PeiP Polytech Paris-Sud

Année 1 - Semestre 2

MECANIQUE

2011-2012

C.Pasquier

Polycopié réalisé avec la suite libre Openoffice.org 3.3.0 (http://www.openoffice.org)

Table des matières

Chapitre I : Introduction générale

Le module 'Lois d'évolution en physique' du premier semestre a permis de mettre en évidence certaines lois d'évolutions observées en physique. Ainsi des phénomènes observés en électricité, en mécanique, en chimie ou en sciences de la vie peuvent être régies par les mêmes équations mathématiques.

Ainsi étudier les phénomènes physiques qui régissent un de ces domaines permet aussi de comprendre en partie certains phénomènes dans un autre domaine. Le cours qui suit est un cours de Mécanique du Point et du Solide.

Dans un premier temps, chaque objet étudié sera ramené à un point. Ceci suppose que l'objet est rigide et non déformable et que toute la masse est concentrée au centre de gravité de celui-ci. On parle alors de 'point matériel' de masse m. En électrostatique, on doit aussi considérer que ce point matériel porte une charge q. Cet objet se déplace dans l'espace au cours du temps : il possède une vitesse, une accélération, c'est le domaine de la **cinématique**. Néanmoins, cette notion de vitesse ou d'accélération est toute relative. Un passager immobile dans un train regarde défiler le paysage. Si on se place dans le train, la vitesse du passager est évidemment nulle. Par contre, si on considère une vache dans un pré qui regarde passer les trains, pour elle, le passager se déplace par rapport à la Terre (à la même vitesse que le train en l'occurrence). Cette notion de relativité du mouvement nous conduira à définir des référentiels et d'étudier les lois de composition des vitesses et accélérations pour passer d'un référentiel à l'autre.

Le point matériel interagit avec d'autres objets par des forces d'interaction gravitationnelle, d'interaction électrostatique, de frottements. Ces forces conduisent à la **dynamique** du système étudié et donc au mouvement de celui-ci…

Au cours de son mouvement, l'**énergie** cinétique du système varie si sa vitesse n'est pas constante. La variation d'énergie cinétique peut-être transformée en un autre type d'énergie : énergie potentielle électrostatique, énergie potentielle de gravitation, chaleur,…

Certains corps tournent autour d'autres ou d'eux-mêmes : la Lune tourne autour de la Terre qui tourne elle-même autour du Soleil. Les électrons tournent autour du noyau atomique. Le patineur tourne sur lui-même même si son mouvement est nettement moins perpétuel que dans les cas précédents. Ses systèmes mécaniques possèdent un **moment cinétique** qui est relativement bien conservé dans le temps en ce qui concerne les planètes ou les électrons et faiblement pour le patineur. Ceci provient du fait que dans le cas des planètes et des électrons, la force d'interaction gravitationnelle ou électrostatique est une **force centrale** c'est-à-dire que la planète ou l'électron est soumis à une force toujours dirigée vers un point fixe. Notre malheureux patineur ne peut tourner indéfiniment à cause des frottements.

Même dans le cas d'une force centrale, il se peut que les deux objets aient des masses semblables (par exemple 2 étoiles) et ces deux objets semblent ainsi danser dans l'espace dans un mouvement complexe. En réalité, on peut décomposer le mouvement en un mouvement du centre de masse de l'ensemble et un mouvement relatif par rapport au centre de gravité. Le problème de l'interaction à deux corps sera également appliquée au cas d'un choc élastique entre 2 objets.

Enfin, nous nous intéresserons à la dynamique des solides indéformables qui nous permettra d'aborder le comportement d'objets plus complexes qu'un point matériel. En particulier, nous justifierons la validité de l'approximation de la mécanique du point.

I Introduction générale à la mécanique :

MECANIQUE *(adj.)= Qui concerne le mouvement et ses propriétés…(n.f.)= partie des mathématiques qui a pour objet l'étude du mouvement et de l'équilibre des corps*. Telles sont quelques-unes des définitions du mot mécanique dans le dictionnaire Robert de la langue française. La définition est simple même si la mécanique est plutôt considérée comme une partie de la physique.

Parmi les « corps » visés par la mécanique, on peut mentionner :

- Les corps dits ponctuels c'est-à-dire ceux qui peuvent se ramener à un point en considérant que c'est le mouvement de l'ensemble complet du corps qui nous intéresse. Dans ce cas, l'objet volumineux peut-être ramené à un point dans l'espace qui concentre toute la masse de l'objet. Par exemple, dans le mouvement d'une voiture sur la route, on va s'intéresser à la voiture dans son ensemble mais pas au mouvement précis de la pédale de frein ou d'accélérateur dans la voiture. La voiture et ses occupants seront ainsi schématisés par un point matériel de masse M qui est la masse de toutes les parties de la voiture plus la masse des occupants. On parle alors de **MECANIQUE DU POINT**.
- D'une manière plus réaliste, les corps solides indéformables sont massifs et constitués d'un ensemble de points matériels chacun ayant sa propre masse. L'étude de ce domaine est l'objet de la **MECANIQUE DU SOLIDE**.
- Les corps étudiés peuvent ne pas être solides mais fluides. On peut ainsi étudier le mouvement d'une 'goutte d'eau' dans une rivière de sa source jusqu'à la mer, la vitesse d'aspiration de l'air dans un conduit de cheminée. Ceci est l'objet de la **MECANIQUE DES FLUIDES**.
- Enfin, pour des particules telles que les électrons, les protons dans la matière nucléaire (les atomes, molécules…) ou même la matière condensée ('physique du solide'), il faut faire appel à la physique quantique, c'est le domaine de la **MECANIQUE QUANTIQUE**.
- On peut rajouter à cette liste, l'étude des propriétés d'un objet lorsque la vitesse de l'objet approche la vitesse de la lumière, ceci est le domaine de la **MECANIQUE RELATIVISTE**.

Dans ce cours, nous nous intéresserons uniquement aux domaines de la mécanique du point et de la mécanique du solide. La mécanique quantique sera abordée au premier semestre de la première année de cycle ingénieur. Les autres parties ne seront pas abordées au cours du cursus du cycle ingénieur mais l'étudiant intéressé peut consulter les livres concernant ces domaines à la Bibliothèque Universitaire. Dans la suite nous ne considérerons donc que des objets solides indéformables.

La mécanique est donc l'étude du mouvement et de l'équilibre des corps (ou du système étudié). On peut remarquer que l'équilibre correspond au moment dans le temps ou bien à l'intervalle de temps où le système est immobile.

Les mouvements d'un corps sont caractérisés par deux classes de vecteurs associées à des grandeurs scalaires :

- Une première "classe" qui définit la position du corps et qui constitue donc les conséquences du mouvement. Cette classe est caractérisée par 3 vecteurs : **le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération**. L'étude de cette classe est l'objet de la **CINEMATIQUE**. On peut rajouter à ces vecteurs, une grandeur scalaire qui est l'énergie cinétique, E_c.

- Une deuxième "classe" qui définit les causes du mouvement et qui traduit le fait que le système étudié interagit avec le monde extérieur. Cette classe est constitué par l'ensemble des forces qui agissent sur le système. Les interactions dépendent des propriétés spécifiques du système étudié. Par exemple, pour une masse, la force pertinente sera le champ de gravitation, pour une particule chargée, ce sera le champ électrique ou bien le champ magnétique. L'étude de ces forces est l'objet de la **DYNAMIQUE**. Les grandeurs scalaires qui se rapportent à ces forces sont le travail, W, l'énergie potentielle, E_p, l'énergie totale, E, et la puissance, P.

Ces deux classes sont reliées entre elles par les lois de la dynamique ou des lois de conservation.

II Mouvement et modélisation du système :

Dans un problème de mécanique, la première étape est de modéliser le système. Cette modélisation passe tout d'abord par la détermination du mouvement à étudier.

Par exemple, on considère un être humain sur Terre qui contemple le ciel et se demande pourquoi la Terre met un an pour faire le tour du Soleil. Pour répondre à cette question il faut modéliser le système. Tout d'abord, il est évident qu'il est inutile de considérer le mouvement des nuages autour de la Terre ni même que la Terre tourne sur elle-même voire que la Terre a un satellite, la Lune. Cette intuition vient du fait que la masse des nuages ou de la Lune est négligeable devant celle de la Terre. Le fait que la Terre tourne est un effet 'interne' à la Terre et que la Terre tourne plus ou moins vite, l'année durera toujours un an. L'étude du mouvement de la Terre autour du Soleil se réduit donc à étudier le mouvement de la masse terrestre avec son cœur, son manteau, ses océans, ses montagnes....et ses êtres vivants autour du Soleil. Ici encore la tectonique des plaques n'est pas pertinente pour modifier l'année au moins a notre échelle de vie humaine. La Terre peut ainsi être assimilée à un objet qui a pour masse la somme de toutes les masses des entités précédemment citées et qui tourne autour du Soleil. Cet objet peut être considéré comme ponctuel et placé au centre de gravité de la Terre (le centre de la Terre) étant donné que la masse de la Terre est très faible devant celle du Soleil. De même en première approximation, on négligera l'importance des interactions de la Terre avec les autres planètes et notamment la plus grosse d'entre-elles, Jupiter. En effet, la distance Terre-Soleil est de 1UA (UA= unité astronomique=150 000 000 km) et la distance Terre-Jupiter varie entre environ 4,5 et 6,5 UA. Sachant que la force de gravitation varie comme le produit des masses concernées et en $1/r^2$ où r est la distance entre les objets, et que la masse de Jupiter est beaucoup plus faible que celle du Soleil, il est évident que la force d'attraction exercée par Jupiter sur la Terre est très faible devant celle exercée par le Soleil. Par conséquent, à notre échelle de vie humaine, l'année durera un an et la trajectoire de la Terre ne sera pas modifiée. Par contre, si on veut étudier le mouvement de la Terre à travers le temps, il faut tenir compte des autres planètes mais le calcul devient plus complexe.

Cet exemple montre également deux choses. Pour répondre à la question, nous nous sommes implicitement placé loin de la Terre comme un spationaute dans sa capsule spatiale qui regarde les planètes tourner autour du Soleil et qui considère le Soleil comme fixe. Le terrien, lui, va plutôt voir le Soleil tourner autour de la Terre comme le croyait nos ancêtres de l'antiquité ou du Moyen-âge. Ceci conduit à définir des référentiels d'espace. Ceci montre également que le mouvement est un phénomène relatif au référentiel choisi. De même, il faut définir un 'référentiel de temps' pour mesurer l'écoulement de celui-ci qui est la grandeur sur laquelle s'appuie le mouvement.

Chapitre II : Cinématique du point

La cinématique correspond à l'étude des vecteurs vitesse et accélération qui dépendent du référentiel considéré.

Dans un premier temps, nous allons caractériser la position d'un point M de l'espace dans différents systèmes de coordonnées. Ensuite, nous allons définir les bases mathématiques indispensables pour la mécanique du point. Enfin, nous présenterons la cinématique du point dans un référentiel donné puis les compositions des mouvements (dits aussi changements de référentiels).

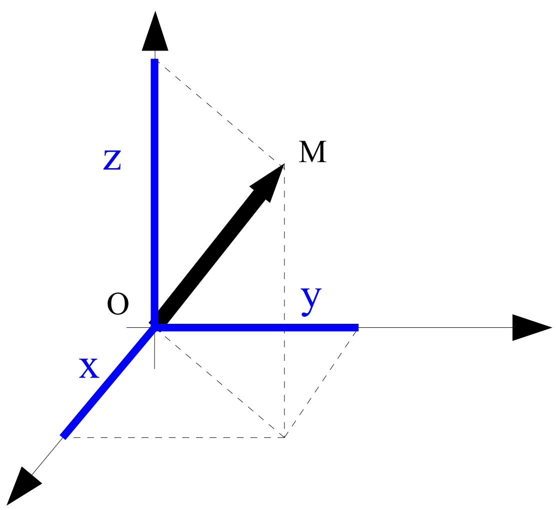
I Systèmes de coordonnées :

Ce paragraphe expose différentes représentations d'un même vecteur de l'espace ou du plan. Pour cela, on considère un repère orthonormé direct de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

1) Coordonnées cartésiennes :

Soit M un point de l'espace tel que $\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Les coordonnées cartésiennes de M sont donc (x,y,z). La norme du vecteur $\vec{OM}$ est :

$$\|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \; .$$



Dans de nombreux cas, il est beaucoup plus facile de repérer un point sur une courbe, une surface en utilisant d'autres types de coordonnées

2) Coordonnées polaires :

L'équation d'un cercle de centre O et de rayon R, en coordonnées cartésiennes est :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

On peut alors en déduire l'expression de y en fonction de x : $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Cette expression n'est absolument pas parlante et on ne voit plus vraiment qu'on a affaire à un cercle de centre R. Une manière plus simple de décrire un cercle est de dire que le cercle est l'ensemble des points M qui sont à la même distance R d'un point O. Ceci s'écrit :

$$\rho = \|\overrightarrow{OM}\| = R$$

Ceci ne suffit pas à caractériser le point M de manière univoque. Une manière de le faire est de choisir *un axe polaire Ox* et de définir l'angle θ qui est l'angle entre l'axe Ox et le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Ainsi, la donnée de ρ et θ définissent les coordonnées polaires du point M.

Ceci se généralise pour tout point M du plan : *les coordonnées polaires de M sont ρ et θ tels que :*

$$\boxed{\rho = \|\overrightarrow{OM}\|} \quad et \quad \boxed{\theta = (\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}})} \ .$$

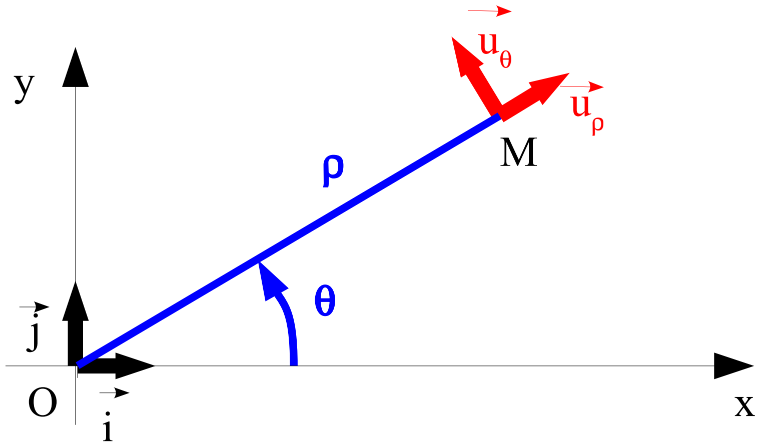
On a alors :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho}$$

où $\vec{u}_\rho$ est le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$: $\boxed{\vec{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}}$. On note $\vec{u}_\theta$ le vecteur unitaire formant un angle de +π/2 à $\vec{u}_\rho$. *Le repère* $(M, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ *est orthonormé direct et s'appelle repère local.*

<u>Remarques :</u> L'angle θ est un angle orienté et ρ est un nombre toujours positif.

En utilisant le produit vectoriel et un vecteur unitaire $\vec{k}$ normal au plan, $\vec{u}_\theta = \vec{k} \wedge \vec{u}_\rho$.



Les formules de transformation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires sont les suivantes :

Cartésiennes -> polaires	***Polaires -> cartésiennes***
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\tan\theta = \frac{y}{x}$	$x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$

3) Coordonnées cylindriques :

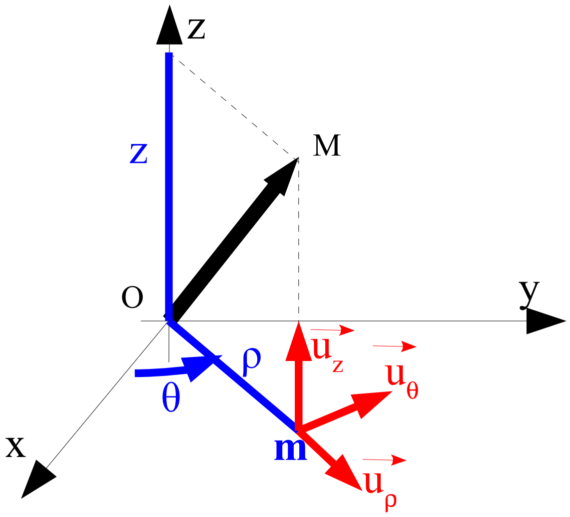
De la même manière que pour caractériser un cercle, il est plus facile d'utiliser les coordonnées polaires, pour un point sur un cylindre, il est préférable d'utiliser les coordonnées cylindriques que les coordonnées cartésiennes. Pour cela, pour un point M de l'espace, on définit le point m qui est la projection du point M sur le plan Oxy.

Les coordonnées cylindriques du point M sont : ρ, θ *et z tels que*

$$\boxed{\rho=\|\vec{Om}\|}\ ,\ \boxed{\theta=(\widehat{Ox,\vec{Om}})}\ \ et\ \ \boxed{z=\vec{OM}\cdot\vec{u}_z}\ .$$

On a alors : $\boxed{\vec{OM}=\rho\,\vec{u}_\rho+z\,\vec{u}_z}$

où $\vec{u}_z$ est un vecteur unitaire porté par l'axe Oz. On note $\vec{u}_\theta$ le vecteur unitaire formant un angle de +π/2 à $\vec{u}_\rho$ dans le plan Oxy. Le repère $(M,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ est orthonormé direct



Les relations de transformation entre coordonnées cartésiennes et coordonnées cylindriques sont très semblables à celles obtenues au paragraphe précédent pour les coordonnées polaires.

4) Coordonnées sphériques :

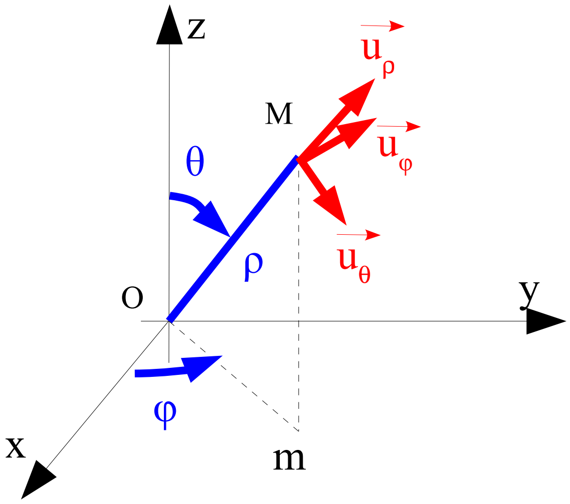
Les coordonnées cylindriques ne sont pas très pratiques pour caractériser un point sur une sphère qui est le lieu où tous les points sont à égale distance d'un centre C. Pour cela, on préférera utiliser les coordonnées sphériques.

Les coordonnées sphériques du point M sont : ρ, θ *et* φ *tels que*

$$\boxed{\rho=\|\vec{OM}\|}\ ,\ \boxed{\theta=(\widehat{Oz,\vec{OM}})}\ \ et\ \ \boxed{\varphi=(\widehat{Ox,\vec{Om}})}\ .$$

en utilisant les notations empruntés au paragraphes précédents. On a alors : $\boxed{\vec{OM}=\rho\,\vec{u}_\rho}$. On note $\vec{u}_\varphi$ le vecteur unitaire formant un angle de +π/2 avec $\vec{Om}$ (équivalent au $\vec{u}_\theta$ dans les 2 paragraphes précédents). Le vecteur $\vec{u}_\theta$ est perpendiculaire à $\vec{OM}$ et tel que le repère

$(M, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est orthonormé direct. Par convention, les deux angles θ et φ ont des intervalles de variation précis : $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$



Les formules de transformation entre coordonnées cartésiennes et sphériques sont les suivantes :

Cartésiennes -> sphériques	***Sphériques -> cartésiennes***
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\tan\varphi = \frac{y}{x}$	$x = \rho\cos\varphi\sin\theta$ $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$ $z = \rho\cos\theta$

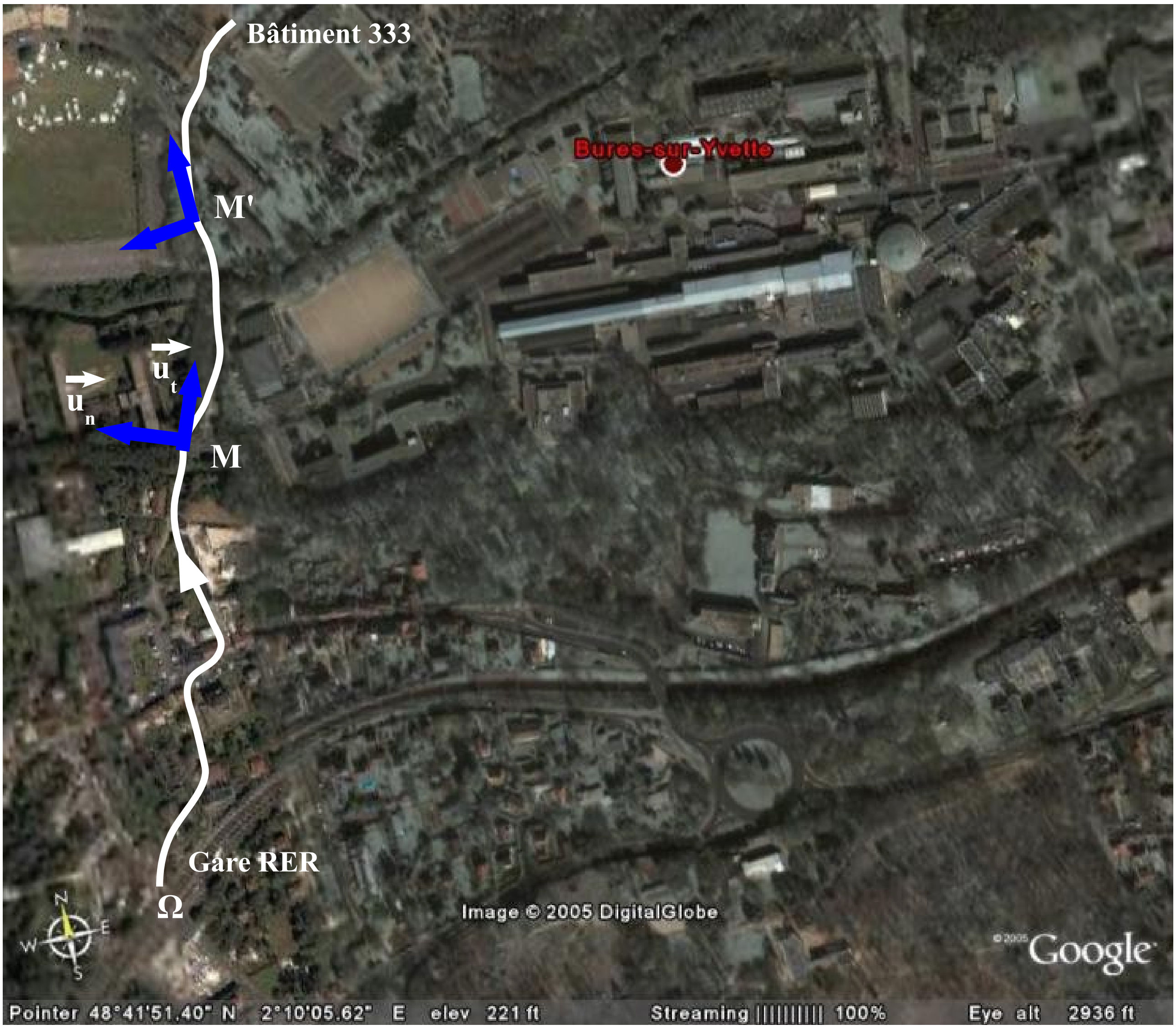
<u>Remarque :</u> En géographie, un point sur la Terre est repéré par sa latitude et sa longitude. La latitude d'un point sur la Terre correspond à l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$, alors que la longitude correspond à l'angle φ.

