

## Chapitre 4

# Modulations analogiques

Comme mentionné dans l'introduction, l'étape de modulation a pour objet d'imprimer le signal d'information sur le signal porteur, en général une sinusoïde. Dans ce chapitre-ci nous considérons le cas où les signaux modulateurs sont des signaux analogiques ou en temps continu. Ce chapitre abordera les modulations d'amplitude et les modulations angulaires.

Lorsque l'on a recours à une *modulation d'amplitude*, le signal d'information est imprimé sur l'amplitude instantanée de la porteuse. Si l'on utilise une *modulation angulaire*, cela signifie que l'information est imprimée sur la phase (en cela éventuellement compris la fréquence) instantanée de la porteuse. La figure 4.1 illustre ces considérations. La

première sinusoïde est la porteuse. La deuxième est le signal modulant. Le troisième signal montre un résultat obtenu par modulation d'amplitude. Le dernier signal est la forme d'onde générée par modulation de fréquence qui est un cas particulier de modulation angulaire.

Dans le jargon des télécommunications, le signal d'information est encore appelé *signal en bande de base* par opposition au signal porteur qui est en *hautes fréquences*. Le signal en bande de base est encore appelé *signal modulant* et le résultat de la modulation, *signal modulé*. L'émetteur doit effectuer la *modulation*, et le récepteur, la *démodulation*. Lorsqu'un même équipement est capable d'effectuer les deux opérations, l'on parle de *modulateur-démodulateur*, communément contracté en *modem*. Ces dénominations ne sont pas spécifiques aux modulations analogiques.

## 4.1 Modulation d'amplitude

### 4.1.1 Définition

Soit un signal porteur  $c(t)$  défini par

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) \quad (4.1)$$

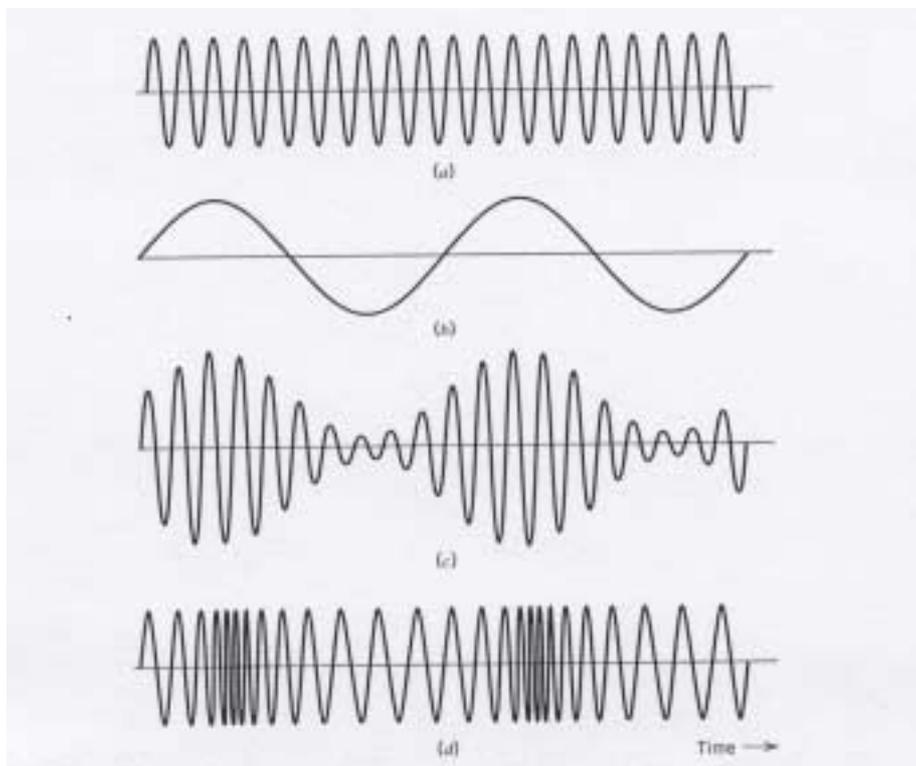


FIG. 4.1 – Signaux modulés en amplitude et en phase.

où  $A_c$  est l'amplitude de la porteuse et  $f_c$  la fréquence de la porteuse. Soit  $m(t)$  le signal modulant qui véhicule l'information. Un signal modulé en amplitude (AM, amplitude modulation)  $s(t)$  a la forme suivante :

$$s(t) = A_c [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t) \quad (4.2)$$

L'on appelle  $k_a$  la sensibilité en amplitude. Lorsque le signal modulant est normalisé de façon telle que son amplitude maximale vaut 1,  $k_a$  s'appelle *taux de modulation*. Typiquement  $A_c$  et  $m(t)$  sont en Volt, et  $k_a$  est en Volt<sup>-1</sup>.

La figure 4.2 représente un signal modulant et deux résultats possibles de signaux modulés, correspondant à des valeurs différentes de  $k_a$ . L'on a supposé  $A_c = 1$  Volt. Il apparaît que l'amplitude du signal modulé est l'image du signal modulant sous certaines conditions :

- il faut que l'amplitude de  $k_a m(t)$  soit toujours inférieure à l'unité, soit  $|k_a m(t)| \leq 1$  pour toute valeur de  $t$ . Si c'est le cas, l'on aura bien sûr que  $[1 + k_a m(t)]$  est toujours positif et l'amplitude du signal modulé vaut dès lors  $A_c [1 + k_a m(t)]$ . Lorsque le taux de modulation est suffisamment élevé pour que  $|k_a m(t)| \geq 1$  l'on a *surmodulation* et le signal modulé contient des sauts de phase à chaque

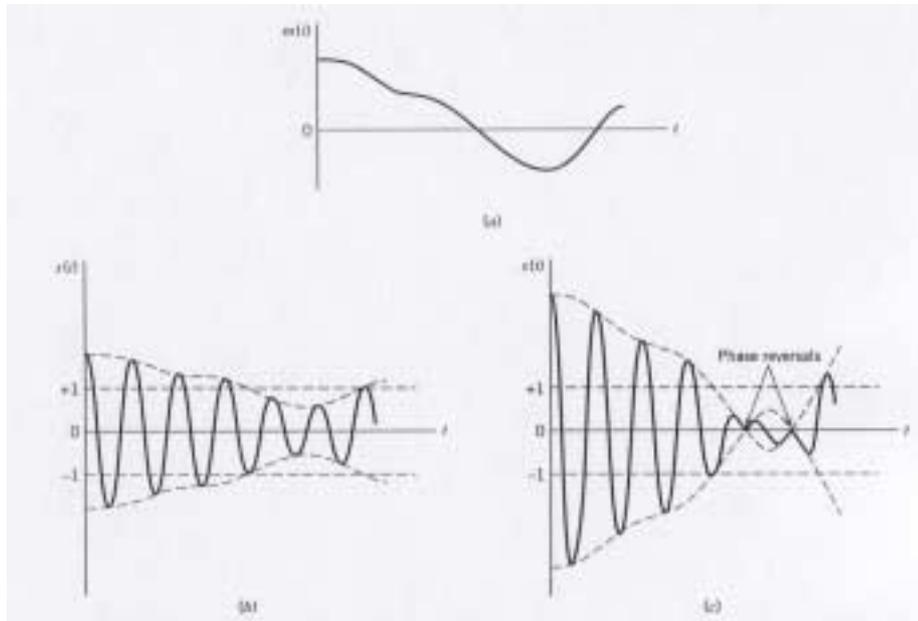


FIG. 4.2 – Résultats possibles de signaux modulés fonctions de  $k_a$ .

passage par zéro. Le signal modulé souffre de distorsion d'enveloppe. Dans ce cas l'on perd la relation biunivoque entre signal modulant et amplitude du signal modulé.

- il faut aussi que la fréquence  $f_c$  soit grande par rapport à la composante fréquentielle la plus élevée du signal modulant. Soit  $W$  cette fréquence maximale. L'on appelle  $W$  la bande du message et il faut donc  $f_c \gg W$ .

A partir de l'équation (4.2) il est aisé de calculer le spectre du signal modulé. Il vient

$$S(\omega) = A_c \pi [\delta(\omega - 2\pi f_c) + \delta(\omega + 2\pi f_c)] + \frac{A_c k_a}{2} [M(\omega - 2\pi f_c) + M(\omega + 2\pi f_c)] \quad (4.3)$$

où  $M(\omega)$  est le spectre (transformée de Fourier) de  $m(t)$ . Nous supposons que ce spectre est limité à l'intervalle  $[-W, W]$ . La figure 4.3 illustre l'effet de la modulation sur le spectre de départ. *Le spectre du signal modulant se retrouve déplacé au droit des fréquences  $f_c$  et  $-f_c$ .* Ces versions sont en plus affectées d'un certain facteur multiplicatif. Par ailleurs le spectre contient aussi les raies correspondant à la partie de la porteuse qui n'est pas modulée. Regardant les fréquences positives, l'on voit que les fréquences du signal modulant qui étaient négatives apparaissent après modulation de ce côté-là du spectre. La portion du spectre située au delà de la porteuse est appelée *bande latérale supérieure* et l'autre, *bande latérale inférieure*. Les fréquences positives les plus extrêmes utilisées par le signal modulé sont  $f_c - W$  et  $f_c + W$ . L'écart entre les deux vaut  $2W$  et porte

le nom de *bande de transmission* ou *bande RF* (RF pour radio fréquences). Cette bande vaut très exactement le double de la bande du message originel (signal modulant).

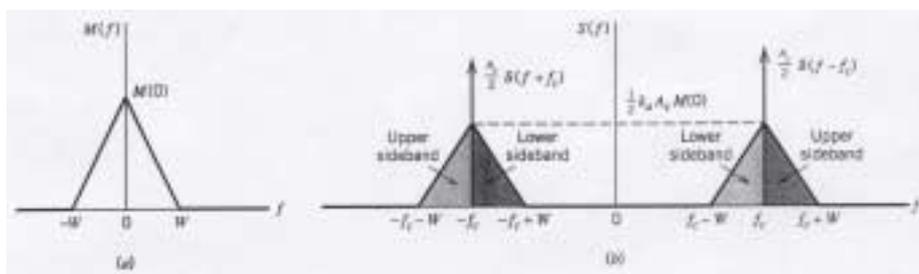


FIG. 4.3 – Effet de la modulation sur le spectre du signal modulant.

#### 4.1.2 Commentaires

Cette technique de modulation est la plus ancienne, et son attrait principal est sa grande simplicité.

- L'émetteur réalise la modulation d'amplitude à l'aide d'un organe non linéaire. Par exemple l'on peut appliquer la somme de la porteuse et du signal modulant à une diode. L'amplitude de la porteuse doit être suffisamment grande pour parcourir la courbe caractéristique de la diode. Ce faisant l'on produit un signal AM qui peut être extrait au moyen d'un filtre passe-bande. Le schéma de ce dispositif est donné à la figure 4.4.

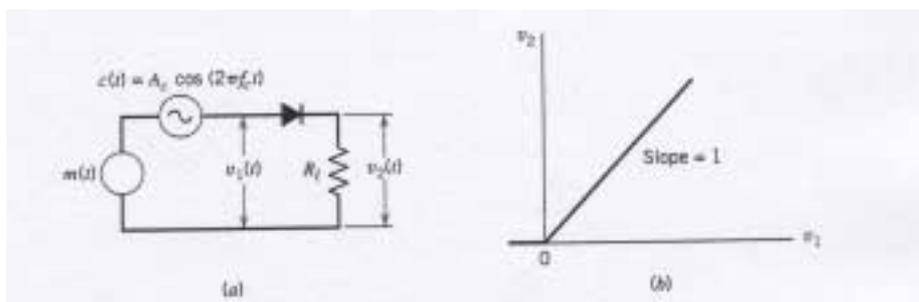


FIG. 4.4 – Circuit utilisé pour la modulation d'amplitude.

- Au récepteur, la détection est aussi réalisée au moyen d'un dispositif non linéaire. Un circuit simple et efficace est le *détecteur d'enveloppe* illustré à la figure 4.5. Ce circuit comprend une diode en série avec la mise en parallèle d'une capacité et d'une résistance.

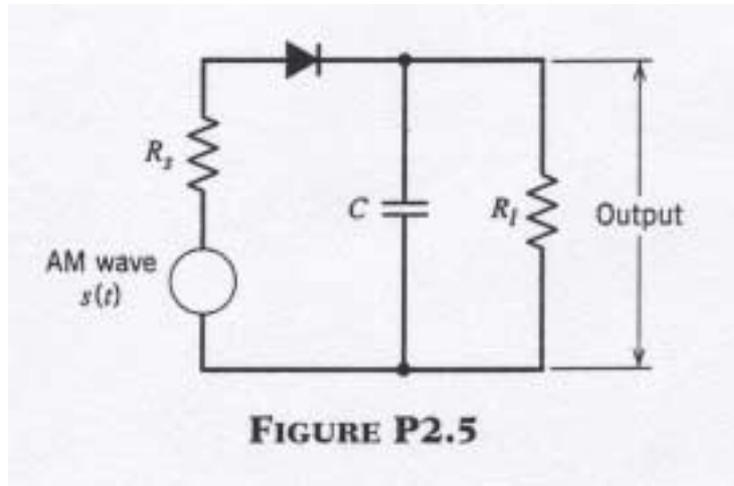


FIG. 4.5 – Détecteur de crête ou d'enveloppe.

Au début de ce cours, nous avons insisté sur le fait que les ressources importantes sont la bande passante et la puissance. Regardons ce qu'il en est dans le cas de la modulation décrite par (4.2).

- Cette modulation est inefficace du point de vue de la puissance. En effet, en définissant la puissance moyenne sur une durée  $T$  démarrant à l'instant  $t_0$  par

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt \quad (4.4)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A_c^2 [1 + k_a m(t)]^2 \cos^2(2\pi f_c t) dt \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A_c^2 [1 + k_a m(t)]^2 0.5 [1 + \cos(4\pi f_c t)] dt \quad (4.6)$$

Le cosinus à fréquence  $2f_c$  varie rapidement en comparaison de  $[1 + k_a m(t)]^2$ . Dès lors, sur une période suffisamment grande, cette contribution sera nulle. Dès lors il reste

$$P(t_0, T) \simeq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{A_c^2}{2} [1 + k_a m(t)]^2 dt \quad (4.7)$$

$$= \frac{A_c^2}{2} + 2 \times \frac{A_c^2}{2} \frac{1}{T} k_a \int_{t_0}^{t_0+T} m(t) dt \quad (4.8)$$

$$+ \frac{1}{T} \frac{A_c^2}{2} k_a^2 \int_{t_0}^{t_0+T} m^2(t) dt \quad (4.9)$$

Si le signal modulant n'a pas de composante continue, le deuxième terme

disparaît. L'on voit que la porteuse non modulée consomme une partie importante de la puissance. Si par exemple le signal modulant est une sinusoïde d'amplitude unité, l'on aura  $A_c^2/2$  consommé par la porteuse, et  $A_c^2/2 k_a^2/2$  pour le signal d'information, avec un maximum obtenu pour  $k_a = 1$ . La porteuse consomme le double de la puissance attribuée au signal d'information.

- Cette modulation est inefficace en terme de bande passante. Les bandes latérales supérieure et inférieure sont reliées l'une à l'autre par des relations de symétrie conjuguée dont jouissent les spectres des signaux réels. Connaissant l'un, on peut donc retrouver l'autre avec certitude. Il est donc inutile de transmettre les deux bandes latérales. La bande dont on devrait pouvoir se satisfaire en RF (comprendre l'intervalle de fréquences positives) est la même que la bande de base occupée par le signal modulant.

Il est donc recommandé de supprimer la porteuse et modifier les bandes latérales du signal AM.

### Détection d'enveloppe

L'expression (4.2) nous montre que le signal modulé AM a une enveloppe (plus exactement amplitude) qui est l'image du signal modulant, indépendamment de la fréquence de la porteuse. La démodulation peut donc être réalisée très facilement en extrayant l'enveloppe du signal modulé, sans souci à propos de la récupération de la fréquence ou phase de la porteuse (voir ci-dessous).

Un *détecteur d'enveloppe* ou *détecteur de crête* simplifié est représenté à la figure 4.6, de même que les formes d'onde associées. Le premier signal montre le signal modulé ; le deuxième signal montre la sortie du détecteur, et le troisième, la sortie filtrée.

Grâce à la diode, et sans filtre, le signal  $v$  correspond aux valeurs positives du signal d'entrée. Le circuit RC avec les composants  $R_1$  et  $C_1$  agit comme un filtre passe-bas, qui réagit aux variations d'enveloppe à condition que

$$W \ll \frac{1}{R_1 C_1} \ll f_0 \quad (4.10)$$

A ces conditions,  $C_1$  se décharge doucement entre maxima successifs du signal modulé et  $v$  approche l'enveloppe (amplitude rigoureusement).  $R_2 C_2$  agit comme un bloqueur de la composante continue. Ceci agit néanmoins sur les basses fréquences aussi, et de ce fait, cette solution ne convient pas pour les signaux avec contenu fréquentiel important à basse fréquence.

### 4.1.3 Modulations en quadrature

Dans sa forme la plus générale un signal modulé en quadrature a une expression donnée par

$$s(t) = s_I(t) \cos(2\pi f_c t) + s_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4.11)$$

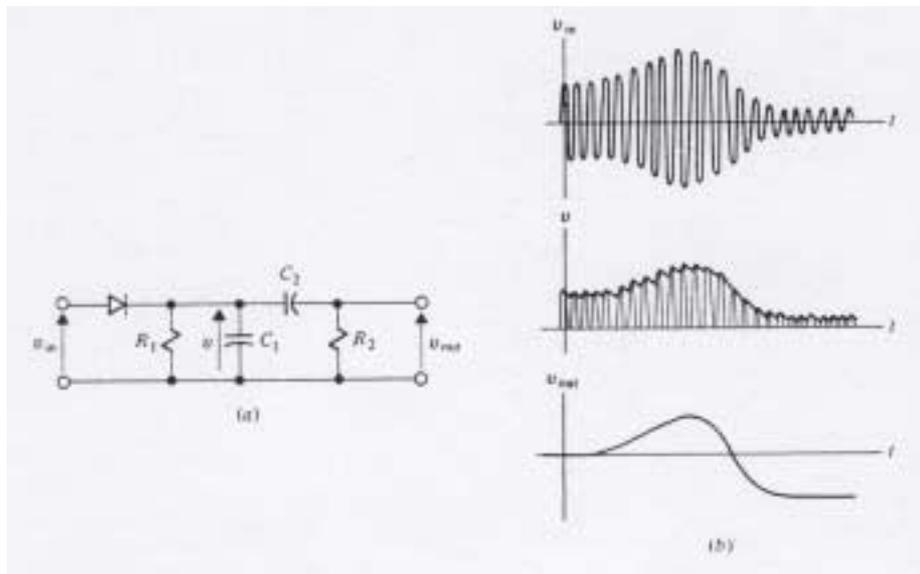


FIG. 4.6 – Exemple de détecteur de crête.

où  $s_I(t)$  s'appelle *le signal ou la composante en phase*, et  $s_Q(t)$ , *le signal ou la composante en quadrature*. Comme vu précédemment, un tel signal correspond structurellement à un signal dit à bande étroite. L'on peut opérer dans le contexte des modulations AM, une classification qui dépend de la fonction dont ces deux signaux sont reliés au message de départ  $m(t)$ .

- lorsque l'on transmet uniquement les deux bandes latérales, et pas de porteuse, l'on a un signal du type *double bande latérale et à porteuse supprimée* (DSB-SC, double side band suppressed carrier<sup>1</sup>);
- lorsque l'on ne transmet que l'une des bandes latérales, l'on parle de *modulation à bande latérale unique* (SSB, single side band);
- il arrive que l'on transmette une bande latérale et un résidu de l'autre. Dans ce cas, l'on parle de *modulation à bande latérale résiduelle* (VSB, vestigial side band).

Passons-les maintenant en revue.

#### 4.1.4 Modulation DSB-SC

##### Définition

Le signal modulé  $s(t)$  résulte simplement du produit entre signal modulant et porteuse.

$$s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (4.12)$$

<sup>1</sup>Même si il est important de connaître la terminologie française il faut bien admettre que les acronymes anglais sont de loin les plus populaires; il est de ce fait indispensable de les connaître.

