correspondantes, calculez  $K_0$ . Que veut dire votre résultat, en terme de pression motrice ? Proposez une explication physique du phénomène constaté, en faisant un lien avec une force d'inertie jouant un rôle dans un certain référentiel tournant.

**IV.5** Donnez l'expression de la fonction  $F_1$ , et représentez l'allure de son graphe, avec  $F_1$  en abscisse et  $\zeta$  en ordonnée. Que veut dire votre résultat, en terme d'écoulement ?

**IV.6** Afin d'interpréter les mécanismes physiques de création de cet écoulement radial, récrivez  $F_1$  comme la somme de fonctions  $F_p$  due au terme  $K_0$  dans l'équation (4.39) et  $F_i$  due au terme  $G_0^2$  dans l'équation (4.39). Représentez sur le graphe précédent les fonctions  $F_p$  et  $F_i$ . Expliquez la physique correspondante, en montrant l'existence d'une compétition entre deux effets antagonistes.



# Chapitre 5

## Couches limites

### 5.1 Introduction - Équations de Prandtl

On considère un *écoulement rapide* autour d'un *obstacle de faible courbure*, en *régime permanent*, d'un *fluide newtonien incompressible*. Localement on a donc une configuration quasi plane où la paroi de l'obstacle est définie comme le plan  $y = 0$ . On considère des écoulements bidimensionnels

$$\bar{\mathbf{v}} = u(x,y)\bar{\mathbf{e}}_x + v(x,y)\bar{\mathbf{e}}_y \quad (5.1)$$

dans le domaine  $x \in [-L/2, L/2]$ ,  $y \in \mathbb{R}^+$ , avec  $L$  une échelle longitudinale caractéristique, échelle des gradients de  $\bar{\mathbf{v}}$  dans la direction  $x$ , voire des écarts à la planéité de la paroi<sup>1</sup>. Si  $V$  est l'ordre de grandeur de  $u$  loin de la paroi, on suppose que

$$\boxed{Re_{\text{extérieur}} = \frac{VL}{\nu} \gg 1} . \quad (5.2)$$

En conséquence, en négligeant les effets de la turbulence, on peut utiliser le modèle du *fluide parfait* loin de la paroi, pour calculer l'écoulement dit « *extérieur* ».

L'effet de la viscosité et de l'adhérence à la paroi se manifestent dans une *couche limite*<sup>2</sup> dans laquelle l'échelle transverse, échelle des gradients de  $\bar{\mathbf{v}}$  dans la direction  $y$ ,

$$\boxed{\delta \ll L} . \quad (5.3)$$

À partir de la condition d'incompressibilité

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0} \quad (5.4)$$

on doit donc avoir *dans la couche limite*

$$\boxed{v \sim \frac{\delta}{L}u \ll u} . \quad (5.5)$$

---

1.  $x = -L/2$  représente la « région d'entrée » de l'écoulement,  $x = +L/2$  sa « région de sortie » ; ce ne sont en aucun cas des parois fixes où la vitesse devrait s'annuler.

2. 'Boundary layer' en anglais.

D'autre part on y a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (5.6)$$

La composante  $x$  de l'équation de Navier-Stokes peut donc se simplifier pour donner la **première équation de Prandtl**<sup>3</sup>

$$\boxed{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}. \quad (5.7)$$

De même la composante  $y$  de l'équation de Navier-Stokes peut a priori se simplifier sous la forme

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (5.8)$$

Si on suppose que  $\hat{p}$  varie comme  $u$  et  $v$  rapidement dans la couche limite, i.e. sur une échelle  $\delta$ , en estimant l'ordre de grandeur de  $\hat{p}$  à partir des équations (5.7) et (5.8) en équilibrant les termes de pression avec les termes visqueux on aboutit à une contradiction. On doit donc admettre que  $\hat{p}$  ne varie pas dans la couche limite, ce qu'exprime la **deuxième équation de Prandtl**

$$\boxed{\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = 0}. \quad (5.9)$$

Les équations de Prandtl constituent une version dégénérée des équations de Navier-Stokes, puisqu'elles sont d'ordre 2 par rapport à  $u$  mais seulement 1 par rapport à  $v$ . En conséquence il faut ajouter aux conditions d'**adhérence à la paroi**,

$$\boxed{u = v = 0 \quad \text{en} \quad y = 0}, \quad (5.10)$$

des conditions de **raccord avec l'écoulement extérieur** portant seulement sur  $u$  et  $\hat{p}$ ,

$$u(x,y)/u_{\text{extérieur}}(x,y) \rightarrow 1 \quad \text{quand} \quad y/\delta \rightarrow +\infty, \quad (5.11)$$

$$\hat{p}(x,y)/\hat{p}_{\text{extérieur}}(x,y) \rightarrow 1 \quad \text{quand} \quad y/\delta \rightarrow +\infty. \quad (5.12)$$

Comme  $u$  varie sur l'échelle  $\delta$  dans la couche limite mais par contre  $u_{\text{extérieur}}$  varie sur l'échelle  $L \gg \delta$ ,  $y \gg \delta$  correspond encore à  $y$  petit pour l'écoulement extérieur. On exprime en conséquence la première condition de raccord sous la forme plus simple

$$\boxed{u(x, +\infty) = u_{\text{extérieur}}(x,0)}. \quad (5.13)$$

Avec les mêmes notations simplifiées, les conditions (5.9) et (5.12) conduisent à

$$\boxed{\hat{p} = \hat{p}(x) = \hat{p}_{\text{extérieur}}(x,0)}. \quad (5.14)$$

## 5.2 Couche limite de Blasius au dessus d'une plaque plane

On considère une plaque plane placée dans un écoulement uniforme à l'infini

$$\bar{\mathbf{v}}_{\text{extérieur}} = U \bar{\mathbf{e}}_x \quad \text{et} \quad \hat{p}_{\text{extérieur}} = \text{constante} \quad (5.15)$$

3. Physicien allemand actif pendant la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle.



i.e. à *gradient de pression motrice nul*. Cette plaque possède un bord d'attaque situé en  $x = 0$ ; l'échelle longitudinale pertinente est alors la distance  $x$  au bord d'attaque. La première équation de Prandtl (5.7) s'écrit

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (5.16)$$

Pour que l'équation ne dégénère pas complètement, ce qui serait dramatique, il faut que l'échelle transverse

$$\delta = \delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \quad (5.17)$$

En utilisant une fonction courant  $\psi$  pour tenir compte de (5.4), i.e. en écrivant<sup>4</sup>

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5.18)$$

il est naturel de rechercher une solution à variables séparées

$$\psi = P(x) f(\zeta) \quad (5.19)$$

avec

$$\zeta = \frac{y}{\delta} \quad \text{la coordonnée transverse réduite.} \quad (5.20)$$

La condition de raccord de la vitesse (5.13) conduit à

$$P(x) = U\delta = \sqrt{\nu U x} \quad \text{et} \quad f'(+\infty) = 1. \quad (5.21)$$

En conséquence

$$u = U f'(\zeta) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} [\zeta f'(\zeta) - f(\zeta)]. \quad (5.22)$$

L'équation de Prandtl (5.16) conduit après quelques calculs à l'*équation de Blasius*<sup>5</sup>

$$2f'''(\zeta) + f(\zeta)f''(\zeta) = 0. \quad (5.23)$$

Cette équation doit être résolue munie des conditions d'adhérence

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad (5.24)$$

et de la condition de raccord avec l'écoulement extérieur (5.21)

$$f'(+\infty) = 1. \quad (5.25)$$

L'équation de Blasius, non linéaire, ne peut être résolue que numériquement. Le problème 5.1 sera consacré à cette résolution, et à l'étude de la solution obtenue. Il convient, en complément de ce problème, de faire trois remarques importantes.

4. Cf. la sous-section 3.2.3.

5. Ingénieur allemand du XX<sup>ème</sup> siècle, il fut le premier étudiant de thèse de Prandtl, et sans doute l'un des plus brillants. En hommage, la fonction  $f$  introduite ici est appelée « fonction de Blasius ».

Tout d'abord la première condition de validité de cette théorie est la grandeur du nombre de Reynolds extérieur (5.2), condition qui prend ici la forme

$$\boxed{Re_{\text{extérieur}} = \frac{Ux}{\nu} \gg 1} . \quad (5.26)$$

Cette condition assure la petitesse de l'échelle transverse  $\delta$  donnée par (5.17) devant l'échelle longitudinale  $x$  distance au bord d'attaque (cf. l'équation 5.3),

$$Re_{\text{extérieur}} \gg 1 \iff x \gg \frac{\nu}{U} \iff \delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \ll x . \quad (5.27)$$

Ainsi ce modèle n'est pas valable près du bord d'attaque, lorsque  $x$  est petit.

Deuxièmement des solutions de la forme (5.22) sont dites « *auto similaires* ». En effet elles expriment des lois d'échelles simples qui permettent par des affinités du type

$$(x, y) \mapsto (x', y') = (\alpha_x x, \alpha_y y) \quad \text{et} \quad (u, v) \mapsto (u', v') = (\alpha_u u, \alpha_v v) \quad (5.28)$$

de déduire le champ de vitesse dans une région de la couche limite du champ de vitesse dans une autre région. Plus précisément si  $\alpha_x$  est fixé alors les valeurs des coefficients d'affinité  $\alpha_y$ ,  $\alpha_u$  et  $\alpha_v$  qui permettent d'assurer (5.28) se calculent facilement<sup>6</sup>. Plus largement on peut même relier les solutions de Blasius dans deux fluides différents et avec des vitesses extérieures différentes par des affinités du type (5.28), en rajoutant des règles d'affinités des paramètres de contrôle

$$(\nu, U) \mapsto (\nu', U') = (\alpha_\nu \nu, \alpha_U U) . \quad (5.29)$$

Il existe une théorie mathématique qui permet d'étudier systématiquement le « *groupe de symétrie* » des équations de la couche limite (dans tel ou tel cas considéré) et, en faisant l'hypothèse que la solution est invariante par ce groupe de symétrie, d'établir la forme a priori de cette solution auto similaire (ici celle donnée par l'équation 5.22). On économise alors, entre autres, l'hypothèse que la fonction courant est à variables séparées. Une présentation succincte de cette approche est par exemple donnée dans la section 6 de Huerre (1998).

Troisièmement cette couche limite elle même est susceptible de subir une *transition vers la turbulence*. Une étude locale de la stabilité de la couche limite, décrite par exemple dans Schlichting & Gersten (2000), montre que le nombre de Reynolds pertinent est le nombre de Reynolds local

$$Re_{\text{local}} = \frac{U\delta}{\nu} = \sqrt{Re_{\text{extérieur}}} . \quad (5.30)$$

L'analyse de stabilité montre que la couche limite est instable vis-à-vis de perturbations prenant la forme d'*ondes de Tollmienn-Schlichting* lorsque le nombre de Reynolds local excède une valeur critique

$$Re_{\text{local}}^c = 300 \quad (5.31)$$

ce qui correspond à une valeur critique du nombre de Reynolds extérieur

$$Re_{\text{extérieur}}^c = 9 \cdot 10^4 . \quad (5.32)$$

En pratique la transition vers la turbulence est progressive<sup>7</sup> et il faut atteindre des  $Re_{\text{extérieur}}$  de l'ordre de  $5 \cdot 10^5$  pour observer un niveau de fluctuations turbulentes significatif.

6. Le faire en exercice !

7. Une description des scénarios de transition vers la turbulence observés dans une couche limite, qui dépendent du niveau de perturbations dans l'écoulement amont, est donnée dans la section 8.9 de Drazin (2002).

## 5.3 Problèmes

### Problème 5.1 Étude de la couche limite de Blasius

#### 1 Calcul par Mathematica de la fonction de Blasius

Les versions récentes de Mathematica (v.8 et suivantes) possèdent une commande `NDSolve` puissante, qui permet de résoudre une équation différentielle ordinaire, disons sur une fonction  $f(z)$ , avec des conditions limites aux deux bornes de l'intervalle  $[a,b]$  de variation de la variable  $z$ . On appelle en anglais un tel problème différentiel '*boundary value problem*'. La méthode relativement simple utilisée est la « *méthode de tir* », '*shooting method*' en anglais. On vous demande sur ce sujet de lire l'énoncé du problème 5.2, qui consiste à programmer soi-même cette méthode.

Plus simplement, on se propose ici de profiter du travail des développeurs de Mathematica pour calculer la fonction de Blasius. Vous travaillerez sur un intervalle fini de grande taille  $\zeta \in [0, \zeta_{\max}]$  avec par exemple

$$\zeta_{\max} = 20, \quad (5.33)$$

en utilisant un programme dont la structure est la suivante :

```
zmax= 20;
sol= NDSolve[{ EDO, CI1, CI2, CLinf}, f[z], { z, 0, zmax}]
fnum[z_]= Replace[f[z],sol[[1]]]
```

EDO étant l'équation de Blasius (5.23), CI1 et CI2 les conditions initiales (5.24), CLinf la condition limite (5.25) posée en  $\zeta_{\max}$  ou `zmax` et non à l'infini.

Déduisez-en une valeur précise avec 6 décimales de la condition initiale « manquante » sur  $f$ , à savoir la valeur de sa dérivée seconde en 0,

$$\boxed{f''(0) = \quad} . \quad (5.34)$$

La robustesse de cette valeur sera testée en augmentant la longueur de l'intervalle de travail, i.e. en augmentant  $\zeta_{\max}$  de 20 à 30.

Vous vérifierez la qualité de la solution obtenue en traçant le « *résidu* » de l'équation (5.23),  $\text{res}(\zeta) = 2f'''(\zeta) + f(\zeta)f''(\zeta)$ , et en le comparant à l'un des deux termes de cette équation.

#### 2 Exploitation : représentations et études du champ de vitesse

**2.1** Représentez les fonctions  $f'(\zeta)$  et  $\zeta f'(\zeta) - f(\zeta)$  sur le même graphe avec des styles de traits différents (continu et tireté), et  $\zeta$  en ordonnée; vous imprimerez la courbe obtenue et la placerez dans la figure 5.1. Commentez ce résultat.

*Indications* : vous aurez intérêt à créer des tables de valeurs puis à utiliser un `ListLinePlot`, suivant la syntaxe :

```
listfpz= Table[{ fnum'[z], z},{ z, 0, 10, 0.025}];
gfp= ListLinePlot[listfpz, options]
```

L'option `PlotStyle->Dashed` permettra d'obtenir un trait tireté.

**2.2** En utilisant la fonction `FindRoot` de Mathematica, calculez la valeur  $\zeta_l$  de  $\zeta$  pour laquelle

$$u(\zeta_l) = 0,99 U . \quad (5.35)$$

**Fig. 5.1 – À faire soi-même.** Fonctions  $f'(\zeta)$  (trait continu) et  $\zeta f'(\zeta) - f(\zeta)$  (trait tireté) avec  $f$  la fonction de Blasius.

On demande un résultat avec un seul chiffre significatif

$$\zeta_l = \quad . \quad (5.36)$$

Déduisez-en une estimation de l'*épaisseur de la couche limite*

$$\delta_l = y(\zeta_l) = \delta \zeta_l = \quad . \quad (5.37)$$

**2.3** On s'intéresse au cas d'un canal hydraulique dans lequel un écoulement réputé uniforme arrive sur une plaque plane avec une vitesse

$$U = 0,2 \text{ m/s} .$$

**2.3.1** À partir de quelle distance  $x_0$  du bord d'attaque pourra t'on utiliser le modèle de couche limite de Blasius ?

**2.3.2** Représentez l'épaisseur de couche limite  $\delta_l$  en centimètres dans l'intervalle  $x \in [0, 50 \text{ cm}]$ ; imprimez la courbe obtenue et placez la dans la figure 5.2. Commentez ce graphe.

**2.3.3** Représentez les profils de vitesse  $u$  (en trait continu) et  $v$  (en trait tireté) dans l'intervalle  $y \in [0, 1 \text{ cm}]$  pour  $x = 25$  et  $50 \text{ cm}$ , avec  $y$  en ordonnée; imprimez les courbes obtenues et placez les dans la figure 5.3. Commentez ces graphes.

**2.3.4** Représentez le nombre de Reynolds extérieur  $Re_{\text{extérieur}}$  dans l'intervalle  $x \in [0, 50 \text{ cm}]$ ; imprimez la courbe obtenue et placez la dans la figure 5.4. Que peut-on déduire de ce graphe ?

**Fig. 5.2 – À faire soi-même.** Épaisseur de la couche limite  $\delta_l(x)$  au dessus d'une plaque placée dans un canal hydraulique débitant à  $U = 0,2$  m/s, en fonction de la distance  $x$  au bord d'attaque.

**Fig. 5.3 – À faire soi-même.** Profils de vitesse  $u$  (en trait continu) et  $v$  (en trait tireté) dans la couche limite de la figure 5.2, à deux distances  $x$  du bord d'attaque :  $x = 25$  cm à gauche, 50 cm à droite.

### 3 Exploitation : calculs semi-analytiques des coefficients de frottement

**3.1** Par un calcul intrinsèque, établissez l'expression de la contrainte tangentielle  $T_x$  exercée à une distance  $x$  du bord d'attaque de la plaque par le fluide en écoulement dans la couche limite, sur la paroi de la plaque. Commentez la formule obtenue.

**3.2** Calculez le *coefficient de frottement pariétal local*

$$C_f(x) = \frac{T_x}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (5.38)$$

et montrez qu'il s'exprime de façon très simple en fonction du nombre de Reynolds local introduit équation (5.30),

$$C_f(x) = \boxed{\phantom{C_f(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\text{Re}_x}}} \quad (5.39)$$

**3.3** Calculez la traînée  $F_x$  s'exerçant sur une plaque de longueur totale  $L$  dans la direction  $x$  et  $L_3$  dans la direction hors du plan  $xy$ <sup>8</sup>. Calculez aussi le *coefficient de frottement pariétal global* correspondant

$$C_F = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 L L_3} = \boxed{\phantom{C_F = \frac{1}{2} \frac{1}{\text{Re}_L}}} \quad (5.40)$$

8. Cette traînée sera calculée en prenant en compte un seul côté de la plaque, en pratique si la plaque est mince cette traînée devra éventuellement être multipliée par 2.

Vous montrerez qu'il s'exprime de façon très simple en fonction du nombre de Reynolds local introduit équation (5.30), évalué en  $x = L$ .

**3.4** Dans le cas du canal hydraulique étudié en 2.3, et de la plaque supposée de dimensions  $L = L_3 = 50$  cm, que valent les coefficients  $C_f$  et  $C_F$ , et la traînée totale  $F_x$  ?

**3.5** Situez les conditions de ce calcul sur la figure 5.5, et répondez à la question posée dans la légende de cette figure.

### Problème 5.2 Calcul de la fonction de Blasius à l'aide d'une méthode de tir

Calculer la fonction de Blasius à l'aide d'une *méthode de tir* consiste à introduire le *paramètre de tir*  $\alpha$  donnant la dérivée seconde de la fonction de Blasius à l'origine, inconnu a priori, et à résoudre les problèmes de Cauchy (avec seulement des conditions initiales)

$$2f''''(\zeta) + f_\alpha(\zeta)f''(\zeta) = 0, \quad (5.41)$$

$$f_\alpha(0) = f'_\alpha(0) = 0, \quad f''_\alpha(0) = \alpha, \quad (5.42)$$

en réglant  $\alpha$  jusqu'à satisfaire la condition limite à l'infini.

**1** Programmez numériquement la résolution du problème (5.41), (5.42) en utilisant par exemple la valeur « standard »  $\alpha = 1$ , et en travaillant toujours sur un intervalle fini  $[0, \zeta_{\max}]$ . Afin de pouvoir récupérer la solution numérique  $f_\alpha$ , vous utiliserez un programme dont la structure est la suivante :

```
zmax= 20;
sol= NDSolve[{ EDO, CI1, CI2, CI3 }, f[z], { z, 0, zmax}]
fal[z_]= Replace[f[z],sol[[1]]]
```

Vous tracerez la fonction  $f'_\alpha(\zeta)$ .

**2** Le résultat de cette résolution numérique est une fonction numérique  $f_\alpha$  qui n'est une bonne approximation de la fonction de Blasius  $f$  que si  $f'_\alpha$  tend vers une limite pour  $\zeta$  grand, et si cette limite vaut 1. On peut considérer que le résultat de ce calcul est

$$R(\alpha) = f'_\alpha(\zeta_{\max}) \quad (5.43)$$

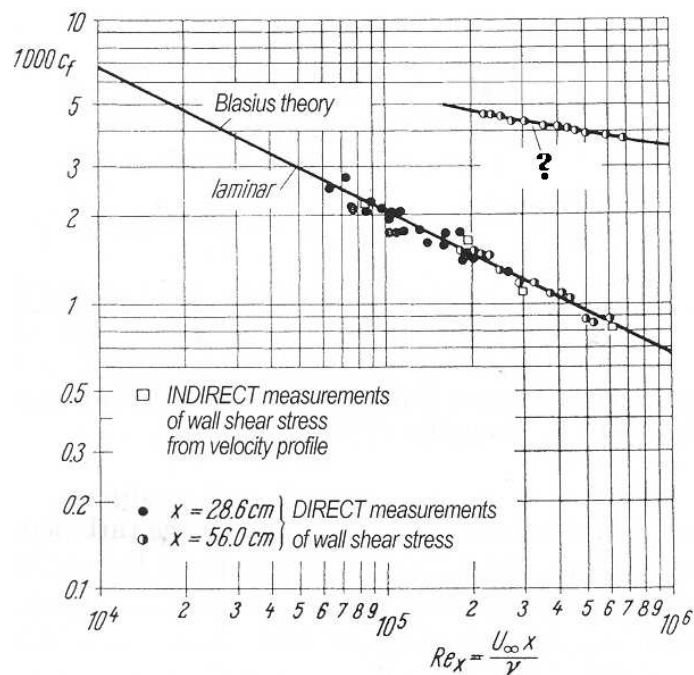
et essayer d'ajuster la valeur de  $\alpha$ , c'est-à-dire de la dérivée seconde de la fonction à l'origine, pour que  $R(\alpha)$  soit le plus proche possible de 1.

**2.1** Définissez un bloc Mathematica permettant de calculer la fonction  $R(\alpha)$  tout en représentant au passage le graphe de  $f'_\alpha(\zeta)$ . La structure de ce bloc sera la suivante<sup>9</sup> :

```
R[al_?NumericQ]:= Block[{},
  sol= NDSolve[{ EDO, CI1, CI2, CI3 }, f[z], { z, 0, zmax}];
  fal[z_]= Replace[f[z],sol[[1]]];
  Print[ g= Plot[fal'[z], { z, 0, zmax}, options]];
  fal'[zmax]];
```

9. Dans ce qui suit la spécification de l'argument de la fonction **R** comme une variable exclusivement numérique (suffixe `?NumericQ`) n'est pas indispensable à ce stade; elle sera utile pour l'étape suivante, afin d'éviter que le `FindRoot` de la question 1.2.2 ne tente un calcul formel impossible de la dérivée de  $R$  par rapport à  $\alpha$ .

**Fig. 5.4** – À faire soi-même. Profil du nombre de Reynolds extérieur dans la couche limite de la figure 5.2, en fonction de la distance  $x$  au bord d'attaque.



**Fig. 5.5** – Figure tirée de [Schlichting & Gersten \(2000\)](#), présentant des mesures de coefficients de frottements pariétaux locaux  $C_f(x)$  sur une plaque plane par Liepmann, ainsi que des lois théoriques. À votre avis, à quoi correspond l'apparition d'une deuxième série de mesures et d'une deuxième loi à haut Reynolds ?

Observez grâce à ce bloc le comportement de la solution  $f'_\alpha(\zeta)$  lorsque  $\alpha$  diminue. Peut-on comprendre ce comportement ?

**2.2** Ayant estimé grâce à l'étude précédente la valeur de

$$\alpha_{\text{Blasius}} = f''(0) \quad (5.44)$$

pour  $f$  la fonction de Blasius, soit  $\alpha_{\text{est}}$ , utilisez une méthode itérative de type méthode de la sécante pour calculer précisément  $\alpha$ , à l'aide d'un programme de la forme

```
fr= FindRoot[ R[al]==1, { al, alest}]
al= Replace[al,fr]
```

Déduisez-en une valeur précise avec 6 décimales de la bonne valeur du paramètre de tir

$$\boxed{\alpha_{\text{Blasius}} = f''(0) = } . \quad (5.45)$$

La robustesse de cette valeur sera testée en augmentant la longueur de l'intervalle de travail, i.e. en augmentant  $\zeta_{\text{max}}$  de 20 à 30. Vous comparerez aussi avec le calcul direct par Mathematica, effectué dans le problème 5.1.

### Problème 5.3 Couches limites : généralités, couches limites aspirée et standard

[test de janvier 2014]

#### Généralités - Épaisseur de déplacement et coefficient de frottement

On considère des couches limites du type précédent, avec les mêmes notations. Dans un repère  $Oxyz$ , dont l'origine est sur le bord d'attaque de l'obstacle, celui-ci est plan, défini par  $x \in [0, L/2]$ ,  $y = 0$ , et le champ de vitesse

$$\bar{\mathbf{v}} = u(x, y)\bar{\mathbf{e}}_x + v(x, y)\bar{\mathbf{e}}_y .$$

Le domaine fluide contient au moins le domaine  $\Omega = \{(x, y, z) \in [-L/2, L/2] \times [0, H] \times [0, L_3]\}$  avec  $H$  et  $L_3$  des longueurs très grandes devant l'épaisseur de la couche limite. On suppose que l'écoulement de fluide parfait au-dessus de l'obstacle serait uniforme,

$$\hat{p}_{\text{extérieur}} = p_0 \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{v}}_{\text{extérieur}} = U \bar{\mathbf{e}}_x .$$

L'obstacle peut être imperméable, ou, au contraire, à partir d'une certaine abscisse  $x_a$ , constitué d'un matériau poreux communiquant avec un système d'aspiration. Les pores de ce matériau sont en bonne approximation des cylindres microscopiques d'axe de révolution parallèle à  $Oy$  : l'aspiration se fait dans la direction normale à la paroi. Dans les deux cas on a la condition d'adhérence pour la vitesse tangentielle

$$\forall x > 0, \quad u(x, 0) = 0 . \quad (5.46)$$

Sans aspiration, on a la condition d'imperméabilité

$$\forall x > 0, \quad v(x, 0) = 0 . \quad (5.47)$$



Avec aspiration, par contre, on a approximativement

$$\forall x > x_a, \quad v(x,0) = -V \quad (5.48)$$

avec  $V > 0$  la vitesse d'aspiration, supposée très inférieure à  $U$ .

**1.a** Exprimez le débit volumique  $q$  passant à travers la surface  $S = \{(x,y,z) \in \{x_0\} \times [0,H] \times [0,L_3]\}$ , sous la forme d'une intégrale.

**1.b** Si le fluide était parfait, le débit à travers la même surface serait  $q_p$ , que vous calculerez. Que pouvez-vous dire du signe de  $q - q_p$ ? Commentez.

**1.c** On introduit l'*épaisseur de déplacement*  $\delta_d$  comme la distance de laquelle il faudrait translater la plaque dans la direction  $y$  pour, en écoulement de fluide parfait, avoir un débit  $q'$  au dessus de cette plaque, à travers  $S' = \{(x,y,z) \in \{x_0\} \times [\delta_d,H] \times [0,L_3]\}$ , égal à  $q$ . C'est donc l'épaisseur de fluide « perdue » à cause de la couche limite. En écrivant l'expression de  $q'$  puis en l'égalant à celle de  $q$  obtenue en 1.a, donnez l'expression analytique intégrale générale de  $\delta_d$ .

Compte tenu du fait que, en bonne approximation, on peut étendre continûment la fonction  $u(x_0,y)$  dans l'intervalle  $y \in [H, +\infty[$ , en y posant  $u(x_0,y) = U$ , donnez finalement  $\delta_d$  sous la forme d'une intégrale généralisée dans l'intervalle  $y \in [0, +\infty[$ ,

$$\delta_d = \boxed{\hspace{10em}}. \quad (5.49)$$

**2** Établissez l'expression analytique générale du *coefficient de frottement pariétal local*

$$C_f(x) = \frac{T_x}{\frac{1}{2}\rho U^2},$$

avec  $T_x$  la contrainte tangentielle exercée par le fluide sur la paroi, à une distance  $x$  du bord d'attaque,  $\rho$  la masse volumique du fluide.

### Couche limite aspirée asymptotique

On considère le cas d'une couche limite aspirée. On suppose que, pour  $x$  suffisamment grand devant l'abscisse de début d'aspiration  $x_a$ , on atteint un régime asymptotique dans lequel  $\bar{v}$  devient indépendante de  $x$ . On travaille exclusivement dans cette région.

**3.a** Montrez que  $v$  y est uniforme,  $v = -V$ .

**3.b** Déduisez-en par un calcul l'expression analytique de la vitesse tangentielle  $u(y)$ . Esquissez l'allure de ce profil, avec en abscisse  $u$  et en ordonnée  $y$ .

**4.a** Calculez analytiquement l'épaisseur de déplacement  $\delta_1 = \delta_d$  de cette couche limite. Commentez.

**4.b** Calculez numériquement cette épaisseur dans le cas d'une couche limite d'air à température ambiante, avec un écoulement extérieur de vitesse  $U = 10$  m/s et une vitesse d'aspiration  $V = U/1000$ .

**5.a** Calculez analytiquement le coefficient de frottement pariétal local de cette couche limite. Commentez.

**5.b** Calculez numériquement le coefficient de frottement pariétal local dans le cas de la couche limite envisagée question 4.b.

### Couche limite non aspirée standard

**6** À quel cas connu correspond celui envisagé ici d'une couche limite non aspirée ?

**7.a** Établissez l'expression analytique de l'épaisseur de déplacement  $\delta_2 = \delta_d$  de cette couche limite, en fonction des paramètres du problème et d'une fonction de couche limite  $f$  connue. Commentez.

**7.b** À l'aide de Mathematica, calculez numériquement l'intégrale qui apparaît dans l'expression de  $\delta_2$ , avec 3 chiffres significatifs. Vous ferez un test de « robustesse » de cette valeur, que vous expliquerez. Vous donnerez finalement une expression semi-analytique de cette épaisseur de déplacement,

$$\delta_2(x) = \dots \quad (5.50)$$

**7.c** Dans le cas d'une couche limite d'air à température ambiante, avec un écoulement extérieur de vitesse  $U = 10$  m/s, que vaut  $\delta_2$  à une distance  $x = 1$  m du bord d'attaque ? Commentez.

**8.a** Calculez le coefficient de frottement pariétal local de cette couche limite. Vous en donnerez une expression analytique faisant intervenir une dérivée de la fonction  $f$ , puis calculerez numériquement, avec 3 chiffres significatifs, cette dérivée, afin de donner une expression fermée pour  $C_f(x)$ . Commentez.

**8.b** Dans le cas de la couche limite d'air considérée en 7.c, calculez la valeur numérique de  $C_f(x = 1$  m). Commentez.

### Comparaison et prise de recul

**9** À l'aide de Mathematica, représentez les profils de la couche limite aspirée asymptotique  $u_1(y)$  et de la couche limite standard  $u_2(x = 1$  m,  $y)$  considérées plus haut, sur le même graphe, avec  $u_i$  en abscisse,  $y$  en ordonnée. Vous choisirez un intervalle de valeurs de  $y$  pertinent. Reproduisez ce graphe sur votre copie. Commentez.

**10** En prenant un peu de recul, discutez d'un phénomène qui pourrait empêcher la réalisation expérimentale de ces écoulements, en étant précis sur l'un des deux cas étudiés.

## Problème 5.4 Étude des couches limites de Falkner-Skan

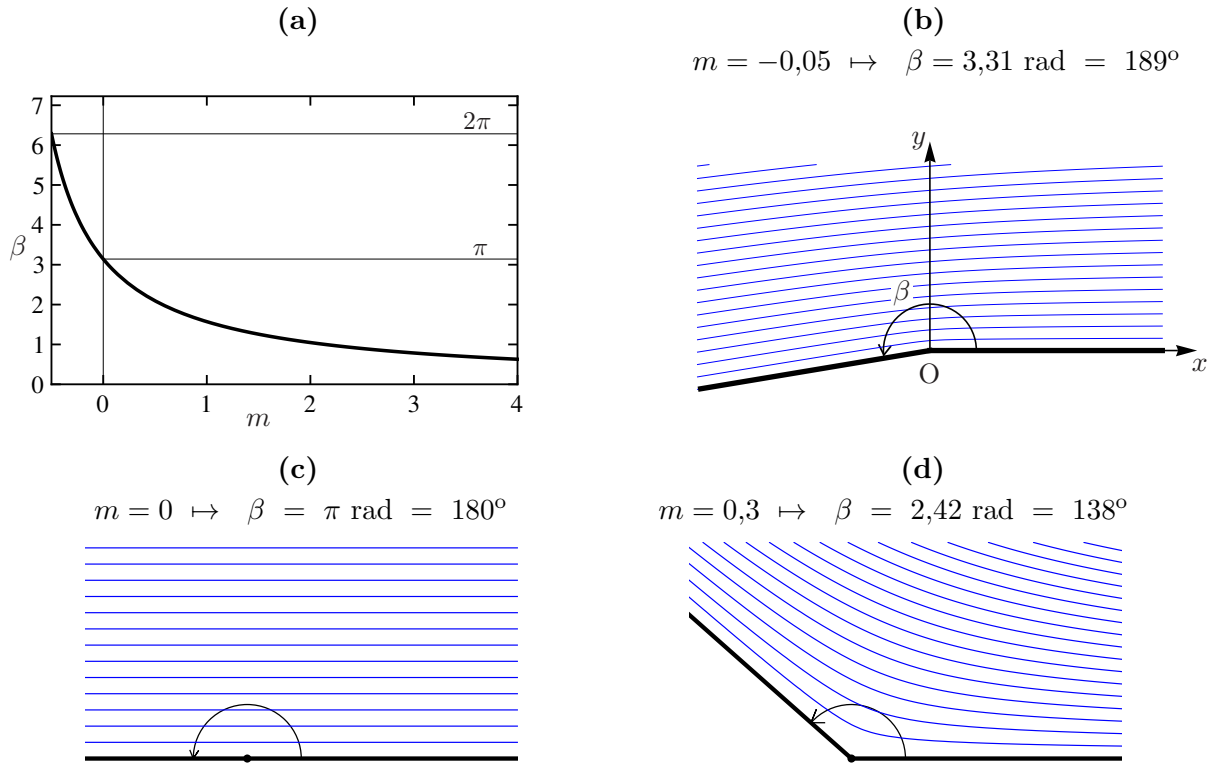
### Préliminaire : modèle potentiel de l'écoulement extérieur

Soit  $m \in ]-1/2, +\infty[$ . On veut étudier l'écoulement bidimensionnel  $xy$  rapide d'un fluide peu visqueux dans un dièdre défini par deux parois formant entre elles un angle

$$\beta(m) = \pi/(m+1), \quad (5.51)$$

fonction dont le graphe est représenté sur la figure 5.6a. Plus précisément, on va calculer la couche limite au-dessus de la demi droite  $D = \{(x,0) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^{+*}\}$ , ou plus physiquement, au-dessus du demi-plan

$$P = \{(x,0,x_3) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^{+*}, x_3 \in [-L_3/2, L_3/2]\}, \quad (5.52)$$



**Fig. 5.6** – (a) : Graphe de la fonction (5.51) qui lie le paramètre de Falkner-Skan  $m$  à l’angle d’ouverture  $\beta$  du dièdre correspondant dans le plan physique. (b,c,d) : Dans le plan physique, lignes de courant d’écoulements dont le potentiel est donné par (5.53) pour les valeurs de  $m$  et  $\beta$  indiquées.

$x_3$  étant la coordonnée d’invariance du système. L’écoulement extérieur à la couche limite est décrit par le modèle du fluide parfait, grâce au potentiel complexe

$$F(z) = A z^{m+1}/(m+1) \text{ fonction holomorphe de } z = x + iy, \quad (5.53)$$

$A$  étant un réel strictement positif<sup>10</sup>. Ce potentiel conduit en effet, en polaires  $z = r e^{i\theta}$ , à la fonction courant  $\psi = \text{Im}[F(z)] = Ar^{m+1} \sin[(m+1)\theta]/(m+1)$ , qui est bien constante pour  $\theta = 0$  et  $\beta(m)$ . Les lignes de courant de trois tels écoulements potentiels, obtenues en traçant justement des iso- $\psi$  à l’aide de la fonction `ContourPlot` de Mathematica, sont représentées sur les figures 5.6bcd pour trois valeurs représentatives de  $m$  et  $\beta$ . Le champ de vitesse associé

$$\bar{v}_{\text{extérieur}} = u_{\text{extérieur}}(x,y)\bar{e}_x + v_{\text{extérieur}}(x,y)\bar{e}_y \quad (5.54)$$

a donc des composantes données par  $F'(z) = Az^m = u_{\text{extérieur}} - iv_{\text{extérieur}}$ . En particulier, au voisinage du plan  $P$ ,  $y \simeq 0$ , la vitesse longitudinale

$$u_{\text{extérieur}}(x,0) \simeq Ax^m. \quad (5.55)$$

1 Représentez quelques vecteurs vitesses correspondants sur les figures 5.6bcd. Calculez le champ de pression motrice correspondant  $\hat{p}_{\text{extérieur}}(x,0)$ , et représentez en rouge le vecteur gradient de pression motrice, toujours au voisinage du plan  $P$ , i.e., sur les figures, de la droite  $D$ . Commentez physiquement.

10. On utilise les notations de la sous-section 3.5.1, sauf que le potentiel  $f$  est noté  $F$  afin de garder  $f$  pour la fonction de couche limite.

2 Explicitez la première équation de Prandtl et les conditions limites portant sur les composantes  $u(x,y)$  et  $v(x,y)$  du champ de vitesse **dans la couche limite** située au-dessus du demi-plan (5.52). Vous noterez que, sauf cas très particulier, il existe un **gradient de pression motrice dans la couche limite**. Selon le signe de  $m$ , montrez qu'il est a priori accélérateur - favorable pour la couche limite ou, au contraire, décélérateur - défavorable pour la couche limite.

§

On suppose dorénavant que  $m \neq 0$ .

3 En équilibrant le terme de gradient de pression motrice avec le terme visqueux dans l'équation de Prandtl, et en estimant l'ordre de grandeur de  $u$  grâce à la condition de raccord avec l'écoulement extérieur, estimez l'échelle transverse caractéristique de la couche limite

$$\delta = \boxed{\hspace{10em}}. \tag{5.56}$$

Vous supposerez que l'ordre de grandeur de  $m$ , en tant que coefficient (mais pas en tant qu'exposant), est 1, mais par contre ne ferez aucune hypothèse d'ordre de grandeur sur  $\nu$  et  $A$ . Vous testerez l'homogénéité dimensionnelle de cette formule. Vous donnerez enfin une interprétation physique du comportement de  $\delta$  en tant que fonction de  $x$  et  $m$ .

4 De façon analogue à ce qui a été fait pour le calcul de la couche limite de Blasius, on cherche une solution à variables séparées pour la fonction courant dans la couche limite,

$$\psi = P(x) f(\zeta) \quad \text{avec} \quad \zeta = \frac{y}{\delta} \quad \text{la coordonnée transverse réduite.} \tag{5.57}$$

Montrez que la condition de raccord avec l'écoulement extérieur peut se traduire par la condition à l'infini

$$f'(+\infty) = 1 \tag{5.58}$$

si  $P(x)$  est convenablement choisie,

$$P(x) = \boxed{\hspace{10em}}. \tag{5.59}$$

Vous testerez l'homogénéité dimensionnelle de cette formule.

5 Déduisez-en les composantes de la vitesse dans la couche limite en fonction de  $f$ ,

$$u = \boxed{\hspace{10em}} \quad \text{et} \quad v = \boxed{\hspace{10em}}. \tag{5.60}$$

*Remarque* : ces formules montrent que les solutions que l'on est en train de considérer sont **auto-similaires**, au sens expliqué au niveau des équations (5.28) et (5.29).

6.1 En utilisant par exemple les possibilités de calcul formel de Mathematica, montrez que la première équation de Prandtl déjà étudiée en question 3 permet d'aboutir à l'**équation** différentielle ordinaire dite **de Falkner-Skan**

$$f''' + af f'' + bf'^2 + c = 0 \quad \text{avec} \quad a = \boxed{\hspace{2em}}, \quad b = \boxed{\hspace{2em}}, \quad c = \boxed{\hspace{2em}}. \tag{5.61}$$

**6.2** Quelles sont les conditions limites qu'il convient de rajouter à cette équation ?

**6.3** Quelle équation et quelle solution retrouve t'on dans le cas  $m = 0$ , en admettant que les calculs précédents sont encore valables ?

**7.1** En utilisant Mathematica de façon non contrôlée, avec un programme de la forme

```
zmax= 10;
calcsol[ m_]:= Block[{},
  sol= NDSolve[{EDO, CI1, CI2, CLinf}, f[z], {z,0,zmax}];
  fm[z_]= Replace[f[z],sol[[1]]];
  al= fm''[0];
  Print["m= ",m," => al= ",al," , fm'(zmax)= ",fm'[zmax]];
  lfpz= Table[{fm'[z],z},{z,0,zmax,.025}];
  g= ListLinePlot[lfpz, options];
  Print[g];
  {al,g}]
```

constatez que, si on essaye d'augmenter la valeur de  $m$  par exemple à  $m = 1$ , Mathematica signale des problèmes numériques et ne trouve plus de solution physique.

Ainsi *un contrôle de la méthode de tir et en particulier du paramètre de tir est indispensable*. Sans aller jusqu'à reprogrammer complètement la méthode de tir, comme dans le problème 5.2, nous allons utiliser les options de NDSolve pour faire ce contrôle.

**7.2** Le paramètre de tir est toujours la dérivée seconde inconnue de  $f$  à l'origine, et on le note encore  $\alpha$ . On utilise une méthode de contrôle de la valeur initiale de  $\alpha$  par *continuation* : on part à  $m = 0$  de la valeur connue que Mathematica sait calculer, et on fait évoluer  $m$  par petits pas à partir de  $m = 0$ , en utilisant au pas  $n + 1$  la valeur de  $\alpha$  calculée au pas  $n$  comme valeur initiale du paramètre de tir.

Programmez cette méthode, en utilisant un programme de structure suivante :

```
zmax= 10;
calcsol[ m_, alest_]:= Block[{},
  sol= NDSolve[{EDO, CI1, CI2, CLinf}, f[z], {z,0,zmax},
  Method->{"Shooting",
  "StartingInitialConditions"->{f[0]==0, f'[0]==0, f''[0]==alest}}];
  fm[z_]= Replace[f[z],sol[[1]]];
  al= fm''[0];
  Print["m= ",m," => al= ",al," , fm'(zmax)= ",fm'[zmax]];
  lfpz= Table[{fm'[z],z},{z,0,zmax,.025}];
  g= ListLinePlot[lfpz, options];
  Print[g];
  {al,g}]
```

(\* On part du cas Blasius connu... \*) {al,g0}= calcsol[0,0.3]

(\* On augmente m progressivement jusqu'à 2 \*)

```
Do[{ al, g}= calcsol[m,al];
  If[m==0.5, g05= g]; If[m==1., g1= g]; If[m==2., g2= g]
  ,{ m, .02,2,.02}]
```

**Fig. 5.7 – À faire soi-même.** Profils de vitesse longitudinale réduite dans les couches limites de Falkner-Skan pour différentes valeurs de  $m$  comme indiqué.

Vérifiez que, grâce à la continuation, on peut sans difficulté obtenir des solutions jusque  $m = 2$ . Représentez en particulier les dérivées des fonctions de Falkner-Skan pour  $m = 1$  et  $2$  sur un même graphe, avec aussi la dérivée de la fonction de Blasius ( $m = 0$ ),  $\zeta$  étant en ordonnée. Interprétez physiquement la tendance observée quand  $m$  augmente.

**7.3** Tentez de même de descendre vers les valeurs de  $m$  négatives :

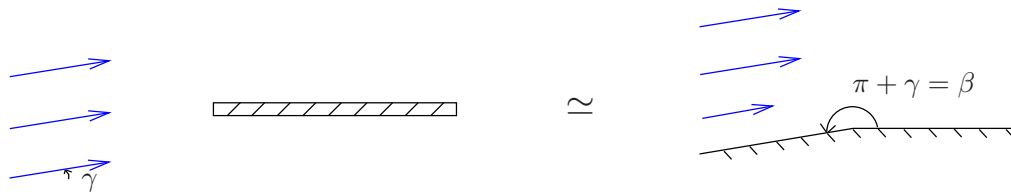
```
zmax= 15;
{ a1, g0}= calcsol[0,0.3];
Do[{ a1, g}= calcsol[m,a1];
  If[m==-.05, gm05= g]
  ...
  ,{ m, -mmin, -mmax, -dm}]
```

Constatez qu'en dessous d'une valeur critique  $m_c$  de  $m$ , on n'arrive plus à calculer de solution. En faisant notamment varier le pas  $dm$ , donnez une estimation de  $m_c$  avec deux chiffres significatifs,

$$m_c = \boxed{\phantom{000000}}. \quad (5.62)$$

Représentez les fonctions  $f'(\zeta)$  avec  $\zeta$  en ordonnée pour des valeurs représentatives de  $m$ , imprimez le graphe obtenu et disposez le dans la figure 5.7. Interprétez physiquement la tendance observée quand  $m$  diminue.

**8** On admet qu'effectivement *il n'y a plus de couche limite lorsque  $m \leq m_c$* , phénomène aussi appelé « *décollement de la couche limite* ». En admettant que les propriétés de l'écoulement au dessus d'une plaque plane en incidence oblique à un angle  $\gamma$  sont qualitativement similaires à celles de l'écoulement au-dessus du plan droit d'un dièdre d'ouverture  $\beta = \pi + \gamma$ , comme cela est représenté sur la figure 5.8, estimez l'angle critique de décollement de la couche limite au-dessus



**Fig. 5.8** – Analogie entre un écoulement en incidence oblique sur une plaque plane et un écoulement au dessus du plan droit d'un dièdre.

d'une plaque plane en incidence oblique :

$$\boxed{\gamma_c \simeq} . \quad (5.63)$$

**9 Question subsidiaire :** afin d'« établir » par un raisonnement physique le résultat admis en question 9, à savoir qu'il n'y a plus de couche limite possible lorsque  $m \leq m_c$ , on vous demande dans un premier temps de reprendre tous vos calculs de couche limite pour  $m_c < m \leq 2$ , en sauvegardant maintenant dans une liste les valeurs de la dérivée seconde des fonctions  $f$  à l'origine. Pour ce qui est de l'intervalle  $[0,2]$  par exemple, vous pourrez utiliser un programme de la forme :

```
{ a1, g0}= calcsol[0,0.3];
lmfs= {{ 0, f''[0]}};
Do[{ a1, g}= calcsol[m,a1];
  AppendTo[lmfs, { m, f''[0]}}
, { m, mmin, mmax, dm}]
```

Tracez en conséquence la courbe de  $f''(0)$  en fonction de  $m \in ]m_c, 2]$ , imprimez la courbe obtenue et placez la dans la figure 5.9. Que peut-on conjecturer à partir de cette courbe, concernant d'éventuelles solutions de couche limite avec  $m < m_c$  (tracez alors l'allure de la courbe  $f'(\zeta)$ ) ? Expliquez en quoi de telles « solutions », même si elles existaient, seraient « physiquement inacceptables ».