<u>5) Coordonnées intrinsèques :</u>

La position d'un étudiant, représenté par un point M, entre la station RER Bures/Yvette et le bâtiment 333 peut-être décrite de plusieurs manières. La première est d'utiliser un des systèmes de coordonnées précédemment cités qui est très adapté pour repérer l'étudiant dans l'espace. C'est en gros ce que ferait un émetteur GPS placé dans une de ces poches qui donnerait à tout instant, sa latitude, sa longitude et pourquoi pas son altitude par rapport au niveau de la mer. Cependant, pour l'étudiant lui-même, ce qui compte c'est non pas de savoir qu'il est à la latitude 48°42'N, 2°10'E et à environ 60 mètres d'altitude mais combien de temps il va mettre pour faire le trajet ou même simplement quelle est la distance entre les deux points de départ et d'arrivée. Ici encore, ce n'est pas la distance à vol d'oiseau qui lui importe mais la distance en suivant les différentes rues et chemins qui permettent d'aller de la station de RER au bâtiment 333. Ce chemin parcouru entre le point de départ Ω (la station RER Bures/Yvette) et le point M où il se trouve à l'instant t est *l'abscisse curviligne notée s*. C'est donc la longueur du trajet ΩM en suivant chacune des rues et chacun des chemins piétonniers. <u>Par abus de langage,</u> s est considérée comme la coordonnée intrinsèque de

M. Néanmoins, ici, il est impossible de définir des relations vectorielles $\overrightarrow{\Omega M}=...$ en fonction de l'abscisse curviligne telles que celles écrites dans les paragraphes précédents, cela n'aurait aucun sens. En utilisant cette notion d'abscisse curviligne, on définit *un repère intrinsèque* appelé aussi repère de Frénet $(M,\vec{u}_t,\vec{u}_n)$ dans le plan de déplacement tel que $\vec{u}_t$ est un vecteur unitaire tangent au chemin parcouru et $\vec{u}_n$ le vecteur unitaire faisant un angle de +π/2 par rapport à $\vec{u}_t$. Dans l'image ci-dessous, tirée du logiciel GoogleEarth, on suppose que tous les points sont à la même altitude. La direction du vecteur $\vec{u}_t$ est choisie selon le sens de parcours de la trajectoire définie par la flèche blanche sur le schéma ci-dessous. La direction de $\vec{u}_n$ s'en déduit alors immédiatement.

<u>Remarque :</u> En utilisant de nouveau le produit vectoriel, et en définissant un vecteur $\vec{k}$ perpendiculaire au plan de la trajectoire, on a $\vec{u}_n=\vec{k}\wedge\vec{u}_t$



II Vecteurs et fonctions à plusieurs variables :

L'objet de cette partie est de faire quelques rappels de calcul vectoriel et d'introduire le produit vectoriel qui sera abondamment utilisé en fin de cours. On montrera les différences avec le produit scalaire. Ensuite, les notions de dérivées de vecteurs et de différentielle seront introduits.

1) Produit vectoriel :

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs quelconques. Le *produit vectoriel* des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est le vecteur noté $\vec{\Pi}=\vec{A}\wedge\vec{B}$ tel que :

- le vecteur $\vec{\Pi}$ est orthogonal à $\vec{A}$ et orthogonal à $\vec{B}$.
- le trièdre $(\vec{A},\vec{B},\vec{\Pi})$ est direct
- $\|\vec{\Pi}\|=\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\,|\sin(\widehat{\vec{A},\vec{B}})|$

Le tableau suivant résume les propriétés du produit vectoriel. Les formules du produit scalaire sont aussi rajoutées par comparaison.

	Produit scalaire	***Produit vectoriel***
Notation	$\vec{A}.\vec{B}$	$\vec{A}\wedge\vec{B}$
Nature de la grandeur	Nombre (scalaire) positif ou négatif	Vecteur
valeur	$\vec{A}.\vec{B}=\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}})$	$\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|=\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\,|\sin(\widehat{\vec{A},\vec{B}})|$
commutativité	$\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$	$\vec{A}\wedge\vec{B}=-\vec{B}\wedge\vec{A}$
distributivité	$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$	$\vec{A}\wedge(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\wedge\vec{B}+\vec{A}\wedge\vec{C}$ mais $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})\neq(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$
Vecteur avec lui-même	$\vec{A}.\vec{A}=\|\vec{A}\|^2$	$\vec{A}\wedge\vec{A}=\vec{0}$
Cas du produit nul	$\vec{A}.\vec{B}=0$ si et seulement si les 2 vecteurs sont **orthogonaux** ou bien un des vecteurs est nul.	$\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0}$ si et seulement si les 2 vecteurs sont **colinéaires** ou bien un des vecteurs est nul.
Valeur maximale du produit	Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont **colinéaires** alors $|\vec{A}.\vec{B}|=\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|$	Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont **orthogonaux** alors $\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|=\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|$
Valeur en coordonnées cartésiennes	Si $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$ et $\vec{B}=(B_x,B_y,B_z)$, alors $\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$	Si $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$ et $\vec{B}=(B_x,B_y,B_z)$, alors $\vec{A}\wedge\vec{B}=(A_yB_z-B_yA_z,A_zB_x-B_zA_x,A_xB_y-A_yB_x)$
Définition géométrique	Le produit scalaire représente la projection d'un vecteur sur une direction définie par un des vecteurs (le vecteur $\vec{A}$ par exemple)	La norme du produit vectoriel représente l'aire du parallélogramme porté par les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Enfin, si $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est une base orthonormée directe, alors $\vec{u}_3=\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2$, $\vec{u}_2=\vec{u}_3\wedge\vec{u}_1$, $\vec{u}_1=\vec{u}_2\wedge\vec{u}_3$. A la place des indices 1, 2 et 3, on peut mettre x, y, z (pour les coordonnées cartésiennes) ; ρ, θ, z (pour les coordonnées cylindriques) ; ρ, θ, φ (pour les coordonnées sphériques) ou encore t, n, z (coordonnées intrinsèques). Ces formules simples sont très utiles pour déterminer un des vecteurs de base connaissant les deux autres...

Finalement, on peut 'mélanger' produit vectoriel et produit scalaire en définissant le produit mixte : $[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]=\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}\wedge\vec{B}).\vec{C}$ qui est donc un scalaire.

2) Fonctions vectorielles d'une variable :

On considère une base orthonormée directe $(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3})$ et un vecteur $\vec{V}$ de coordonnées (V_1,V_2,V_3) . Les vecteurs de la base et les coordonnées peuvent dépendre d'une variable t (le temps). Dans ce cas, le vecteur $\vec{V}(t)$ s'écrit : $\vec{V}(t)=V_1(t)\vec{u}_1(t)+V_2(t)\vec{u}_2(t)+V_3(t)\vec{u}_3(t)$

La dérivée de ce vecteur par rapport au temps t est définie par :

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt}=\lim_{t\to t'}\frac{\vec{V}(t')-\vec{V}(t)}{t'-t}}$$ notée aussi $\dot{\vec{V}}(t)$ (un point au dessus de la flèche du vecteur)

La dérivée d'une fonction vectorielle vérifie les propriétés suivantes :

$$\frac{d(\vec{A}+\vec{B})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d(\alpha\vec{A})}{dt}=\alpha\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\alpha}{dt}\vec{A}$$. Si le vecteur $\vec{A}$ est indépendant du temps alors le vecteur $\frac{d(\alpha\vec{A})}{dt}$ est colinéaire au vecteur $\vec{A}$. Ceci est le cas si $\vec{u}_1=\vec{i}$ indépendant du temps : $\frac{d(x\vec{i})}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}$.

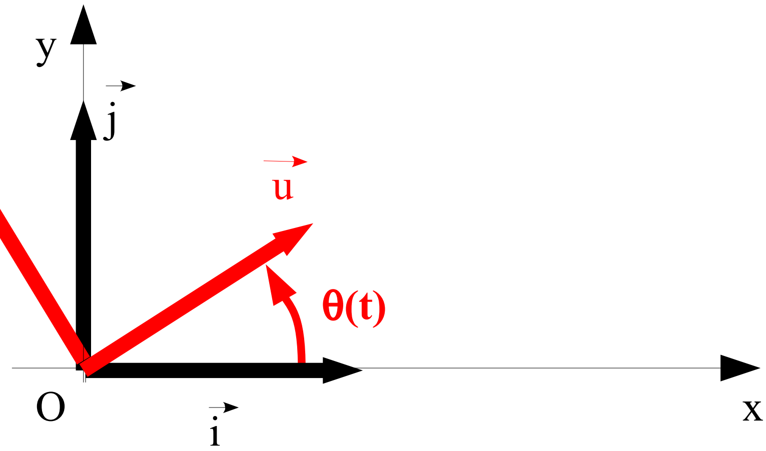
$$\frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B}+\vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d(\vec{A}\wedge\vec{B})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}\wedge\vec{B}+\vec{A}\wedge\frac{d\vec{B}}{dt}$$.

Si le vecteur $\vec{V}$ est constant, $\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{0}$.

Si le vecteur $\vec{V}$ est de norme constante, alors les vecteurs $\vec{V}$ et $\frac{d\vec{V}}{dt}$ sont orthogonaux ou bien $\vec{V}$ est constant. En effet, $\|\vec{V}\|^2=\vec{V}.\vec{V}=C^{te}$ et donc $2\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}=0$.

En conséquence, si on considère un vecteur unitaire $\vec{u}$ ($\|\vec{u}\|^2=1$), alors $\vec{u}.\frac{d\vec{u}}{dt}=0$. Cela veut dire que soit le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur de direction et de sens fixes en fonction du temps et dans ce cas, $\frac{d\vec{u}}{dt}=0$, c'est le cas des vecteurs base des coordonnées cartésiennes : $\vec{i}$, $\vec{j}$ ou $\vec{k}$.

L'autre possibilité est que le vecteur unitaire a une direction qui varie avec le temps. Dans le cas bidimensionnel, le schéma suivant représente ce vecteur $\vec{u}$ à un instant t donné.



On note θ(t), l'angle entre l'axe Ox (défini par O et le vecteur $\vec{i}$) et le vecteur unitaire $\vec{u}$. En coordonnées cartésiennes, $\vec{u}=\cos\theta(t)\vec{i}+\sin\theta(t)\vec{j}$ dont la dérivée par rapport au temps s'écrit :

$\frac{d\vec{u}}{dt}=-\frac{d\theta}{dt}\sin\theta(t)\vec{i}+\frac{d\theta}{dt}\cos\theta(t)\vec{j}=\frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta(t)\vec{i}+\cos\theta(t)\vec{j})=\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_{\perp}$ Or $\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{d\vec{u}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$,

donc $\boxed{\frac{d\vec{u}}{d\theta}=\vec{u}_{\perp}}$.

Ceci indique que la dérivée d'un vecteur unitaire dans le plan par rapport à l'angle θ est un vecteur unitaire obtenu par rotation de $\frac{+\pi}{2}$ par rapport au vecteur $\vec{u}$.

De la même manière, on a $\boxed{\frac{d\vec{u}_{\perp}}{d\theta}=-\vec{u}}$.

En coordonnées polaires, on a $\vec{u}=\vec{u}_{\rho}$ et donc $\vec{u}_{\perp}=\frac{d\vec{u}_{\rho}}{d\theta}=\vec{u}_{\theta}$. On en déduit alors que $\frac{d\vec{u}_{\theta}}{d\theta}=-\vec{u}_{\rho}$. Ces résultats s'étendent sans difficulté aux coordonnées cylindriques.

3) Fonction de plusieurs variables :

On considère une fonction de trois variables $f(x,y,z)$ au voisinage du point $M_0=(x_0,y_0,z_0)$, la fonction $f(x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)$ est une fonction qui ne dépend que de x et qui admet une dérivée :

$$f'_x(M_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x} .$$

Cette dérivée est appelée la *dérivée partielle* de $f(x,y,z)$ par rapport à x au voisinage de

M_0 . De la même manière, on peut définir les dérivées partielles par rapport à y et par rapport à z de la fonction f. Le vecteur de coordonnées $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0), \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\right)$ est le *gradient* de f au point M_0 et noté $\overrightarrow{grad} f(M_0)$. Le gradient généralise à deux ou trois dimensions, la notion de dérivée pour les fonctions à une seule variable.

D'un point de vue physique, le gradient de f représente la ligne de plus grande pente (celle que l'eau d'une rivière va en général empruntée ou d'un skieur en descente), sa norme est d'autant plus grande que la « pente est raide » .

En physique, f est un potentiel. Les lignes de l'espace où f est constant sont appelés les lignes équipotentielles, le vecteur $\overrightarrow{grad} f$ est orthogonal au point M_0 à l'équipotentielle définie par $f(M)=f(M_0)$. Les lignes où $\|\overrightarrow{grad} f\|$ est constant sont appelées lignes de champ et sont orthogonales aux équipotentielles en tout point.

On définit également la *différentielle* de $f(x,y,z)$ par :

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}(M)\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}(M)\,dy+\frac{\partial f}{\partial z}(M)\,dz$$

qui peut aussi être écrite de manière condensée sous la forme $df=\overrightarrow{grad} f . d\overrightarrow{OM}$. En effet, si $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ est un vecteur de l'espace, il représente également une fonction de trois variables : on a $d\overrightarrow{OM}=\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x}(M)\,dx+\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y}(M)\,dy+\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}(M)\,dz$, il est alors facile de voir $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x}(M)=\vec{i}$. Par conséquent, $d\overrightarrow{OM}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$, d'où le résultat.

La différentielle vérifie un certain nombre de propriétés (avec u, v et w des fonctions de plusieurs variables) :

- si $f=u+v+w$, $df=du+dv+dw$
- si $f=uv$, $df=u\,dv+v\,du$. On en déduit que $\frac{df}{f}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}$.
- si $f=\frac{u}{v}$, $\frac{df}{f}=\frac{du}{u}-\frac{dv}{v}$. $\frac{df}{f}$ s'appelle *la différentielle logarithmique* de f car $\frac{df}{f}=d(\ln f)$.

III Référentiels d'espace et de temps :

1) Référentiel de temps :

Le temps se mesure par la répétition périodique de certains événements et on peut utiliser pour mesurer le temps tout système qui vérifie cette propriété que ce soit l'antique sablier, une horloge éventuellement atomique voire un simple oscillateur non amorti. Le choix du chronomètre le plus adapté correspond à celui pour lequel les lois physiques sont les plus simples. L'unité de temps dans le système international d'unités est la seconde.

Depuis 1967, *la seconde* est définie comme *9 192 634 770 périodes de la* *radiation électromagnétique correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental du césium 133.*

Les principales conséquences de l'existence d'un référentiel de temps sont :

- les lois physiques restent invariantes par translation dans le temps et sont indépendantes du référentiel d'espace.
- les phénomènes physiques se succèdent de manière irréversibles : on ne peut pas remonter le temps!
- le principe de causalité est vérifié : si un événement a lieu à t=0, il ne peut être la cause d'un événement à t<0..

2) Référentiels d'espace :

Définir la position d'un objet impose de choisir d'autres objets ou directions de référence. Par exemple, dans une salle de cours, on choisira l'intersection d'un des montants de la porte avec le sol comme origine O et on définira alors trois directions naturelles, une direction horizontale parallèle au mur qui tient la porte, une autre direction horizontale perpendiculaire au mur et enfin une troisième direction verticale. Tout objet ou personne, noté M, de la pièce sera ainsi repéré par trois nombres (x,y,z) appelées coordonnées de M dans le référentiel *(R)* défini par son origine O et les trois directions précédemment définies. Cette définition du référentiel *(R)* n'a en fait été possible que parce que la porte est un objet solide indéformable ainsi que le mur de soutien.

La définition générale d'un référentiel d'espace est la suivante : *Un référentiel (R) est constitué par un solide ou un ensemble de solides de formes invariantes dans le temps permettant de repérer la position de tout objet.*

Le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est appelé **vecteur position**. La norme de ce vecteur s'exprime en fonction d'un étalon qui est le mètre ou un de ses multiples. Depuis 1983, le mètre est défini comme la longueur parcourue par la lumière dans le vide pendant une durée de 1/299 792 458 seconde.

IV Cinématique du point :

1) Trajectoire :

La trajectoire d'un point matériel est l'ensemble des positions occupées successivement par celui-ci. Cette trajectoire est donc une courbe dans l'espace (cf image au I). Dans un référentiel d'espace *(R)* d'origine O, la trajectoire est définie comme la donnée du vecteur position en fonction du temps : $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$,

- En coordonnées cartésiennes, on doit préciser les expressions des fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
- En coordonnées cylindriques (ou polaires), il faut donner les expressions de $\rho(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$.
- En coordonnées sphériques, on doit préciser les expressions des fonctions $\rho(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$.

La donnée de ces trois fonctions dans un des systèmes de coordonnées est *la représentation paramétrique de la trajectoire*. En éliminant le temps entre les différentes fonctions, on peut obtenir l'équation de la trajectoire.

- En utilisant l'abscisse curviligne, la trajectoire est définie par la fonction *s(t)*. Cette fonction s'appelle *l'équation horaire du mouvement*.

Méthodologie : toute la difficulté est de tracer la courbe à partir des équations paramétriques....Nous allons regarder ce qui se passe à deux dimensions seulement et voir comment obtenir y(x).

- Soit on arrive à éliminer t entre les deux fonctions *x(t)* et *y(t)* et on obtient alors facilement y(x). Exemple :

$$x(t)=2t+1 \quad \text{et} \quad y(t)=5t^2-1$$

On en déduit que *2t=x-1* et donc *t=(x-1)/2*. On remplace alors t par sa valeur dans la fonction *y(t)* et on obtient finalement : $y=\frac{5}{4}(x-1)^2-1$.

En coordonnées polaires, on peut faire la même chose, il « reste » ensuite à tracer la courbe ρ(θ) (cf TD pour la méthode).

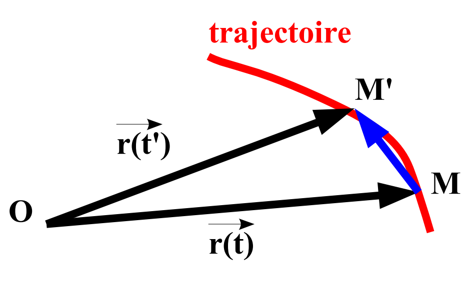
- Soit on ne peut pas éliminer t facilement : dans ce cas, il faut tracer la courbe point par point. Néanmoins, une méthodologie existe : on écrit déjà

$$x=f(t) \quad \text{et} \quad y=g(t)$$

  - Déterminer l'intervalle d'étude en temps (essentiellement pour les fonctions périodiques)
  - Etudier séparément les variations des fonctions f et g en calculant leurs dérivées et en faisant un seul tableau de variation. Bien préciser les points où les dérivées s'annulent. Sachant que $\frac{dx}{dt}=\dot{f}(t)$ et $\frac{dy}{dt}=\dot{g}(t)$, alors $\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{g}(t)}{\dot{f}(t)}$. Les points où $\frac{dy}{dx}=0$ (c'est à dire lorsque $\dot{g}(t)=0$) correspondent à des tangentes horizontales sur la courbe en ce point. Les points où $\frac{dy}{dx}=\infty$ (c'est à dire lorsque $\dot{f}(t)=0$) correspondent à des tangentes verticales sur la courbe en ce point.

2) Vitesse et accélération :

On considère deux positions successives, M et M', le long de la trajectoire aux instants successifs t et t', les vecteurs positions correspondant étant respectivement $\vec{r}(t)$ et $\vec{r}(t')$.



Le vecteur vitesse instantanée du point matériel à l'instant t est[1] :

$$\boxed{\vec{v}=\lim_{t\to t'}\frac{\vec{r}(t')-\vec{r}(t)}{t'-t}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}}$$

La norme du vecteur vitesse s'exprime donc dans le système international en mètres par seconde : m.s^{-1}. **Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire.**

<u>Remarque :</u> Il ne faut pas confondre vitesse instantanée et vitesse moyenne d'un mobile au sens de la vie courante. La vitesse moyenne est la distance parcourue par le mobile, Δs divisée par le temps Δt nécessaire pour parcourir cette distance. On peut noter que Δs est la variation d'abscisse curviligne sur le trajet considéré :

$$\|\vec{v_{moy}}\|=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La vitesse instantanée (en norme, c'est la limite de cette quantité lorsque $\Delta t\to 0$: dans cette limite,

$$\boxed{v=\frac{ds}{dt}}\ .$$

On peut donc écrire : $$\boxed{\vec{v}=\frac{ds}{dt}\vec{u_t}}$$

où $\vec{u}_t$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire au point M à l'instant t qui est un des vecteurs du repère intrinsèque défini précédemment.

Le vecteur accélération instantanée du point matériel à l'instant t est défini par :

$$\boxed{\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}}$$

La norme du vecteur accélération s'exprime dans le système international en mètre par seconde carrée : m.s^{-2}.

<u>Remarque :</u> il ne faut pas confondre la norme de ce vecteur avec la notion d'accélération au sens pratique. Ici encore l'accélération tel qu'on la ressent dans son véhicule au sens où le compteur de vitesse va afficher une vitesse plus ou moins grande est $a_{moy}=\frac{\Delta\|\vec{v}\|}{\Delta t}$. La première chose à remarquer est que $\frac{\Delta\|\vec{v}\|}{\Delta t}\neq\frac{\|\Delta\vec{v}\|}{\Delta t}$ ce qui montre bien que même dans la limite $\Delta t\to 0$, $\|\vec{a}\|\neq a_{moy}$. Cette image intuitive ne tient pas compte du fait que dans un virage, on a tendance à pencher le corps du côté opposé à la courbure du virage. Ce terme supplémentaire se trouve bel et bien dans l'expression du vecteur $\vec{a}$ mais pas dans la lecture de la variation de l'aiguille du compteur de vitesse.

<u>Remarque :</u> Le vecteur accélération est tangent à la courbe holographe du mouvement qui est la courbe décrite par l'extrémité du vecteur vitesse en fonction du temps.

---

1 Pour la définition d'une fonction vectoreille d'une variable, voir l'Annexe I

3) Composantes des vecteurs vitesse et accélération :

- Coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{v}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\dot{x}(t)\vec{i}+\dot{y}(t)\vec{j}+\dot{z}(t)\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{a}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}=\ddot{x}(t)\vec{i}+\ddot{y}(t)\vec{j}+\ddot{z}(t)\vec{k}}$$

- Coordonnées polaires ou cylindriques :

On peut traiter directement le cas des coordonnées cylindriques. Si on se restreint aux coordonnées polaires dans le plan, il suffit de poser z(t)=0.

$$\boxed{\vec{r}=\rho(t)\vec{u}_\rho+z(t)\vec{k}}$$

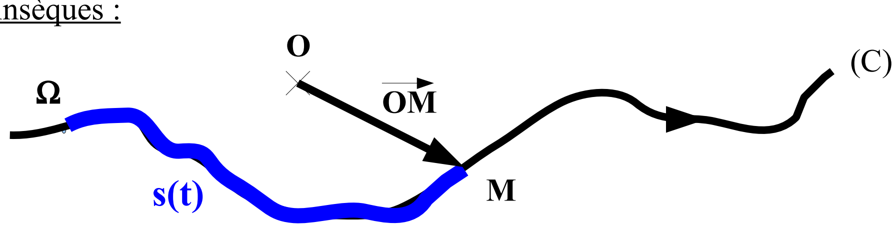
$$\boxed{\vec{v}=\frac{d\rho(t)}{dt}\vec{u}_\rho+\rho(t)\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\dot{\rho}\vec{u}_\rho+\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta+\dot{z}\vec{k}} \quad .$$

$$\boxed{\vec{a}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho+(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta+\ddot{z}\vec{k}=\vec{a}_{radiale}+\vec{a}_{orthoradiale}+\ddot{z}\vec{k}} \quad .$$

avec la composante radiale de l'accélération dans le plan : $\vec{a}_{radiale}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho$ et la composante orthoradiale de l'accélération : $\vec{a}_{orthoradiale}=(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$.