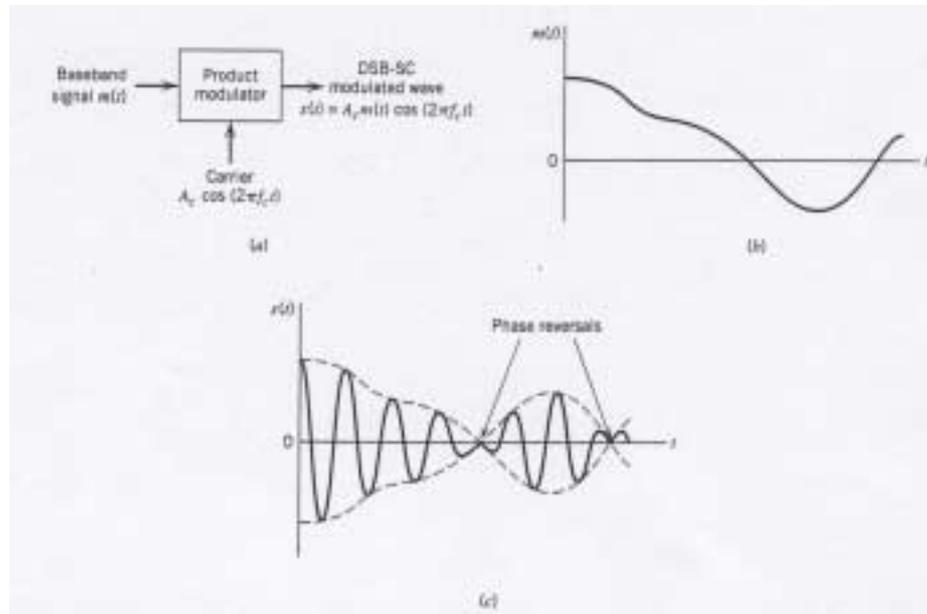


FIG. 4.7 – Illustration de la modulation DSB-SC.

La partie (c) figure 4.7 montre le résultat obtenu en utilisant le signal modulant montré à la partie (b). Le signal modulé contient cette fois des changements de phase chaque fois que le signal modulant  $m(t)$  passe par 0. De ce fait l'amplitude du signal modulé n'est pas égale au signal modulant. On peut encore s'en convaincre en se souvenant qu'une amplitude (voir les définitions données dans le chapitre 3.1) est nécessairement positive alors que le signal modulant peut être positif ou négatif. De façon évidente le spectre du signal modulé est donné par

$$S(\omega) = \frac{A_c}{2} [M(\omega - 2\pi f_c) + M(\omega + 2\pi f_c)] \quad (4.13)$$

La figure 4.8 montre le résultat obtenu. La modulation déplace simplement le spectre du signal modulant autour de la porteuse ( $f_c$  et  $-f_c$ ). La bande occupée par le signal modulé est la même que celle occupée par le signal modulant, à savoir  $2W$  dans l'exemple de la figure 4.8.

#### Détection cohérente

Le signal modulant peut être récupéré par un récepteur qui multiplie le signal modulé par une sinusoïde générée localement. Supposons que l'on dispose d'un *oscillateur local* (local oscillator, LO en anglais) qui produit un signal  $s_{LO}(t)$

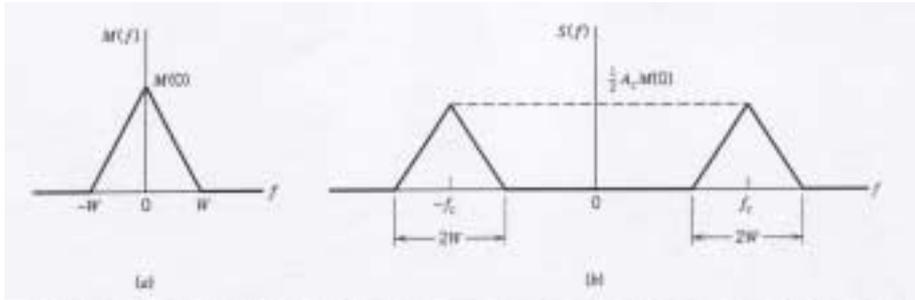


FIG. 4.8 – Résultat obtenu dans le domaine spectral après modulation d'amplitude.

donné par

$$s_{LO}(t) = A'_c \cos(2\pi f_c t + \Phi) \quad (4.14)$$

La multiplication du signal modulé par ce signal produit au sein du récepteur donne <sup>2</sup>

$$s(t)s_{LO}(t) = A_c A'_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t + \Phi) \quad (4.18)$$

$$= \frac{A_c A'_c}{2} m(t) [\cos(\Phi) + \cos(4\pi f_c t + \Phi)] \quad (4.19)$$

Si l'on passe le résultat dans un filtre qui élimine le signal positionné autour de  $2f_c$  (dont la coupure se situe donc entre  $W$  et  $2f_c - W$ ), l'on trouve un signal  $\hat{m}(t)$  donné par

$$\hat{m}(t) = \frac{A_c A'_c}{2} m(t) \cos(\Phi) \quad (4.20)$$

Ces étapes sont illustrées par la figure 4.9.

Le signal démodulé a une amplitude qui est maximale lorsque  $\Phi = 0$  ce qui signifie lorsque *la phase de la porteuse qui est produite localement est la même que celle du signal modulé qui entre dans le récepteur*. En vue d'utiliser au mieux la puissance émise, il convient de s'arranger pour contraindre  $\Phi = 0$ , ou plus généralement, contraindre la phase de la porteuse générée localement à être la même que celle du signal modulant entrant dans le récepteur.

<sup>2</sup>Pour rappel,

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)] \quad (4.15)$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)] \quad (4.16)$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)] \quad (4.17)$$

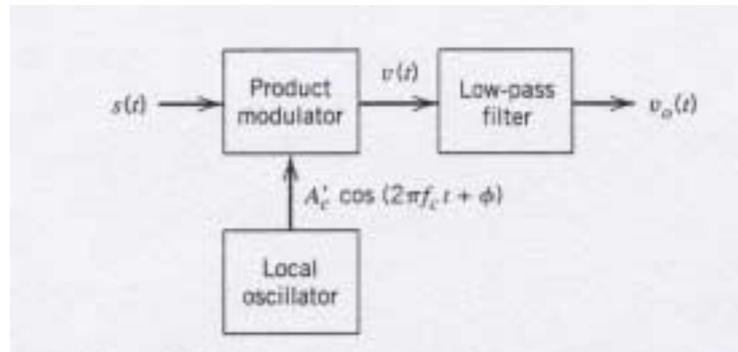


FIG. 4.9 – Schéma de principe d'un détecteur cohérent.

Lorsque l'oscillateur local produit une sinusoïde dont la phase est la même que, c'est-à-dire en *cohérence* avec, la phase du signal reçu, l'on parle de *détection cohérente*.

### Boucle de Costas

La *boucle de Costas* est un récepteur dont l'objet est d'assurer une réception ou démodulation cohérente du signal reçu. Son schéma bloc est donné à la figure 4.10. L'oscillateur local produit une porteuse et sa version en quadrature. Il fonctionne à la bonne fréquence qui est supposée connue a priori. La partie supérieure du récepteur s'occupe du *signal en phase*, ou canal I (pour in-phase en anglais), et la partie inférieure, du *signal en quadrature* (in quadrature en anglais). Ces deux parties sont couplées entre elles de manière à produire une réaction négative dont l'objet est de maintenir la bonne phase.

Supposons que la boucle fonctionne sur un signal modulé, reçu sans bruit (l'effet du bruit sur les récepteurs sera vu plus tard). Le signal modulé reçu est donné par

$$s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (4.21)$$

Les signaux correspondant à la porteuse en phase,  $s_I(t)$ , et en quadrature,  $s_Q(t)$ , sont donnés par

$$s_I(t) = A'_c \cos(2\pi f_c t + \Phi) \quad (4.22)$$

$$s_Q(t) = A'_c \sin(2\pi f_c t + \Phi) \quad (4.23)$$

La modulation par la porteuse en phase  $s_I(t)$  produit

$$s(t)s_I(t) = A_c A'_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t + \Phi) \quad (4.24)$$

$$= \frac{A_c A'_c}{2} m(t) [\cos(\Phi) + \cos(4\pi f_c t + \Phi)] \quad (4.25)$$

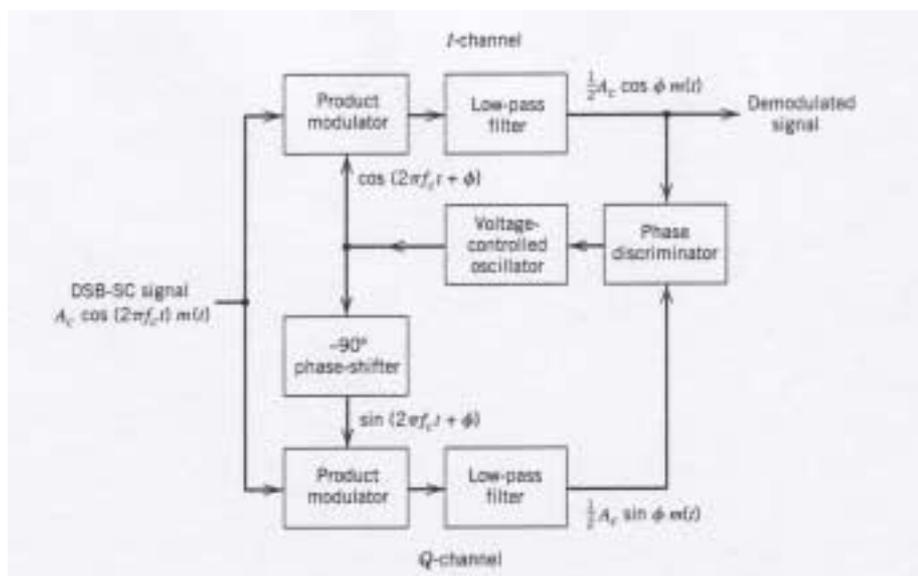


FIG. 4.10 – Boucle de Costas.

et après filtre passe-bas éliminant les hautes fréquences, il reste

$$\hat{m}_I(t) = \frac{A_c A'_c}{2} m(t) \cos(\Phi) \quad (4.26)$$

La modulation par la porteuse en quadrature  $s_Q(t)$  produit

$$s(t)s_Q(t) = A_c A'_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t + \Phi) \quad (4.27)$$

$$= \frac{A_c A'_c}{2} m(t) [\sin(\Phi) + \sin(4\pi f_c t + \Phi)] \quad (4.28)$$

et après filtre passe-bas éliminant les hautes fréquences, il reste

$$\hat{m}_Q(t) = \frac{A_c A'_c}{2} m(t) \sin(\Phi) \quad (4.29)$$

L'estimation du décalage de phase (phase discriminator) peut se faire par exemple en calculant le produit  $\hat{m}_I(t) \times \hat{m}_Q(t)$  et en intégrant ce produit. On obtient

$$\hat{m}_I(t) \times \hat{m}_Q(t) = \frac{A_c A'_c}{2} m(t) \cos(\Phi) \frac{A_c A'_c}{2} m(t) \sin(\Phi) \quad (4.30)$$

$$= \frac{(A_c A'_c)^2}{4} m^2(t) \cos(\Phi) \sin(\Phi) \quad (4.31)$$

$$= \frac{(A_c A'_c)^2}{8} m^2(t) \sin(2\Phi) \quad (4.32)$$

Après intégration temporelle, on obtient un signal proportionnel à  $\sin(2\Phi)$ . L'on voit donc que si  $\Phi = 0$  la boucle n'opère pas de correction, ce qui est bien souhaité. Par contre, s'il y a une erreur de phase, et qu'elle peut être considérée comme suffisamment petite, le  $\sin$  peut être linéarisé et le signal d'erreur est proportionnel à  $\Phi$ . Ce signal attaque un VCO, voltage controlled oscillator ou oscillateur contrôlé en tension. Cet oscillateur a une fréquence naturelle, qui peut être accélérée ou décélérée par application d'une tension. Ici cette tension est le signal d'erreur.

### Modulations en quadrature

C'est aussi la détection cohérente qui permet de moduler deux porteuses en quadrature par des signaux différents, comme montré plus haut. Ce type de modulation permet à deux signaux indépendants d'occuper la même bande tout en étant séparables. Ce schéma est donc intéressant en ce qui concerne la bande passante.

Le signal modulé est donné par

$$s(t) = A_c m_I(t) \cos(2\pi f_c t) + A_c m_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4.33)$$

et  $m_I(t)$  et  $m_Q(t)$  sont les deux signaux d'information. Dans le récepteur, l'on produit deux porteuses en quadrature à l'aide de l'OL, correspondant à  $s_I(t)$  et  $s_Q(t)$  donnés ci-dessus. Quand l'estimation de la phase a bien fonctionné, l'on a  $\Phi = 0$ . Dans ce cas, l'on récupère bien les deux signaux modulants. En effet

$$\begin{aligned} s(t)s_I(t) &= A_c A'_c m_I(t) \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) \\ &+ A_c A'_c m_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) \quad (4.34) \\ &= \frac{A_c A'_c}{2} m_I(t) [1 + \cos(4\pi f_c t)] + \frac{A_c A'_c}{2} m_Q(t) \sin(4\pi f_c t) \quad (4.35) \end{aligned}$$

Après filtrage passe-bas, il reste

$$\hat{m}_I(t) = \frac{A_c A'_c}{2} m_I(t) \quad (4.36)$$

De façon semblable, pour l'autre branche l'on trouve

$$\begin{aligned} s(t)s_Q(t) &= A_c A'_c m_I(t) \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) \\ &+ A_c A'_c m_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4.37) \\ &= \frac{A_c A'_c}{2} m_I(t) \sin(4\pi f_c t) + \frac{A_c A'_c}{2} m_Q(t) [1 + \cos(4\pi f_c t)] \quad (4.38) \end{aligned}$$

Après filtrage passe-bas, il reste

$$\hat{m}_Q(t) = \frac{A_c A'_c}{2} m_Q(t) \quad (4.39)$$

Il est laissé au lecteur le soin d'analyser ce qui passe lorsque la phase n'est pas parfaitement estimée, à savoir  $\Phi \neq 0$ . L'estimation de la phase de la porteuse

est un problème d'estimation de paramètre. Dans le contexte des télécommunications, l'estimation de paramètres s'appelle *synchronisation*. L'estimation de la phase est donc un des problèmes de synchronisation que l'on rencontre dans les récepteurs. Une façon élégante et habituelle de permettre au récepteur d'estimer la phase de la porteuse est de joindre au signal modulé un signal dit *pilote* qui est une porteuse non modulée à une fréquence et une phase reliées à celles de la porteuse du signal utile.

La figure 4.11 illustre la modulation et la démodulation cohérente de signaux en quadrature.

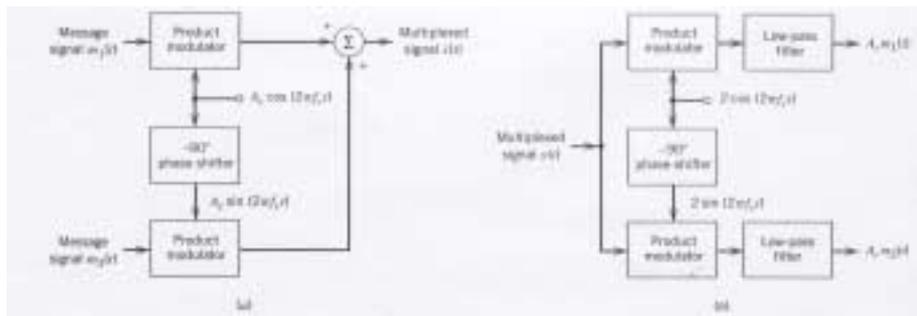


FIG. 4.11 – Modulation et démodulation en quadrature de signaux.

#### 4.1.5 Modulation SSB

La méthode la plus simple de génération d'un signal de type SSB est

- d'abord de produire un signal de type DSB-SC, comme celui donné par l'équation 4.12 ;
- ensuite de gommer un des deux lobes (pour les fréquences positives, et donc aussi pour les fréquences négatives).

Le problème pratique qui se pose est précisément l'élimination de la bande non souhaitée. Plus la fréquence inférieure du signal modulant est proche de 0, plus la bande latérale à éliminer sera proche de la bande latérale à garder. Pour qu'une modulation SSB soit possible, il faut donc que le spectre du signal modulant ne s'étende pas jusqu'au DC. Le signal vocal localisé entre 300 et 3400 Hz satisfait à cette contrainte. Néanmoins, pour réaliser une telle modulation il faut que les filtres soient très sélectifs, c'est-à-dire à transition très raide entre bande passante et bande atténuée.

Pour exprimer ce qui se passe dans le domaine temporel, et éventuellement trouver une autre méthode de synthèse d'un signal SSB, il est utile de se rappeler la théorie du signal présentée au chapitre 3.1. Là on y a vu comment gommer les fréquences négatives d'un signal : c'est produire son signal analytique. Le signal analytique, qui ne contient donc que les fréquences positives

du signal de départ (multipliées par 2 dans la description donnée au chapitre 3.1), est obtenu en ajoutant au signal de départ  $j$  multiplié par le signal en quadrature. Pour donc gommer les fréquences négatives de  $m(t)$ , il faut constituer le signal analytique  $m_a(t)$  donné par

$$m_a(t) = m(t) + j\hat{m}(t) \quad (4.40)$$

où  $\hat{m}(t)$  est le signal en quadrature de  $m(t)$  ou sa transformée de Hilbert. L'on déplace ensuite ce lobe latéral à droite de la porteuse (dans le domaine spectral) et cela se fait en l'affectant d'une exponentielle complexe, soit

$$s_+(t) = m_a(t) \exp^{j\omega_c t} \quad (4.41)$$

Il faut ensuite suivre des étapes semblables avec les fréquences négatives du signal modulant. L'on obtient les fréquences négatives du signal modulant en le passant dans un filtre de transmittance  $U(-\omega)$  avec  $U(\omega)$  donné par l'équation 3.3. Le signal temporel correspondant, noté  $m'_a(t)$  est donné par

$$\begin{aligned} m'_a(t) &= m(t) \otimes u(-t) \\ &= m(t) \otimes \left[ \delta(-t) - \frac{j}{\pi t} \right] \\ &= m(t) - jm(t) \otimes \left[ \frac{1}{\pi t} \right] \\ &= m(t) - j\hat{m}(t) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Ce signal-ci doit être déplacé autour de  $-\omega_c$ . Le signal SSB complet est donc donné par

$$s(t) = m_a(t) \exp^{j\omega_c t} + m'_a(t) \exp^{-j\omega_c t} \quad (4.43)$$

$$= 2m(t) \cos(2\pi f_c t) - 2\hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4.44)$$

L'on voit donc qu'en modulant une porteuse en quadrature par un signal qui est en relation précise avec le signal modulant, l'on obtient un signal modulé de type SSB. Il apparaît aussi qu'il est nécessaire de réaliser une transformée de Hilbert du signal modulant de départ. Cette opération n'est pas facile à réaliser en pratique, même en recourant à du traitement de signal en temps discret. Le problème de conception d'un filtre de Hilbert sera abordé dans le cours de Traitement des signaux, ELEC 2900.

Remarque importante : tel que défini par (4.44) le spectre du signal modulant se retrouve affecté d'un facteur 2.

### 4.1.6 Modulation VSB

#### Définition

Dans la modulation à bande latérale résiduelle (VSB) l'on transmet presque totalement une bande latérale, et un résidu de l'autre avec pour objectif de compenser ou reconstruire ce qui manque dans la première. Une façon simple de synthétiser un tel signal est de

1. synthétiser un signal modulé DSB-SC ;
2. ensuite de passer le signal obtenu dans un filtre particulier. C'est la forme de la transmittance du filtre qui distingue la modulation VSB de la modulation SSB.

En fonction de ce qui vient d'être dit, la forme du filtre doit être du genre de celle montrée à la figure 4.12. Cette figure montre ce qui se passe pour les fréquences positives mais il faut se rappeler que les signaux que l'on traite sont réels, et l'on trouve un effet de filtrage pareil (on l'obtient en imposant la symétrie conjuguée; partie réelle paire, partie imaginaire impaire) dans les fréquences négatives.