### Compléments sur le problème 5.4

Le comportement du problème de Falkner-Skan est en fait encore un petit peu plus compliqué que ce que pourrait laisser penser l'étude de la question 10, néanmoins pertinente. Le lecteur intéressé par ce sujet pourra lire avec profit la section 7.3.3 de Cousteix (1988).

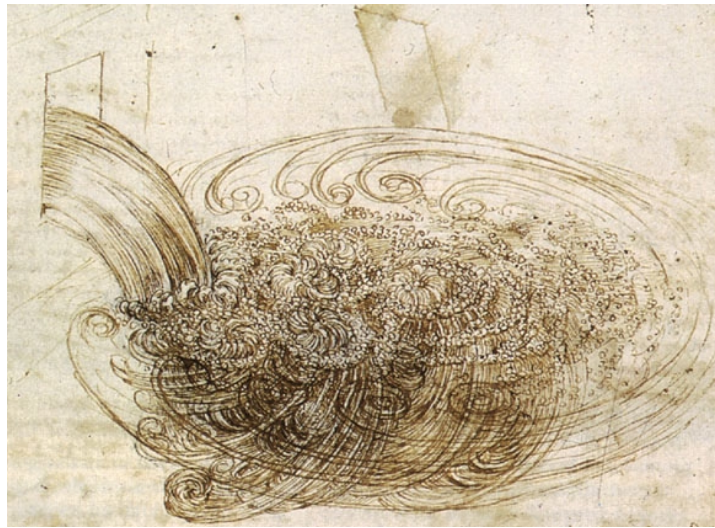
On signale d'autre part que ce phénomène de disparition brutale d'une solution (ou de solutions) lorsqu'un paramètre évolue et atteint une valeur critique est caractéristique d'une « *bifurcation* » ou « *catastrophe* ». De tels phénomènes peuvent être vus dans de nombreux systèmes non linéaires autres que celui de Falkner-Skan (5.61). Les élèves intéressés par la théorie des bifurcations (ou « théorie des catastrophes ») pourront par exemple consulter le traité de Strogatz (1994), ou encore Plaut (2007); Plaut & Peinke (2015).

**Fig. 5.9 – À faire soi-même.** Courbe de la dérivée seconde des fonctions de Falkner-Skan  $f$  à l'origine ( $\zeta = 0$ ) en fonction de  $m$ . En vertu de (5.60), ces valeurs représentent à un facteur près la pente à l'origine de la vitesse longitudinale au démarrage de la couche limite.



## Chapitre 6

# Écoulements turbulents



*‘Observe the motion of the surface of the water,  
which resembles that of hair, which has two motions,  
of which one is caused by the weight of the hair, the other by the direction of the curls;  
thus the water has eddying motions,  
one part of which is due to the principal current, the other to random and reverse motion’*

L. de Vinci<sup>1</sup>

*‘Turbulence is the last great unsolved problem of classical physics.’*

R. Feynman

*‘We are faced with the necessity of developing computational programs that mimic the behavior  
of turbulence in restricted situations. The possible behavior of turbulence is much too complex  
and varied for any single parametrization to work in a broad range of situations.*

*In our present state of understanding, these simple models will be based,  
in part on good physics, in part, on bad physics, and in part, on shameless phenomenology.*

*This is basically engineering.’*

J. Lumley<sup>1</sup>

*‘Essentially, all models are wrong, but some are useful.’*

G. Box

---

1. Citations tirées de Lumley (1992). Le dessin est bien sûr de L. de Vinci.

Un écoulement « *turbulent* »<sup>2</sup>, au contraire d'un écoulement laminaire, est tel qu'un « mélange » rapide<sup>3</sup> de lignes d'émission issues de différents points s'opère, à cause de l'existence de mouvements « erratiques » sur une large gamme d'échelles spatiales, jusqu'à des échelles très petites devant la taille du système. Ces mouvements sont typiquement « tourbillonnaires », comme le remarquait Léonard de Vinci au début du XVI<sup>ème</sup> siècle<sup>4</sup> ; ils correspondent à des *fluctuations* rapides et apparemment « chaotiques » de vitesse et de pression. On contempera par exemple la figure 6.3 qui présente des écoulements turbulents en tuyau, simulés numériquement, ou la figure 6.4 qui présente une « turbulence de grille », observée expérimentalement.

Comme nous l'avons vu en première année dans le cours Plaut (2015b), tous les écoulements deviennent turbulents à nombre de Reynolds suffisamment élevé. Ainsi dans la section 8.1 de Plaut (2015b) a été évoquée la transition vers la turbulence derrière un cylindre, pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 200, tandis que dans la section 8.2 a été évoquée la transition vers la turbulence dans un tuyau, pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 2000. Cette transition, d'ailleurs, est elle-même difficile à modéliser, et est encore l'objet d'intenses recherches<sup>5</sup>. On a vu que cette transition a un impact significatif sur les propriétés moyennes de l'écoulement, comme ses pertes de charge ; voyez par exemple les figures 1.1 et 5.5 de ce document. Beaucoup des écoulements qui intéressent l'ingénieur sont à nombre de Reynolds élevé donc turbulents ; comme leurs propriétés moyennes sont affectées par la turbulence, il convient d'essayer de développer des « *modèles de turbulence* ». Cette tâche est extrêmement ardue puisqu'il est clair qu'en écoulements turbulents la non-linéarité de l'équation de Navier-Stokes, qui rend sa résolution difficile, joue un rôle important<sup>6</sup>. Ce problème de la turbulence est de fait l'un des sujets de recherche les plus étudiés à l'heure actuelle, et malgré les efforts de générations de scientifiques depuis plus d'un siècle<sup>7</sup>, il est loin d'être bien résolu. Comme l'ingénieur, néanmoins, se doit d'être capable d'affronter des écoulements turbulents, nous allons donner ici quelques éléments sur la « modélisation de la turbulence », en avertissant bien que les modèles que nous allons introduire sont souvent phénoménologiques et parfois peu fiables...

Le fluide considéré sera toujours newtonien incompressible.

## 6.1 Décomposition en champs moyens et fluctuations

En turbulence, il est de coutûme, à la fois d'un point de vue expérimental<sup>8</sup> et théorique d'adopter une approche « statistique ». Dans cette approche on définit, pour un champ spatio-temporel  $f = f(\bar{\mathbf{x}}, t)$ , sa « *moyenne d'ensemble* » sur  $N$  réalisations de l'écoulement dans des conditions

2. Du latin « *turbare* » : troubler.

3. Par rapport aux effets de la diffusion seuls. On parle pour qualifier ce « mélange turbulent » de « diffusion turbulente » ou « dispersion turbulente ».

4. Cf. les premières figures et citation de ce chapitre ; notez que '*eddy*' signifie « tourbillon » en anglais.

5. Dans le cas de la transition vers la turbulence dans un tuyau par exemple, des publications dans des revues prestigieuses se succèdent, cf. par exemple Hof et al. (2003) ; Schneider et al. (2007) ; Willis & Kerswell (2007) ; Avila et al. (2011)...

6. Rappelons que l'un des 7 « problèmes mathématiques du millénaire » à 1 million de dollars posés par le Clay Mathematics Institute est la preuve de l'existence et régularité des solutions de l'équation de Navier-Stokes incompressible, une condition initiale  $C^\infty$  étant donnée, cf. [www.claymath.org/millennium](http://www.claymath.org/millennium).

7. L'une des premières études scientifiques de ce problème, sommairement décrite dans la section 7.3 de Plaut (2015b), est sans doute celle de Reynolds (1883).

8. Pour l'analyse de mesures expérimentales.

« identiques »<sup>9</sup>

$$\langle f(\bar{\mathbf{x}}, t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(\bar{\mathbf{x}}, t). \quad (6.1)$$

On écrit ainsi en tout point la décomposition

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{v}}', \quad p = P + p' \quad (6.2)$$

$$\text{avec } \bar{\mathbf{V}} = \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \text{ la moyenne de } \bar{\mathbf{v}}, \quad P = \langle p \rangle \text{ la moyenne de } p, \quad (6.3)$$

les ' indiquant les « *fluctuations* ». Par définition, les fluctuations sont à valeur moyenne nulle,

$$\langle \bar{\mathbf{v}}' \rangle = \bar{\mathbf{0}} \quad \text{et} \quad \langle p' \rangle = 0. \quad (6.4)$$

Par contre l'écart-type des fluctuations est non nul. Dans le cas d'une turbulence « stationnaire » ou « permanente », la moyenne d'ensemble coïncide souvent avec la moyenne temporelle ; il s'agit là d'une propriété d'« ergodicité ».

Dans le cas où un écoulement moyen dans la direction  $x_1$  existe, de valeur typique  $V_1$ , on définit l'*intensité de turbulence* dans la direction  $x_1$ ,

$$I_1(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{\sqrt{\langle [v_1'(\bar{\mathbf{x}}, t)]^2 \rangle}}{V_1}. \quad (6.5)$$

De façon plus isotrope, en ne privilégiant aucune composante de vitesse, on définit l'*énergie cinétique turbulente massique* moyenne

$$K(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} \langle \bar{\mathbf{v}}'(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \bar{\mathbf{v}}'(\bar{\mathbf{x}}, t) \rangle. \quad (6.6)$$

Si  $V$  est l'ordre de grandeur de  $\|\bar{\mathbf{V}}\|$ , on définit l'*intensité en énergie de la turbulence*

$$I_E(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{\sqrt{2K(\bar{\mathbf{x}}, t)}}{V}. \quad (6.7)$$

Ces rapports<sup>10</sup> permettent de distinguer les champs turbulents faibles,  $I \simeq 1\%$ , moyens,  $I \simeq 10\%$ , et forts,  $I \simeq 20\%$  et au-delà.

## 6.2 Échelles caractéristiques de la turbulence et cascade de Kolmogorov

La turbulence est un phénomène physique où les fluctuations de vitesse, pression, concentration, etc... se font sur une large gamme d'échelles. Considérons un écoulement dont le champ de vitesse moyen a pour valeur typique  $V$ , et pour longueur typique  $L$ . Par exemple :

- un écoulement de vitesse débitante  $V$  dans un canal de diamètre  $L$ ,
- l'écoulement derrière un objet de taille  $L$  se déplaçant à la vitesse  $V$  dans un fluide au repos,
- l'écoulement d'un jet de vitesse  $V$  par une embouchure de taille  $L$ ,

9. Bien entendu le nombre de réalisations  $N \gg 1$ . Dans le cas d'une turbulence « instationnaire » ou « non permanente » l'expérience est toujours redémarrée de la même manière à l'instant de départ  $t = 0$ . La moyenne utilisée ici est souvent appelée « *moyenne de Reynolds* ».

10. On les désigne parfois comme « niveaux de turbulence ».

- l'écoulement autour d'une turbine de rayon  $L$  tournant à la vitesse angulaire  $\omega = V/L$ , ...

Nous notons  $D$  le domaine fluide et  $m$  la masse de fluide qu'il contient. Le temps caractéristique de l'écoulement moyen est  $L/V$ . Les fluctuations sont caractérisées non pas par une échelle, mais par **toute une gamme d'échelles**. Cette idée a été proposée par un scientifique et météorologue anglais, dans le traité [Richardson \(1922\)](#), puis affinée par le mathématicien russe Kolmogorov (cf. [Kolmogorov 1941](#)).

Notons  $v$  et  $\ell$  la vitesse et la longueur typique des fluctuations turbulentes de plus grande taille;  $\ell$  est la « **macro-échelle** » ou « **échelle intégrale** » de l'écoulement. En supposant que les temps caractéristiques de l'écoulement moyen et des plus grandes fluctuations sont similaires, nous pouvons écrire que

$$\frac{L}{V} \sim \frac{\ell}{v}. \quad (6.8)$$

La **puissance massique injectée à grande échelle** est

$$\epsilon = \frac{1}{m} \frac{dE_c}{dt} \sim \frac{de_c}{dt} \quad (6.9)$$

avec

$$e_c = \text{densité massique d'énergie cinétique à grande échelle} \sim v^2.$$

Une estimation purement « inertielle » du taux d'évolution de l'énergie consiste à poser qu'il est donné par un temps d'advection,

$$\frac{d}{dt} \sim \frac{1}{\ell/v}.$$

En conséquence on obtient l'estimation « inertielle » aux macro-échelles

$$\boxed{\epsilon \sim \frac{v^3}{\ell}}. \quad (6.10)$$

La validité de cette relation constitue une hypothèse importante que nous notons H1, et sur laquelle nous reviendrons en section [6.3.1](#).

Comme l'écoulement au niveau de la macro-échelle est turbulent, le « **nombre de Reynolds turbulent** »

$$\boxed{Re_\ell = \frac{v\ell}{\nu} \gg 1}. \quad (6.11)$$

Suivant Richardson et Kolmogorov on suppose l'existence d'une **cascade inertielle d'énergie vers les petites échelles**, ces fluctuations macroscopiques transférant de l'énergie vers des plus petites échelles, disons mésoscopiques, de taille  $\ell_m$  et vitesse  $v_m$ , qui elles mêmes transfèrent de l'énergie vers des plus petites échelles, etc... Cette idée peut par exemple être justifiée par une analyse en modes de Fourier spatiaux<sup>11</sup>. Cette cascade se termine à l'« **échelle de Kolmogorov** »  $\ell_K$  qui correspond aux fluctuations les plus fines permises par la viscosité, où le nombre de Reynolds est donc d'ordre 1. En notant  $v_K$  la vitesse typique correspondante, on a

$$Re_K = \frac{v_K \ell_K}{\nu} \simeq 1. \quad (6.12)$$

11. Si on considère une « fluctuation » dont le champ de vitesse  $\bar{\mathbf{v}}$  est en  $\cos(kx)$  avec  $k = 2\pi/\Lambda$ , il est clair que le terme non linéaire  $(\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{v}})$  de l'équation de Navier-Stokes va créer une nouvelle « fluctuation » en  $\cos(2kx)$ , donc d'échelle  $\lambda = \Lambda/2$ .

La taille  $\ell_m$  des fluctuations du « *domaine inertiel* », dans lequel a lieu la cascade, est grande devant l'échelle de Kolmogorov  $\ell_K$  et petite devant la macro-échelle  $\ell$ ,

$$\boxed{\ell \gg \ell_m \gg \ell_K} . \quad (6.13)$$

Cette cascade inertielle d'énergie des grandes vers les petites échelles se traduit par l'égalité entre la puissance massique injectée à grande échelle (6.10) et la puissance massique reçue à toutes les échelles jusqu'aux échelles « visqueuses » de Kolmogorov, où elle est dissipée du fait des frottements visqueux,

$$\boxed{\epsilon \sim \frac{v^3}{\ell} \sim \dots \sim \frac{v_m^3}{\ell_m} \sim \dots \sim \frac{v_K^3}{\ell_K} = \text{taux de dissipation moyen}} . \quad (6.14)$$

Or, d'après le bilan de la section 1.7, ce taux de dissipation moyen, énergie dissipée par unité de temps et de masse dans le fluide, vaut

$$\epsilon = \frac{P_{\text{dissipée}}}{m} = \frac{2\eta}{m} \iiint_D \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} d^3x \quad (6.15)$$

avec  $m = \rho L^3$  la masse du fluide dans le domaine  $D$ , de taille  $L$ , considéré. Ainsi

$$\epsilon = \frac{2\nu}{L^3} \iiint_D \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} d^3x . \quad (6.16)$$

Comme les seules fluctuations de vitesse donnant une contribution non négligeable à cette intégrale sont les échelles de Kolmogorov, nous avons

$$\epsilon \simeq \frac{2\nu}{L^3} \iiint_{D_K} \overline{\mathbf{D}'} : \overline{\mathbf{D}'} d^3x$$

où  $D_K \subset D$  est le support des échelles de Kolmogorov, et on a noté  $\overline{\mathbf{D}'}$  au lieu de  $\overline{\mathbf{D}}$  pour bien faire apparaître le fait que ce sont les fluctuations de vitesse qui dominent la dissipation. En estimant que

$$\overline{\mathbf{D}'} \sim \frac{v_K}{\ell_K}$$

aux échelles de Kolmogorov, nous obtenons

$$\epsilon \sim \nu \left( \frac{v_K}{\ell_K} \right)^2 \frac{1}{L^3} \iiint_{D_K} d^3x = \nu \left( \frac{v_K}{\ell_K} \right)^2 \Phi$$

avec  $\Phi$  la fraction volumique des zones dissipatives. Dans le cadre de la théorie de Kolmogorov (1941), on suppose que ces structures remplissent tout le domaine fluide<sup>12</sup> de sorte que  $\Phi \sim 1$ . On en déduit l'estimation « visqueuse », valable aux échelles de Kolmogorov,

$$\boxed{\epsilon \sim \nu \left( \frac{v_K}{\ell_K} \right)^2} . \quad (6.17)$$

12. Cette hypothèse est très forte et il semble qu'en réalité les échelles fines n'occupent qu'une *fraction* du volume des plus grandes échelles. Le développement de cette idée a mené aux « *théories fractales* » de la turbulence.

En égalant les expressions inertielles de l'énergie injectée (6.14) à l'expression visqueuse de la dissipation (6.17), on obtient l'*ordre de grandeur des échelles de Kolmogorov*,

$$\ell_K \simeq \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \simeq \ell Re_\ell^{-3/4} \ll \ell, \quad (6.18)$$

compte tenu aussi de la définition (6.11) du nombre de Reynolds  $Re_\ell$ . L'échelle de Kolmogorov  $\ell_K$  peut être vue comme « la dimension des plus petits tourbillons » présents dans l'écoulement. L'existence d'aussi petites échelles implique que le calcul numérique d'un écoulement turbulent sera particulièrement difficile, puisqu'il nécessitera une très grande résolution spatio-temporelle... Trop grande par rapport aux capacités de calcul des ordinateurs actuels<sup>13</sup>, d'où la nécessité de développer des « modèles de turbulence »...

Avant d'aller plus loin, il convient d'introduire la « *micro-échelle de Taylor* » comme l'échelle  $\lambda$  de fluctuations dont la vitesse typique serait  $v$  la vitesse des macro-échelles et qui dissiperaient *par frottement* au taux  $\epsilon$ , c'est-à-dire

$$\epsilon \sim \nu \left( \frac{v}{\lambda} \right)^2. \quad (6.19)$$

On montre facilement que

$$\lambda \simeq \ell Re_\ell^{-1/2} \gg \ell_K. \quad (6.20)$$

On construit le nombre de Reynolds correspondant

$$Re_\lambda = \frac{v\lambda}{\nu} = Re_\ell^{1/2}. \quad (6.21)$$

### 6.3 Théorie de Kolmogorov : corrélations et spectres

La théorie de Kolmogorov (1941), théorie statistique des écoulements turbulents, permet non seulement d'aboutir à des estimations telles que (6.14) et (6.18), mais aussi de faire des prédictions concernant les moments statistiques des fluctuations de vitesse et les caractéristiques « spectrales » de ces fluctuations. Nous exposons ici quelques ingrédients et résultats de cette théorie, de façon succincte, en renvoyant le lecteur intéressé à Chassaing (2000b); Davidson (2004). Au passage nous expliquons l'hypothèse de Taylor, d'une grande importance pratique.

#### 6.3.1 Principales hypothèses de la théorie de Kolmogorov

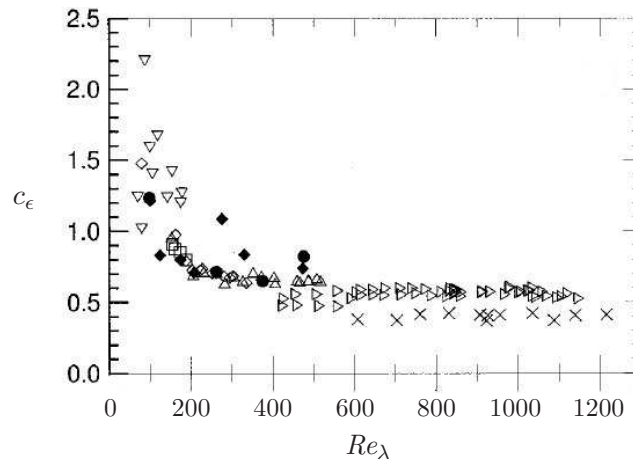
Cette théorie est basée sur deux hypothèses fondamentales.

- **Hypothèse H1** : le taux de dissipation moyen  $\epsilon$  est, dans le cas d'écoulements fortement turbulents  $Re_\ell \rightarrow +\infty$ ,  $Re_\lambda \rightarrow +\infty$ , de la forme (6.14),

$$\epsilon = C_\epsilon \frac{v^3}{\ell} \quad (6.22)$$

avec  $C_\epsilon$  une constante ne dépendant que du type de l'écoulement.

13. Voir à ce sujet l'exercice 6.1.



**Fig. 6.1** – Figure tirée de [Pearson et al. \(2002\)](#), présentant en abscisse le nombre de Reynolds  $Re_\lambda$  et en ordonnée la puissance massique réduite  $c_\epsilon = \epsilon\ell/v^3$  pour divers écoulements cisailés : sillages de plaque plane perpendiculaire à l'écoulement, sillages de disque, sillages de grille, et... écoulements en tuyau. Dans ce dernier cas, les données représentées par les triangles inversés sont restreintes au domaine  $70 \leq Re_\lambda \leq 180$ , et une convergence vers une valeur constante n'est pas claire.

- **Hypothèse H2** : les fluctuations de petite échelle sont *homogènes et isotropes*, leur statistique est indépendante des mouvements de grande échelle et *stationnaire* ; cette statistique est déterminée uniquement par  $\epsilon$  et  $\nu$ , seulement par  $\epsilon$  dans le domaine inertiel défini par (6.13).

L'hypothèse H1 a été vérifiée expérimentalement par [Sreenivasan \(1984\)](#) dans des expériences de turbulence de grille<sup>14</sup>. [Sreenivasan \(1984\)](#) a observé qu'en augmentant les nombres de Reynolds, la puissance massique réduite  $c_\epsilon = \epsilon\ell/v^3$  décroît, puis se stabilise vers une valeur indépendante des nombres de Reynolds. Récemment une étude similaire a été faite sur des écoulements cisailés par [Pearson et al. \(2002\)](#), et le même type de comportement a été observé dans la plupart des cas, comme le montre la figure 6.1. La lecture de l'article de [Pearson et al. \(2002\)](#) est recommandée aux lecteurs les plus intéressés, car il donne des informations intéressantes sur les méthodes de mesure utilisées. On peut notamment mentionner qu'il utilise l'hypothèse de Taylor, que nous décrirons en section 6.3.4.

Le fait que la turbulence dissipe à un taux indépendant de la viscosité lorsque  $Re_\ell$  et  $Re_\lambda \rightarrow +\infty$ , ou  $\nu \rightarrow 0$ , a des conséquences importantes en « turbulence développée » : convergence asymptotique de coefficients de traînée, de perte de charge, de puissance, etc...

L'hypothèse H2 permet de faire des prédictions pour diverses quantités statistiques, ainsi que pour certaines propriétés spectrales du champ de vitesse turbulent.

14. Rappelons que la figure 6.4 présente de telles expériences.

### 6.3.2 Corrélation et densité spectrale d'énergie 3D

En turbulence homogène et isotrope, la **fonction de corrélation 3D** à deux points de la vitesse fluctuante, qui caractérise la corrélation ou décorrélation des fluctuations de vitesse entre deux points distants de  $r$ , est définie par<sup>15</sup>

$$Corr_{3D}(r) = \frac{1}{2} \langle \bar{\mathbf{v}}'(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \bar{\mathbf{v}}'(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{r}}, t) \rangle \quad (6.23)$$

quels que soient  $\bar{\mathbf{x}}$ ,  $t$  et  $\bar{\mathbf{r}}$  de norme  $r$ . La **densité spectrale d'énergie 3D** est la fonction définie par une transformée intégrale à partir de ces corrélations,<sup>16</sup>

$$E_{3D}(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} Corr_{3D}(r) kr \sin(kr) dr, \quad (6.24)$$

avec  $k$  le **nombre d'onde**. Par transformée inverse, on peut montrer que

$$Corr_{3D}(r) = \int_0^{+\infty} E_{3D}(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dk. \quad (6.25)$$

En particulier, pour  $r = 0$ , on obtient de façon remarquable, pour l'**énergie cinétique turbulente massique**,

$$K = K(\bar{\mathbf{0}}, 0) = K(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} \langle \bar{\mathbf{v}}'(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \bar{\mathbf{v}}'(\bar{\mathbf{x}}, t) \rangle = \int_0^{+\infty} E_{3D}(k) dk. \quad (6.26)$$

Ainsi  $E_{3D}(k)dk$  peut être vue comme la part d'énergie cinétique turbulente due aux « *fluctuations* » ou « *tourbillons* » de nombre d'onde compris entre  $k$  et  $k + dk$ .

### 6.3.3 Corrélations et densités spectrales d'énergie 1D

La détermination expérimentale de la fonction  $Corr_{3D}(r)$  est difficile, puisqu'elle nécessite la mesure des 3 composantes de la vitesse fluctuante en deux points distants. Une autre fonction de corrélation moins difficile à mesurer est la **fonction de corrélation 1D** à deux points **longitudinale** de la vitesse fluctuante,<sup>17</sup>

$$Corr_{1DL}(r) = \frac{1}{2} \langle v_1'(\bar{\mathbf{x}}, t) v_1'(\bar{\mathbf{x}} + r\bar{\mathbf{e}}_1, t) \rangle. \quad (6.27)$$

La **densité spectrale d'énergie 1D longitudinale** est la fonction définie par une transformée intégrale à partir de ces corrélations,<sup>18</sup>

$$E_{1DL}(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} Corr_{1DL}(r) \cos(kr) dr. \quad (6.28)$$

Par transformée inverse, on peut montrer que

$$Corr_{1DL}(r) = 2 \int_0^{+\infty} E_{1DL}(k) \cos(kr) dk. \quad (6.29)$$

15. La fonction  $Corr_{3D}(r)$  est notée  $R(r)$  par Davidson (2004).

16. La fonction  $E_{3D}(k)$  est notée  $E(k)$  par Davidson (2004).

17. La fonction  $Corr_{1DL}(r)$  est notée  $u^2 f(r)$  par Davidson (2004).

18. La fonction  $E_{1DL}(k)$  est notée  $F_{11}(k)$  par Davidson (2004).



En particulier pour  $r = 0$  on obtient

$$\frac{1}{2} \langle v'_1(\bar{\mathbf{x}}, t) v'_1(\bar{\mathbf{x}}, t) \rangle = \frac{1}{3} K = 2 \int_0^{+\infty} E_{1DL}(k) dk . \quad (6.30)$$

Ainsi  $\frac{2}{3} E_{1DL}(k) dk$  peut être vue comme la part d'énergie cinétique turbulente due aux « *fluctuations* » ou « *tourbillons* » de nombre d'onde compris entre  $k$  et  $k + dk$ . On peut montrer que les densités spectrales d'énergie 1D longitudinale et 3D sont liées par la relation

$$E_{3D}(k) = k^3 \frac{d}{dk} \left[ \frac{1}{k} E'_{1DL}(k) \right] . \quad (6.31)$$

De façon analogue on peut définir la **fonction de corrélation 1D** à deux points *transverse* de la vitesse fluctuante,<sup>19</sup>

$$Corr_{1DT}(r) = \frac{1}{2} \langle v'_1(\bar{\mathbf{x}}, t) v'_1(\bar{\mathbf{x}} + r\bar{\mathbf{e}}_2, t) \rangle = \frac{1}{2} \langle v'_2(\bar{\mathbf{x}}, t) v'_2(\bar{\mathbf{x}} + r\bar{\mathbf{e}}_1, t) \rangle \quad (6.32)$$

par isotropie. La **densité spectrale d'énergie 1D transverse** est définie par<sup>20</sup>

$$E_{1DT}(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} Corr_{1DT}(r) \cos(kr) dr , \quad (6.33)$$

et vérifie

$$Corr_{1DT}(r) = 2 \int_0^{+\infty} E_{1DT}(k) \cos(kr) dk . \quad (6.34)$$

#### 6.3.4 Hypothèse de Taylor

La mesure en deux points distincts de vecteurs vitesses, ou même d'une seule composante de vitesse, en faisant varier la distance  $r$  entre ces points, reste difficile et lourde. Notamment, il faut veiller à ce que les deux systèmes de mesure ne se perturbent pas l'un l'autre. Heureusement le physicien britannique G. I. Taylor a montré que, dans des écoulements turbulents dans lesquels une **vitesse moyenne**  $V$  existe, stationnaire à la fois en norme et en direction, on peut souvent faire l'hypothèse d'une équivalence entre mesures temporelles à position fixée et mesures à différentes positions spatiales, mais au même instant. Comme faire des mesures en fonction du temps à position fixée est relativement aisé, par exemple avec un « fil chaud »<sup>21</sup>, cette hypothèse est fort pratique. Plus précisément, comme expliqué dans l'article Taylor (1938), si  $\bar{\mathbf{e}}_1$  est la direction de la vitesse moyenne en O,  $Ox_1x_2x_3$  est un repère cartésien, alors, **par advection des fluctuations de vitesse par l'écoulement moyen**,

$$v'_1(r\bar{\mathbf{e}}_1, t) \simeq v'_1(\bar{\mathbf{O}}, t - \tau) \quad \text{avec} \quad V = \frac{r}{\tau} \quad \text{i.e.} \quad \tau = \frac{r}{V} . \quad (6.35)$$

La fonction de corrélation 1D à deux points longitudinale (6.27) peut donc être vue comme la fonction d'**autocorrélation temporelle**

$$Corr_{1D}(r) \simeq \frac{1}{2} \langle v'_1(\bar{\mathbf{O}}, t) v'_1(\bar{\mathbf{O}}, t - r/V) \rangle \simeq \frac{1}{2} \langle v'_1(\bar{\mathbf{O}}, t) v'_1(\bar{\mathbf{O}}, t - r/V) \rangle_t \quad (6.36)$$

19. La fonction  $Corr_{1DT}(r)$  est notée  $u^2g(r)$  par Davidson (2004).

20. La fonction  $E_{1DT}(k)$  est notée  $F_{22}(k)$  par Davidson (2004).

21. Recherchez *anémomètre à fil chaud* ou '*Hot-Wire Anemometer*' sur Internet... ou voyez l'exercice correspondant de Jannot (2015)!

avec une hypothèse d'ergodicité. Cette fonction peut se déduire par traitement du signal de la mesure de « séries temporelles » de  $v'_1(\bar{\mathbf{0}}, t)$ , c'est-à-dire de séquences de valeurs de  $v'_1(\bar{\mathbf{0}}, t)$  pour  $t$  de la forme  $n \delta t$ , avec  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $N$  le nombre de points de la série temporelle,  $\delta t$  le temps d'échantillonnage. On peut aussi utiliser un théorème d'analyse de Fourier, dit *théorème de l'autocorrélation* ou *théorème de Wiener-Khintchine*, stipulant que la transformée de Fourier de cette fonction d'autocorrélation, soit  $E_{1DL}(k)$  d'après l'équation (6.29), est le module carré de la transformée de Fourier du signal de vitesse lui-même.

De même la fonction de corrélation 1D à deux points transverse (6.32) peut être vue comme une autre fonction d'autocorrélation temporelle, ce qui permet sa mesure expérimentale.

### 6.3.5 Spectre de Kolmogorov

Les hypothèses H1 et H2 mènent à l'existence, dans le domaine inertiel des nombres d'ondes,

$$1/\ell \ll k \ll 1/\ell_K, \quad (6.37)$$

d'une loi de la forme

$$E(k) = f(\epsilon, k),$$

à la fois pour les densités spectrales  $E_{1DL}$ ,  $E_{1DT}$  et  $E_{3D}(k)$ . D'après l'analyse dimensionnelle<sup>22</sup>,

$$E(k) = \pi_0 \epsilon^\alpha k^\beta,$$

les exposants  $\alpha$  et  $\beta$  se calculent immédiatement par condition d'homogénéité, sachant que

$$E(k) \equiv \ell^3 t^{-2}. \quad (6.38)$$

On obtient ainsi la loi dite du  $-5/3$  de Kolmogorov (1941),

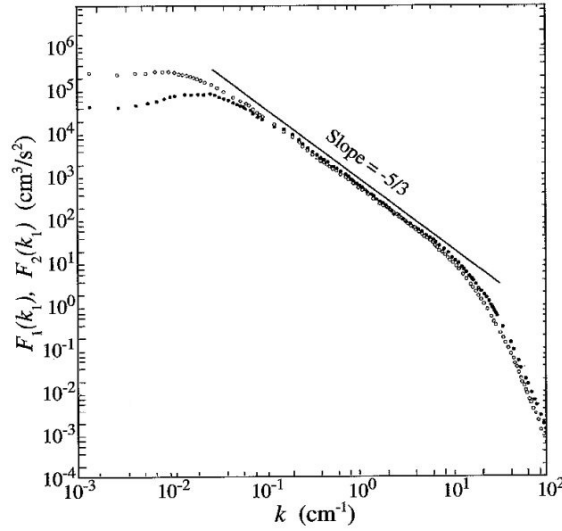
$$\boxed{E(k) = \pi_0 \epsilon^{2/3} k^{-5/3}}. \quad (6.39)$$

Dans cette équation,  $\pi_0$  est une constante « universelle », dite « constante de Kolmogorov », qui dépend de la densité spectrale considérée,  $E_{1DL}$ ,  $E_{1DT}$  ou  $E_{3D}$ . Un exemple de spectres expérimentaux démontrant la loi d'échelle (6.39) est celui de la figure 6.2.

## §

Cette théorie de Kolmogorov donne des informations sur les fluctuations turbulentes, mais elle renseigne très peu sur l'influence de ces fluctuations sur l'écoulement moyen. Or la turbulence modifie les grandeurs moyennes, comme le profil de vitesse ou la perte de pression motrice. L'approche classique pour modéliser cet effet consiste à utiliser la décomposition en champs moyens et fluctuations de la section 6.1, pour essayer d'aboutir à une équation d'évolution pour les champs moyens seuls. Nous verrons que, malheureusement, on aboutit de cette manière à des équations « ouvertes », et qu'il faut donc développer des « modèles de fermeture » pour certains termes apparaissant dans ces équations.

22. Cf. le chapitre 7 de Plaut (2015b).



**Fig. 6.2** – Densités spectrales d'énergie déterminées expérimentalement dans un jet d'air turbulent, grâce à des mesures par fil chaud (Champagne 1978; Frisch 1995). Disques vides : densité spectrale  $E_{1DL}$  des fluctuations de vitesse longitudinale, dans la direction de l'écoulement moyen. Disques pleins : densité spectrale  $E_{1DT}$  des fluctuations d'une composante de vitesse transverse, perpendiculairement à l'écoulement moyen. Notez l'accord avec la loi du  $-5/3$  de Kolmogorov (1941) dans la gamme inertielle des nombres d'ondes. Remarquez aussi que pour les grands nombres d'ondes les densités spectrales décroissent plus rapidement, à cause d'un effet que vous nommerez...

## 6.4 Équations de Reynolds

Rappelons que la décomposition en champs moyens et fluctuations s'écrit

$$\boxed{\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{v}}'} , \quad \boxed{p = P + p'} \quad (6.40)$$

avec

$$\bar{\mathbf{V}} = \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \text{ la moyenne de } \bar{\mathbf{v}} , \quad P = \langle p \rangle \text{ la moyenne de } p , \quad (6.41)$$

$\bar{\mathbf{v}}'$  et  $p'$  les fluctuations telles que

$$\langle \bar{\mathbf{v}}' \rangle = \bar{\mathbf{0}} \quad \text{et} \quad \langle p' \rangle = 0 . \quad (6.42)$$

Par linéarité de la définition (6.1), il est clair que l'on peut faire commuter les opérateurs de prise de moyenne et de dérivation spatio-temporelle,

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} . \quad (6.43)$$

D'autre part on peut supposer raisonnablement que, pour toutes grandeurs  $f$  et  $g$ ,

$$\langle \langle f \rangle \rangle = \langle f \rangle , \quad \langle \langle f \rangle g \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle , \quad \langle \langle f \rangle \langle g \rangle \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle . \quad (6.44)$$

Par contre

$$\langle fg \rangle \neq \langle f \rangle \langle g \rangle ,$$

comme on peut s'en convaincre en considérant le cas particulier où  $f = g = v'_x$ . Commençons par moyenner l'équation de conservation de la masse en fluide incompressible, soit (1.21),

$$\text{div} \bar{\mathbf{v}} = 0 . \quad (6.45)$$

Il vient immédiatement

$$\boxed{\operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = 0}, \quad (6.46)$$

i.e. l'*écoulement moyen est incompressible*. En soustrayant l'équation (6.46) à l'équation (6.45), on obtient au passage que l'écoulement fluctuant est aussi incompressible,

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}' = 0. \quad (6.47)$$

D'autre part on considère l'équation de Navier-Stokes (1.41), le terme non linéaire étant écrit sous la forme de la divergence du tenseur  $\bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}}$ , selon ce que l'on a vu dans l'exercice 2.6 de [Plaut \(2015a\)](#),

$$\rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \overline{\operatorname{div}(\bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}})} \right] = \rho \bar{\mathbf{g}} - \bar{\nabla} p + \eta \bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}}. \quad (6.48)$$

Lorsque l'on effectue une prise de moyenne de cette équation, le terme non linéaire s'écrit

$$\langle \bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}} \rangle = \langle \bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{V}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{v}}' \rangle + \langle \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{V}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{v}}' \rangle = \bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{V}} + \langle \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{v}}' \rangle \quad (6.49)$$

compte tenu des propriétés (6.42) et (6.44). On peut donc écrire pour le champ moyen une équation de Navier-Stokes mais avec un terme supplémentaire dû au dernier terme de (6.49). C'est l'« *équation de Reynolds* »<sup>23</sup>

$$\boxed{\rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \overline{\operatorname{div}(\bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{V}})} \right] = \rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + (\overline{\bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{v}}'}) \cdot \bar{\mathbf{V}} \right] = \rho \bar{\mathbf{g}} - \bar{\nabla} P + \eta \bar{\Delta} \bar{\mathbf{V}} + \overline{\operatorname{div}(\bar{\boldsymbol{\tau}}^t)}} \quad (6.50)$$

avec

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\tau}}^t = -\rho \langle \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{v}}' \rangle} \quad (6.51)$$

le « *tenseur des contraintes turbulentes de Reynolds* » ou plus simplement « *tenseur de Reynolds* », qui décrit l'effet des fluctuations de vitesse sur l'écoulement moyen, par « advection ». De façon cruciale, dans l'équation d'évolution (6.50) des « moments d'ordre 1 »  $\bar{\mathbf{V}}$  apparaissent des « moments d'ordre 2 »  $\langle \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{v}}' \rangle$ .

Ce tenseur est *symétrique*, mais, contrairement au tenseur des contraintes visqueuses<sup>24</sup>

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta \overline{\mathbf{D}(\bar{\mathbf{v}})}, \quad (6.52)$$

il n'est pas de trace nulle. Exactement

$$\operatorname{tr} \bar{\boldsymbol{\tau}}^t = -\rho \langle \bar{\mathbf{v}}' \cdot \bar{\mathbf{v}}' \rangle = -2\rho K \quad (6.53)$$

où  $K$  est l'*énergie cinétique turbulente massique* définie par l'équation (6.6).

Avant d'étudier diverses modélisations possibles de  $\bar{\boldsymbol{\tau}}^t$ , donnons l'équation de Reynolds (6.50) en composantes cartésiennes :

$$\rho \left[ \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) V_j \right] = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^t}{\partial x_j} \quad (6.54)$$

23. On parle souvent d'« équations de Reynolds » au pluriel, la première équation étant l'équation scalaire (6.46), la seconde étant l'équation vectorielle (6.50). En anglais on désigne ces équations comme les '*Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations*', et on utilise souvent l'abréviation correspondante *RANS*.

24. Dans l'équation (6.52), on rappelle quel est le champ de vitesse utilisé pour définir les taux de déformation, afin d'éviter toute ambiguïté.

avec

$$\tau_{ij}^t = -\rho \langle v'_i v'_j \rangle . \quad (6.55)$$

Mentionnons aussi que l'on regroupe souvent le terme de pression et de pesanteur, en utilisant la pression motrice au lieu de la pression.

## 6.5 Modèle de Boussinesq - Viscosité turbulente

Clairement, le système des équations (6.46) et (6.50), soient 4 équations en composantes pour les champs inconnus  $P$ ,  $\bar{\mathbf{V}}$  et  $\bar{\boldsymbol{\tau}}^t$ , soient 10 champs en composantes, n'est pas « fermé ». Il y a donc nécessité de définir des « équations de fermeture » pour « fermer » le problème. Le **modèle de Boussinesq** consiste à supposer que le tenseur des contraintes turbulentes est la superposition d'un terme d'énergie cinétique, isotrope, qui permet de respecter la condition (6.53), soit

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\text{iso}}^t &= \alpha \bar{\mathbf{I}} \quad \text{avec} \quad -2\rho K = 3\alpha \quad \text{i.e.} \quad \alpha = -\frac{2}{3}\rho K , \\ \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\text{iso}}^t &= -\frac{2}{3}\rho K \bar{\mathbf{I}} , \end{aligned} \quad (6.56)$$

et d'un terme de « *diffusion turbulente* », de trace nulle, proportionnel au tenseur des taux de déformation de l'écoulement moyen, vu comme la « source » de cette turbulence,<sup>25</sup>

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{\text{défmoy}}^t = 2\eta^t \bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{V}}) . \quad (6.57)$$

Cette formule introduit la « *viscosité dynamique turbulente* »  $\eta^t$ , en général grande devant la viscosité dynamique intrinsèque  $\eta$  du fluide. On appelle aussi parfois  $\eta^t$  « viscosité tourbillonnaire », en faisant allusion au fait qu'elle modélise les phénomènes de « dispersion » par les tourbillons de la turbulence<sup>26</sup>. Bien entendu la « *viscosité cinématique turbulente* »

$$\boxed{\nu^t = \frac{\eta^t}{\rho}} . \quad (6.58)$$

Au bilan

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\tau}}^t = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\text{iso}}^t + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\text{défmoy}}^t = -\frac{2}{3}\rho K \bar{\mathbf{I}} + 2\eta^t \bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{V}})} , \quad (6.59)$$

soit, en composantes en coordonnées cartésiennes,

$$\tau_{ij}^t = -\frac{2}{3}\rho K \delta_{ij} + \eta^t \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) . \quad (6.60)$$

Lorsque l'on injecte, dans l'équation de Reynolds (6.50) pour la vitesse moyenne, ce modèle de Boussinesq (6.59), on obtient, de façon intrinsèque,

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + (\bar{\nabla} \bar{\mathbf{V}}) \cdot \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{g}} - \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} P - \frac{2}{3} \bar{\nabla} K + 2 \bar{\text{div}}[(\nu + \nu^t) \bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{V}})]} , \quad (6.61)$$

25. Notez l'analogie entre la loi de comportement (6.52) et le modèle (6.57).

26. En anglais on parle ainsi de '*eddy viscosity*', sachant qu'un '*eddy*' est un tourbillon. Pour insister sur la différence entre diffusion physique visqueuse et « diffusion turbulente », certains auteurs parlent plutôt à ce sujet de « *dispersion turbulente* ».

ou, en composantes cartésiennes,

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu^t) \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (6.62)$$

On voit bien que la viscosité turbulente « augmente » la viscosité physique ou « microscopique ».

## 6.6 Modèle de longueur de mélange de Prandtl

Ce modèle, valable dans des cas où l'écoulement moyen est fortement cisailé, avec par exemple une composante dominante dans le tenseur gradient de vitesse moyenne

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_2} \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2,$$

pose une formule simple pour la viscosité turbulente, basée sur son analyse dimensionnelle,

$$\eta^t \equiv \rho \ell v. \quad (6.63)$$

Prandtl a proposé d'introduire une « *longueur de mélange* »<sup>27</sup>  $\ell_m$ , échelle caractéristique de la zone cisailée, et d'écrire que

$$\boxed{\eta^t = \rho \ell_m^2 \left| \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right|}. \quad (6.64)$$

On pourrait s'inquiéter du fait que l'énergie cinétique turbulente massique  $K$  reste inconnue dans ce modèle. Cependant elle n'introduit dans l'équation de Reynolds (6.50) qu'une correction à la pression ou pression motrice moyenne, qui est souvent peu pertinente. Nous verrons une application de ce modèle dans le problème 6.1.