La quantité $\boxed{\omega(t)=\dot{\theta}(t)}$ *est la vitesse angulaire.*

- Coordonnées intrinsèques :

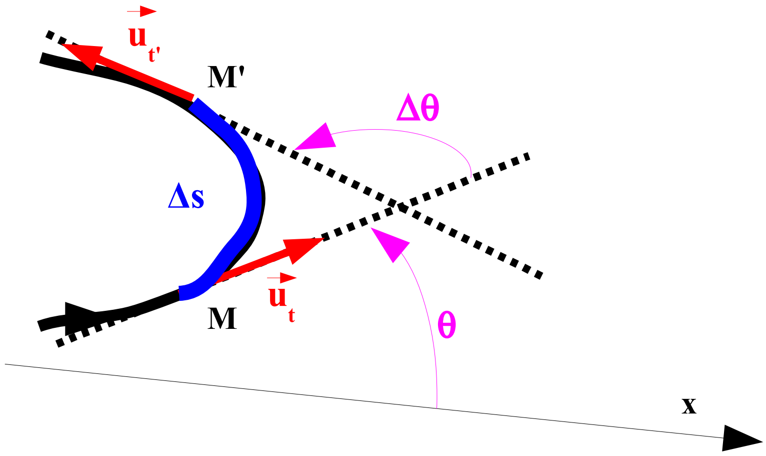


s(t) est l'abscisse curviligne le long de la trajectoire définie par la courbe (C).

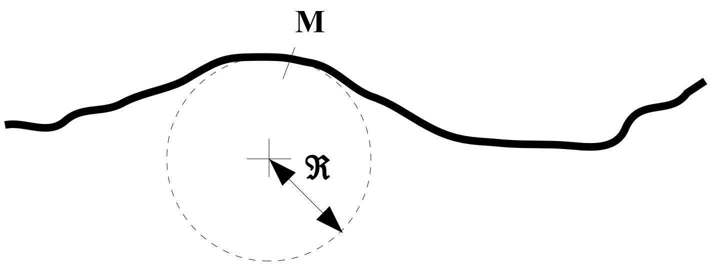
$$\boxed{\vec{v}=\frac{ds}{dt}\vec{u}_t}$$

D'autre part, $\vec{v}=\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{ds}\times\frac{ds}{dt}$ et sachant que $v=\frac{ds}{dt}$, on a donc $\vec{u}_t=\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{ds}$.

Pour déterminer le vecteur accélération, il faut introduire la notion de courbure d'un arc de cercle. De manière intuitive, la tangente à la courbe est une droite qui permet d'approcher localement la courbe par un segment de droite. Cette approximation linéaire n'est parfois pas suffisante et au lieu de faire passer une droite de manière tangente à la courbe, il est utile de considérer un cercle tangent à la courbe considérée. Ce cercle a un rayon $\Re$ dit rayon de courbure. Nous allons voir comment on peut extraire ce rayon de courbure.



On définit un axe polaire Ox et deux points M et M' qui correspondent à la position du point mobile aux instants t et t' respectivement. En ces points, on trace les deux tangentes à la trajectoire caractérisées par les vecteurs unitaires $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_{t'}$ respectivement. On note θ , l'angle entre la tangente au point M et l'axe polaire Ox. L'origine du choix de cette notation est que cet angle θ est identique à celui introduit pour les coordonnées polaires. On note $\Delta\theta$ l'angle orienté entre les deux tangentes en suivant le mouvement de M vers M'. Cet angle $\Delta\theta$ correspond à la variation de la direction de la tangente, c'est à dire la variation de l'angle θ entre les instants t et t', il est une mesure de la courbure de la trajectoire entre M et M': on appelle *courbure* en M, le rapport $C=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{d\theta}{ds}$. La courbure est homogène à l'inverse d'une longueur. On définit alors le *rayon de courbure* : $\Re=\frac{1}{C}=\frac{ds}{d\theta}$ qui est le rayon du cercle tangent à la trajectoire au point M. Ce cercle est appelé cercle osculateur. Le centre du cercle osculateur est appelé centre de courbure.



On peut maintenant calculer le vecteur accélération $\vec{a}$. De $\vec{v}=\frac{ds}{dt}\vec{u}_t=\dot{s}\vec{u}_t$, on déduit que $\vec{a}=\ddot{s}\vec{u}_t+\dot{s}\frac{d\vec{u}_t}{dt}$ avec $\frac{d\vec{u}_t}{dt}=\frac{d\vec{u}_t}{ds}\times\frac{ds}{dt}=\frac{d\vec{u}_t}{d\theta}\times\frac{d\theta}{ds}\times\frac{ds}{dt}$. $\frac{d\vec{u}_t}{d\theta}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}_t$ et se déduit de $\vec{u}_t$ par rotation de $+\frac{\pi}{2}$, on le note $\vec{u}_n$: $\vec{u}_n=\frac{d\vec{u}_t}{d\theta}$.

On peut alors écrire :

$$\boxed{\vec{a}=\ddot{s}\vec{u}_t+\frac{v^2}{\Re}\vec{u}_n=\vec{a}_t+\vec{a}_n}$$

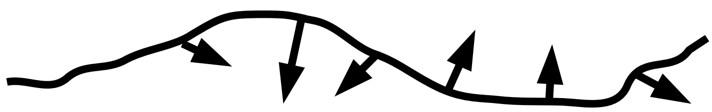
où $\vec{a}_t = \ddot{s}\,\vec{u}_t$ est l'accélération tangentielle et $\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{\Re}\vec{u}_n$ est l'accélération normale.

Ainsi la valeur algébrique de l'accélération tangentielle correspond à la sensation d'accélération ou de freinage lorsque le compteur de vitesse de la voiture varie. Le terme d'accélération normale décrit la sensation de se pencher vers la droite ou vers la gauche dans un virage. Cette sensation est d'autant plus forte que le virage est serré ($\Re$ petit) et est absente en ligne droite, car en ligne droite, le rayon de courbure de la route, $\Re$, est infini.

Remarques :

En introduisant un vecteur unitaire $\vec{k}$ normal au plan de la trajectoire, on a $\vec{u}_n = \vec{k} \wedge \vec{u}_t$. Ceci est la méthode la plus simple pour déterminer $\vec{u}_n$ connaissant $\vec{u}_t$.

Le rayon de courbure $\Re$ n'est pas forcément un nombre positif. En conséquence, l'accélération normale n'est pas forcément du même sens que $\vec{u}_n$. Plus précisément, le vecteur accélération est dirigé dans la courbure de la trajectoire alors que le vecteur $\vec{u}_n$ ne l'est pas forcément. La figure ci-dessous donne ainsi très grossièrement les orientations du vecteur accélération en fonction de la position sur la trajectoire.



4) Mouvements particuliers :

a) Mouvement rectiligne :

On parle de *mouvement rectiligne* lorsque le point M ne se déplace que selon une direction définie par une origine O et une direction qu'on peut noter Ox. La définition du mouvement est donnée par la fonction x(t). Dans ce cas, les vecteurs position, vitesse et accélération sont donnés successivement par :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{i} \quad , \quad \vec{v} = \dot{x}(t)\,\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \ddot{x}(t)\,\vec{i} \quad .$$

On parle de *mouvement rectiligne uniforme* si la norme du vecteur vitesse est constante. **De manière générale, on parle de mouvement uniforme si la norme du vecteur vitesse est constante (et pas le vecteur vitesse)**. Dans ce cas précis, l'accélération est nulle. Si on note v_0 la vitesse durant ce mouvement, on en déduit alors que :

$$x(t) = v_0\, t + x_0$$

où x_0 est la position initiale du point matériel à l'instant t=0.

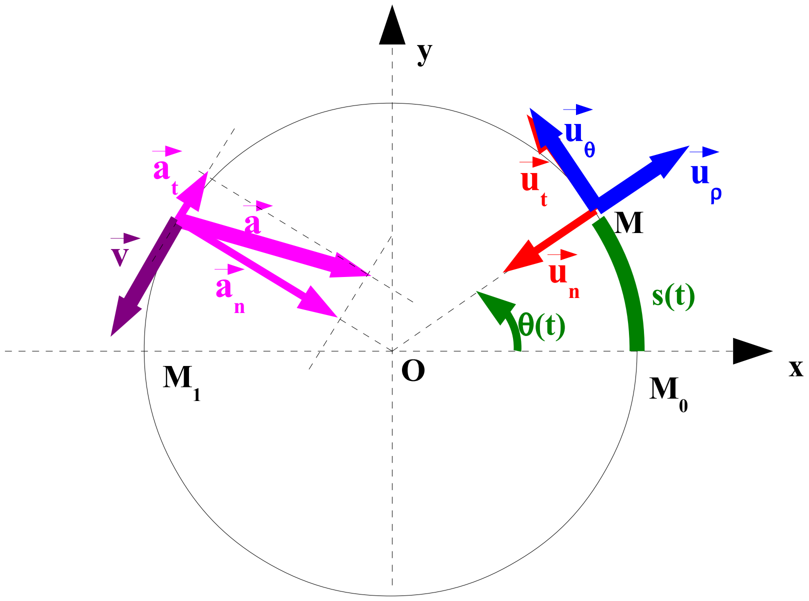
D'autre part, si la norme du vecteur accélération est constante, on parle de mouvement uniformément accéléré si $\ddot{x}(t) = a_0 = C^{ste} > 0$ et de mouvement uniformément décéléré si $\ddot{x}(t) = a_0 = C^{ste} < 0$. Dans les deux cas, on en déduit les expressions de la vitesse et de la position :

$$v=\dot{x}(t)=a_0 t+v_0 \quad , \quad x(t)=\frac{1}{2}a_0 t^2+v_0 t+x_0$$

où x_0 et v_0 sont respectivement la position et la vitesse du mobile à l'instant t=0.

L'exemple le plus caractéristique de mouvement uniformément accéléré est le cas de la chute libre ou du tir balistique où la particule n'est soumise qu'à son poids. Dans ce cas, son accélération est donnée, en norme, par la constante de gravitation $g_0=9,81\ m.s^{-2}$.

b) Mouvement circulaire :



Dans cette partie, on considère un mouvement circulaire, c'est à dire que le point matériel se déplace sur un cercle de centre O et de rayon R. Le rayon de courbure de la trajectoire est donc constant : $\Re=R$. A tout instant, $\vec{u}_t$ est un vecteur tangent au cercle et est donc confondu avec le vecteur $\vec{u}_\theta$ des coordonnées polaires. Le vecteur $\vec{u}_n$ est toujours dirigé vers le centre du cercle et est donc égal au vecteur $-\vec{u}_\rho$ des coordonnées polaires.

L'abscisse curviligne est $s(t)=R\theta(t)$ en supposant qu'à t=0, le point M se situe au point M_0. Dans le cas du mouvement circulaire, on a les expressions des différentes composantes de la vitesse et de l'accélération :

$v=R\omega$, $a_t=R\dot{\omega}=R\ddot{\theta}$ et $a_n=R\omega^2=\frac{v^2}{R}$ où $\omega=\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire.

On remarque qu'on a toujours $a_n>0$. Ceci veut dire que l'accélération est toujours dirigée vers l'intérieur du cercle.

Le *mouvement circulaire est dit uniforme* si la <u>norme</u> du vecteur vitesse est constante, c'est à dire si la vitesse angulaire, ω est constante. On remarque que <u>dans un mouvement circulaire, le vecteur vitesse est jamais constant</u>.

Pour finir, nous allons introduire une quantité qui sera très importante pour les mouvements quelconques de rotation dans un plan : c'est *le vecteur rotation,* $\vec{\omega}=\omega\vec{k}$ où $\vec{k}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant le cercle.

On peut montrer la propriété suivante vérifiée par tout vecteur $\vec{A}$ de norme constante :

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{A}$$

Cette formule peut être appliquée au vecteur $\overrightarrow{OM}$ pour un mouvement circulaire car la norme de ce vecteur reste constante au cours du mouvement. On en déduit que pour un mouvement circulaire (et uniquement pour un mouvement circulaire!) :

$$\vec{v}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

Par dérivation de cette expression, on en déduit l'accélération pour un mouvement circulaire:

$$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM}-\omega^2\overrightarrow{OM}$$

Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire uniforme, c'est à dire tel que la norme du vecteur vitesse est constante, le vecteur rotation est un vecteur constant. Dans ce cas, l'expression de l'accélération se réduit à : $\vec{a}=\vec{a}_n=-\omega^2\overrightarrow{OM}$, le vecteur accélération est toujours dirigé vers le centre O du cercle, on parle d'*accélération centripète*.

c) mouvement sinusoïdal :

Difficile Si on considère le mouvement circulaire précédent, on remarque que la projection du point M sur l'axe Ox (ou Oy) varie entre -R et +R. Si on suppose en plus que le mouvement est uniforme, alors la projection m de M sur l'axe Ox a pour coordonnée $x(t)=R\cos\theta(t)=R\cos\omega t$. Le mouvement de m est donc sinusoïdal.

La vitesse de m est : $v=\frac{dx}{dt}=-R\omega\sin\omega t$, son accélération $a=\frac{dv}{dt}=-R\omega^2\cos\omega t=-\omega^2 x(t)$. Le mouvement de m vérifie l'équation différentielle du second ordre : $\ddot{x}+\omega^2 x=0$. Il s'agit donc d'un mouvement oscillant entre deux positions extrêmes M_0 et M_1 représentées sur la figure précédente. La période du mouvement est : $T=\frac{2\pi}{\omega}$ (cf module Phys101).

De manière inverse, si on considère un mouvement sinusoïdal d'amplitude 2A (x varie de -A à +A) selon une direction x, on peut considérer ce mouvement comme la projection d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de norme A. Ce vecteur $\overrightarrow{OM}$ est appelé vecteur de Fresnel et un telle représentation du mouvement, la représentation de Fresnel.

V Composition des mouvements :

Nous avons déjà vu qu'une vache regardant passer un train dans lequel se trouve un passager assis a l'impression que le passager est animé d'un mouvement par rapport à son pré. Cependant vu du passager, il est assis au repos et a donc aucun mouvement. Pour lui, c'est plutôt la vache qui bouge! Il est donc fondamental lorsqu'on parle de mouvement de spécifier par rapport à quoi! Tout mouvement est en fait relatif.

L'exemple précédent nous montre qu'on peut définir un référentiel par rapport à la Terre qui est fixe et un référentiel lié au train qui lui bouge par rapport à la Terre, ce référentiel est mobile. Ici encore nous avons fait une approximation en considérant que le référentiel lié à la Terre est fixe. En fait, la Terre se déplace dans l'univers et il faut donc le référentiel lié à la Terre n'a rien de fixe. Cependant à l'échelle de temps qu'on considère, ceci peut-être considéré comme une excellente approximation. On dira que les référentiels fixes sont absolus, les autres relatifs.

1) Définitions :

On considère un référentiel $(\Re)$ muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ tel que O et les vecteurs de base ne dépendent pas du temps. Ce référentiel sera dit *référentiel absolu*. On considère un autre référentiel $(\Re')$ muni d'un repère orthonormé direct $(O',\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en mouvement par rapport à $(\Re)$, ce référentiel sera dit *référentiel relatif*.

La vitesse et l'accélération d'un point mobile M dans $(\Re)$ seront dites respectivement *vitesse et accélération absolues*. La vitesse et l'accélération de ce même point mobile dans le référentiel $(\Re')$ seront dites respectivement *vitesse et accélération relatives*.

On appelle *point coïncidant de M dans* $(\Re')$, le point N fixe dans $(\Re')$ qui coïncide à l'instant t avec M. A tout instant, M possède un point coïncidant dans $(\Re')$, mais ce point change à chaque instant. Ce point coïncidant possède une vitesse dans $(\Re)$ dite *vitesse d'entraînement* et une accélération dans $(\Re)$ dite *accélération d'entraînement*.

2) Loi de composition des vitesses :

En utilisant les notations déjà prédéfinies, un point M aura les coordonnées (X,Y,Z) dans $(\Re)$ et (x,y,z) dans $(\Re')$. Le référentiel $(\Re)$ étant le référentiel absolu, <u>les vecteurs $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{K}$ ne dépendent pas du temps, ce qui n'est pas le cas des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$</u>. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit en fonction des différents vecteurs de base sous la forme :

$$\overrightarrow{OM}=X\vec{I}+Y\vec{J}+Z\vec{K}=\overrightarrow{OO}'+x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

La **vitesse absolue** de M est $\vec{v}_a=\dot{X}\vec{I}+\dot{Y}\vec{J}+\dot{Z}\vec{K}$.

La **vitesse relative** de M est $\vec{v}_r=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}$.

On a $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\vec{v}_a=\frac{d\overrightarrow{OO}'}{dt}+x\dot{\vec{i}}+y\dot{\vec{j}}+z\dot{\vec{k}}+\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}$

Les trois derniers termes correspondent à la vitesse relative, les autres à la vitesse d'entraînement, $\vec{v}_e$, d'où la loi de composition des vitesses : $\boxed{\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r}$

On peut vérifier que les premiers termes correspondent effectivement à la vitesse d'entraînement. En effet, si on reprend la définition du point coïncidant de M dans $(\Re')$, c'est le point N fixe dans $(\Re')$ qui coïncide à l'instant t avec M. Ce point N étant fixe dans $(\Re')$, il est animé d'une vitesse nulle dans ce référentiel : $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$ et donc $\vec{v}_a(N)=\vec{v}_e(N)$. Ce point N coïncidant avec M à un instant donné t_0, on a $\vec{v}_a(N)=\vec{v}_a(M)=\vec{v}_e(N)$ à cet instant t_0.

3) Loi de composition des accélérations :

L'**accélération absolue** est $\vec{a}_a=\ddot{X}\vec{I}+\ddot{Y}\vec{J}+\ddot{Z}\vec{K}$.

L'**accélération relative** est $\vec{a}_r=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}$.

En dérivant l'expression du vecteur vitesse, on obtient :

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\vec{a}_a=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+x\ddot{\vec{i}}+y\ddot{\vec{j}}+z\ddot{\vec{k}}+\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}+2(\dot{x}\dot{\vec{i}}+\dot{y}\dot{\vec{j}}+\dot{z}\dot{\vec{k}})$$

Les quatre premiers termes de l'expression développée correspondent à l'accélération d'entraînement, $\vec{a}_e$ (en effet, si on pose $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$, seuls ces termes restent). Les trois suivants correspondent à l'accélération relative, enfin les trois derniers termes constituent *l'accélération de Coriolis* appelée aussi accélération complémentaire.

$$\boxed{\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r+\vec{a}_c}$$

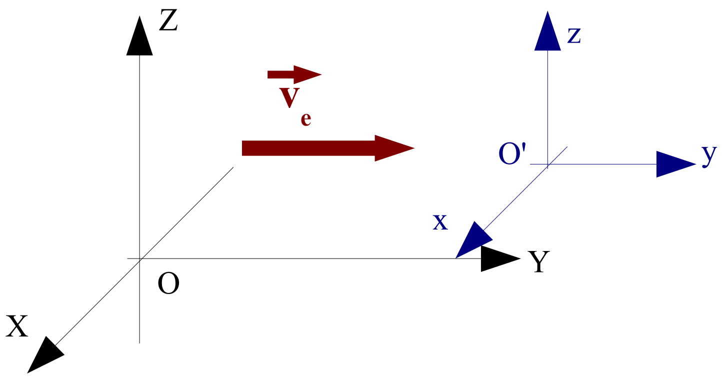
Remarque : on peut montrer que $\frac{d\vec{v}_e}{dt}=\vec{a}_e+\frac{1}{2}\vec{a}_c\neq\vec{a}_e$, c'est à dire que l'accélération d'entraînement n'est pas la dérivée de la vitesse d'entrainement dans le cas général.

4) Lois de composition dans des cas particuliers :

a) Référentiels en translation :

Un référentiel $(\Re')$ est en translation par rapport à $(\Re)$ si tout point de $(\Re')$ a un mouvement rectiligne dans $(\Re)$. Ceci est vrai si O' et les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ gardent une direction fixe. On choisit donc $\vec{i}=\vec{I}$, $\vec{j}=\vec{J}$ et $\vec{k}=\vec{K}$. Les dérivées des vecteurs de base sont donc tous nuls.

On a $\vec{v}_e=\vec{v}_a(O')=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$, $\vec{a}_e=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}=\vec{a}_a(O')$ et $\vec{a}_c=\vec{0}$



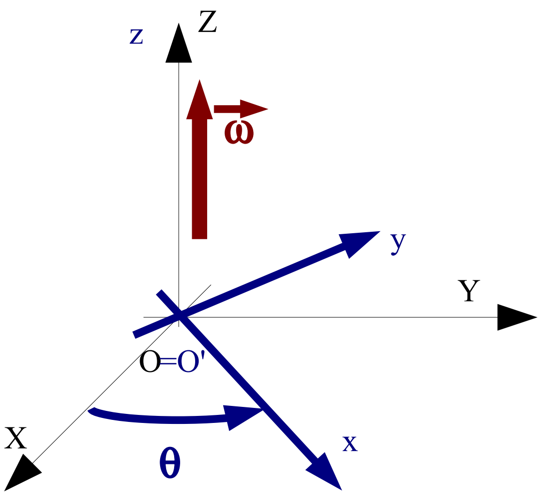
Les lois de composition se résument donc à :

$$\boxed{\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r=\vec{v}_a(O')+\vec{v}_r} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{a}_a=\vec{a}_a(O')+\vec{a}_r=\vec{a}_e+\vec{a}_r}$$

Si de plus, le mouvement de translation est uniforme, l'accélération d'entraînement est nulle : $\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$ et $\vec{a}_a=\vec{a}_r$

b) Référentiel en rotation autour d'un axe :

On considère que l'axe de rotation est OZ (ou Oz car on peut supposer O=O').