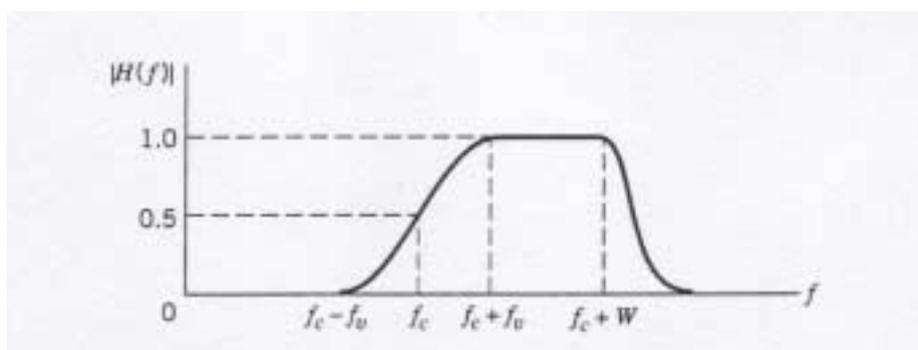


FIG. 4.12 – Transmittance du filtre requis pour opérer un filtrage de type VSB (seules les fréquences positives sont montrées).

Analysons plus précisément l'allure que doit avoir ce filtre. Appelons  $H_+(\omega)$  (resp.  $H_-(\omega)$ ) la transmittance du filtre sur le domaine des fréquences positives (resp. négatives). Comme le filtre est réel l'on a bien évidemment

$$H_+(\omega) = H_-^*(-\omega) \quad (4.45)$$

Caractérisons d'abord la façon dont va se passer la démodulation. Il faut décaler la partie du spectre située dans les fréquences positives (resp. négatives) de  $\omega_c$  vers la gauche (resp. droite). Si le signal modulé VSB est noté  $s(t)$ , les parties de ce signal situées dans les fréquences positives  $s_+(t)$  et négatives  $s_-(t)$  (et affectées d'un gain de 2 supplémentaire !) sont données par

$$s_+(t) = s(t) + j\hat{s}(t) \quad (4.46)$$

$$s_-(t) = s(t) - j\hat{s}(t) \quad (4.47)$$

Par ailleurs, si l'on note  $m(t)$  le signal modulant, l'on a encore

$$S_+(\omega) = 2M(\omega - \omega_c) H_+(\omega) \quad (4.48)$$

$$S_-(\omega) = 2M(\omega + \omega_c) H_-(\omega) \quad (4.49)$$

L'obtention du signal démodulé  $m'(t)$  se fait comme décrit ci-dessus. Dans le domaine temporel, l'on obtient

$$m'(t) = s_+(t) \exp^{-j\omega_c t} + s_-(t) \exp^{j\omega_c t} \quad (4.50)$$

$$= 2s(t) \cos(\omega_c t) + 2\hat{s}(t) \sin(\omega_c t) \quad (4.51)$$

Dans le domaine spectral l'on trouve

$$M'(\omega) = S_+(\omega + \omega_c) + S_-(\omega - \omega_c) \quad (4.52)$$

$$= 2M(\omega) H_+(\omega + \omega_c) + 2M(\omega) H_-(\omega - \omega_c) \quad (4.53)$$

$$= 2M(\omega) [H_+(\omega_c + \omega) + H_+^*(\omega_c - \omega)] \quad (4.54)$$

où la dernière égalité provient de la relation de symétrie conjuguée (4.45) à laquelle le filtre doit satisfaire. Il apparaît donc que le signal démodulé sera une image fidèle du signal modulant si

$$[H_+(\omega_c + \omega) + H_+^*(\omega_c - \omega)] = 1 \quad (4.55)$$

ce qui signifie que le flanc de transition du filtre autour de la pulsation  $\omega_c$  doit satisfaire à des relations de symétrie conjuguée.

### Synthèse en bande de base de VSB

L'on peut aussi se demander si la synthèse du signal VSB ne peut pas se faire en construisant un signal en quadrature modifié, appelé  $m_q(t)$ , et puis une étape semblable à celle décrite par l'équation 4.44. Cela veut donc dire que l'on cherche un signal  $m_q(t)$ , obtenu par passage de  $m(t)$  dans un filtre de transmittance  $H_q(\omega)$ , tel que le spectre de  $m(t) + jm_q(t)$  déplacé autour de  $\omega_c$  donne  $2H_+(\omega)M(\omega - \omega_c)$ . Dès lors, il faut

$$M(\omega - \omega_c) + jH_q(\omega - \omega_c)M(\omega - \omega_c) = 2H_+(\omega)M(\omega - \omega_c) \quad (4.56)$$

La présence du facteur 2 dans le terme de droite s'explique comme suit : en raison de la relation (4.55) le gain (maximum) de  $H_+(\omega)$  est de 1. Par ailleurs, le terme de gauche implique (comme lors d'un passage au signal analytique) un doublement du contenu fréquentiel de  $M(\omega - \omega_c)$ .

L'on trouve que le signal en quadrature modifié,  $m_q(t)$  est obtenu par filtrage de  $m(t)$  au moyen d'un filtre dont la transmittance vaut

$$H_q(\omega) = \frac{[2H_+(\omega + \omega_c) - 1]}{j} \quad (4.57)$$

Il s'agit d'un signal en quadrature modifié par rapport au signal en quadrature habituel, obtenu par transformée de Hilbert. L'autre partie du spectre serait obtenue par  $m(t) - jm_q(t)$  modulée autour de  $-\omega_c$ . Pour cette partie-là, l'on requiert que

$$M(\omega + \omega_c) - jH_q(\omega + \omega_c)M(\omega + \omega_c) = H_-(\omega)M(\omega + \omega_c) \quad (4.58)$$

Dès lors,

$$H_q(\omega) = \frac{[1 - 2H_-(\omega - \omega_c)]}{j} \quad (4.59)$$

Il faut vérifier si cette deuxième spécification de  $H_q(\omega)$  est redondante avec la première, sinon le problème n'a pas de solution! L'on a la relation 4.45 entre  $H_+(\omega)$  et  $H_-(\omega)$ . Dès lors, l'équation (4.59) devient

$$H_q(\omega) = \frac{[1 - 2H_+^*(-\omega + \omega_c)]}{j} \quad (4.60)$$

Par ailleurs il ne faut pas oublier que le filtre  $H_+$  ne peut être quelconque : il doit satisfaire à (4.55). Dès lors,

$$H_+^*(\omega_c - \omega) = 1 - H_+(\omega_c + \omega) \quad (4.61)$$

et quand on réinjecte ce résultat dans (4.60), l'on obtient

$$\begin{aligned} H_q(\omega) &= \frac{[1 - 2 + 2H_+(\omega_c + \omega)]}{j} \\ &= \frac{[2H_+(\omega_c + \omega) - 1]}{j} \end{aligned} \quad (4.62)$$

ce qui est bien tout à fait conforme à (4.57). Dès lors, le signal VSB est bien obtenu par

$$s(t) = [m(t) + jm_q(t)] \exp^{j\omega_c t} + [m(t) - jm_q(t)] \exp^{-j\omega_c t} \quad (4.63)$$

$$= 2m(t) \cos(2\pi f_c t) - 2m_q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4.64)$$

### La télévision

La modulation VSB a joué un rôle primordial dans la transmission de signaux de télévision. La transmission de TV est influencée par les caractéristiques suivantes :

- le signal vidéo a une bande large et un contenu fréquentiel significatif en basse fréquence, ce qui suggère d'utiliser une modulation VSB. En effet une modulation SSB n'est pas judicieuse dans ce cas ;
- la réception de TV, qui est la fonction qui doit se trouver dans le récepteur de chaque abonné, devrait être aussi simple que possible afin que les récepteurs soient aussi bon marché que possible. L'on utilise de ce fait un détecteur d'enveloppe mais afin de pouvoir l'utiliser il faut rajouter une porteuse au signal VSB. En effet, sinon le signal modulé n'a pas pour amplitude le signal modulant, en raison des sauts de phase qui se produisent aux endroits de passage par zéro.

Voyons comment s'exprime l'amplitude instantanée d'un signal VSB auquel l'on a rajouté une porteuse. Le signal VSB est donné par

$$s_{vsb}(t) = A_c [1 + 2k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t) - 2k_a m_q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4.65)$$

L'on obtient évidemment une amplitude instantanée donnée par

$$\begin{aligned} a_{vsb} &= \{A_c^2 [1 + 2k_a m(t)]^2 + [2k_a m_q(t)]^2\}^{1/2} \\ &= A_c [1 + 2k_a m(t)] \left\{ 1 + \frac{[2k_a m_q(t)]^2}{A_c^2 [1 + 2k_a m(t)]^2} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (4.66)$$

On peut réduire la distorsion d'amplitude en réduisant le facteur  $k_a$  ou en réduisant la bande résiduelle.

Dans la radiodiffusion de télévision, ce n'est pas le signal émis qui est profilé VSB, mais bien le signal reçu ! En effet, le signal émis est à puissance élevée ce qui rend couteux les circuits de filtrage requis. De ce fait, l'on opère un filtrage VSB dans chaque *récepteur*. Cela n'a pas de conséquence, si ce n'est que l'émetteur émet de la puissance et utilise des fréquences qui ne sont pas utilisées par le récepteur, d'où un certain gaspillage.

On l'a vu plus haut, la télévision couleur requiert la transmission des trois coordonnées dans un système de primaires. Une méthode simple serait d'envoyer ces trois signaux tels quels. En fait les signaux obtenus de cette façon n'ont pas nécessairement la bande la plus économique. De plus il n'y a pas compatibilité entre systèmes monochrome et couleur. Cette exigence de compatibilité signifie que

- un récepteur monochrome doit pouvoir extraire (facilement) la luminance d'un signal couleur ;
- un récepteur couleur doit pouvoir utiliser le signal monochrome ;
- la bande de base du signal couleur doit aussi être inchagée par rapport à la bande de base du signal monochrome.

Ce cahier de charge est assez édifiant et intéressant car il est représentatif de problèmes rencontrés pour d'autres applications (exigence de compatibilité).

L'exigence de compatibilité a pu être assurée grâce à la constatation suivante : Comme dit plus haut *le spectre du signal monochrome est à peu près un spectre de raies espacées de la fréquence de ligne, et de largeur 1 kHz environ*. L'on peut donc songer à aller positionner un autre spectre de raies (celui des signaux de couleur) dans les hautes fréquences du spectre du signal de luminance, et à mis distance entre les raies déjà présentées. Que se passe-t-il si l'on superpose à un signal de luminance, un autre signal, à une fréquence qui est du type  $(n + 0.5)f_l$  où  $f_l$  est la fréquence ligne ? L'intensité du spot (de luminance) s'en trouve légèrement modifiée. Mais comme ce signal est à une fréquence du type  $(n + 0.5)f_l$  la variation d'intensité change de signe à la ligne suivante. De plus, elle change d'une trame à l'autre. De ce fait, en moyenne, cette modification du signal de luminance n'est pas détectée par le spectateur.

C'est cette technique dite de *l'entrelacement des fréquences* qui a permis de superposer les signaux de couleur au signal de luminance, de façon telle que la réception monochrome n'en soit pas dégradée (aux yeux du spectateur).

### Le système NTSC

Le système NTSC a été étudié aux USA en 1953 et normalisé la même année par la FCC (Federal Communications Commission). A partir des primaires  $R$ ,  $G$ ,  $B$  l'on construit les trois signaux

$$I(t) = 0.60R(t) - 0.28G(t) - 0.32B(t) \quad (4.67)$$

$$Q(t) = 0.21R(t) - 0.52G(t) - 0.31B(t) \quad (4.68)$$

$Y(t)$  est la luminance et correspond au signal transmis dans un système vidéo monochrome. Les deux autres signaux, appelés *signaux de chrominance*, sont constitutifs du *vecteur de couleur* construit par  $I(t) + jQ(t)$ . Son amplitude donne la *saturation* et son angle, la *teinte*.

Des tests subjectifs ont permis de mettre en évidence que l'oeil humain était moins sensible à la résolution, (ou hautes fréquences) des chrominances qu'à celle de la luminance. C'est pourquoi la bande de  $I(t)$  (resp.  $Q(t)$ ) est limitée à 1.5 MHz (resp. 0.5 MHz) sans impact fondamental sur la qualité. Les deux signaux de chrominance sont multiplexés sur une *sous-porteuse couleur* dont la fréquence  $f_{cc}$  correspond à la position à équidistance des harmoniques 227 et 228 de la fréquence ligne, soit

$$f_{cc} = \frac{445}{2} f_l \simeq 3.6\text{MHz} \quad (4.69)$$

La bande de base utilisée pour la seule luminance dans le système monochrome est maintenant attribuée au *signal vidéo composite*, qui est la luminance à laquelle l'on superpose les deux signaux de chrominance modulant la sous-porteuse. Ce signal composite  $s_{NTSC}(t)$  est donné par

$$s_{NTSC}(t) = Y(t) + I(t) \cos(\omega_{cc}t) + Q(t) \sin(\omega_{cc}t) \quad (4.70)$$

En vue de permettre une démodulation cohérente des signaux de chrominance, l'on transmet un morceau de la sous-porteuse dit *salve de sous-porteuse*, correspondant à quelques périodes de la porteuse dans l'intervalle de suppression de ligne. Cette salve sert à asservir un oscillateur local sur la bonne fréquence et la bonne phase (voir plus tard, les boucles à verrouillage de phase).

Avant la démodulation cohérente de la couleur, il faut séparer la couleur de la luminance. Comme ces signaux ont des spectres de raies, entrelacés, l'on pourrait recourir à des filtres dits en *peignes*. Le plus simple est encore de séparer la couleur à l'aide d'un filtre passe-bande qui de ce fait capture des raies de luminance. C'est parfois fait.

Si un récepteur couleur reçoit un signal monochrome, il détecte l'absence de sous-porteuse couleur, et met au repos le démodulateur cohérent. En effet, si on le laissait fonctionner, le démodulateur démodulerait du bruit ce qui aurait pour effet de produire des signaux de chrominance constitués de bruit uniquement.

### Le système PAL

Le système NTSC est très astucieux mais souffre d'une faiblesse majeure : sa sensibilité aux erreurs de phase de la porteuse de couleur. Si la phase de la porteuse générée par le récepteur n'est pas correcte, le vecteur couleur subit une rotation, ou encore, les deux composantes de chrominance interfèrent l'une avec l'autre.

Dans le système PAL inventé quelques années après le système NTSC, le signal vidéo composite est construit comme suit :

$$s_{PAL}(t) = Y(t) + U(t) \cos(\omega_{cc}t) \pm V(t) \sin(\omega_{cc}t) \quad (4.71)$$

avec

$$Y(t) = 0.30R(t) - 0.59G(t) - 0.11B(t) \quad (4.72)$$

$$U(t) = 0.493[R(t) - Y(t)] \quad (4.73)$$

$$V(t) = 0.877[R(t) - Y(t)] \quad (4.74)$$

Dans la définition du signal composite, l'on voit que la phase de  $V(t)$  change d'une ligne à l'autre. Ce changement de phase (phase alternation) est la caractéristique essentielle du système PAL. L'intérêt de ce changement de signe est que, moyennant traitement de signal adéquat, l'on peut réduire les changements de couleurs dus aux erreurs de phase, gros problème pour le système NTSC. Ce traitement revient à faire une moyenne des signaux  $U$  et  $V$  sur deux lignes successives, ce qui a un effet de filtrage passe-bas vertical sur ces signaux. Ce n'est pas un problème compte tenu du fait que le contenu haute-fréquence de ces signaux n'est pas aussi important que celui de la luminance.

L'on peut démoduler un signal PAL comme un signal NTSC, et ne pas tirer profit de la possibilité de correction. La dégradation due aux erreurs de phase sera alors la même qu'en NTSC.

La correction associée à la présence du signe  $\pm$  a été rendue possible par l'utilisation de lignes à retard non pas électriques mais basées sur la propagation d'une onde mécanique. Le retard utilisé est en effet d'une durée de ligne, soit  $64\mu\text{sec}$  et un tel retard est grand pour être réalisé avec des composants électriques.

Les opérations effectuées par le décodeur qui tire parti de ce changement de signe peuvent être synthétisées comme suit. Appelons  $Z_i = U_i + jV_i$  le vecteur de couleur obtenu à la ligne  $i$ . Le décodage consiste à calculer

$$Z_i + Z_{i-1}^* \quad (4.75)$$

Comme le signe de  $V$  est changé d'une ligne à l'autre, en supposant que l'information de couleur ne change pas fondamentalement d'une ligne à la suivante,  $Z_i \simeq Z_{i-1}^*$  et il vient

$$\begin{aligned} Z_i + Z_{i-1}^* &\simeq Z_i + Z_{i-1} \\ &\simeq 2Z_i \end{aligned} \quad (4.76)$$

Si maintenant l'oscillateur local à la fréquence de la sous-porteuse n'a pas la bonne phase, et que l'on note  $\psi$  l'erreur de phase supposée petite et constante entre deux lignes successives, on observe

$$Z'_i = \exp^{j\psi} Z_i \quad (4.77)$$

$$Z'_{i-1} = \exp^{j\psi} Z_{i-1} \quad (4.78)$$

et donc

$$\begin{aligned} Z'_i + Z'^*_{i-1} &= \exp^{j\psi} Z_i + \exp^{-j\psi} Z^*_{i-1} \\ &= \exp^{j\psi} Z_i + \exp^{-j\psi} Z_i \\ &= 2 Z_i \cos(\psi) \end{aligned} \quad (4.79)$$

ce qui signifie que l'amplitude du vecteur de couleur est légèrement modifiée et donc aussi la saturation, mais sa phase reste correcte, et donc aussi la teinte.

Revenons momentanément à l'effet de ce changement de signe sur le choix de la fréquence de la sous-porteuse. Dans l'introduction donnée un peu plus haut, nous avons dit que le choix d'une fréquence de sous-porteuse du type  $(n + 0.5)f_l$  a pour effet que la luminance est modifiée dans un sens durant une ligne, et dans l'autre sens (en opposition de phase) durant la ligne suivante. Globalement les modifications de luminance sont ainsi annulées. Si maintenant l'on change de signe d'une ligne à l'autre, les modifications de luminance vont dans le même sens, et l'on crée en fait un signal dont les raies fréquentielles coïncident avec celles de la luminance. Il faut donc choisir une autre valeur de la fréquence de sous-porteuse. Dans le système PAL, elle est prise égale à  $(n + 0.75)f_l$ . De ce fait, la modulation de  $U$  provoque des raies à  $(k + 0.75)f_l$ , et celle de  $V$ , à  $(k + 0.25)f_l$ . La salve de sous porteuse est aussi modifiée, et correspond à un morceau de  $\cos(\omega_{cc}t \pm 3\pi/4)$  avec concordance de signe avec l'équation (4.71).

Dans le système PAL, la fréquence de sous-porteuse est prise égale à

$$f_{cc} = (283 + 0.75)f_l + f_{im} = 4.433619\text{MHz} \quad (4.80)$$

où  $f_{im}$  est la fréquence d'images. La bande passante vidéo est plus élevée que dans le système NTSC : 5, 5.5 ou 6 MHz selon les pays, contre 4.5 MHz pour le NTSC. Le filtrage passe-bas de  $U$  et  $V$  est aussi moins sévère que celui de  $I$  et  $Q$ .

#### 4.1.7 Effet du bruit

La transmission de signaux est susceptible d'être dégradée de différentes façons :

- les bruits additifs décrits plus haut et dus à l'électronique des récepteurs, fait que l'on travaille avec un signal corrompu par un bruit additif ;

- dans de nombreux cas, le canal de transmission ne se contente pas de fournir au récepteur une version atténuée et bruitée du signal émis. Le canal peut être *dispersif* et ne pas affecter toutes les fréquences de la même façon. Dans ce cas, le récepteur reçoit une version filtrée du signal émis ;
- le signal peut aussi être corrompu par d'autres signaux, émis volontairement ou involontairement, et qui occupent tout ou partie de la bande utilisée. Dans ce cas l'on dit que le signal subit des *interférences*.

Dans le cadre de cours-ci, l'on se bornera à étudier des systèmes où le canal atténue et retarde le signal émis qui est ensuite corrompu par un bruit additif. La compensation du caractère dispersif du canal ou des interférences est abordée dans le cours de "Signaux de communications".

### Structure du récepteur

Le schéma bloc du système que nous considérons est donné à la figure 4.13. Le premier étage du récepteur est un filtre, qui correspond à l'ensemble des actions de filtrage menées dans le récepteur. Ce filtre a pour objet de limiter le bruit à l'entrée du démodulateur. Ce filtre est supposé être idéal, centré sur la fréquence de la porteuse et avoir une bande égale à celle du signal modulé. Il est supposé ne pas toucher au signal utile. Le démodulateur dépend de la modulation considérée.