## 6.7 Équations d'évolutions supplémentaires

### 6.7.1 Motivation : mise en place du modèle $K - \varepsilon$ . Dissipations

Nous allons mettre en place un modèle plus sophistiqué, performant et général que le modèle de longueur de mélange de Prandtl, à savoir, le modèle  $K - \varepsilon$  introduit par [Launder & Spalding \(1974\)](#). L'idée de ce modèle est de faire dépendre la viscosité turbulente de deux fonctions qui caractérisent naturellement la turbulence locale, et vont être calculées localement à partir d'équations aux dérivées partielles les plus physiques possibles. La première de ces fonctions est l'*énergie cinétique turbulente massique*  $K(\bar{\mathbf{x}}, t)$  déjà introduite équation (6.6). La deuxième de ces fonctions ressemble fortement au taux de dissipation moyen  $\varepsilon$  introduit dans la section 6.2, mais considéré localement. Nous notons dorénavant la *dissipation turbulente massique* locale

$$\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}, t) = 2\nu \left\langle \overline{\mathbf{D}'(\bar{\mathbf{x}}, t)} : \overline{\mathbf{D}'(\bar{\mathbf{x}}, t)} \right\rangle = 2\nu \left\langle D'_{ij}(\bar{\mathbf{x}}, t) D'_{ij}(\bar{\mathbf{x}}, t) \right\rangle \quad (6.65)$$

avec

$$\overline{\mathbf{D}'} = \overline{\mathbf{D}(\mathbf{v}')}, \quad (6.66)$$

27. 'Mixing length' en anglais ; on dit ainsi, lorsque l'on écrit l'équation (6.64), que l'on pose une « hypothèse de longueur de mélange », 'Mixing Length Hypothesis'.

et la *pseudo-dissipation turbulente massique* locale

$$\boxed{\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}, t) = \nu \left\langle \overline{\nabla \mathbf{v}'}(\bar{\mathbf{x}}, t) : \overline{\nabla \mathbf{v}'}(\bar{\mathbf{x}}, t)^T \right\rangle = \nu \left\langle \frac{\partial v'_i(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial x_j} \right\rangle}, \quad (6.67)$$

la dernière formule étant valable en coordonnées cartésiennes, comme tous les calculs en composante qui suivent. La terminologie « dissipation » pour  $\epsilon$ , « pseudo-dissipation » pour  $\varepsilon$ , est empruntée à [Chassaing \(2000b\)](#), mais plusieurs auteurs appellent aussi « dissipation »  $\varepsilon$ , voire, confondent ces deux quantités, qui sont de fait souvent proches, et apparaissent toutes deux comme un taux de disparition de l'énergie turbulente  $K$ , cf. les équations (6.78) et (6.79) ci-dessous. En toute rigueur, cependant, c'est  $\varepsilon$  et non  $\epsilon$  qui est utilisé dans le modèle de Launder et coéquipérateurs.

De manière générale, on peut montrer par du calcul tensoriel<sup>28</sup> les relations suivantes, où l'on omet de rappeler la dépendance en  $(\bar{\mathbf{x}}, t)$  pour alléger les notations,

$$\epsilon - \varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right\rangle = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle v'_i \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right\rangle = \nu \operatorname{div} \left\langle \mathbf{v}' \cdot \overline{\nabla \mathbf{v}'}^T \right\rangle, \quad (6.68)$$

et

$$2\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle D'_{ij} v'_i \right\rangle - \epsilon = \nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_j \partial x_j} - \varepsilon, \quad (6.69)$$

soit, intrinsèquement,

$$2\nu \operatorname{div} \left\langle \mathbf{v}' \cdot \overline{\mathbf{D}'} \right\rangle - \epsilon = \nu \Delta K - \varepsilon. \quad (6.70)$$

On en déduit que, si la turbulence est *spatialement homogène*,

$$\epsilon = \varepsilon. \quad (6.71)$$

Comme on s'approche de cette situation en *turbulence développée à grand nombre de Reynolds*, on retiendra que dans ce cas

$$\epsilon \simeq \varepsilon. \quad (6.72)$$

Notons aussi que, si on écrit des bilans globaux en intégrant sur le volume, la différence  $\epsilon - \varepsilon$  une fois intégrée revient à un terme de bord souvent nul ou négligeable.

Suivant une démarche physique, il nous faut donc, pour mettre en place le modèle  $K - \varepsilon$ , tout d'abord, établir les équations d'évolution de la vitesse fluctuante, puis de l'énergie cinétique fluctuante ou « turbulente » moyenne, et au moins mentionner l'existence d'une équation d'évolution de la pseudo-dissipation.

### 6.7.2 Équation d'évolution de la vitesse fluctuante

En soustrayant l'équation (6.50) à l'équation (6.48), il vient l'équation d'évolution de la vitesse fluctuante

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \overline{\mathbf{div}}(\overline{\mathbf{V}} \otimes \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \otimes \overline{\mathbf{V}} + \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}') \right] = - \overline{\nabla} p' + \eta \overline{\Delta} \mathbf{v}' - \overline{\mathbf{div}}(\overline{\boldsymbol{\tau}}^t). \quad (6.73)$$

28. C'est l'objet de l'exercice 6.2; on utilise la propriété d'incompressibilité.

### 6.7.3 Équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente

Prenons le produit scalaire de l'équation précédente avec  $\bar{\mathbf{v}}'$ . Il vient

$$\rho \left[ \bar{\mathbf{v}}' \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}'}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{div}}(\bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{v}}' + \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{v}}') \right] = -\bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\nabla} p' + \eta \bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\Delta} \bar{\mathbf{v}}' - \bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{div}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}^t) .$$

Prenons maintenant la moyenne d'ensemble de cette équation. Il vient

$$\rho \left[ \frac{\partial K}{\partial t} + \langle \bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{div}}(\bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{v}}' + \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{v}}') \rangle \right] = -\langle \bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\nabla} p' \rangle + \eta \langle \bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\Delta} \bar{\mathbf{v}}' \rangle . \quad (6.74)$$

On observe que dans cette équation d'évolution du « moment d'ordre 2 »  $K$  apparaissent des « moments d'ordre 3 »  $\langle \bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{div}}(\bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{v}}') \rangle$ . On rappelle<sup>29</sup> que, pour des champs à divergence nulle,

$$\overline{\mathbf{div}}(\bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{v}}') = \left( \overline{\nabla} \bar{\mathbf{V}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}}' , \quad \overline{\mathbf{div}}(\bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{V}}) = \left( \overline{\nabla} \bar{\mathbf{v}}' \right) \cdot \bar{\mathbf{V}} , \quad \overline{\mathbf{div}}(\bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{v}}') = \left( \overline{\nabla} \bar{\mathbf{v}}' \right) \cdot \bar{\mathbf{v}}' .$$

En coordonnées cartésiennes on a donc

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{div}}(\bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{v}}' + \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{v}}') &= v'_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} v'_j + v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} V_j + v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} v'_j \\ &= \frac{\partial V_i}{\partial x_j} v'_i v'_j + \frac{1}{2} V_j \frac{\partial (v'_i v'_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{2} v'_j \frac{\partial (v'_i v'_i)}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial V_i}{\partial x_j} v'_i v'_j + \frac{1}{2} V_j \frac{\partial (v'_i v'_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial (v'_i v'_i v'_j)}{\partial x_j} , \end{aligned}$$

soit, après prise de moyenne,

$$\langle \bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{div}}(\bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{v}}' + \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{v}}') \rangle = -\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\tau_{ij}^t}{\rho} + V_j \frac{\partial K}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{2} \langle v'_i v'_i v'_j \rangle . \quad (6.75)$$

Toujours d'après le calcul tensoriel<sup>29</sup>,

$$\bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\nabla} p' = \overline{\mathbf{div}}(p' \bar{\mathbf{v}}') . \quad (6.76)$$

D'autre part

$$\overline{\mathbf{div}}(\bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{D}}') = \bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{div}}(\overline{\mathbf{D}}') + \overline{\mathbf{D}}' : \overline{\nabla} \bar{\mathbf{v}}' = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\Delta} \bar{\mathbf{v}}' + \overline{\mathbf{D}}' : \overline{\mathbf{D}}'$$

i.e.

$$\bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\Delta} \bar{\mathbf{v}}' = 2 \overline{\mathbf{div}}(\bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{D}}') - 2 \overline{\mathbf{D}}' : \overline{\mathbf{D}}' .$$

Si on effectue la multiplication par  $\nu = \eta/\rho$  et la prise de moyenne, on obtient

$$\nu \langle \bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\Delta} \bar{\mathbf{v}}' \rangle = 2\nu \overline{\mathbf{div}} \langle \bar{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{D}}' \rangle - 2\nu \langle \overline{\mathbf{D}}' : \overline{\mathbf{D}}' \rangle . \quad (6.77)$$

Cette dernière quantité n'est autre que l'opposé de la dissipation turbulente massique (6.65). En divisant l'équation (6.74) par  $\rho$  et en utilisant (6.75), (6.76) et (6.77), on obtient

$$\frac{\partial K}{\partial t} + V_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \langle p' v'_j \rangle + \frac{1}{2} \langle v'_i v'_i v'_j \rangle \right) + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\tau_{ij}^t}{\rho} + 2\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \langle D'_{ij} v'_i \rangle - \epsilon . \quad (6.78)$$

29. Cf. le formulaire de calcul tensoriel de [Plaut \(2015b\)](#).



L'égalité (6.69) permet de récrire l'équation précédente sous la forme

$$\boxed{\frac{\partial K}{\partial t} + V_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \langle p' v'_j \rangle + \frac{1}{2} \langle v'_i v'_i v'_j \rangle \right) + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\tau_{ij}^t}{\rho} - \varepsilon}. \quad (6.79)$$

Cette équation montre que  $\varepsilon$  est bien une « dissipation », au moins aussi pertinente que  $\epsilon$ , et, en tout cas, plus « pratique », puisque l'équation (6.79) comporte un terme de moins à modéliser que l'équation (6.78).

Les termes de gauche de l'équation (6.79) se regroupent, classiquement, en

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + V_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial K}{\partial t} + (\nabla K) \cdot \bar{\mathbf{V}} \quad (6.80)$$

comprenant un terme de dérivée temporelle à position fixée et un terme d'advection par l'écoulement moyen. Le premier terme de droite de l'équation (6.79) est un terme de diffusion visqueuse de  $K$ ,

$$\text{div}(\nu \nabla K) = \nu \Delta K.$$

Le deuxième terme de droite

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle p' v'_j \rangle \quad (6.81)$$

peut être vu comme la moyenne de la puissance des forces de pression fluctuantes dans le mouvement turbulent. Le troisième terme

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle v'_i v'_i v'_j \rangle \quad (6.82)$$

décrit la « diffusion turbulente », et correspond à un effet fortement non linéaire, puisqu'il s'agit de « moments d'ordre 3 ». Suit - avant le dernier terme de dissipation - un terme qui n'est pas une divergence,

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\tau_{ij}^t}{\rho} = \overline{\nabla \mathbf{V}} : \overline{\boldsymbol{\tau}}^t, \quad (6.83)$$

et exprime l'influence de l'écoulement moyen sur l'énergie des fluctuations.

#### 6.7.4 Équation d'évolution de la pseudo-dissipation turbulente

L'établissement d'une équation d'évolution pour la pseudo-dissipation turbulente requiert un calcul tensoriel lourd. Pour ce que nous en ferons, il n'est pas indispensable de l'expliquer ici ; le lecteur passionné pourra consulter le chapitre 3 de [Chassaing \(2000b\)](#)... On mentionne juste que, contrairement à l'équation de l'énergie cinétique turbulente (6.79), qui comprend 5 termes connus et « seulement » 2 termes à modéliser, cette équation ne contient que 3 termes connus et une petite dizaine de termes à modéliser, prenant ainsi la forme

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\nabla \varepsilon) \cdot \bar{\mathbf{V}} = \text{div}(\nu \nabla \varepsilon) + TM, \quad (6.84)$$

avec  $TM$  l'ensemble des termes inconnus. On en explicite trois ci-dessous :

$$TM = -2\nu \left\langle v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right\rangle \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_k} - 2\nu \left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \varepsilon v'_k \rangle + \dots$$

## 6.8 Modèle $K - \varepsilon$

### 6.8.1 Équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente modélisée

Dans le modèle  $K - \varepsilon$  on adopte tout d'abord la modélisation de Boussinesq (6.59) du tenseur de Reynolds. En conséquence le terme de couplage (6.83) s'écrit

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\tau_{ij}^t}{\rho} = -\frac{2}{3}K \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + 2\nu^t \frac{\partial V_i}{\partial x_j} D_{ij}(\bar{\mathbf{V}}) = \nu^t \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \nu^t \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i}. \quad (6.85)$$

D'après l'exercice 6.2, en supposant que  $\nu^t$  est à peu près uniforme dans le volume, le deuxième terme peut s'écrire comme la divergence d'un champ de vecteurs. Si on fait un bilan global par intégration volumique, en utilisant la formule intégrale de la divergence, ce deuxième terme se ramènera en conséquence à un terme de bord, d'influence moins importante que celle du terme « intrinsèquement volumique »

$$\nu^t \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}.$$

Ce terme est une puissance massique toujours positive : **le modèle de Boussinesq pose que l'écoulement moyen crée la turbulence**. On appelle aussi pour cette raison le terme de couplage (6.85) « **terme de production** ».

Afin d'obtenir pour  $K$  une équation « simple », on modélise les termes inconnus dans (6.79) par analogie avec le premier terme, de diffusion moléculaire, en les écrivant comme un terme de diffusion turbulente :

$$-\frac{1}{\rho} \langle p'v'_j \rangle - \frac{1}{2} \langle v'_i v'_i v'_j \rangle = \frac{\nu^t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_j},$$

où  $\sigma_K$  est une constante du modèle, prise en général égale à 1,

$$\sigma_K \simeq 1. \quad (6.86)$$

L'équation modèle pour l'évolution de  $K$  s'écrit donc

$$\boxed{\frac{\partial K}{\partial t} + V_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu^t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + 2\nu^t \frac{\partial V_i}{\partial x_j} D_{ij}(\bar{\mathbf{V}}) - \varepsilon}, \quad (6.87)$$

soit, intrinsèquement,

$$\boxed{\frac{\partial K}{\partial t} + (\bar{\nabla} K) \cdot \bar{\mathbf{V}} = \text{div} \left[ \left( \nu + \frac{\nu^t}{\sigma_K} \right) \bar{\nabla} K \right] + 2\nu^t \bar{\nabla} \bar{\mathbf{V}} : \bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{V}}) - \varepsilon}. \quad (6.88)$$

### 6.8.2 Équation d'évolution de la pseudo-dissipation turbulente modélisée

La complexité de l'équation d'évolution de la pseudo-dissipation turbulente « exacte » (6.84) rend sa modélisation très difficile<sup>30</sup>. De façon très phénoménologique, on fait apparaître dans l'équation modélisée un terme de diffusion turbulente

$$\text{div} \left( \frac{\nu^t}{\sigma_\varepsilon} \bar{\nabla} \varepsilon \right),$$

30. Ce qui fait dire d'ailleurs à Davidson (2004), quand il en arrive à ce stade de l'histoire du modèle  $K - \varepsilon$  : 'The  $\varepsilon$  equation, on the other hand, is almost pure invention' !...

et des termes de « production » et « dissipation » directement déduits de ceux de l'équation pour  $K$  (6.88), en les multipliant par  $\varepsilon/K$  pour assurer l'homogénéité dimensionnelle, et en introduisant des constantes  $C_{1\varepsilon}$  et  $C_{2\varepsilon}$  pour se donner un peu de latitude. On écrit donc, de façon intrinsèque,

$$\boxed{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\overline{\nabla \varepsilon}) \cdot \overline{\mathbf{V}} = \operatorname{div} \left[ \left( \nu + \frac{\nu^t}{\sigma_\varepsilon} \right) \overline{\nabla \varepsilon} \right] + 2C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{K} \nu^t \overline{\overline{\nabla \mathbf{V}}} : \overline{\overline{\mathbf{D}(\mathbf{V})}} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{K}}, \quad (6.89)$$

soit, en composantes,

$$\boxed{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu^t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + 2C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{K} \nu^t \frac{\partial V_i}{\partial x_j} D_{ij}(\overline{\mathbf{V}}) - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{K}}, \quad (6.90)$$

Les constantes du modèle, ajustées par comparaison à certaines expériences, cf. par exemple la fin du problème 6.1, ainsi que l'exercice 6.4, sont prises en général comme suit :

$$\sigma_\varepsilon \simeq 1,3, \quad C_{1\varepsilon} \simeq 1,44, \quad C_{2\varepsilon} \simeq 1,92. \quad (6.91)$$

### 6.8.3 Modèle $K - \varepsilon$ de la viscosité turbulente

Le système formé de l'équation de la quantité de mouvement (6.61) pour  $\overline{\mathbf{V}}$  et des équations scalaires (6.88) pour  $K$ , (6.89) pour  $\varepsilon$ , n'est pas fermé, puisque le champ  $\nu^t$  est encore inconnu. Comme déjà écrit, le principe du modèle  $K - \varepsilon$  est que les scalaires  $K$  et  $\varepsilon$  contrôlent la viscosité turbulente. Par analyse dimensionnelle on aboutit alors immédiatement à

$$\boxed{\nu^t = C_\nu \frac{K^2}{\varepsilon}}, \quad (6.92)$$

qui a en plus une bonne signification physique : plus l'énergie cinétique turbulente est élevée, plus la viscosité turbulente l'est ; au contraire une grande dissipation turbulente diminue la viscosité turbulente. Par comparaison à certaines expériences, on a pu déterminer que la valeur qu'il convient d'utiliser pour la constante  $C_\nu$  est

$$C_\nu \simeq 0,09. \quad (6.93)$$

## 6.9 Diffusion turbulente d'un champ scalaire

Considérons un *champ scalaire*  $\rho_s$  qui peut être la concentration d'un polluant, d'un produit, la température, etc... Il satisfait en général une équation d'évolution de la forme

$$\frac{d\rho_s}{dt} = \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\nabla} \rho_s = -\operatorname{div} \overline{\mathbf{j}}_s \quad (6.94)$$

où le flux diffusif  $\overline{\mathbf{j}}_s$  suit une *loi de Fick* ou *Fourier*,

$$\overline{\mathbf{j}}_s = -D \overline{\nabla} \rho_s \quad (6.95)$$

avec  $D$  le *coefficient de diffusion* ou *diffusivité* du scalaire. Celui-ci évolue donc suivant l'équation d'*advection-diffusion*

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\nabla} \rho_s = \operatorname{div} (D \overline{\nabla} \rho_s) = D \Delta \rho_s \quad (6.96)$$

dans les cas usuels où le coefficient  $D$  est uniforme. Cette équation montre aussi que

$$D \equiv \ell^2 t^{-1} . \quad (6.97)$$

Comme le champ de vitesse est à divergence nulle, on peut aussi écrire l'équation (6.96) sous la forme générale

$$\boxed{\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_s \bar{\mathbf{v}}) = \operatorname{div}(D \bar{\nabla} \rho_s)} . \quad (6.98)$$

En présence de *turbulence*, on observe que la diffusion est accélérée ; on parle d'effets de « *diffusion turbulente* » ou encore « *dispersion turbulente* ». Afin de modéliser ces effets, on peut utiliser une décomposition en valeur moyenne et fluctuations identique à celle introduite en section 6.1, à savoir

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{v}}' , \quad \rho_s = R + r' \quad (6.99)$$

avec

$$\bar{\mathbf{V}} = \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle , \quad R = \langle \rho_s \rangle . \quad (6.100)$$

Si on introduit cette décomposition dans l'équation (6.98) on obtient, après prise de moyenne,

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial t} + \operatorname{div}(R \bar{\mathbf{V}}) + \operatorname{div} \langle r' \bar{\mathbf{v}}' \rangle = \operatorname{div}(D \bar{\nabla} R)} . \quad (6.101)$$

Le moment d'ordre 2  $\langle r' \bar{\mathbf{v}}' \rangle$  est souvent modélisé en introduisant une « *diffusivité turbulente* »  $D^t$  en posant

$$\boxed{\langle r' \bar{\mathbf{v}}' \rangle = -D^t \bar{\nabla} R} . \quad (6.102)$$

Cette diffusivité a la même dimension que  $D$ . On obtient au final

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial t} + \operatorname{div}(R \bar{\mathbf{V}}) = \operatorname{div}[(D + D^t) \bar{\nabla} R]} . \quad (6.103)$$

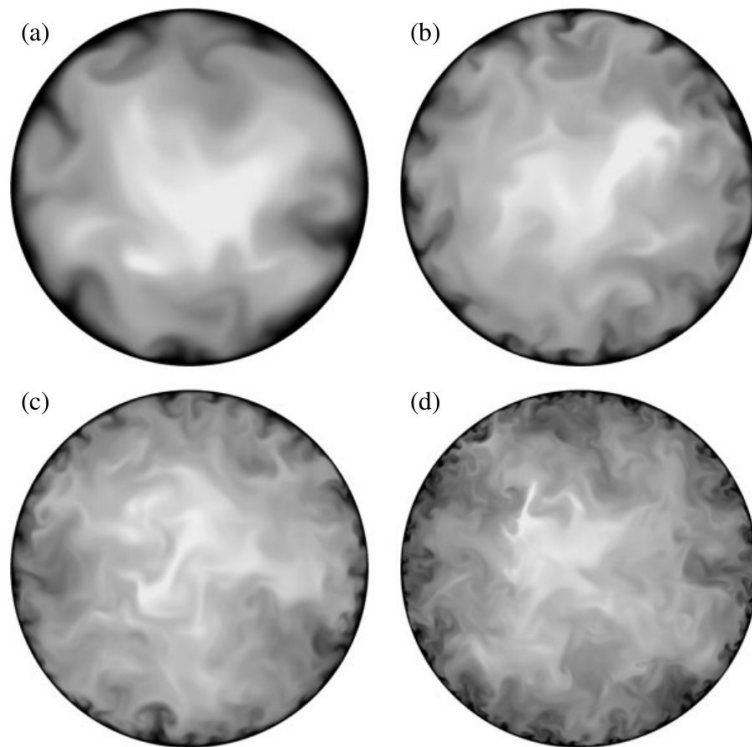
Ainsi, dans ce modèle, l'effet de la turbulence est d'augmenter le coefficient de diffusion intrinsèque  $D$  de la diffusivité turbulente  $D^t$ .

Pour modéliser  $D^t$ , dans un écoulement fortement cisailé on pourra utiliser un modèle de type « longueur de mélange », analogue au modèle (6.64),

$$\boxed{D^t = \ell_m^2 \left| \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right|} . \quad (6.104)$$

Dans un écoulement peu cisailé, ou à cisaillement variable, de façon analogue à ce qui est utilisé dans le modèle  $K - \varepsilon$ , cf. (6.92), on écrira plutôt

$$\boxed{D^t = C_{\rho_s} \frac{K^2}{\varepsilon}} . \quad (6.105)$$



**Fig. 6.3** – Champs de vitesse axiale instantanée obtenus par simulation numérique directe par [El Khoury et al. \(2013\)](#), en écoulement en tuyau pour différentes valeurs du nombre de Reynolds  $Re$ , (a)  $Re = 5300$ , (b)  $Re = 11700$ , (c)  $Re = 19000$ , (d)  $Re = 37700$ . Une section droite du tuyau est montrée, les niveaux de gris indiquant la vitesse (noir : vitesse nulle - blanc : vitesse maximale). Observez la création d'échelles de plus en plus petites lorsque le nombre de Reynolds augmente.

## 6.10 Éléments de conclusion

Le prix à payer pour l'absence d'une théorie globale des écoulements turbulents est un certain « foisonnement » des « modèles de turbulence » : le modèle  $K - \varepsilon$  sur lequel nous avons insisté n'est qu'un modèle parmi d'autres, et il en existe d'ailleurs quelques variantes « non standard ». En sus existent des modèles « concurrents » comme le modèle  $K - \omega$ , où  $\omega$  correspond grosso modo à  $\varepsilon/K$ , et obéit à une équation d'évolution postulée de façon assez phénoménologique, les modèles avec équations de transport pour les contraintes de Reynolds, etc... comme discuté par exemple dans [Chassaing \(2000b\)](#); [Wilcox \(2006\)](#). Mentionnons enfin l'approche de la simulation numérique des grandes échelles<sup>31</sup>, assez différente dans son principe, mais revenant après tout à des équations similaires à celles d'autres modèles de turbulence... Aucun modèle, malheureusement, n'est très satisfaisant : de ce fait - et d'autres aussi -, les chercheurs en mécanique des fluides, qu'ils soient expérimentateurs, théoriciens ou numériciens, voire, un peu des trois, ont encore du pain sur la planche... Notamment, des « simulations numériques directes »<sup>32</sup> d'écoulements turbulents ont de l'intérêt, et la course est actuellement aux « hauts Reynolds » et « géométries réalistes », comme l'illustre la figure 6.3...

31. 'Large eddy simulation' en anglais.

32. 'Direct numerical simulations'.

## 6.11 Exercices et problèmes

### Exercice 6.1 *Estimation d'ordres de grandeur en écoulement turbulent*

On considère l'écoulement dans le sillage d'un objet, de dimension typique  $L = 1$  m, se déplaçant à la vitesse  $V = 10$  m/s dans de l'eau.

- 1 Est-il nécessaire de tenir compte de la turbulence pour modéliser cet écoulement ?
- 2 On estime que la macro-échelle de la turbulence, dans une zone située dans le sillage de l'objet, est de l'ordre de 10% de la taille de l'objet. Évaluez l'échelle la plus fine autorisée par la viscosité du fluide (l'échelle de Kolmogorov) dans cette zone.
- 3 Estimez la dissipation massique dans cette zone. Commentez.
- 4 On veut simuler cet écoulement en résolvant correctement les échelles dissipatives. Combien de points de grille seraient nécessaires sur un cube de volume  $L^3$  seulement ? Quelle mémoire vive devrait être utilisée pour stocker les champs aux points de grille ? Ce calcul vous paraît-il faisable ? Si non, quelle(s) autres(s) solution(s) proposez-vous ?

### Exercice 6.2 *Calcul tensoriel*

- 1 Soit  $\bar{\mathbf{v}}$  un champ de vitesse à divergence nulle,

$$\bar{\bar{\mathbf{D}}} = \frac{1}{2} \left( \overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}} + \overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}^T} \right)$$

le tenseur des taux de déformations associé. Montrez que, en coordonnées cartésiennes,

$$2 \frac{\partial(D_{ij}v_i)}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2(v_i v_i)}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \quad (6.106)$$

- 2 Démontrez les relations (6.68) puis (6.69).

### Exercice 6.3 *Dissipations en turbulence homogène et isotrope*

On s'intéresse à l'évaluation des dissipations (6.65) et (6.67) en turbulence homogène et isotrope<sup>33</sup>. Rappelez pourquoi, dans ce cas,

$$\epsilon = \varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (6.107)$$

Admettant d'autre part la relation due à Karman et Howarth,

$$\left\langle \left( \frac{\partial v'_1}{\partial x_2} \right)^2 \right\rangle = 2 \left\langle \left( \frac{\partial v'_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle, \quad (6.108)$$

montrez que

$$\epsilon = n\nu \left\langle \left( \frac{\partial v'_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle \quad (6.109)$$

avec  $n$  un nombre entier que vous calculerez.

33. Dans une optique expérimentale par exemple, afin de vérifier la formule utilisée par Pearson et al. (2002).

**Problème 6.1** *Modèle simplifié de turbulence en proche paroi - Lois de paroi*

On considère un écoulement à grand nombre de Reynolds parallèlement à une paroi plane définie par  $x_2 = 0$  dans un repère cartésien. On s'intéresse à la couche limite au voisinage de cette paroi, et à l'influence de la turbulence sur celle-ci. Dans la zone de l'étude on suppose que la vitesse moyenne est de la forme

$$\bar{\mathbf{V}} = V_1(x_2) \bar{\mathbf{e}}_1 ,$$

et que toutes les quantités moyennes ne dépendent, en première approximation, que de la coordonnée transverse  $x_2$ . On néglige les effets de la pesanteur, et raisonne en terme de pression motrice seulement.

**1** Explicitez l'équation de Reynolds de façon intrinsèque, puis en composantes.

Montrez que, dans la direction de l'écoulement, on a un équilibre entre les effets visqueux et les effets de turbulence.

Montrez aussi que, lorsque l'on s'éloigne de la paroi, la pression motrice a tendance à diminuer à cause des fluctuations turbulentes.

**2** Intégrez une première fois par rapport à  $x_2$  l'équation de Reynolds dans la direction de l'écoulement. Montrez que la constante d'intégration qui apparaît peut s'exprimer simplement en fonction de la *contrainte pariétale de frottement moyenne*

$$\tau_p = \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \langle \bar{\boldsymbol{\tau}} \rangle \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 ,$$

où  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  est le tenseur des contraintes visqueuses dans le fluide, évalué au niveau de la paroi, en  $x_2 = 0$ .

**3.a** Construisez par analyse dimensionnelle une longueur  $\ell_p$  et une vitesse  $v_p$ , dite « *vitesse de frottement* »<sup>34</sup>, à partir de  $\rho$ ,  $\tau_p$  et  $\nu$  viscosité cinématique du fluide,

$$\ell_p = \quad , \quad v_p = \quad . \quad (6.110)$$

Vous vérifierez que  $\ell_p$  est liée à  $v_p$  par une relation simple.

**3.b** Adimensionnez l'équation différentielle définissant  $V_1(x_2)$  en faisant le changement de variables

$$y^+ = \frac{x_2}{\ell_p} = \quad , \quad U^+ = \frac{V_1(x_2)}{v_p} = U^+(y^+) . \quad (6.111)$$

Vous donnerez une interprétation physique simple de  $y^+$ , et noterez

$$\tau_{12}^{ta} = \frac{\tau_{12}^t}{\tau_p}$$

la contrainte de Reynolds turbulente adimensionnée.

**4** Justifiez physiquement l'existence d'une « *sous couche visqueuse* »<sup>35</sup> en très proche paroi dans laquelle la contrainte de Reynolds est négligeable, donc le profil de vitesse est linéaire,

$$U^+ = y^+ . \quad (6.112)$$

Expliquez bien l'équilibre qui a lieu dans cette couche.

34. 'Wall friction velocity' en anglais.

35. 'Viscous sublayer' en anglais.

**5.a** Au contraire, quel est l'équilibre que l'on peut attendre en « *couche externe* »<sup>36</sup>, là où l'influence de la paroi existe encore, mais la turbulence joue un rôle dominant ?

**5.b** Justifiez qu'il est raisonnable d'utiliser le modèle de Boussinesq et surtout, pour estimer la viscosité turbulente, le modèle de longueur de mélange de Prandtl. On suppose que la longueur de mélange  $\ell_m$  ne dépend que de la distance à la paroi  $x_2$ . Montrez, par analyse dimensionnelle, que l'on a forcément

$$\ell_m = \chi x_2$$

avec  $\chi$  une constante adimensionnelle.

**5.c** À partir de l'équation de Reynolds d'intérêt, montrez que, dans la couche externe, le profil de vitesse est logarithmique,

$$U^+ = \frac{1}{\chi} \ln y^+ + C \quad (6.113)$$

**6** L'expérience montre que la « *constante de von Karman* »  $\chi \simeq 0,41$  (i.e.  $1/\chi \simeq 2,4$ ) tandis que la constante d'intégration  $C \simeq 5,0$ . Représentez sur un même graphe en échelle log-linéaire les « *lois de parois* » (6.112) et (6.113). Calculez les intersections des courbes associées. Celle qui est physique traduit le fait que, quand on s'avance vers la couche externe turbulente, la diffusion augmente, donc  $U^+$  augmente moins rapidement en fonction de  $y^+$  que dans la sous couche visqueuse. Estimez en conséquence la valeur de  $y^+$  dans la zone de transition entre sous couche visqueuse et couche externe, ou « *zone tampon* »<sup>37</sup>,

$$y_{\text{tampon}}^+ = \quad . \quad (6.114)$$

**7.a** Dans la couche externe, on suppose que le modèle  $K - \varepsilon$  est aussi pertinent que le modèle de Prandtl. On suppose dans le cadre du modèle  $K - \varepsilon$  que  $\tau_{22}^t$  est, comme  $\tau_{12}^t$ , indépendante de  $x_2$ . Quelle conséquence cette hypothèse a-t-elle sur l'énergie cinétique turbulente  $K$  ?

**7.b** En explicitant l'équation d'évolution de  $K$  montrez l'existence d'un équilibre entre production et dissipation de la turbulence, puis calculez  $K$  et  $\varepsilon$ , complétant ainsi la « *loi de paroi* » (6.113) :

$$K = \quad , \quad \varepsilon = \quad . \quad (6.115)$$

Montrez alors que la mesure expérimentale de

$$-\frac{\langle v_1' v_2' \rangle}{K}$$

permet d'estimer l'une des constantes du modèle  $K - \varepsilon$ .

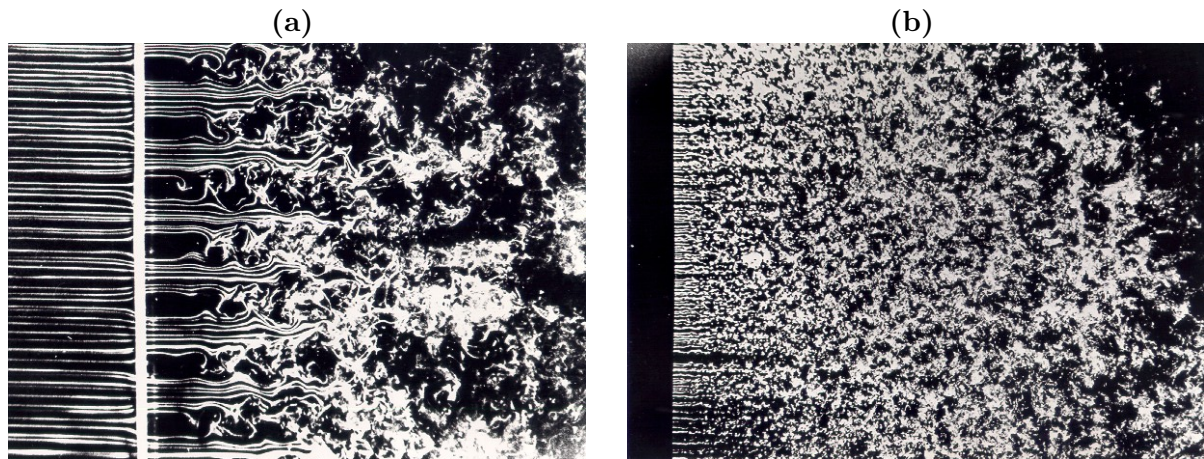
**8** En explicitant, toujours avec le modèle  $K - \varepsilon$  l'équation d'évolution de la dissipation, établissez une relation entre la constante de von Karman  $\chi$  et les constantes  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{2\varepsilon}$  et  $C_\nu$  du modèle  $K - \varepsilon$ . Vérifiez que cette relation est approximativement satisfaite par les constantes du modèle données dans le cours<sup>38</sup>.

36. On dit aussi « *sous couche inertielle* », ou encore « *région de recouvrement* », puisque l'écoulement extérieur se fait sentir à la limite de cette région. En anglais on dit 'overlap layer'.

37. 'Buffer layer' en anglais.

38. Ces constantes correspondent aux valeurs « standard » du modèle  $K - \varepsilon$ ; elles ont été déterminées en prenant en compte de multiples « contraintes », toutes celles-ci ne pouvant être exactement satisfaites.





**Fig. 6.4** – Visualisations de lignes d'émission par fumée dans des expériences de turbulence derrière une grille placée dans une soufflerie, à Reynolds modéré (a) et très élevé (b). Ces visualisations ont été obtenues par H. M. Nagib de l'Illinois Institute of Technology, et sont disponibles sur sa page web (indexée sur Google).

**Exercice 6.4** *Modèle  $K - \varepsilon$  de turbulence de grille et mesure de la constante  $C_{2\varepsilon}$*

On considère une turbulence de grille, comme représenté sur la figure 6.4. Dans le plan  $x_1 = 0$  est disposée une grille étendue dans les directions  $x_2$  et  $x_3$ . L'écoulement moyen est dans la zone d'intérêt, derrière la grille, uniforme,

$$\bar{\mathbf{V}} = V_1 \bar{\mathbf{e}}_1 .$$

L'expérience montre que la turbulence est stationnaire, et que son intensité, au sens de la définition (6.7), est de l'ordre de 5% au maximum. On s'intéresse à la décroissance de l'énergie cinétique turbulente derrière la grille. On utilise pour cela le modèle  $K - \varepsilon$ . On suppose que les termes de diffusion visqueuse et turbulente sont négligeables.

- 1 Expliquez les équations d'évolution de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation.
- 2 Les expériences indiquent que, à partir d'une certaine distance  $\delta$  de la grille, l'énergie cinétique turbulente décroît de façon algébrique,

$$K = K_0 (x_1/\delta)^{-n} \quad \text{avec} \quad n = 1,09 .$$

Montrez que ceci est cohérent avec le modèle  $K - \varepsilon$ , et permet une « mesure » de la constante  $C_{2\varepsilon}$ .

- 3 Justifiez a posteriori que les termes de diffusion et dispersion sont négligeables dans les équations de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation.

**Problème 6.2 Écoulements en tuyau : cas laminaire et turbulent en modèle  $K - \varepsilon$** 

[d'après le test de mars 2013]

On étudie les écoulements d'un fluide newtonien dans un tuyau d'axe  $Oz$ , de rayon  $a$  et de grande longueur  $L$ , de sorte que l'on considère seulement des écoulements établis. On utilise les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , et les notations du cours. On rappelle que l'*écoulement laminaire*

$$\bar{\mathbf{v}} = u(r) \bar{\mathbf{e}}_z = U_0 (1 - r^2/a^2) \bar{\mathbf{e}}_z ,$$

et que l'opposé du gradient axial de pression motrice  $G_{\text{lam}} = 4\eta U_0/a^2$  avec  $U_0$  la vitesse maximale de l'écoulement.

**1.a** Calculez la vitesse débitante  $V_0$  en fonction de  $U_0$ , et exprimez le *coefficient de perte de charge*

$$\lambda_{\text{lam}} = 4aG_{\text{lam}}/(\rho V_0^2)$$

en fonction du nombre de Reynolds  $Re = 2V_0a/\nu$  construit sur  $V_0$  et le diamètre  $2a$ . Quelle est la relation entre ce nombre de Reynolds et celui construit sur la vitesse maximale  $U_0$  et le rayon  $a$ ,  $R = U_0a/\nu$ ?

**1.b** Calculez la *contrainte pariétale de frottement*  $\tau_p = -\tau_{rz}$ ,  $\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$  étant le tenseur des contraintes visqueuses évalué sur la paroi du tuyau. Montrez sa proportionnalité à  $G_{\text{lam}}$ . Commentez.

**1.c** Calculez la *vitesse de frottement* correspondante  $v_p = \sqrt{\tau_p/\rho}$ . Exprimez la en fonction de  $U_0$  et  $R$  seulement. Commentez.

§

On veut calculer les champs moyens d'*écoulements turbulents établis* à l'aide du modèle  $K - \varepsilon$ . L'écoulement moyen

$$\bar{\mathbf{V}} = U(r) \bar{\mathbf{e}}_z ,$$

et toutes les propriétés moyennes de l'écoulement d'intérêt, sauf la pression motrice moyenne, sont supposées ne dépendre que du rayon cylindrique  $r$ .

**2** Calculez, de façon intrinsèque, les tenseurs  $\bar{\bar{\nabla}}\bar{\mathbf{V}}$  et  $\bar{\bar{\mathbf{D}}}(\bar{\mathbf{V}})$ , partie symétrique du précédent <sup>39</sup>.

**3.a** Écrivez de façon intrinsèque l'équation de Reynolds, en faisant apparaître la pression motrice moyenne  $\hat{P}$  et la viscosité dynamique turbulente  $\eta^t = \rho\nu^t$ . Montrez que le terme de diffusion moléculaire et turbulente, en  $\bar{\mathbf{div}} \bar{\bar{\mathbf{T}}}$  pour  $\bar{\bar{\mathbf{T}}}$  bien choisi, peut s'écrire sous la forme d'un seul terme proportionnel à  $\bar{\mathbf{e}}_z$ .

**3.b** À l'aide des composantes radiale et azimuthale de cette équation, montrez que  $\hat{P}$  est la somme d'une fonction de  $r$ , ne dépendant que de  $K(r)$ , et d'une fonction  $\Pi(z)$ .

**3.c** À l'aide de la composante axiale de l'équation de Reynolds, montrez que  $\Pi(z)$  est de la forme  $p_0 - Gz$  avec  $G$  constant. Quelle est la signification physique de  $G$ , supposé strictement positif?

**3.d** En intégrant une fois la composante axiale de l'équation de Reynolds, établissez une équation liant  $\eta$ ,  $\eta^t$ ,  $U(r)$ ,  $r$  et  $G$ . Comparez la à l'équation correspondante du cas laminaire et commentez.

<sup>39</sup>. Vous pourrez noter  $U'(r)$  la dérivée  $dU(r)/dr$ , de même pour les autres quantités moyennes, l'usage du ' pour ces champs étant sans ambiguïté.

4 On admet que la composante axiale de l'équation de Reynolds est valable jusqu'à la paroi. Que vaut à cet endroit  $\eta^t$ ? Déduisez-en la *contrainte pariétale de frottement moyenne*  $\tau_p = -\tau_{rz}(\bar{\mathbf{V}})$ ,  $\bar{\bar{\tau}}(\bar{\mathbf{V}})$  étant le tenseur des contraintes visqueuses moyen. Commentez.

5 Calculez  $\bar{\bar{\nabla}}\bar{\mathbf{V}} : \bar{\bar{\mathbf{D}}}(\bar{\mathbf{V}})$ .

6 Explicitez l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente modélisée, en y faisant apparaître trois termes seulement, dont vous rappellerez la signification physique. Vous prendrez d'emblée  $\sigma_K = 1$ .

7 Explicitez l'équation d'évolution de la pseudo-dissipation turbulente modélisée, en y faisant aussi apparaître trois termes seulement.

### §

On utilise la vitesse moyenne au centre  $U_0$  comme unité de vitesse,  $a$  comme unité de longueur,  $\eta$  (resp.  $\nu$ ) comme unité de viscosité dynamique (resp. cinématique). On note avec des chapeaux les quantités adimensionnées, i.e.

$$\widehat{U}(\widehat{r}) = U(a\widehat{r})/U_0, \quad \widehat{\nu}^t = \eta^t/\eta = \nu^t/\nu, \quad \text{etc...}$$

8 En utilisant le gradient de pression motrice laminaire  $G_{\text{lam}}$  comme unité de gradient de pression motrice  $G$ ,  $U_0$  étant supposée la même, adimensionnez l'équation de la vitesse axiale  $\widehat{U}$  établie en 3.d. On néglige dorénavant, dans le cœur de l'écoulement, la viscosité moléculaire devant la viscosité turbulente.

9 On adimensionne l'énergie cinétique et la pseudo-dissipation turbulente en posant

$$K(a\widehat{r}) = U_0^2 \widehat{K}(\widehat{r}) \quad \text{et} \quad \varepsilon(a\widehat{r}) = (U_0^3/a) \widehat{\varepsilon}(\widehat{r}).$$

Montrez que  $\widehat{\nu}^t$  dépend seulement de  $C_\nu$  (constante du modèle  $K - \varepsilon$ ),  $\widehat{K}$ ,  $\widehat{\varepsilon}$  et du nombre de Reynolds  $R = U_0 a/\nu$ . Commentez la dépendance de  $\widehat{\nu}^t$  par rapport à  $R$ .

10 Adimensionnez l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente modélisée. Ne développez pas l'équation, mais gardez-la sous la forme d'une somme de trois termes, sans remplacer  $\widehat{\nu}^t$  par son expression. Vérifiez que le nombre de Reynolds  $R$  apparaît tout de même dans cette équation.

11 Adimensionnez l'équation d'évolution de la pseudo-dissipation turbulente modélisée, en suivant les mêmes recommandations et indication.

12.a Afin d'écrire des *lois de paroi* sous forme adimensionnelle, avec les mêmes unités, exprimez dans un premier temps  $\tau_p$ , calculée question 4, en fonction de  $\widehat{G} = G/G_{\text{lam}}$ . Commentez.

12.b Déduisez-en la *vitesse de frottement* adimensionnée  $\widehat{v}_p = v_p/U_0$  avec  $v_p = \sqrt{\tau_p/\rho}$ . Vous montrerez que  $\widehat{v}_p$  ne dépend que de  $\widehat{G}$  et  $R$ .

13.a Exprimez la distance à la paroi  $x_2$ , nulle à la paroi, positive dans le fluide, comme dans l'exercice 6.4 du polycopié, en fonction de  $a$  et  $r$ .

13.b Si la coordonnée de paroi réduite  $y^+ = x_2 v_p/\nu$  est donnée, égale à  $y_0$ , que vaut le rayon adimensionnel correspondant  $\widehat{r}_0$ ? Vous montrerez que  $\widehat{r}_0$  ne dépend que de  $y_0$ ,  $\widehat{G}$  et  $R$ .

14 On écrit comme condition limite sur  $U$ , en  $y^+ = y_0$ ,

$$U = U_{lp} = v_p U^+ = v_p (\chi^{-1} \ln y^+ + C),$$

avec  $\chi$  la constante de Von Karman,  $C = 5$ . Établissez la version adimensionnelle de cette condition,  $\widehat{U} = \widehat{U}_{lp}$  en  $\widehat{r} = \widehat{r}_0$  : calculez  $\widehat{U}_{lp}$ .

15 D'autre part, on écrit comme conditions limites sur  $K$ , en  $y^+ = y_0$ ,

$$K = K_{lp} = \frac{v_p^2}{\sqrt{C_\nu}} \quad \text{et} \quad \frac{dK}{dx_2} = 0.$$

Établissez la version adimensionnelle de ces conditions, portant sur  $\widehat{K}$  et  $d\widehat{K}/d\widehat{r}$  en  $\widehat{r} = \widehat{r}_0$ .

16 Enfin, concernant  $\varepsilon$  on écrit, en  $y^+ = y_0$ ,

$$\varepsilon = \varepsilon_{lp} = \frac{v_p^3}{\chi x_2} \quad \text{et} \quad \frac{d\varepsilon}{dx_2} = -\frac{v_p^3}{\chi x_2^2}.$$

Établissez la version adimensionnelle de ces conditions, portant sur  $\widehat{\varepsilon}$  et  $d\widehat{\varepsilon}/d\widehat{r}$  en  $\widehat{r} = \widehat{r}_0$ .

17 Comme les équations différentielles adimensionnelles obtenues sont non linéaires, on va les résoudre numériquement. On règle  $\widehat{G}$  de façon à obtenir  $\widehat{U}(\widehat{r}_{00}) = 1$ , en  $\widehat{r}_{00} = 10^{-3}$  par exemple. Justifiez ces deux dernières équations.

Récapitulez alors toutes les équations différentielles adimensionnelles et leurs conditions limites, en omettant momentanément les chapeaux.