On choisit $\vec{k}=\vec{K}$. Par conséquent, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont dans le plan $(O,\vec{I},\vec{J})$. On note θ, l'angle entre $\vec{I}$ et $\vec{i}$. Le vecteur rotation est donc $\vec{\omega}=\omega\vec{k}=\dot{\theta}\vec{k}$.

$$\vec{i}(t)=\cos\theta(t)\vec{I}+\sin\theta(t)\vec{J}$$
$$\vec{j}(t)=-\sin\theta(t)\vec{I}+\cos\theta(t)\vec{J}$$

les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont unitaires donc de norme constante. Au cours du temps, les extrémités des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ décrivent un cercle de centre O et de rayon 1. Ils sont donc animés d'un mouvement circulaire. En utilisant le vecteur rotation vu précédemment, les dérivées par rapport au temps de ces vecteurs sont donc :

$$\dot{\vec{i}}=\vec{\omega}\wedge\vec{i} \quad \text{et} \quad \dot{\vec{j}}=\vec{\omega}\wedge\vec{j} \quad (\ \dot{\vec{k}}=\vec{0} \ ).$$

Pour calculer la vitesse d'entraînement, il y a deux méthodes : la première est d'utiliser les formules générales développées précédemment. On peut alors se convaincre que :

$$\boxed{\vec{v}_e=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{ON}}$$

où N est le point coïncidant de M. On a évidemment aussi $\vec{v}_e=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$. La deuxième méthode est d'utiliser directement le fait que la vitesse d'entraînement est la vitesse du point coïncidant. En effet, tout point fixe F dans $(\mathfrak{R}')$ est en rotation autour de l'axe OZ et le vecteur $\overrightarrow{OF}$ a donc une norme constante. Sa vitesse est donc donnée par la formule $\frac{d\overrightarrow{OF}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OF}$.

$$\boxed{\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{ON}+\vec{v}_r\equiv\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}+\vec{v}_r}$$

où N est le point coïncidant de M dans $(\Re')$.

Pour calculer l'accélération d'entraînement, on ne peut pas prendre la dérivée de la vitesse d'entraînement. On doit repartir de la formule générale :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x\ddot{\vec{i}} + y\ddot{\vec{j}} + z\ddot{\vec{k}}$$

Sachant que les points O et O' sont identiques, le premier terme est nul. De même, le vecteur $\vec{k}$ ne dépendant pas du temps, l'accélération d'entraînement se réduit à $\vec{a}_e = x\ddot{\vec{i}} + y\ddot{\vec{j}}$. Les vecteurs de base étant de normes constantes,

$$\ddot{\vec{i}} = \frac{d}{dt}\dot{\vec{i}} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{i}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{i} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{i})$$

$$\ddot{\vec{j}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{j} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{j})$$

On en déduit que : $\vec{a}_e = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge(x\vec{i}+y\vec{j}) + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge(x\vec{i}+y\vec{j}))$. Sachant que le vecteur $\vec{\omega}$ est orienté selon Oz, on peut rajouter dans chacune des parenthèses le terme $z\vec{k}$ aux termes $x\vec{i}+y\vec{j}$ (le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul) et on obtient :

$$\boxed{\vec{a}_e = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{ON} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{ON}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})}$$

où N est de nouveau le point coïncidant de M. De même, on peut calculer l'accélération de Coriolis, $\vec{a}_c = 2(\dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{k}})$ où le dernier terme est évidemment nul, mais on peut le conserver. D'où,

$$\vec{a}_c = 2(\dot{x}(\vec{\omega}\wedge\vec{i}) + \dot{y}(\vec{\omega}\wedge\vec{j}) + \dot{z}(\vec{\omega}\wedge\vec{k})) = 2\ \vec{\omega}\wedge(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})$$

Le terme entre parenthèses étant simplement la vitesse relative $\vec{v}_r$, on en déduit l'expression de l'accélération de Coriolis :

$$\boxed{\vec{a}_c = 2\ \vec{\omega}\wedge\vec{v}_r}$$

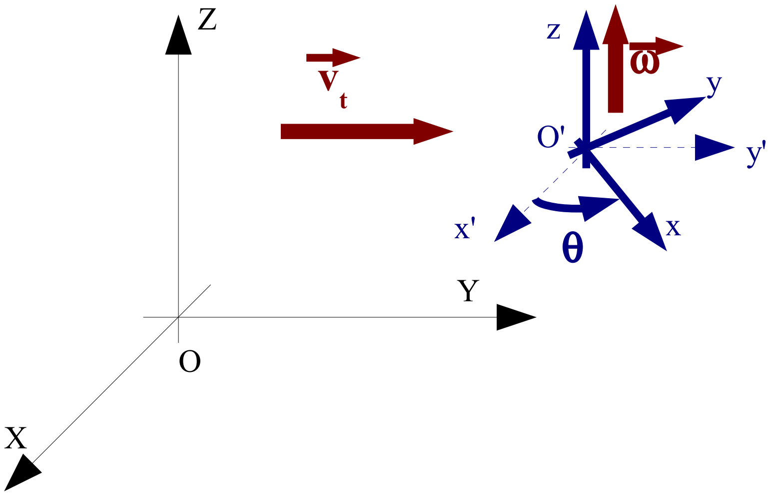
On justifie donc à posteriori que pour trouver l'accélération d'entraînement, il ne faut pas dériver l'expression de la vitesse d'entraînement puisque l'accélération de Coriolis n'est pas nulle. On remarque également que la formule obtenue pour l'accélération de Coriolis est générale et s'applique même au cas de la translation car, dans ce cas, le vecteur rotation est nul.

c) Référentiel en rotation autour d'un axe et en translation :

Difficile

On considère ici que l'origine du référentiel $(\Re')$ est en translation uniforme par rapport au référentiel $(\Re)$ et également en rotation autour d'un axe fixe de $(\Re)$. On peut toujours considérer que cet axe est l'axe OZ (parallèle à O'z).

Une manière simple de déterminer les lois de composition des vitesses et accélérations est de considérer le référentiel $(\Re'')$ caractérisé par le repère O'x'y'z'. Ainsi, le référentiel $(\Re'')$ est en translation uniforme par rapport à $(\Re)$, et le référentiel $(\Re')$ est en rotation pure par rapport à $(\Re'')$.



On peut alors écrire : $\vec{v_{\Re}}(M)=\vec{v_{\Re'}}(M)+\vec{v_{\Re}}(\Re')=\vec{v_{\Re'}}(M)+\vec{v_{\Re''}}(\Re')+\vec{v_{\Re}}(\Re'')$ où $\vec{v_{\Re'}}(M)$ est la vitesse relative de M (dans le référentiel $(\Re')$) et $\vec{v_{\Re}}(\Re')$ est la vitesse d'entraînement du référentiel $(\Re')$ par rapport au référentiel $(\Re)$. On en déduit alors la vitesse d'entraînement en utilisant les paragraphes précédents :

$$\boxed{\vec{v}_e=\frac{d\,\overrightarrow{OO'}}{dt}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'N}}$$

De même,

$$\boxed{\vec{a}_e=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt}+\frac{d\,\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'N}+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'N})}$$

$$\boxed{\vec{a}_c=2\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r}$$

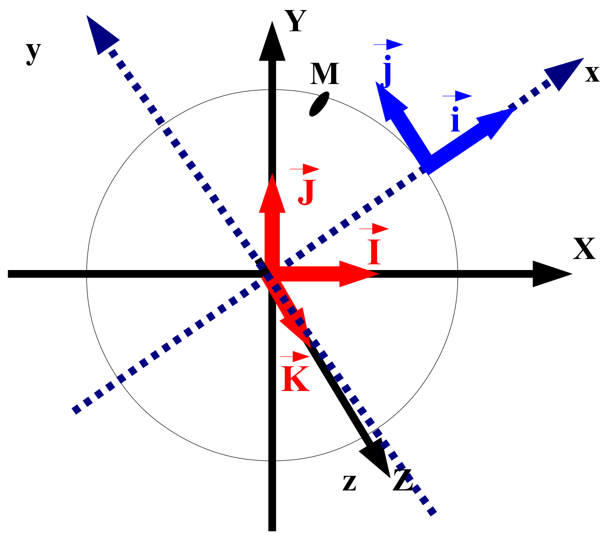
5) Applications :

a) Train :

C'est l'exemple le plus simple de changement de référentiel. On considère un voyageur dans un train qui roule. Le référentiel $(\Re)$ est celui associé à la Terre, le référentiel $(\Re')$, celui associé au train. On est dans le cas de référentiel en translation l'un par rapport à l'autre. On a donc, $\vec{v}_{\,voyageur}=\vec{v}_{\,train}+\vec{v}_{\,voyageur\,dans\,train}$ et $\vec{a}_{\,voyageur}=\vec{a}_{\,train}+\vec{a}_{\,voyageur\,dans\,train}$, l'accélération de Coriolis étant nulle.

b) Roue libre de bicyclette :

On considère un vélo à l'envers et on fait tourner librement une roue. Le référentiel $(\Re)$ reste celui associé à la Terre, le référentiel $(\Re')$ est celui associé à la roue tournant autour de son axe. On s'intéresse au mouvement de la valve. Nous sommes dans le cas d' un référentiel en rotation autour d'un axe fixe.

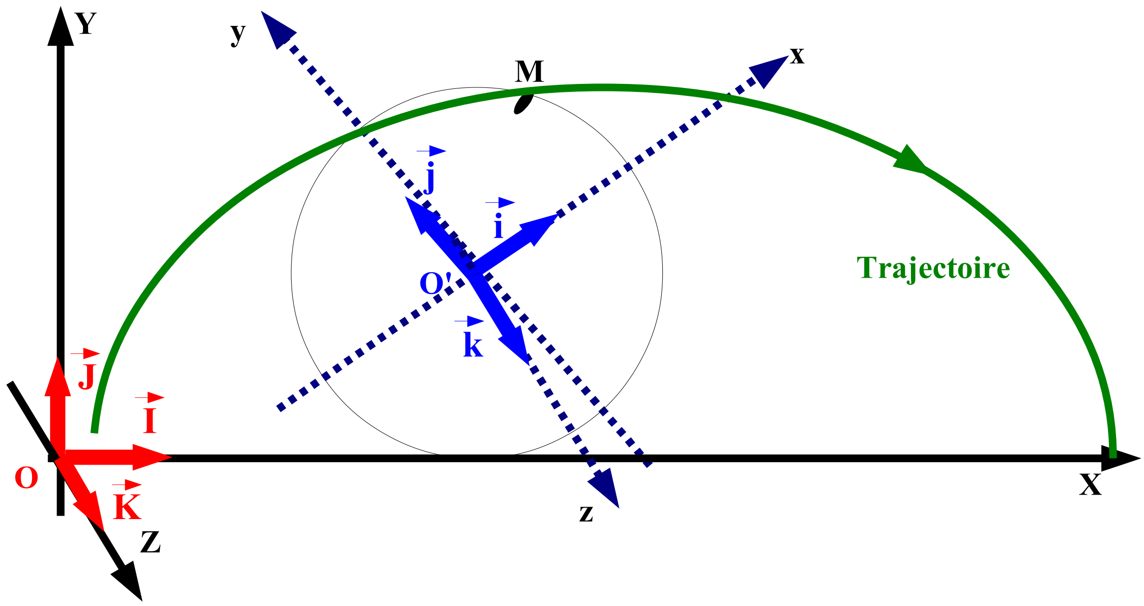


Dans le référentiel $(\Re')$, la valve est immobile et donc la vitesse relative est nulle. On a alors $\vec{v}_{valve} = \vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ avec $\vec{\omega}$ le vecteur rotation selon le vecteur $\vec{k}$. En ce qui concerne l'accélération, la vitesse relative étant nulle, l'accélération relative et l'accélération de Coriolis sont nulles. On a donc, $\vec{a}_{valve} = \vec{a}_e$. Si, pour simplifier, on suppose en plus que la vitesse angulaire est constante, $\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$.

c) Bicyclette roulant sur une piste :

Ici la bicyclette roule sur une route et on s'intéresse de nouveau au mouvement de la valve. La valve tourne autour de l'axe de la roue alors que le vélo se déplace en translation sur une route. On note O' le centre de la roue considérée. Ici encore, la vitesse relative est nulle et donc les accélérations relative et de Coriolis également. La vitesse absolue de la valve est $\vec{v}_{valve} = \vec{v}_e = \vec{v}(O') + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$

L'accélération absolue (si la vitesse angulaire est constante pour simplifier), est de nouveau $\vec{a}_{valve} = \vec{a}_e$,donc $\vec{a}_{valve} = \vec{a}_a(O') + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$



Chapitre III : Fondements de la dynamique newtonienne

La cinématique correspond à l'étude des vecteurs vitesse et accélération, mais ces quantités sont dues à l'interaction entre le corps considéré et le monde extérieur, plus précisément aux forces qui agissent sur ce corps. La relation entre le champ de la cinématique et celui des forces est donnée par la relation fondamentale de la dynamique. En conséquence, il est indispensable de préciser le référentiel dans lequel on considère cette relation fondamentale de la dynamique. En particulier, cette relation ne peut être appliquée que dans un référentiel dit galiléen.

I Masse et quantité de mouvement:

Si on essaie de déplacer une voiture en panne sèche, il faut souvent s'y mettre à plusieurs, alors que pour un ballon de foot, cela n'est pas difficile seul. Cette différence vient que pour la voiture et le ballon de foot, la vitesse de chacun de ces objets ne suffit pas à le caractériser, mais il faut aussi considérer quelque chose qui fait qu'il est plus difficile de déplacer la voiture que le ballon de foot. Cette 'inertie' au déplacement se traduit par la *masse* de l'objet. On suppose dans ce cours que cette masse est indépendante du mouvement de l'objet et du référentiel considéré. Ce ne serait pas le cas si on s'intéressait au lancement d'une fusée qui permet de la masse au fur et à msure qu'elle s'élève dans le ciel.

Pour donner une valeur précise à cette masse, la seule méthode est de passer sur la balance c'est à dire de comparer la masse de l'objet à une référence elle-même calibrée par rapport à la masse étalon de un kilogramme en platine iridié déposé au Bureau des Poids et Mesures et qui est la référence internationale pour la masse. On peut d'ailleurs remarqué que l'étalon de masse n'a pas évolué depuis 1901 contrairement aux autres échelles fondamentales telles que la seconde ou le mètre. Cette définition de la masse fait en fait intervenir le poids d'un corps c'est à dire son interaction avec la Terre et il est possible que cette masse ne corresponde pas à la masse d'inertie définie au début. L'expérience montre néanmoins que ces deux notions sont identiques.

Cette définition de la masse nous permet de définir la quantité de mouvement d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel donné :

$$\boxed{\vec{p}=m\vec{v}}$$

Cette définition porte bien on nom et traduit le fait qu'une voiture a une quantité de mouvement plus grande qu'un ballon de foot même si les deux se déplacent à la même vitesse. Ainsi dans les cours ultérieurs de physique, c'est cette quantité de mouvement qui jouera un rôle fondamental et non la vitesse de l'objet.

II Référentiels galiléens :

1) Définition :

On considère un référentiel $(\Re)$ muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Ce référentiel est appelé *référentiel galiléen*, si un mobile infiniment éloigné de tout autre objet matériel :

-) y est animé d'un mouvement rectiligne uniforme

-) ou bien y est immobile.

Remarque : on appelle aussi les référentiels galiléens, référentiels d'inertie.

2) Référentiel de Copernic :

La définition des référentiels galiléens pose la question de leur existence: peut-on trouver un référentiel galiléen dans la nature sachant qu'il faut que le mobile soit éloigné suffisamment des autres pour ne pas interagir avec eux! Le plus 'simple' a imaginé est basé sur notre bon vieux système solaire qui semble en première approximation isolé du reste de l'univers et qui interagit peu avec les étoiles avoisinantes.

En première approximation, on considère le système solaire comme un système isolé c'est à dire qui n'interagit pas avec d'autres étoiles ou systèmes planétaires.

Le *référentiel de Copernic* est défini par son origine O qui est le centre de masse (ou barycentre) du système solaire et par trois axes reliant cette origine O à trois étoiles très éloignées (dites 'fixes'). Dans cette approximation, le référentiel de Copernic est un référentiel galiléen.

En première approximation, le barycentre du système solaire se trouve au centre du Soleil tout simplement parce que la masse du Soleil est très supérieure à la somme de la masse de tous les autres objets du système solaire.

Le référentiel de Copernic étant galiléen, on peut alors construire une infinité de référentiels galiléens, il s'agit de tous les référentiels animés d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à ce référentiel comme nous le montrerons dans le chapitre sur les changements de référentiels. Réciproquement, tout référentiel animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic (c'est à dire dont l'origine du repère est animé...) est un référentiel galiléen.

3) Référentiel galiléen approché :

Dans l'approximation précédente, sachant que la Terre tourne autour du Soleil et n'est donc pas animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au Soleil, un référentiel avec comme origine le centre de la Terre et avec comme axes, les directions des trois étoiles fixes, n'est pas galiléen. En conséquence, tout référentiel avec pour origine un quelconque point de la Terre ne peut pas être galiléen et donc on ne pourra pas appliquer la relation fondamentale de la dynamique.

Pour sortir de cette impasse, on peut remarquer que le mouvement de la Terre sur son orbite quasi-circulaire est lent et qu'il faut, comme chacun le sait, une année pour en faire le tour. En général, l'échelle de temps sur laquelle se produit l'étude du mouvement qu'on étudie est au plus de quelques heures. A cette échelle de temps, l'orbite terrestre peut être approximé par sa tangente, et donc en première approximation, la Terre parcourt un mouvement rectiligne, ce mouvement est uniforme en première approximation car l'orbite de la Terre est quasi-circulaire. De manière approché, un référentiel ayant pour origine le centre de la Terre et ayant pour 3 axes, les trois directions du référentiel de Copernic est un référentiel galiléen approché.

Le centre de la Terre, n'est pas forcément l'origine la plus pratique, une origine à la surface de la Terre l'est nettement plus. Comme la terre tourne sur elle-même, on se retrouve avec le même problème que précédemment. On peut faire exactement le même raisonnement qu'au paragraphe précédent en remplaçant le centre du Soleil par le centre de la Terre et la Terre par un point à la surface de la Terre. On aboutit à ce que un point à la surface de la Terre peut-être pris comme origine et on prend comme axes, trois directions fixes. On obtient alors de nouveau un référentiel galiléen approché. Évidemment, ceci n'est valable strictement qu'à une échelle de temps encore plus courte car on a négligé la rotation de la Terre sur elle-même.

III Lois de Newton dans un référentiel galiléen :

La dynamique est régie par trois lois fondamentales dites lois de Newton :

- 1ère loi : Principe de l'inertie. Un objet livré à lui-même, sans interaction avec les autres objets reste au repos si il était initialement au repos ou bien est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme si il était initialement en mouvement.
- 2ième loi : Principe fondamental de la dynamique. Dans un référentiel galiléen, le mouvement d'un point matériel de masse m soumis à un ensemble de forces dont la résultante est $\vec{F}$ est caractérisé par son accélération $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$. On écrit ce principe sous la forme : $\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{p}}{dt}$.
- 3ième loi : Principe de l'action et de la réaction. Lorsque 2 points matériels A et B sont en interaction, la force qu'exerce le point matériel A sur le point matériel B est de même intensité, parallèle mais de direction opposée à la force qu'exerce le point matériel B sur le point matériel A : $\vec{F}_{A/B}=-\vec{F}_{B/A}$.

IV Interactions entre points matériels :

On considère deux points matériels P1 et P2. On peut dire qu'il sont en interaction si la modification de la position de P1 ou d'une propriété de P1 entraîne une modification du mouvement de P2 ou d'une propriété de P2. Les interactions vérifient la propriété remarquable de tendre vers zéro lorsque les deux points matériels sont infiniment éloignés. Ainsi un système (ou un point) est isolé si les interactions avec tous les autres points matériels sont nulles. Pour vérifier cette propriété, le point matériel doit être éloigné de toute matière! Cela semble difficilement réalisable mais en première approximation, il existe des situations où ceci est vrai.

Dans la plupart des cas, les interactions entre points matériels sont décrites par des forces d'interaction qui sont des vecteurs, c'est à dire que ces forces ont une intensité (la norme du vecteur force) et sont directionnelles. Il se peut également qu'un point matériel subisse plusieurs forces d'interaction de la part de plusieurs points matériels, on définira alors la résultante des forces comme la somme de chacune de ces forces d'interaction.

On peut rappeler que l'intensité d'une force s'exprime en Newtons avec $1\ N=1\ kg.m.s^{-2}$

Dans la nature, il existe 4 types de forces d'interaction fondamentales qui sont à la base de la physique telle que nous la connaissons aujourd'hui.

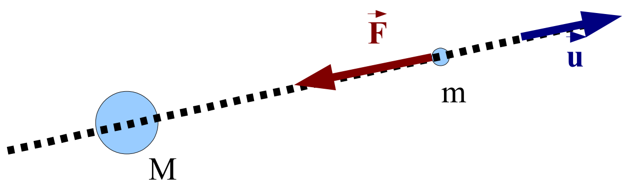
1) La force de gravitation :

Cette force est à l'origine de l'interaction entre les corps célestes et permet d'expliquer le poids d'un corps.

Si on considère deux masses M et m séparés par une distance r, la force d'interaction (force de Newton) entre ces deux masses est :

$$\vec{F}_{gravitation}=-G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la direction reliant les deux masses et orienté selon le dessin ci-dessous. Cette force est attractive (attraction universelle) entre les deux masses et est toujours dirigé d'une masse vers l'autre.



G est la constante de gravitation et vaut : $G=6{,}672.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$.

On peut écrire, $\vec{F}_{gravitation}=m\vec{g}$ où $\vec{g}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}$. Si r est le rayon de la Terre et M, la masse de la Terre, la norme de ce vecteur est le champ de gravitation à la surface de la Terre et vaut $g_0\cong9{,}81\ m.s^{-2}$.

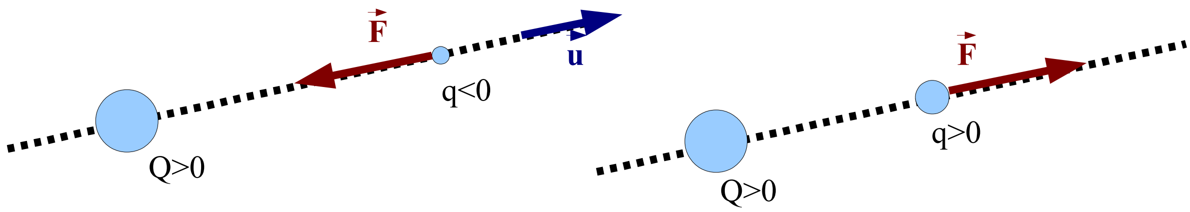
2) La force électromagnétique :

Cette force est à l'origine de l'interaction entre particules électriques chargées. Elle a parfois des conséquences imprévues comme le fait d'expliquer l'origine de la force de rappel d'un ressort. En effet, un ressort est constitué par un métal. Lorsque ce métal se déforme, les atomes se rapprochent plus ou moins. Les forces répulsives entre particules de charges électrostatiques de même signe se repoussent, le ressort a tendance à reprendre sa position de départ.

Pour deux particules de charges respectives Q et q, situées à une distance r l'une de l'autre, la force d'interaction (force de Coulomb) entre ces deux charges s'écrit :

$$\vec{F}_{électromagnétique}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la direction reliant les deux charges et orienté selon le dessin ci-dessous. $\epsilon_0=8{,}854188\ 10^{-12}F.m^{-1}$ est la permittivité diélectrique du vide. Pour retenir cette valeur, il est courant de se souvenir que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}=9\ 10^9 F^{-1}.m$. Cette force est attractive entre les deux charges si les deux charges sont de signes opposées, répulsive sinon.



On peut remarquer que le rapport entre la force de gravitation et la force électromagnétique est indépendante de la distance entre les deux particules, seuls interviennent les masses et charges respectives des objets. En considérant que la particule de masse M porte une charge Q et la particule de masse m, une charge q, le rapport entre ces deux forces est : $\frac{F_e}{F_g}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 G}\frac{Qq}{Mm}$. A l'échelle atomique, pour des masses de protons ou électrons, l'interaction gravitationnelle est plus faible que la force électromagnétique d'un facteur de l'ordre de 10^{-40} . A l'opposé, lorsqu'on considère les planètes ou les étoiles, celles-ci sont globalement neutres électriquement et la force de gravitation est dominante. A une échelle un peu plus 'normale', pour des charges Q et q de $10^{-9}C$ [1] et des masses de l'ordre de 1 gramme, on a $\frac{F_e}{F_g}\sim 10^{21}\times\frac{10^{-18}}{10^{-6}}=10^9$, la force électromagnétique reste donc globalement dominante dans la nature. Même si la masse est de 1kg, le résultat ne sera guère modifié.