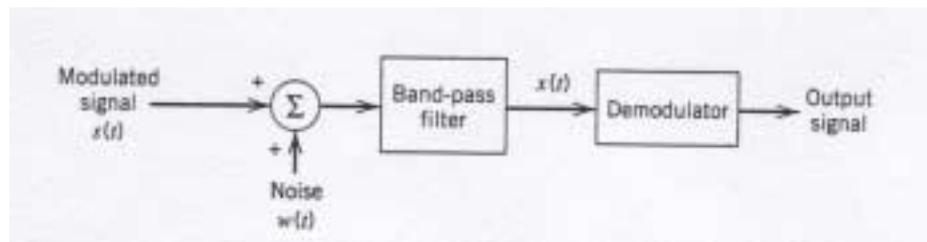


FIG. 4.13 – Structure de réception.

Le bruit est supposé blanc, de densité spectrale bilatérale  $N_0/2$ . Après passage dans le filtre, l'on peut considérer que ce bruit est devenu un signal aléatoire à bande étroite au sens vu précédemment. Le bruit filtré, noté  $n(t)$  peut donc être écrit comme

$$n(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) + n_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4.81)$$

où  $n_I(t)$  et  $n_Q(t)$  sont les composantes en phase et en quadrature. Le signal se présentant à l'entrée du démodulateur est  $x(t)$  et il est donné par  $x(t) = s(t) + n(t)$  où  $s(t)$  est le signal modulé. Si le filtre a une bande  $B$ , la puissance de bruit entachant le signal est  $BN_0$ . L'on peut définir un *rapport signal-à-bruit d'entrée*  $SNR_i$  comme le rapport de la puissance moyenne du signal modulé à la puissance moyenne du bruit. Néanmoins, une mesure plus intéressante est

le  $SNR_o$ , *rapport signal à bruit de sortie*, qui donne le rapport de la puissance du signal démodulé à la puissance moyenne du bruit, tous deux mesurés à la sortie du récepteur. Cette mesure nous donne une indication sur la qualité ou la fidélité avec laquelle le démodulateur extrait le signal modulant en présence de bruit. Le  $SNR_o$  dépend du type de modulation. Il est de ce fait intéressant d'établir une comparaison pour différentes modulations et différents démodulateurs. La comparaison doit cependant être contrainte :

- il faut que le signal modulé transmis ait la même puissance moyenne ;
- il faut que le bruit de canal ait la même puissance moyenne mesurée dans la bande de base, c'est-à-dire la bande du message  $W$ .

L'on appelle  $SNR_c$  le rapport signal-à-bruit du canal, soit le rapport entre puissance moyenne du signal et puissance moyenne de bruit *dans la bande du message*, tous deux mesurés à l'entrée du récepteur. Enfin, l'on appelle gain de rapport signal-à-bruit  $G_m$  le rapport

$$G_m = \frac{SNR_o}{SNR_c} \quad (4.82)$$

L'effet du bruit dans une chaîne de communication peut être facilement calculé tant que les éléments sont linéaires. Lorsque l'on utilise une modulation AM à porteuse supprimée, la démodulation est cohérente, et l'on peut considérer que la chaîne est linéaire. Inversement, quand la porteuse est présente et que l'on utilise un détecteur de crête, la démodulation est non linéaire et le calcul de l'effet du bruit est plus compliqué.

### Modulation DSB-SC

Un signal modulé DSB-SC est donné par l'équation (4.12) rappelée ci-après

$$s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (4.83)$$

Le signal reçu en présence d'un bruit blanc de densité bilatérale  $N_0/2$  est donné par

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (4.84)$$

$$= A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) + n_I(t) \cos(2\pi f_c t) + n_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4.85)$$

La détection cohérente requiert de multiplier le signal reçu par une sinusoïde synchronisée en fréquence et en phase avec le signal modulé reçu, et de filtrer le produit au moyen d'un filtre passe-bas. L'on suppose que le signal modulant  $m(t)$  est stationnaire, de densité  $S_m(\omega)$ , limitée à la bande  $W$ . La puissance du signal modulant est donc  $P_m$  et est donnée par

$$P_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W S_m(\omega) d\omega \quad (4.86)$$

La puissance moyenne du signal modulé peut être obtenue en rendant  $s(t)$  stationnaire, ce qui se fait en introduisant une phase aléatoire, uniformément distribuée entre 0 et  $2\pi$  dans la porteuse. Dès lors,

$$s_\theta(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t + \theta) \quad (4.87)$$

La covariance conditionnelle  $C_{s_\theta}(\tau)$  se calcule comme suit

$$\begin{aligned} \Gamma_{s_\theta}(\tau) &= \mathbf{E}[s_\theta(t + \tau)s_\theta(t)] \\ &= A_c^2 \mathbf{E}[m(t + \tau)m(t)] \cos[2\pi f_c(t + \tau) + \theta] \cos[2\pi f_c t + \theta] \\ &= \frac{A_c^2}{2} \Gamma_m(\tau) \{\cos[2\pi f_c \tau] + \cos[2\pi f_c(2t + \tau) + 2\theta]\} \end{aligned} \quad (4.88)$$

On supprime le conditionnement en intégrant sur  $\theta$ . L'on trouve

$$\Gamma_s(\tau) = \frac{A_c^2}{2} \Gamma_m(\tau) \cos[2\pi f_c \tau] \quad (4.89)$$

et la puissance est donnée par

$$\begin{aligned} \Gamma_s(0) &= \frac{A_c^2}{2} \Gamma_m(0) \cos[2\pi f_c \times 0] \\ &= \frac{A_c^2}{2} P_m \end{aligned} \quad (4.90)$$

La puissance de bruit dans la bande du message  $(-W, W)$  est donnée par  $2W \times N_0/2$ . Dès lors, le rapport signal-à-bruit du canal est donné par

$$SNR_c = \frac{A_c^2 P_m}{2N_0 W} \quad (4.91)$$

L'on veut maintenant déterminer le  $SNR_o$ . Le démodulateur cohérent va multiplier le signal reçu (total) par une sinusoïde ayant la bonne phase, et passer le produit dans un filtre passe-bas. L'on obtient

$$x(t) \cos(2\pi f_c t) = s(t) \cos(2\pi f_c t) + n(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} &= A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) \\ &+ n_I(t) \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) \\ &+ n_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (4.93)$$

Après explicitation des produits et suppression des termes à fréquence double, l'on obtient

$$m'(t) = \frac{A_c}{2} m(t) + \frac{n_I(t)}{2} \quad (4.94)$$

et donc

$$SNR_o = \frac{A_c^2 P_m}{2N_0 W} \quad (4.95)$$

En effet, en vertu de ce qui a été vu au chapitre 3.1, les composantes de Rice ont même puissance que le signal dont elles proviennent. Le filtre passe-bande va avoir une largeur  $2W$  autour de  $f_c$ . Donc la puissance du bruit vaut  $2 \times 2W \times N_0/2 = 2WN_0$ , et c'est aussi la puissance de la composante de Rice  $n_I(t)$ . Une autre façon de raisonner est que la densité de chaque composante de Rice est égale au double de celle du bruit radio, soit  $N_0$ . Dès lors on a bien une puissance donnée par  $N_0 \times 2W$ . On voit donc que l'intérêt du démodulateur cohérent est qu'il ne capture la puissance que d'une des deux composantes de Rice du bruit.

Le gain de démodulation est donné par

$$\begin{aligned} G_{m,DSB-SC} &= \frac{SNR_o}{SNR_c} \\ &= \frac{A_c^2 P_m}{2N_0W} \left( \frac{A_c^2 P_m}{2N_0W} \right)^{-1} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (4.96)$$

L'on peut aussi s'intéresser au rapport  $SNR_i$ . Dans ce cas, la bande de bruit (fréquences positives et négatives) est le double de la bande du message et vaut donc  $4W$ . La puissance de bruit vaut donc  $4W \times N_0/2$ , et

$$SNR_o = \frac{A_c^2 P_m}{4N_0W} \quad (4.97)$$

De ce fait,

$$\begin{aligned} \frac{SNR_o}{SNR_i} &= \frac{A_c^2 P_m}{2N_0W} \left( \frac{A_c^2 P_m}{4N_0W} \right)^{-1} \\ &= 2 \end{aligned} \quad (4.98)$$

### Modulation SSB

Comme un démodulateur SSB se contente de ramener la bande latérale située autour de la porteuse, autour de la fréquence 0, les rapports  $SNR_i$  et  $SNR_o$  seront les mêmes. Comme de plus l'on transmet une seule bande latérale, la bande  $RF$  a la même largeur que la bande de base,  $2W$  et l'on a aussi que  $SNR_o = SNR_c$ . Dès lors,

$$\begin{aligned} G_{m,SSB} &= 1 \\ \frac{SNR_o}{SNR_i} &= 1 \end{aligned} \quad (4.99)$$

On voit donc que pour un même rapport signal-à-bruit de départ *dans la bande du message*, le rapport signal-à-bruit après démodulation est le même pour la DSB-SC et la SSB. En fait le processus de démodulation ne fait que déplacer en bande de base ce qui se passe en RF. Ces modulations ne permettent par exemple pas d'espérer qu'en utilisant davantage de bande, l'incidence du bruit peut être diminuée.

**Effet du bruit sur la détection d'enveloppe**

Lorsque l'on transmet les deux bandes latérales, et la porteuse, l'on peut effectuer une détection de crête ou d'amplitude. Nous supposons que le signal a l'expression donnée par (4.2). Elle est rappelée ici :

$$s(t) = A_c [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t) \quad (4.100)$$

La puissance contenue dans la porteuse est donnée par  $A_c^2/2$ . La puissance contenue dans le signal utile  $A_c^2 P_m/2$ . Dès lors la puissance totale  $P_s$  est donnée par

$$P_s = \frac{A_c^2}{2} [1 + k_a^2 P_m] \quad (4.101)$$

La puissance moyenne de bruit dans la bande du message est la même qu'en DSB-SC, soit  $N_0 W$ .

Le signal reçu est donné par

$$\begin{aligned} x(t) &= s(t) + n(t) \\ &= A_c [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t) \\ &\quad + n_I(t) \cos(2\pi f_c t) + n_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \\ &= \{A_c [1 + k_a m(t)] + n_I(t)\} \cos(2\pi f_c t) \\ &\quad + n_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (4.102)$$

L'amplitude instantanée  $a_x(t)$  d'un tel signal est donnée par la relation suivante

$$a_x^2(t) = \{A_c [1 + k_a m(t)] + n_I(t)\}^2 + n_Q^2(t) \quad (4.103)$$

C'est en tout cas le signal qui serait produit par un détecteur d'amplitude idéal. L'analyse rigoureuse de cette expression est difficile dans le cadre de ce cours. Néanmoins, l'on peut regarder ce qui se passe lorsque la puissance utile est grande en regard de la puissance de bruit. Cela signifie en particulier que les termes  $n_I(t)$  et  $n_Q(t)$  sont négligeables face au terme utile. La figure 4.14 illustre ces considérations à l'aide de phaseurs. Dans ce cas, l'on peut faire l'approximation suivante

$$\begin{aligned} a_x^2(t) &= \{A_c [1 + k_a m(t)] + n_I(t)\}^2 + n_Q^2(t) \\ &\simeq \{A_c [1 + k_a m(t)] + n_I(t)\}^2 \\ a_x(t) &\simeq A_c [1 + k_a m(t)] + n_I(t) \end{aligned} \quad (4.104)$$

Le signal utile est donné par  $A_c k_a m(t)$  et le bruit, par  $n_I(t)$ . La puissance de signal dans la bande du signal est donnée par  $A_c^2 k_a^2 P_m$  et la puissance de bruit dans la bande du signal vaut  $2WN_0$ . Dès lors,

$$SNR_o = \frac{A_c^2 k_a^2 P_m}{2N_0 W} \quad (4.105)$$

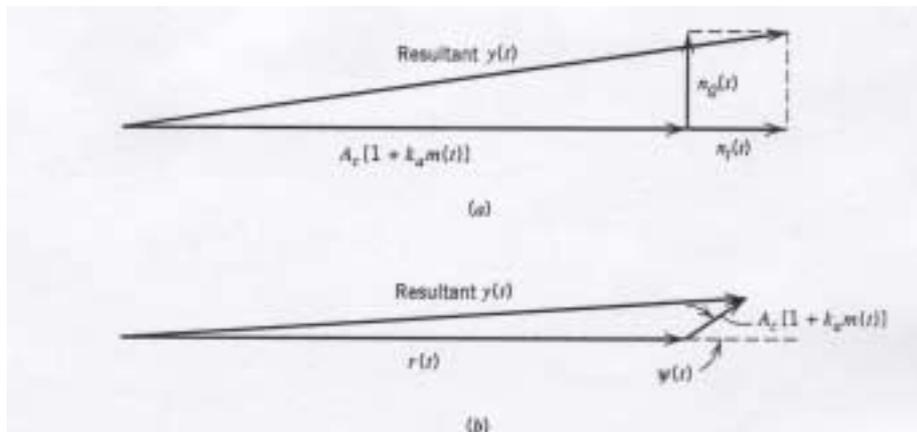


FIG. 4.14 – Représentation à l'aide de phaseurs du signal et du bruit dans le cas d'une détection de crête (modulation d'amplitude).

Il est utile de se souvenir que cette expression n'est valable qu'à puissance de signal suffisamment élevée par rapport à la puissance de bruit, et lorsque la modulation ne donne pas lieu à des sauts de phase dans le signal modulé.

L'on a encore que

$$SNR_c = \frac{A_c^2}{2} \frac{[1 + k_a^2 P_m]}{2N_0 W} \quad (4.106)$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} G_m &= \frac{SNR_o}{SNR_c} \\ &= \frac{A_c^2 k_a^2 P_m}{2N_0 W} \left\{ \frac{A_c^2}{2} \frac{[1 + k_a^2 P_m]}{N_0 W} \right\}^{-1} \\ &= \frac{k_a^2 P_m}{[1 + k_a^2 P_m]} \end{aligned} \quad (4.107)$$

Et cette quantité est toujours inférieure à l'unité. En fait la transmission de la porteuse consomme énormément de puissance qui n'est pas consacrée au signal lui-même. Il faut donc retenir le gain d'un détecteur de crête est toujours inférieur à celui associé à la DSB-SC par exemple.

### L'effet de seuil

Lorsque le rapport signal à bruit est petit en regard de l'unité, le bruit est dominant et les performances du détecteur de crête sont très différentes de celles qui viennent d'être présentées. L'on peut écrire le signal reçu à l'aide de coor-

données polaires plutôt que cartésiennes :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= s(t) + n(t) \\
 &= A_c [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t) \\
 &\quad + n_I(t) \cos(2\pi f_c t) + n_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \\
 &= A_c [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t) \\
 &\quad + A_n(t) \cos[2\pi f_c t + \psi_n(t)] \\
 &= A_c [1 + k_a m(t)] \cos[2\pi f_c t + \psi_n(t) - \psi_n(t)] \\
 &\quad + A_n(t) \cos[2\pi f_c t + \psi_n(t)] \\
 &= \{A_c [1 + k_a m(t)] \cos[\psi_n(t)] + A_n(t)\} \cos[2\pi f_c t + \psi_n(t)] \\
 &\quad + A_c [1 + k_a m(t)] \sin[\psi_n(t)] \sin[2\pi f_c t + \psi_n(t)] \\
 &\simeq \{A_c [1 + k_a m(t)] \cos[\psi_n(t)] + A_n(t)\} \cos[2\pi f_c t + \psi_n(t)] \quad (4.108)
 \end{aligned}$$

Ceci est illustré par la partie inférieure de la figure 4.14 où le phaseur de bruit est pris en référence et le signal lui est rajouté.

La détection de crête va donc produire un signal donné par

$$A_c [1 + k_a m(t)] \cos[\psi_n(t)] + A_n(t) \quad (4.109)$$

ce qui signifie qu'aucune composante stable n'est proportionnelle au signal modulant. Lorsque les composantes de bruit sont gaussiennes, la phase instantanée  $\psi_n(t)$  est uniformément distribuée entre 0 et  $2\pi$ .

La perte du message dans un détecteur de crête qui fonctionne à bas rapport signal-à-bruit s'appelle *l'effet de seuil*. Le *seuil* fait référence à la valeur du rapport signal-à-bruit au dessous de laquelle les performances se dégradent plus rapidement que simplement proportionnellement au rapport signal-à-bruit. *Tout détecteur non linéaire est caractérisé par un tel effet. Ce n'est pas le cas des démodulateurs cohérents.* La figure 4.15 montre une évolution typique de  $SNR_o$  en fonction de  $SNR_i$ .

## 4.2 Opérations apparentées à la modulation d'amplitude

L'opération élémentaire qui se cache derrière une modulation de type SSB est en fait un *décalage de fréquence*.

### 4.2.1 Changement de fréquence

Supposons que l'on dispose d'un signal modulé  $s_1(t)$  dont le spectre est centré autour de la fréquence  $f_1$ . Supposons de plus que l'on souhaite déplacer le spectre vers les hautes fréquences, de telle façon que le signal soit centré autour de  $f_2$ . Cette opération peut être réalisée au moyen d'un *mélangeur*, qui consiste

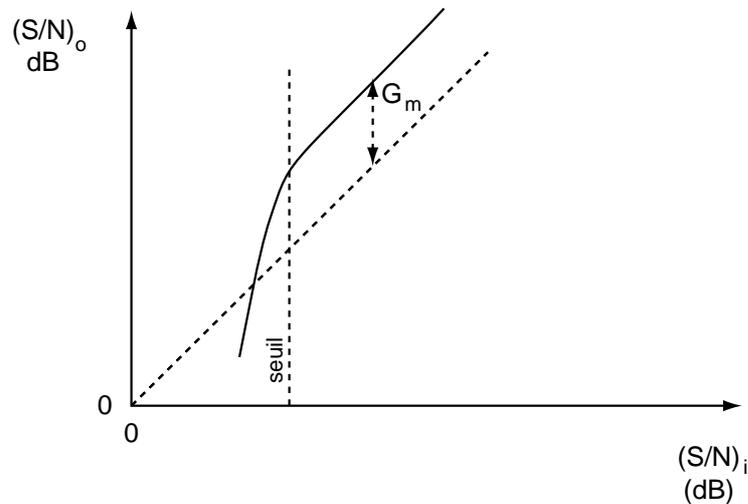


FIG. 4.15 - Effet de seuil dans un démodulateur.

en un multiplieur suivi d'un filtre passe-bande. Ceci est illustré par la figure 4.16. Avec  $f_2 = f_1 + f_i$ , l'on peut utiliser une fréquence de mélange donnée par  $f_i = f_2 - f_1$ . Avec une telle fréquence, l'on obtient bien le résultat escompté, à savoir le signal transporté autour de  $f_1 + f_1 = f_2$ , mais l'on obtient aussi du signal autour de  $f_1 - f_i = f_2 - 2f_i$ ; et bien entendu tous les signaux correspondant dans les fréquences négatives. Le filtre passe-bande sert à éliminer ces composantes fréquentielles situées autour de la fréquence  $f_1 - f_i = f_2 - 2f_i$  dite *fréquence image*.

Si l'on souhaite déplacer le signal de  $f_1$  vers  $f_2$  avec par contre  $f_2 < f_1$ , alors il faut utiliser une fréquence de mélange valant  $f_i = f_1 - f_2$ . Cela va faire apparaître le signal souhaité autour de  $f_1 - f_i = f_2$ , mais aussi autour de  $f_1 + f_i = f_2 + 2f_i$ . Ce dernier signal (ainsi que son équivalent dans les fréquences négatives) doit être éliminé par le filtre.

### 4.2.2 Multiplexage par répartition de fréquence

Une opération importante en télécommunications est le *multiplexage*. Cette opération consiste à combiner ensemble un nombre de signaux, en un signal composite adapté pour être transmis dans un seul canal. Considérons par exemple des signaux de téléphonie. Chaque signal contient des fréquences entre 300 et 3400 Hz. Si l'on veut transmettre plusieurs de ces signaux simultanément il faut soit les séparer temporellement, soit fréquentiellement. L'on parle alors de *multiplexage temporel* (TDM, time division multiplexing) et de *multiplexage fréquentiel* (FDM, frequency division multiplexing).