18 On donne, pour  $R = 5600$ , le résultat du réglage évoqué<sup>40</sup> :  $\widehat{G} = 9,062$ . Avec  $y_0 = 30$ , donnez la valeur numérique de  $\widehat{r}_0$ , puis résolvez le modèle à l'aide d'un programme Mathematica de structure suivante<sup>41</sup> :

```
(*Nombre de Reynolds R et valeur de G*) R= 5600; G= 9.062;
```

```
(*Modèle K-eps*) Cnu= 0.09; C1= 1.44; C2= 1.92; sigma= 1.3; nut[k_,eps_]= Cnu ...
```

```
(*Conditions initiales en r = r0 données par les lois de paroi*) y0= 30; r0= ...
chi= 0.41; Ulp= ... (1/chi Log[y0]+5); Klp= ...; epslp= ...; epsplp= ...;
```

```
(*Point d'arrivée de l'intégration*) r00= 10^-3;
```

```
(*Opérateur de dérivée par rapport à r*) Dr[f_]:= D[f,r]
```

```
sol= NDSolve[{eqU, eqK, eqeps, CIU, CIK1, CIK2, CIeps1, CIeps2}, {U[r],K[r],eps[r]}, {r,r0,r00}]
```

```
U[r_]= Replace[U[r],sol[[1]]]
```

Constatez que  $|\widehat{U}(\widehat{r}_{00}) - 1| < 10^{-4}$ , et donnez la valeur précise de cette « erreur ».

19 Dans la zone de proche paroi  $\widehat{r} \in [\widehat{r}_0, 1]$ , justifiez qu'il est pertinent d'approximer  $\widehat{U}(\widehat{r})$  par la fonction affine

$$\widehat{U}(\widehat{r}) = \widehat{U}_{lp} \frac{\widehat{r} - 1}{\widehat{r}_0 - 1}.$$

40. Obtenu grâce à un programme itératif, plus sophistiqué que celui que l'on vous demande d'écrire.

41. Les points de suspension ainsi que la liste d'équations du `NDSolve` doivent être explicités par vos soins.

Représentez avec Mathematica <sup>42</sup> le profil de la fonction  $\widehat{U}$  ainsi étendue à  $[\widehat{r}_{00}, 1]$ , et reproduisez ce schéma sur votre copie. Commentez.

**20** Donnez l'expression analytique intégrale de la vitesse débitante dimensionnelle  $V_0$  et adimensionnelle  $\widehat{V}_0$ . Calculez la valeur numérique de  $\widehat{V}_0$  dans le cas présent, à l'aide de la commande `NIntegrate`. Commentez.

**21** Calculez analytiquement le rapport entre les nombres de Reynolds  $Re = 2V_0a/\nu$  et  $R = U_0a/\nu$ , puis numériquement  $Re$  pour le cas présent. Commentez.

**22** Calculez analytiquement le *coefficient de perte de charge*

$$\lambda = 4aG/(\rho V_0^2),$$

puis sa valeur numérique dans le cas présent. Commentez en effectuant des comparaisons, et concluez.

---

42. Pour définir la fonction étendue on suggère une commande de la forme `Uc[r_]:= If[r<r0, U[r], Ulp (...)/(...)]`.



## Annexe A

# Analyse dimensionnelle

On présente ci-après une extension du tableau introduit dans [Plaut \(2015b\)](#) pour l'analyse dimensionnelle, prenant en compte des grandeurs de nature thermique. Notez que [Jannot \(2015\)](#) par exemple distingue l'énergie thermique ou quantité de chaleur  $Q$  de l'énergie mécanique  $E$ . Nous ne ferons pas cette distinction, pour simplifier, mais elle est parfois utile.

Grandeur	Notation - Définition	Fonction de dimensions	Unité SI, symbole
<b>Masse</b>	$m$	$m^1$	<b>kilogramme, kg</b>
<b>Longueur</b>	$\ell$	$\ell^1$	<b>mètre, m</b>
<b>Temps</b>	$t$	$t^1$	<b>seconde, s</b>
Masse volumique	$\rho = d^3m/d^3x$	$m^1 \ell^{-3}$	kg/m <sup>3</sup>
Vitesse	$v = dx/dt$	$\ell^1 t^{-1}$	m/s
Accélération	$g = dv/dt$	$\ell^1 t^{-2}$	m/s <sup>2</sup>
Force	$F = mg$	$m^1 \ell^1 t^{-2}$	Newton, N = kg m/s <sup>2</sup>
Couple	$\Gamma = F\ell$	$m^1 \ell^2 t^{-2}$	N m = kg m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Pression, Contrainte	$p, \sigma = F/S$	$m^1 \ell^{-1} t^{-2}$	Pascal, Pa = kg/(m s <sup>2</sup> )
Énergie	$E = \frac{1}{2}mv^2$	$m^1 \ell^2 t^{-2}$	Joule, J = kg m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Puissance	$P = dE/dt$	$m^1 \ell^2 t^{-3}$	Watt, W = J/s
Coefficient de tension superficielle	$\gamma = F/\ell$	$m^1 t^{-2}$	N/m = kg/s <sup>2</sup>
Déformation	$\epsilon = \partial x/\partial X$	1	
Taux de déformation	$D = \partial v/\partial x$	$t^{-1}$	s <sup>-1</sup>
Viscosité dynamique	$\eta = \sigma/D$	$m^1 \ell^{-1} t^{-1}$	kg/(m s) = Pa s
Viscosité cinématique	$\nu = \eta/\rho$	$\ell^2 t^{-1}$	m <sup>2</sup> /s
Débit volumique	$q = vS$	$\ell^3 t^{-1}$	m <sup>3</sup> /s
Débit massique	$\dot{m} = \rho q$	$m^1 t^{-1}$	kg/s
<b>Température</b>	$T$ ou $\theta$	$\theta^1$	<b>Kelvin, K</b>
Capacité calorifique	$c = e_i/T$	$\ell^2 t^{-2} \theta^{-1}$	J/(kg K)
Densité de flux de chaleur	$\Phi_{\text{chal}} = \dot{Q}/S$	$m t^{-3}$	W/m <sup>2</sup>
Conductivité thermique	$\lambda = \Phi_{\text{chal}}/(\nabla T)$	$m \ell t^{-3} \theta^{-1}$	W/(m K)
Débit calorifique	$q_c = \dot{m} c = \dot{Q}/\delta T$	$m \ell^2 t^{-3} \theta^{-1}$	W/K

**Tab. A.1** – *Fonctions de dimensions et unités dans le système international* (SI) des principales grandeurs rencontrées en *thermomécanique des fluides*. Les noms des grandeurs et unités fondamentales sont donnés en caractères gras.



## Annexe B

# Phénomènes de dispersion d'ondes

Pour appréhender les phénomènes de dispersion d'ondes, on considère un système unidimensionnel et des ondes linéaires (de petite amplitude, que l'on peut superposer sans surprise) de « relation de dispersion »

$$\omega = \text{fréquence angulaire} = \omega(k = \text{nombre d'onde}) . \quad (\text{B.1})$$

On considère un « paquet » (une superposition) de telles ondes, de nombres d'ondes proches de  $k$ , donné par

$$\zeta(x,t) = \int_{q \in \mathcal{V}(0)} \widehat{A}(k+q) e^{i[(k+q)x - \omega(k+q)t]} dq + c.c. \quad (\text{B.2})$$

Effectuons autour de  $k$  un développement limité de la fréquence angulaire, suivant

$$\omega(k+q) = \underbrace{\omega(k)}_{\omega_0} + \underbrace{\omega'(k)}_{v_g(k)} q + O(q^2) . \quad (\text{B.3})$$

Il vient

$$\zeta(x,t) \simeq A(x,t) e^{i(kx - \omega_0 t)} + c.c. \quad (\text{B.4})$$

où  $e^{i(kx - \omega_0 t)}$  est une « porteuse » oscillant rapidement et par contre

$$A(x,t) = \int_{q \in \mathcal{V}(0)} \widehat{A}(k+q) e^{i[qx - v_g(k)qt]} dq = B(x - v_g(k)t) \quad (\text{B.5})$$

ne contient que des modes de Fourier de petit nombre d'onde  $q$ ; c'est donc une « enveloppe lentement variable ». L'équation (B.5) montre que les « modulations de la porteuse » caractérisées par l'enveloppe se propagent à la **vitesse de groupe**

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk} . \quad (\text{B.6})$$

Des ondes sont **dispersives** si différents paquets d'ondes  $k$  centrés sur différents nombres d'ondes ont des enveloppes se propageant à différentes vitesses de groupe, ce qui entraîne une perte de cohérence progressive des paquets les uns par rapport aux autres. Cela est donc si et seulement si  $v_g$  dépend de  $k$  et cela équivaut à avoir une **vitesse de phase**

$$v_p(k) = \frac{\omega}{k} \quad (\text{B.7})$$

qui dépend de  $k$ .

On le montre par contraposition : avoir des ondes **non dispersives** équivaut à avoir

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = \text{constante} = c \iff \omega = ck \iff v_p = \frac{\omega}{k} = c \text{ indépendant de } k .$$



## Annexe C

# Éléments de correction des exercices et problèmes - Compléments

Ces *éléments de correction* sont essentiellement destinés à vous permettre de terminer et rédiger a posteriori les TDs chez vous, tout en étant sûr des résultats finaux. De plus des *compléments* sont parfois donnés. Enfin des éléments de solution d'exercices et problèmes non traités en TD (typiquement, ils correspondent à des sujets de test) sont aussi donnés.

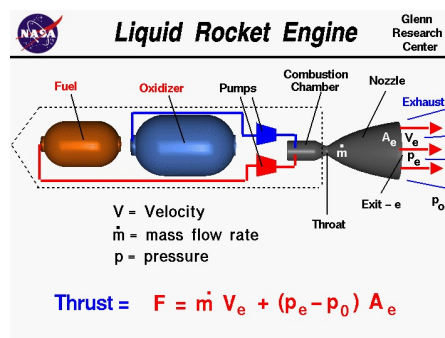
### C.1 Corrigés du chapitre 1 - Bases

Exercice 1.1 *Estimation de la poussée d'un moteur fusée*

1.a Écoulement stationnaire.

1.b  $q_{\text{liquides}} \ll q_{\text{gaz}} \simeq 9600 \text{ m}^3/\text{s}$ .

2 3



4 Terme moteur principal :  $\dot{m}V_e \simeq 100 \text{ tf}$  (« tonne-force »).

Terme résistant faisant la différence entre poussée au niveau de la mer (inférieure) et poussée en altitude (supérieure) :  $p_e A_e \simeq 24 \text{ tf}$ .

*Complément* : ce moteur assure la poussée pendant la deuxième phase de vol des fusées Ariane, après largage des deux boosters à poudre latéraux, même s'il est allumé dès le début.

Exercice 1.2 *Propulsion de fusées ou vaisseaux spatiaux idéaux*

1.a  $m \frac{dV}{dt} = -\frac{dm}{dt} V_e \implies \boxed{\delta V = V_e \ln(m_0/m_1)}$ , équation dite « de Tsiolkovsky ».

**1.b**  $m_e/m_{\text{he}} = \exp(\delta V/V_e) - 1 = 11,2$  si  $\delta V = 10$  km/s.

La masse d'ergols est plus de 11 fois la masse des systèmes et infrastructures et charge utile. Généralement, la masse d'ergol augmente très rapidement avec le rapport  $\delta V/V_e$  i.e. avec l'incrément de vitesse normalisé par la vitesse d'éjection. Aussi, plus  $V_e$  est élevée, moins on a besoin d'ergol pour atteindre un  $\delta V$  donné : on a intérêt à avoir des  $V_e$  les plus élevés possibles. Tout ceci explique le coût élevé d'une mise en orbite, sachant de plus que le modèle étudié ici est très idéalisé.

**1.c**  $t_1 = (m_{\text{he}}/\dot{m}) [\exp(\delta V/V_e) - 1] = 358$  s = 5 min 58 s, soit un temps relativement court, dû au fait que le modèle est très idéal. De plus

$$m_e = 89,5 \text{ t} \implies m_0 = 97,5 \text{ t}$$

soient des masses très élevées, en lien avec le commentaire fait à la question précédente.

**2.a**  $\delta V = V(t) = -V_e \ln(1 - t/\tau) - gt$  avec  $\tau = m_0/\dot{m} = t_1 + m_{\text{he}}/\dot{m} > t_1$ , tel que  $V(t) \rightarrow +\infty$  quand  $t \rightarrow \tau^-$ , si la formule est utilisée jusque là. Comme  $t_1/\tau < 1$  on a bien  $1 - t_1/\tau > 0$  i.e.  $V(t)$  est régulière et finie jusque  $t = t_1$ .

**2.b**  $\tau = 390$  s =  $t_1 + 32$  s = 6 min 30 s .

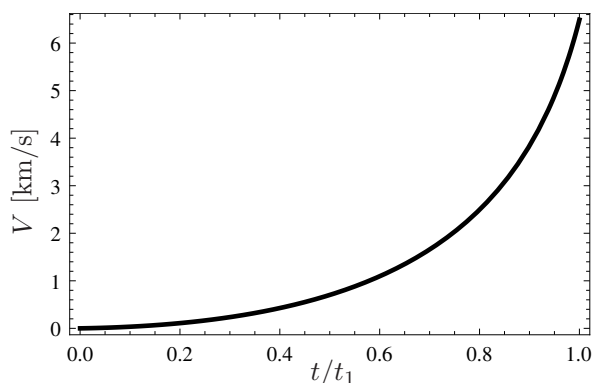
**2.c**  $\forall t \in [0, t_1[$ ,  $V(t) = \left(\frac{V_e}{\tau} - g\right)t + V_e \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{n\tau^n}$  .

$V(t)$  est positive aux temps courts ssi

$$\frac{V_e}{\tau} - g > 0 \iff F = \dot{m} V_e > m_0 g ,$$

qui exprime que la poussée du moteur doit être supérieure au poids de la fusée au décollage. Avec les valeurs de l'énoncé, on a bien  $F = 1000$  kN  $> m_0 g = 956$  kN .

**2.d** Avec Mathematica on obtient exactement :



La fusée qui s'allège progressivement accélère progressivement. À cause de la pesanteur, la vitesse finale  $V(t_1) = 6,49$  km/s est très inférieure à la vitesse de mise en orbite basse 10 km/s. On a donc besoin de plus de poussée : la fusée équipée d'un seul moteur Vulcain, étudiée ici, n'est pas suffisante pour mettre des charges en orbite. De fait, on utilise en général dans une première phase du lancement des boosters à poudre plus puissants.

**3** 1. En réalité les termes de pression d'éjection et pression extérieure dans la poussée existent, et devraient être pris en compte. Cependant ils ne sont pas prépondérants, i.e. modifient la poussée de « seulement » 25%.

2. L'air frotte sur la fusée, i.e., il existe une force aérodynamique (de trainée, essentiellement) totalement oubliée ici. Sa prise en compte n'est pas simple car l'écoulement de l'air autour de la fusée est rapidement supersonique, et la structure de cet écoulement compliquée.
3. Enfin la trajectoire de la fusée est peu rectiligne, car elle doit lancer sa charge, typiquement un satellite, en lui communiquant au moment où elle la lâche une vitesse horizontale et non verticale.

### Compléments sur l'exercice 1.2

- En lien avec la remarque faite en 1.b, comme quoi on doit rechercher des  $V_e$  les plus élevés possibles, on comprend l'intérêt de propulseurs à plasmas, dans lesquels on peut atteindre  $V_e \simeq 20$  km/s.
- En lien avec la remarque faite en 2.d, comme quoi on doit utiliser des boosters à poudre au lancement, dans le cas de la fusée Ariane 5 par exemple les deux boosters fournissent chacun une poussée de l'ordre de 5000 kN, i.e. à eux deux ils sont aussi puissants que 10 moteurs Vulcain. On recommande sur ce sujet la page Wikipédia « Ariane 5 ».

### Exercice 1.3 Estimation des poussées de turboréacteurs simple et double flux

#### 1 Approximations :

- on néglige l'effet des instationnarités ;
- on suppose qu'aux interfaces solides - gaz dans le moteur, les taux d'évolution de quantité de mouvement sont en moyenne faibles ;
- on néglige les taux d'évolution de quantité de mouvement au niveau des injecteurs de kérosène, comme  $\dot{m}_k \ll \dot{m}_0$  (question 4)

$\implies d\bar{\mathbf{p}}/dt$  se réduit au terme de bord, les seules surfaces en lesquelles les taux d'évolution de quantité de mouvement important = la section  $A_i$  d'entrée de l'air ingéré et  $A_e$  d'échappement par la tuyère :

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \simeq \iint_{A_i} \rho \bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S + \iint_{A_e} \rho \bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S .$$

Si  $x$  = direction de la vitesse incidente de l'air, en faisant l'approximation que les vitesses de l'air admis en  $A_i$  et des « gaz brûlés » éjectés en  $A_e$  sont quasi uniformes,

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \simeq -\dot{m}_0 V_0 \bar{\mathbf{e}}_x + \dot{m}_e V_e \bar{\mathbf{e}}_x = (\dot{m}_e V_e - \dot{m}_0 V_0) \bar{\mathbf{e}}_x , \quad (\text{C.1})$$

différence entre le taux de gain de quantité de mouvement en sortie et le taux de perte de quantité de mouvement en entrée. Comme  $\dot{m}_e > \dot{m}_0$  et  $V_e > V_0$ , les gaz accélèrent dans le moteur,  $dp_x/dt > 0$ .

#### 2 Bilan des forces extérieures :

- on néglige le poids, les fluides essentiellement gazeux étant peu denses ;
- les forces au niveau des injecteurs de kérosène sont supposées peu intenses donc négligées ;
- pressions en amont et aval sont  $\simeq$  les mêmes, sections en  $A_i$  et  $A_e \simeq$  disques de diamètres similaires  
 $\implies$  la force due à la pression amont est à peu près compensé par celle due à la pression aval ;
- la force dominante est donc celle exercée par le moteur sur les fluides

$$\implies \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \simeq \bar{\mathbf{F}}_{\text{moteur} \rightarrow \text{fluides}} . \quad (\text{C.2})$$

Principe d'action - réaction

$$\implies \bar{\mathbf{F}}_{\text{fluides} \rightarrow \text{moteur}} = -\bar{\mathbf{F}}_{\text{moteur} \rightarrow \text{fluides}} = -(\dot{m}_e V_e - \dot{m}_0 V_0) \bar{\mathbf{e}}_x . \quad (\text{C.3})$$

Comme les fluides sont accélérés vers la droite (direction  $x$ , en référence à la figure) i.e. poussés vers la droite, par réaction le moteur est poussé vers la gauche i.e. en avant.

3 Avec  $M$  masse du moteur,

$$\bar{\mathbf{0}} = \frac{d\bar{\mathbf{p}}_{\text{moteur}}}{dt} = M\bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{F}}_{\text{bras} \rightarrow \text{moteur}} + \bar{\mathbf{F}}_{\text{fluides internes} \rightarrow \text{moteur}} + \bar{\mathbf{F}}_{\text{air ambiant} \rightarrow \text{moteur}} .$$

Frontière du moteur en contact avec l'air ambiant  $\simeq$  cylindre de révolution d'axe l'axe moteur, car

- les sections  $A_e$  et  $A_i$  sont de diamètres proches  $\simeq$  diamètre de l'enveloppe solide du moteur ;
- l'« emprise » du bras peut être négligée de par sa taille « modeste ».

Air ambiant  $\simeq$  fluide parfait  $\implies$  n'exerce que des forces normales de pression, de résultante nulle par symétrie axiale.

Principe d'action - réaction

$$\implies \bar{\mathbf{F}}_{\text{moteur} \rightarrow \text{avion}} = -\bar{\mathbf{F}}_{\text{bras} \rightarrow \text{moteur}} \simeq M\bar{\mathbf{g}} - (\dot{m}_e V_e - \dot{m}_0 V_0) \bar{\mathbf{e}}_x .$$

On décompose naturellement cette force en poids + poussée,

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{moteur} \rightarrow \text{avion}} \simeq M\bar{\mathbf{g}} - F\bar{\mathbf{e}}_x \quad \text{avec} \quad \boxed{F = \dot{m}_e V_e - \dot{m}_0 V_0} . \quad (\text{C.4})$$

Effet de « réaction » des fluides internes, accélérés dans la direction  $x$ , donc « accélérant » l'avion dans la direction  $-x$ . Par rapport au cas d'un moteur fusée, on n'a pas d'effet de la pression extérieure, due à la géométrie « ouverte » du moteur d'avion, bien différent de ce point de vue du moteur fusée.

4

$$\boxed{F \simeq \dot{m}_0 (V_e - V_0)} . \quad (\text{C.5})$$

5 Avec des approximations analogues à celles posées question 1, pour les fluides internes au moteur,

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \simeq \frac{dp_x}{dt} \bar{\mathbf{e}}_x \quad \text{avec} \quad \frac{dp_x}{dt} \simeq -\dot{m}_c V_0 - \dot{m}_f V_0 + \dot{m}_e V_e + \dot{m}_f V_f ,$$

somme des taux de perte en entrée de quantité de mouvement des flux chaud ( $\dot{m}_c V_0$ ) et froid ( $\dot{m}_f V_0$ ), à comparer aux taux de gain en sortie de quantité de mouvement des flux chaud ( $\dot{m}_e V_e$ ) et froid ( $\dot{m}_f V_f$ ). Comme  $\dot{m}_e > \dot{m}_c$ ,  $V_e > V_0$ ,  $V_f > V_0$ ,  $dp_x/dt > 0$ , les fluides sont accélérés par le moteur.

D'autre part, avec exactement les mêmes approximations qu'en question 2,

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \simeq \bar{\mathbf{F}}_{\text{moteur} \rightarrow \text{fluides}} .$$

Principe d'action - réaction et décomposition poids + poussée

$$\implies \bar{\mathbf{F}}_{\text{fluides} \rightarrow \text{moteur}} \simeq -F\bar{\mathbf{e}}_x \quad \text{avec} \quad F = \frac{dp_x}{dt} \simeq -\dot{m}_c V_0 - \dot{m}_f V_0 + \dot{m}_e V_e + \dot{m}_f V_f . \quad (\text{C.6})$$

6

$$\boxed{F \simeq F_c + F_f} \quad \text{avec} \quad \boxed{F_c = \dot{m}_c(V_e - V_0)} \quad \text{et} \quad \boxed{F_f = \dot{m}_f(V_f - V_0)}, \quad (\text{C.7})$$

à comparer à la formule (C.5) de la poussée d'un turboréacteur simple flux. Cette poussée (C.5) correspond dans le cas double flux (C.7) à la poussée  $F_c$ , l'intérêt est l'ajout de la contribution  $F_f$  due au flux froid, qui permet d'augmenter nettement la poussée (comme on va le voir dans l'application numérique) pour un coût énergétique raisonnable.

7

$$\boxed{F \simeq -\dot{m}_0 V_0 + \dot{m}_c V_e + b \dot{m}_c V_f}. \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{8.a} \quad c = \sqrt{\gamma g RT/M} \implies V_0 = 0,8 c = 240 \text{ m/s}.$$

$$\mathbf{8.b} \quad \dot{m}_f = b \dot{m}_c = 133,4 \text{ kg/s}, \text{ d'où}$$

$$F_c = 6,0 \text{ kN}, \quad F_f = 14,7 \text{ kN} \implies F = F_c + F_f = 20,7 \text{ kN}. \quad (\text{C.9})$$

L'essentiel de la poussée, 71% ici, est produite par le flux secondaire, ce qui montre bien son importance.

### Compléments sur l'exercice 1.3 :

- Cette poussée n'est pas la poussée maximale du moteur, de l'ordre de 100 kN, utile au moment du décollage.
- Cependant le moteur est bien « optimisé » en fonction du régime de croisière, qui est le régime de fonctionnement normal et principal du moteur.
- Non seulement, les turboréacteurs double flux ont un meilleur rendement que les turboréacteurs simple flux, mais, de plus, le fait d'« isoler » le jet rapide issu de la tuyère dans le jet cylindrique moins rapide du flux secondaire diminue sensiblement le bruit.

### Exercice 1.4 Écoulement laminaire dans un tuyau

1.a Écoulement de *Hagen-Poiseuille* :

$$\bar{\mathbf{v}} = W(1 - r^2/a^2) \bar{\mathbf{e}}_z \quad \text{avec} \quad W = Ga^2/(4\eta) \iff G = 8\eta V/a^2.$$

$$\mathbf{1.c} \quad p = p_0 - (G + \rho g \sin \alpha)z.$$

$$\mathbf{2} \quad V = W/2.$$

$$\mathbf{3} \quad \tau_p = 2\eta W/a.$$

$$\mathbf{4} \quad \tau_p = Ga/2.$$

$$\mathbf{5.a} \quad \delta H = \frac{\hat{p}_e - \hat{p}_s}{\rho g} = \lambda \frac{L}{2a} \frac{V^2}{2g} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{64}{Re} \quad \text{si} \quad Re = Re_d = \frac{Vd}{\nu} \quad \text{avec} \quad d = 2a.$$

$$\mathbf{5.b} \quad \text{Il s'agit de vérifier par calcul direct de la dissipation visqueuse que} \quad \delta H = \frac{P_{\text{dissipée}}}{\dot{m}g}.$$

**Problème 1.1 Étude d'écoulements de Couette cylindrique - Applications**

1 Composante axiale de l'équation de Navier-Stokes  $\implies \hat{p} = \hat{p}(r, \theta)$ .

Composante azimutale de l'équation de Navier-Stokes  $\implies \hat{p} = F(r) \theta + G(r)$ .

Or  $\hat{p}$  doit être invariante sous  $\theta \mapsto \theta + 2\pi \dots$

2  $V(r) = \alpha r + \frac{\beta}{r}$ ,  $\alpha = -\frac{\Omega a^2}{b^2 - a^2}$ ,  $\beta = \frac{\Omega a^2 b^2}{b^2 - a^2}$ .

3  $p(r, z) = \rho \left( \frac{\alpha^2}{2} r^2 + 2\alpha\beta \ln r - \frac{\beta^2}{2r^2} - gz \right) + \gamma$ ,  $z_s = \frac{\hat{p}(r) - p_0}{\rho g}$ .

4  $\Gamma_{\text{moteur}} = 4\pi\beta h \eta$ .

5 Petit inter-rayon.

6 Si on tourne trop vite, l'écoulement ne sera plus laminaire  $\implies$  *instabilités* voire *turbulence*, cf. le complément 1.1.

7.1  $P_{\text{dissipée}} = 4\pi\beta h \eta \Omega = P_{\text{moteur}}$ .

7.2  $P_{\text{moteur}} = 33,5 \text{ mW}$ .

8  $\frac{dE_i}{dt} = P_{\text{dissipée}} + \dot{Q}$ .

9  $P_{\text{dissipée}} \simeq 34 \text{ mW}$  très faible.

$\frac{dT}{dt} = \frac{P_{\text{dissipée}}}{mc} \simeq 10^{-5} \text{ K/s}$  négligeable.

10.1  $P_{\text{dissipée}} = 2\pi\eta \frac{ha^3}{d} \Omega^2$  grande quand  $d$  petite ou  $\Omega$  grande.

10.2  $P_{\text{dissipée}}$  aux paliers  $\simeq 3,4 \text{ MW}$  non complètement négligeable, de l'ordre de 0,3 % de la puissance de la tranche. Il faut installer des *circuits de refroidissements performants* capable d'évacuer en permanence 340 kW/palier.

## C.2 Corrigé du chapitre 2

### Conditions d'interface, tension superficielle

**Problème 2.1 Lubrification d'un écoulement en tuyau de fluide très visqueux**

1  $\overline{\mathbf{K}} = \overline{\nabla \mathbf{v}} = v'(r) \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_r$ .

2  $(\overline{\nabla \mathbf{v}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}}$ .

3  $\overline{\nabla \hat{p}} = \eta_i \Delta v \bar{\mathbf{e}}_z \implies \hat{p}$  ne dépend que de  $z$  et  $\frac{d\hat{p}}{dz}(z) = \eta_i \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) (r)$ .

Comme les variables  $r$  et  $z$  sont indépendantes, ces fonctions sont constantes dans chaque domaine

$$\iff \exists 1 \text{ constante } G_1 \text{ telle que } \forall r \in [0, r_1], \frac{d\hat{p}}{dz}(z) = -G_1 = \eta_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_1}{dr} \right) (r),$$

$$\text{et } \exists 1 \text{ constante } G_2 \text{ telle que } \forall r \in [r_1, a], \frac{d\hat{p}}{dz}(z) = -G_2 = \eta_2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_2}{dr} \right) (r),$$

soient des équations différentielles ordinaires linéaires inhomogènes d'ordre 2. La résolution de chacune introduira 2 constantes d'intégration  $\implies$  besoin de *quatre conditions limites*.



4.1 Loi de comportement <sup>1</sup> : dans chaque fluide  $i = 1, 2$  :

$$\bar{\sigma}_i = -p_i \bar{\mathbf{1}} + 2\eta_i \bar{\mathbf{D}}_i = -p_i \bar{\mathbf{1}} + \eta_i \frac{dv_i}{dr} (\bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_z),$$

$$\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{e}}_r \implies \bar{\mathbf{T}}_i = -p_i \bar{\mathbf{e}}_r + \eta_i \frac{dv_i}{dr} \bar{\mathbf{e}}_z$$

$$\implies (p_1 - p_2) \bar{\mathbf{e}}_r + \left( \eta_2 \frac{dv_2}{dr} - \eta_1 \frac{dv_1}{dr} \right) \bar{\mathbf{e}}_z = \frac{\gamma}{r_1} \bar{\mathbf{e}}_r \quad \text{en } r = r_1. \quad (\text{CIdyn})$$

$$(\text{CIdyn}) \cdot \bar{\mathbf{e}}_r \iff \text{cond. de } \mathbf{saut de pression imposé} \quad p_1 - p_2 = \frac{\gamma}{r_1} \quad \text{en } r = r_1;$$

$$(\text{CIdyn}) \cdot \bar{\mathbf{e}}_z \iff \text{cond. sur les } \mathbf{gradients de vitesse à l'interface} \quad \eta_2 \frac{dv_2}{dr} = \eta_1 \frac{dv_1}{dr} \quad \text{en } r = r_1.$$

4.2  $\hat{p}_i = p_i + \rho_i g Z = p_i + \rho_i g(x \cos \alpha + z \sin \alpha) = -G_i z + p_{0i} \iff p_i = \dots$

Condition de saut de pression imposé  $\rightarrow$

$$\forall x, y \text{ tels que } x^2 + y^2 = r_1^2, \forall z \in [0, L], \quad (G_2 - G_1)z + (\rho_2 - \rho_1)g(x \cos \alpha + z \sin \alpha) + p_{01} - p_{02} - \frac{\gamma}{r_1} = 0.$$

Nullité du coefficient de  $x \implies$  puisque  $\cos \alpha \neq 0$ ,  $\boxed{\rho_2 = \rho_1}$ . Si l'un des fluides était plus lourd que l'autre, il aurait tendance à s'écouler vers la partie basse du tuyau  $\longleftrightarrow$  *l'hypothèse que les deux fluides ont la même densité permet d'assurer que les effets de la pesanteur, qui introduisent en général une anisotropie dans une section droite du tuyau (sauf si  $\cos \alpha = 0$ ), ne perturbent pas l'axisymétrie de l'écoulement.*

Nullité du coefficient de  $z \implies \boxed{G_2 = G_1 = G}$ .

Nullité du coefficient constant  $\implies \boxed{p_{01} - p_{02} = p_1 - p_2 = \gamma/r_1}$  dû à la *courbure de cette interface* et à sa *tension superficielle*.

4.3  $\boxed{\delta \hat{p} = \hat{p}_i(z=0) - \hat{p}_i(z=L) = GL} \iff \boxed{G = \delta \hat{p}/l}$ .

5

- condition d'adhérence à la paroi

$$v_2(a) = 0; \quad (\text{C.10})$$

- condition de continuité des vitesses à l'interface i.e. d'adhérence des deux fluides l'un à l'autre, qui est l'une des conditions cinématiques à l'interface,

$$v_2(r_1) = v_1(r_1); \quad (\text{C.11})$$

- condition de continuité des contraintes tangentielles qui est une composante de la condition dynamique à l'interface,

$$\eta_2 v_2'(r_1) = \eta_1 v_1'(r_1); \quad (\text{C.12})$$

- condition en  $r = 0$

$$v_1 \text{ et toutes ses dérivées sont finies en } r = 0. \quad (\text{C.13})$$

---

1. On souligne l'indice  $i$  lorsqu'il apparaît deux fois, pour bien montrer que l'on ne fait pas une somme sur cet indice.

$$\hookrightarrow \boxed{v_1 = V_1 - \frac{Gr^2}{4\eta_1}} \quad \text{avec} \quad \boxed{V_1 = \frac{Ga^2}{4\eta_2} + \frac{Gr_1^2}{4} \left( \frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} \right)},$$

$$\boxed{v_2 = V_2 - \frac{Gr^2}{4\eta_2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{V_2 = \frac{Ga^2}{4\eta_2}}.$$

6  $r_1 = 0 \iff$  *écoulement de Hagen-Poiseuille* du fluide 2 seul...

7  $q_1 = \frac{G\pi a^2 r_1^2}{4\eta_2} + \frac{G\pi r_1^4}{4} \left( \frac{1}{2\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} \right), \quad q_2 = \frac{G\pi(a^2 - r_1^2)^2}{8\eta_2}.$

8.1  $q_{10} = \frac{G\pi a^4}{8\eta_1} \implies \boxed{Q_1 = 2R^2M + R^4(1 - 2M)}.$

On a bien  $R = 1$  i.e.  $r_1 = a \implies Q_1 = 1.$

8.2  $M > 1 \implies dQ_1/dR$  s'annule et change de signe en  $R = R_m = 1/\sqrt{2 - 1/M}$   
 $\implies Q_1(R)$  croissante sur  $[0, R_m]$  puis décroissante sur  $[R_m, 1]$ ; maximum atteint en  $R = R_m$

$$\max Q_1 = Q_{1m} = \frac{M^2}{2M - 1}.$$

$M = 1000 \implies R_m \simeq 0,71$  et  $Q_{1m} \simeq 500$  d'où la figure C.1a. On constate qu'en diphasique le débit du fluide 1 (le plus visqueux) est le plus souvent supérieur et même très supérieur à ce qu'il serait en monophasique pour la même perte de pression motrice  $\longleftrightarrow$  effet de « *lubrification* ».

9.1

$$(q_1 + q_2) \delta\hat{p} = \frac{G^2 L \pi}{8} \left[ r_1^4 \left( \frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} \right) + \frac{a^4}{\eta_2} \right].$$

Dans le fluide 1,  $\overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} = \frac{2}{4} (v_1'(r))^2 = \frac{G^2 r^2}{8\eta_1^2} \implies 2\eta_1 \iiint_{D_1} \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} d^3x = \frac{G^2 L \pi r_1^4}{8\eta_1}.$

Dans le fluide 2,  $\overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} = \frac{2}{4} (v_2'(r))^2 = \frac{G^2 r^2}{8\eta_2^2} \implies 2\eta_2 \iiint_{D_2} \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} d^3x = \frac{G^2 L \pi (a^4 - r_1^4)}{8\eta_2}.$

9.2 Si  $r_1 = a$

$$(2.22) \iff q_1 \delta\hat{p} = P_{\text{dissipée}} \iff \dot{m} g \delta H = P_{\text{dissipée}}$$

comme dans le cours.

9.3 (2.22) est un *bilan de puissance* : la *puissance des efforts extérieurs injectée* dans l'écoulement, par exemple par une pompe qui met en pression les fluides

$$\boxed{P = (q_1 + q_2) \delta\hat{p} = P_{\text{dissipée}}}$$

par les efforts intérieurs i.e. les *contraintes visqueuses*.

10.1  $P = \frac{8\eta_1 L q^2}{\pi a^4} \iff \boxed{q = \sqrt{\frac{\pi a^4 P}{8\eta_1 L}} = 0,326 \text{ l/s}}$

en prenant  $\eta_2 = \eta_{\text{eau}}$  à 20°C = 10<sup>-3</sup> Pa s. C'est un débit très faible, compte tenu de la puissance injectée qui n'est pas négligeable si cet écoulement doit être entretenu de façon « permanente ».

**10.2** Hypothèse  $q_2 \ll q_1$  raisonnable puisqu'avec  $r_1 = 0,92a$  le fluide 2 a peu de place pour s'écouler. En négligeant  $\eta_2$  devant  $\eta_1$ ,

$$q_1 \simeq \frac{\delta p \pi r_1^2 (a^2 - r_1^2)}{4\eta_2 L}$$

donc (2.22) donne

$$P \simeq q_1 \delta p \simeq \frac{4\eta_2 L q_1^2}{\pi r_1^2 (a^2 - r_1^2)} \iff \boxed{q_1 \simeq \sqrt{\frac{\pi r_1^2 (a^2 - r_1^2) P}{4\eta_2 L}} = 5,25 \text{ l/s} \simeq 16 q}.$$

**10.3** En négligeant toujours  $\eta_2$  devant  $\eta_1$ , la vitesse du fluide 1 au centre de la conduite

$$V_1 \simeq \frac{G(a^2 - r_1^2)}{4\eta_2} \simeq \frac{q_1}{\pi r_1^2} = 2,19 \text{ m/s}. \quad (\text{C.14})$$

Comme  $v_1 < V_1$  dès que  $r > 0$ , pour que la valeur moyenne de  $v_1$  soit approximativement égale à  $V_1$  il faut que les corrections  $v_1 - V_1$  soient très faibles : ***l'écoulement du fluide 1 est pratiquement uniforme dans tout  $D_1$ .***

D'autre part

$$v_2(r) = V_2(1 - R^2) \quad \text{avec} \quad V_2 \simeq V_1/(1 - R_1^2) \quad (\text{C.15})$$

en vertu de la condition de continuité de la vitesse en  $r = r_1$  i.e.  $R = R_1 = r_1/a$ . Numériquement

$$V_2 \simeq 14,3 \text{ m/s}. \quad (\text{C.16})$$

***On a de forts gradients de vitesse dans le fluide 2*** (figure C.1b). La comparaison des expressions de  $P$  obtenues ci-dessus montre que dans l'écoulement diphasique ***les déformations, à l'origine de la dissipation visqueuse de puissance, se concentrent dans le fluide 2 le moins visqueux situé à l'extérieur***, donc, par rapport à l'écoulement monophasique de référence, on a un écoulement beaucoup plus rapide avec la même puissance de pompe.

### Compléments sur le problème 2.1

**A** Le nombre de Reynolds de l'écoulement monophasique de référence calculé question 10.1

$$Re = 2q\rho/(\pi a\eta_1) = 6,9 \quad \text{en utilisant } \rho = \rho_{\text{eau}} \text{ à } 20^\circ\text{C}.$$

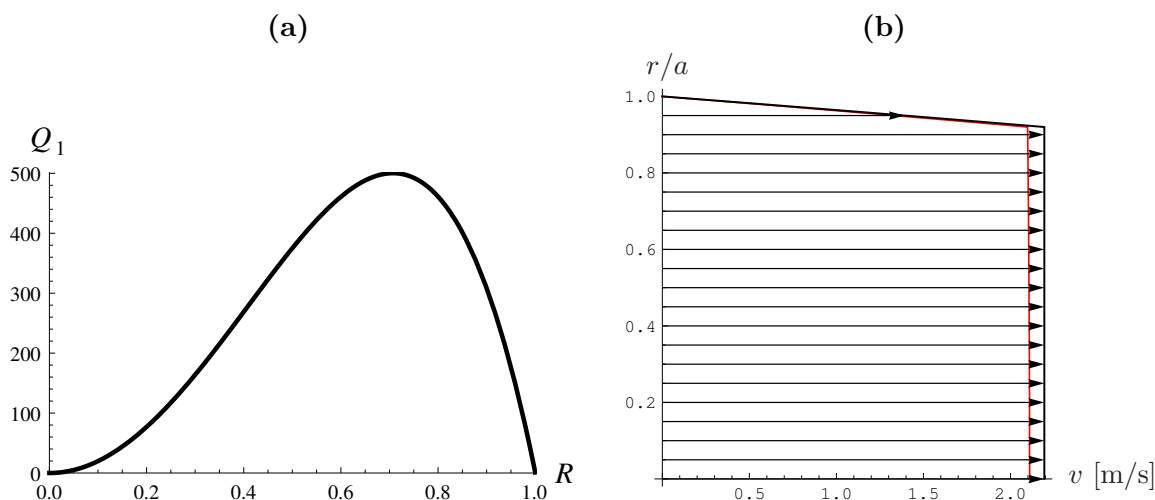
On peut donc bien supposer que cet écoulement monophasique est laminaire, ce que l'on a fait implicitement. Une estimation du nombre de Reynolds correspondant à l'écoulement diphasique calculé question 10.2 est

$$Re_{\text{diphasique}} \simeq 16 Re_{\text{monophasique}} \simeq 110$$

ce qui reste suffisamment petit ; on peut donc penser que cet écoulement laminaire aussi sera réalisé.

**B** On peut calculer rigoureusement l'écoulement monophasique décrit dans la question 10.2. Pour cela il faut juste accepter une étape de calcul supplémentaire, celle du gradient de pression  $G$  à partir de l'équation ( $P$ ). En effet on en déduit

$$\begin{aligned} (q_1 + q_2) \delta p &= \frac{G^2 L \pi}{8} \left[ r_1^4 \left( \frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} \right) + \frac{a^4}{\eta_2} \right] = P \\ \iff G &= \sqrt{\frac{8P}{\pi L}} \left[ r_1^4 \left( \frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} \right) + \frac{a^4}{\eta_2} \right]^{-1/2} = 60,7 \text{ Pa/m}. \end{aligned}$$



**Fig. C.1** – Pour  $M = 1000$ . **(a)** : Débit réduit en fonction du rayon réduit. **(b)** : Champ de vitesse (trait noir et flèches) de l'écoulement diphasique calculé question 10.3. En lien avec le complément B on a aussi représenté en rouge le champ de vitesse calculé sans aucune approximation.

On a alors

$$q_1 = \frac{G\pi a^2 r_1^2}{4\eta_2} + \frac{G\pi r_1^4}{4} \left( \frac{1}{2\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} \right) = 5,03 \text{ l/s}$$

qui est proche de l'estimation, et

$$q_2 = \frac{G\pi(a^2 - r_1^2)^2}{8\eta_2} = 0,456 \text{ l/s} = 0,090q_1$$

qui est bien négligeable, en première approximation, devant  $q_1$ . D'autre part

$$V_1 = \frac{Ga^2}{4\eta_2} + \frac{Gr_1^2}{4} \left( \frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} \right) = 2,11 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{Ga^2}{4\eta_2} = 13,7 \text{ m/s} \quad (\text{C.17})$$

en cohérence avec (C.14) et (C.16). Enfin le tracé des fonctions  $v_1$  et  $v_2$  donne le graphe rouge sur la figure C.1b, qui est bien proche du graphe noir basé sur les approximations de la question 10.2.

**C** Dans le cas où le fluide le plus visqueux est à l'extérieur, i.e.  $M = \eta_1/\eta_2 < 1$ , on a au contraire une réduction du débit en diphasique. Ceci peut s'établir en revenant à l'étude à perte de pression motrice fixée de la question 8. D'après

$$Q_1 = 2R^2M + R^4(1 - 2M),$$

lorsque  $M < 1$  la fonction  $Q_1(R)$  est croissante sur  $[0,1]$ , et a une allure très différente de celle représentée sur la figure C.1a...

**D** L'effet de lubrification mis en évidence ici existe dans les canaux naturels de certains gisements pétroliers, où le pétrole est chassé par de l'eau additionnée de tensio-actifs, de sorte que cette eau mouille bien les parois rocheuses et ne se mélange pas au pétrole<sup>2</sup>. Il peut aussi exister dans certains procédés de co-extrusion.

2. Je remercie Mikhail Panfilov du Lemta pour une discussion sur ce sujet.

### C.3 Corrigés du chapitre 3 - Modèle du fluide parfait

**Problème 3.1** *Écoulements plans produits par un gradient de pression oscillant*

1  $(\overline{\nabla \bar{v}}) \cdot \bar{v} = \bar{0}$ , on a donc affaire à un problème *linéaire*.

2  $p = -Gx \cos(\omega t) + p_{\text{atm}} + P \cos(\omega t) - \rho g y$  avec  $G = P/L$ .

3.1  $v = V \sin(\omega t)$  avec  $V = G/(\rho\omega)$  : **oscillations en bloc** du fluide. Le déphasage entre l'oscillation de pression et l'oscillation de vitesse correspond à un **retard** de celle-ci, dû à l'**inertie** du fluide. Inertie aussi visible dans le dénominateur en  $\rho\omega$  dans l'amplitude des oscillations de vitesse : **plus le fluide est lourd moins il oscille ; plus les oscillations de pression sont rapides moins le fluide oscille**, car il ne peut suivre en masse des oscillations trop rapides.

3.2  $\bar{u} = \frac{V}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \bar{e}_x$  : oscillations en opposition de phase de la position par rapport à la pression, caractéristiques d'une **réponse mécanique à une force**, cf. l'équation que l'on écrirait pour un point matériel

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F = F_0 \cos(\omega t) \iff x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t) + \text{constante}.$$

Toutes les « particules matérielles » du fluide parfait réagissent ainsi comme des particules « inertielles » indépendantes.

4.1 De manière générale,  $v$  vérifie une équation aux dérivées partielles à coefficients réels de la forme

$$L v = G \cos(\omega t) \tag{C.18}$$

où  $L$  est un opérateur différentiel. Si on admet que l'on peut trouver une solution en complexes, telle que

$$L v_c = G e^{i\omega t},$$

alors par conjugaison de cette équation<sup>3</sup>

$$L v_c^* = G e^{-i\omega t},$$

donc, par demi somme de ces deux dernières équations,  $v = \text{Re} v_c$  est bien solution de l'équation réelle (C.18). Au final, ici,

$$v_c(y) = iV \left[ \frac{\cosh(ky)}{\cosh(kb)} - 1 \right] \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}.$$

4.2 Si  $\nu \rightarrow +\infty$  alors  $k \rightarrow 0$  donc  $v_c(y) \rightarrow \frac{\omega b^2}{2\nu} V (1 - y^2/b^2) = \frac{b^2 G}{2\eta} (1 - y^2/b^2)$ ,

profil d'écoulement de Poiseuille avec une amplitude d'autant plus petite que  $\eta$  est grande.