3) Les forces d'interaction forte et faible :

La force d'interaction forte est responsable de la cohésion des protons et des neutrons. Son intensité est 100 fois plus forte que l'interaction électromagnétique mais ne s'exerce qu'au plus à l'échelle de $10^{-15}m$. La force d'interaction faible se manifeste dans la désintégration β du neutrino. Sa portée est encore plus faible que l'interaction forte et son intensité est plus faible que l'interaction électromagnétique.

Ces deux forces n'interviennent qu'à l'échelle des noyaux atomiques où la mécanique quantique est nettement plus adaptée pour traiter la physique que la mécanique classique qui elle est adaptée à notre monde macroscopique. Une branche entière de la physique consiste à essayer d'unifier ces forces et de voir si elles ne sont pas en réalité des aspects physiques d'une même entité. A l'heure actuelle, on a ainsi réussi à unifier trois de ces forces, la force électromagnétique, la force d'interaction faible et la force d'interaction forte, seule la force de gravitation résiste à l'unification.

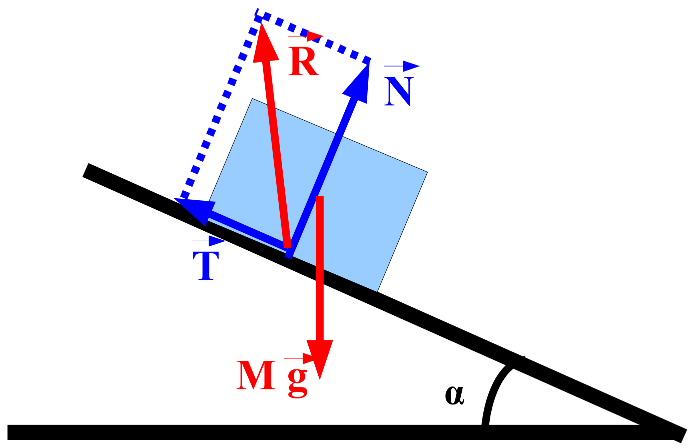
1 Cette charge est obtenue par exemple en chargeant un condensateur de 1nanoFarad sous une tension de 1Volt.

4) Forces de contact et de frottements :

Ces forces ne font pas partie des 4 forces fondamentales, elles sont essentiellement d'origine électromagnétique[1].

Si on considère un objet posé sur une table horizontale, c'est évidemment la force de gravitation qui fait que cet objet reste sur la table. Que se passe-t-il si on incline la table? Si l'angle d'inclinaison , α, est petit, l'objet ne va pas bouger. Si on incline la table plus nettement, à partir d'un certain angle, l'objet va glisser le long de la table et tomber. Pourquoi?

La même question se pose si la table horizontale, on essaie d'appliquer une force à l'objet pour le faire glisser sur la table. Par expérience, on sait que l'objet va glisser plus facilement si la table est bien cirée ou en formica que si c'est une table en bois rugueux.



On note $\vec{R}$ la réaction du support : elle se décompose en une composante tangentielle au support, notée $\vec{T}$ et une composante normale notée $\vec{N}$. C'est la composante tangentielle qui s'oppose au glissement de l'objet. Le problème du contact entre deux solides n'est pas encore bien compris mais on peut utiliser les lois empiriques de Amontons-Coulomb sur le frottement solide :

- Il n'y a pas de glissement si $\|\vec{T}\| \leqslant f \|\vec{N}\|$ où f est un coefficient sans dimension dit coefficient de frottement statique
- Si il y a glissement, alors $\|\vec{T}\| = f' \|\vec{N}\|$ où f' est le coefficient de frottement de glissement. Dans ce cas, $\vec{T}$ est un vecteur dirigé dans le sens opposé au vecteur vitesse $\vec{v}$. Ce vecteur $\vec{T}$ est souvent appelé *force de frottement solide*.

Remarque : il n'y a aucune raison pour que $f = f'$. En effet, ce ne sont pas les mêmes processus microscopiques qui jouent. Lorsque l'objet est immobile, les atomes en contact des deux matériaux sont en interaction électromagnétique et la somme de toutes les interactions (la résultante) conduit à la composante tangentielle de la force de frottement. Cependant, il faut bien voir que d'une part cette image est simpliste, que cette résultante est difficile à calculer d'autant plus qu'il ne faut pas croire que les surfaces sont planes à l'échelle atomique. Plus précisément, il existe

1 Cette notion de forces de frottements a déjà été étudié au S1 (cf polycopié de Brigitte Pansu). Ce paragraphe reprend schématiquement ce qui est dans son polycopié.

un certain nombre de points de contact entre l'objet et la table : tous les points de l'objet ne sont pas en contact avec la table. En ces points, la force de contact dépend de la composante normale, c'est à dire grosso-modo du poids de l'objet (pour le mobile à l'horizontale, c'est le poids, pour la table inclinée, c'est la composante normale à la table du poids qui va compter). Plus la composante normale est élevée et plus l'aire de contact entre les deux surfaces sera grande. Ceci explique alors pourquoi la composante tangentielle dépend de la composante normale. Pour en revenir à $f \neq f'$. lorsque le mobile se déplace, on comprend bien que la surface de contact est différente (plus petite) car il est quasi impossible que les aspérités de l'objet s'encastrent dans les 'trous' de la table (à l'échelle microscopique), ce qui est tout à fait possible lorsque l'objet est immobile. L'aire de contact étant plus faible, on a $f \geqslant f'$.

Il existe différents types de forces de frottements liées au mouvement dans un fluide :

- La force de frottement est proportionnelle à la vitesse, c'est le cas d'un frottement dans un fluide. On parle de *frottement fluide* : l'expression générale de l'expression de la force de frottement (plus communément notée $\vec{f}$) est $\vec{f} = -k\vec{v}$ où k est une constante positive. $k = 6\pi\eta R_e$ où η est la viscosité du fluide et R_e est le nombre de Reynolds[1].
- Toujours pour un frottement fluide, lorsque la viscosité du fluide est faible, l'intensité de la force de frottement peut être proportionnelle au carré de la vitesse, c'est le cas d'un frottement par l'air : $\vec{f} = -k'\|\vec{v}\|\vec{v}$ où k' est une constante positive[2].

V Lois de Newton dans un référentiel non galiléen :

1) Référentiels galiléens et non galiléens :

En première approximation, un référentiel avec comme origine un point à la surface de la Terre et ayant pour axes, trois directions fixes peut être considéré comme galiléen à une échelle de temps raisonnable.

Soit $(\mathfrak{R})$ un référentiel galiléen et $(\mathfrak{R}')$ un autre référentiel en mouvement par rapport à $(\mathfrak{R})$. $(\mathfrak{R}')$ est-il un référentiel galiléen?

- Si $(\mathfrak{R}')$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $(\mathfrak{R})$, alors l'accélération absolue est égale à l'accélération relative. Dans ce cas, Si M est un point matériel libre dans $(\mathfrak{R})$, c'est à dire que son accélération est nulle dans ce référentiel, alors son accélération est aussi nulle dans $(\mathfrak{R}')$. $(\mathfrak{R}')$ est donc un référentiel galiléen.

- Si $(\mathfrak{R}')$ n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à $(\mathfrak{R})$, mais est animé d'un mouvement de translation rectiligne mais pas uniforme ou bien est animé d'un mouvement de rotation par rapport à $(\mathfrak{R})$, alors les accélérations absolues et relatives ne sont pas égales. Donc si M est un point matériel libre dans $(\mathfrak{R})$, alors son accélération dans $(\mathfrak{R}')$ ne sera pas nulle. M ne peut pas alors être considéré comme un point matériel

1 Voir cours Phys101 pour ces notions.
2 Voir cours Phys101 pour l'expression de k'.

libre dans $(\Re')$. Le référentiel $(\Re')$ n'est pas un référentiel galiléen.

2) Lois de Newton dans les référentiels galiléens ou non galiléens :

Soit $(\Re)$ un référentiel galiléen et $(\Re')$ un autre référentiel en mouvement par rapport au référentiel $(\Re)$. Le principe fondamental de la dynamique s'applique dans $(\Re)$: $\vec{F}=m\vec{a}_{\Re}$ où $\vec{a}_{\Re}$ est l'accélération du point matériel dans le référentiel $(\Re)$ et $\vec{F}$ est la résultante des forces agissant sur le point matériel M.

a) Lois de Newton dans un référentiel galiléen :

On suppose ici que le référentiel $(\Re')$ est aussi un référentiel galiléen. On en déduit que le référentiel $(\Re')$ est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel $(\Re)$. Par conséquent, $\vec{a}_{\Re}=\vec{a}_{\Re'}$ ou bien en utilisant les notations du paragraphe précédent : $\vec{a}_a=\vec{a}_r$ c'est à dire que l'accélération absolue est égale à l'accélération relative.

On peut donc écrire dans le référentiel $(\Re')$: $\vec{F}=m\vec{a}_{\Re'}$.

b) Lois de Newton dans un référentiel non galiléen :

On suppose ici que le référentiel $(\Re')$ n'est pas un référentiel galiléen. Le principe fondamental de la dynamique ne peut donc être écrit que dans le référentiel $(\Re)$ où la loi de composition des accélérations s'écrit :

$$\vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_c$$

qui donne l'accélération absolue en fonction des accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis.

On peut aussi écrire : $\vec{a}_{\Re}=\vec{a}_{\Re'}+\vec{a}_{\Re'/\Re}+\vec{a}_c$ en utilisant des notations plus intuitives, $\vec{a}_{\Re'/\Re}$ représente évidemment l'accélération d'entraînement.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc dans $(\Re)$:

$$m\vec{a}_{\Re}=m\vec{a}_{\Re'}+m\vec{a}_{\Re'/\Re}+m\vec{a}_c=\vec{F}$$

ou bien $$\boxed{m\vec{a}_{\Re'}=\vec{F}'=\vec{F}+\vec{f}_e+\vec{f}_c}$$

où $\vec{f}_e=-m\vec{a}_e=-m\vec{a}_{\Re'/\Re}$ est la force d'entraînement (ou force d'inertie) et $\vec{f}_c=-m\vec{a}_c$ est la force de Coriolis (ou force complémentaire). Ces deux forces sont souvent dites «pseudo-forces » car elles ne sont pas réelles au sens où le terme force est réservé à la situation où il y a interaction entre le point matériel considéré et un autre point matériel. Les termes $\vec{f}_e$ et $\vec{f}_c$ ne rentrent absolument pas dans cette catégorie d'où le terme de pseudo-force. Cependant, la conséquence de ces pseudo-forces est bien réelle...

Chapitre IV : Travail, Energie

I Travail d'une force :

1) Introduction :

Le travail d'une force mesure l'effort à faire pour déplacer un objet le long d'un trajet qui peut-être horizontal ou pas, rectiligne ou pas. Un travail peut être positif auquel cas, on parlera de travail moteur, car un moteur peut très bien effectuer cet effort de déplacement. A l'opposé, un travail peut être négatif, on parle de travail résistant car il s'oppose au déplacement, c'est le cas des forces de frottements.

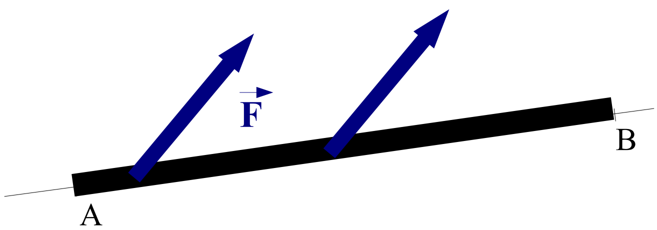
Intuitivement, plus la distance à parcourir est longue, plus le travail sera grand et plus l'objet est imposant et plus le travail à fournir pour le déplacer sera grand. Par contre, si on se place sur une patinoire debout, les seules forces qui s'exercent sur nous sont notre propre poids et la réaction du sol de la patinoire. En principe, il n'y a pas de forces de frottements solides ou très peu, c'est pour cela qu'on tombe si facilement... Il est alors très facile à une autre personne de nous donner une petite impulsion d'énergie qui va nous permettre de nous déplacer sur de longues distances. Les deux forces qui agissent sur nous sont toutes les deux orthogonales à la trajectoire et ne travaillent pas. Si maintenant, la même expérience est renouvelée sur un sol 'normal', il sera beaucoup plus difficile de nous faire bouger 'à l'insu de notre plein gré' à cause des frottements solides qui seront importants. Dans ce cas là, si une autre personne veut nous faire bouger d'un point A à un point B sans qu'on lève le doigt de pied, elle devra fournir beaucoup d'énergie pour s'opposer aux frottements solides. Par rapport au cas précédent, il n'y a qu'une seule force supplémentaire, la force de frottement solide qui est parallèle à la trajectoire et va 'très bien' travailler.

2) Travail d'une force $\vec{F}$ constante sur un parcours rectiligne :

C'est le cas le plus simple et le plus connu. Si $\vec{F}$ est la force qui nous occupe et qu'on se déplace de manière rectiligne de A à B, le travail de la force $\vec{F}$ sur le chemin rectiligne AB est :

$$W_{A\to B}=\vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

On retrouve que si la force $\vec{F}$ est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{AB}$, alors le travail de cette force est nulle.



3) Travail d'une force non constante :

La formule du paragraphe précédent est simple mais ne s'applique que dans quelques cas particuliers tel que par exemple, un skieur en descente : le poids est constant et on suppose la pente elle-aussi constante, pour les frottements aussi, l'intensité des frottements est constante tant que la pente de la descente reste inchangée. Par contre, si on s'intéresse à un saut en parachute, le chemin reste rectiligne (en première approximation) mais les frottements de l'air dépendent de la vitesse du parachutiste, donc la formule du paragraphe précédent ne permet pas de calculer le travail de cette force de frottement.

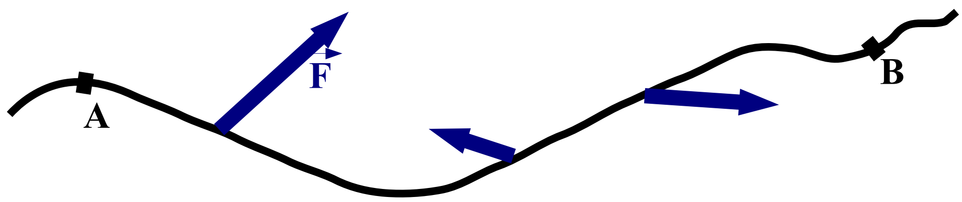
Dans cette situation, on commence par définir le travail élémentaire, *dW*, de la force $\vec{F}$ lorsque le point matériel soumis à la force $\vec{F}$ se déplace de M en M' pendant un instant *dt*. Pour *dt* petit, la force peut être considérée comme constante et la trajectoire peut être assimilée à sa tangente. D'autre part, on sait que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire donc $\overrightarrow{MM'}=\vec{v}\,dt=d\,\overrightarrow{OM}$ et on définit :

$$\boxed{\delta W=\vec{F}.\overrightarrow{dOM}}$$

Le travail total de la force $\vec{F}$ le long du trajet AB (non nécessairement rectiligne) est :

$$\boxed{W_{A\rightarrow B}=\int_{AB}\delta W=\int_{AB}\vec{F}.\overrightarrow{dOM}}$$

Le AB en bas de l'intégrale indique que l'intégration s'effectue du point A au point B en suivant la courbe (dans l'espace) parcourue par le point M (intégrale curviligne). *L'expression* $C_{AB}=\int_{AB}\vec{F}.\overrightarrow{dOM}$ *est appelée circulation du vecteur force* $\vec{F}$.



Si la force $\vec{F}$ est constante, on retrouve pour le travail, l'expression du paragraphe précédent : $W_{A\rightarrow B}=\vec{F}.\overrightarrow{AB}$.

Si la force est toujours perpendiculaire au déplacement (tension d'un fil, réaction normale au support), le travail de cette force est nul.

On parle de travail moteur si pour une force $\vec{F}$, $W_{A\rightarrow B}=\int_{AB}\vec{F}.\overrightarrow{dOM}>0$. A l'opposé, on parle de travail résistant, si $W_{A\rightarrow B}=\int_{AB}\vec{F}.\overrightarrow{dOM}<0$. Ainsi, les forces de frottements exercent un travail résistant.

Méthodologie : Comment appliquer la formule précédente, c'est à dire calculer un travail (une circulation) sans se tromper.

- La première chose à faire est de se donner l'expression de la force $\vec{F}$ dans le système de coordonnées le plus adéquat.
  - En coordonnées cartésiennes, on notera ainsi : $\vec{F}=F_x\vec{u}_x+F_y\vec{u}_y+F_z\vec{u}_z$ .avec chacune des composantes qui dépend de x, y et z.
  - En coordonnées cylindriques, $\vec{F}=F_\rho\vec{u}_\rho+F_\theta\vec{u}_\theta+F_z\vec{u}_z$, chacune des composantes dépend des variables ρ, θ et z.
  - En coordonnées sphériques, $\vec{F}=F_\rho\vec{u}_\rho+F_\varphi\vec{u}_\varphi+F_\theta\vec{u}_\theta$, chacune des composantes dépend des variables ρ, φ, θ.
  - En coordonnées intrinsèques, il faut décomposer la force suivant les vecteurs tangent et normal : $\vec{F}=F_t\vec{u}_t+F_n\vec{u}_n$.
- Il faut maintenant calculer le petit élément $d\overrightarrow{OM}=\vec{v}\,dt$. Nous avons déterminé, au chapitre cinématique, l'expression des vecteurs vitesses dans chacun de ces systèmes de coordonnées,
  - En coordonnées cartésiennes, $\vec{v}=\frac{dx}{dt}\vec{u}_x+\frac{dy}{dt}\vec{u}_y+\frac{dz}{dt}\vec{u}_z$ donc $d\overrightarrow{OM}=dx\,\vec{u}_x+dy\,\vec{u}_y+dz\,\vec{u}_z$
  - En coordonnées cylindriques, $\vec{v}=\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho+\rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta+\frac{dz}{dt}\vec{u}_z$ et donc $d\overrightarrow{OM}=d\rho\,\vec{u}_\rho+\rho\,d\theta\,\vec{u}_\theta+dz\,\vec{u}_z$.
  - En coordonnées sphériques, l'expression est beaucoup plus complexe, nous nous contenterons du premier terme qui est le cas pratique rencontré dans ce cours : $\vec{v}=\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho+...$ et donc $d\overrightarrow{OM}=d\rho\,\vec{u}_\rho+...$
  - En coordonnées intrinsèques, $\vec{v}=\frac{ds}{dt}\vec{u}_t$ donc $d\overrightarrow{OM}=ds\,\vec{u}_t$
- Il est donc maintenant possible de donner l'expression du travail élémentaire *dW*. On obtient alors :
  - En coordonnées cartésiennes, $\delta W=F_x dx+F_y dy+F_z dz$
  - En coordonnées cylindriques, $\delta W=F_\rho d\rho+F_\theta\rho\,d\theta+F_z dz$
  - En coordonnées sphériques, $\delta W=F_\rho d\rho+...$
  - En coordonnées intrinsèques, $\delta W=F_t ds=(\vec{F}.\vec{u}_t)ds$
- Toute la difficulté est de calculer l'intégrale car il faut connaître l'équation (les équations) qui décrivent le chemin de A à B emprunté par le point matériel. Dans les expressions de δW, on voit apparaître à priori trois intégrales à calculer. Cependant, en parcourant le chemin AB, les variations de x, de y et de z, ne sont pas indépendantes. Pour mieux comprendre, nous allons prendre un exemple. Pour simplifier, le point A sera pris comme étant à l'origine des coordonnées : A= O.

- Exemple 1 : On considère que la force est le poids dirigé selon Oz : $\vec{F}=-mg\vec{u}_z$. Et on considère que B(1,1,1) et qu'on se déplace de A à B en ligne droite. Dans le cas qui nous concerne, cela n'a pas beaucoup d'importance puisque $F_x=F_y=0$ et donc $\delta W=F_z dz=-mg\,dz$ .En allant de A à B, z varie de 0 à 1 donc $W_{AB}=\int_0^1 -mg\,dz=-mg$. Dans ce cas particulier, nous verrons plus loin que quelque soit la manière d'aller de A à B, le résultat sera le même.

Difficile

- Exemple 2 : On considère que la force s'écrit $\vec{F}=-k\,x\vec{u}_x-k\,y\vec{u}_y$. On choisit B(1,0,1). On a $\delta W=-k\,x\,dx-ky\,dy$. On considère tout d'abord que nous allons de A à B en ligne droite. L'équation de cette droite est donnée par les deux équations : $y=0\;;z=x$ d'où on déduit que sur le chemin AB, on a $dy=0$ et $dz=dx$. Par conséquent, $\delta W=-kx\,dx-k\times 0\;dy=-kx\,dx$ et donc $C_{AB}=\int_0^1 -kx\,dx=-\frac{k}{2}$. Si maintenant, on va de A à B en se déplaçant sur la sphère qui passe par A et B tout en restant dans le plan y=0. L'équation de la sphère est $(x-\frac{1}{2})^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$. On obtient alors $\delta W=-k\,x\,dx-k\times 0\;dy=-kx\,dx$. On peut alors en déduire $C_{AB}=\int_0^1 -k\,x\,dx=-\frac{k}{2}$. On obtient le même résultat que précédemment .

difficile

- Exemple 3 : On considère que la force s'écrit $\vec{F}=-k\,y\vec{u}_x-k\,z\vec{u}_z$. On choisit encore B(1,0,1). On a $\delta W=-k\,y\,dx-kz\,dz$. On considère tout d'abord que nous allons de A à B en ligne droite. L'équation de cette droite est donnée par les deux équations : $y=0\;;z=x$ d'où on déduit que sur le chemin AB, on a $dy=0$ et $dz=dx$. Par conséquent, $\delta W=-ky\,dx-kz\,dz=-kz\,dz$ et donc $C_{AB}=\int_0^1 -kz\,dz=-\frac{k}{2}$. Si maintenant, on va de A à B en se déplaçant sur la sphère qui passe par A et B d'équation $(x-\frac{1}{2})^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$,tout en restant dans le plan x=z. On en déduit que $dz=dx$, $\delta W=-k\,y\,dx-kz\,dz=-k(y+z)dz$. Il faut maintenant se débarrasser de y . L'intersection du plan x=z et de la sphère est une ellipse d'équation $y^2=\frac{1}{2}-2(z-\frac{1}{2})^2=2z(1-z)$. Donc $\delta W=-k(z+\sqrt{2z(1-z)})dz$ qu'il faut maintenant intégrer de 0 à 1! Donc $C_{AB}=\int_0^1 -k(z+\sqrt{2z(1-z)})dz=-\frac{k}{2}+\int_0^1 -k\sqrt{2z(1-z)}dz$. Sans calcul, le dernier terme n'est pas nul, on remarque que l'intégrale ne peut pas être égale à celle calculée pour le chemin précédent. Dans ce cas précis, on remarque alors que la circulation de la force $\vec{F}$ dépend du chemin suivi.