L'opération de FDM est apparentée à la modulation d'amplitude puisqu'elle

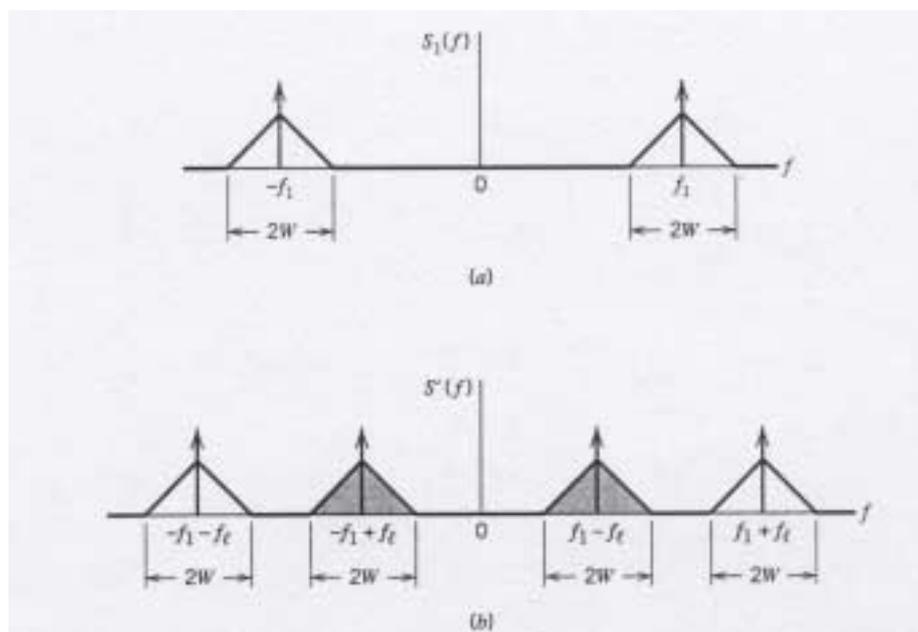


FIG. 4.16 – Opération de changement de fréquence.

fait appel à des décalages en fréquence. Cette opération est illustrée à la figure 4.17. Les signaux téléphoniques qui occupent en bande de base une largeur de l'ordre de 3kHz sont déplacés en fréquence à l'aide d'une technique de modulation d'amplitude, a priori au choix. La plus populaire est la SSB, et chaque signal téléphonique est alors placé dans une bande de 4 kHz à l'aide d'une modulation par une porteuse adéquate. Les filtres passe-bande ont pour mission de limiter le spectre de chaque signal à la place qui lui est réservée. A la réception, un banc de filtres a pour objet de séparer chacune des bandes. Chacun des messages passe dans un démodulateur individuel.

### 4.3 Modulations angulaires

Plutôt que de modifier l'amplitude de la porteuse en fonction du signal modulant, l'on peut modifier sa phase (ou angle). L'on parle alors de modulation *angulaire*. Son avantage, qui sera vu plus loin, est que cette modulation procure une meilleure protection face au bruit et aux interférences que la modulation d'amplitude. Ceci est cependant obtenu au prix d'un accroissement de bande de transmission. Il apparaît donc que la modulation angulaire permet d'échanger de la bande contre une meilleure résistance au bruit, ce que ne permet pas de faire une modulation d'amplitude.

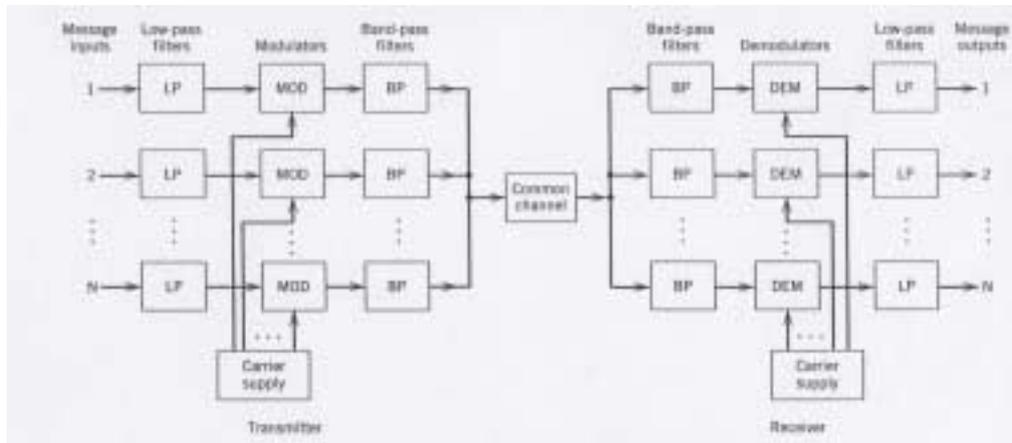


FIG. 4.17 – Schéma de multiplexage et démultiplexage par répartition de fréquences.

### 4.3.1 Définitions

Appelons  $\theta_i(t)$  la phase instantanée d'une porteuse sinusoïdale modulée, et cette phase est fonction du message à transmettre. Le signal modulé s'exprime comme

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)] \quad (4.110)$$

avec  $A_c$  l'amplitude de la porteuse. La fréquence instantanée est définie comme

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt} \quad (4.111)$$

Attention à ne succomber à la tentation de définir la fréquence comme  $f_i(t) = \theta_i(t)/2\pi t$  ! Dès lors, le signal modulé peut être représenté de façon équivalente par son enveloppe complexe donnée par

$$e_s(t) = A_c \exp^{j\theta_i(t)}, \quad (4.112)$$

qui est ici d'amplitude constante et tourne avec une vitesse instantanée donnée par  $d\theta_i(t)/dt$  (en radians par seconde) ou  $f_i(t)$  (en cycles par seconde). Pour une porteuse non modulée à fréquence  $f_c$ , l'on a

$$\theta_i(t) = \phi_c + 2\pi f_c t \quad (4.113)$$

La constante  $\phi_c$  est la valeur de la phase en  $t = 0$ . Le phaseur ou enveloppe complexe tourne cette fois à une vitesse constante  $2\pi f_c$  radians par seconde.

Il y a de très nombreuses façons selon lesquelles l'on peut mettre la phase du signal modulé en relation avec le signal modulant. Les plus communes sont la *modulation de phase* et la *modulation de fréquence*.

1. en modulation de phase, si l'on appelle  $m(t)$  le signal modulant, la phase instantanée est donnée par

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t) \quad (4.114)$$

La partie  $2\pi f_c t$  représente la phase instantanée de la porteuse *non modulée*, et  $k_p$  représente la *sensibilité du modulateur*, exprimée en *radians par volt* ce qui suppose que  $m(t)$  soit exprimé en volts. L'on suppose de façon non restrictive que la phase de la porteuse non modulée est 0 en  $t = 0$ . Le signal modulé est donc donné par

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m(t)]. \quad (4.115)$$

2. en modulation de fréquence (FM, frequency modulation), c'est la fréquence instantanée qui est modifiée linéairement avec le signal modulant. L'on a donc

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t) \quad (4.116)$$

où  $f_c$  est la fréquence de la porteuse non modulée et  $k_f$  est la sensibilité du modulateur de fréquence, exprimée en Hertz par volt en supposant à nouveau que  $m(t)$  est en volts. La phase instantanée est donc donnée par

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \quad (4.117)$$

où l'on a supposé que la phase à l'instant 0 était nulle. Dès lors, le signal modulé est donné par

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau]. \quad (4.118)$$

Une conséquence liée au fait de permettre à la phase ou à la fréquence de changer en fonction du signal modulant, est que les instants de passage par 0 du signal modulé ne sont plus équidistants ou réguliers. C'est une première différence par rapport à un signal modulé en amplitude. La deuxième, c'est que l'amplitude du signal modulé est ici constante, par opposition précisément à ce qui se passe en modulation d'amplitude.

Une dernière remarque est qu'un signal modulé en fréquence peut être interprété comme un signal modulé en phase, avec un signal modulant donné par

$$\int_0^t m(\tau) d\tau \quad (4.119)$$

au lieu de  $m(t)$ . De façon semblable, un signal modulé en phase peut être vu comme un signal modulé en fréquence par un signal modulant donné par

$$\frac{dm(t)}{dt} \quad (4.120)$$

### 4.3.2 La modulation de fréquence

La définition donnée en (4.118) montre que le signal modulé  $s(t)$  est une fonction non linéaire du signal modulant. L'on dit encore de la modulation de fréquence qu'elle est une *modulation non linéaire*. De ce fait, le spectre du signal modulé n'est pas en relation simple avec celui du signal modulant. Et l'analyse de ce spectre est aussi beaucoup plus compliquée que dans le cas de l'AM. Nous aurons dès lors recours à la démarche empirique, à savoir

1. considérer d'abord le cas simple de la modulation par un signal simple-ton, ou une simple sinusoïde qui produit un signal FM à bande étroite,
2. ensuite, la modulation par un même signal simple-ton mais qui produit cette fois un signal FM à large bande.

Considérons donc un signal modulant donné par

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t) \quad (4.121)$$

L'on a donc une fréquence instantanée de signal modulé donnée par

$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_c + k_f A_m \cos(2\pi f_m t) \\ &= f_c + \Delta_f \cos(2\pi f_m t) \end{aligned} \quad (4.122)$$

avec, bien entendu,  $\Delta_f = k_f A_m$ . Cette quantité  $\Delta_f$  est appelée *déviaton de fréquence* et elle représente l'écart maximal que la fréquence instantanée du signal modulé peut avoir par rapport à la fréquence de la porteuse non modulée. *Cette déviaton est proportionnelle à l'amplitude du signal modulant et indépendante de la fréquence de ce signal modulant.*

La phase instantanée est dès lors donnée par

$$\begin{aligned} \theta_i(t) &= 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \\ &= 2\pi f_c t + 2\pi k_f A_m \int_0^t \cos(2\pi f_m \tau) d\tau \\ &= 2\pi f_c t + 2\pi \frac{k_f A_m}{2\pi f_m} \sin(2\pi f_m t) \\ &= 2\pi f_c t + \frac{\Delta_f}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \end{aligned} \quad (4.123)$$

Le rapport  $\beta = \Delta_f / f_m$  est souvent appelé *indice de modulation* du signal FM. L'on a encore

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t) \quad (4.124)$$

ce qui montre que  $\beta$  représente aussi l'écart maximal que peut avoir la phase instantanée par rapport à la phase de la porteuse non modulée.  $\beta$  est en radians. Le signal FM est finalement donné par

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)] \quad (4.125)$$

*Lorsque  $\beta \ll 1$  radian, l'on parle de FM à bande étroite, et inversement, lorsque  $\beta \gg 1$  radian, l'on parle de modulation FM à large bande.*

### 4.3.3 FM à bande étroite

En développant l'équation (4.125), l'on obtient

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t] \cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] - A_c \sin[2\pi f_c t] \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)] \quad (4.126)$$

Utilisant le fait que  $\beta \ll 1$  radian, l'on peut faire les approximations suivantes :

$$\cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] \simeq 1 \quad (4.127)$$

$$\sin[\beta \sin(2\pi f_m t)] \simeq \beta \sin(2\pi f_m t) \quad (4.128)$$

Dès lors,

$$s(t) \simeq A_c \cos[2\pi f_c t] - A_c \beta \sin[2\pi f_c t] \sin(2\pi f_m t) \quad (4.129)$$

Il apparaît donc que sous l'hypothèse de bande étroite, le signal FM apparaît comme un signal de type DSB-SC. Il faut cependant être conscient des imprécisions liées à cette modélisation :

– le signal donné par (4.129) a une amplitude instantanée donnée

$$a_s(t) = A_c \sqrt{1 + \beta^2 \sin^2(2\pi f_m t)} \quad (4.130)$$

ce qui signifie que le signal modulé approché contient une variation d'amplitude alors que le vrai signal est à amplitude constante ;

– la phase instantanée est donnée par

$$\theta_s(t) = 2\pi f_c t + \text{ATN}[\beta \sin(2\pi f_m t)] \quad (4.131)$$

et ce signal souffre aussi de distorsion de phase par rapport au signal original.

Utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques, l'on peut écrire le signal sous la forme

$$s(t) \simeq A_c \cos[2\pi f_c t] - \frac{A_c}{2} \beta \{ \cos[2\pi (f_c - f_m) t] - \cos[2\pi (f_c + f_m) t] \} \quad (4.132)$$

Cette expression est très semblable à celle d'un signal modulé AM. L'on peut en déduire que la bande requise par le signal FM à bande étroite est semblable à celle requise par le signal AM, soit dans ce cas-ci,  $2f_m$ .

Un signal FM à bande étroite peut être produit au moyen du schéma présenté à la figure 4.18.

### 4.3.4 FM à large bande

Nous souhaiterions pouvoir déterminer le spectre du signal FM donné par (4.125) pour une valeur quelconque de  $\beta$ . En supposant que la fréquence de

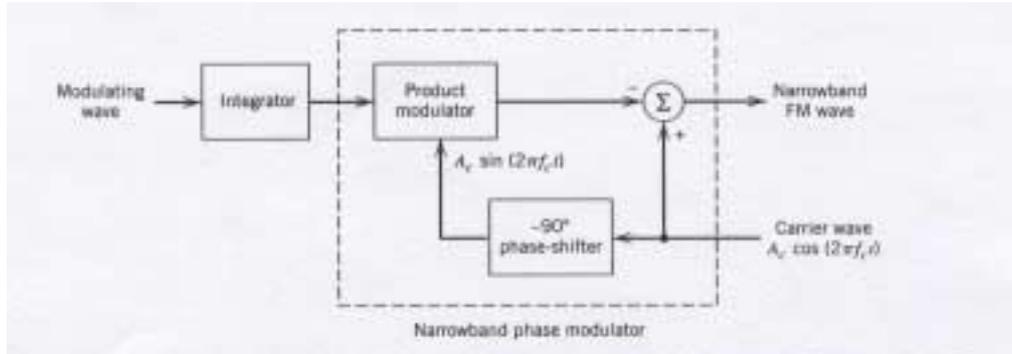


FIG. 4.18 – Dispositif permettant de produire de la FM à bande étroite.

la porteuse est grande en regard de la bande du signal FM, le signal peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)] \\ &= \Re[A_c \exp^{j\beta \sin(2\pi f_m t)} \exp^{2\pi j f_c t}] \end{aligned} \quad (4.133)$$

Il apparaît donc que l'enveloppe complexe du signal est donnée par

$$e_s(t) = A_c \exp^{j\beta \sin(2\pi f_m t)} \quad (4.134)$$

Cette enveloppe est un signal périodique, de période  $1/f_m$ . Dès lors l'on peut représenter cette enveloppe à l'aide de *séries de Fourier*. L'on sait en effet que tout signal périodique  $s_p(t)$  de période  $T$  peut se mettre sous la forme

$$s_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp^{2\pi j k t / T} \quad (4.135)$$

Les  $c_k$  peuvent être calculés comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} s_p(t) \exp^{-2\pi j l t / T} dt &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-T/2}^{T/2} \exp^{2\pi j k t / T} \exp^{-2\pi j l t / T} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k T \delta(k - l) \\ &= T c_l \end{aligned} \quad (4.136)$$

Dès lors, pour le problème qui nous occupe, tenant compte de ce que  $T = 1/f_m$ , l'on trouve que

$$\begin{aligned} c_l &= f_m \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} e_s(t) \exp^{-2\pi j l f_m t} dt \\ &= f_m \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} A_c \exp^{j\beta \sin(2\pi f_m t)} \exp^{-2\pi j l f_m t} dt \end{aligned} \quad (4.137)$$

Définissant  $x = 2\pi f_m t$ , l'on a encore

$$c_l = A_c \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp^{j\beta \sin(x)} \exp^{-jlx} dx \quad (4.138)$$

La fonction de Bessel de première espèce et d'ordre  $n$ , notée  $J_n(u)$ , est définie par

$$J_n(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp^{j(u \sin x - nx)} dx \quad (4.139)$$

De façon très synthétique, l'on a

$$c_l = A_c J_l(\beta) \quad (4.140)$$

L'enveloppe complexe devient donc

$$e_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_c J_k(\beta) \exp^{2\pi j k f_m t} \quad (4.141)$$

Le signal modulé peut donc être écrit

$$\begin{aligned} s(t) &= \Re[e_s(t) \exp^{2\pi j f_c t}] \\ &= \Re\left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_c J_k(\beta) \exp^{2\pi j k f_m t} \exp^{2\pi j f_c t} \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_c J_k(\beta) \cos[2\pi (f_c + k f_m) t] \end{aligned} \quad (4.142)$$

Prenant la transformée de Fourier, l'on obtient le spectre  $S(\omega)$  exprimé comme suit

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_c J_k(\beta) \frac{1}{2} \{ \delta[\omega - 2\pi(f_c + k f_m)] + \delta[\omega + 2\pi(f_c + k f_m)] \} \quad (4.143)$$

Il est utile de rappeler un certain nombre de propriétés de cette fonction de Bessel pour pouvoir analyser plus finement le résultat obtenu en (4.143).

1.  $J_k(\beta) = (-1)^k J_{-k}(\beta)$  pour tout  $k$  (positif ou négatif) ;
2. pour des valeurs faibles de l'indice de modulation  $\beta$ ,

$$J_0(\beta) \simeq 1 \quad (4.144)$$

$$J_1(\beta) \simeq \beta/2 \quad (4.145)$$

$$J_{n>2}(\beta) \simeq 0 \quad (4.146)$$

3.  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta) = 1$

L'on peut donc émettre les commentaires suivants quand au spectre d'un signal FM modulé à large bande par un signal sinusoïdal :

1. le spectre contient une raie au droit de la porteuse et une infinité de raies disposées symétriquement par rapport à la raie de la porteuse, et à des distances  $f_m, 2f_m, \dots$  de cette raie. Ce résultat est donc assez différent de ce qui se passe avec une modulation AM, où le même signal modulant aurait simplement donné lieu à deux raies, disposées symétriquement autour de la raie de la porteuse ;
2. quand l'indice de modulation est faible (en comparaison de l'unité), seuls les termes correspondant à  $n = 0, 1$  donnent lieu à une contribution et le spectre contient effectivement une raie au droit de la porteuse et deux raies latérales en  $f_c \pm f_m$ . Cette situation correspond au cas de la modulation à bande étroite considéré plus haut ;
3. l'amplitude de la raie associée à la porteuse dépend de  $\beta$ . Ceci est différent de ce qui se passe en AM. L'on peut expliquer intuitivement ce résultat en se disant que si l'amplitude du signal est constante, sa puissance moyenne l'est aussi. Dès lors, la puissance qui apparaîtrait dans des raies latérales le fait au détriment de la puissance contenue dans la raie centrale. L'on peut encore s'en convaincre en utilisant la relation de Parseval. L'on obtient que la puissance  $P_s$  du signal modulé est donnée par

$$P_s = \frac{1}{2} A_c^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta) = \frac{1}{2} A_c^2 \quad (4.147)$$

La figure 4.19 illustre l'incidence de l'amplitude d'un signal modulant sur le spectre du signal modulé. A  $f_m$  fixé, lorsque  $\Delta f$  augmente, l'espacement entre raies ne change pas, mais davantage de raies apparaissent et le spectre s'élargit. La figure 4.20 illustre l'influence de la fréquence du signal modulant sur le spectre du signal modulé. L'amplitude est cette fois maintenue constante. Dès lors, lorsque  $f_m$  augmente, à  $\Delta f$  fixé,  $\beta$  va diminuer, et le nombre de raies se restreint. Inversement, lorsque  $\beta$  augmente, le nombre de raies augmente et comme  $f_m$  diminue, l'écart entre raies se réduit aussi. Lorsque  $\beta \rightarrow \infty$ , la bande occupée atteint la valeur de  $2\Delta f$ , ce qui est un élément important à retenir.

### 4.3.5 Bande d'un signal FM

En théorie, un signal FM contient un nombre infini de raies latérales qui rendent de ce fait la bande requise virtuellement infinie. En pratique, il apparaît néanmoins que le spectre FM peut être limité à un nombre fini de raies latérales, et cela, au prix d'une distorsion du signal qui reste limitée.

Dans le cas du signal modulant simple ton, nous avons mentionné ci-dessus que pour de grandes valeurs de l'indice de modulation, la bande dépasse très modérément  $2\Delta f$ . Pour un indice de modulation faible, le spectre contient seulement une raie de chaque côté de la porteuse et le spectre a donc une largeur  $2f_m$ .