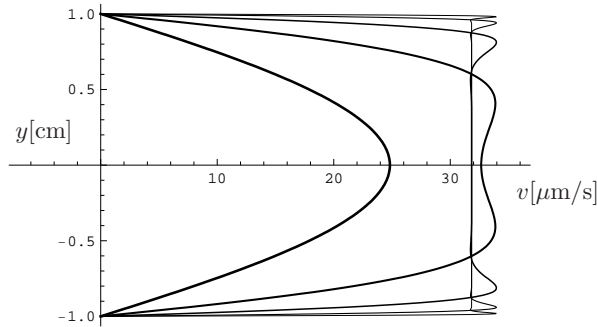
4.3  $V_c = iV \left[ \frac{\tanh(kb)}{kb} - 1 \right]$ . Si  $\nu \rightarrow 0$  alors  $k = K(1+i)$  avec  $K = \sqrt{\omega/(2\nu)}$  devient grand en module, i.e.  $K \rightarrow +\infty$ , d'où  $V_c \sim -iV \left( 1 - \frac{1}{kb} \right) \rightarrow -iV$ .

3. L'étoile désignant la conjugaison complexe.

En moyenne sur  $y$ , le comportement d'un fluide faiblement visqueux est semblable à celui d'un fluide parfait. Ceci est vrai si  $kb \gg 1$  i.e.  $\omega \gg \nu/b^2$ , soit naturellement la relation d'ordonnancement qui permet de négliger le terme visqueux dans l'équation de Navier-Stokes devant le terme inertiel de dérivée de la vitesse par rapport au temps.

4.4  $(b^2\omega)/\nu = 3,1 \cdot 10^4 \implies V_c \simeq -iV = -32 i \mu\text{m/s}$ .

4.5 Courbes de  $v(y, t = \pi/(2\omega))$  en faisant varier la viscosité  $\nu$  de  $10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$  (trait le plus épais) à  $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (trait le plus fin), en passant par les valeurs  $(10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}) \text{ m}^2/\text{s}$ ; on passe donc de traits épais à fins d'une situation dominée par la viscosité à une situation dominée par l'inertie :



Des couches limites se mettent en place pour réconcilier la solution de type « fluide parfait », valable à haute fréquence ou faible viscosité et pas trop près des parois, avec les conditions d'adhérence au bord.

**Exercice 3.1 Modes de ballonnement d'une cuve rectangulaire**

1 À cause de l'isotropie du problème dans le plan  $xy$ , on peut superposer des solutions de la forme

$$\eta = A \cos(\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{x}} - \omega t), \quad \phi = A \frac{\omega}{k \sinh(kh)} \sin(\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{x}} - \omega t) \cosh(kz)$$

avec  $\bar{\mathbf{k}} = q\bar{\mathbf{e}}_x + p\bar{\mathbf{e}}_y$  le vecteur d'onde,  $k = \|\bar{\mathbf{k}}\|$  le nombre d'onde,  $\omega = \omega(k)$  donnée par la relation de dispersion (3.27). Une onde stationnaire s'obtient en superposant une onde droite et une onde gauche ( $\omega \mapsto -\omega$ ),

$$\eta = A \cos(\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{x}} - \omega t) + A \cos(\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{x}} + \omega t) = 2A \cos(\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \cos(\omega t), \quad \phi = \dots,$$

mais on ne peut alors satisfaire toutes les conditions limites latérales. L'idée est de superposer 2 ondes stationnaires de ce type, l'une avec  $\bar{\mathbf{k}} = q\bar{\mathbf{e}}_x + p\bar{\mathbf{e}}_y$ , l'autre avec  $\bar{\mathbf{k}}' = q\bar{\mathbf{e}}_x - p\bar{\mathbf{e}}_y$ . On obtient alors

$$\eta = 4A \cos(qx) \cos(py) \cos(\omega t), \quad \phi = \dots,$$

et les quatre conditions limites latérales peuvent être satisfaites si

$$\exists n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \quad \text{tels que } q = n \frac{\pi}{a}, \quad p = m \frac{\pi}{b}.$$

On a donc *quantification du vecteur d'onde*

$$\bar{\mathbf{k}} = n \frac{\pi}{a} \bar{\mathbf{e}}_x \pm m \frac{\pi}{b} \bar{\mathbf{e}}_y \quad \text{avec } m, n \in \mathbb{N}, \text{ non tous deux nuls,}$$

et *quantification des fréquences angulaires*

$$\omega_{n,m} = \omega(\pi\sqrt{(n/a)^2 + (m/b)^2}) .$$

$\omega_{1,0}^2 = g(\pi/a) \tanh \pi$  analogue à une fréquence de type « pendule »  $\omega^2 = g/l$ ; le mécanisme d'oscillation est d'ailleurs analogue!...  $f_{1,0} = 0,88 \text{ Hz} \longleftrightarrow T_{1,0} = 1,1 \text{ s}$ .

**Problème 3.2 Étude détaillée d'ondes de surface en eau profonde**

1.a Potentiel comme proposé dans l'énoncé car mode normal onde pure.

Conservation de la masse  $\iff \Delta\phi = 0 \implies \Phi(z) = a_+ e^{kz} + a_- e^{-kz}$ .

Vitesse bornée quand  $z \rightarrow -\infty \implies \Phi(z) = a e^{kz}$ .

Condition cinématique à l'interface

$$\implies a = A\omega/k \implies \boxed{\phi = \frac{A\omega}{k} e^{kz} \sin(kx - \omega t)} \tag{C.19}$$

$$\implies \boxed{v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = A\omega e^{kz} \cos(kx - \omega t)} \quad \text{et} \quad \boxed{v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} = A\omega e^{kz} \sin(kx - \omega t)} . \tag{C.20}$$

1.b On peut par exemple poser

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad v_z = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \iff \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{e}}_y \wedge \bar{\nabla}\psi , \tag{C.21}$$

qui conduit bien à l'équivalence

$$dy = 0 \quad \text{et} \quad d\bar{\mathbf{x}} \wedge \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}} \iff dy = 0 \quad \text{et} \quad (d\psi)\bar{\mathbf{e}}_y - \bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{0}} \iff dy = 0 \quad \text{et} \quad d\psi = 0 .$$

On pourrait changer  $\psi$  en son opposé, ce serait aussi une fonction courant...

Par intégration des équations du système (C.21) on obtient par exemple

$$\boxed{\psi = \frac{A\omega}{k} e^{kz} \cos(kx - \omega t)} . \tag{C.22}$$

1.c On explicite la condition dynamique à l'interface, soit la condition de Laplace

$$p - p' = \gamma \operatorname{div} \bar{\mathbf{n}} . \tag{C.23}$$

L'interface étant définie par  $z = \zeta(x,t)$ , on a

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{\bar{\nabla}(z - \zeta)}{\|\bar{\nabla}(z - \zeta)\|} = \bar{\mathbf{e}}_z - (\partial_x \zeta)\bar{\mathbf{e}}_x + O(A^2) \implies \operatorname{div} \bar{\mathbf{n}} = Ak^2 \cos(kx - \omega t) + O(A^2) . \tag{C.24}$$

Le second théorème de Bernoulli appliqué dans l'eau donne

$$p = \alpha(t) - \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} - \rho g z - \rho \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2}$$

et dans l'air  $p' = \beta(t)$ .

Donc, à l'ordre au plus  $A$ , (C.23)  $\iff$

$$\alpha(t) - \beta(t) + \rho \frac{A\omega^2}{k} e^0 \cos(kx - \omega t) - \rho g A \cos(kx - \omega t) = A\gamma k^2 \cos(kx - \omega t) .$$

Moyenne sur  $x \in [0, \lambda] \iff \alpha(t) - \beta(t) = 0$ . D'où

$$\rho \frac{\omega^2}{k} = \rho g + \gamma k^2 \iff \boxed{c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}}. \quad (\text{C.25})$$

Cette relation de dispersion correspond bien à celle du cours,

$$c^2 = \left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}\right) \tanh(kh),$$

où on avait toutefois une couche de liquide de profondeur finie  $h$ . Quand  $h \rightarrow +\infty$ ,  $\tanh(kh) \rightarrow 1$ , d'où la relation de dispersion (C.25).

**2.a**  $k = 0,126 \text{ m}^{-1}$ .

Dans la formule (C.25),

$$\frac{g}{k} \gg \frac{\gamma k}{\rho},$$

le rapport de ces deux termes est de l'ordre de  $8 \cdot 10^6$ . On a donc affaire à une « onde de gravité ». Ainsi

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} = 8,84 \text{ m/s}.$$

**2.b**  $\omega = ck = 1,11 \text{ rad/s} \implies T = 2\pi/\omega = 5,66 \text{ s}$ .

**3.a** Dans l'équation de Navier-Stokes, le terme visqueux associé à l'onde étudiée est proportionnel à

$$\overline{\Delta \mathbf{v}} = \Delta v_x \mathbf{e}_x + \Delta v_z \mathbf{e}_z = \Delta \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \Delta \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z = \frac{\partial \Delta \phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \Delta \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

puisque  $\phi$  est  $C^\infty$  et harmonique. Ce terme nul est donc bien négligeable.

**3.b** Si on prend en compte la viscosité de l'eau, on rajoute à la condition dynamique à l'interface (C.23), réécrite vectoriellement

$$(p - p') \mathbf{\bar{n}} = \gamma \operatorname{div}(\mathbf{\bar{n}}) \mathbf{\bar{n}},$$

des termes de contrainte visqueuse de la forme  $\eta \overline{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{\bar{n}}$ . Comme on a affaire à des ondes de gravité, on va montrer que ces termes sont négligeables par rapport au terme de gravité dans  $p - p'$ , dont l'ordre de grandeur est  $\rho g A$ . En ordre de grandeur

$$\eta \overline{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{\bar{n}} \sim \eta \overline{\nabla \mathbf{v}} \sim \eta k \bar{v} \sim \eta k A \omega$$

d'après (C.20). On a bien

$$A \eta k \omega \ll A \rho g \quad \text{car} \quad R = \frac{\eta k \omega}{\rho g} = \frac{\nu k \omega}{g} \simeq 2 \cdot 10^{-8}.$$

4 Les trajectoires s'obtiennent en résolvant

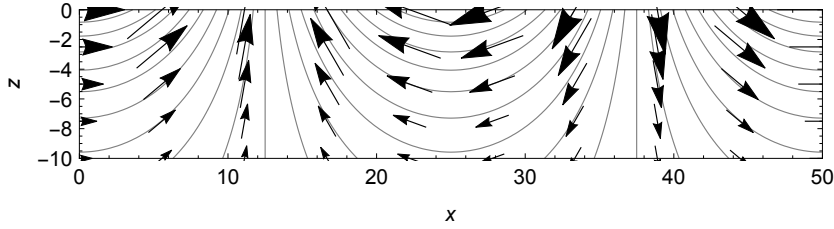
$$\frac{dx}{dt} = v_x(x(t), z(t), t) = A \omega e^{kz(t)} \cos[kx(t) - \omega t], \quad (\text{C.26})$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z(x(t), z(t), t) = A \omega e^{kz(t)} \sin[kx(t) - \omega t], \quad (\text{C.27})$$

muni des conditions initiales

$$x(0) = X, \quad z(0) = X.$$





**Fig. C.2** – Dans le plan  $xOz$ , les coordonnées  $x$  et  $z$  étant indiquées en mètres, lignes de courant et vecteurs vitesses à  $t = 0$  de l'onde de surface étudiée.

Soit un système de deux équations différentielles ordinaires non linéaires d'ordre 1 couplées, le caractère non linéaire de ces équations est ce qui rend leur résolution analytique impossible.

**5.a** À l'aide de Mathematica, en utilisant aussi les options `Contours`, `ContourShading`, `PlotPoints` et `FrameLabel` de `ContourPlot`, `VectorPoints` et `VectorStyle` de `VectorPlot` pour améliorer la qualité du schéma, on obtient la figure C.2.

**5.b** À l'aide de Mathematica, en utilisant aussi quelques options de `ParametricPlot`, on obtient la figure C.3a.

Chaque particule décrit 10 cercles dans le sens horaire, dont les centres se translatent progressivement vers la droite, i.e. dans la direction de propagation de l'onde.

La particule la plus haute, partie de  $z = -1$  m, a une trajectoire centrée sur la ligne  $z \simeq -1,4$  m, avec des cercles de rayon  $R_1 \simeq 0,4$  m, et une translation d'ensemble  $\delta x_1 \simeq 1,3$  m.

La particule la plus basse, partie de  $z = -5$  m, a une trajectoire centrée sur la ligne  $z \simeq -5,25$  m, avec des cercles de rayon  $R_2 \simeq 0,25$  m, et une translation d'ensemble  $\delta x_2 \simeq 0,5$  m.

Le fait que les trajectoires soient de type circulaire n'est pas étonnant, au vu du champ de vitesse de la figure C.2. En effet, quand on raisonne à position fixée, et que le temps augmente, on doit translater mentalement la figure C.2 vers la droite, d'où un champ de vitesse « tournant » dans le sens horaire.

**6.a** Par injection des développements de l'énoncé dans l'équation (C.26) pour  $x(t)$ , on obtient

$$A\dot{x}_1 + A^2\dot{x}_2 + O(A^3) = A\omega V_x[x_0 + Ax_1 + O(A^2), z_0 + Az_1 + O(A^2), t] \quad (\text{C.28})$$

avec

$$V_x(x, z, t) = e^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

donc par développement de Taylor

$$\begin{aligned} & V_x[x_0 + Ax_1 + O(A^2), z_0 + Az_1 + O(A^2), t] \\ = & V_x(x_0, z_0, t) + \frac{\partial V_x}{\partial x}(x_0, z_0, t) Ax_1 + \frac{\partial V_x}{\partial z}(x_0, z_0, t) Az_1 + O(A^2) \\ = & e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t) - k e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t) Ax_1 + k e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t) Az_1 + O(A^2). \end{aligned}$$

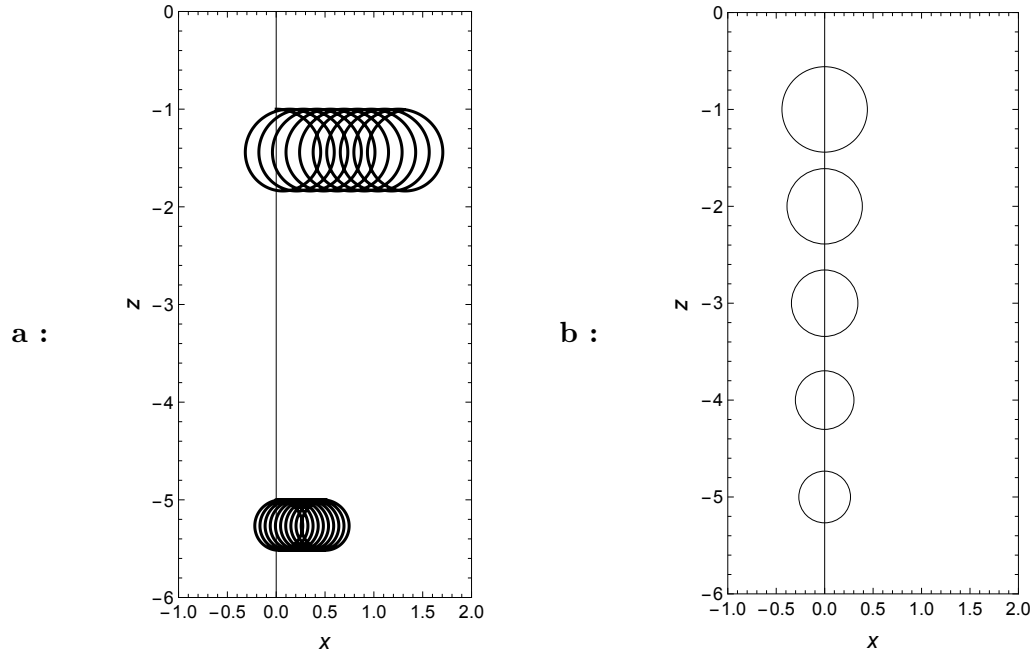
En identifiant les coefficients de  $A$  et  $A^2$  dans l'équation (C.28), on obtient

$$\dot{x}_1 = \omega e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t), \quad (\text{C.29})$$

$$\dot{x}_2 = k\omega e^{kz_0} [\cos(kx_0 - \omega t) z_1 - \sin(kx_0 - \omega t) x_1]. \quad (\text{C.30})$$

De même, par injection des développements de l'énoncé dans l'équation (C.27) pour  $z(t)$ , on obtient

$$A\dot{z}_1 + A^2\dot{z}_2 + O(A^3) = A\omega V_z[x_0 + Ax_1 + O(A^2), z_0 + Az_1 + O(A^2), t] \quad (\text{C.31})$$



**Fig. C.3** – Dans le même plan que figure C.2, **a** : trajectoires des deux particules fluides définies dans l'énoncé, calculées numériquement avec Mathematica; **b** : trajectoires générales calculées analytiquement par un développement asymptotique à l'ordre  $A^1$ , équations (C.35) et (C.36).

avec

$$V_z(x, z, t) = e^{kz} \sin(kx - \omega t)$$

donc par développement de Taylor

$$\begin{aligned} & V_z[x_0 + Ax_1 + O(A^2), z_0 + Az_1 + O(A^2), t] \\ &= e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t) + k e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t) Ax_1 + k e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t) Az_1 + O(A^2). \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

En identifiant les coefficients de  $A$  et  $A^2$  dans l'équation (C.31), on obtient

$$\dot{z}_1 = \omega e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t), \quad (\text{C.33})$$

$$\dot{z}_2 = k\omega e^{kz_0} [\cos(kx_0 - \omega t) x_1 + \sin(kx_0 - \omega t) z_1]. \quad (\text{C.34})$$

**6.b** Les solutions de valeur moyenne nulle des équations différentielles ordinaires (C.29) et (C.33) sont

$$x_1(t) = e^{kz_0} \sin(\omega t - kx_0) = e^{kz_0} \cos(\pi/2 - \omega t + kx_0), \quad (\text{C.35})$$

$$z_1(t) = e^{kz_0} \cos(\omega t - kx_0) = e^{kz_0} \sin(\pi/2 - \omega t + kx_0). \quad (\text{C.36})$$

On a, en cohérence avec ce qui a été trouvé numériquement, des *trajectoires circulaires*, parcourues dans le sens indirect, i.e., horaire, de rayon

$$\boxed{R = A e^{kz_0} = A e^{2\pi z_0/\lambda}}. \quad (\text{C.37})$$

Ce rayon diminue avec la profondeur, en partant de la valeur maximale  $R = A$  à l'interface, cohérente avec le fait que le déplacement maximum de l'interface est  $A$ . De plus, l'échelle caractéristique de décroissance dans la direction  $-z$  est  $\lambda$ , échelle des gradients de vitesse, ceci est aussi cohérent.

Ces trajectoires sont montrées sur la figure C.3b.

Dans le cas de la particule fluide haute étudiée en question 5, de trajectoire centrée en  $z_0 \simeq -1,4$  m, on prédit un rayon de cercle  $R = 0,42$  m proche du rayon mesuré numériquement  $R_1 \simeq 0,4$  m.

Dans le cas de la particule fluide basse étudiée en question 5, de trajectoire centrée en  $z_0 \simeq -5,25$  m, on prédit un rayon de cercle  $R = 0,26$  m proche du rayon mesuré numériquement  $R_2 \simeq 0,25$  m.

Ces comparaisons et la cohérence physique déjà discutée valident ce calcul à l'ordre  $A$ .

6.c On obtient

$$\dot{x}_2 = e^{2kz_0} \omega k \quad \text{et} \quad \dot{z}_2 = 0. \quad (\text{C.38})$$

La deuxième équation traduit le fait qu'il n'y a pas de mouvement à l'ordre  $A^2$  dans la direction verticale. La première traduit bien l'existence d'une *vitesse de dérive* dans la direction  $x$ . Si on rétablit le facteur  $A^2$  devant  $x_2$ , cette vitesse de dérive est

$$C = A^2 \dot{x}_2 = A^2 e^{2kz_0} \omega k = R^2 \omega k = c R^2 k^2 = 4\pi^2 c \left(\frac{A}{\lambda}\right)^2 e^{2kz_0}. \quad (\text{C.39})$$

La valeur maximale de cette vitesse, au niveau de l'interface  $z_0 = 0$ , est

$$C = A^2 \omega k = 3,5 \text{ cm/s}. \quad (\text{C.40})$$

La vitesse (C.39) décroît avec la profondeur, sur l'échelle  $\lambda$ , ce qui semble cohérent.

Dans le cas de la particule fluide haute étudiée en question 5, de trajectoire centrée en  $z_0 \simeq -1,4$  m, on prédit une dérive vers la droite, pendant  $10T$ ,  $\delta x = A^2 e^{2kz_0} 20\pi k = 1,4$  m proche de la valeur mesurée numériquement  $\delta x_1 \simeq 1,3$  m.

Dans le cas de la particule fluide basse étudiée en question 5, de trajectoire centrée en  $z_0 \simeq -5,25$  m, on prédit une dérive vers la droite, pendant  $10T$ ,  $\delta x = A^2 e^{2kz_0} 20\pi k = 0,53$  m proche de la valeur mesurée numériquement  $\delta x_2 \simeq 0,5$  m.

Ces comparaisons valident ce calcul.

Physiquement, ce qui crée la dérive est le fait que lorsque la particule fluide en mouvement est « haute » sur sa trajectoire quasi circulaire horaire, comme elle est plus près de l'interface sa vitesse, vers la droite, est plus grande en valeur absolue qu'aux moments où elle est « basse » sur sa trajectoire quasi circulaire, de vitesse vers la gauche, à cause du facteur  $e^{kz}$  dans l'expression de  $v_x$  (C.20).

### Compléments sur le problème 3.2 :

- Le phénomène mis en évidence ici est la « *dérive de Stokes* ». Je vous recommande de consulter la page Wikipedia

[https://en.wikipedia.org/wiki/Stokes\\_drift](https://en.wikipedia.org/wiki/Stokes_drift)

et en particulier l'animation qu'elle contient,

[https://en.wikipedia.org/wiki/File:Deep\\_water\\_wave.gif](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Deep_water_wave.gif).

Ce phénomène illustre bien la différence, assez subtile, qui existe entre champs de vitesse eulérien et lagrangien !..

- La méthode asymptotique mise en place dans la question 6 peut être qualifiée de « *méthode faiblement non linéaire* ». Elle permet en effet de transformer le problème non linéaire (C.26), (C.27) en une suite de problèmes linéaires inhomogènes (C.29), (C.30), (C.33), (C.34)...

**Problème 3.3** *Instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor*

1  $a = \rho + \rho'$ ,  $b = ik(\rho U + \rho' U')$ ,  $c = (\rho - \rho')gk - \rho k^2 U^2 - \rho' k^2 U'^2 + \gamma k^3$ .

2 Discriminant réduit

$$\Delta' = b^2 - ac = \underbrace{\rho \rho' k^2 (U - U')^2}_{\text{terme de KH déstabilisant}} + \underbrace{(\rho + \rho')(\rho' - \rho)gk}_{\text{terme de RT déstabilisant}} - \underbrace{(\rho + \rho')\gamma k^3}_{\text{terme de tension de surface stabilisant}}$$

donc

$$\sigma_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = -ik \frac{\rho U + \rho' U'}{\rho + \rho'} \pm \frac{\sqrt{\Delta'}}{\rho + \rho'}$$

peut présenter une partie réelle positive, dénotant une instabilité, si  $\Delta' > 0$ . Alors

$$\sigma_+ = -ikC + \sigma_r$$

avec  $C$  la vitesse de phase de l'onde amplifiée considérée, moyenne pondérée par les masses volumiques des vitesses des 2 fluides.

Dans le cas du vent au-dessus de l'eau, le nombre d'onde correspondant au  $\Delta'/k$  maximum est

$$k = \frac{\rho \rho' V^2}{2(\rho + \rho')\gamma},$$

d'où un seuil d'instabilité

$$V = \left[ \frac{4g\gamma(\rho - \rho')(\rho + \rho')^2}{\rho^2 \rho'^2} \right]^{1/4} \simeq \left( \frac{4g\gamma\rho}{\rho'^2} \right)^{1/4} \simeq 6,7 \text{ m/s}.$$

**Problème 3.4** *Rôle de la tension superficielle dans diverses instabilités*

I.1 On mesure, sur les 4 ondulations bien visibles mais pas encore trop amples,  $\lambda/R_0 \simeq 11$ .

II.1.1 Zone considérée rectangle  $\implies S = \lambda l_y$ .

II.1.2

$$\frac{S_n}{l_y} = \int_0^\lambda ds(x) = \int_0^\lambda \left[ 1 + \frac{1}{2} A^2 k^2 \sin^2(kx) \right] dx + O(A^4) = \lambda + \frac{1}{4} A^2 k^2 \lambda + O(A^4).$$

II.1.3  $A \uparrow \implies S_n > S$ , perturbation  $\implies$  augmentation de l'aire de l'interface  $\implies$  la tension superficielle s'y oppose. Ce **rôle stabilisant** a bien été mis en évidence dans le problème 2.4.

II.2.1  $S = 2\pi R_0 \lambda$ ,  $V = \pi R_0^2 \lambda$ .

II.2.2

$$V_n = \int_{z=0}^\lambda \int_{r=0}^{R(z)} \int_{\theta=0}^{2\pi} r dr d\theta dz = \pi R_1^2 \lambda \left( 1 + \frac{A^2}{2} \right) = V \iff R_1 = R_0 \left[ 1 - \frac{A^2}{4} + O(A^4) \right]$$

$$S_n = \int_{z=0}^\lambda \int_{\theta=0}^{2\pi} R(z) d\theta ds(z) = 2\pi \int_{z=0}^\lambda R_1 (1 + A \cos kz) \sqrt{1 + R_1^2 A^2 k^2 \sin^2(kz)} dz$$

$$S_n = 2\pi R_1 \lambda \left[ 1 + \frac{1}{4} R_1^2 A^2 k^2 + O(A^3) \right] = S \left[ 1 + \frac{A^2}{4} (R_0^2 k^2 - 1) \right]$$

**II.2.3** Effets de tension superficielle favorables si et seulement si

$$S_n < S \iff R_0^2 k^2 < 1 \iff \boxed{k < k_c = 1/R_0} \iff \boxed{\lambda > \lambda_c = 2\pi R_0} .$$

On s'attend à une *instabilité de grande longueur d'onde*.

La longueur d'onde mesurée partie I,  $\lambda \simeq 8R_0$ , est bien supérieure à  $\lambda_c$ .

**III.1** Terme visqueux négligeable devant terme inertiel

$$\iff \eta \Delta \bar{v} \ll \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \iff \frac{\nu}{R_0^2} \ll \sigma .$$

Effet de pesanteur négligeable devant effet de tension superficielle

$$\iff \delta p_{\text{pesanteur}} = \rho g R_0 \ll \delta p_{\text{tension superficielle}} = \frac{\gamma}{R_0} \iff R_0 \ll l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \text{ longueur capillaire.}$$

**III.2** Pression  $p_0$  bien uniforme dans la configuration de base au repos, puisque l'équation d'Euler donne  $\bar{\nabla} p_0 = \bar{\mathbf{0}}$ . Condition de saut de Laplace,

$$p_0 - p_g = \gamma/R_0 \iff p_0 = p_g + \gamma/R_0 .$$

$$\text{III.3 } \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\bar{\nabla}(p - p_0) \implies \Delta(p - p_0) = 0 \iff P''(r) + \frac{P'(r)}{r} - k^2 P(r) = 0 .$$

$$\text{III.4 } V_r(r) = -\frac{1}{\rho\sigma} P'(r) = -\frac{bk}{\rho\sigma} I_0'(kr) .$$

**III.5**

$$\frac{d}{dt}[r - R(z,t)] = 0 \iff v_r = \frac{\partial R}{\partial t} \iff V_r(R_0) = a\sigma \iff b = -\frac{\rho\sigma^2}{kI_0'(kR_0)} a .$$

$a \equiv \ell$ ,  $b \equiv p$  et  $\sigma \equiv t^{-1}$ .  $I_0$  et ses dérivées, lorsqu'elles sont appliquées à la variable  $kR_0$  adimensionnelle, sont adimensionnelles. Ainsi

$$\frac{b}{a} \equiv m \ell^{-2} t^{-2} \equiv \frac{p}{\ell} .$$

**III.6** L'interface étant définie par  $F(r,z,t) = r - R(z,t) = 0$ ,

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{\bar{\nabla} F}{\|\bar{\nabla} F\|} = \bar{\mathbf{e}}_r + ak \sin(kz) \exp(\sigma t) \bar{\mathbf{e}}_z + O(a^2)$$

$$\implies \text{div} \bar{\mathbf{n}} = \frac{1}{r} + ak^2 \cos(kz) \exp(\sigma t) + O(a^2) .$$

Pression dans le gaz ambiant reste constante, parce qu'il est parfait sans inertie et sans poids

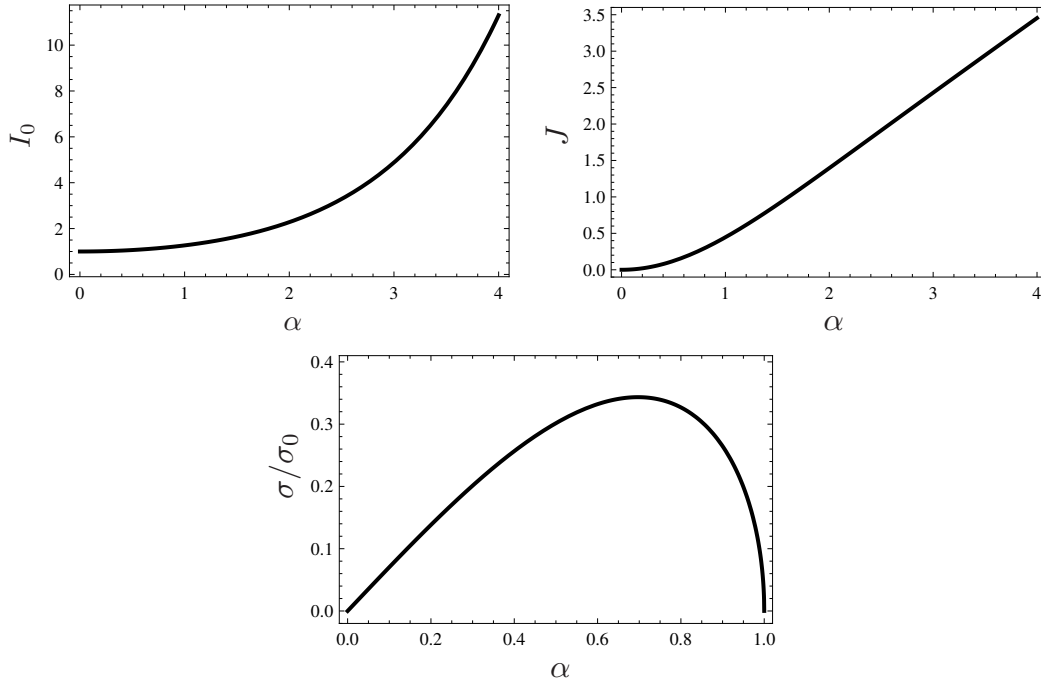
$$\implies p - p_g = \gamma \text{div} \bar{\mathbf{n}}$$

$$\iff p_0 + bI_0(kR_0) \cos(kz) \exp(\sigma t) - p_g = \frac{\gamma}{R_0} \left[ 1 - \frac{a}{R_0} \cos(kz) \exp(\sigma t) \right] + \gamma ak^2 \cos(kz) \exp(\sigma t)$$

$$\iff bI_0(kR_0) = \gamma a \left( -\frac{1}{R_0^2} + k^2 \right) \tag{C.41}$$

$\iff$  relation bien indépendante de la petite amplitude  $a$  de l'ondulation,

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\gamma}{\rho R_0^3} \frac{\alpha I_0'(\alpha)}{I_0(\alpha)} (1 - \alpha^2)} \quad \text{avec} \quad \alpha = R_0 k , \quad J(\alpha) = \frac{\alpha I_0'(\alpha)}{I_0(\alpha)} . \tag{C.42}$$

**III.7**


Maximum de la fonction  $\sigma(\alpha)/\sigma_0$  vaut 0,34, qui est bien d'ordre 1 ; atteint pour  $\alpha = \alpha_0 = 0,7$ .

**III.8.1**

$$\alpha = \frac{k}{k_c} = 0,7 \iff \lambda = \frac{\lambda_c}{0,7} \simeq 9R_0$$

de l'ordre de grandeur, et même très proche, de la longueur d'onde mesurée partie I, soit  $8,2R_0$ .

**III.8.2** Hypothèse : expérience sous 1 atmosphère et à 20°C  $\implies \gamma = 0,074 \text{ N/m}$  et  $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$

$$\implies \sigma_0 = \sqrt{\gamma/(\rho R_0^3)} = 966 \text{ s}^{-1} \iff 1/\sigma_0 = 1,0 \text{ ms temps très bref.}$$

**III.8.3** Modèle du fluide parfait valable car  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

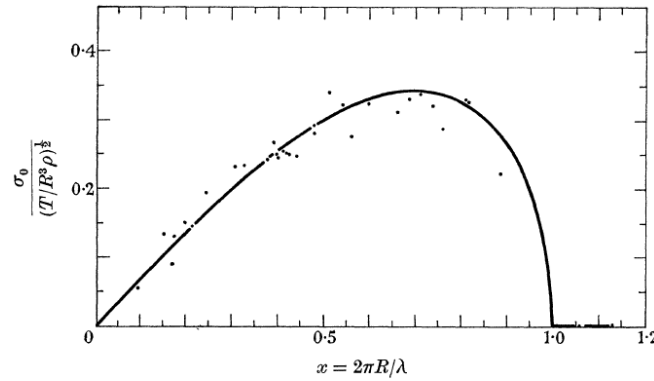
$$\implies \frac{\nu}{R_0^2 \sigma_0} = 5,6 \cdot 10^{-3} \ll 1 .$$

Effets de pesanteur approximativement négligeables seulement, puisque  $R_0 = 0,43 \text{ mm}$  est inférieur à la longueur capillaire  $l_c = 2,7 \text{ mm}$ , sans être toutefois très inférieur.

**Compléments sur le problème 3.4**

- Le fait que le système soit non dissipatif suggère que, dans le régime stable  $k > k_c$ , la perturbation ne sera pas amortie mais seulement neutre, donc oscillante. Si on passe en notations complexes, le multiplicateur du temps  $\sigma$  doit donc être une fonction de  $k/k_c$  à valeurs réelles positives si  $k < k_c$ , imaginaires pures si  $k > k_c$ . D'où la dépendance en  $\sigma_0 F(k/k_c) \sqrt{1 - (k/k_c)^2}$  avec  $F$  de classe  $C^\infty$ .
- On peut donner un mécanisme physique fin de cette instabilité en remarquant que l'expression de la pression à l'interface déduite de (C.41),

$$p = p_g + \frac{\gamma a}{R_0^2} (-1 + R_0^2 k^2) \cos(kz) \exp(\sigma t) ,$$



**Fig. C.4** – Figure tirée de [Donnelly & Glaberson \(1966\)](#), présentant la courbe des taux de croissance en fonction du nombre d'onde spatial, pour l'*instabilité de Rayleigh-Plateau d'un jet d'eau dans de l'air*. Les points sont les mesures expérimentales, la courbe continue est la loi théorique (C.42).

traduit la formule plus géométrique

$$p = p_g + \gamma \left( \frac{1}{R(z,t)} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}(z,t) \right),$$

qui fait apparaître les deux courbures principales  $1/R$  dans la section du jet et  $-R''$  dans un plan axial. Pour une longueur d'onde grande, le premier terme domine. Il impose une sur-pression dans les zones où  $R$  est faible, une sous-pression dans les zones où  $R$  est élevé. Ce gradient de pression induit un écoulement des zones minces vers les zones épaisses, qui amplifie la perturbation de l'interface.

- [Donnelly & Glaberson \(1966\)](#) ont utilisé un haut-parleur pour imposer des perturbations de fréquence temporelle contrôlée au jet d'eau. À cause de l'écoulement d'ensemble du jet, cette période temporelle imposée se traduit par une période spatiale imposée. Cette période et le taux de croissance spatial sur une longueur d'onde étaient alors mesurés géométriquement en prenant des photos avec un flash très bref ( $7 \mu\text{s}$ ). En faisant l'hypothèse que cette longueur d'onde correspond à une période temporelle, le taux de croissance spatial a été transformé en taux de croissance temporel. Ainsi [Donnelly & Glaberson \(1966\)](#) ont pu vérifier l'existence de l'instabilité de Rayleigh-Plateau dans la bonne gamme de nombre d'onde, avec un accord quantitatif avec la théorie de Rayleigh, cf. la figure C.4.

### Problème 3.5 Étude de la stabilité d'un fluide pesant continûment stratifié

1.a Conservation de la masse d'un élément de volume d'eau salée.

1.b Fluide *parfait* ; équation d'*Euler*...

2 Loi « hydrostatique généralisée »  $dp = -\rho g dz$  i.e.  $p_0(z) = p_{00} - \int_0^z \rho_0(\zeta) g d\zeta$ .

3.a

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\bar{\nabla} \rho_0) \cdot \bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0' v_z = 0,$$

$$\text{div}(\bar{\mathbf{v}}) = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} = -\bar{\nabla} p_1 + \rho_1 \bar{\mathbf{g}}.$$

**3.b** Problème *isotrope* dans le plan horizontal  $Oxy$ , toutes les directions horizontales jouant le même rôle. Mode de Fourier de perturbation de vecteur d'onde  $\bar{\mathbf{k}}$  dans le plan horizontal donné : on peut choisir l'axe des  $x$  dans la direction de  $\bar{\mathbf{k}}$ . Alors  $k = |\bar{\mathbf{k}}| =$  paramètre géométrique = **nombre d'onde**  $\longleftrightarrow$  période spatiale de la perturbation  $\lambda = 2\pi/k$ .

**3.c**  $R = -\frac{1}{\sigma} \rho'_0 W$  et  $U = \frac{i}{k} W'$ .

**3.d**  $P = -\frac{\sigma}{k^2} \rho_0 W'$ ,  $\rho_0 \sigma W = \frac{\sigma}{k^2} (\rho_0 W')' + \frac{g}{\sigma} \rho'_0 W$ .

**3.e**  $W(0) = W(h) = 0$ .

**4.a**  $v_x = -\frac{1}{k} W' \sin(kx)$  et  $v_z = W \cos(kx)$ .

**4.b**  $e_c = \frac{1}{4hk^2} \int_0^h \rho_0 [(W')^2 + k^2 W^2] dz$ .

**4.c**  $\mu(z) = \frac{g}{4h} \rho'_0(z)$ .

**4.d** *Masse volumique dans la configuration initiale décroît avec l'altitude,*

$$\rho'_0(z) \leq 0 \implies \sigma^2 < 0 \iff \sigma = \pm i\omega \iff \text{configuration } \textit{marginale\ment stable}.$$

*Masse volumique dans la configuration initiale croît avec l'altitude,*

$$\rho'_0(z) \geq 0 \implies \sigma^2 > 0 \iff \text{configuration } \textit{instable}.$$

Instabilité produite par la pesanteur, puisque  $\sigma$  est proportionnel à  $\sqrt{g}$ , lorsque du fluide lourd surmonte du fluide léger : type **Rayleigh-Taylor**.

**5.a**  $b = \alpha/2$  et  $c = k^2(\alpha g/\sigma^2 - 1)$ .

**5.b** Condition limite en  $z = 0$  donne  $A_+ + A_- = 0 \implies W(z) = A [\exp(q_+z) - \exp(q_-z)]$ .  
Condition limite en  $z = h$  donne

$$\begin{aligned} \exp(q_+h) = \exp(q_-h) &\iff \exp[(q_+ - q_-)h] = 1 \iff \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } (q_+ - q_-)h = 2in\pi \\ &\iff \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b^2 - c = -\frac{n^2\pi^2}{h^2} \end{aligned}$$

$$\implies \beta = \frac{\alpha^2}{4k^2} \text{ et } \gamma = \frac{1}{k^2 h^2}.$$

Changer  $n$  en  $-n \iff$  échanger les rôles de  $q_+$  et  $q_-$ ,  $\sigma$  étant inchangé. Le mode de perturbation est alors inchangé (au signe près, éventuellement). On peut donc supposer  $n \geq 0$ . D'autre part  $n = 0 \implies q_+ = q_- \implies W = 0$ , ce qui est absurde puisqu'alors le mode de perturbation est nul. On a donc  $n > 0$ .

**5.c** Signe de  $\sigma^2 =$  signe de  $\alpha$ ...

**5.d**  $n = 1$ .

**5.e** Modèle du fluide parfait n'est pas dissipatif : lorsque  $k \rightarrow +\infty$  les effets de diffusion visqueuse ne sont sûrement plus négligeables.



5.f

$$\sigma^2 = \frac{g/h}{1 + 1/4 + \pi^2} = 3,53 \text{ s}^{-2} \iff \sigma = 1,88 \text{ s}^{-1} .$$

Dans l'équation de Navier-Stokes, terme visqueux négligeable devant le terme de dérivée temporelle,

$$\frac{\eta \overline{\Delta \bar{v}}}{\rho_0 \partial \bar{v} / \partial t} \simeq \frac{\eta k^2}{\rho_0 \sigma} \simeq 9 \cdot 10^{-6} \ll 1 .$$

Dans l'équation d'évolution de la concentration  $c_s$  en sel,

$$\frac{dc_s}{dt} = D \Delta c_s ,$$

avec  $D \simeq 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ ,

$$\frac{D \Delta c_s}{\partial c_s / \partial t} \simeq \frac{D k^2}{\sigma} \simeq 9 \cdot 10^{-9} \ll 1 .$$

On a donc bien  $c_s$  gelée dans le mouvement donc  $\rho = \rho(c_s)$  gelée dans le mouvement. Ainsi, pour un tel nombre d'onde modéré, le modèle est très bon.

### Compléments sur le problème 3.5

Je me suis inspiré du chapitre X de [Chandrasekhar \(1961\)](#) et de l'article [Rayleigh \(1883\)](#).

Dans un cas instable de la partie 5, avec  $n = 1$  maximisant le taux de croissance,  $k = \alpha = 1/h$ , les calculs de la question 5.b montrent que  $q_{\pm} = -\alpha/2 \pm i\pi\alpha$  donc

$$W(z) = A [\exp(-\alpha z/2 + i\pi\alpha z) - \exp(-\alpha z/2 - i\pi\alpha z)] = A \exp(-\alpha z/2) 2i \sin(\pi\alpha z)$$

qui en redéfinissant l'amplitude  $A$  peut bien être choisie réelle,

$$W(z) = A \exp(-\alpha z/2) \sin(\pi\alpha z) \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R} .$$

On peut introduire une fonction courant  $\psi$  telle que

$$v_x = \partial\psi/\partial z \quad \text{et} \quad v_z = -\partial\psi/\partial x$$

i.e. en complexes

$$W = -ik\Psi \iff \Psi = \frac{i}{k}W = \frac{iA}{\alpha} \exp(-\alpha z/2) \sin(\pi\alpha z) .$$

En réels à  $t = 0$  on obtient alors

$$\begin{aligned} v_z &= \text{Re}[W(z) \exp(ikx)] = A \cos(\alpha x) \exp(-\alpha z/2) \sin(\pi\alpha z) , \\ \psi &= \text{Re}[\Psi(z) \exp(ikx)] = -\frac{A}{\alpha} \sin(\alpha x) \exp(-\alpha z/2) \sin(\pi\alpha z) . \end{aligned}$$

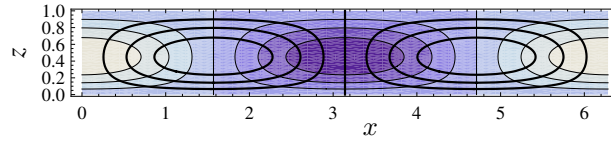
D'autre part la formule de la question 3.c donne

$$R = -\frac{1}{\sigma} \rho'_0 W = -\frac{\alpha A \rho_{00}}{\sigma} \exp(\alpha z/2) \sin(\pi\alpha z) ,$$

d'où en réels à  $t = 0$

$$\rho_1 = \text{Re}[R \exp(ikx)] = -\frac{\alpha A \rho_{00}}{\sigma} \cos(\alpha x) \exp(\alpha z/2) \sin(\pi\alpha z) .$$

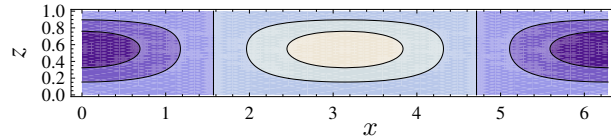
À partir de ces formules on peut représenter les iso-contours de  $\psi$  (les lignes de courant !) et  $v_z$  (ces niveaux là étant caractérisés par des tons de gris), en prenant  $h = 1$  :



Ceci montre une structure en « rouleaux » contrarotatifs, avec un courant ascendant (resp. descendant) en  $x = 0$  (resp.  $\pi$ ). La correction de masse volumique associée, gouvernée par l'équation de conservation de la masse linéarisée,

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho'_0 v_z ,$$

est négative (resp. positive) au niveau du courant ascendant (resp. descendant), où on advecte du fluide léger (resp. lourd), cf. les iso-contours de  $\rho_1$  :



La rétroaction sur la vitesse verticale, donnée en ne gardant que les termes de couplage  $v_z \leftrightarrow \rho_1$  dans la composante verticale de l'équation d'Euler linéarisée,

$$\rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\rho_1 g ,$$

accélère (resp. décélère) le fluide léger (resp. lourd) au niveau du courant ascendant (resp. descendant). Ceci est la **boucle de rétroactions positives**,

$$v_z \rightarrow \rho_1 \rightarrow v_z ,$$

qui crée l'instabilité.

Le terme de pression dans l'équation  $(3L)_z$  ne joue pas un rôle « moteur » dans l'instabilité, puisqu'il n'est pas proportionnel à  $g$ .

### Problème 3.6 Modélisation de phénomènes en lien avec la cavitation

**I.1** Loi des gaz parfaits.

**I.2** Loi de Laplace :

$$p_{\text{intérieur}} - p_{\text{extérieur}} = p_g + p_v - p_\infty = \gamma \operatorname{div} \bar{\mathbf{n}}$$

avec  $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{e}}_r$  en coordonnées sphériques donne

$$p_\infty = p_\infty^{\text{eq}}(R) = \frac{K}{R^3} + p_v - \frac{2\gamma}{R} . \quad (\text{C.43})$$

**I.3**  $R_c = \sqrt{\frac{3K}{2\gamma}}$ ,  $p_c = p_v - \frac{4\gamma}{3R_c}$ .

## I.4

1. La bulle évolue vers la nouvelle position d'équilibre en position 1' sur la figure **c** du sujet : cette branche de rayons  $[0, R_c]$  est « **stable** », il n'y a pas cavitation.
2. Il n'y a plus aucune possibilité de rayon d'équilibre, la bulle grossit et devient macroscopique : il y a **cavitation**.
3.  $\forall p'_\infty$  il n'y a plus aucune possibilité de rayon d'équilibre supérieur à  $R$ , la bulle grossit et devient macroscopique : cette branche de rayons  $[R_c, +\infty[$  est « **instable** », il y a **cavitation**.