4) Puissance :

La puissance moyenne de la force $\vec{F}$ sur le trajet de A vers B (pas nécessairement rectiligne) est : $\boxed{\overline{P}_{AB}=\dfrac{W_{AB}}{t_B-t_A}}$ où $t_{A,B}$ représente les instants où se trouve le mobile au point A ou B respectivement.

La puissance instantanée est définie par $\boxed{P=\dfrac{\delta W}{dt}=\vec{F}.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\vec{F}.\vec{v}}$.

La puissance s'exprime en Watt dans le système international.

II Théorème de l'énergie cinétique :

1) Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen :

On considère un point matériel de masse m décrivant un arc de courbe AB dans un référentiel galiléen. Ce mobile est soumis à un ensemble de forces dont la résultante est $\vec{F}$. Le théorème de l'énergie cinétique s'énonce de la manière suivante :

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à une force $\vec{F}$, entre un point A et un point B de la trajectoire, est égal au travail de la force $\vec{F}$ sur l'arc de trajectoire AB :

$$E_c(B)-E_c(A)=W_{A\rightarrow B}(\vec{F})$$

où $E_c=\dfrac{1}{2}m v^2$ est l'énergie cinétique du point matériel.

La démonstration de ce théorème de l'énergie cinétique a été effectuée au module Phys101, donc nous ne reviendrons pas dessus. Pour cela, dans l'expression du travail, on remplace la force $\vec{F}$ par $m\vec{a}$ et on calcule l'intégrale.

2) Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen :

Si le référentiel n'est pas galiléen, on peut également appliquer le théorème de l'énergie cinétique. Cependant, il faut rajouter au travail de la résultante des forces, le travail des forces d'inertie :

$$\boxed{E_c(B)-E_c(A)=W_{A\rightarrow B}(\vec{F})+W_{A\rightarrow B}(\vec{F}_{inertie})}$$

III Energie potentielle, énergie mécanique :

1) Force à circulation conservative :

Une force $\vec{F}$ est une *force à circulation conservative* si elle ne dépend que de la position et si le travail de cette force entre deux points quelconques A et B ne dépend que des points A et B et non du chemin suivi entre A et B.

Méthodologie : Comment savoir si une force est à circulation conservative ? On considérera ici que la force $\vec{F}$ s'exprime en coordonnées cartésiennes : $\vec{F}=F_x\vec{u}_x+F_y\vec{u}_y+F_z\vec{u}_z$ où chacune des composantes F_x , F_y et F_z dépendent des coordonnées x, y et z.

- Tout d'abord, si la force $\vec{F}$ dépend de la vitesse, alors cette force ne peut être à circulation conservative (c'est le cas des forces de frottements par exemple ou de la force magnétique exercée par un champ magnétique sur une particule de charge q et animée d'une vitesse $\vec{v}$: $\vec{F}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$).
- Si la force ne dépend donc que de la position de M et non de la vitesse, on recherche si les relations suivantes sont vérifiées : $\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}$ ainsi que les relations équivalentes $\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial z}$ et $\frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z}$ (on les appelle formules des dérivées croisées). Si ces relations sont vérifiées, alors la force $\vec{F}$ est à circulation conservative. La réciproque est d'ailleurs vérifiée : si $\vec{F}$ est une force à circulation conservative, alors les dérivées croisées sont égales
- Toujours dans le cas où la force ne dépend que de la position M, si on peut trouver une fonction V telle que $\frac{\partial V}{\partial x}=-F_x,\frac{\partial V}{\partial y}=-F_y,\frac{\partial V}{\partial z}=-F_z$, alors la force $\vec{F}$ est à circulation conservative. Comme nous allons le voir ci-dessous, la réciproque est vraie.

2) Energie potentielle :

Une force $\vec{F}$, fonction du point M, dérive d'une énergie potentielle, E_p , si on peut écrire $\vec{F}=-\overrightarrow{grad}\,E_p$ avec $\overrightarrow{grad}\,E_p=(\frac{\partial E_p}{\partial x},\frac{\partial E_p}{\partial y},\frac{\partial E_p}{\partial z})$ en coordonnées cartésiennes.

- En coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{grad}\,E_p=\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{u}_z$.
- En coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{grad}\,E_p=\frac{\partial E_p}{\partial \rho}\vec{u}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\vec{u}_\theta+\frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{u}_z$.

- En coordonnées sphériques, $\overrightarrow{grad}\,E_p=\frac{\partial E_p}{\partial\rho}\vec{u}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_p}{\partial\theta}\vec{u}_\theta+\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial E_p}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction E_p existe est que la force $\vec{F}$ soit à circulation conservative. Dans ce cas, le travail de cette force entre les points A et B est :

$$W_{A\to B}=-\int_{AB}\overrightarrow{grad}\,E_p.d\,\overrightarrow{OM}=-\int_{AB}\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}dx+\frac{\partial E_p}{\partial y}dy+\frac{\partial E_p}{\partial z}dz\right)=E_p(A)-E_p(B)$$

Ceci veut dire que le travail de la force $\vec{F}$ entre les points A et B est égale à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle entre ces deux points. Ceci simplifie énormément le calcul de l'intégrale et permet de calculer facilement le travail d'une force.

Remarque très importante : l'énergie potentielle est définie à une constante près. Cette constante d'intégration est en général choisie telle que l'énergie potentielle soit nulle pour x, y et z tendant à l'infini ou au contraire nulle à l'origine du système de coordonnées.

Méthodologie : Comment trouver l'énergie potentielle E_p connaissant $\vec{F}=F_x\vec{u}_x+F_y\vec{u}_y+F_z\vec{u}_z$? Pour simplifier, on se placera de nouveau dans le cas des coordonnées cartésiennes où chacune des composantes F_x , F_y et F_z dépendent des coordonnées x, y et z.

- Sachant que $F_x(x,y,z)=-\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial x}$, on en déduit par intégration que $E_p(x,y,z)=-\int F_x(x,y,z)dx+g(y,z)$ où g est une fonction qui ne dépend que de y et z. En effet, si on dérive cette expression par rapport à x, on retrouve bien $-F_x$. On dérive ensuite cette première expression de $E_p(x,y,z)$ par rapport à y. Cette dérivée doit être égale à $-F_y$:
$\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial y}=-\int\frac{\partial F_x(s,y,z)}{\partial y}dx+\frac{\partial g(y,z)}{\partial y}=-F_y(x,y,z)$ d'où on déduit $\frac{\partial g(y,z)}{\partial y}$ et donc $g(y,z)=\int\frac{\partial g(y,z)}{\partial y}dy+h(z)$. En utilisant la composante de la force selon z, F_z on en déduit l'expression de h(z) de la même manière.

- Exemple 1 : on reprend l'exemple 1 du II : $\vec{F}=-mg\vec{u}_z$. On reconnaît l'expression du poids. Cette force est dirigée selon z : $F_x=F_y=0$ et $F_z=-mg=C^{ste}$ on a donc immédiatement en intégrant selon z : $E_p(z)=mgz+C^{te}$

- Exemple 2 : on reprend l'exemple 2 du II : $\vec{F}=-kx\vec{u}_x-ky\vec{u}_y$. On peut déjà vérifier que $\vec{F}$ est une force à circulation conservative. En effet, $\frac{\partial F_x}{\partial y}=0=\frac{\partial F_y}{\partial x}$. De $-\frac{\partial E_p}{\partial x}=-kx$, on déduit $E_p(x)=\frac{1}{2}kx^2+g(y)$ et donc $-\frac{\partial E_p}{\partial y}=-g'(y)=-ky$. La fonction g(y) vaut donc $g(y)=\frac{1}{2}ky^2+C^{te}$. Finalement, $E_p(x)=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}ky^2+C^{te}$. Ce type d'énergie potentielle pourra se rencontrer (en faisant une approximation) dans un système d'une masse accrochée par 2 ressorts, un selon x et l'autre selon y.

- Exemple 3 : on reprend l'exemple 3 du II : $\vec{F}=-k\,y\,\vec{u}_x-k\,z\,\vec{u}_z$. Nous avions déjà remarquer que la circulation entre A et B dépendait du chemin suivi. Ceci se vérifie par le fait que les dérivées croisées ne sont pas égales. En effet, $\frac{\partial F_x}{\partial y}=-k\neq\frac{\partial F_y}{\partial x}=0$. Donc la force $\vec{F}$ ne dérive pas d'une énergie potentielle.
- Exemple 4 : on choisit comme force, la force d'interaction gravitationnelle, $\vec{F}_{gravitation}=-G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$ Cette force est radiale, c'est à dire dirigée vers un point fixe O. Le système de coordonnées le plus adapté est donc le système de coordonnées sphériques. De $-\frac{\partial E_p}{\partial r}=-G\frac{Mm}{r^2}$, on déduit $E_p=-G\frac{Mm}{r}+C^{te}$. Un calcul très voisin s'effectue pour la force d'interaction électromagnétique et on trouve de nouveau une énergie potentielle qui varie en $1/r$.

3) Energie mécanique totale :

- On considère tout d'abord un système mécanique soumis uniquement à des forces à circulation conservative ou bien à des forces qui ne travaillent pas. Les forces à circulation conservative dérivent toutes d'une énergie potentielle. On note E_p , l'énergie potentielle totale.

Le terme $\boxed{E_m=E_c+E_p}$ est l'énergie mécanique totale.

En supposant qu'on se place dans un référentiel galiléen, en appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre deux points A et B, sachant qu'on a affaire uniquement à des forces à circulation conservative de résultante $\vec{F}$ ou des forces qui ne travaillent pas de résultante $\vec{R}$, alors $W_{A\rightarrow B}(\vec{F}+\vec{R})=W_{A\rightarrow B}(\vec{F})=E_c(B)-E_c(A)$. Sachant que $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle, $W_{A\rightarrow B}(\vec{F})=E_p(A)-E_p(B)$ et donc $E_m(A)=E_m(B)$.

Ainsi, dans un référentiel galiléen, si un système est soumis uniquement à des forces à circulation conservative ou bien à des forces ne travaillant pas, l'énergie mécanique totale est conservée. L'équation obtenue $E_c+E_p=C^{te}=E$ est appelée *intégrale première du mouvement*.

A quoi sert cette intégrale première du mouvement sachant qu'on avait déjà la relation fondamentale de la dynamique comme équation pour résoudre un problème de mécanique? Il est souvent plus facile d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique et de déterminer une énergie potentielle que de résoudre la relation fondamentale de la dynamique car cette dernière va faire intervenir directement les détails du chemin parcouru qui peut parfois être complexe à décrire (par exemple une piste de ski du genre noire est tout aussi difficile à descendre à ski que de la modéliser par des équations x(t), y(t)...alors que le travail du poids lors de la descente sera simplement donné par la différence d'altitude entre le haut et le bas de la piste!).

Cette intégrale première du mouvement est donc plus pratique et permet d'obtenir l'équation du mouvement. Ainsi, dans un problème de mécanique, au lieu d'écrire $E_m = E_c + E_p = C^{te} = E_0$, on écrira plutôt que la dérivée de l'énergie mécanique est nulle (la dérivée d'une constante est nulle) : $\frac{dE_m}{dt} = 0$, ceci nous donnera une équation différentielle du mouvement qui permettra d'obtenir tout aussi simplement les équations horaires du mouvement. Que la 'traditionnelle' relation fondamentale de la dynamique.

- Toujours dans un référentiel galiléen, on considère maintenant que le système est soumis à des forces à circulation conservative de résultante $\vec{F}_c$ et à des forces à circulation non conservatives de résultante $\vec{F}_{nc}$ et des forces qui ne travaillent pas de résultante $\vec{R}$.
  $E_c(B) - E_c(A) = W_{A \to B}(\vec{F}_c + \vec{F}_{nc} + \vec{R}) = W_{A \to B}(\vec{F}_c + \vec{F}_{nc}) = E_p(A) - E_p(B) + W_{A \to B}(\vec{F}_{nc})$.
  On en déduit alors $E_c(B) + E_p(B) = E_c(A) + E_p(A) + W_{A \to B}(\vec{F}_{nc})$. Pour des forces de frottements, leur travail est négatif et donc l'énergie mécanique totale diminue au cours du temps. Mais où passe alors l'énergie qui a « disparue »? Cette énergie s'est transformée en chaleur, ceci fait l'objet d'un autre cours, de thermodynamique notamment...

4) Evolution de l'énergie mécanique dans un référentiel non galiléen :

Ici encore, pour déterminer l'évolution de l'énergie mécanique dans un référentiel non galiléen, il faut rajouter aux forces, les forces d'inertie. On peut ainsi décomposer les forces totales comme la somme des forces à circulation conservative de résultante $\vec{F}_c$, des forces à circulation non conservatives de résultante $\vec{F}_{nc}$ et des forces qui ne travaillent pas de résultante $\vec{R}$. Enfin, on note $\vec{F}_{inertie}$ la résultante des forces d'inertie ('entraînement' et 'Coriolis'). On obtient alors,

$$\boxed{E_m(B) = E_m(A) + W_{A \to B}(\vec{F}_{nc}) + W_{A \to B}(\vec{F}_{inertie})} .$$

IV Equilibre d'un système mécanique :

1) Equilibre d'un système mécanique :

Un système mécanique est à l'équilibre dans un référentiel $(\Re)$ si sa vitesse est nulle dans ce référentiel.

Si la vitesse du système est nulle, l'accélération est également nulle et donc pour un référentiel galiléen, $\sum \vec{F} = 0$.

2) Stabilité d'un équilibre :

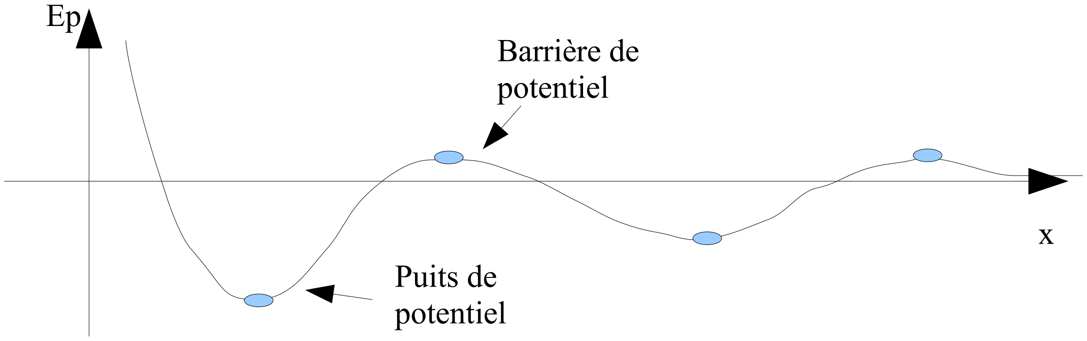
Par définition, un *équilibre est stable* si la résultante des forces auxquelles il est soumis lorsqu'il est écarté légèrement de cette position d'équilibre, tend à le ramener vers sa position d'équilibre. Si au contraire, la résultante des forces tend à l'éloigner de cette position d'équilibre, l'équilibre est instable. Si quand on l'écarte de sa position d'équilibre, la résultante des forces reste nulle, on parle d'équilibre indifférent.

3) Equilibre d'un point soumis à des forces à circulation conservative :

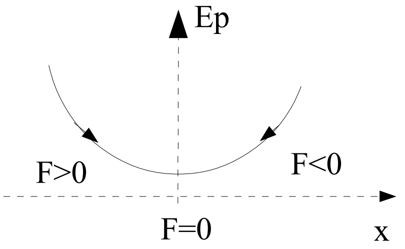
a) Cas unidimensionnel :

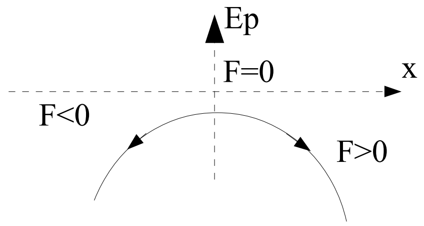
On considère que la résultante des forces, $\vec{F}$ ne dépend que d'une seule variable x que cette variable x représente la coordonnée x en cartésiennes ou bien $x=\|\vec{r}\|$ la norme du rayon vecteur, $\vec{r}$ en coordonnées sphériques.

On suppose que le système est à l'équilibre pour $x=x_0$. En x_0 , $\vec{F}=\vec{0}$ et donc $\frac{dE_p}{dx}=0$ en ce point $x=x_0$, cela veut dire que x_0 est un extremum de l'énergie potentielle. Le schéma ci-dessous représente les positions d'équilibre possibles du système (petites ellipses) qui correspondent donc aux extrema locaux de l'énergie potentielle.



Nous allons maintenant discuter la stabilité de cet équilibre. Pour cela, il nous faut donc étudier la valeur algébrique de la force : $F(x)=-\frac{dE_p}{dx}$.





La force $\vec{F}$ ramène le système à l'équilibre.

L'équilibre est stable, $\frac{d^2E_p}{dx^2}>0$.

La force $\vec{F}$ écarte le système de l'équilibre.

L'équilibre est instable, $\frac{d^2E_p}{dx^2}<0$.

On peut noter que les schémas ci-dessus sont cohérents avec la notion de stabilité qu'on expérimente dans la vie de tous les jours.

Enfin, connaissant la courbe de l'énergie potentielle, on peut facilement remonter à la fréquence des petites oscillations dans un puits de potentiel. Dans un tel puits, le point matériel est attiré par le fond du puits tout comme un point matériel de masse m accroché un ressort de raideur k oscille autour de sa position d'équilibre. Nous pouvons déterminer la constante 'effective' du ressort, k, de manière générale. En effet, au voisinage d'une position d'équilibre en $x=x_0$, on peut effectuer un développement de Taylor de l'énergie potentielle au voisinage de ce point : $E_p(x)=E_p(x_0)+(x-x_0)\frac{dE_p}{dx}(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0)$. Le terme $\frac{dE_p}{dx}(x_0)$ est évidemment nul. Si l'équilibre est stable, $k=\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0)>0$. Ainsi l'expression de l'énergie potentielle au voisinage du fond d'un puits de potentiel s'écrit $E_p(x)=E_p(x_0)+\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$. On peut alors en déduire l'expression de la force au voisinage de ce minimum de potentiel : $F=-\frac{dE_p}{dx}=-k(x-x_0)$ qui est la force de rappel du point matériel dans son puits de potentiel. On peut alors en déduire l'équation du mouvement du point matériel dans son puits de potentiel en appliquant la relation fondamentale de la dynamique : $m\ddot{x}+k(x-x_0)=0$ et donc la pulsation du mouvement du point matériel dans ce puits est $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

b) Cas bidimensionnel :

Le cas précédent peut se généraliser au cas d'un système bidimensionnel (voire tridimensionnel) mais les calculs deviennent plus complexes. Au voisinage du point $(x_{0,}y_0)$, $E_p(x,y)=E_p(x_{0,}y_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{\partial^2E_p}{\partial x^2}(x_{0,}y_0)+\frac{(y-y_0)^2}{2}\frac{\partial^2E_p}{\partial y^2}(x_{0,}y_0)$, les dérivées partielles au 1er ordre sont nulles : $\frac{\partial E_p}{\partial x}=\frac{\partial E_p}{\partial y}=0$, ou encore, $\boxed{\overrightarrow{grad}\,E_p=0}$. La condition de stabilité est que les deux dérivées secondes sont positives. L'énergie potentielle s'écrit alors de manière simplifiée sous la forme, $E_p(x,y)=E_p(x_{0,}y_0)+\frac{1}{2}k(x-x_0)^2+\frac{1}{2}k'(y-y_0)^2$ où $k=\frac{\partial^2E_p}{\partial x^2}(x_{0,}y_0)$ et $k'=\frac{\partial^2E_p}{\partial y^2}(x_{0,}y_0)$ sont positives.

Méthodologie : Comment savoir si un équilibre est stable?

- On connaît les coordonnées de la force $\vec{F}$ en tout point. L'équilibre correspond aux points où cette force s'annule. L'équilibre sera stable si au voisinage de l'équilibre, la force à tendance à ramener le point matériel vers sa position d'équilibre.
- On connaît la courbe de variation de E_p (sans connaître forcément l'expression de l'énergie potentielle). L'équilibre correspond aux extrema de cette énergie potentielle. L'équilibre sera stable aux minima de potentiel, instable aux maxima.
- On connaît l'expression de l'énergie potentielle E_p en fonction de la position. Les positions d'équilibre correspondent aux points où $\frac{dE_p}{dx}=0$ (cas 1D). L'équilibre sera stable si $\frac{d^2E_p}{dx^2}>0$ au voisinage du point d'équilibre, instable sinon.

Chapitre V: Moment cinétique

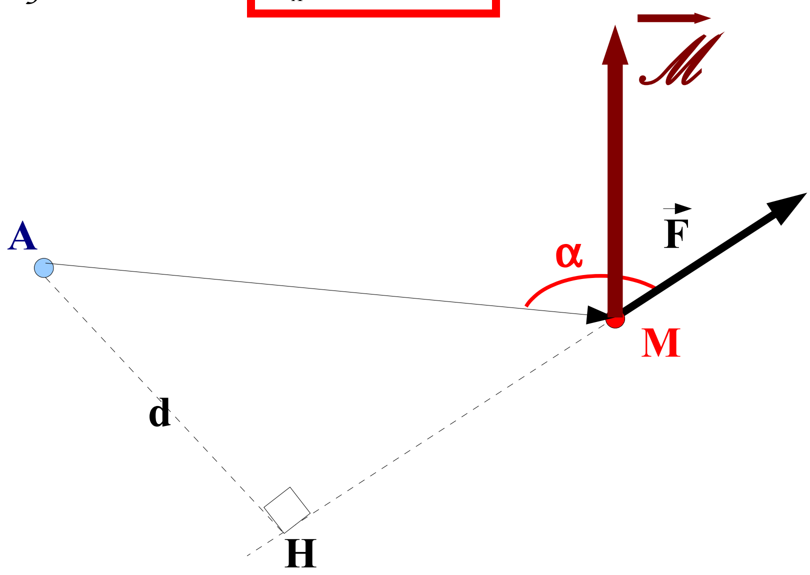
La Terre tourne sur elle-même en 24heures. Ceci paraît tellement évident qu'on ne se demande plus pourquoi. C'est parce qu'elle possède un moment cinétique! Et comme la durée du jour est la même tous les jours et ce pendant des périodes longues à notre échelle de vie humaine, on peut considérer que ce moment cinétique est constant on dit que le moment cinétique est conservé. En fait, la durée du jour n'est pas la même depuis le début de la formation de la Terre. Les jours sont beaucoup plus longs qu'à l'ère secondaire par exemple où la durée du jour approchait 23heures ou à l'ère primaire où la durée du jour ne dépassait guère 22heures. Pourquoi ? C'est que la Terre est freinée dans son mouvement de rotation par...les marées c'est à dire aussi par l'effet conjugué de la Lune et du Soleil.

Cette quantité qu'est le moment cinétique est une quantité très importante en physique et qui joue un rôle aussi important que la quantité de mouvement. Ainsi, en mécanique quantique, on montre que la projection du moment cinétique d'un électron sur l'axe Oz ne peut prendre que des valeurs multiples de $\hbar=\frac{h}{2\pi}$: $S_z=m\hbar$.

I Moment cinétique :

1) Moment d'une force :

On considère une force $\vec{F}$ agissant en un point M quelconque de l'espace. *Le moment de la force au point A* est : $\boxed{\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})=\overrightarrow{AM}\wedge\vec{F}}$.