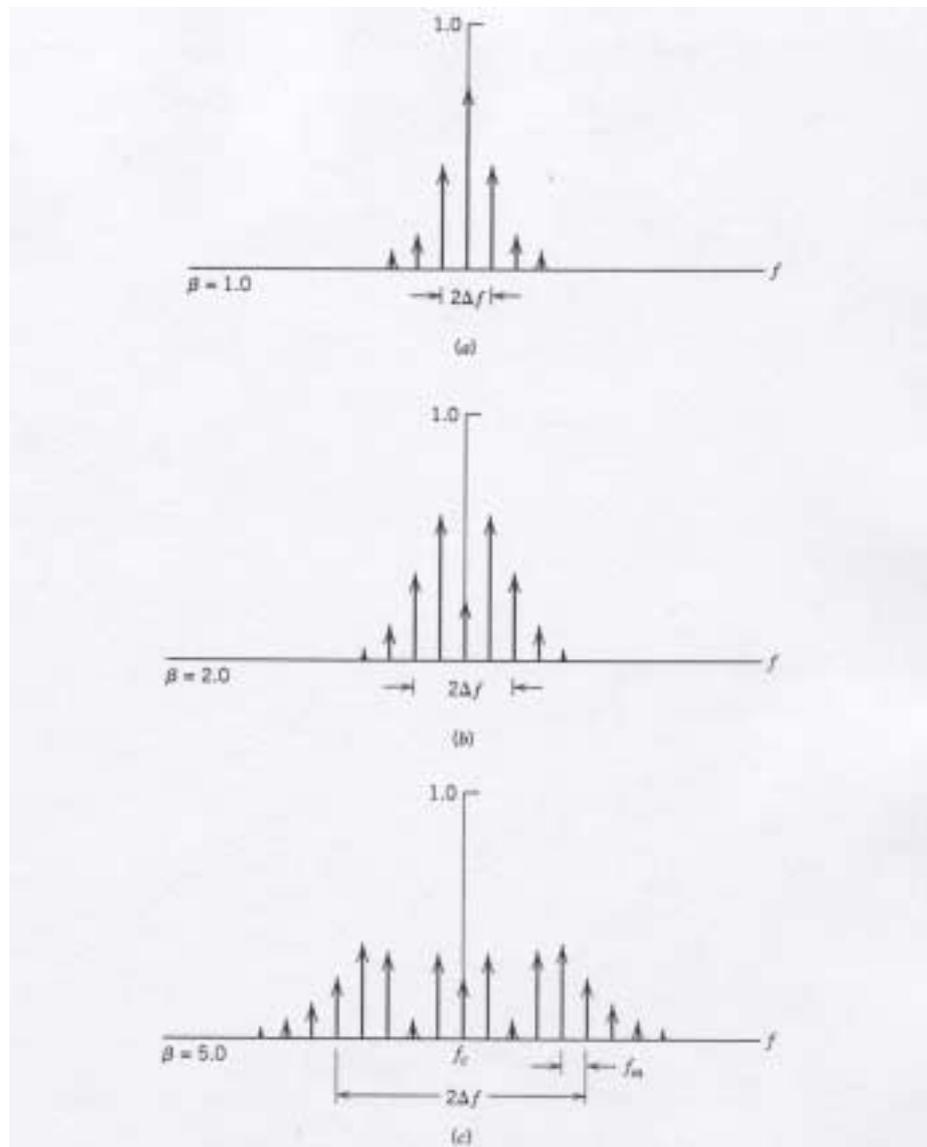


FIG. 4.19 – Effet de l'amplitude du signal modulant sur le spectre d'un signal FM.

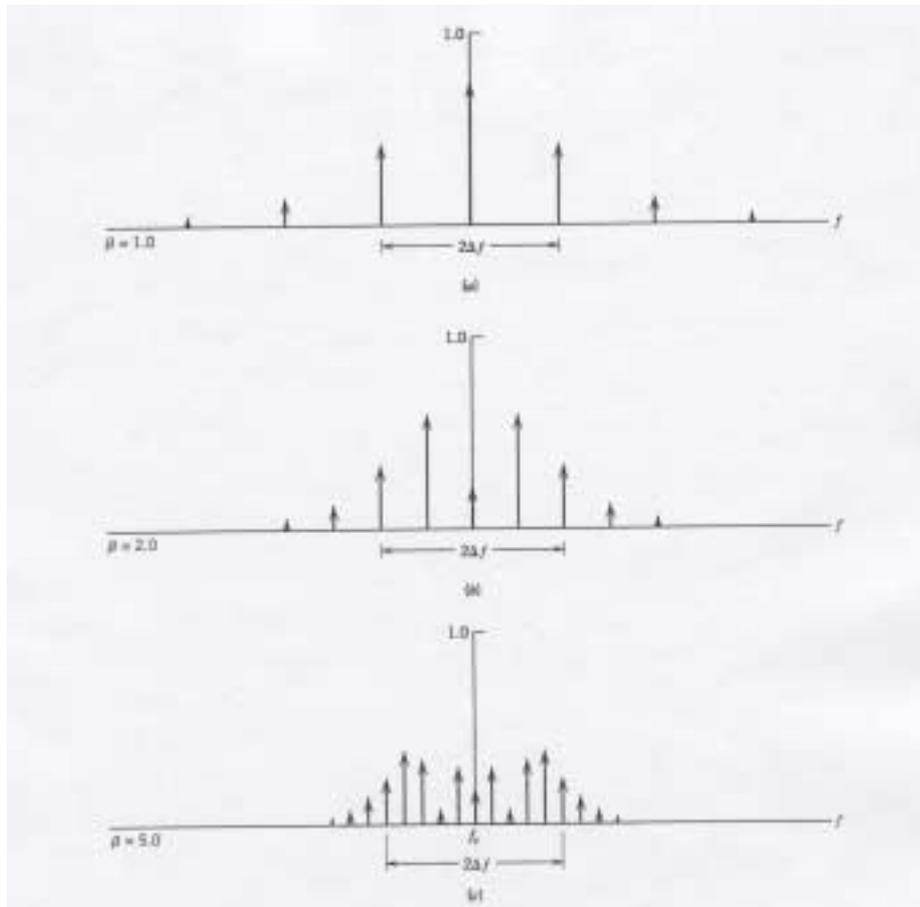


FIG. 4.20 – Effet de la fréquence du signal modulant sur le spectre d'un signal FM.

La règle retenue pour le calcul de la bande passante requise en FM pour un signal modulant simple ton, est

$$B_T = 2\Delta f + 2f_m = 2\Delta f(1 + 1/\beta) \quad (4.148)$$

Cette relation empirique est connue sous le nom de *formule de Carson*.

Dans le cas d'un signal modulant quelconque, dont la fréquence la plus élevée est  $W$ , l'on estime la bande requise pour le signal modulé FM par une analyse de type "worst-case" par un signal simple ton. L'on définit  $D = \Delta f/W$ , qui est l'équivalent de  $\beta$  pour un signal sinusoïdal. Dès lors, en remplaçant  $\beta$  par  $D$ , et  $f_m$  par  $W$ , l'on peut utiliser la formule de Carson.

En pratique la formule de Carson sous-estime quelque peu la bande requise.

Aux USA, la déviation maximale  $\Delta f$  est fixée à 75 kHz pour la radiodiffusion FM. Si l'on prend une fréquence maximale de signal modulant  $W = 15$  kHz, l'on trouve  $D = 75/15 = 5$ . La formule de Carson, où  $\beta$  est remplacé par  $D$ , et  $f_m$  par  $W$ , l'on trouve

$$B_T = 2 * 75000 + 2 * 15000 = 180000 \quad (4.149)$$

En pratique une bande de 200kHz est allouée à chaque canal FM.

### 4.3.6 Production de signaux FM

Il y a essentiellement deux façons de générer de la FM. Elles sont appelées *FM directe* et *FM indirecte*. Dans la première méthode, le signal modulant contrôle directement la fréquence de la porteuse. Ceci est obtenu grâce à un *oscillateur contrôlé en tension* (VCO, voltage controlled oscillator). Dans la seconde méthode, le signal modulant est d'abord utilisé pour produire un signal FM à bande étroite. Ensuite, une élévation de fréquence permet d'obtenir la déviation souhaitée. Cette méthode est souvent utilisée lorsque la stabilité de la fréquence porteuse est critique.

Un schéma bloc correspondant à la méthode indirecte est donné à la figure 4.21.

Le signal modulant est d'abord intégré, conformément à l'équation (4.119). Le résultat est utilisé pour moduler en phase un oscillateur contrôlé par un cristal, utilisé pour des raisons de stabilité. L'on peut utiliser pour réaliser la modulation de phase le schéma présenté à la figure 4.18. En vue de minimiser la distorsion de phase, l'indice de modulation  $\beta$  doit être petit. Le signal obtenu est à bande étroite. Le signal ainsi obtenu subit une élévation de fréquence. Cette élévation est réalisée au moyen d'une *non linéarité* suivie d'un filtre passe-bande. La non linéarité est un dispositif sans mémoire. La relation entrée-sortie qui la caractérise est donnée par

$$v(t) = a_1 s(t) + a_2 s^2(t) + \dots a_n s^n(t) \quad (4.150)$$

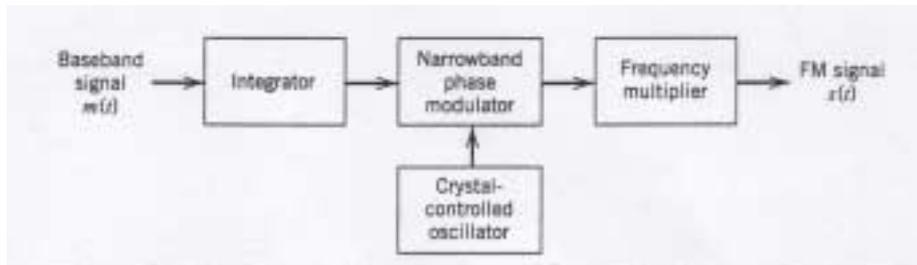


FIG. 4.21 – Méthode indirecte d'obtention d'un signal FM.

où les coefficients  $a_i$  sont déterminés par le point de fonctionnement du dispositif non linéaire et  $n$  est l'ordre le plus élevé de non linéarité. L'entrée est donnée par

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau]. \quad (4.151)$$

Le filtre passe-bande est centré sur  $n f_c$  où  $f_c$  est la porteuse du signal modulé entrant. De plus le filtre est synthétisé de façon à avoir une bande passante qui est  $n$  fois la bande de  $s(t)$ . A la sortie du filtre passe-bande l'on recueille un signal donné par

$$v(t) = A'_c \cos[2\pi n f_c t + 2\pi n k_f \int_0^t m(\tau) d\tau]. \quad (4.152)$$

La fréquence instantanée en est

$$f'_i(t) = n f_c + n k_f m(t) \quad (4.153)$$

### 4.3.7 Démodulation de signaux FM

Un organe populaire pour réaliser une démodulation de fréquence est le *discriminateur*. Cet organe produit une amplitude de sortie directement proportionnelle à la fréquence instantanée du signal FM entrant. Une autre possibilité, décrite plus tard, est d'utiliser une boucle à verrouillage de phase (PLL, phase locked loop).

Le discriminateur comprend un filtre suivi d'un détecteur d'enveloppe. Le filtre idéal devrait avoir une réponse en fréquence purement imaginaire, et changeant linéairement avec la fréquence dans un intervalle prédéterminé. Supposons une réponse en fréquence du type

$$H(f) = \begin{cases} j2\pi a(f - f_c + B_T/2) & \text{si } f_c - B_T/2 \leq f \leq f_c + B_T/2 \\ j2\pi a(f + f_c - B_T/2) & \text{si } -f_c - B_T/2 \leq f \leq -f_c + B_T/2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (4.154)$$

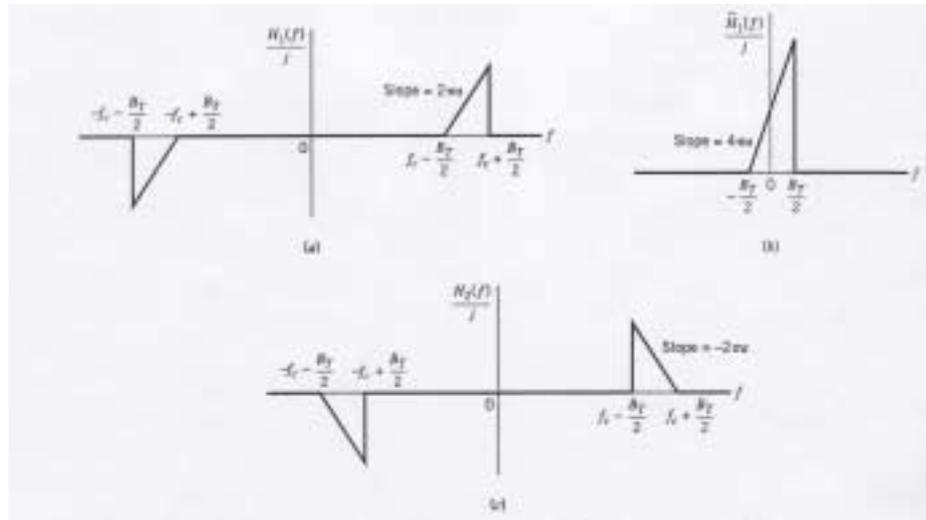


FIG. 4.22 – Réponse en fréquence d'un filtre de discrimination FM.

La réponse en fréquence d'un tel filtre est montrée à la figure 4.22.

Un tel circuit a un équivalent en bande de base dont la réponse en fréquence est obtenue en décalant de  $f_c$  vers la gauche le comportement pour les fréquences positives, et en annulant le comportement aux fréquences négatives. Le tout est affecté d'un facteur 2. Le résultat est donné à la même figure. La transmittance de ce filtre  $H_a(f)$  est donnée par

$$H_a(f) = \begin{cases} j4\pi a(f + B_T/2) & \text{si } -B_T/2 \leq f \leq B_T/2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (4.155)$$

L'enveloppe complexe du signal modulé entrant est donnée par

$$e_s(t) = A_c \exp^{2\pi j k_f \int_0^t m(\tau) d\tau} \quad (4.156)$$

Si l'on entre cette enveloppe dans l'équivalent passe-bas du circuit, dont la transmittance est donnée par (4.155), l'on obtient une sortie  $e'_s(t)$  dont le spectre est donné par

$$E'_s(f) = H_a(f)E_s(f)/2 = \begin{cases} j2\pi a(f + B_T/2)E_s(f) & \text{si } -B_T/2 \leq f \leq B_T/2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (4.157)$$

Le facteur  $1/2$  apparaît pour ne pas cumuler les facteurs 2 dans les enveloppes complexes (voir chapitre 3.1).

L'opération de multiplication par  $2\pi j f$  dans le domaine de Fourier équivaut à une différentiation dans le domaine temporel. Dès lors,

$$e'_s(t) = a \frac{de_s(t)}{dt} + j\pi a B_T e_s(t) \quad (4.158)$$

En y introduisant la définition de  $e_s(t)$  donnée par (4.134), l'on trouve

$$e'_s(t) = [a2\pi jk_fm(t) + j\pi aB_T]A_c \exp^{2\pi jk_f \int_0^t m(\tau) d\tau} \quad (4.159)$$

Ce qui sort du circuit est donné par

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \Re[e'_s(t) \exp^{2\pi jf_c t}] & (4.160) \\ &= [a2\pi k_fm(t) + \pi aB_T]A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau + \pi/2] \\ &= \pi aB_T[1 + 2k_fm(t)/B_T]A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau + \pi/2] \end{aligned}$$

Le signal  $s_1(t)$  est modulé à la fois en phase et en amplitude par des formes d'ondes liées à  $m(t)$ . Néanmoins, en supposant que

$$\left| \frac{2k_fm(t)}{B_T} \right| < 1 \quad (4.161)$$

pour toute valeur de  $t$ , l'on peut utiliser un détecteur d'enveloppe et ainsi obtenir le signal modulant. Le signal obtenu est

$$|s_1(t)| = \pi aB_TA_c[1 + 2k_fm(t)/B_T] \quad (4.162)$$

Le terme de biais qui ne nous intéresse pas peut en fait être soustrait par l'utilisation d'un deuxième filtre de transmittance  $H_{2,a}(f) = H_a(-f)$ . L'on peut montrer que l'on obtient un signal  $s_2(t)$ , d'enveloppe  $e'_{s,2}(t)$  caractérisée par

$$|e'_{s,2}(t)| = \pi aB_TA_c[1 - 2k_fm(t)/B_T]. \quad (4.163)$$

En effectuant la différence entre enveloppes, l'on trouve un signal  $s_0(t)$  donné par

$$\begin{aligned} s_0(t) &= |e'_s(t)| - |e'_{s,2}(t)| \\ &= 4\pi aA_ck_fm(t). \end{aligned} \quad (4.164)$$

Le discriminateur idéal est constitué d'une paire de filtres suivis chacun d'un détecteur d'enveloppe et ensuite un sommateur. Un tel discriminateur est appelé *discriminateur de fréquence balancé*.

Enfin il est important de mentionner que le signal FM est supposé être à enveloppe constante. Si ce n'est pas le cas, par exemple à cause de fluctuations dues à la propagation il convient de gommer les variations d'amplitude avant d'entrer dans le discriminateur. Cette opération se fait au moyen d'un organe appelé *limiteur*.

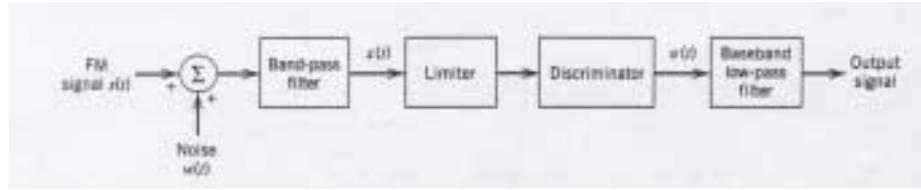


FIG. 4.23 – Chaîne de transmission prise en compte pour l'effet du bruit sur la FM.

### 4.3.8 Effet du bruit

Pour mesurer l'effet du bruit sur le signal démodulé FM, l'on suppose avoir affaire à la chaîne de transmission donnée à la figure 4.23. Le bruit est toujours modélisé comme étant gaussien centré et blanc, de densité spectrale bilatérale  $N_0/2$ . Le signal FM a une porteuse  $f_c$  et une bande  $B_T$ . Le filtre qui a cette largeur est supposé passer le signal sans distorsion. Le signal FM a une enveloppe constante. Toute variation d'amplitude du signal reçu à l'entrée du récepteur ne peut donc résulter que du bruit ou d'interférences. Dès lors, l'on utilise un limiteur dont le rôle est de gommer ces variations d'amplitude. Il sature le signal à la sortie du filtre passe-bande de réception et la forme d'onde rectangulaire ainsi obtenue est filtrée par un autre passe-bande dont la mission est de supprimer les harmoniques. Le discriminateur contient

1. un dérivateur ;
2. un détecteur d'enveloppe.

Le filtre de postdétecteur, ou filtre en bande de base, a une bande juste suffisante pour laisser passer le signal modulant. Son rôle essentiel est d'éliminer le bruit hors bande.

Suite à ce qui a été vu au chapitre 3.1 le bruit obtenu à l'entrée du premier filtre passe-bande peut être mis sous la forme

$$\begin{aligned} n(t) &= n_I(t) \cos[2\pi f_c t] + n_Q(t) \sin[2\pi f_c t] \\ &= r_n(t) \cos[2\pi f_c t + \psi_n(t)]. \end{aligned} \quad (4.165)$$

Le signal FM a la forme

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau] \\ &= A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \end{aligned} \quad (4.166)$$

Le signal obtenu à la sortie du limiteur est donné par

$$r(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] + r_n(t) \cos[2\pi f_c t + \psi_n(t)]. \quad (4.167)$$

L'amplitude de ce signal ne nous intéresse pas. Par contre, la phase instantanée nous intéresse. Comme

$$\begin{aligned}
 r(t) &= A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] + r_n(t) \cos[2\pi f_c t + \psi_n(t)] \\
 &= \Re \left\{ A_c \exp^{2\pi j f_c t + \phi(t)} + r_n(t) \exp^{2\pi j f_c t + j\psi_n(t)} \right\} \\
 &= \Re \left\{ \left[ A_c + r_n(t) \exp^{j[\psi_n(t) - \phi(t)]} \right] \exp^{2\pi j f_c t + j\phi(t)} \right\} \\
 &= \Re \left\{ \left[ A_c + r_n(t) \cos[\psi_n(t) - \phi(t)] + j r_n(t) \sin[\psi_n(t) - \phi(t)] \right] \right. \\
 &\quad \left. \exp^{2\pi j f_c t + j\phi(t)} \right\} \tag{4.168}
 \end{aligned}$$

la phase instantanée est donc donnée par

$$\phi_r(t) = \phi(t) + \text{ATN} \left\{ \frac{r_n(t) \sin[\psi_n(t) - \phi(t)]}{A_c + r_n(t) \cos[\psi_n(t) - \phi(t)]} \right\} \tag{4.169}$$

L'objectif de la démarche est de voir quelle est l'erreur commise sur la fréquence instantanée en raison du bruit. En supposant le discriminateur idéal, sa sortie sera proportionnelle à

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_r(t)}{dt} \tag{4.170}$$

La phase ayant une structure assez compliquée, l'on va introduire un certain nombre de simplifications. On fait l'hypothèse que le rapport signal à bruit mesuré à l'entrée du discriminateur est grand par rapport à l'unité. L'on peut dès lors négliger la contribution du bruit au dénominateur de 4.169 et l'on obtient

$$\phi_r(t) \simeq \phi(t) + \text{ATN} \left\{ \frac{r_n(t) \sin[\psi_n(t) - \phi(t)]}{A_c} \right\} \tag{4.171}$$

La figure 4.24 donne une représentation phasorielle (enveloppe complexe) du bruit et du terme utile.