Ainsi on a cavitation soit si la dépression est suffisante (cas 2), soit si le germe est gros (cas 3).

**I.5**  $p_c \uparrow \Rightarrow R_c \uparrow$  : ceci justifie de considérer les plus gros germes : il sera d'autant plus facile de passer en deçà de  $p_c$  si  $p_c$  est élevée. Pour l'application numérique, on prend le coefficient de tension superficielle  $\gamma$  de l'interface eau-air, d'où une pression critique

$$p_c = p_v - \frac{4\gamma}{3R_{\max}} = 2300 \text{ Pa} - \frac{4 \cdot 0,074 \text{ N/m}}{300 \mu\text{m}} = 1310 \text{ Pa} = 0,0131 \text{ bar} .$$

$\gamma \uparrow \Rightarrow p_c \downarrow$  : la tension superficielle inhibe la cavitation, car la tension superficielle s'oppose à la croissance de l'aire d'interface d'une bulle i.e. à la croissance de la bulle elle-même.

**II.1** Mouvement purement radial de l'interface, symétrie sphérique.

**II.2**  $\text{div} \bar{v} = 0 \implies v_r(r, t) = k(t)/r^2.$

**II.3**  $\overline{\text{rot} \bar{v}} = \bar{0}$ ,  $\phi(r, t) = -k(t)/r.$

**II.4**  $k(t) = R^2(t) \dot{R}(t).$

**II.5** Second théorème de Bernoulli + condition à l'infini donnent

$$p(r, t) = p_\infty + \rho \frac{\dot{k}}{r} - \rho \frac{k^2}{2r^4} = p_\infty + \rho \frac{2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}}{r} - \rho \frac{R^4\dot{R}^2}{2r^4} . \quad (\text{C.44})$$

À la frontière de la bulle, du côté de l'eau,

$$p(R^+, t) = p_\infty + \rho \left( \frac{3}{2} \dot{R}^2 + R\ddot{R} \right) .$$

## II.6

$$\rho \left( \frac{3}{2} \dot{R}^2 + R\ddot{R} \right) = \frac{K}{R^3} + p_v - p_\infty - \frac{2\gamma}{R} = p_\infty^{\text{eq}}(R) - p_\infty . \quad (\text{C.45})$$

**II.7** La réponse d'une bulle à une petite diminution de pression  $p_\infty$  est donc la réponse d'un système dynamique, les termes « stable » et « instable » de la question I.4 se réfèrent au fait que la perturbation de rayon, réponse à cette perturbation de paramètre de contrôle, reste petite ou non : on est bien dans le cadre d'un problème de « stabilité ».

**III.1**  $\frac{d(R^3\dot{R}^2)}{dt} = 2R^2\dot{R}(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2)$  donc l'équation (C.45) s'écrit

$$\frac{d(R^3\dot{R}^2)}{dt} = 2 \frac{p_v - p_\infty}{\rho} R^2\dot{R} - 4 \frac{\gamma}{\rho} R\dot{R}$$

**III.2** Par intégration temporelle

$$\dot{R}^2 = \frac{2}{3} \frac{p_\infty - p_v}{\rho} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right) + 2 \frac{\gamma}{\rho} \frac{R_0^2 - R^2}{R^3} . \quad (\text{C.46})$$

**III.3.a**

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_\infty - p_v}{\rho} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right)} \iff dt = -\sqrt{\frac{3}{2} \frac{\rho}{p_\infty - p_v} \frac{dR}{\sqrt{\frac{R_0^3}{R^3} - 1}}} \quad (\text{C.47})$$

donne par intégration temporelle

$$t_i = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\rho}{p_\infty - p_v}} \int_0^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{\frac{R_0^3}{R^3} - 1}} .$$

Changement de variable  $x = R/R_0$  donne

$$t_i = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\rho}{p_\infty - p_v}} R_0 I , \quad (\text{C.48})$$

formule bien homogène dimensionnellement...

Physiquement

- $\rho \uparrow \Rightarrow t_i \uparrow$  : dans un liquide plus lourd l'inertie plus importante rend l'écoulement de compression de la bulle plus lent ;
- $p_\infty - p_v \uparrow \Rightarrow t_i \downarrow$  : cette surpression est le moteur de la compression de la bulle ;
- $R_0 \uparrow \Rightarrow t_i \uparrow$  car une bulle plus grosse prend plus de temps pour imploser.

**III.3.b** Avec  $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ , il vient  $t_i = 0,46 \text{ ms}$ , soit un temps très bref correspondant à une dynamique rapide.

**III.3.c** D'après (C.47), quand  $R \rightarrow 0$  la vitesse  $|\dot{R}| \rightarrow +\infty$ , ce qui n'est physique. Alors des effets de compressibilité de l'eau et de sa vapeur sont à prendre en compte ; d'autre part l'hypothèse que  $p$  reste égale à  $p_v$  dans la bulle, sous l'effet d'un quasi équilibre thermodynamique, devient irréaliste. Ceci sans parler des effets de la viscosité, qui seront abordés en partie IV...

**III.3.d**

$$\Pi(r,t) = \frac{1}{3} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - 4 \right) \frac{R}{r} - \frac{1}{3} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right) \frac{R^4}{r^4} = \frac{1}{3} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - 4 \right) X - \frac{1}{3} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right) X^4 \quad (\text{C.49})$$

avec  $X = R/r$ , qui varie dans l'intervalle  $]0,1[$ . On a

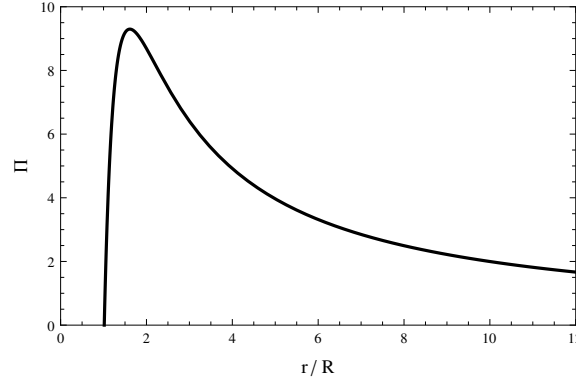
$$\frac{d\Pi}{dX} = \frac{1}{3} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - 4 \right) - \frac{4}{3} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right) X^3 .$$

Si  $R < R_0/4^{1/3}$  alors  $R_0/R > 4^{1/3}$  donc  $R_0^3/R^3 > 4$  ; en conséquence les coefficients entre parenthèses sont positifs. On en déduit que  $d\Pi/dX > 0$  (resp.  $< 0$ ) lorsque  $X < X_{\max}$  (resp.  $X > X_{\max}$ ) avec

$$X_{\max} = \left[ \frac{R_0^3/R^3 - 4}{4(R_0^3/R^3 - 1)} \right]^{1/3} .$$

Comme  $R_0^3/R^3 - 4 < R_0^3/R^3 - 1$ , on a  $X_{\max} < 4^{-1/3} < 1$ , donc ceci correspond à un maximum physique de  $\Pi$ , atteint pour

$$r_{\max} = \frac{R}{X_{\max}} = R \left[ \frac{4(R_0^3/R^3 - 1)}{R_0^3/R^3 - 4} \right]^{1/3}$$



**Fig. C.5** – Correction de pression dans l'eau autour de la bulle en cours d'implosion, à un rayon  $r$  de son centre, lorsque le rayon de la bulle  $R$  est au quart de sa valeur initiale  $R_0$ . On a choisit de représenter ce graphe sur l'intervalle  $r \in [0, 3R_0]$ .

et valant

$$\Pi_{\max} = \frac{X_{\max}}{4} (R_0^3/R^3 - 4) = 4^{-4/3} \frac{(R_0^3/R^3 - 4)^{4/3}}{(R_0^3/R^3 - 1)^{1/3}} > 0 .$$

Quand  $R \rightarrow 0^+$ ,

$$r_{\max} \sim 4^{1/3} R \quad \text{et} \quad \Pi_{\max} \sim 4^{-4/3} R_0^3 R^{-3} . \quad (\text{C.50})$$

Dans le cas  $R = R_0/4$ , on obtient le graphe de la figure C.5.

**Surpression très intense** liée à l'écoulement de compression de la bulle, qui diverge même lorsque  $t \rightarrow t_i^-$ ,  $R \rightarrow 0^+$ . D'après l'équation (C.50) et la figure C.5 la surpression reste **très localisée** sur le voisinage de la bulle implosant. La divergence de  $\Pi_{\max}$  n'est pas physique mais la tendance à de fortes surpressions doit l'être. Elle peut avoir des conséquences dommageables sur les matériaux solides qui entourent l'eau, en terme d'**usure**, par exemple si on pense que l'écoulement considéré a lieu autour d'une hélice ou d'une turbine. De fait la cavitation est un phénomène que l'on essaie d'éviter, autant que possible.

**III.4** Si  $\gamma > 0$ , d'après (C.46) le carré de la vitesse d'évolution du rayon  $\dot{R}^2$  augmente : dynamique d'implosion plus rapide, raisonnable puisque la tension superficielle tend à minimiser les aires d'interface, donc accélère la disparition de l'interface.

**IV** Par rapport à l'étude de la partie II, le terme supplémentaire existant dans l'équation de Navier-Stokes par rapport à l'équation d'Euler est le terme visqueux qui vaut, au coefficient de viscosité près,

$$\overline{\Delta \mathbf{v}} = (\Delta v_r - 2v_r/r^2) \bar{\mathbf{e}}_r .$$

Or

$$\Delta v_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = \frac{2k}{r^4} = \frac{2v_r}{r^2}$$

donc ce terme visqueux est en fait nul.

Dans l'eau, le tenseur

$$\overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + \frac{v_r}{r} (\bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\varphi) = -\frac{2k}{r^3} \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + \frac{k}{r^3} (\bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\varphi)$$

est symétrique, donc le tenseur des taux de déformations  $\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}}$ . Ainsi la condition dynamique à l'interface d'une bulle implosante,

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_{\text{extérieur}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_r - \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_{\text{intérieur}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_r = \frac{2\gamma}{R} \bar{\mathbf{e}}_r ,$$

comme

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\text{extérieur}} = -p\bar{\mathbf{1}} + 2\eta\bar{\bar{\mathbf{D}}}$$

avec  $\eta$  la viscosité dynamique de l'eau, s'écrit

$$-p_{\text{extérieur}}\bar{\mathbf{e}}_r - \frac{4\eta k}{R^3}\bar{\mathbf{e}}_r + p_{\text{intérieur}}\bar{\mathbf{e}}_r = \frac{2\gamma}{R}\bar{\mathbf{e}}_r.$$

On obtient une équation de la forme (C.45) avec un terme supplémentaire à côté du terme de tension superficielle  $2\gamma/R$ , à savoir le terme visqueux  $4\eta k/R^3$ , i.e. cette équation prend maintenant la forme

$$\rho\left(\frac{3}{2}\dot{R}^2 + R\ddot{R}\right) = p_{\infty}^{\text{eq}}(R) - p_{\infty} - \frac{4\eta\dot{R}}{R}.$$

Lors de l'implosion,  $\dot{R}$  et  $\ddot{R}$  sont négatifs, donc le terme visqueux supplémentaire est positif. On doit dans cette équation différentielle ordinaire d'ordre deux le considérer comme un terme source d'évolution de  $\ddot{R}$ ,

$$\ddot{R} = \dots - \frac{1}{\rho R} \frac{4\eta\dot{R}}{R} > 0,$$

donc en présence de ce terme  $\ddot{R}$  est moins négatif : **les effets visqueux ralentissent l'implosion.** Ceci n'est pas déraisonnable physiquement.

### Compléments sur le problème 3.6

- Je me suis très largement inspiré de l'article de [Franc \(2006\)](#), qui présente l'avantage d'être disponible sur le web. Un traité plus détaillé est le livre de [Franc et al. \(1995\)](#).
- Il est intéressant de réfléchir à l'effet d'une augmentation quasi statique de pression, à la manière de la question I.4, en se basant sur le graphe de la figure 3.7c, et y représentant des flèches en partant de différentes situations. Considérer une bulle sans gaz, avec  $K = 0$ , se fait aussi aisément sur le même type de graphe : on voit alors qu'on a seulement une branche instable en forme d'hyperbole. Au contraire, en présence de gaz, on peut réaliser qu'une implosion complète ne peut avoir lieu.
- L'équation (C.45) est connue sous le nom d'*équation de Rayleigh-Plesset*, en hommage aux physiciens qui l'ont introduite, durant la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle.
- Des variantes plus précises ou réalistes existent, qui prennent par exemple en compte le fait que la dynamique du gaz dans la bulle est plutôt adiabatique qu'isotherme, ou encore qui prennent en compte des effets de compressibilité ; voir par exemple [Franc et al. \(1995\)](#).
- L'équation de Rayleigh-Plesset (ou certaines de ces variantes) est utilisée en ingénierie, par exemple comme un modèle pour décrire la cavitation dans certains codes numériques. De fait la cavitation est un phénomène important pour l'ingénieur, et on reviendra d'ailleurs dessus dans le module *Turbomachines - Applications aux énergies hydraulique et éolienne*.

**Problème 3.7** *Étude de quelques phénomènes dans une centrale hydraulique***Étude en régime nominal de production d'énergie**

1 Entre les points 0 et 2 situé peu avant la vanne et la turbine,

$$H_0 - H_2 = 0 .$$

Entre le point 2 et un point 3 situé au refoulement de la turbine, on a perte de charge et de puissance, d'après le cours de MMC 1A,

$$H_2 - H_3 = P/(\rho q_0 g) .$$

Ainsi, en notant  $V_3$  la vitesse débitante au refoulement de la turbine, et en négligeant le terme d'énergie cinétique à la surface libre du réservoir, a priori, très vaste, donc à surface libre de niveau quasi constant,

$$P/(\rho q_0 g) = H_0 - H_3 = z_0 - z_2 - V_3^2/(2g) .$$

L'ordre de grandeur du terme d'énergie cinétique peut s'estimer en considérant que le refoulement de la turbine se fait sur une conduite de diamètre de l'ordre de  $d$ , avec le débit  $q_0$  :

$$V_3 \simeq V_d = 4q_0/(\pi d^2) = 2,83 \text{ m/s} \implies V_3^2/(2g) \simeq V_d^2/(2g) = 41 \text{ cm d'eau}$$

qui est comme tous les termes d'énergie cinétique dans ce circuit **négligeable** par rapport aux différences d'altitudes en jeu. Ainsi

$$P = \rho q_0 g (z_0 - z_2) \simeq 4,90 \text{ MW} .$$

Cette puissance est modeste, on pourrait l'augmenter en augmentant le débit par exemple, mais comme on va le voir par la suite ceci peut poser des problèmes...

2 Entre un point situé juste au dessus du point 2 dans la conduite, et un point 4 situé sur la surface libre de la cheminée d'équilibre :

$$p_2 + \rho g z_2 = p_4 + \rho g z_4 \iff z = z_2 + (p_2 - p_{at})/(\rho g) .$$

Or

$$H_0 = z_0 + p_{at}/(\rho g) + 0 = H_2 = z_2 + p_2/(\rho g) + V_d^2/(2g)$$

donc

$$z = z_0 - V_d^2/(2g) \simeq z_0 .$$

**Étude d'oscillations suite à la fermeture de la vanne**

**3.a** Eau **parfaite**, donc glissement sans frottements possible sur les parois, etc...  $\implies \bar{\mathbf{v}} = V(s,t) \bar{\mathbf{e}}_s$ .  
**Incompressibilité**  $\implies V(s,t) = V(t)$  .

**3.b**  $\rho dV/dt = -\partial \hat{p}/\partial s$  .

**3.c**  $\rho L dV/dt = \hat{p}_1 - \hat{p}_2$  .

4 Entre les points 0 et 1,

$$\hat{p}_0/(\rho g) = p_{at}/(\rho g) + z_0 = \hat{p}_1/(\rho g) .$$

Entre le point 2 et un point 3 situé sur la surface libre de la cheminée,

$$\widehat{p}_2/(\rho g) = \widehat{p}_3/(\rho g) = p_{\text{at}}/(\rho g) + z ,$$

d'où

$$(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2)/(\rho g) = -x \implies LdV/dt = -gx .$$

« Équilibre dynamique » entre l'inertie du fluide, i.e., son accélération, et un effet de pesanteur. Si  $x > 0$ , la cheminée a un niveau haut qui repousse - ralentit l'eau dans la conduite. Si  $x < 0$ , le niveau le plus haut est dans le réservoir amont, qui pousse l'eau vers la cheminée : l'eau est accélérée dans la conduite.

$$5 \quad V (\pi d^2/4) = dz/dt (\pi D^2/4) \implies V = (D/d)^2 dx/dt .$$

6  $d^2x/dt^2 = -\omega^2x$  avec  $\omega = (d/D)\sqrt{g/L} \implies x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ , et solution de forme oscillante similaire pour  $V$ . La fréquence angulaire est analogue à celle d'un « pendule »  $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ , le mouvement est de nature « pendulaire », comme dans le cas des modes de ballotement. Période

$$T = 2\pi \frac{D}{d} \sqrt{\frac{L}{g}} = 150 \text{ s} = 2 \text{ min} + 30 \text{ s} ,$$

effectivement longue, par exemple, par rapport au temps nécessaire à une onde sonore pour se propager dans la conduite, si on tenait compte d'effets de compressibilité.

$$7 \quad x(t) = A \sin(\omega t) , \quad V(t) = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \omega A \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad A = \frac{4q_0}{\pi d D} \sqrt{\frac{L}{g}} = 17 \text{ m} ,$$

ce qui est relativement grand : il faut une cheminée d'équilibre très haute pour éviter tout débordement et perte d'eau, surtout si l'on s'autorisait à avoir des débits  $q_0$  plus élevés, pour avoir plus de puissance.

$$8 \quad p_2(t) = p_{\text{at}} + \rho g(z_0 - z_2 + A \sin \omega t) .$$

L'amplitude des oscillations de la pression  $p_2$  est donc

$$\rho g A = 1,66 \text{ bar} ,$$

ce qui reste modeste : grâce à la cheminée d'équilibre, il n'y a aucun risque pour le matériel.

### Étude de l'effet de la fermeture de la vanne en l'absence de cheminée d'équilibre

9 Le modèle de la question 3 s'applique, mais, maintenant, le débit qui circulait dans la conduite ne peut plus s'évacuer dans la cheminée, donc dans toute la conduite

$$V = V(t) = V_i (1 - t/\tau) .$$

10.a Avec le modèle de la question 3,

$$\rho L \frac{dV}{dt} = -\rho L \frac{V_i}{\tau} = \widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 = \widehat{p}_0 - \widehat{p}_2$$

en négligeant les pertes de charge dans le réservoir, et les termes d'énergie cinétique en tout point. Ainsi

$$p_2 - p_{\text{at}} = \rho g(z_0 - z_2) + \rho L \frac{V_i}{\tau} .$$



**10.b**  $\rho g(z_0 - z_2) = 9,81 \text{ bar}$ ,  $\rho L \frac{V_i}{\tau} = 99,0 \text{ bar}$ , soit une énorme surpression de 109 bar.

La force sur une section de conduite associée à la surpression due à la fermeture  $\delta p = 100 \text{ bar}$  serait en effet

$$F = \delta p \pi (d^2/4) = 1,77 \cdot 10^7 \text{ N}$$

soit l'équivalent du poids d'une masse

$$m_{\text{eq}} = F/g = 1800 \text{ t} .$$

Cette surpression énorme n'est *pas réaliste*. Dans ce cas un **coup de bélier** se produit, qui met en jeu des **effets de compressibilité** non pris en compte dans le modèle que nous avons utilisé. D'après l'exercice 3.4, la surpression que l'on peut attendre est alors de l'ordre de

$$\delta p = \rho V_i c$$

où  $c$  de l'ordre de 1400 m/s est la vitesse du son dans l'eau. On aurait donc

$$\delta p = 40 \text{ bar} ,$$

ce qui est plus raisonnable, bien qu'élévé.

Une conclusion à tirer de cette étude est l'intérêt de la présence d'une cheminée d'équilibre, qui permet d'éviter de tels coups de bélier. Cependant, on conçoit bien que la mise en place de telles cheminées est difficile, du point de vue du génie civil...

### Exercice 3.2 Analogie entre ondes d'interface et ondes acoustiques

**1**  $c^2 = \frac{g}{k} (1 + l_c^2 k^2) \tanh(kh) .$

**2**  $c^2 = gh \left[ 1 + \left( l_c^2 - \frac{h^2}{3} \right) k^2 + O(k^4) \right] .$

Le coefficient de  $k^2$  s'annule si l'on prend  $h = l_c \sqrt{3}$ ;  $h$  et  $l_c$  sont bien du même ordre de grandeur.

**3** On ne peut réaliser une analogie exacte entre les ondes acoustiques, non dispersives, et les ondes d'interface, dispersives. Mais on peut s'assurer en prenant  $h = l_c \sqrt{3}$  que les grandes ondes d'interface sont *les « moins dispersives possibles »*, au sens où leur vitesse de phase

$$c = \sqrt{gh} + O(k^4) ,$$

alors qu'en général, si  $h$  est quelconque,

$$c = \sqrt{gh} + O(k^2) .$$

Numériquement, comme  $l_c = 2,7 \text{ mm}$ ,

$$h = l_c \sqrt{3} = 4,7 \text{ mm} .$$

La vitesse de phase  $c_0$  des grandes ondes satisfaisant l'analogie est alors

$$c_0 = \sqrt{gh} = 0,21 \text{ m/s} .$$

## Compléments sur l'exercice 3.2

On peut faire s'écouler l'eau dans le canal à une vitesse  $V$ , si on dispose un obstacle dans le canal, si  $V < c_0$  on aura une analogie avec un écoulement subsonique, alors que, si  $V > c_0$ , on aura une analogie avec un écoulement hypersonique. On parle d'une « *analogie Froude - Mach* », puisque l'on a une analogie entre le nombre de Froude  $Fr = V/c_0 = V/\sqrt{gh}$  dans le canal et le nombre de Mach  $M = V/c$ , avec ici  $c$  la vitesse du son dans un écoulement compressible. Dans le cas de la photo de l'énoncé, on est en écoulement « hypersonique » puisque l'on a une « onde de choc »...

## Exercice 3.3 Étude détaillée des ondes sonores planes en milieu infini

$$1 \quad \rho' = \rho_0 \kappa_S p' = \frac{1}{c^2} P \cos(kx - \omega t) \iff R = \frac{P}{c^2}.$$

$$2 \quad \mathbf{H1} : (\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \ll \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} \iff \text{nombre de Mach des fluctuations de vitesse de l'onde}$$

$$M = \frac{V}{c} \ll 1.$$

**H2** : termes de pesanteur négligeables :

**H2.1** : dans la configuration de base  $\rho_0 g U \ll p_0$  et  $\rho_0 g \lambda \ll p_0$ .

**H2.2** : au niveau des fluctuations  $\rho' \bar{\mathbf{g}} \ll \overline{\nabla p'}$   $\iff g \lambda \ll c^2$ ;

cette condition est équivalente à la deuxième condition **H2.1** en gaz.

$$\mathbf{H3} : \eta \overline{\Delta \bar{\mathbf{v}}} + \frac{1}{3} \eta \overline{\nabla (\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}})} \ll \rho \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} \iff \omega \ll \frac{c^2}{\nu}.$$

3 L'équation d'Euler simplifiée donne alors

$$\bar{\mathbf{v}} = V \cos(kx - \omega t) \bar{\mathbf{e}}_x \quad \text{avec} \quad V = \frac{P}{\rho_0 c}.$$

$$4 \quad \bar{\mathbf{u}} = -U \sin(kX - \omega t) \bar{\mathbf{e}}_x \quad \text{avec} \quad U = \frac{V}{\omega}.$$

Noter que, en régime oscillant établi, la configuration de référence est très loin (dans l'« ancien temps ») et a été « oubliée ». Le problème acoustique complet de l'extension d'une onde plane dans un domaine initialement au repos, prenant en compte le régime transitoire correspondant, est un problème compliqué...

$$5 \quad \text{Partir de la formule donnant la puissance } P_{\text{pression}} = - \iint_{\partial \Omega_t} p \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^2 S.$$

$$6.1 \quad P = 29 \text{ Pa}, \quad R = 2,4 \cdot 10^{-10} \text{ kg/m}^3, \quad V = 7 \text{ cm/s}, \quad U = 25 \text{ } \mu\text{m}.$$

$$\mathbf{H1} : M = 2 \cdot 10^{-4}.$$

$$\mathbf{H2.1} : \rho_0 g U / p_0 = 3 \cdot 10^{-9}, \quad \rho_0 g \lambda / p_0 = 9 \cdot 10^{-5}.$$

**H2.2** : ok car gaz et **H2.1** ok.

$$\mathbf{H3} : \nu \omega / c^2 = 3,5 \cdot 10^{-7}.$$

$$6.2 \quad P = 29 \text{ } \mu\text{Pa}, \quad V = 70 \text{ nm/s}, \quad U = 0,25 \text{ } \text{Å} \dots \text{ Beau senseur sensible que l'oreille!} \dots$$

**Exercice 3.4** *Étude sommaire de l'effet coup de bélier dans une conduite d'eau*

$$\bar{\mathbf{p}}(t) \simeq \rho_0(L - ct)Sv_0 \bar{\mathbf{e}}_x \text{ avec } S \text{ section du tuyau}$$

$$\implies \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \simeq -\rho_0 c S v_0 \bar{\mathbf{e}}_x = \sum \bar{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \simeq -p' S \bar{\mathbf{e}}_x \implies p' \simeq \rho_0 c v_0 \gg \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2$$

Très forte surpression !...

**Problème 3.8** *Effets de la viscosité sur des ondes de type sonore*

1 Loi de conservation de la masse linéarisée :

$$\boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}}. \quad (\text{C.51})$$

Loi de la quantité de mouvement linéarisée, en négligeant les effets de la pesanteur :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} = -c_0^2 \bar{\nabla} \rho' + \eta \bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{3} \eta \bar{\nabla}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}})}. \quad (\text{C.52})$$

$$\mathbf{2.1} \quad (\text{C.51}) \implies \rho' = R \exp[i(kx - \omega t)] \text{ avec } -i\omega R = -\rho_0 ikU \iff R = \rho_0 kU/\omega.$$

**2.2** (C.52) ·  $\bar{\mathbf{e}}_x$  donne alors

$$-\rho_0 i\omega = -c_0^2 ik\rho_0 k/\omega - \eta k^2 - \frac{1}{3}\eta k^2 \iff \omega^2 = c_0^2 k^2(1 - i\omega\tau) \text{ avec } \boxed{\tau = \frac{4\nu}{3c_0^2}}. \quad (\text{C.53})$$

$$\mathbf{2.3} \quad K^2 = \frac{\omega^2 \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} + 1}{2c_0^2 (1 + \omega^2 \tau^2)}, \quad \alpha^2 = \frac{\omega^2 \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} - 1}{2c_0^2 (1 + \omega^2 \tau^2)}.$$

$$\mathbf{2.4} \quad \text{Air : } \tau = \frac{4 \cdot 1,51 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}}{3 (344 \text{ m/s})^2} = 1,7 \cdot 10^{-10} \text{ s} = 0,17 \text{ ns.}$$

$$\text{Eau : } \tau = \frac{4 \cdot 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}{3 (1400 \text{ m/s})^2} = 6,8 \cdot 10^{-13} \text{ s} = 0,68 \text{ ps.}$$

Même dans l'air où  $\tau$  est le moins petit, pour la fréquence sonore typique du la,  $\omega\tau \simeq 5 \cdot 10^{-7}$ .

Donc en général  $\boxed{\omega\tau \ll 1}$ .

$$\mathbf{2.5} \quad \boxed{K = \frac{\omega}{c_0} \left(1 - \frac{3}{8} \omega^2 \tau^2\right)}. \quad (\text{C.54})$$

On peut définir une vitesse de propagation du son comme la vitesse de phase de l'onde

$$\boxed{c = \frac{\omega}{K} = c_0 \left(1 + \frac{3}{8} \omega^2 \tau^2\right)}. \quad (\text{C.55})$$

On a bien une très légère augmentation de celle-ci,

$$\frac{\delta c}{c_0} = \frac{3}{8} \omega^2 \tau^2 \quad (\text{C.56})$$

sans doute impossible à mesurer vu la petitesse de  $\omega\tau$ .

**2.6**  $\alpha \geq 0$ , *coefficient d'atténuation*,

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega^2 \tau}{2c_0}}. \quad (\text{C.57})$$

Toujours en considérant le la, sur une distance  $L = 10$  m, on a un facteur d'amortissement dans l'air  $f = \exp(-\alpha L) = \exp(-1,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1} \cdot 10 \text{ m}) = 0,99998$   
 dans l'eau  $f = \exp(-\alpha L) = \exp(-1,9 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1} \cdot 10 \text{ m}) = 1 - 2 \cdot 10^{-9}$   
 Ces atténuations sont très faibles.

**2.7** De même les effets de décalage de vitesse de propagation établis en **2.5** sont très faibles : **le modèle du fluide parfait est donc un très bon modèle pour l'acoustique**. Bonne nouvelle pour les musiciens...

**3.1**  $\rho' = 0$  d'après (C.51) : pas de fluctuations de masse volumique, pas d'effets de compression - dilatation.

**3.2** (C.52)  $\cdot \bar{\mathbf{e}}_y$  donne

$$-\rho_0 i \omega = -\eta k^2 \iff k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i) \implies \boxed{K = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} \quad (\text{C.58})$$

ce qui dénote des ondes **fortement dispersives**, la vitesse de phase étant

$$\boxed{c = \frac{\omega}{K} = \sqrt{2\nu\omega}}. \quad (\text{C.59})$$

D'autre part

$$\boxed{\alpha = K = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} \quad (\text{C.60})$$

ce qui dénote une **très forte atténuation**. En comparant les équations (C.53) et (C.58), on observe que les couplages dynamiques « salutaires » qui existaient entre la masse volumique, la pression et la vitesse dans une onde de compression - dilatation ont totalement disparu dans une onde de cisaillement...

**3.3** Sur  $L = 1$  mm maintenant, on a un facteur d'amortissement, pour le la à 440 Hz

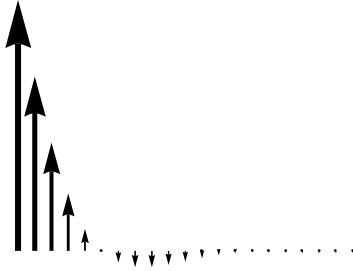
dans l'air  $f = \exp(-\alpha L) = \exp(-9570 \text{ m}^{-1} \cdot 10^{-3} \text{ m}) = 7 \cdot 10^{-5}$

dans l'eau  $f = \exp(-\alpha L) = \exp(-3,7 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1} \cdot 10^{-3} \text{ m}) = 7 \cdot 10^{-17}$ .

On peut à peine parler d'« onde » puisque sur une pseudo-période  $\lambda = 2\pi/K$  le facteur d'amortissement

$$f = \exp(-\alpha\lambda) = \exp(-2\pi) = 0,0019$$

i.e. l'onde est déjà presque totalement amortie, comme on le voit sur le schéma ci-après (tracé de  $\bar{\mathbf{v}}$  avec Mathematica) :



Ces ondes amorties correspondent à du « cisaillement », i.e. à de fortes contraintes tangentielles :  $2\eta\overline{\mathbf{D}} = \eta(\partial v/\partial x)(\overline{\mathbf{e}}_x \otimes \overline{\mathbf{e}}_y + \overline{\mathbf{e}}_y \otimes \overline{\mathbf{e}}_x)$  donc  $\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overline{\mathbf{e}}_x$  est parallèle à  $\overline{\mathbf{e}}_y$ .

On peut d’une certaine manière affirmer que de telles *ondes de « cisaillement » ne peuvent se propager dans un fluide*.

**4 À l’interface entre le manteau et le noyau liquide**, qui est un fluide ne propageant pas les ondes de cisaillement d’après les résultats de la partie **3**, les *ondes de cisaillement sont donc arrêtées*. Ce phénomène brutal peut être détecté par une étude fine de la propagation des ondes « sonores » dans le globe, et c’est bien ce qui a permis la détection du noyau liquide en 1926 par Harold Jeffreys, mathématicien et physicien britannique.

**NB :** ce problème est inspiré, en partie, de [Royer & Dieulesaint \(2001\)](#).

**Exercice 3.5 Étude locale du champ de vitesse d’un tourbillon potentiel**

1  $f(z) = -iC \ln z \implies v_x = -Cy/(x^2 + y^2)$  et  $v_y = Cx/(x^2 + y^2)$ .

2 Voir la figure C.6a.

3  $[G] = \text{Mat}[\overline{\nabla}\overline{\mathbf{v}}, \{\overline{\mathbf{e}}_x, \overline{\mathbf{e}}_y\}]$  a pour composantes

$$G_{xx} = \frac{2Cxy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad G_{yy} = -\frac{2Cxy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad G_{xy} = G_{yx} = \frac{C(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Au point A,

$$G_{xx} = G_{yy} = 0, \quad G_{xy} = G_{yx} = -C/a^2 \iff \overline{\nabla}_A\overline{\mathbf{v}} = -(C/a^2)(\overline{\mathbf{e}}_x \otimes \overline{\mathbf{e}}_y + \overline{\mathbf{e}}_y \otimes \overline{\mathbf{e}}_x).$$

4 On peut procéder, soit en partant des expressions en composantes de  $d\overline{\mathbf{v}}$ , et en opérant une linéarisation par rapport à  $dx$  et  $dy$ , soit en utilisant la définition intrinsèque du gradient. Cette dernière méthode plus efficace donne immédiatement :

$$d\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}(A + d\overline{\mathbf{x}}) - \overline{\mathbf{v}}(A) = \overline{\nabla}_A\overline{\mathbf{v}} \cdot d\overline{\mathbf{x}} = -(C/a^2)(\overline{\mathbf{e}}_x dy + \overline{\mathbf{e}}_y dx),$$

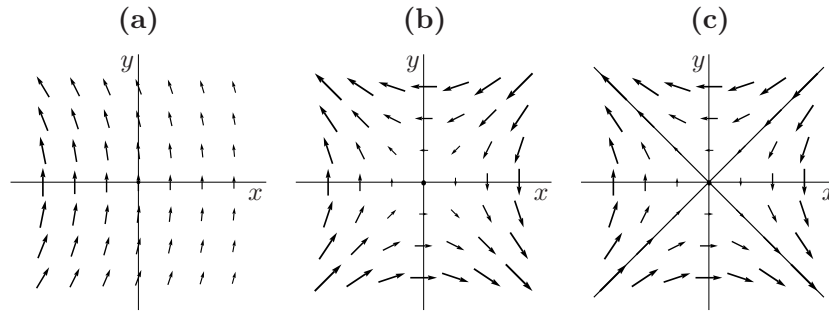
d’où la figure C.6b.

5 Comme  $\overline{\nabla}_A\overline{\mathbf{v}}$  est symétrique, il se réduit à sa partie symétrique qui est le tenseur  $\overline{\mathbf{D}}_A$  des taux de déformation en A. Ce tenseur se diagonalise sur la base formée des deux bissecteurs du plan  $xy$ ,

$$\overline{\mathbf{e}}_{\pm} = (\overline{\mathbf{e}}_x \pm \overline{\mathbf{e}}_y)/\sqrt{2},$$

puisque

$$\overline{\nabla}_A\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{e}}_{\pm} = \overline{\mathbf{D}}_A \cdot \overline{\mathbf{e}}_{\pm} = -C/(a^2\sqrt{2})(\overline{\mathbf{e}}_y \pm \overline{\mathbf{e}}_x) = \mp(C/a^2)\overline{\mathbf{e}}_{\pm}.$$



**Fig. C.6** – Pour l'exercice 3.5, étude locale du champ de vitesse d'un tourbillon autour d'un point A (disque noir au croisement des axes) situé « à droite de son cœur ». **(a)** : champ de vitesse  $\bar{v}$ . **(b)** : champ linéarisé  $d\bar{v}$ , amplitude augmentée par rapport à **a** pour plus de lisibilité. **(c)** : le même champ, en représentant aussi les axes propres de  $\overline{\nabla_A \bar{v}}$ , correspondant à une contraction (resp. dilatation) le long de la 1<sup>ère</sup> bissectrice (resp. 2<sup>ème</sup> bissectrice).

Le champ de vitesse  $d\bar{v}$  correspond à une dilatation dans la direction  $-$  et une contraction dans la direction  $+$ , soit un **champ purement déformant non tournant**, comme le montre la figure C.6c. Ceci est cohérent avec le fait que cet écoulement est potentiel et surtout **irrotationnel**. En conclusion, cette analyse est valable en tout point : A est un point générique ; via un changement éventuel de repère on peut toujours se ramener (en dehors de l'origine) à la situation précédente.

**Problème 3.9** *Écoulements d'un fluide parfait autour d'un disque avec circulation*

1  $f(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z.$

4.1  $u - iv = i e^{-i\theta} \left(2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a}\right).$

4.2  $\bar{v}^2 = \left(2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2$ , donc les points d'arrêt sont donnés par  $\sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi a U}.$

Cette équation a deux solutions si  $\Gamma \leq \Gamma_c = 4\pi a U.$

4.3  $\max \|\bar{v}\| = 2U \left(1 + \frac{\Gamma}{\Gamma_c}\right).$

5 Avec le second théorème de Bernoulli, on obtient

$$p = p_\infty + \rho \frac{U^2}{2} - \rho 2U^2 \left(\sin \theta - \frac{\Gamma}{\Gamma_c}\right)^2.$$

On a une dépression « au dessous » du disque ( $\theta$  proche de  $-\pi/2$ ), une surpression « au dessus » du disque ( $\theta$  proche de  $+\pi/2$ ) ; on peut donc conjecturer que le fluide va exercer une force « vers le bas »  $\bar{\mathbf{f}} = f_y \bar{\mathbf{e}}_y$  avec  $f_y < 0.$

6  $f_x = 0, f_y = -\rho U \Gamma$  en accord avec la formule de Magnus.

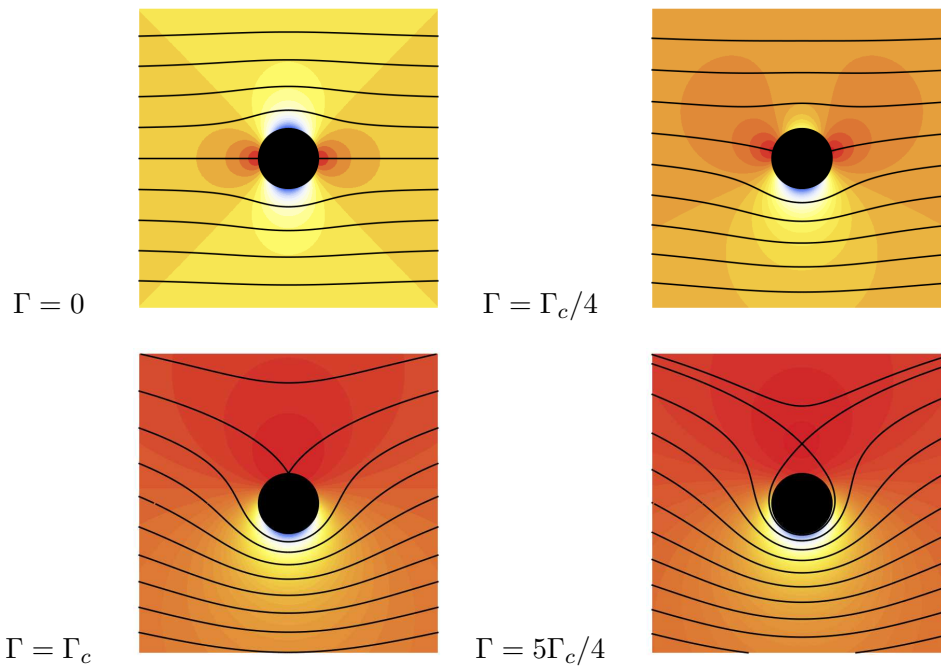
7.1 En posant  $\gamma = \Gamma/\Gamma_c$ , les points d'arrêt sont donnés par  $z_\pm = \pm a \sqrt{1 - \gamma^2} + ia\gamma.$

Si  $\gamma < 1$  on retrouve les deux points d'arrêt sur le cercle  $\partial D.$

Si  $\gamma = 1$  on trouve un seul point d'arrêt en  $ia.$

Si  $\gamma > 1$  on montre par deux études de fonctions que  $z_+ = ia(\gamma + \sqrt{1 - \gamma^2})$  est un point d'arrêt situé dans le domaine fluide, sur l'axe des  $y$ , « au dessus » du disque, alors que la solution  $z_- = ia(\gamma - \sqrt{1 - \gamma^2})$  est non physique i.e. ne correspond pas à un point d'arrêt situé dans le domaine fluide.

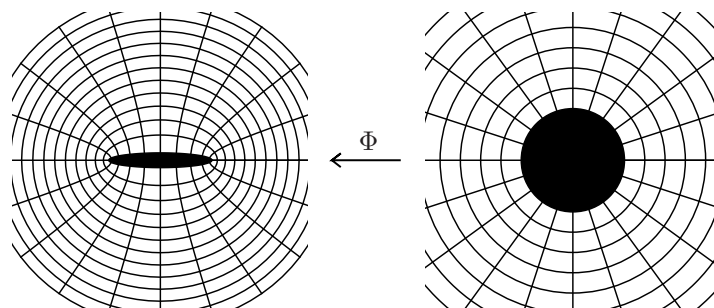
7.2 Cf. les figures ci-dessous. Quand  $\Gamma = 5\Gamma_c/4$ , on a choisi parmi les iso-valeurs de  $\psi$  celle correspondant à la ligne de courant qui passe par le point d'arrêt, afin de mettre celui-ci en évidence.



**Problème 3.10** *Modèle d'écoulements autour d'une aile d'avion à section elliptique*

1.1 Une simple affinité ne serait pas holomorphe, ainsi  $\bar{v}$  définie dans l'énoncé ne serait, par exemple, pas à divergence nulle.

1.2  $a_+ = (a + b)/(2a)$ ,  $a_- = a(a - b)/2$ . On vérifie bien qu'un réseau de courbes 2 à 2 perpendiculaires est transformé en un réseau de courbes 2 à 2 perpendiculaires (ceci pourrait servir pour définir un maillage dans une étude numérique) :



1.3  $2A(r) = (1 + b/a)r + a(a - b)/r \implies A$  bijection croissante de  $[a, +\infty[$  sur  $[a, +\infty[$

$2B(r) = (1 + b/a)r + a(b - a)/r \implies B$  bijection croissante de  $[a, +\infty[$  sur  $[b, +\infty[$

$\implies \Phi$  bijection de  $W_0$  sur  $W$ .

1.4 A priori  $\Phi^{-1}(z) = \frac{a}{a+b} \left[ z \pm \sqrt{z^2 + b^2 - a^2} \right]$ . On sait ce que signifie la racine carrée

$$\sqrt{w} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln w\right)$$

avec ln la détermination principale du logarithme, le problème est de choisir entre le + et le - ! Une étude locale au voisinage de  $z = iy$  avec  $y \in \mathbb{R}^*$  montre qu'il faut prendre  $\pm = \text{sgn}(\text{Re}(z))$

$$\hookrightarrow \quad \Phi^{-1}(z) = \frac{a}{a+b} \left[ z + \text{sgn}(\text{Re}(z)) \sqrt{z^2 + b^2 - a^2} \right].$$

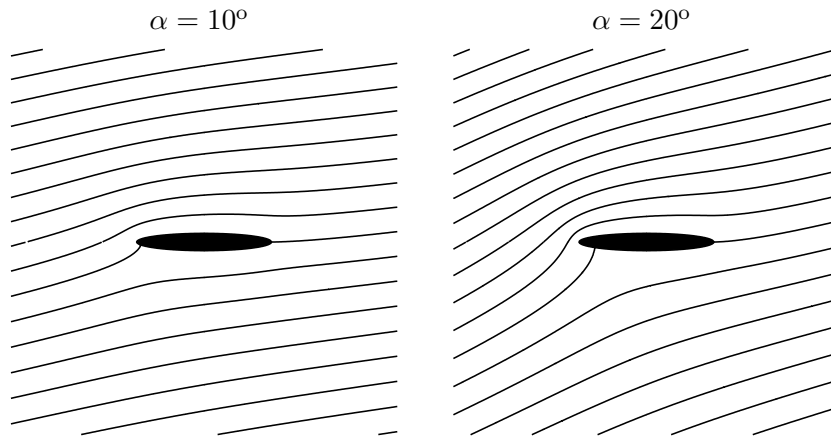
**2.1** À l'infini,  $f'(z) = \tilde{f}'(\zeta)/\phi'(\zeta) \rightarrow U \exp(-i\alpha) \iff \alpha_+ = \frac{1}{2} \frac{a+b}{a} U \exp(-i\alpha).$

**2.2**  $\alpha_- = \frac{1}{2} a(a+b)U \exp(i\alpha).$

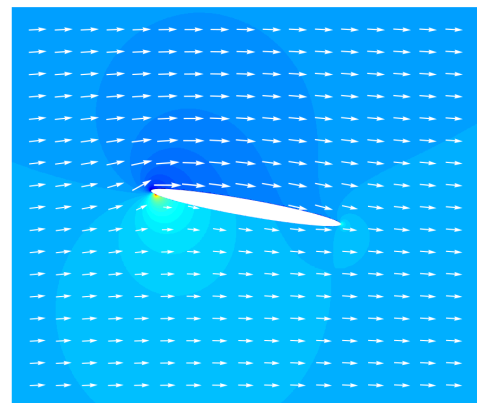
**3.2**  $f'(z) = \frac{\tilde{f}'(\zeta)}{\phi'(\zeta)} = \frac{i}{b \cos \theta + ia \sin \theta} \left[ (a+b)U \sin(\theta - \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi} \right].$

**3.3**  $\Gamma = -2\pi(a+b)U \sin \alpha.$

**3.4**  $\theta = 2\alpha - \pi \iff z = a \cos(2\alpha - \pi) + ib \sin(2\alpha - \pi)$  comme cela se voit sur ce graphe des *lignes de courant* pour  $\alpha = 10^\circ$ , cf. à gauche ci-dessous. Si on augmente  $\alpha$  jusque  $\alpha = 20^\circ$  on constate que le second point d'arrêt s'éloigne bien du bord d'attaque, cf. à droite ci-dessous.