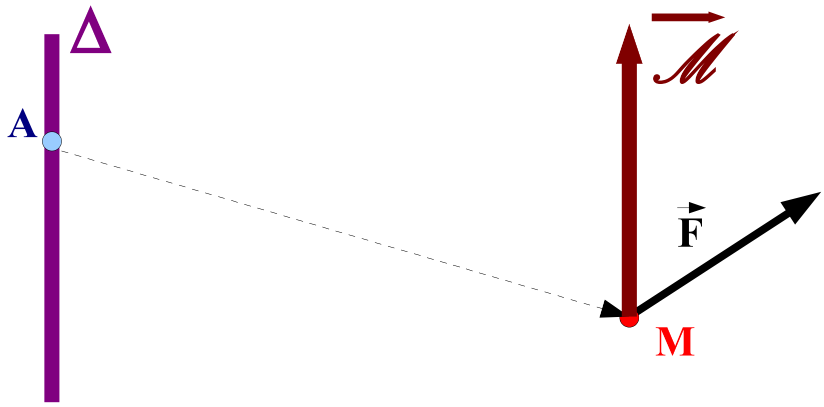


Remarques : Le moment d'une force est un vecteur!

La direction de ce vecteur moment est orthogonal à la fois à la force $\vec{F}$ et au vecteur $\overrightarrow{AM}$.

$\boxed{\|\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})\| = \|\overrightarrow{AM}\| \, \|\vec{F}\| \sin(\alpha)}$ ou encore $\boxed{\|\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})\| = \|\overrightarrow{AH}\| \, \|\vec{F}\| = Fd}$, la longueur d correspond au 'bras de levier'. C'est pour cette raison que pour déboulonner un boulon, on utilise des outils en général relativement long avec un grand bras de levier, cela permet de le démonter avec moins d'effort (une force plus faible).

On considère une force $\vec{F}$ agissant en un point M quelconque de l'espace. *Le moment de la force par rapport à l'axe Δ* est : $\boxed{\vec{\mathscr{M}}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}}$ où A est la projection de M sur l'axe Δ.



2) Moment cinétique :

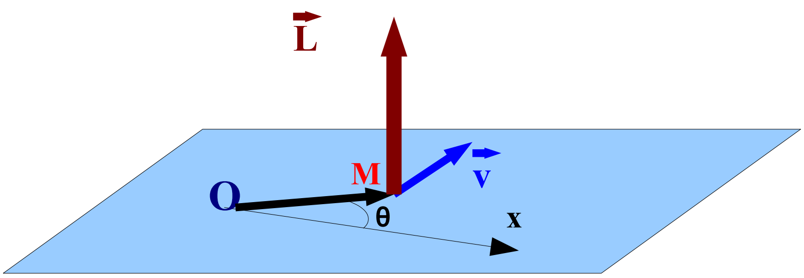
Le moment cinétique au point A d'un point matériel de masse m, animé d'une vitesse $\vec{v}$ est : $\boxed{\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}}$

Remarques : Cette définition est vraie quelque soit le référentiel, ceci indique que le moment cinétique dépend du référentiel choisi.

La valeur du moment cinétique dépend du point A aussi : $\vec{L}_{A'} = \vec{L}_A + \overrightarrow{A'A} \wedge m\vec{v}$.

3) Moment cinétique pour un mouvement plan :

Si la trajectoire du point matériel est contenu dans un plan (Π) et si A est dans ce plan, alors à tout instant, le moment cinétique est normal à ce plan. En particulier, si on choisit pour point A, le point O origine des coordonnées, l'utilisation des coordonnées polaires dans ce plan devient plus adéquate : $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho$ et $\vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ donc $\vec{L}_O = m \rho^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$



II Théorème du moment cinétique :

1) Théorème du moment cinétique :

On considère que le point A est fixe. On note $\vec{F}$ la résultante de toutes les forces appliquées sur un point matériel de masse m. Dans un référentiel galiléen, $\vec{F}=m\vec{a}$.

La dérivée du moment cinétique par rapport au temps est : $\frac{d\vec{L}_A}{dt}=\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\wedge m\vec{v}+\overrightarrow{AM}\wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}$. Sachant que le point A est fixe, c'est à dire qu'il ne se déplace pas dans le temps, $\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}-\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\vec{v}$. On en déduit alors $\frac{d\vec{L}_A}{dt}=\vec{v}\wedge m\vec{v}+\overrightarrow{AM}\wedge\vec{F}=\overrightarrow{AM}\wedge\vec{F}=\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})$ car le référentiel est galiléen. D'où on déduit le théorème du moment cinétique :

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un mobile ponctuel par rapport à un point fixe A, est égale au moment en A de la résultante des forces appliquées au mobile : $\frac{d\vec{L}_A}{dt}=\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})$

Si le référentiel n'est pas galiléen, le théorème du moment cinétique s'applique aussi à condition d'ajouter à la résultante des forces $\vec{F}$, les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

2) Conservation du moment cinétique :

Le moment cinétique est conservé (c'est à dire constant) si $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{0}$. Ceci se produit si :

-) $\vec{F}=\vec{0}$: c'est le cas d'un point matériel libre. Par conséquent, dans un référentiel galiléen, le moment cinétique en un point fixe A quelconque d'un point mobile ponctuel libre est une constante du mouvement.

-) ou bien $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})=\overrightarrow{AM}\wedge\vec{F}=\vec{0}$, cela veut dire que $Fd=0$ où d est le bras de levier, c'est à dire $d=0$. Le fait que $d=0$ à tout instant veut dire qu'à chaque instant, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires. Une telle force pour laquelle, il existe un point A tel que, à chaque instant, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires est dite *force centrale*.

3) Lois de conservation en mécanique :

Dans ce cours de mécanique, dans un référentiel galiléen, nous avons vu successivement trois relations fondamentales :

- (I) La relation fondamentale de la dynamique qui relie les forces d'interaction sur un point matériel à l'accélération qui permet d'obtenir une équation différentielle qui régie le mouvement.

- (II) L'intégrale première du mouvement définie par la conservation de l'énergie mécanique totale qui en la dérivant redonne l'équation différentielle du mouvement.
- (III) Le théorème du moment cinétique qui relie le moment cinétique en un point au moment des forces en ce point.

On obtient ainsi a priori trois relations. Les deux premières sont « équivalentes » au sens où la dérivée de (II) redonne (I)[1] mais la relation (II) donne plus d'information puisqu'on peut calculer la constante d'intégration qu'est l'énergie totale.

La donnée de ces trois relations va permettre de déterminer complètement les équations du mouvement.

Par exemple, dans un mouvement à une dimension, il suffit de déterminer x(t) : le problème a une seule inconnue donc une seule équation sera suffisante en utilisant une seule des relations précédentes. La « traditionnelle » relation fondamentale de la dynamique n'est pas forcément la méthode la plus simple à appliquer !

Pour un mouvement plan, il faudra déterminer les composantes x(t) et y(t) ou plus vraisemblablement les coordonnées polaires ρ(t) et θ(t). Ceci nécessite donc deux relations et dans ce cas, on utilisera (I) ou (II) et la relation (III).

Pour un mouvement dans l'espace, il est exceptionnel que le mouvement se déroule strictement à trois dimensions avec des grandeurs x(t), y(t) et z(t) totalement indépendantes[2]. En général, le mouvement a lieu sur une surface dont l'équation, certes éventuellement complexe, donne tout de même une relation entre les coordonnées x(t), y(t) et z(t) . Les relations (I) ou (II) et la relation (III) donneront les deux relations manquantes.

4) Exemples :

a) pendule simple :

On considère un point matériel de masse m relié à un point fixe O d'un référentiel galiléen par l'intermédiaire d'un fil tendu et de masse négligeable et de longueur ℓ. Le mouvement de ce pendule simple est supposé dans un plan vertical. La masse m est soumise à deux forces : le poids de la masse $\vec{P}=m\vec{g}$ et la tension du fil $\vec{T}$. Le mouvement de M étant plan, on a priori deux inconnues, ρ(t) et θ(t) qui sont les coordonnées polaires du point M en prenant comme origine le point O et comme axe polaire, l'axe vertical orienté vers le bas. Dans notre cas, il est évident que le fil étant tendu, on a nécessairement $\rho(t)=\ell$. Il reste donc une seule inconnue θ(t) qu'on peut obtenir en utilisant soit le relation fondamentale de la dynamique (une page de calcul!), la conservation de l'énergie mécanique totale (car par chance, la tension du fil ne travaille pas) ou bien la conservation du moment cinétique.

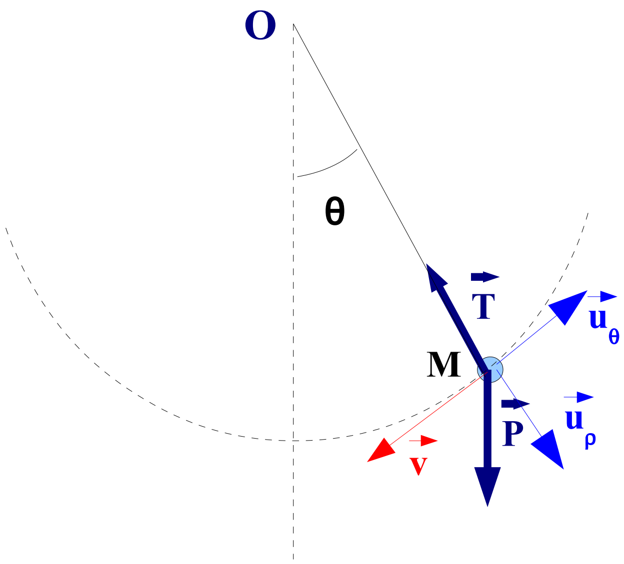
La vitesse $\vec{v}$ est constamment perpendiculaire au fil et vaut : $v=\ell\dot{\theta}$. Le moment cinétique de la masse par rapport à O est : $\vec{L}_O=m\rho^2\dot{\theta}\vec{u}_z$ où $\vec{u}_z$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan du mouvement et orienté vers l'avant. Le moment de la force $\vec{T}$ est nul, car, à chaque instant, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{T}$ sont colinéaires. Ainsi, la force $\vec{T}$ est donc une force centrale. Le moment du poids par rapport à O est : $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P})=\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{g}=-\ell mg\sin\theta\vec{u}_z$. En appliquant le théorème du moment cinétique, on en déduit l'équation du mouvement : $m\ell^2\ddot{\theta}=-\ell mg\sin\theta$, c'est à dire

1 Avec les mains, la dérivée de l'énergie potentielle donne la force et la dérivée de l'énergie cinétique va faire apparaître l'accélération. La démonstration pour une force centrale sera effectuée plus loin dans ce chapitre.

2 Evidemment, les coordonnées cylindriques ou sphériques seront éventuellement plus adaptées.

$$\ddot{\theta}+(g/B)\sin\theta=0$$

Pour θ petit, l'équation du mouvement se réduit à $\ddot{\theta}+(g/\ell)\theta=0$. Cette équation différentielle du mouvement est l'équation d'un oscillateur de pulsation $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$.



On peut aller plus loin en déterminant l'intensité de la force $\vec{T}$ qui est une force centrale. La relation (III) ne nous sera donc d'aucun secours. Ici, on ne peut pas échapper à la relation fondamentale de la dynamique car cette force ne travaille pas et donc son expression n'apparaîtra pas dans la relation (II). De $\vec{v}=\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, on déduit $\vec{a}=-\ell\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho+l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta=\frac{-v^2}{\ell}\vec{u}_\rho+l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$. En projetant la relation fondamentale de la dynamique sur la direction OM, on en déduit $-T+mg\cos\theta=-m\ell\dot{\theta}^2$, donc :

$$T=mg\cos\theta+m\frac{v^2}{\ell}$$

On remarque que cette force centrale dépend de la vitesse et elle ne peut donc pas dériver d'une énergie potentielle.

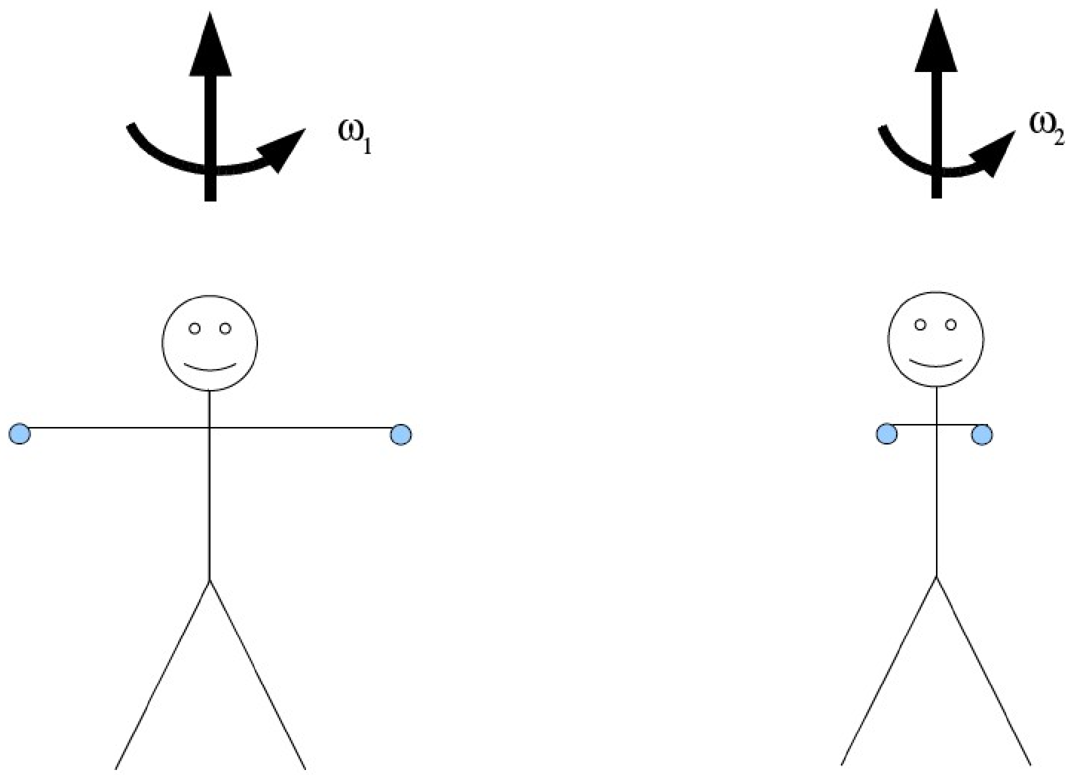
b) patineur :

On considère un patineur bras écartés qui tourne sur lui-même avec une vitesse angulaire ω_1 , on suppose que dans chaque main il porte un objet de masse m. Il ramène les bras contre son corps : a quelle vitesse tourne-t-il?

La relation (III) (théorème du moment cinétique) va nous permettre de répondre à cette question. L'ensemble des forces qui agissent sur les masses m sont leur poids et la réaction des bras pour les maintenir horizontaux. Ces deux forces se compensent pour que justement les bras restent horizontaux. Il reste la tension horizontale des bras qui pointe vers l'axe du corps autour duquel le patineur tourne, son moment par rapport au point O, intersection de l'axe de rotation et des bras est donc nul. Par conséquent, le moment de la résultante des forces par rapport à O est nul. On en déduit que le moment cinétique par rapport à O est conservé. Si on note l_1, la longueur initiale des bras et l_2, leur 'longueur' lorsque les bras sont repliés, alors,

$$L=ml^2\,\dot{\theta}=C^{te}=ml_1^2\,\omega_1=ml_2^2\,\omega_2\,.$$

On en déduit que $\omega_2=\omega_1\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2>\omega_1$. Le patineur tourne donc plus vite.



Chapitre VI : Mouvement à force centrale

Un cas particulier de forces est celui où la force est centrale. Ce cas semble très particulier mais il regroupe beaucoup de forces : tout d'abord, la force électromagnétique est centrale car elle est dirigée d'une charge électrique vers la charge électrique la plus élevée qu'on supposera fixe. De même, la force de gravitation est centrale dirigée vers la masse la plus élevée qu'on supposera fixe. Dans un autre domaine, la force de tension du fil d'un pendule est aussi une force centrale.

I Caractéristiques d'un mouvement à force centrale :

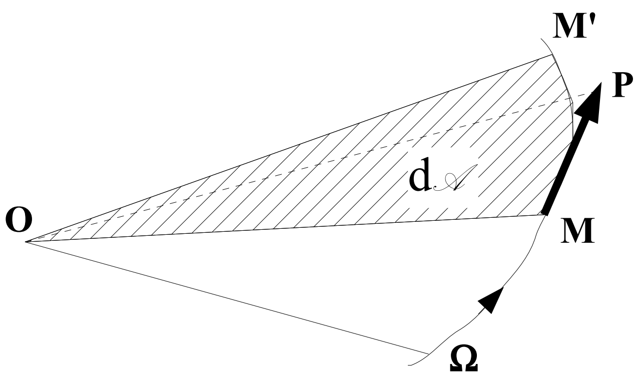
1) Planéité de la trajectoire :

Dans ce chapitre, on notera O le centre de forces, c'est à dire le point O tel que, à tout instant, la force $\vec{F}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires. On supposera également que le référentiel est galiléen. Avec toutes ces hypothèses, le moment cinétique $\vec{L}_O$, noté pour simplifier $\vec{L}$ sera constant au cours du temps. Ainsi la relation $\vec{L}=C^{te}$ est une intégrale première du mouvement.

Si on note M_0 la position initiale du point matériel et $\vec{v}_0$ sa vitesse initiale, alors la valeur du moment cinétique est $\vec{L}=\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}=C^{te}=\overrightarrow{OM}_0\wedge m\vec{v}_0$. On en déduit que le vecteur $\vec{L}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\overrightarrow{OM}_0$ et $\vec{v}_0$ et donc au plan formé par ces deux vecteurs (on suppose évidemment que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et si oui, on change d'origine des temps pour que à l'instant t=0, ces deux vecteurs ne soient pas colinéaires). La relation précédente indique que $\overrightarrow{OM}$ est perpendiculaire à $\vec{L}$. On en déduit que ce vecteur $\overrightarrow{OM}$ est nécessairement dans le plan défini par $\overrightarrow{OM}_0$ et $\vec{v}_0$. De la même manière, le vecteur vitesse $\vec{v}$ est aussi dans ce plan. On en déduit que la trajectoire du point matériel est plane.

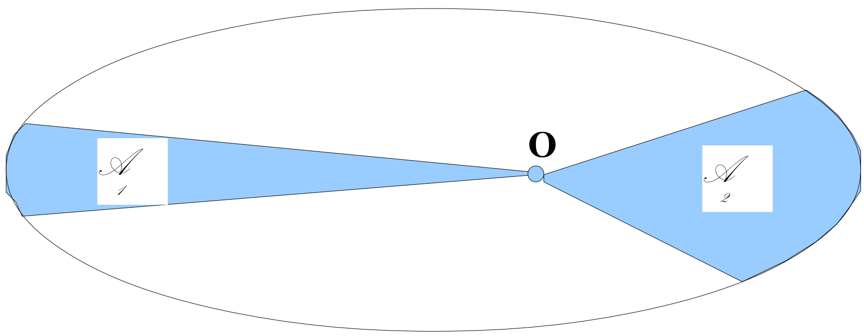
Dans un référentiel galiléen, la trajectoire d'un point matériel soumis à une force centrale est une courbe plane dans le plan défini par le point O et les deux vecteurs $\overrightarrow{OM}_0$ et $\vec{v}_0$.

2) Loi des aires :



On cherche l'évolution de l'aire $\mathscr{A}$ balayée au cours du temps c'est à dire l'évolution de l'aire OMM' sachant qu'au départ le point M part du point Ω. Si Δt est petit, l'aire OMM' est identique à l'aire du triangle OMP où P est défini par $\overrightarrow{MP}=\vec{v}\,\Delta t$. L'aire de ce triangle est $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}\,\Delta t\|=\frac{1}{2m}\|\vec{L}\|\,\Delta t=\Delta\mathscr{A}$ Ainsi, à la limite $\Delta t\rightarrow 0$, on a $\frac{d\mathscr{A}}{dt}=\frac{\|\vec{L}\|}{2m}$.

Loi des aires : Dans un mouvement à force centrale, le rayon vecteur ayant pour origine le centre de forces balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux



On a $\mathscr{A}_1=\mathscr{A}_2$. Ceci indique (sans calcul) que la vitesse de la particule est plus grande lorsque celle-ci est proche du centre de forces.

3) Lois de conservation :

On considère toujours un point matériel de masse m soumis à une force centrale $\vec{F}$ de centre de forces O tel que la norme de ce vecteur ne dépend que de $\rho=\|\overrightarrow{OM}\|$ (ceci élimine donc une force de type tension de fil d'un pendule). Dans ce cas, la force $\vec{F}$ est à circulation conservative. L'énergie potentielle dont dérive $\vec{F}$ ne dépend que de ρ. En effet, si il existe E_p telle que $\vec{F}=-\overrightarrow{grad}\,E_p=\frac{-\partial E_p}{\partial\rho}\vec{u}_\rho-\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_p}{\partial\theta}\vec{u}_\theta$ en coordonnées polaires, la force étant centrale, $\frac{\partial E_p}{\partial\theta}=0$ donc l'énergie potentielle ne dépend que de ρ : $E_p(\rho)=-\int F(\rho)\,d\rho$.

a) Conservation de l'énergie mécanique :

Les forces étant à circulation conservative, l'énergie mécanique est conservée :

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\,v^2+E_p(\rho)$$

En coordonnées polaires, $\vec{v}=\dot{\rho}\,\vec{u}_\rho+\rho\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ et donc $v^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\,\dot{\theta}^2$. Donc,

$$\boxed{E=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\,\dot{\theta}^2)+E_p(\rho)=E_0=C^{te}}$$

De $\vec{F}=m\vec{a}$, en dérivant le vecteur vitesse, on a $\vec{F}(\rho)/m=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho+(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$, on en déduit que la composante orthoradiale est nécessairement nulle : $2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta}=0$. Sachant que l'énergie est constante, $\frac{dE}{dt}=0$, c'est à dire $\frac{1}{2}m(2\dot{\rho}\ddot{\rho}+2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}^2+2\rho^2\dot{\theta}\ddot{\theta})-F(\rho)\dot{\rho}=0$ qu'on peut simplifier en $\dot{\rho}F(\rho)/m=\dot{\rho}\ddot{\rho}+\rho\dot{\theta}(\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})=\dot{\rho}\ddot{\rho}-\rho\dot{\rho}\dot{\theta}^2=\dot{\rho}(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)$. En comparant avec la relation fondamentale de la dynamique, on remarque qu'on obtient la même relation. Nous venons ainsi de démontrer que la dérivée de l'intégrale première du mouvement qu'est la conservation de l'énergie mécanique redonne la relation fondamentale de la dynamique comme annoncé en fin de chapitre précédent.

b) Conservation du moment cinétique :

Le moment cinétique $\vec{L}=\rho\vec{u}_\rho\wedge m\vec{v}$ est une constante du mouvement étant donné que la force est centrale. En utilisant encore les coordonnées polaires, on en déduit que :

$$\boxed{\vec{L}=m\rho^2\dot{\theta}\vec{u}_z=C^{te}}$$

On remarque qu'en dérivant cette expression, on obtient $2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho^2\ddot{\theta}=0$ c'est à dire à un facteur ρ près, la composante orthoradiale de la force centrale qui était nulle.