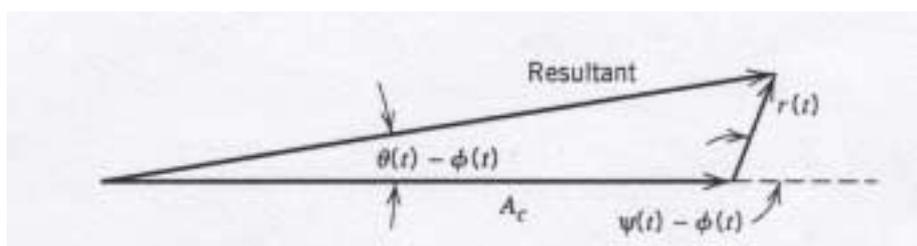


FIG. 4.24 – Représentation phasorielle du terme utile et du bruit sous hypothèse de rapport signal à bruit élevé.

Le discriminateur produit donc

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_r(t)}{dt} = k_f m(t) + \frac{1}{2\pi A_c} \frac{d \{ r_n(t) \sin[\psi_n(t) - \phi(t)] \}}{dt} \tag{4.172}$$

Le bruit apparaît donc sous une forme additive à la sortie du discriminateur. L'on a vu au chapitre 3.1 que la phase instantanée  $\psi_n(t)$  correspondant à un bruit blanc gaussien centré, de type passe-bande, est uniformément distribuée. L'on serait tenté de dire qu'il en est autant de la différence de phase  $\psi_n(t) - \phi(t)$ . L'on peut montrer que pour autant que le rapport signal à bruit est élevé, cette hypothèse est vérifiée :  $\psi_n(t) - \phi(t)$  est uniformément distribuée sur  $[0, 2\pi]$ . Dès lors l'on peut écrire

$$\frac{1}{2\pi A_c} \frac{d \{r_n(t) \sin[\psi_n(t) - \phi(t)]\}}{dt} \simeq \frac{1}{2\pi A_c} \frac{d \{r_n(t) \sin[\psi_n(t)]\}}{dt} \quad (4.173)$$

Il se fait (4.165) que  $r_n(t) \sin[\psi_n(t)]$  est précisément la composante en quadrature de l'enveloppe du bruit. L'on écrit donc  $r_n(t) \sin[\psi_n(t)] = -n_Q(t)$  et le bruit est donc donné par

$$n_d(t) = -\frac{1}{2\pi A_c} \frac{d \{n_Q(t)\}}{dt} \quad (4.174)$$

*L'on a donc que le bruit à la sortie du discriminateur est déterminé par l'amplitude de la porteuse et la composante en quadrature du bruit.*

L'équation (4.172) nous montre que le terme utile en sortie du discriminateur est donné par  $k_f m(t)$ . La puissance associée à ce terme est  $k_f^2 P_m$ .

En ce qui concerne le bruit, la transmittance associée à la dérivation est  $j\omega$ . Le spectre aléatoire du terme de bruit, en appliquant les résultats du chapitre 3.1, est donc  $N_d(\omega) = -j\omega N_Q(\omega)/2\pi A_c$ , où  $N_Q(\omega)$  est le spectre aléatoire associé à la composante en quadrature. La fonction de covariance de ce spectre aléatoire vaut

$$\begin{aligned} E[N_d(\omega) N_d^*(\omega')] &= \frac{-j\omega}{2\pi A_c} \frac{j\omega'}{2\pi A_c} E[N_Q(\omega) N_Q^*(\omega')] \\ &= \frac{-j\omega}{2\pi A_c} \frac{j\omega'}{2\pi A_c} 2\pi N_0 \delta(\omega - \omega') \\ &= \frac{\omega^2}{2\pi A_c^2} N_0 \delta(\omega - \omega') \end{aligned} \quad (4.175)$$

Dès lors la densité spectrale du bruit est donnée par

$$\gamma_{N_d}(\omega) = \frac{\omega^2}{(2\pi A_c)^2} N_0 \quad (4.176)$$

Cette expression est valable pour  $|\omega|/2\pi \leq B_T/2$ . Le discriminateur est suivi d'un filtre qui limite la bande à celle du message, soit  $W$ . Cela a pour effet de rejeter une partie du bruit. En sortie de ce filtre, l'on trouve un bruit  $n_o(t)$  de densité spectrale

$$\gamma_{N_o}(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega^2 N_0}{(2\pi A_c)^2} & |\omega|/2\pi \leq W \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.177)$$

La figure 4.25 illustre les densités en jeu. La première est celle du bruit après filtre passe-bande. La deuxième est celle en sortie du discriminateur. La dernière est ce qui reste en sortie du filtre de largeur  $W$ .

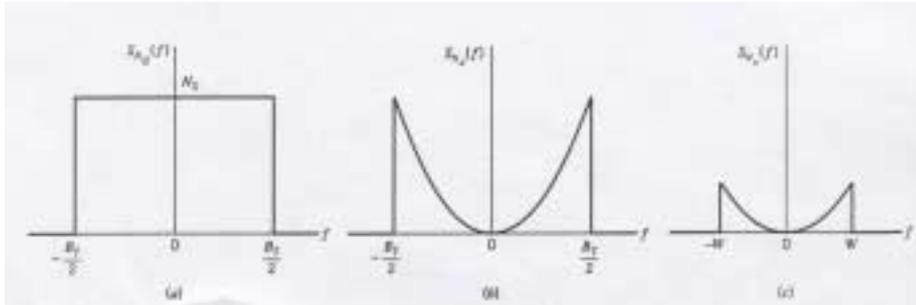


FIG. 4.25 – Densités spectrales de bruit liées à la démodulation FM : sur le canal, après filtre passe-bande de réception et après différentiateur.

La puissance  $\sigma_{n_o}^2$  du bruit en sortie est obtenue en intégrant la densité spectrale sur la bande  $-W, W$ . L'on trouve

$$\begin{aligned}\sigma_{n_o}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \frac{\omega^2 N_0}{(2\pi A_c)^2} d\omega \\ &= \frac{2N_0 W^3}{3A_c^2}\end{aligned}\quad (4.178)$$

Il est déjà intéressant de constater que la puissance de bruit contient  $A_c^2$  au dénominateur et que donc augmenter la puissance de la porteuse a un effet bénéfique sur le bruit ! Le rapport signal à bruit en sortie est donc donné par

$$SNR_o = \frac{k_f^2 P_m}{2N_0 W^3 / 3A_c^2} = \frac{3A_c^2 k_f^2 P_m}{2N_0 W^3}\quad (4.179)$$

La puissance de la porteuse est  $A_c^2/2$  et la puissance de bruit dans la bande du message est  $WN_0$ . Le SNR canal est donné par

$$SNR_c = \frac{A_c^2}{2N_0 W}\quad (4.180)$$

Le gain est dès lors donné par

$$\begin{aligned}G_m &= \frac{SNR_o}{SNR_c} \\ &= \frac{3k_f^2 P_m}{W^2}\end{aligned}\quad (4.181)$$

Il est intéressant de se rappeler que la déviation et donc la bande passante sont proportionnels à  $k_f$ .

### 4.3.9 Effet de capture

L'analyse qui vient d'être faite montre la capacité qu'a le signal FM de supprimer des signaux non désirés (le bruit ci-dessus) et en particulier les interférences produites par un autre signal modulé de fréquence proche. Néanmoins la suppression de l'interférence fonctionne bien lorsque le signal interférent est plus faible que le signal FM souhaité. Quand le signal interférent est plus fort, le récepteur s'y accroche et a tendance à supprimer le signal FM auquel l'on s'intéresse. Quand ils sont de puissances semblables, le récepteur oscille entre les deux. Dans ce cas, le phénomène porte le nom *d'effet de capture*.

### 4.3.10 Effet de seuil

Le résultat donné par (4.179) est valable uniquement lorsque le rapport signal à bruit mesuré à l'entrée du discriminateur est grand par rapport à 1. Lorsque le niveau de bruit augmente progressivement, les performances s'effondrent. Tout d'abord la phase commandée essentiellement par le phaseur de bruit, peut subir de grandes variations. Le discriminateur qui en prend la dérivée, produit des craquements. La formule (4.179) donne alors des valeurs supérieures aux valeurs réelles. Ce comportement porte le nom de *l'effet de seuil*. Une valeur typique à laquelle ce effet apparaît est un SNR d'entrée de 10 dB.

Il est possible de réduire l'effet de seuil, c'est-à-dire permettre une démodulation de la FM à des rapports signal à bruit plus petits, en utilisant d'autres récepteurs. La *boucle à verrouillage de phase* qui sera vue plus loin permet de réduire le seuil.

### 4.3.11 Préaccentuation et désaccentuation

L'équation (4.177) nous montre que le signal utile après démodulation FM est entaché d'un bruit dont la densité spectrale est parabolique, et donc augmente avec la fréquence. En outre, la puissance d'un message est généralement plus faible aux bords de la bande. Dès lors, le rapport signal à bruit ponctuel est vraiment très défavorable pour les fréquences proches de  $W$ . Ces fréquences ne sont donc pas utilisées de façon efficace.

Une technique permet de compenser cela : la *préaccentuation à l'émission suivie d'une désaccentuation à la réception*. La figure 4.26 donne le schéma bloc correspondant. Les hautes fréquences du signal à émettre sont artificiellement amplifiées avant la modulation et donc avant l'adjonction de bruit. Elles sont ensuite atténuées à la réception, de même que les composantes hautes fréquences du bruit. Une telle technique est utilisée dans la radio FM commerciale.

Afin de ne pas produire de distorsion du signal utile, le filtre de préaccentuation et de désaccentuation sont généralement inverses l'un de l'autre. En les notant  $H_p(\omega)$  et  $H_d(\omega)$ , on a

$$H_d(\omega) = 1/H_p(\omega) \quad (4.182)$$

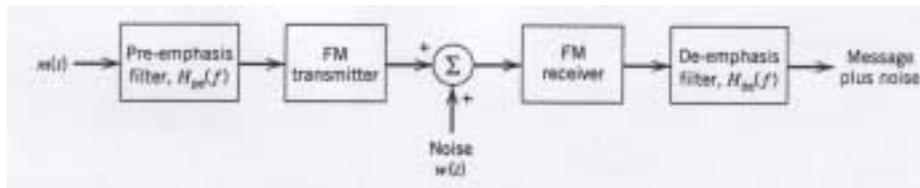


FIG. 4.26 – Chaîne FM comprenant pré-accentuation et désaccentuation.

pour  $|\omega| < 2\pi W$ . Ce choix de filtres fait que la puissance du message à la sortie du récepteur est indépendante de la procédure d'accentuation.

Compte tenu des résultats obtenus précédemment, pour des rapports signal à bruit élevés, la densité de bruit obtenue à la sortie du filtre de désaccentuation est donnée par

$$|H_d(\omega)|^2 \gamma_{N_o}(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega^2 N_0}{(2\pi A_c)^2} |H_d(\omega)|^2 & |\omega|/2\pi \leq W \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.183)$$

En supposant que le filtre de sortie a une bande  $W$  plus étroite que  $B_T/2$ , la puissance de bruit modifiée en sortie est donnée par

$$\sigma_{n_o}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \frac{\omega^2 N_0}{(2\pi A_c)^2} |H_d(\omega)|^2 d\omega \quad (4.184)$$

Comme la procédure de pré-désaccentuation ne change pas la puissance moyenne de sortie, le gain  $I$  en rapport signal à bruit est donné par

$$I = \frac{2W^3}{\frac{3}{2\pi} \int_{-W}^W \omega^2 |H_d(\omega)|^2 d\omega} \quad (4.185)$$

## 4.4 Effet des non linéarités

Tout dispositif électronique n'est rigoureusement linéaire que dans une certaine plage de fonctionnement, ou encore lorsque les signaux sont suffisamment petits. Par linéaire, l'on entend que la réponse à une somme pondérée de signaux est la somme pondérée des réponses aux différents signaux, avec mêmes coefficients de pondération. Dès que l'hypothèse de linéarité n'est plus acceptable il faut prendre en compte les dégradations ou *distorsions non linéaires* que le dispositif introduit sur le signal.

Le cas typique d'organe non linéaire est celui de l'amplificateur. La courbe caractéristique d'un amplificateur est donnée à la figure 4.27.

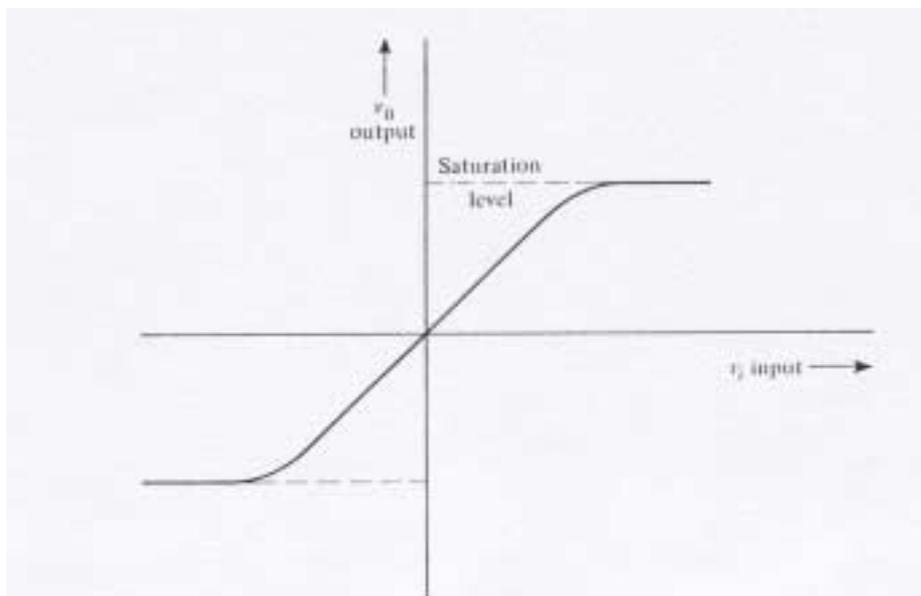


FIG. 4.27 – Caractéristique d'un amplificateur.

L'on suppose traditionnellement que le système non linéaire n'a pas de mémoire. Dans le cas d'un amplificateur linéaire, la relation entrée-sortie est

$$v_o(t) = K v_i(t). \quad (4.186)$$

Dans le cas non linéaire, en opérant un développement en série de Taylor autour du point de fonctionnement,

$$v_o(t) = K_0 + K_1 v_i(t) + K_2 v_i^2(t) + \dots + K_n v_i^n(t). \quad (4.187)$$

Il y aura donc distorsion non linéaire dès que les  $K_i$  autres que  $K_1$  sont non nuls ou en tout cas non négligeables face à  $K_1$ .

La *distorsion harmonique* d'un amplificateur est déterminée en introduisant une simple sinusoïde dans cet amplificateur. L'entrée vaut donc

$$v_i(t) = A_0 \sin(\omega_0 t). \quad (4.188)$$

La sortie due au deuxième ordre de la non linéarité est

$$K_2 v_i^2(t) = K_2 A_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{K_2 A_0^2}{2} [1 - \sin(2\omega_0 t)]. \quad (4.189)$$

Il apparaît donc que la distorsion de deuxième ordre crée une composante continue (DC) d'amplitude  $K_2 A_0^2/2$ , et une harmonique de même amplitude. En général, la sortie sera du type

$$v_o(t) = V_0 + V_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + V_2 \cos(2\omega_0 t + \phi_2) + \dots \quad (4.190)$$

où  $V_n$  est l'amplitude du terme à fréquence  $nf_0$ . L'on appelle *taux de distorsion harmonique* (THD, total harmonic distortion) la quantité en % donnée par

$$THD = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} V_n^2}}{V_1} \quad (4.191)$$

L'*intermodulation* quant à elle se caractérise en utilisant deux entrées sinusoïdales. Si l'entrée vaut

$$v_i(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t). \quad (4.192)$$

alors le terme dû à l'ordre deux de la non linéarité est

$$\begin{aligned} K_2 v_i^2(t) &= K_2 [A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)]^2 \\ &= A_1^2 K_2 \sin^2(\omega_1 t) + A_2^2 K_2 \sin^2(\omega_2 t) \\ &\quad + 2A_1 A_2 K_2 \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) \\ &= A_1^2 K_2 \sin^2(\omega_1 t) + A_2^2 K_2 \sin^2(\omega_2 t) \\ &\quad + K_2 A_1 A_2 \{ \cos[(\omega_1 - \omega_2)t] - \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] \} \end{aligned} \quad (4.193)$$

Le dernier terme est l'intermodulation et résulte de la présence de deux signaux. Il y a production de signaux aux fréquences somme et différence.

Le terme d'ordre 3 est donné par

$$\begin{aligned} K_3 v_i^3(t) &= K_3 [A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)]^3 \\ &= A_1^3 K_3 \sin^3(\omega_1 t) + A_2^3 K_3 \sin^3(\omega_2 t) \\ &\quad + 3A_1^2 A_2 K_3 \sin^2(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) \\ &\quad + 3A_1 A_2^2 K_3 \sin(\omega_1 t) \sin^2(\omega_2 t) \\ &= A_1^3 K_3 [0.75 \sin(\omega_1 t) - 0.25 \sin(3\omega_1 t)] \\ &\quad + A_2^3 K_3 [0.75 \sin(\omega_2 t) - 0.25 \sin(3\omega_2 t)] \\ &\quad + 3A_1^2 A_2 K_3 [0.5 - 0.5 \cos(2\omega_1 t)] \sin(\omega_2 t) \\ &\quad + 3A_1 A_2^2 K_3 \sin(\omega_1 t) [0.5 - 0.5 \cos(2\omega_2 t)] \\ &= A_1^3 K_3 [0.75 \sin(\omega_1 t) - 0.25 \sin(3\omega_1 t)] \\ &\quad + A_2^3 K_3 [0.75 \sin(\omega_2 t) - 0.25 \sin(3\omega_2 t)] \\ &\quad + 1.5A_1^2 A_2 K_3 \sin(\omega_2 t) \\ &\quad + 3A_1^2 A_2 K_3 \{ 0.25 \sin[(2\omega_1 - \omega_2)t] - 0.25 \sin[(\omega_2 + 2\omega_1)t] \} \\ &\quad + 1.5A_1 A_2^2 K_3 \sin(\omega_1 t) \\ &\quad + 3A_1 A_2^2 K_3 \{ 0.25 \sin[(2\omega_2 - \omega_1)t] - 0.25 \sin[(\omega_1 + 2\omega_2)t] \} \end{aligned} \quad (4.194)$$

Le terme en  $A_1^2 A_2 K_3 0.5 \sin(\omega_2 t)$  est intéressant. Il est à fréquence  $f_2$  mais dépend de  $A_1^2$ . Il y a transfert de modulation du signal 1 vers le 2. Cet effet porte le

nom de *transmodulation*. Cet effet est gênant en modulation AM, car le signal à une fréquence peut être perturbé par un signal fantôme provenant d'une autre fréquence. Cet effet ne pose par contre pas de problème avec la modulation angulaire.