Autre représentation du modèle obtenu, en faisant une rotation pour disposer l'écoulement à l'infini « horizontalement » et surtout en utilisant une fonction couleur « maison » pour le champ  $p$  (ColorData["TemperatureMap"] s'avère ici peu performante; de plus on représente  $\ln p$  et non  $p$ , pour mieux voir les variations de pression très localisées) :



**4.1**  $f_x - if_y = \rho U \Gamma \exp[i(\pi/2 - \alpha)]$  en accord avec la formule de Magnus.

**4.2**  $F = |\bar{\mathbf{F}}| = \rho L_3 U |\Gamma|$  avec  $|\Gamma| = 2\pi(a+b)U \sin \alpha \simeq 2\pi a U \sin \alpha$

$$\implies \boxed{F \simeq 2\pi a L_3 \rho U^2 \sin \alpha}.$$



On reconnaît la *superficie de la voilure*  $S = aL_3$ , et on introduit en général le *coefficient de portance*  $C_z$  tel que

$$\boxed{F = \frac{1}{2} S \rho U^2 C_z} \implies \text{ici } C_z = 4\pi \sin \alpha . \quad (\text{C.61})$$

On a intérêt à « cabrer » l'aile i.e. augmenter  $\alpha$  à basse vitesse pour conserver une bonne portance.

5 Airbus A320 : en régime de croisière la portance équilibre le poids

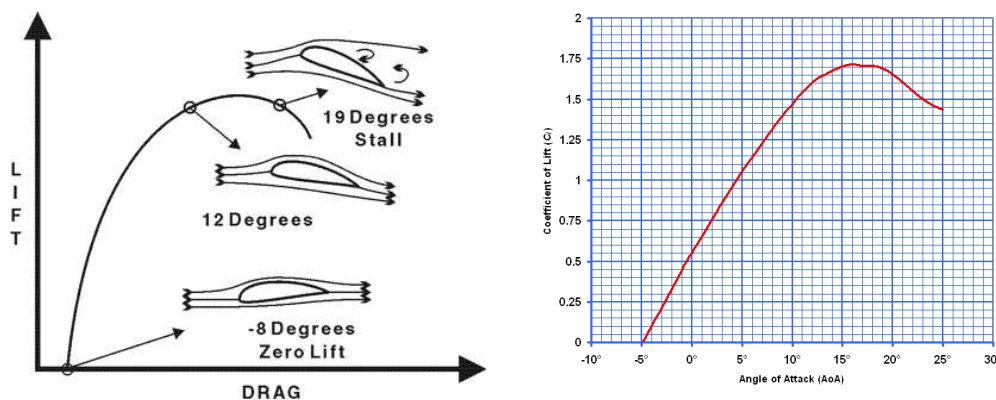
$$2F = mg \iff U = \sqrt{\frac{mg}{4\pi S \rho \sin \alpha}}$$

$$m \simeq 60 \text{ T}, \quad S \simeq 3 \text{ m } 12 \text{ m} = 36 \text{ m}^2, \quad \alpha \simeq 3^\circ, \quad \rho \simeq 1 \text{ kg/m}^3$$

$$\implies U = 570 \text{ km/h du bon ordre de grandeur } 750 \text{ km/h} .$$

### Complément C.1 *Éléments d'aérodynamique du vol*

(C.61) montre que la portance augmente quand  $\alpha$  augmente i.e. l'avion se cabre *ou* on augmente le «  $\alpha$  moyen » d'une aile à l'aide de volets. Cependant il faut faire attention : en fluides réels on a de la portance ('Lift') et de la traînée ('Drag'); lorsque l'on augmente  $\alpha$  les deux augmentent. Le danger est le « décrochement » à angle d'attaque trop fort, cf. les figures suivantes (celle de gauche provient de <http://insideracingtechnology.com>, celle de droite de Wikipedia 'Lift coefficient') :



## C.4 Corrigés du chapitre 4 - Écoulements de Stokes

### Exercice 4.1 *Étude d'écoulements de Couette diphasiques*

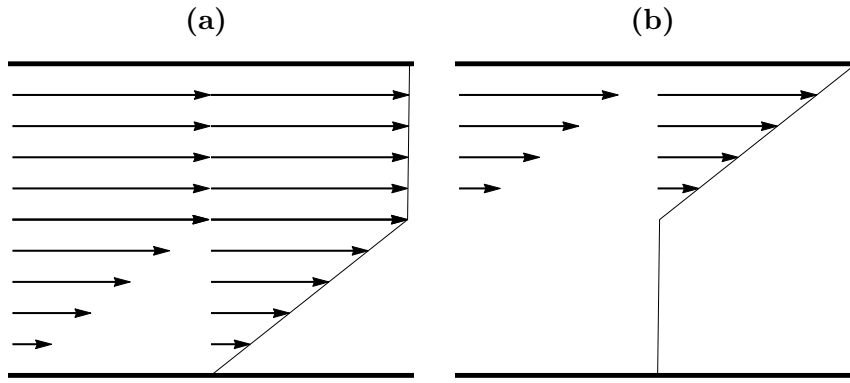
1 En notant  $\nu_1 = \eta_1/\rho_1$  (resp.  $\nu_2 = \eta_2/\rho_2$ ) la viscosité cinématique du fluide 1 (resp. 2), supposer

$$Re_1 = Uh/\nu_1 \ll 1 \quad \text{et} \quad Re_2 = Uh/\nu_2 \ll 1 \implies \text{écoulement } \textit{lamininaire}.$$

2  $\beta = (U - \alpha\ell)/(h - \ell)$ ,  $\gamma = \ell(\alpha h - U)/(h - \ell)$ .

3 Une éventuelle tension superficielle entre les deux fluides n'aurait pas d'effet car interface plane. La condition de continuité du vecteur contrainte donne, pour sa composante tangentielle,

$$\text{en } y = \ell, \quad \eta_2 D_{2xy} = \eta_1 D_{1xy}$$



**Fig. C.7** – Dans le plan  $xy$ , champs de vitesse des *écoulements de Couette diphasique* de l'exercice 4.1 avec **a** :  $M = 1/100$ , fluide le plus visqueux « en haut », **b** :  $M = 100$ , fluide le plus visqueux « en bas ».

avec  $\overline{\mathbf{D}}_i$  le tenseur des taux de déformation dans le fluide  $i$ ,

$$\overline{\mathbf{D}}_1 = (\alpha/2)(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x), \quad \overline{\mathbf{D}}_2 = (\beta/2)(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x) \implies \alpha = U/[(1-M)\ell + Mh].$$

4 Admettons que le principe du minimum de dissipation est valable ici. La dissipation totale est, par unité de longueur dans les directions  $x$  et  $z$ ,

$$\tilde{P}_{\text{dissipée}} = 2\eta_1 \int_{y=0}^{\ell} \overline{\mathbf{D}}_1 : \overline{\mathbf{D}}_1 dy + 2\eta_2 \int_{y=\ell}^h \overline{\mathbf{D}}_2 : \overline{\mathbf{D}}_2 dy = \eta_1 \alpha^2 \ell + \eta_2 (U - \alpha \ell)^2 / (h - \ell).$$

Ainsi

$$d\tilde{P}_{\text{dissipée}}/d\alpha = 0 \iff \alpha = U/[(1-M)\ell + Mh],$$

qui est bien la valeur obtenue en question 3.

5 Au final, dans le cas  $\ell = \frac{h}{2}$ ,  $|T_x| = \frac{2\eta_1\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \frac{U}{h}$ .

6 Cf. la figure C.7. Les gradients de vitesse se concentrent dans le fluide le moins visqueux, là où leur coefficient dans l'expression de la dissipation est le plus faible, ce, de façon à minimiser la dissipation totale. Le fluide le plus visqueux par contre « expulse » les gradients de vitesse, il coule pratiquement « en bloc ». On a un effet de « *lubrification* » si ce fluide le plus visqueux est près de la plaque mobile...

**Problème 4.1** *Écoulement de Stokes autour d'une sphère ; application : sédimentation*

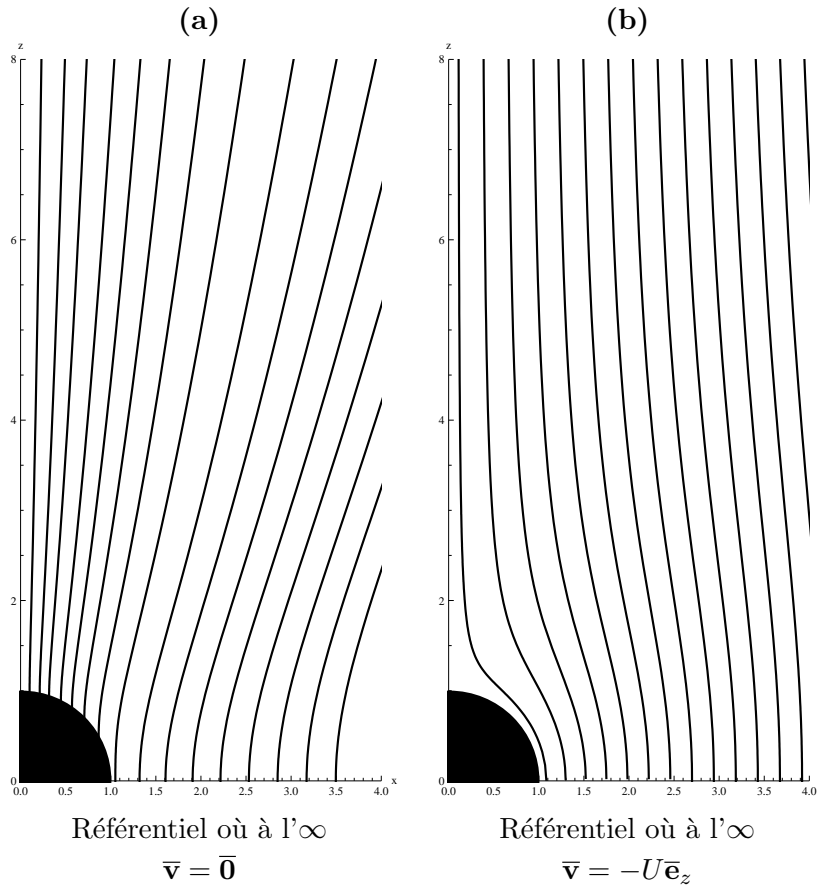
1 Point de départ : équation traduisant l'incompressibilité.

2 À l'infini,  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rightarrow 0$  et  $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \rightarrow 0$ . En  $r = a$ , conditions données dans l'énoncé.

3.1 À l'infini,  $\frac{f(r)}{r^2} \rightarrow 0$  et  $\frac{f'(r)}{r} \rightarrow 0$ . En  $r = a$ ,  $f(a) = \frac{1}{2}Ua^2$  et  $f'(a) = Ua$ .

3.2  $F(r) = \frac{1}{r} \left( \frac{2f}{r^2} - f'' \right)$  vérifie l'équation différentielle ordinaire  $2rF' + r^2F'' - 2F = 0$ .

On en déduit en recherchant des solutions en loi de puissance, et en utilisant une condition limite à l'infini,  $F(r) = F_0 r^{-2}$ . En conséquence  $f$  vérifie l'équation différentielle ordinaire  $2f - r^2 f'' = F_0 r$ , d'où  $f(r) = a_1 r + a_{-1} r^{-1} + a_2 r^2$ .



**Fig. C.8** – Lignes de courant de l'écoulement autour d'une sphère, dans le référentiel lié au fluide à l'infini à gauche, lié à la sphère à droite.

**3.3**  $f(r) = \frac{Ua}{4} \left( 3r - \frac{a^2}{r} \right).$

**4**  $\psi = \text{constante}$  donne  $\left( 3\sqrt{x^2 + z^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) \frac{x^2}{x^2 + z^2} = \text{constante}.$

Avec Mathematica en utilisant la commande `ContourPlot` on obtient la figure C.8a.

**5** Par composition des vitesses  $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_{\text{réf.}} \text{ du fluide} - U\bar{\mathbf{e}}_z$ . La nouvelle fonction courant est la précédente moins celle  $\psi_e$  de l'écoulement uniforme  $U\bar{\mathbf{e}}_z$ . La fonction  $\psi_e$  est donnée par ses dérivées et on peut prendre

$$\psi_e = \frac{Ur^2}{2} \sin^2 \theta, \text{ d'où } \psi = \frac{U}{2} \left[ \frac{a}{2} \left( 3r - \frac{a^2}{r} \right) - r^2 \right] \sin^2 \theta.$$

$\psi = \text{constante}$  donne  $\left[ \frac{a}{2} \left( 3\sqrt{x^2 + z^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) - (x^2 + z^2) \right] \frac{x^2}{x^2 + z^2} = \text{constante}.$

Avec Mathematica on obtient la figure C.8b.

**6.1**  $\hat{p} = \frac{3}{2}\eta\frac{Ua}{r^2} \cos \theta + \hat{p}_\infty$  qui indique une surpression à l'avant, dépression à l'arrière.

**6.2**  $\alpha = \frac{3}{2}\eta Ua, \quad \beta = -\rho g.$

**6.3**  $\bar{\mathbf{T}}_\alpha = -\frac{3}{2}\eta\frac{U}{a} \cos \theta \bar{\mathbf{e}}_r$ , on s'attend à une force  $\bar{\mathbf{F}}_\alpha$  opposée à  $\bar{\mathbf{v}}_s$ .

6.4  $\bar{\mathbf{F}}_\beta$  est la poussée d'Archimède.

7  $\bar{\mathbf{T}}_\gamma = \frac{3}{2}\eta\frac{U}{a}\sin\theta\bar{\mathbf{e}}_\theta$  correspond aux frottements visqueux qui s'opposent au mouvement, donc on s'attend à une force  $\bar{\mathbf{F}}_\gamma$  opposée à  $\bar{\mathbf{v}}_s$ .

9  $\bar{\mathbf{v}}_s = \frac{2}{9}\frac{\rho_{\text{objet}} - \rho_{\text{fluide}}}{\eta}a^2\bar{\mathbf{g}}$ .

10.1 On estime  $v_s \simeq 3,3$  m/s plutôt grande, d'où  $Re \simeq 3300$  donc hypothèse de Stokes pas bonne. Eau pas assez visqueuse...

10.2 On estime  $v_s \simeq 3,3$  mm/s plutôt petite, d'où  $Re \simeq 3,3 \cdot 10^{-3}$  ok.

11  $t = t'$ .

12.1 Aboutir à  $P_{\text{dissipée}} = 6\pi\eta aU^2$ .

12.2 Autant l'intégrale généralisée définissant  $P_{\text{dissipée}}$  converge, autant celles définissant  $E_c$  et  $P_{\text{volumique}}$  divergent, du fait que  $\bar{\mathbf{v}}$  ne tend pas très vite vers 0 quand  $r \rightarrow +\infty$ . Pb physique : l'écoulement est instationnaire, le champ  $\bar{\mathbf{v}}_0$  calculé ici à  $t = 0$  devant être utilisé à  $t$  quelconque suivant la formule

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{v}}_0(\bar{\mathbf{x}} - Ut\bar{\mathbf{e}}_z).$$

L'instationnarité devient forte quand  $r \rightarrow +\infty$ , cf.

$$N = \frac{\rho\frac{\partial\bar{\mathbf{v}}}{\partial t}}{\eta\Delta\bar{\mathbf{v}}} \simeq Re_a \frac{r}{a} \longrightarrow +\infty$$

malgré la petitesse de  $Re_a = \frac{Ua}{\nu}$ . Le modèle donné ici est donc **faux** loin de la sphère...

13.1  $F \geq 6\pi\eta r_1U$ .

13.2  $F \leq 6\pi\eta r_2U$ .

13.3  $F \simeq 6\pi\eta r_{\text{moyen}}U$ .

**Problème 4.2 Écoulements de Stokes dans et autour d'une inclusion sphérique**

1  $F = x^2 + y^2 + (z - Ut)^2 - a^2$ . Condition limite cinématique : une particule fluide qui se trouve à l'interface y reste toujours,

$$F = 0 \implies \frac{dF}{dt} = 0.$$

2  $r = a \implies \bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{v}}_2$ . Comme la continuité de la vitesse radiale est déjà assurée par la condition limite cinématique, seule la continuité de la vitesse suivant  $\bar{\mathbf{e}}_\theta$  devra être vérifiée.

3  $r = a \implies (p_1 - p_2)\bar{\mathbf{e}}_r + 2(\eta_2\bar{\mathbf{D}}_2 - \eta_1\bar{\mathbf{D}}_1) \cdot \bar{\mathbf{e}}_r = 2\frac{\gamma}{a}\bar{\mathbf{e}}_r$ .

4 Condition limite cinématique  $\iff f_1(a) = f_2(a) = Ua^2/2$ .

Continuité de la vitesse tangentielle  $\iff f'_1(a) = f'_2(a)$ .

Condition limite dynamique :

comp. radiale  $\iff p_1(a, \theta) - p_2(a, \theta) + \frac{4\cos\theta}{a^3}\{\eta_2[af'_2(a) - 2f_2(a)] - \eta_1[af'_1(a) - 2f_1(a)]\} = 2\frac{\gamma}{a}$  ;

$$\text{comp. tangentielle} \iff \eta_2 \{a[2f_2'(a) - af_2''(a)] - 2f_2(a)\} = \eta_1 \{a[2f_1'(a) - af_1''(a)] - 2f_1(a)\}.$$

**5.1** EDO sur  $G_1 \iff G_1 = a_1 r + a_1' r^{-2} = a_1 r$  compte tenu de la régularité en  $r = 0$ .

EDO sur  $G_2 \iff G_2 = a_2 r^{-2} + a_2' r = a_2 r^{-2}$  compte tenu de la condition à l'infini.

**5.2** EDO sur  $f_1 \iff f_1 = A_1 r^2 + A_1' r^{-1} + B_1 r^4 = A_1 r^2 + B_1 r^4$  compte tenu de la régularité en  $r = 0$ .

EDO sur  $f_2 \iff f_2 = A_2 r^{-1} + A_2' r^2 + B_2 r = A_2 r^{-1} + B_2 r$  compte tenu de la condition à l'infini.

$$\mathbf{6} \quad f_1(r) = \frac{U}{4(1+m)} \left[ (2+3m)r^2 - m \frac{r^4}{a^2} \right], \quad f_2(r) = \frac{U}{4(1+m)} \left[ (3+2m)ar - \frac{a^3}{r} \right].$$

**7** Quand  $m \rightarrow 0$ , on a bien  $f_2(r) \rightarrow f(r)$ .

**8** Comme en TD,  $\psi_e = -\frac{Ur^2}{2} \sin^2 \theta$ .

$$\tilde{\psi}_1 = \psi_1 + \psi_e \implies \tilde{f}_1 = f_1 - \frac{Ur^2}{2} = \frac{U}{8} \left( r^2 - \frac{r^4}{a^2} \right).$$

$$\tilde{\psi}_2 = \psi_2 + \psi_e \implies \tilde{f}_2 = f_2 - \frac{Ur^2}{2} = \frac{U}{8} \left( 5ar - \frac{a^3}{r} - 4r^2 \right).$$

**9.a**

$$\begin{aligned} v'_{1r} &= \frac{1}{4}(1-r^2) \cos \theta, & v'_{1\theta} &= \frac{1}{4}(2r^2-1) \sin \theta, \\ v'_{2r} &= \frac{1}{4} \left( \frac{5}{r} - \frac{1}{r^3} - 4 \right) \cos \theta, & v'_{2\theta} &= \frac{1}{8} \left( 8 - \frac{5}{r} - \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta. \end{aligned} \tag{C.62}$$

**9.b** Cf. les flèches de la figure C.9.

**9.c**  $\tilde{\psi}_1 = \text{constante} \iff x^2(1-x^2-z^2) = c_1$ ,

$$\tilde{\psi}_2 = \text{constante} \iff \left[ 4(x^2+z^2) + \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} - 5\sqrt{x^2+z^2} \right] \frac{x^2}{x^2+z^2} = c_2.$$

Grâce à Mathematica, on obtient la figure C.9.

**9.d** On observe dans l'inclusion sphérique un écoulement en « *vortex toroidal sphérique* ». Ce vortex est engendré par l'adhérence et le frottement du fluide extérieur 2 avec le fluide intérieur 1 au niveau de leur interface commune.

### Compléments sur le problème 4.2

- Ce problème est inspiré des études présentées dans la section 4.9 de Batchelor (1967). Le vortex toroidal sphérique défini par le champ de vitesse (C.62) a en fait été introduit pour la première fois par Hill en 1894, dans le contexte de fluides parfaits, comme l'explique Batchelor (1967) à la fin de sa section 7.2. On l'appelle donc aussi « *vortex de Hill* ».
- On a fait, ici, l'impasse sur le calcul des champs de pression. Celui-ci pourrait être mené à bien. On pourrait ainsi aboutir à la force exercée par le fluide extérieur sur l'inclusion, cf. Batchelor (1967).

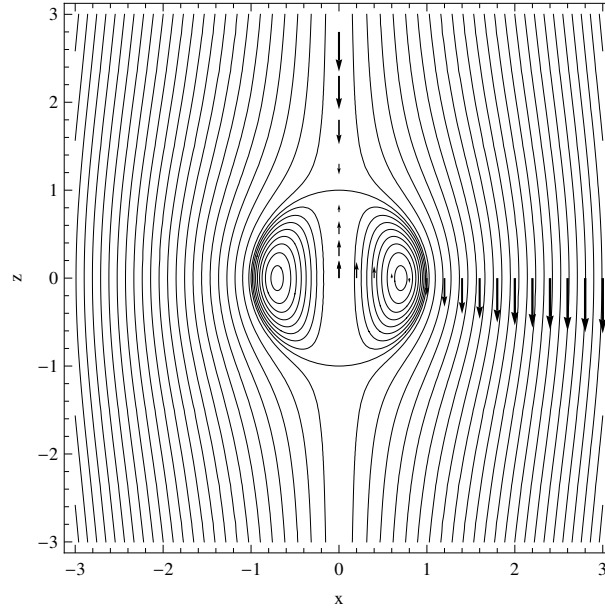


Fig. C.9 – *Écoulements de Stokes dans et autour d'une inclusion sphérique* d'un fluide visqueux dans un autre, résultant du modèle développé dans le problème 4.2.

**Problème 4.3** *Étude d'un fluide généralement non newtonien par rhéomètre plan-cône*

**Première partie : Étude cinématique**

1  $\forall \bar{\mathbf{x}}(r, \theta, \varphi) \in \partial D_f, \quad \theta = \pi/2 \implies \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}(r, \theta, \varphi)) = \bar{\mathbf{0}}.$

$$\forall \bar{\mathbf{x}}(r, \theta, \varphi) \in \partial D_f, \quad \theta = \beta \implies \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}(r, \theta, \varphi)) = \omega \bar{\mathbf{e}}_z \wedge \bar{\mathbf{x}} = \omega r \sin \theta \bar{\mathbf{e}}_\varphi.$$

2 Écoulement créé par la condition limite précédente + M. Curie + hypothèse de séparation des variables  $\implies \bar{\mathbf{v}} = \omega r f(\theta) \bar{\mathbf{e}}_\varphi$ , la fonction  $f$  devant vérifier

$$f(\beta) = \sin \beta \quad \text{et} \quad f(\pi/2) = 0. \quad (\text{C.63})$$

3

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega f(\theta) \\ 0 & 0 & -\omega f(\theta) \cotan \theta \\ \omega f(\theta) & \omega f'(\theta) & 0 \end{bmatrix} \implies \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = \operatorname{tr}[G] = 0,$$

cet écoulement « tournant » respecte bien la condition d'incompressibilité.

4

$$\dot{\gamma} = \omega [f'(\theta) - f(\theta) \cotan \theta] \quad (\text{C.64})$$

qui ne dépend que de la coordonnée  $\theta$ .

5

$$D_2 = 2 (D_{\theta\varphi} D_{\theta\varphi} + D_{\varphi\theta} D_{\varphi\theta}) = 2 (\dot{\gamma}^2/4 + \dot{\gamma}^2/4) = \dot{\gamma}^2 \implies \sqrt{D_2} = |\dot{\gamma}|, \quad (\text{C.65})$$

formule d'une simplicité remarquable, qui explique le choix du facteur 2 dans l'expression de  $D_2$ .

6

$$\tau = \eta(\dot{\gamma}(\theta)^2) \dot{\gamma}(\theta) \dots \quad (\text{C.66})$$

Deuxième partie : *Étude dynamique*

7 M. Curie...

8

$$\left(\overline{\text{div } \overline{\sigma}}\right)_r = -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad \left(\overline{\text{div } \overline{\sigma}}\right)_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad \left(\overline{\text{div } \overline{\sigma}}\right)_\varphi = \frac{1}{r} \tau'(\theta) + \frac{2}{r} \tau(\theta) \cotan \theta .$$

9

$$0 = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (\text{C.67})$$

$$0 = \rho g \sin \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (\text{C.68})$$

$$0 = \frac{1}{r} \tau'(\theta) + \frac{2}{r} \tau(\theta) \cotan \theta . \quad (\text{C.69})$$

10

$$\boxed{\tau(\theta) = \frac{A}{\sin^2 \theta}} . \quad (\text{C.70})$$

11 Sur la surface de contact entre le cône et le liquide, définie par

$$S = \{ \overline{\mathbf{x}}(r, \beta, \varphi) = r \overline{\mathbf{e}}_r(r, \beta, \varphi) \quad \text{avec} \quad (r, \varphi) \in [0, a[ \times [0, 2\pi[ \} ,$$

le vecteur contrainte exercé sur le liquide

$$\overline{\mathbf{T}} = p(r, \beta) \overline{\mathbf{e}}_\theta - \tau(\beta) \overline{\mathbf{e}}_\varphi .$$

Le couple exercé par le cône sur le liquide est

$$\overline{\mathbf{\Gamma}} = \iint_S \overline{\mathbf{x}} \wedge \overline{\mathbf{T}} d^2 S$$

où l'élément de surface  $d^2 S = r \sin \beta dr d\varphi$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{\Gamma}} &= \sin \beta \int_{r=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} [p(r, \beta) \overline{\mathbf{e}}_\varphi + \tau(\beta) \overline{\mathbf{e}}_\theta] r^2 dr d\varphi \\ \implies \Gamma_x &= \Gamma_y = 0, \quad \Gamma_z = \Gamma = -\frac{2\pi}{3} a^3 A . \end{aligned} \quad (\text{C.71})$$

Troisième partie : *Solution approximative générale*

12

$$\tau = A = -3\Gamma/(2\pi a^3) \implies \dot{\gamma} = \tau^{-1}(A) \quad (\text{C.72})$$

De plus l'équation différentielle (C.64) devient

$$\omega f'(\theta) = \dot{\gamma} \iff f(\theta) = B + \dot{\gamma} \theta / \omega .$$

Cette expression est compatible avec les conditions limites (C.63) qui, avec l'approximation de l'énoncé, s'écrivent

$$f(\beta) = f(\pi/2 - \epsilon) = \sin(\pi/2) = 1 \quad \text{et} \quad f(\pi/2) = 0 .$$

Il vient  $B = -\dot{\gamma}\pi/(2\omega)$  et

$$\boxed{\dot{\gamma} = -\omega/\epsilon} \implies f(\theta) = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right). \quad (\text{C.73})$$

**13** En fixant la vitesse de rotation  $\omega$ , avec la relation (C.73) on a  $\dot{\gamma} = -\omega/\epsilon$  connu, puisque l'angle  $\epsilon$  est une caractéristique géométrique connue. D'après la relation (C.65), on a  $D_2 = \dot{\gamma}^2 = (\omega/\epsilon)^2$  connu. En mesurant le couple  $\Gamma$ , on a accès d'après (C.72) à la contrainte visqueuse

$$\tau = -3\Gamma/(2\pi a^3).$$

qui, d'autre part, est de la forme (C.66),

$$\begin{aligned} \tau = \eta(\dot{\gamma}^2) \dot{\gamma} &\iff -3\Gamma/(2\pi a^3) = \eta((\omega/\epsilon)^2) (-\omega/\epsilon) \\ &\iff \boxed{\eta((\omega/\epsilon)^2) \simeq (3\Gamma\epsilon)/(2\pi a^3\omega)}. \end{aligned} \quad (\text{C.74})$$

Cette dernière équation, où l'on a utilisé le signe  $\simeq$  pour rappeler qu'il s'agit d'une approximation, nous donne bien accès à la viscosité dynamique  $\eta$ .

**14**  $|\dot{\gamma}| = 0,764 \text{ s}^{-1}$  et  $\eta = 0,98 \text{ Pa s}$ . Cette viscosité est 980 fois celle de l'eau à température ambiante, il n'est pas étonnant qu'une solution de polymères soit beaucoup plus visqueuse que de l'eau. On peut estimer, en supposant que la masse volumique est de l'ordre de celle de l'eau, le nombre de Reynolds correspondant :

$$Re = \rho\omega a^2/\eta \simeq 0,07$$

qui est effectivement petit, justifiant l'hypothèse d'« écoulement de Stokes non newtonien ».

#### Quatrième partie : *Solution rigoureuse en fluide newtonien*

**15** En liquide newtonien il faut résoudre

$$\begin{aligned} \tau(\theta) = \eta \dot{\gamma}(\theta) = \eta\omega[f'(\theta) - f(\theta)\cotan\theta] &= A/\sin^2\theta = [-3\Gamma/(2\pi a^3)]/\sin^2\theta \\ \iff f'(\theta) - f(\theta)\cotan\theta = B/\sin^2\theta &\text{ avec } B = -3\Gamma/(2\pi a^3\omega\eta), \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

avec les conditions limites (C.63),

$$f(\beta) = \sin\beta \quad \text{et} \quad f(\pi/2) = 0.$$

**16** Avec le programme Mathematica suivant :

```
(*EDO*)
sol= DSolve[f'[teta] - f[teta]/Tan[teta] == B/Sin[teta]^2, f[teta], teta]//Simplify
f[teta_]= f[teta]/.sol[[1]]

(*Élimination de la cte d'intégration en utilisant la cond. lim. en Pi/2*)
sol= Solve[f[Pi/2]==0, C[1]]
f[teta_]= f[teta]/.sol[[1]]

(*Calcul de B avec la cond. lim. en beta*)
sol= Solve[f[beta]==Sin[beta], B]
B= B/.sol[[1]]

beta= Pi/2-epsilon
B= FullSimplify[B, 0<epsilon<Pi/2]
```



on obtient

$$B = -\frac{2}{\ln \tan[(\pi + 2\epsilon)/4] + (\sin \epsilon)/(\cos^2 \epsilon)}. \quad (\text{C.76})$$

Ce qui importe est la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Avec la commande `Series[B,epsilon,0,0]` on obtient

$$B = -\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon}[1 + O(\epsilon^2)]. \quad (\text{C.77})$$

En égalant avec l'expression de  $B$  fonction de  $\Gamma$ ,  $a$ ,  $\omega$  et  $\eta$ , on obtient

$$\eta = \frac{3\Gamma\epsilon}{2\pi a^3\omega}[1 + O(\epsilon^2)], \quad (\text{C.78})$$

ce qui *valide par un calcul rigoureux* la formule (C.74), et montre que l'erreur commise en utilisant la formule (C.74) est d'ordre  $\epsilon^2$  donc *très faible*.

### Compléments sur le problème 4.3

- On peut montrer que, pour un liquide non newtonien aussi, l'estimation (C.74) est une excellente approximation, i.e. on a

$$\boxed{\eta((\omega/\epsilon)^2) = \frac{3\Gamma\epsilon}{2\pi a^3\omega} [1 + O(\epsilon^2)]}. \quad (\text{C.79})$$

Les grandes lignes de cette démonstration (avec des notations légèrement différentes, et dans un cas différent où le plan est tournant tandis que le cône est fixe) peuvent se trouver, par exemple, dans la section 2.8 de [Bernardin \(2003\)](#). Je me suis d'ailleurs inspiré de ce document pour mettre au point ce problème.

- On peut à juste titre se poser des questions sur des effets de pression dans ce système. Dans le cadre du modèle simple utilisé ici, l'équation locale de la quantité de mouvement donnerait que la pression motrice  $\hat{p}$  est uniforme, i.e.

$$p \simeq p_0 - \rho g z.$$

Cette expression n'est pas compatible avec la condition à l'interface, pour l'instant supposée sphérique, entre le liquide et l'air, que l'on peut supposer parfait,

$$p = p_{\text{atm}} + 2\gamma/a,$$

avec  $\gamma$  le coefficient de tension superficielle correspondant. En réalité, l'interface présente un bourrelet dans sa région inférieure proche du plan... Et des effets de « mouillabilité » du plan et du cône peuvent aussi jouer...

- En *rhéologie* on écrit le plus souvent, au lieu de la relation (2) de l'énoncé,

$$\eta = \eta(D_2) \quad \text{avec} \quad D_2 = 2 \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}}, \quad (\text{C.80})$$

une relation de la forme

$$\eta = \eta(\dot{\gamma}) \quad (\text{C.81})$$

$$\text{avec } \dot{\gamma} \text{ le « taux de cisaillement » défini en général par } \dot{\gamma} = \sqrt{D_2}. \quad (\text{C.82})$$

L'inconvénient est que  $\dot{\gamma}$  n'est pas en général une fonction régulière de  $\overline{\mathbf{v}}$  quand  $\overline{\mathbf{v}} \rightarrow \overline{\mathbf{0}}$ . Cependant, l'avantage est qu'en écoulement viscométrique  $\dot{\gamma}$  a une interprétation très simple, donc, cette convention est quasiment toujours adoptée.

**Problème 4.4 Étude de l'écoulement dans une cavité rotor-stator étendue**
**I Mise en place d'un modèle auto-similaire**

**I.1** Frontière pas importante car éloignée :  $a \gg d$ .

**I.2** Adhérence aux parois :  $\bar{\mathbf{v}}(z=0) = \bar{\mathbf{v}}_{\text{stator}} = \bar{\mathbf{0}}$  et  $\bar{\mathbf{v}}(z=d) = \bar{\mathbf{v}}_{\text{rotor}} = \omega r \bar{\mathbf{e}}_\theta$ .

**I.3** Conservation de la masse... Après intégration par rapport à  $r$  :

$$v_r(r,z) = -\frac{1}{2}r h'(z) = r f(z) \quad \text{avec} \quad \boxed{f(z) = -\frac{1}{2}h'(z)}. \quad (\text{C.83})$$

$$\text{I.4} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = \nu h''(z) - h(z) h'(z) \implies \hat{p} = \rho[\pi_1(r) + \pi_2(z)].$$

$$\text{I.5} \quad r f^2(z) + r f'(z) h(z) - \frac{v_\theta^2}{r} = -\pi_1'(r) + \nu r f''(z)$$

$$\pi_3(r,z) = \frac{\pi_1'(r)}{r} - \frac{v_\theta^2(r,z)}{r^2} = \nu f''(z) - f^2(z) - f'(z) h(z) = \pi_3(z).$$

**I.6** Sur le stator, il vient

$$\pi_1'(r) = r \pi_3(0).$$

Intégration par rapport à  $r$ , comme  $\pi_1$  est définie à une constante près  $\implies$

$$\pi_1(r) = \frac{1}{2}kr^2 \quad \text{avec} \quad k \text{ constante réelle.}$$

$$\text{I.7} \quad \text{Équation de définition de } \pi_3 \quad \iff \quad \pi_3(z) = k - \frac{v_\theta^2(r,z)}{r^2} \iff v_\theta(r,z) = r g(z).$$

$$\text{I.8} \quad \boxed{k - g^2(z) = \nu f''(z) - f^2(z) - f'(z) h(z)}. \quad (\text{C.84})$$

$$\text{I.9} \quad \boxed{2 f(z) g(z) + g'(z) h(z) = \nu g''(z)}. \quad (\text{C.85})$$

**II Adimensionnement du modèle auto-similaire**

**II.1**  $f(z) = \omega F(\zeta)$ ,  $g(z) = \omega G(\zeta)$  et  $h(z) = \omega d H(\zeta)$ .

$$\text{II.2} \quad \boxed{F(0) = G(0) = H(0) = 0, \quad F(1) = H(1) = 0 \quad \text{et} \quad G(1) = 1}.$$

**II.3**  $k \equiv v^2/\ell^2 \equiv t^{-2}$  donc il faut introduire  $K = k/\omega^2$ .

**II.4** Chaque dérivée par rapport à  $z$  introduit un facteur  $1/d$ , puisque

$$\frac{d}{dz} = \frac{d\zeta}{dz} \frac{d}{d\zeta} = \frac{1}{d} \frac{d}{d\zeta}.$$

$$\text{EDO (C.83)} \quad \iff \quad \boxed{F(\zeta) = -\frac{1}{2}H'(\zeta)}. \quad (\text{C.86})$$

$$\text{EDO (C.84)} \iff \boxed{K - G^2(\zeta) + F^2(\zeta) + F'(\zeta) H(\zeta) = \frac{F''(\zeta)}{R}} \quad (\text{C.87})$$

$$\text{avec } \boxed{R = \frac{d^2\omega}{\nu}} \text{ un nombre de Reynolds.} \quad (\text{C.88})$$

$$\text{EDO (C.85)} \iff \boxed{2F(\zeta) G(\zeta) + G'(\zeta) H(\zeta) = \frac{G''(\zeta)}{R}}. \quad (\text{C.89})$$

Ainsi  $\alpha = \beta = 2$ .

### III Étude du cas $R$ infinitésimal

**III.1**  $R$  infinitésimal  $\iff$  diffusion visqueuse domine  $\longleftrightarrow$  régime des *écoulements de Stokes*.

**III.2**  $F'' = 0$  et  $G'' = 0 \implies F(\zeta) = 0$  et  $G(\zeta) = \zeta$   
compte tenu des conditions limites. Ainsi

$$H(\zeta) = 0.$$

En dimensionnel

$$\bar{\mathbf{v}} = v_\theta(r, z) \bar{\mathbf{e}}_\theta = \omega r \frac{z}{d} \bar{\mathbf{e}}_\theta,$$

soit un écoulement purement azimutal, de profil linéaire en  $z$  : écoulement de type *Couette*.

### IV Étude asymptotique du cas $R$ fini et analyse physique

**IV.1**  $G_0(\zeta) = \zeta$ .

**IV.2** Insertion des développements en série dans les conditions limites, prise en compte de la valeur de  $G_0$ , et identification des termes dominants, i.e. des facteurs des plus petites puissances de  $R \implies$

$$F_1(0) = F_1(1) = G_2(0) = G_2(1) = H_1(0) = H_1(1) = 0.$$

**IV.3** 2ème EDO de l'énoncé  $\implies$

$$R^2 F_1^2 - (\zeta + R^2 G_2)^2 + R^2 F_1' H_1 + O(R^4) = -K_0 + F_1'' + O(R^2)$$

soit, à l'ordre dominant  $R^0$ ,

$$-\zeta^2 = F_1'' - K_0. \quad (\text{C.90})$$

Conditions limites sur  $F_1 \implies$

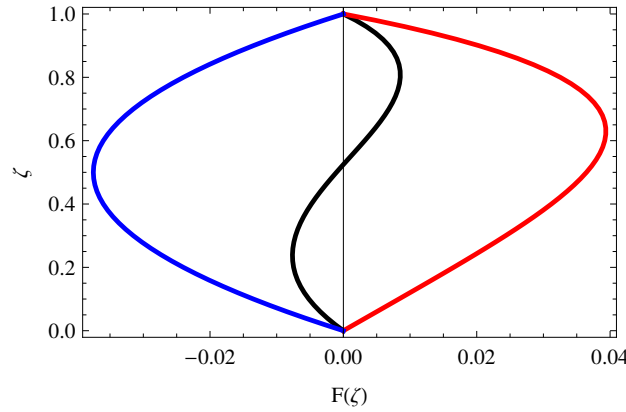
$$F_1(\zeta) = \frac{1}{12}(1 - 6K_0)\zeta + \frac{1}{2}K_0\zeta^2 - \frac{1}{12}\zeta^4. \quad (\text{C.91})$$

**IV.4** 1ère EDO de l'énoncé donne à l'ordre dominant

$$H_1' = -2F_1 \iff H_1(\zeta) = \frac{1}{12}(6K_0 - 1)\zeta^2 - \frac{1}{3}K_0\zeta^3 + \frac{1}{30}\zeta^5$$

compte tenu aussi de la condition limite  $H_1(0) = 0$ . Autre condition limite  $H_1(1) = 0 \implies$

$$\boxed{K_0 = \frac{3}{10}}. \quad (\text{C.92})$$



**Fig. C.10** – Fonctions  $F_1(\zeta)$  en noir,  $F_p(\zeta)$  en bleu et  $F_i(\zeta)$  en rouge.

Ainsi la pression motrice

$$\hat{p} = \frac{1}{2}\rho K\omega^2 r^2 + \rho\pi_2(z) \quad (\text{C.93})$$

avec pour  $R$  petit  $K \simeq K_0 > 0$  : augmentation rapide de la pression motrice quand la distance  $r$  à l'axe de rotation augmente. Cette **augmentation de la pression motrice vers l'extérieur** est sans doute liée à la **force centrifuge** associée à la rotation du rotor, et agissant sous celui-ci.

**IV.5** Au final

$$F_1(\zeta) = -\frac{1}{15}\zeta + \frac{3}{20}\zeta^2 - \frac{1}{12}\zeta^4, \quad (\text{C.94})$$

qui correspond au graphe noir de la Fig. C.10 : **écoulement radial centrifuge sous le rotor et centripète au dessus du stator**.

**IV.6** Comme la 2ème EDO de l'énoncé, une fois prise à l'ordre le plus bas, est l'EDO linéaire inhomogène (C.90),

$$F_1'' = K_0 - G_0^2 = K_0 - \zeta^2,$$

on peut bien écrire sa solution comme une superposition des solutions de

$$F_p'' = K_0 \iff F_p(\zeta) = \frac{1}{2}K_0\zeta(\zeta - 1).$$

et

$$F_i'' = -G_0^2 = -\zeta^2 \iff F_i(\zeta) = \frac{1}{12}\zeta(1 - \zeta^3),$$

d'où les graphes bleu et rouge de la Fig. C.10. On a donc **compétition** entre

- l'**effet de l'augmentation de pression vers l'extérieur**, qui tend à repousser le fluide vers l'intérieur (effet centripète « bleu »)
- et l'**effet de la force centrifuge associée au mouvement du rotor**, qui tend à pousser le fluide vers l'extérieur (effet centrifuge « rouge »); de fait le terme en  $-G_0^2$  ci-dessus provient du terme en  $-\rho v_\theta^2/r$  dans l'équation de la quantité de mouvement radiale, qui passé à droite de cette équation, et supposant  $v_\theta = \omega r$ , est le terme de force d'inertie centrifuge  $\rho\omega^2 r \bar{\mathbf{e}}_r$  avec les notations de l'annexe A de [Plaut \(2015b\)](#).

## Compléments sur le problème 4.4

- L'effet centrifuge (« rouge ») l'emporte sous le rotor, mais on peut noter qu'en moyenne aucun effet ne l'emporte, puisque

$$\int_0^1 F_1(\zeta) d\zeta = 0$$

soit, en dimensionnel et à l'ordre le plus bas,

$$\int_0^d v_r(r, z) dz = 0. \quad (\text{C.95})$$

Cette contrainte de « débit radial nul » peut être interprétée comme résultant de l'incompressibilité, le fluide ne pouvant par exemple globalement diverger du centre sans se dilater. Plus mathématiquement une prise de moyenne de l'équation de conservation de la masse par rapport à  $z$  (ce qu'indiquent les guillemets simples avec  $z$  en indice) donne

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \langle r v_r(r, z) \rangle_z = - \left\langle \frac{\partial v_z(r, z)}{\partial z} \right\rangle_z = - [v_z(r, z)]_{z=0}^{z=d} = 0$$

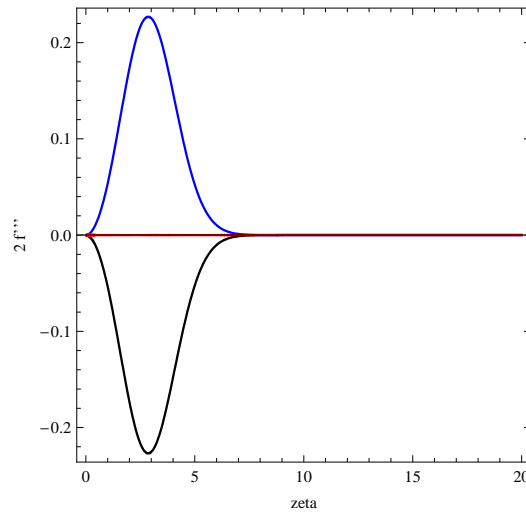
d'après la condition d'imperméabilité des parois. En conséquence le produit  $r \langle v_r(r, z) \rangle_z$  est indépendant de  $r$ . Comme il est nul en  $r = 0$  il est nul partout, ce qui permet d'établir la propriété (C.95) en général.

- Ce problème s'inspire grandement d'une étude historique présentée dans [Batchelor \(1951\)](#) et reprise dans [Lance & Rogers \(1962\)](#). En hommage à Batchelor, on appelle d'ailleurs l'écoulement étudié ici « *écoulement de Batchelor* ». Pour que cet écoulement soit réalisé, il faut que le fluide contenu dans la cavité soit enfermé dans un « carter » extérieur, afin de supporter l'augmentation de pression dans la direction radiale, liée à la rotation, mise en évidence au niveau de l'équation (C.93).
- La méthode de calcul perturbative pour étudier l'influence des termes non linéaires inertiels sur l'écoulement peut être qualifiée de « *méthode faiblement non linéaire* ». Elle permet de transformer le problème non linéaire (4.38), (4.39), (4.40) en une suite de problèmes linéaires inhomogènes dont fait partie, par exemple, l'équation (C.90). On retrouve des méthodes similaires en théorie des instabilités par exemple.

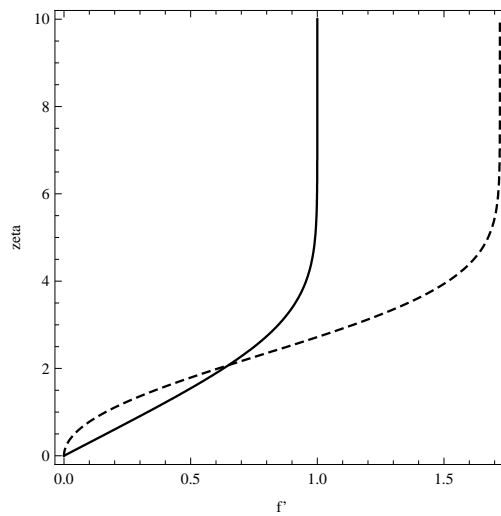
## C.5 Corrigés du chapitre 5 - Couches limites

### Problème 5.1 Étude de la couche limite de Blasius

1  $f''(0) = 0,332057$ .



2.1



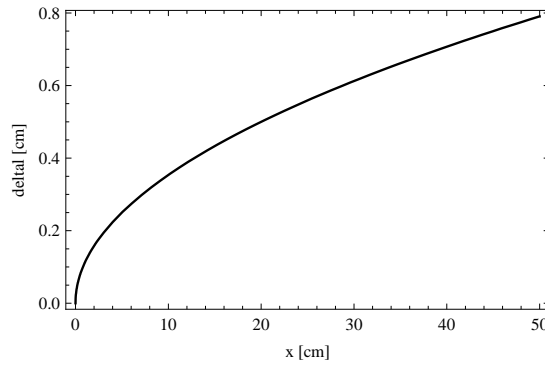
La courbe tiretée montre que l'on a des vitesses transverses  $v$  positives; on parle de « vitesses de déplacement ». Elles sont faibles en pratique à cause du facteur  $\sqrt{\nu U/x}$  dans l'expression de  $v$ ,

$$\sqrt{\frac{\nu U}{x}} = U \frac{\delta}{x} = U Re_{\text{extérieur}}^{-1/2} \ll U .$$

2.2  $\zeta_l = 5 \implies \delta_l = y(\zeta_l) = \delta \zeta_l = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} .$

2.3.1  $x_0 \simeq 100\nu/U \simeq 0,5 \text{ mm}$  très petite  $\implies$  ne pas s'en préoccuper.

2.3.2

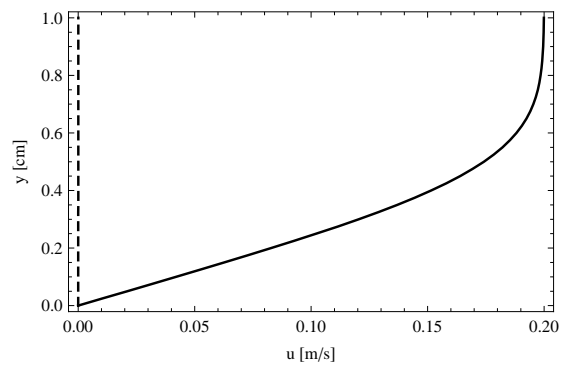
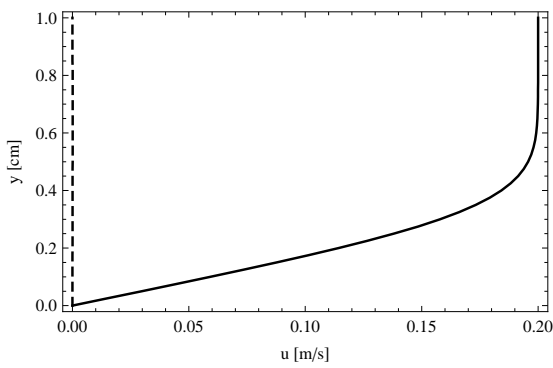


La couche limite porte bien son nom car elle est très fine, au plus 8 mm à la fin de la plaque.

2.3.3

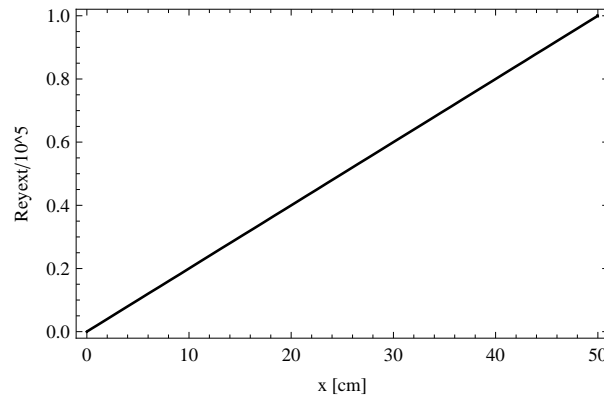
À  $x = 25$  cm :

À  $x = 50$  cm :



$v$  est bien négligeable devant  $u$ ; on observe aussi l'épaississement de la couche limite lorsque  $x \uparrow$ .

2.3.4



On reste sous  $Re_{\text{extérieur}} \leq 10^5$  donc la couche limite reste laminaire.

3.1  $T_x = \eta \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\frac{\eta U^3 \rho}{x}} \alpha .$

3.2  $C_f(x) = \frac{2\alpha}{\sqrt{Re_{\text{extérieur}}}} = \frac{2\alpha}{Re_{\text{local}}} = \frac{0,664}{Re_{\text{local}}} .$

3.3  $F_x = \frac{1}{2} \rho U^2 L_3 4\alpha \sqrt{\nu L / U} \implies C_F = 1,33 / Re_{\text{local}}(L) .$

3.4  $C_f = 0,0021 , C_F = 0,0042 , F_x = 0,0210 \text{ N} .$

3.5 Les mesures à haut Reynolds correspondent à des couches limites *turbulentes*.

**Problème 5.3 Couches limites : généralités, couches limites aspirée et standard**

**Généralités - Épaisseur de déplacement et coefficient de frottement**

**1.a**  $q = L_3 \int_{y=0}^H u(x_0, y) dy .$

**1.b**  $q_p = L_3 \int_{y=0}^H U dy .$

Dans la couche limite,  $u < U$ , donc  $q < q_p$ , car les frottements visqueux dans la couche limite ralentissent le fluide.

**1.c**  $q' = L_3 \int_{y=\delta_d}^H U dy = L_3 \int_{y=0}^H U dy - L_3 \delta_d U = q \iff \delta_d = \int_{y=0}^H [1 - u(x_0, y)/U] dy .$

Par prolongement continu, l'épaisseur de déplacement

$$\boxed{\delta_d = \int_{y=0}^{+\infty} [1 - u(x_0, y)/U] dy} . \tag{C.96}$$

**2**

$$T_x = 2\eta D_{xy}(x, 0) = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (x, 0) = \eta \frac{\partial u}{\partial y} (x, 0) \implies \boxed{C_f(x) = \frac{2\nu}{U^2} \frac{\partial u}{\partial y} (x, 0)} . \tag{C.97}$$

**Couche limite aspirée asymptotique**

**3.a** On suppose le fluide incompressible :

$$\forall x \gg x_a, \quad \forall y > 0, \quad \text{div} \bar{v} = 0 \iff \frac{dv}{dy} = v' = 0 ,$$

d'où, avec la condition d'aspiration (CLAS),

$$\forall x \gg x_a, \quad \forall y > 0, \quad v = -V .$$

**3.b** Première équation de Prandtl  $\iff \forall y > 0, \quad u'' = -\frac{V}{\nu} u' \iff u = u_0 + u_1 \exp(-Vy/\nu)$ .  
 (CLAD)  $\implies u_1 = -u_0$ ; condition de raccord  $u(+\infty) = U \implies u_0 = U$

$$\implies \boxed{u(y) = U [1 - \exp(-Vy/\nu)]} . \tag{C.98}$$

Pour le tracé de ce profil, voir la figure C.11a.

**4.a**  $\delta_1 = \delta_d = \int_0^{+\infty} \exp(-Vy/\nu) dy = \nu/V .$

$\nu \downarrow \implies \delta_1 \downarrow$  car on se rapproche du cas du fluide parfait où il n'y a pas de couche limite.

$V \uparrow \implies \delta_1 \downarrow$  car la couche limite plus aspirée devient plus fine et plus « collée ».

**4.b**  $\delta_1 = 1,51 \text{ mm} .$

**5.a**  $C_f = (2\nu/U^2) du/dy(0) = 2V/U .$

Coefficient « global », non « local », du fait de l'uniformité de la couche limite dans la direction  $x$ .

$V \uparrow \implies \delta_1 \downarrow \implies$  gradients de vitesse augmentent dans la couche limite qui devient très fine,  $C_f \uparrow$ . Comme  $C_f$  est adimensionnel, il ne peut finalement qu'être proportionnel à  $V/U$ .



**5.b**  $C_f = 2 \cdot 10^{-3}$ .

### Couche limite non aspirée standard

#### 6 Blasius.

**7.a**  $\delta_2 = \delta_a(x) = \int_0^{+\infty} [1 - f'(y/\delta)] dy$  avec  $\delta = \delta(x) = \sqrt{\nu x/U}$  l'échelle de la couche limite.

Changement de variable  $\zeta = y/\delta \implies \delta_2 = \delta \int_0^{+\infty} [1 - f'(\zeta)] d\zeta$ .

#### 7.b Programme Mathematica :

(\* Paramètre de troncature : valeur max de zeta \*) `zmax= 20`

(\* Calcul de f \*)

```
sol= NDSolve[{2 f'''[z] + f[z] f''[z]==0, f[0]==0, f'[0]==0, f'[zmax]== 1}, f[z], {z,0,zmax}]
f[z_]= Replace[f[z],sol[[1]]]
```

(\* Test : on retrouve bien la valeur 0.332057 trouvée en TD \*) `alpha= f''[0]`

(\* Calcul de l'intégrale \*) `int= NIntegrate[1-f'[z],{z,0,zmax}]`

Test de robustesse vis-à-vis de modifications de la valeur du paramètre de troncature `zmax` : passer de `zmax= 20` à `zmax= 30` ne change aucun des 6 premiers chiffres significatifs de l'intégrale, on peut garder avec confiance les 3 premiers :

$$\int_0^{+\infty} [1 - f'(\zeta)] d\zeta = 1,72 \implies \delta_2(x) = 1,72 \delta(x) = 1,72 \sqrt{\nu x/U}. \quad (\text{C.99})$$

**7.c**  $\delta_2(x = 1 \text{ m}) = 2,11 \text{ mm} > \delta_1$ . La couche limite aspirée est plus mince, à cause de l'aspiration de cette couche, qui la « colle » et « amincit ».

**8.a**  $C_f(x) = 2f''(0)\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = 0,664\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}$ .

$\nu \downarrow \implies C_f \downarrow$ , on se rapproche bien du cas du fluide parfait  $C_f = 0$ .

$U \uparrow \implies C_f \downarrow$  à cause du facteur  $U^{-2}$  dans la définition de  $C_f$ .

$x \uparrow \implies C_f \downarrow$  car la couche limite s'épaissit donc les gradients de vitesse diminuent.

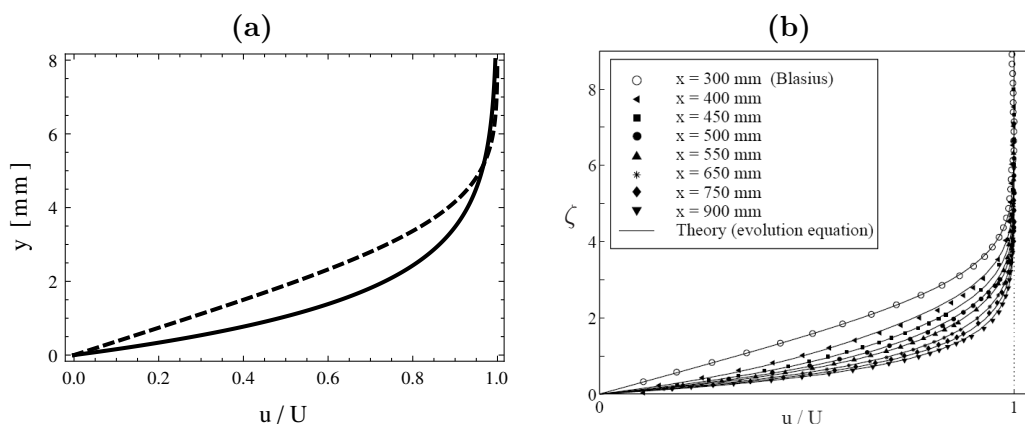
**8.b**  $C_f(x = 1 \text{ m}) = 8,16 \cdot 10^{-4}$ , coefficient plus faible que dans la couche limite aspirée, ce qui est cohérent avec le fait que la couche de Blasius considérée ici soit plus épaisse.

### Comparaison et prise de recul

**9** On choisit, afin de voir toutes les couches limites,  $y_{\max} \simeq 4 \max(\delta_1, \delta_2) \simeq 8 \text{ mm}$ . Avec Mathematica, on obtient la figure C.11a. On observe bien que la couche aspirée est plus fine que la couche de Blasius.

**10** Ces calculs reposent sur l'hypothèse de couches limites *laminaires*. Une *transition vers la turbulence* risque néanmoins de se produire ! Dans le cas de la couche limite de Blasius, on dispose d'un critère de transition, basé sur le calcul du nombre de Reynolds local

$$Re_{\text{local}} = \frac{U\delta}{\nu} \simeq 810$$



**Fig. C.11** – **a** : Dans le cas considéré dans l'énoncé de couches limites d'air, profils calculés de la couche aspirée (courbe continue) et de celle standard de Blasius à  $x = 1$  m (courbe tiretée). **b** : Résultats expérimentaux de [Fransson & Alfredsson \(2003\)](#), montrant la transition progressive de la couche de Blasius à la couche aspirée, lorsque  $x$  augmente. L'axe des ordonnées correspond à la variable réduite  $\zeta = y/\delta(x)$  avec  $\delta(x) = \sqrt{\nu x/\bar{U}}$ . L'aspiration démarre à une distance  $x_a = 360$  mm du bord d'attaque.

ici. Il est largement supérieur à 300, on s'attend à ce que la couche de Blasius soit perturbée et modifiée par des *effets de turbulence*. Même en ne considérant que l'écoulement moyen, on aura sans doute des effets de turbulence qui feront que son profil différera de celui montré sur la figure C.11a. Si on voulait faire une comparaison expérimentale entre les couches limites laminaires aspirée et standard, il faudrait de toute manière avoir un écoulement amont très propre, introduisant le minimum de perturbations, pour retarder au maximum la transition, puis, soit travailler avec un écoulement moins rapide ( $U \downarrow$ ), soit plus près du bord d'attaque ( $x \downarrow$ ), mais alors pour la couche aspirée le régime asymptotique d'invariance par rapport à  $x$  ne sera peut-être pas atteint, il faudrait donc mieux privilégier la première option.

### Compléments sur le problème 5.3

- Dans une soufflerie, en travaillant avec  $U = 5$  m/s, des couches limites de Blasius et aspirée ont bien été obtenues expérimentalement par [Fransson & Alfredsson \(2003\)](#), comme le montre la Fig. C.11b. La transition progressive de la couche de Blasius à la couche aspirée asymptotique a d'ailleurs été modélisée par une équation d'évolution du profil, donnant de très bons résultats...
- [Fransson & Alfredsson \(2003\)](#) et d'autres auteurs ont montré que l'aspiration a un effet stabilisant sur la couche limite, vis-à-vis de la transition vers la turbulence. Cependant, l'aspiration a un coût en terme d'installations, de puissance de pompage et de coefficient de frottement...

**Problème 5.4** *Étude des couches limites de Falkner-Skan*

$$1 \quad \widehat{p}_{\text{extérieur}}(x,0) = \widehat{p}_0 - \frac{\rho}{2} A^2 x^{2m}.$$

$$2 \quad \text{Première équation de Prandtl : } u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = mA^2 x^{2m-1} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Si  $m > 0$ , l'écoulement extérieur est accéléré quand  $x \uparrow$ ,  $\partial \widehat{p} / \partial x < 0$ , le gradient de pression est favorable.

Si  $m < 0$ , l'écoulement extérieur est ralenti quand  $x \uparrow$ ,  $\partial \widehat{p} / \partial x > 0$ , le gradient de pression est défavorable.

$$3 \quad \delta = \sqrt{\nu x^{1-m} / A}.$$

$$4 \quad P = \sqrt{\nu A x^{m+1}}.$$

$$5 \quad u = Ax^m f'(\zeta), \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\nu A x^{m-1}} [(1-m)\zeta f'(\zeta) - (1+m)f(\zeta)].$$

$$6.1 \quad a = \frac{1+m}{2}, \quad b = -m, \quad c = m.$$

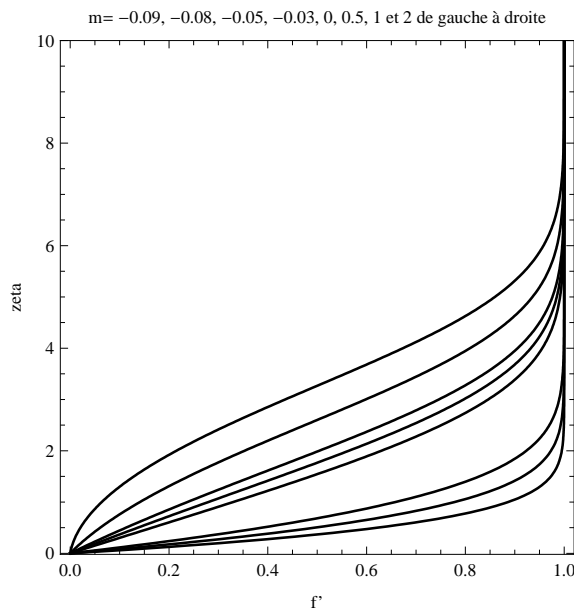
$$6.2 \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(+\infty) = 1.$$

6.3 Équation et solution de Blasius.

7 En procédant pas à pas on peut monter sans difficulté jusque  $m = 2$ , mais, malgré toute tentative de raffinement du pas, on ne peut descendre sous

$$m_c = -0,0905.$$

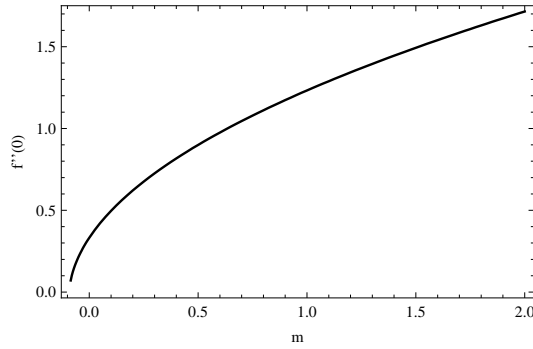
On obtient les profils de couche limite de la figure suivante :



La couche limite est d'autant plus épaisse que le gradient de pression est défavorable.

$$8 \quad \beta_c = 3,45 \text{ rad} \implies \gamma_c = 0,313 \text{ rad} = 18^\circ.$$

9



Si  $f''(0) < 0$  on aurait  $u < 0$  au début de la couche limite, qui redeviendrait ensuite  $> 0$  pour adhérer à l'écoulement extérieur. Au niveau du point de changement de signe où  $u = 0$ , l'hypothèse de couche limite (5.5) serait violée, ces solutions ne sont pas physiquement acceptables.

### C.6 Corrigés du chapitre 6 - Écoulements turbulents

#### Exercice 6.1 Estimation d'ordres de grandeur en écoulement turbulent

1  $Re = 10^7 \gg 1$ .

2  $\ell_K = 18 \mu\text{m}$ .

3  $\epsilon = 10 \text{ W/kg}$ , c'est cher !

4  $N_g = (10\alpha)^3 Re_\ell^{9/4}$  avec  $\alpha \simeq 6$  nombre de points de grille sur un segment de taille  $\ell_K$ .  
 $N_g = 4 \cdot 10^{16}$  points  $\rightarrow N_{\text{réels}} = 1,5 \cdot 10^{17} \rightarrow N_{\text{octets}} = 1,2 \cdot 10^{18}$  octets  $\rightarrow N_{\text{Go}} = 1,2 \cdot 10^9$  Go.  
 Or les plus grands clusters du monde (une petite dizaine existe...) sont constitués d'environ 10000 unités de 32 Go chacune ce qui correspond à une mémoire vive de seulement  $3 \cdot 10^5$  Go...

#### Problème 6.1 Modèle simplifié de turbulence en proche paroi - Lois de paroi

1 Équation de Reynolds dans la direction 1 :  $0 = \eta \frac{d^2 V_1}{dx_2^2} + \frac{d\tau_{12}^t}{dx_2}$ .

Équation de Reynolds dans la direction 2  $\implies \hat{P} = \hat{P}_0 - \rho \langle v_2' v_2' \rangle$ .

2  $\eta \frac{dV_1}{dx_2} + \tau_{12}^t = \tau_p$ .

3.a  $v_p = \sqrt{\tau_p / \rho}$ ,  $\ell_p = \nu / v_p$ .

3.b  $y^+ = \frac{x_2 v_p}{\nu}$  est un nombre de Reynolds local,  $\frac{dU^+}{dy^+} + \tau_{12}^{ta} = 1$ .

4 En proche paroi,  $\tau_{12}$  est négligeable  $\implies U^+ = y^+$ .

5 En couche externe,  $dU^+ / dy^+$  est négligeable  $\implies U^+ = \frac{1}{\chi} \ln y^+ + C$ .

6  $y_{\text{tampon}}^+ = 10,8$ .

7.a Cf. le modèle de Boussinesq :  $\tau_{22}^t$  indépendante de  $x_2 \iff K$  indépendante de  $x_2$ .

**7.b** En égalisant les estimations de la viscosité turbulente données par les modèles de Prandtl et  $K - \varepsilon$ , on obtient

$$\nu^t = \chi v_p x_2 = C_\nu \frac{K^2}{\varepsilon} .$$

L'équation de l'énergie cinétique donne alors

$$\varepsilon = \frac{v_p^3}{\chi x_2} \quad \text{d'où} \quad K = \frac{v_p^2}{\sqrt{C_\nu}} \quad \text{puis} \quad -\frac{\langle v'_1 v'_2 \rangle}{K} = \sqrt{C_\nu}$$

avec le modèle de Boussinesq.

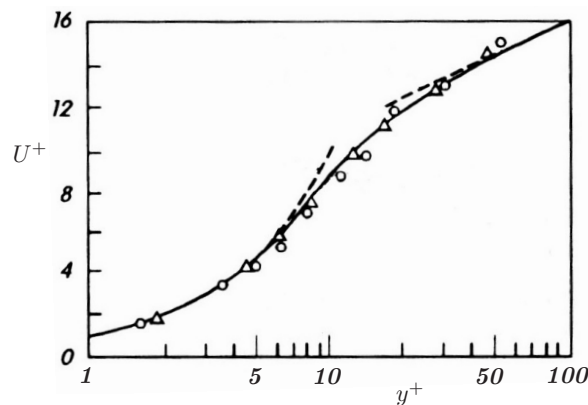
**8** Équation de la dissipation avec hypothèse que la dispersion turbulente domine la diffusion visqueuse

$$\implies (C_{2\varepsilon} - C_{1\varepsilon}) \frac{\sqrt{C_\nu}}{\chi^2} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$$

vérifiée à 11% près seulement avec les valeurs standard du modèle  $K - \varepsilon$ .

### Complément C.2 Lois de paroi

Les « *lois de paroi* » précédentes sont bien vérifiées, comme le montre la figure suivante tirée de [Schlichting & Gersten \(2000\)](#), sur laquelle les triangles et cercles représentent des données expérimentales :



La position de la limite extérieure de la couche externe dépend des écoulements ; typiquement elle se trouve vers  $y^+ \simeq 400$ .

Ces lois de parois donnant  $U^+$ ,  $K$  et  $\varepsilon$  sont utilisées dans le modèle  $K - \varepsilon$  comme « *conditions limites générales* » au voisinage d'une paroi ; typiquement on les écrit en  $y^+ = 30$ . Un problème est que  $v_p$  et  $\tau_p$  ne sont pas connues a priori mais déterminées, physiquement, par des conditions d'entrée - sortie « globales »... Ou, éventuellement, de façon itérative, en partant d'une estimation simple de la forme

$$v_p = 0,05 V_{\max} ,$$

estimation qui, parfois, n'est même pas raffinée... Un exemple d'utilisation de conditions limites de ce type est donné dans le problème [6.2](#).

**Exercice 6.4** *Modèle  $K - \varepsilon$  de turbulence de grille et mesure de la constante  $C_{2\varepsilon}$*

$$1 \quad V_1 \frac{\partial K}{\partial x_1} = -\varepsilon \quad \text{et} \quad V_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} = -C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{K} .$$

$$2 \quad C_{2\varepsilon} = \frac{n+1}{n} = 1,92 .$$

3 Dans l'équation d'évolution de  $K$  par exemple,

$$\nu^t \frac{\partial^2 K}{\partial x_1^2} \ll \varepsilon \quad \text{car} \quad K \ll V_1^2$$

car intensité de turbulence de l'ordre de 5% au maximum.

**Problème 6.2** *Écoulements en tuyau : cas laminaire et turbulent en modèle  $K - \varepsilon$*

$$1.a \quad V_0 = U_0/2, \quad \lambda_{\text{lam}} = 64/Re \quad \text{et} \quad Re = R .$$

$$1.b \quad \tau_p = 2\eta \frac{U_0}{a} = \frac{1}{2} G_{\text{lam}} a .$$

L'expression en fonction de  $U_0$  est physique ; par exemple  $\eta \uparrow \Rightarrow \tau_p \uparrow$  est évidente... L'expression en fonction de  $G_{\text{lam}}$  est aussi physique : les frottements sur les parois compensent exactement le différentiel de force de pression entre l'amont et l'aval. D'ailleurs cette relation peut se déduire d'un bilan de force global (cf. le problème de test de janvier 2014 de [Plaut 2015b](#)).

$$1.c \quad v_p = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\nu U_0}{a}} = U_0 \sqrt{\frac{2}{R}} .$$

Sauf écoulement très lent,  $R > 2$  donc  $v_p < U_0$ . Plus l'écoulement est rapide, plus  $v_p/U_0$  est petite : l'écart entre la vitesse de frottement, pertinente près de la paroi, et la vitesse au centre, s'accroît naturellement.

$$2 \quad \overline{\nabla \mathbf{V}} = U'(r) \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_r \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathbf{D}(\mathbf{V})} = \frac{1}{2} U'(r) (\bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_z) .$$

$$3.a \quad \bar{\mathbf{0}} = -\overline{\nabla \hat{P}} - \frac{2}{3} \rho \overline{\nabla K} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r T_{rz}) \bar{\mathbf{e}}_z \quad \text{avec} \quad \overline{\mathbf{T}} = 2(\eta + \eta^t) \overline{\mathbf{D}(\mathbf{V})} .$$

$$3.b \quad \text{Par intégration des composantes } r \text{ et } \theta, \quad \hat{P}(r, z) = \Pi(z) - \frac{2}{3} \rho K(r) .$$

$$3.c \quad \text{Composante } z \quad \Longleftrightarrow \quad \Pi'(z) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r T_{rz}(r)] = \text{constante} = -G .$$

$G$ , opposé du gradient de pression motrice axial moyen, contrôle en particulier les pertes de charge moyennes

$$\delta \hat{P} = \hat{P}(r, z=0) - \hat{P}(r, z=L) = GL ,$$

donc la puissance moyenne nécessaire pour entretenir l'écoulement.

$$3.d \quad T_{rz}(r) = (\eta + \eta^t) U'(r) = -\frac{1}{2} Gr .$$

Dans le cas laminaire

$$\eta u'(r) = \eta U_0 (-2r/a^2) = -\frac{1}{2} G_{\text{lam}} r ,$$

qui est même, sauf que  $\eta^t = 0$  : l'effet de la turbulence est d'augmenter  $\eta$  de  $\eta^t$ .

4 À la paroi,  $\eta^t = 0$  donc

$$\eta U'(a) = -\frac{1}{2}Ga \implies \boxed{\tau_p = \frac{1}{2}Ga} . \quad (\text{C.100})$$

Soit, en fonction de  $G$ , la même expression qu'en laminaire (cf. la réponse à la question 1.b); ce sont les valeurs de  $G$  et  $\tau_p$  qui vont augmenter par rapport au cas laminaire, à débit fixé.

5 
$$\overline{\nabla \mathbf{V}} : \overline{\mathbf{D}(\mathbf{V})} = \frac{1}{2}[U'(r)]^2 .$$

6 
$$0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r(\nu + \nu^t) K'(r)] + \nu^t [U'(r)]^2 - \varepsilon .$$

Le 1<sup>er</sup> terme est un terme de diffusion moléculaire ( $\nu$ ) et turbulente ( $\nu^t$ ). Le 2<sup>d</sup> est le terme de production de la turbulence par l'écoulement moyen. Le 3<sup>ème</sup> est le terme de dissipation qui tend au contraire à faire disparaître la turbulence.

7 
$$0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \left( \nu + \frac{\nu^t}{\sigma_\varepsilon} \right) \varepsilon'(r) \right] + C_{1\varepsilon} \nu^t \frac{\varepsilon}{K} [U'(r)]^2 - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{K} .$$

8 
$$\boxed{\hat{\nu}^t \frac{d\hat{U}}{d\hat{r}} = -2\hat{G}\hat{r}} . \quad (\text{C.101})$$

9 
$$\hat{\nu}^t = C_\nu R \frac{\hat{K}^2}{\hat{\varepsilon}} .$$

La proportionnalité entre  $\hat{\nu}^t$  et  $R$  montre que la viscosité turbulente augmente quand le Reynolds augmente. C'est normal, cela rejoint l'estimation d'ordre de grandeur de  $\nu^t/\nu$  faite en amphi.

10 
$$\boxed{\frac{1}{\hat{r}} \frac{d}{d\hat{r}} [\hat{r} \hat{\nu}^t \hat{K}'(\hat{r})] + \hat{\nu}^t [\hat{U}'(\hat{r})]^2 - R \hat{\varepsilon} = 0} . \quad (\text{C.102})$$

11 
$$\boxed{\frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{\hat{r}} \frac{d}{d\hat{r}} [\hat{r} \hat{\nu}^t \hat{\varepsilon}'(\hat{r})] + C_{1\varepsilon} \hat{\nu}^t \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{K}} [\hat{U}'(\hat{r})]^2 - C_{2\varepsilon} R \frac{\hat{\varepsilon}^2}{\hat{K}} = 0} . \quad (\text{C.103})$$

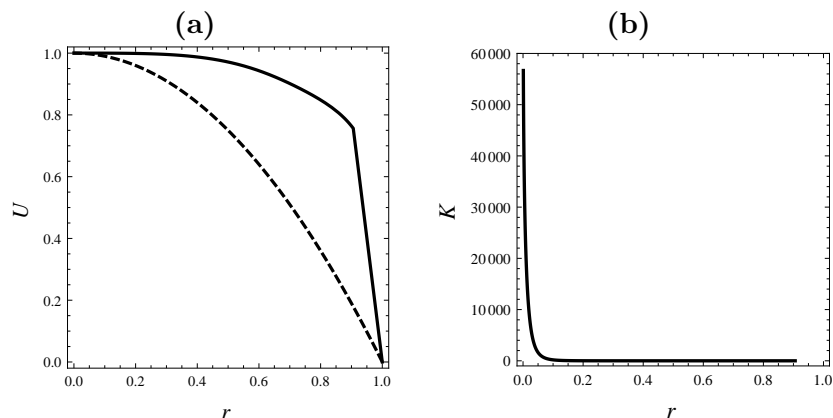
12.a 
$$\tau_p = 2\eta \frac{U_0}{a} \hat{G} .$$

12.b 
$$\hat{v}_p = \sqrt{2 \frac{\hat{G}}{R}} .$$

13.a 
$$x_2 = a - r .$$

13.b 
$$\hat{r} = \hat{r}_0 = 1 - \frac{y_0}{\sqrt{2\hat{G}R}} .$$

14 
$$\boxed{\hat{U}_{lp} = \sqrt{2 \frac{\hat{G}}{R}} \left( \frac{1}{\chi} \ln y_0 + C \right)} \quad (\text{C.104})$$



**Fig. C.12** – D’après le modèle d’écoulement turbulent en tuyau développé dans le problème 6.2, pour  $R = 5600$ , profils adimensionnés de **a** : vitesse moyenne, **b** : énergie cinétique fluctuante. À titre de référence, on a tracé sur la figure **a** le profil de l’écoulement laminaire (courbe pointillée).

15

$$\boxed{\hat{K}_{lp} = \frac{2}{\sqrt{C_\nu}} \frac{\hat{G}}{R}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d\hat{K}}{d\hat{r}} = 0} . \quad (\text{C.105})$$

16

$$\boxed{\hat{\varepsilon}_{lp} = \frac{(2\hat{G}/R)^{3/2}}{\chi} \frac{1}{1-\hat{r}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d\hat{\varepsilon}}{d\hat{r}} = \frac{(2\hat{G}/R)^{3/2}}{\chi} \frac{1}{(1-\hat{r})^2}} . \quad (\text{C.106})$$

17 En théorie c’est au centre que

$$\hat{U}(0) = U(0)/U_0 = 1 .$$

Mais  $\hat{r} = 0$  est un point singulier du système des coordonnées cylindriques, donc on ne va pas intégrer numériquement le système jusqu’en  $\hat{r} = 0$ , mais jusqu’à une valeur de  $\hat{r}$  petite,  $\hat{r} = \hat{r}_{00}$ . Idéalement il faudra vérifier que, si on modifie le petit paramètre  $\hat{r}_{00}$ , nos résultats seront inchangés.

18  $\hat{r}_0 = 0,9058$  . Mathematica donne

$$\text{erreur} = |\hat{U}(\hat{r}_{00}) - 1| = 1,73 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$$

comme annoncé dans l’énoncé, niveau suffisamment bas pour considérer que le modèle est bien résolu.

19 La formule proposée dans l’énoncé correspond à la fonction la plus simple qui relie la valeur de  $\hat{U}$  en  $\hat{r}_0$ , soit  $\hat{U}_{lp}$ , à la valeur nulle à la paroi  $\hat{r} = 1$ , du fait de la condition d’adhérence. La fonction  $\hat{U}$  ainsi prolongée sur  $[\hat{r}_{00}, 1]$  est représentée sur la figure C.12a. On observe un profil très plat au centre du tuyau, à cause de la diffusion turbulente.

$$20 \quad V_0 = \frac{2}{a^2} \int_{r=0}^a U(r) r dr \quad \iff \quad \hat{V}_0 = 2 \int_{\hat{r}=0}^1 \hat{U}(\hat{r}) \hat{r} d\hat{r} .$$

Mathematica donne

$$\hat{V}_0 = 0,8166 .$$

Comme le profil est plat, proche de  $\hat{U} = 1$  dans toute la région centrale, on a un débit réduit plus élevé qu’en laminaire, où  $\hat{V}_0 = 0,5$ .



$$21 \quad Re = 2\widehat{V}_0 R = 9146 \text{ avec Mathematica.}$$

Comme  $\widehat{V}_0 > 0,5$  on a  $Re > R$ , contrairement au cas laminaire.

$$22 \quad \lambda = \frac{16 \widehat{G}}{R \widehat{V}_0^2} = 0,0388 \text{ avec Mathematica.}$$

On peut comparer cette valeur à celle obtenue en régime laminaire au même débit i.e. au même  $Re$ ,

$$\lambda_{\text{lam}} = \frac{64}{Re} = 0,00700 \implies \lambda = 5,55 \lambda_{\text{lam}},$$

qui signale une **forte augmentation des pertes de charge** due à la turbulence.

On peut aussi comparer notre prédiction pour  $\lambda$  à celle de la *formule de Blasius*, validée expérimentalement,

$$\lambda_B = 0,316 Re^{-1/4} = 0,03231 \implies \lambda = 1,20 \lambda_B,$$

soit une erreur de 20%, assez conséquente. Ainsi, le modèle  $K - \varepsilon$  utilisé ici n'est pas correct quantitativement mais seulement *semi-quantitativement*.

### Compléments sur le problème 6.2

- Le fait que la fonction  $\widehat{K}$  représentée sur la figure C.12b prenne de très grandes valeurs au voisinage de l'origine, où elle semble singulière (non dérivable) est non physique. Les fonctions  $\widehat{\varepsilon}$  et  $\widehat{v}^t$  présentent d'ailleurs un comportement similaire, avec de trop grandes valeurs de  $\widehat{v}^t$  près de l'axe... Le modèle développé ici est « frustré » et « insuffisant » au sens où vouloir imposer deux conditions initiales pour  $\widehat{K}$  et  $\widehat{\varepsilon}$  en  $\widehat{r} = \widehat{r}_0$  est non physique. Normalement il faudrait juste imposer les valeurs de  $\widehat{K}$  et  $\widehat{\varepsilon}$  en  $\widehat{r} = \widehat{r}_0$  mais pas celles de leur dérivée, et utiliser par exemple une méthode de tir pour caler les dérivées premières de ces fonctions à zéro au centre du tuyau, ce qui correspond à une condition de régularité de ces fonctions scalaires axisymétriques (indépendantes de  $r$  et  $\theta$ ). Ceci serait cependant beaucoup plus complexe que la solution « simple » adoptée ici, qui correspond à une première approche...
- Indépendamment de ce problème, [Launder & Spalding \(1974\)](#) avancent que le modèle  $K - \varepsilon$  standard donne des résultats relativement médiocres en écoulements en tuyau, lorsque des lois de parois sont utilisées, surtout à nombre de Reynolds intermédiaire  $Re \lesssim 2 \cdot 10^4$ . Ils préconisent en conséquence d'utiliser des modèles  $K - \varepsilon$  modifiés, dans lesquels des termes supplémentaires sont introduits dans les équations de  $K$  et  $\varepsilon$ , et, de plus, les constantes  $C_\nu$  et  $C_{2\varepsilon}$  deviennent des fonctions compliquées de  $K$  et  $\varepsilon$  elles aussi...
- La question de la pertinence des lois de parois standard en écoulements en tuyau est toujours actuelle, comme le montrent par exemple les études expérimentales récentes de [Toonder & Nieuwstadt \(1997\)](#); [Zagarola & Smits \(1998\)](#)...



# Bibliographie

- APPEL, W. 2005 *Mathématiques pour la physique et les physiciens!* H & K Éditions.
- AVILA, K., MOXEY, D., DE LOZAR, A., AVILA, M., BARKLEY, D. & HOF, B. 2011 The onset of turbulence in pipe flow. *Science* **333**, 192–196.
- BATCHELOR, G. K. 1951 Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **4**, 29–41.
- BATCHELOR, G. K. 1967 *An introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- BERNARDIN, D. 2003 *Introduction à la rhéologie des fluides. Approche macroscopique*. Cours de l'école de printemps du GdR Matériaux vitreux, téléchargeable sur [www-int.impmc.upmc.fr/public/Associations/GDR-verres/html/Rheologi\\_1.pdf](http://www-int.impmc.upmc.fr/public/Associations/GDR-verres/html/Rheologi_1.pdf).
- BONNIN, J. 1983 Écoulement des fluides dans les tuyauteries. *Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique* **A738**.
- CASTANET, G. & PENANHOAT, O. 2013 *Combustion appliquée aux turboréacteurs*. Cours de l'école des Mines de Nancy (3A).
- CHAMPAGNE, F. H. 1978 The fine-scale structure of the turbulent velocity field. *J. Fluid Mech.* **86**, 67–108.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford University Press.
- CHARRU, F. 2007 *Instabilités hydrodynamiques*. EDP Sciences.
- CHASSAING, P. 2000a *Mécanique des fluides - Éléments d'un premier parcours*. CÉPADUÈS Éditions.
- CHASSAING, P. 2000b *Turbulence en mécanique des fluides*. CÉPADUÈS Éditions.
- CORCOS, G. M. & SHERMAN, F. S. 1984 The mixing layer : deterministic model of a turbulent flow. Part 1. Introduction and the two-dimensional flow. *J. Fluid Mech.* **139**, 29–65.
- COUSTEIX, J. 1988 *Aérodynamique - Couche limite laminaire*. CÉPADUÈS Éditions.
- DAVIDSON, P. A. 2004 *Turbulence. An introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press.
- DONNELLY, R. & GLABERSON, W. 1966 Experiments on the capillary instability of a liquid jet. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **290**, 547–556.
- DRAZIN, P. D. 2002 *Introduction to hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- DREYFUSS, P. 2012 *Introduction à l'analyse des équations de Navier-Stokes*. Ellipses.
- EL KHOURY, G. K., SCHLATTER, P., NOORANI, A., FISCHER, P. F., BRETHOUWER, G. & JOHANSSON, A. V. 2013 Direct numerical simulation of Turbulent Pipe Flow at moderately high Reynolds numbers. *Flow, Turb. Comb.* **91**, 475–495.

- FAISST, H. & ECKHARDT, B. 2003 Traveling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 224502.
- FERMIGIER, M. 1999 *Hydrodynamique physique. Problèmes résolus avec rappels de cours*. Dunod.
- FRANC, J.-P. 2006 Physics and Control of Cavitation. *Design and Analysis of High Speed Pumps. Educational Notes RTO-EN-AVT-143*. pp. 1–36, [www.cso.nato.int/abstracts.asp](http://www.cso.nato.int/abstracts.asp).
- FRANC, J.-P., AVELLAN, F., BELAHADJI, B., BILLARD, J.-Y., BRIANÇON-MARJOLLET, L., FRÉCHOU, D., FRUMAN, D. H., KARIMI, A., KUENY, J.-L. & MICHEL, J.-M. 1995 *La cavitation - Mécanismes physiques et aspects industriels*. Presses Universitaires de Grenoble.
- FRANSSON, J. H. M. & ALFREDSSON, P. H. 2003 On the disturbance growth in an asymptotic suction boundary layer. *J. Fluid Mech.* **482**, 51–90.
- FRELIN, M. 2002 Coups de bélier. *Techniques de l'Ingénieur* **BM4176**.
- FRISCH, U. 1995 *Turbulence. The legacy of Kolmogorov*. Cambridge University Press.
- FRÊNE, J. 1990 *Lubrification hydrodynamique : paliers et butées*. Eyrolles.
- GAUDRY, E. 2012 *Physique statistique*. Cours de Mines Nancy (1A).
- GUYON, E., HULIN, J. P. & PETIT, L. 2001 *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences.
- HOF, B., JUEL, A. & MULLIN, T. 2003 Scaling of the turbulence transition threshold in a pipe. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 244502,1–4.
- HUANG, K. 1988 *Statistical mechanics*. Wiley.
- HUERRE, P. 1998 *Mécanique des fluides*. Cours de l'école polytechnique.
- JANNOT, Y. 2015 *Transferts thermiques*. Cours de Mines Nancy (2A), téléchargeable sur [www.thermique55.com](http://www.thermique55.com).
- KOLMOGOROV, A. N. 1941 Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *C. R. Acad. Sci. U.R.S.S.* **30**, **31 and 32**.
- LANCE, G. N. & ROGERS, M. H. 1962 The axially symmetric flow of a viscous fluid between two infinite rotating disks. *Proc. R. Soc. Lond. A* **266**, 109–121.
- LAUNDER, B. E. & SPALDING, D. B. 1974 The numerical computation of turbulent flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **3**, 269–289.
- LIDE, D. R. 2001 *Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press.
- LUMLEY, J. L. 1992 Some comments on turbulence. *Phys. Fluids A* **4**, 203–211.
- PEARSON, B. R., KROGSTAD, P.-Å. & VAN DE WATER, W. 2002 Measurements of the turbulent energy dissipation rate. *Phys. Fluids* **14**, 1288–1290.
- PEIXINHO, J. & MULLIN, T. 2006 Decay of Turbulence in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 094501, 1–4.
- PLAUT, E. 2006 *Analyse complexe*. Cours de l'ENSEM (1A), téléchargeable sur <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisip>.
- PLAUT, E. 2007 *Modélisation d'instabilités : méthodes non linéaires*. Cours du Master 2 recherche de mécanique-énergétique de Nancy, téléchargeable sur <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisip>.

- PLAUT, E. 2015a *Le calcul tensoriel : outil mathématique pour la physique des milieux continus*. Cours de Mines Nancy (1A), téléchargeable sur <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisp>.
- PLAUT, E. 2015b *Mécanique des milieux continus solides et fluides*. Cours de Mines Nancy (1A), téléchargeable sur <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisp>.
- PLAUT, E., LEBRANCHU, Y., SIMITEV, R. & BUSSE, F. H. 2008 Reynolds stresses and mean fields generated by pure waves : applications to shear flows and convection in a rotating shell. *J. Fluid Mech.* **602**, 303–326.
- PLAUT, E. & PEINKE, J. 2015 *Advanced Fluid Mechanics - Transition to Turbulence & Turbulence*. Cours de Mines Nancy (3A), téléchargeable sur <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisp>.
- RAYLEIGH, J. W. S. 1883 Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proc. Lond. Math. Soc.* pp. 170–177.
- REYNOLDS, O. 1883 An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **174**, 935–982.
- RICHARDSON, L. F. 1922 *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press.
- ROYER, D. & DIEULESAINT, E. 2001 Acoustique - Propagation dans un fluide. *Techniques de l'Ingénieur* **AF3812**.
- SCHLICHTING, H. 1979 *Boundary-layer theory*. Mac Graw-Hill.
- SCHLICHTING, H. & GERSTEN, K. 2000 *Boundary layer theory*. Springer-Verlag.
- SCHNEIDER, T. M., ECKHARDT, B. & YORKE, J. A. 2007 Turbulence Transition and the Edge of Chaos in Pipe Flow. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 034502,1–4.
- SREENIVASAN, K. R. 1984 On the scaling of the turbulent dissipation rate. *Phys. Fluids* **27**, 1048–1051.
- STOKES, G. G. 1845 On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Camb. Phil. Soc.* **8**, 287–341, disponible dans Stokes' Mathematical and Physical Papers, vol. I, Cambridge University Press 1880, et sur Internet.
- STROGATZ, S. H. 1994 *Nonlinear dynamics and chaos*. Perseus Publishing.
- TAYLOR, G. I. 1938 The spectrum of turbulence. *Proc. R. Soc. Lond. A* **164**, 476–490, [DOI : 10.1098/rspa.1938.0032](https://doi.org/10.1098/rspa.1938.0032) - [Open access](#).
- TOONDER, J. M. J. & NIEUWSTADT, F. T. M. 1997 Reynolds number effects in a turbulent pipe flow for low to moderate Re. *Phys. Fluids* **9**, 3398–3409.
- WILCOX, D. C. 2006 *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries.
- WILLIS, A. P. & KERSWELL, R. R. 2007 Critical behavior in the relaminarization of localized turbulence in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 014501,1–4.
- ZAGAROLA, M. V. & SMITS, A. J. 1998 Mean-flow scaling of turbulent pipe flow. *J. Fluid Mech.* **373**, 33–79.