Il y a aussi apparition de produits d'intermodulation à des fréquences non harmoniques. Lorsque l'amplificateur laisse passer une bande précise, dans laquelle se trouvent  $f_1$  et  $f_2$ , et que ces fréquences ne sont pas trop différentes, les termes en  $2f_1 + f_2$  et en  $2f_2 + f_1$  vont généralement tomber hors bande. Par contre les termes  $2f_1 - f_2$  et en  $2f_2 - f_1$  sont susceptibles de tomber dans la bande, près des fréquences désirées  $f_1$  et  $f_2$ . Ces termes croissent en  $A_1^2$  et  $A_2^2$ . Le niveau requis pour que l'intermodulation soit un problème dépend en fait des valeurs relatives de  $K_3$  et  $K_1$ . L'on caractérise le dispositif par le *point d'interception*. Ce point s'obtient en introduisant 2 sinusoïdes de mêmes amplitudes  $A_1 = A_2 = A$ . Le terme utile va avoir une amplitude  $K_1 A$  et les amplitudes des termes d'intermodulation d'ordre 3 seront toutes  $3K_3 A^3/4$ . Le rapport du terme souhaité à l'amplitude des termes d'intermodulation vaut

$$R_{IMD} = \frac{4}{3} \left( \frac{K_1}{K_3 A^2} \right) \quad (4.195)$$

Le point d'interception est défini comme le niveau d'entrée qui donne lieu à  $R_{IMD} = 1$ .

Ces considérations sont illustrées par la figure 4.28.

Les courbes continues sont obtenues en analysant la sortie d'un amplificateur au moyen d'un analyseur spectral. Lorsque la valeur du produit d'intermodulation d'ordre trois atteint le niveau de signal, on a le point d'interception. L'on observe aussi une saturation de la sortie lorsque la valeur de l'entrée augmente. L'on utilise aussi parfois le *point de compression* à 1, 2 ou 3 dB qui donne la valeur de l'entrée pour laquelle on a perdu 1, 2 ou 3 dB de gain par rapport à la valeur qu'aurait produite un amplificateur optimal. Le gain de l'amplificateur est ici de 25 dB car un signal d'entrée à -60 dBm ressort à -35 dBm. Par contre, un signal à -15 dBm ressort à 7 dBm ce qui signifie bien que l'on a perdu 3 dB de gain, et -15 dBm est donc bien le point de compression à 3 dB. Enfin si l'on exige que les termes d'intermodulation d'ordre 3 doivent se situer à 45 dB sous le signal utile, l'amplificateur pourra être alimenté au plus avec un signal à -32 dBm.

L'on se doute assez rapidement de ce que les non linéarités sont dommageables pour des signaux de type AM, où l'information se trouve précisément dans l'amplitude du signal. Une non linéarité d'ordre 3 fait apparaître une élévation au cube de l'amplitude et donc du signal modulant. On peut se demander ce qu'il en est avec un signal de type FM. Soit un signal modulé FM  $s_i(t)$  donné par

$$s_i(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (4.196)$$

qui passe dans une non linéarité décrite par (4.187), avec  $K_0 = 3$  et limitée à

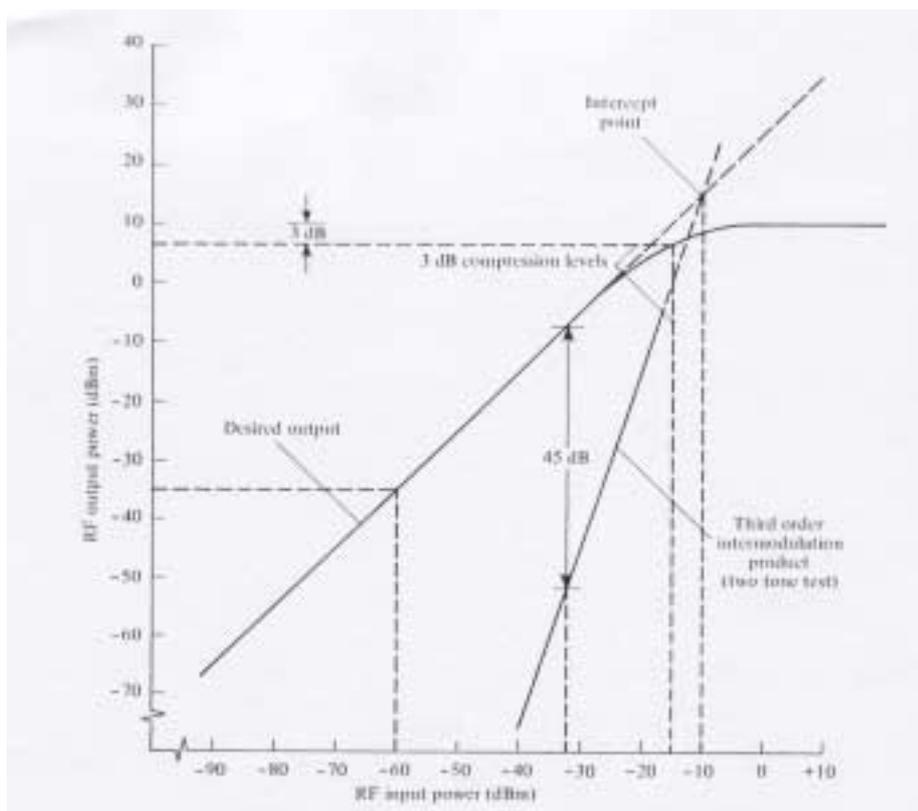


FIG. 4.28 – Caractéristique d'un amplificateur et produits d'intermodulation.

l'ordre 3. Le signal de sortie vaut donc

$$\begin{aligned}
 v_o(t) &= K_1 A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] + K_2 A_c^2 \cos^2[2\pi f_c t + \phi(t)] \\
 &+ K_3 A_c^3 \cos^3[2\pi f_c t + \phi(t)] \\
 &= 0.5K_2 A_c^2 \\
 &+ (K_1 A_c + 0.75K_3 A_c^3) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \\
 &+ 0.5K_2 A_c^2 \cos[4\pi f_c t + 2\phi(t)] \\
 &+ 0.25K_3 A_c^3 \cos[6\pi f_c t + 3\phi(t)] \tag{4.197}
 \end{aligned}$$

L'on voit apparaître des composantes à  $f_c$ ,  $2f_c$  et  $3f_c$ . Si l'on veut pouvoir extraire le signal autour de  $f_c$  il faut pouvoir filtrer de la contribution à  $2f_c$ . Appelons  $\Delta f$  la déviation du signal entrant et  $W$  la fréquence la plus élevée dans le signal modulant. La formule de Carson nous dit que le signal autour de  $f_c$  s'étend vers le haut jusque  $f_c + \Delta f + W$ . Autour de  $2f_c$ , la déviation est doublée mais pas la bande d'origine. Le spectre s'étend vers le bas jusque  $2f_c - 2\Delta f - W$ . L'on pourra séparer les signaux positionnés autour de ces deux fréquences à condition que

$$2f_c - 2\Delta f - W > f_c + \Delta f + W \tag{4.198}$$

ou encore  $f_c > 3\Delta f + 2W$ . Il apparaît donc que si cette condition est satisfaite, la seule conséquence liée au passage du signal modulé dans une non linéarité est une modification de l'amplitude. C'est la raison pour laquelle l'on trouve de la FM dans des systèmes fonctionnant aux hyperfréquences. L'on peut utiliser des amplificateurs et des émetteurs fortement non linéaires ce qui est important pour émettre avec un maximum de puissance.

## 4.5 La boucle à verrouillage de phase

La boucle à *verrouillage de phase* (PLL, phase locked loop en anglais) est un organe qui comprend trois éléments :

- un multiplieur,
  - un filtre de boucle,
  - un oscillateur contrôlé en tension (VCO, voltage controlled oscillator)
- assemblés de manière à former un système asservi comme montré à la figure 4.29.

Le VCO est un générateur sinusoïdal dont la fréquence est déterminée par une tension provenant d'une source externe. L'on fait l'hypothèse que le VCO est ajusté de façon telle que lorsque la tension de contrôle est nulle, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. la fréquence du VCO est précisément celle de la fréquence du signal non modulé,  $f_c$  ;
2. le signal produit par le VCO a une différence de phase de 90 degrés par rapport au signal non modulé.

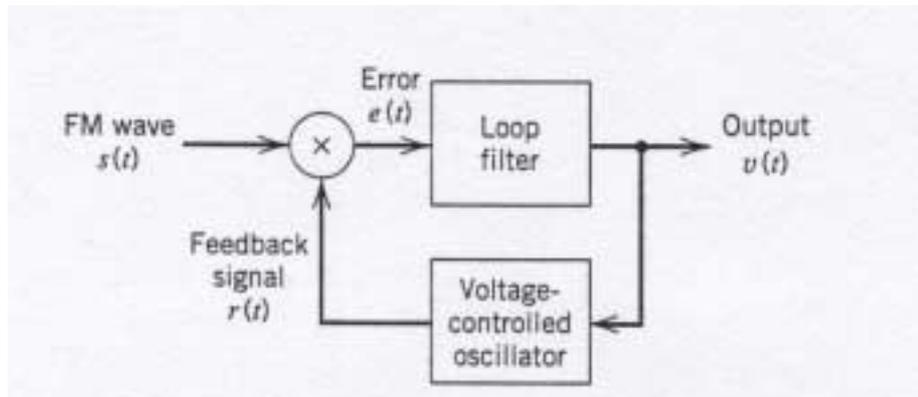


FIG. 4.29 – Boucle à verrouillage de phase.

Supposons que le signal appliqué à l'entrée de la boucle soit un signal FM défini par

$$s(t) = A_c \sin[2\pi f_c t + \phi_1(t)] \quad (4.199)$$

et

$$\phi_1(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau. \quad (4.200)$$

$k_f$  est la sensibilité du modulateur. La sortie de la boucle  $r(t)$  est définie par

$$r(t) = A_v \cos[2\pi f_c t + \phi_2(t)] \quad (4.201)$$

où  $A_v$  est l'amplitude en sortie. L'on a aussi que

$$\phi_2(t) = 2\pi k_v \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (4.202)$$

où  $k_v$  est la sensibilité du VCO mesurée en Hz/Volt. L'objectif de la boucle est de produire un signal  $r(t)$  qui a la même phase (à 90 degrés de différence) que celle du signal FM d'entrée. Il se peut que la phase du signal entrant varie en raison d'un signal modulant. Dans ce cas l'objectif est de recomposer en sortie ce signal modulant qui est donc le signal démodulé. Dans un autre cas, la phase de la porteuse peut fluctuer en raison du canal de communication. Dans ce cas l'on souhaite reproduire en sortie les mêmes fluctuations de phase, en vue d'effectuer une démodulation cohérente. *La boucle peut donc servir soit à démoduler un signal, soit à reproduire localement une référence sinusoïdale ayant les mêmes fluctuations de phase que le signal entrant.*

En vue de comprendre le fonctionnement de la boucle il est indispensable de recourir à un modèle. Le modèle de départ est non linéaire et sera ensuite simplifié pour aboutir à un modèle linéaire.

La multiplication de  $r(t)$  et de  $s(t)$  donne lieu à deux composantes :

1. une composante à la fréquence somme,

$$r(t) = k_m A_c A_v \sin[4\pi f_c t + \phi_1(t) + \phi_2(t)] \quad (4.203)$$

et

2. une composante basse-fréquence, correspondant à la fréquence différence,

$$r(t) = k_m A_c A_v \sin[\phi_1(t) - \phi_2(t)] \quad (4.204)$$

où  $k_m$  est mesuré en  $\text{volt}^{-1}$ .

Le filtre de boucle est un filtre passe-bas. L'entrée de filtre de boucle vaut

$$\begin{aligned} e(t) &= k_m A_c A_v \sin[\phi_e(t)] \\ &= k_m A_c A_v \sin[\phi_1(t) - \phi_2(t)] \\ &= k_m A_c A_v \sin[\phi_1(t) - 2\pi k_v \int_0^t v(\tau) d\tau] \end{aligned} \quad (4.205)$$

Le filtre de boucle agit sur le signal d'erreur pour produire une sortie obtenue par convolution

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (4.206)$$

où  $h(t)$  est la réponse impulsionnelle du filtre de boucle. L'on obtient finalement

$$\frac{d\phi_e(t)}{dt} = \frac{d\phi_1(t)}{dt} - 2\pi K_0 \int_{-\infty}^{\infty} \sin[\phi_e(t)] h(t - \tau) d\tau \quad (4.207)$$

où  $K_0$  est le gain de boucle défini par  $K_0 = k_m k_v A_c A_v$ . Les amplitudes sont en volts, le gain  $k_m$  du multiplieur, en  $\text{volt}^{-1}$ , et  $k_v$ , en  $\text{Hz/volt}$ . Dès lors,  $K_0$  a des dimensions de fréquence. Cette équation est matérialisée par le schéma (4.30).

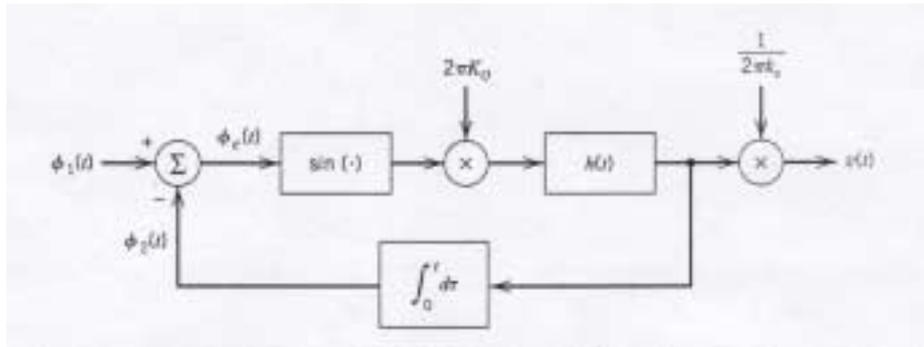


FIG. 4.30 – Modèle non linéaire d'une boucle à verrouillage de phase.

La caractéristique non linéaire ou sinusoïdale rend plus difficile l'analyse d'une telle boucle. *Linéariser* la boucle permet de simplifier l'analyse tout en donnant

une bonne description de la boucle dans certaines conditions. Lorsque l'erreur de phase  $\phi_e(t) = 0$  la boucle est dite *accrochée* ou en *phase lock*. Lorsque  $\phi_e(t) \ll 1$  radian, on peut utiliser le fait que

$$\sin[\phi_e(t)] \simeq \phi_e(t) \quad (4.208)$$

Dans ce cas la boucle est dite *près de l'accrochage* (near phase lock) et l'on peut se débarrasser de la non-linéarité sinusoïdale de la figure (4.30). Au facteur  $k_f/k_m$  près, on a que  $v(t) = m(t)$ .

En version linéarisée, la boucle peut être décrite par la relation entrée-sortie suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_2(\omega) &= \frac{2\pi K_0 H(\omega) \Phi_e(\omega)}{j\omega} \\ &= \frac{2\pi K_0 H(\omega) [\Phi_1(\omega) - \Phi_2(\omega)]}{j\omega} \\ \frac{\Phi_2(\omega)}{\Phi_1(\omega)} &= \frac{2\pi K_0 H(\omega)/j\omega}{1 + 2\pi K_0 H(\omega)/j\omega} \\ &= \frac{2\pi K_0 H(\omega)}{j\omega + 2\pi K_0 H(\omega)} \end{aligned} \quad (4.209)$$

Le type de filtre  $H(\omega)$  conditionne la complexité de la boucle. La boucle la plus simple est obtenue lorsque  $H(\omega) = 1$ . Dans ce cas l'on parle de boucle *du premier ordre*. Toutes les notions relatives à la stabilité des systèmes bouclés s'appliquent à la PLL. Le choix du filtre  $H(\omega)$  est dicté par des considérations de complexité mais est aussi guidé par le type d'erreur que l'on souhaite annuler (erreur de position, vitesse, etc ..). Rappelons qu'il s'agit ici d'erreurs affectant la phase.

## 4.6 Le récepteur superhétérodyne

Dans un système de radiodiffusion, que le signal ait été transmis en AM ou en FM, le récepteur doit accomplir un certains d'opérations en complément à la démodulation :

- la sélection de la fréquence : plusieurs canaux situés autour de fréquences différentes sont reçus et doivent pouvoir être démodulés. Dès lors le récepteur doit pouvoir adapter la fréquence du canal auquel il s'intéresse ;
- le filtrage : le filtrage est requis pour séparer le signal désiré des autres signaux susceptibles d'être captés ;
- l'amplification : elle est bien évidemment requise pour compenser l'atténuation que le signal subit dans le canal de transmission.

Le récepteur superhétérodyne est un récepteur qui accomplit ces fonctions de façon élégante. En particulier il contourne la difficulté associée à la construction d'un filtre sélectif et devant pouvoir être déplacé sur l'axe des fréquences. Tous les récepteurs radio contiennent ce type de récepteur.

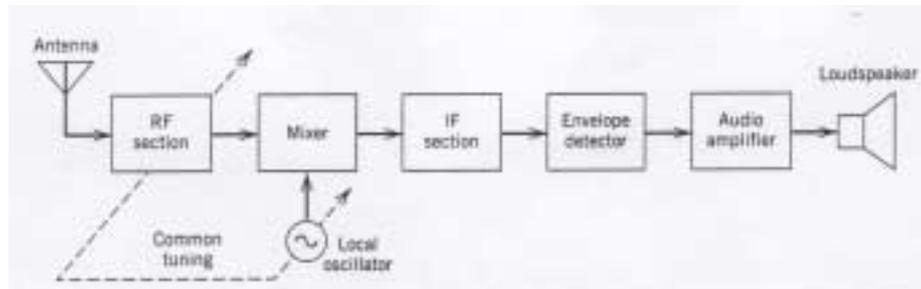


FIG. 4.31 – Structure d'un récepteur superhétérodyne pour réception d'AM.

	radio AM	radio FM
Intervalle de porteuse	0.535-1.605 MHz	88-108 MHz
Fréquence centrale de a bande IF	0.455 MHz	10.7 MHz
Bande IF	10 kHz	200 kHz

TAB. 4.1 – Valeurs typiques de paramètres pour récepteur radio d'AM ou FM

Le schéma bloc d'un tel récepteur est donné à la figure 4.31 dans le cas particulier d'une modulation AM avec détection d'enveloppe à la réception. Le récepteur contient une section RF, un mélangeur et un oscillateur local, une section à fréquence intermédiaire (IF), un démodulateur et un amplificateur de puissance. La table 4.1 reprend des valeurs typiques de paramètres pour des récepteurs radio commerciaux AM ou FM.

Reprenant le cas particulier du signal AM, le signal modulé est capturé par l'antenne et amplifié par la section RF alignée sur la fréquence de la porteuse souhaitée. Le mélangeur et l'oscillateur local réalisent le décalage en fréquence (hétérodynage) qui permet de placer le signal résultant autour d'une *fréquence intermédiaire prédéterminée* généralement plus basse que la fréquence du signal entrant. La *fréquence intermédiaire* (car elle n'est située ni en RF, ni en bande de base), est donnée par

$$f_{IF} = f_{LO} - f_{RF} \quad (4.210)$$

où  $f_{LO}$  est la fréquence de l'oscillateur local et  $f_{RF}$  celle du signal  $RF$  entrant.

La section IF contient un ou plusieurs étages d'amplification avec une bande correspondant à la modulation particulière qui est en utilisée. La sortie de cette section est appliquée à un démodulateur dont le but est de récupérer le signal modulant.

L'objectif du récepteur superhétérodyne est donc bien de déplacer le signal localisé autour de  $f_{RF}$  et de le transporter autour de  $f_{IF}$ . En utilisant un oscillateur local à  $f_{LO} = f_{RF} + f_{IF}$ , l'on décale autour de  $f_{IF}$  le signal situé autour de  $f_{RF} = f_{LO} - f_{IF}$  mais aussi le signal situé autour de  $f_{RF} + 2f_{IF} = f_{LO} + f_{IF}$ . Cette fréquence, susceptible d'interférer, porte le nom de *fréquence*

*image*. Par exemple, pour un récepteur avec  $f_{RF} = 0.65\text{MHz}$  et une  $f_{IF} = 0.455\text{MHz}$ , une interférence est susceptible de provenir d'un signal localisé autour de  $1.56\text{MHz}$ . La seule façon de résoudre ce problème est d'avoir des filtres sélectifs dans l'étage RF (c'est-à-dire avant le mélangeur) de manière à rejeter au mieux le signal situé autour de la fréquence image.

Ce qui diffère entre AM et FM c'est le type de démodulateur (discriminateur dans le cas de la FM). Dans le cas de la FM, comme l'information est véhiculée par la fréquence et pas par l'amplitude, toutes les variations d'amplitude ne peuvent provenir que du bruit ou d'interférences. Dès lors, elles sont gommées par un *limiteur* situé à la sortie de la section IF.