II Energie potentielle effective :

1) Energie potentielle effective :

Les deux constantes du mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale sont :

$$\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2)+E_p(\rho)=E_0 \qquad (1)$$

$$L_0=m\rho^2\dot{\theta} \qquad (2)$$

où E_0 et L_0 sont des constantes. La relation (2) permet de déterminer $\dot{\theta}$ en fonction de ρ, ce qui va permettre de remplacer la relation (1) par une relation où seul ρ et ses dérivées vont apparaître. On obtient alors :

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+E_p(\rho)+\frac{L_0^2}{2m\rho^2}=E_0 \qquad (1')$$

$$\dot{\theta}=\frac{L_0}{m\rho^2} \qquad (2')$$

La relation (1') ne dépend que de ρ et $\dot{\rho}$. On définit l'énergie potentielle effective par :

$$E_{p,eff}(\rho)=E_p(\rho)+\frac{L_0^2}{2m\rho^2}$$

Le terme $\frac{L_0^2}{2m\rho^2}$ s'appelle « barrière centrifuge » car elle empêche le point matériel de s'approcher infiniment près du centre de forces. La relation (1') s'écrit alors :

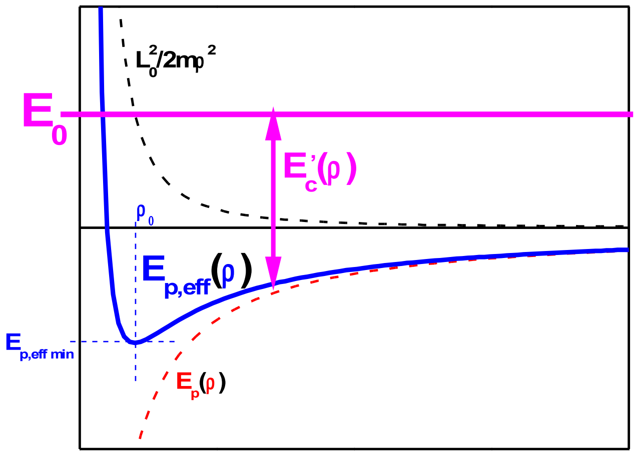
$$\boxed{\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+E_{p,eff}(\rho)=E_0} \qquad (1'')$$

On remarque qu'on peut en déduire la relation $\rho(t)$ à partir de cette relation. Plus précisément, on obtient aisément la relation $t(\rho)$ qu'il faudrait ensuite 'inverser' pour avoir $\rho(t)$. En effet, (1") se reécrit : $(\frac{d\rho}{dt})^2=\frac{m}{2}[E_0-E_{p,eff}(\rho)]$ donc $\frac{dt}{d\rho}=\sqrt{\frac{2}{m[E_0-E_{p,eff}(\rho)]}}$ d'où, on en déduit $t(\rho)$ par intégration. Ensuite, de $\rho(t)$, on déduit $\theta(t)$ en utilisant (2).

D'autre part, on peut noter la relation (1") correspond à l'énergie mécanique totale d'un point matériel de masse m animé d'un mouvement rectiligne et d'énergie potentielle $E_{p,eff}(\rho)$.

2) Mouvement d'une particule soumise à un champ de force centrale attractif :

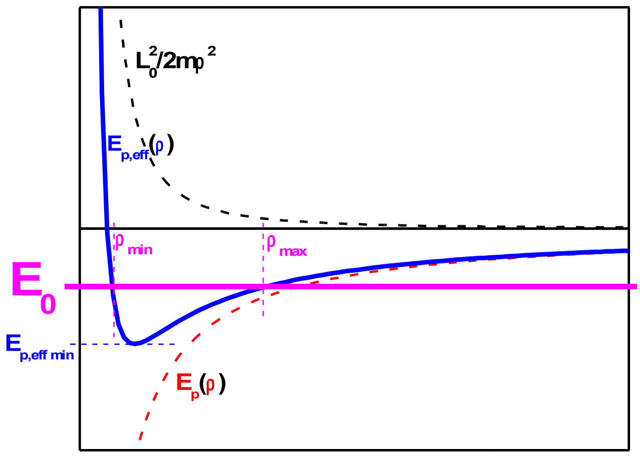
On considère donc que la force $\vec{F}$ est attractive : $\vec{F}=-F\vec{u}_\rho=-\frac{dE_p}{d\rho}\vec{u}_\rho$ avec $F>0$ et donc la fonction $E_p(\rho)$ est une fonction croissante de ρ. Physiquement, pour $\rho\to\infty$, l'énergie potentielle reste finie et est prise nulle. Donc pour tout ρ, l'énergie potentielle est négative. On ne s'intéresse pas ici à déterminer les équations horaires du mouvement : $\rho(t)$ et $\theta(t)$, mais à trouver seulement la nature des trajectoires. La figure ci-dessous représente l'énergie potentielle, la barrière centrifuge et l'énergie potentielle effective.



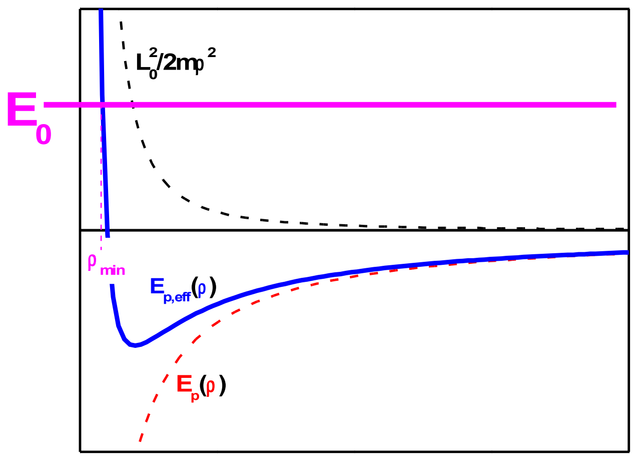
La position d'équilibre correspond à $\frac{dE_{p,eff}}{d\rho}=\frac{dE_p}{d\rho}-\frac{L_0^2}{m\rho^3}=0$, c'est à dire au point $\rho=\rho_0$ sur la figure précédente. Pour des forces en $1/r^2$ (forces de gravitation ou électromagnétique), on peut montrer que l'équilibre est stable. Suivant la valeur de l'énergie E totale, on aura ou non des solutions. En effet, la relation (1") permet d'écrire : $E_0=E'_c(\rho)+E_{p,eff}(\rho)$

avec $E'_c(\rho)=\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2>0$.

- Si $E_0<E_{p,\,eff\,min}$, il n'y a pas de solutions.
- Si $E_0=E_{p,\,eff\,min}$, il y a une seule solution qui correspond à : $\rho(t)=\rho_0=C^{te}$. La trajectoire est donc un cercle de centre O et de rayon ρ_0 . En utilisant la conservation du moment cinétique (équation (2) ou (2')), on en déduit que $\dot{\theta}(t)=C^{te}$. Par conséquent, le point matériel a un mouvement circulaire uniforme.
- Si $E_{p,eff\,min}<E_0<0$, la trajectoire est telle que ρ reste en permanence compris entre ρ_{min} et ρ_{max} . En ces deux points, $E'_c(\rho)=0$ et donc $\dot{\rho}(\rho_{min})=\dot{\rho}(\rho_{max})=0$. La valeur de ρ évoluant dans un intervalle fini, le point matériel reste à distance finie du centre O. Le mobile reste donc à distance finie et décrit sa trajectoire de manière périodique (par exemple une ellipse). La distance ρ_{min} s'appelle la distance minimale d'approche.

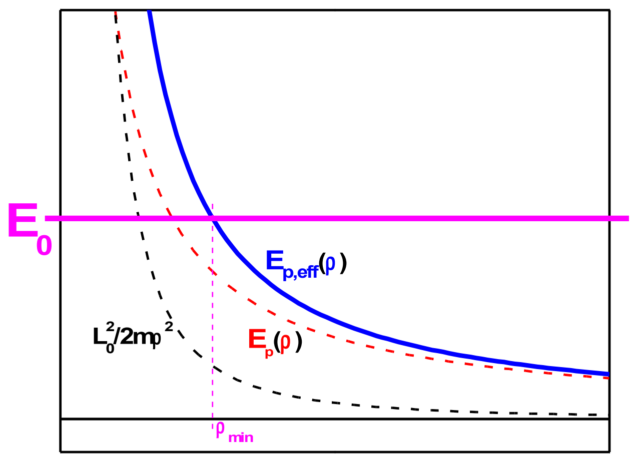


- Si $E_0\geq 0$, toutes les valeurs de ρ telles que $\rho>\rho_{min}$ sont possibles. Il n'y a donc pas de limite supérieure pour ρ . On parle de trajectoire de diffusion.



3) Mouvement d'une particule soumise à un champ de forces centrales répulsif – diffusion de Rutherford :

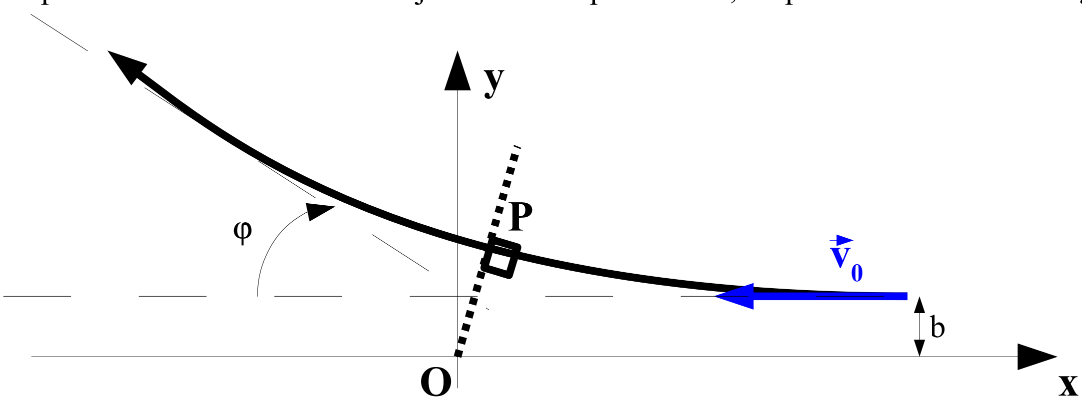
On considère donc que la force $\vec{F}$ est répulsive : $\vec{F}=F\vec{u}_\rho=-\dfrac{dE_p}{d\rho}\vec{u}_\rho$ avec $F>0$ et donc la fonction $E_p(\rho)$ est une fonction décroissante de ρ. Physiquement, pour $\rho\to\infty$, l'énergie potentielle reste finie et est prise nulle. Donc pour tout ρ , l'énergie potentielle est positive. Ici encore, on cherche seulement à déterminer la nature des trajectoires. La figure ci-dessous représente l'énergie potentielle, la barrière centrifuge et l'énergie potentielle effective.



- Si $E_0\leq 0$, il n'y a pas de solutions.
- Si $E_0\geq 0$, on a des trajectoires de diffusion.

Un exemple caractéristique où ce cas se produit est la diffusion de Rutherford, c'est à dire la diffusion d'une particule légère par une particule de masse beaucoup plus importante, les deux particules étant chargées de même signe.

On considère un noyau atomique lourd chargé positivement (charge $Ze>0$) supposé fixe. Une particule α (He^{2+}= 2 protons+2 neutrons) est lancée vers cet atome avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. A partir de la déviation de la trajectoire de la particule α, on peut remonter à la charge Ze .



La distance b entre l'axe Ox défini comme parallèle à la vitesse $\vec{v}_0$ et la particule α s'appelle le paramètre d'impact. On note M_0 le point de la trajectoire qui se trouve en $x=+\infty$ .En ce point, la vitesse est $\vec{v}_0$. La particule α interagit avec le noyau atomique via la force d'interaction électromagnétique. Cette force est à circulation conservative, on en déduit que l'énergie mécanique totale est conservée. Cette force est une force centrale donc le moment cinétique est aussi conservé. Leurs valeurs en un point M quelconque de la trajectoire situé à la distance ρ du noyau, au point M_0 et au point P (point de la trajectoire le plus proche de O) situé à la distance ρ_P de O sont donc identiques :

$$\begin{cases} E_0=\frac{1}{2}m v_0^2+E_p(\rho_0)=\frac{1}{2}m v^2+E_p(\rho) \\ L=mbv_0=m\rho^2\dot{\theta}=m\rho_P v_P \end{cases}$$

Le point P se caractérise en effet par le fait que, en ce point, le vecteur vitesse et le vecteur position sont orthogonaux. Ici, l'énergie potentielle s'écrit : $E_p=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Ze^2}{\rho}=\frac{k}{\rho}$. Sachant que $E_p(\rho_0)=0$, on peut en déduire ρ_P à partir du système précédent : $\rho_P=\frac{k}{2E_{c0}}+\sqrt{b^2+\frac{k^2}{4E_{c0}^2}}$ où $E_{c0}=\frac{1}{2}m v_0^2$. ρ_P est la distance minimale d'approche. En fait, Rutherford a calculé et mesuré la déviation du faisceau de particules légères, en 1911 : $cotan(\frac{\varphi}{2})=\frac{bmv_0^2}{k}$. Ainsi, en mesurant l'angle de déviation φ, on en déduit k et donc la charge Z du noyau.

III Application à la force de gravitation - Mouvement des planètes :

1) Position du problème :

On s'intéresse dans cette partie au mouvement des planètes autour de leur étoile. La force d'interaction entre une planète et son étoile est la force de gravitation qui est une force centrale attractive. Résoudre le problème du mouvement des planètes revient également à résoudre celui d'un électron autour du noyau atomique étant donné que la force de gravitation et la force électromagnétique sont de la même forme et toutes les deux en « $1/r^2$ ».

On assimile les planètes à des objets ponctuels car la distance entre une planète et son Soleil est très grande devant la taille de la planète. Par exemple, la distance Terre-Soleil est de l'ordre de 150000km alors que le rayon terrestre est de 6400km.

On se place dans le référentiel de Copernic où le Soleil est fixe. En effet, la masse du Soleil, $m_S=2.10^{30}$kg est très supérieure à celle des autres planètes, de la Terre par exemple, $m_T=6.10^{24}$ kg.

2) Coniques :

a) Définition géométrique :

- La parabole est le lieu des points équidistants d'un point fixe F appelé foyer et d'une droite directrice D fixe.
- L'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes F et F' (les foyers) est constante : $MF+MF'=2a$. On peut ainsi tracer aisément une ellipse en fixant deux piquets en F et F' et en utilisant une ficelle de longueur 2a, a s'appelle le demi-grand axe de l'ellipse. Si F et F' sont confondus, on obtient un cercle.
- L'hyperbole est le lieu des points dont la différence des distances à deux points F et F' (les foyers) est constante : $|MF-MF'|=2a$, a s'appelle encore le demi-grand axe

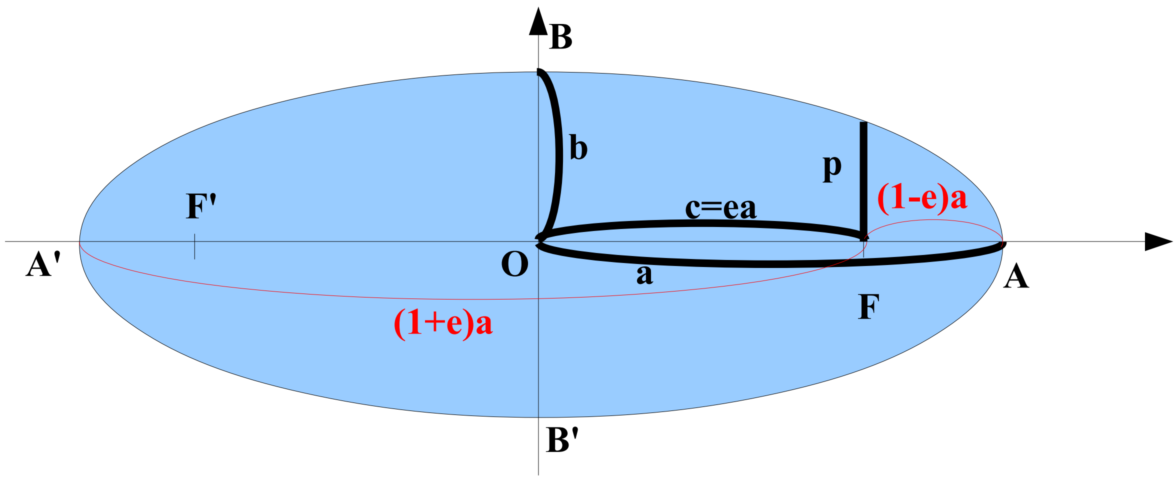
D'une manière simple, une conique est une courbe du plan caractérisée par :

- un centre O (sauf si e=1)
- ses 2 foyers F et F'
- 2 paramètres : a et b en cartésiennes ou bien p et e en polaires.

Nous allons maintenant étudier chacun des cas en les classant en fonction de leur excentricité.

b) Cercle et ellipse :

Ce cas correspond à $0 \leq e < 1$.



- en coordonnées cartésiennes : l'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $b^2+c^2=a^2$ et $p=\frac{b^2}{a}$, a est le demi-grand axe de l'ellipse et b, le demi-petit axe.

- en coordonnées polaires : l'équation de l'ellipse est : $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ avec $e<1$.
- relations entre les deux systèmes de coordonnées :

$$p = \frac{b^2}{a} = (1-e^2)a$$

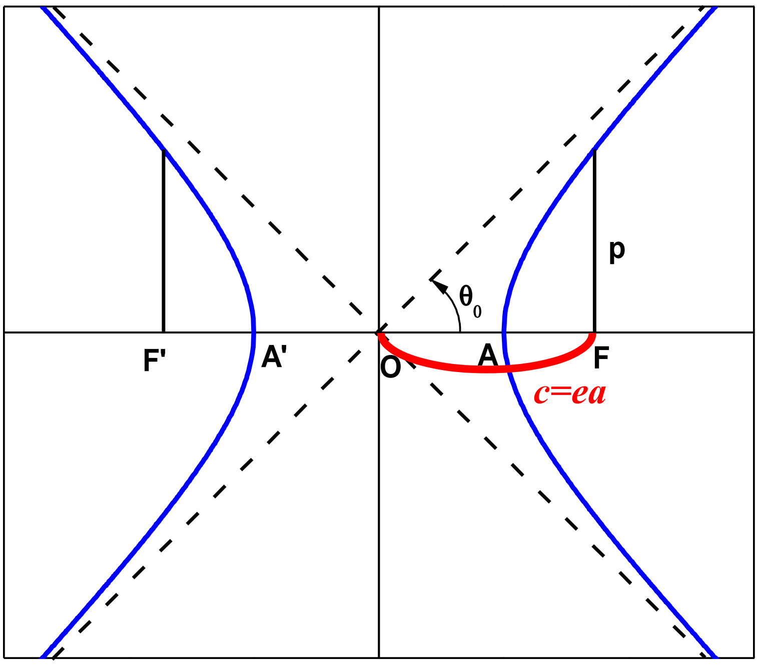
$$c = ea$$

$$FA = F'A' = (1-e)a = \frac{p}{1+e} \quad \text{et} \quad FA' = AF' = (1+e)a = \frac{p}{1-e} \; .$$

Si l'excentricité est nulle, F=F'=O, p=a=b, on a donc un cercle. On comprend alors facilement la signification du mot 'excentricité'.

c) Hyperbole :

Ce cas correspond à $e>1$.



- en coordonnées cartésiennes : l'équation de l'hyperbole est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a^2+b^2=c^2$ et $p = \frac{b^2}{a}$ avec $OA=a$. Les deux asymptotes de la courbe ont pour équations : $y = \pm\frac{b}{a}x$

- en coordonnées polaires : l'équation de l'hyperbole est : $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ avec $e>1$. Les deux asymptotes correspondent à l'angle θ_0 et $\pi-\theta_0$ tels que $\cos\theta_0=-\frac{1}{e}$.
- relations entre les deux systèmes de coordonnées :

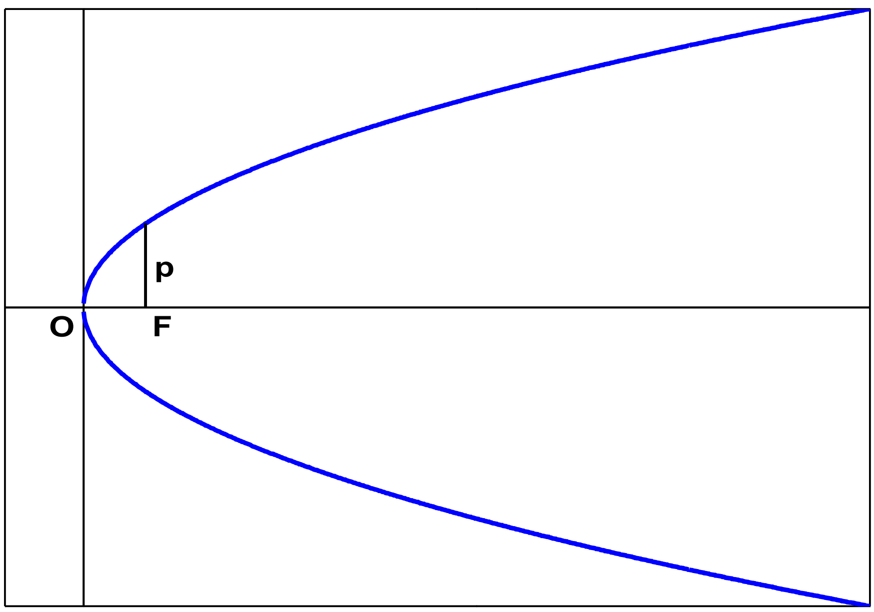
$$p=\frac{b^2}{a}=-(1-e^2)a=(e^2-1)a$$

$$c=ea$$

$$FA=F'A'=(e-1)a=\frac{p}{1+e} \quad \text{et} \quad FA'=AF'=(1+e)a=\frac{p}{e-1}=-\frac{p}{1-e}$$.

d) Parabole :

Ce cas correspond à $e=1$. Il correspond aussi au cas précédents avec $a\rightarrow\infty$.



- en coordonnées cartésiennes : l'équation de la parabole est $y^2=2\text{px}$. On a $OF=\frac{p}{2}$. Ici, le point A et le point O sont confondus.
- en coordonnées polaires : l'équation de la parabole est : $r=\frac{p}{1+\cos\theta}$ ($e=1$).
- relations entre les deux systèmes de coordonnées : $FA=\frac{p}{1+e}=\frac{p}{2}$.

3) Lois de Képler :

Les lois de Képler (1571-1630) établies autour de 1610 sont déduites des observations de Tycho Brahé (1546-1601) à la fin du XVI^{ème} siècle et de lui-même :

- *1ère loi : Les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un foyer.*
- *2ème loi (loi des aires) : Le rayon vecteur issu du Soleil balaye des aires égales pendant des temps égaux.*
- *3ème loi : Les carrés des temps de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes des ellipses trajectoires.*

4) Force d'attraction :

A partir des lois de Kepler, nous allons nous livrer à un petit exercice : retrouver l'expression de la force de gravitation.

- La force est centrale : La première loi indique que la trajectoire est plane et donc ce plan contient le force $\vec{F}$. La deuxième loi indique que la loi des aires est vérifiées, donc le moment cinétique est constant, ce qui revient à dire que le moment de la force par rapport au Soleil est nul, c'est à dire que la force est centrale.
- La force varie en $1/r^2$: Nous allons démontrer qu'à partir des lois de Kepler, l'énergie potentielle varie nécessairement en 1/r et donc la force en $1/r^2$.

$$\begin{cases} L_0 = m r^2 \dot{\theta} = C^{te} & (1) \\ E_0 = \frac{1}{2} m(r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) + E_p(r) = C^{te} & (2) \end{cases}$$

On montrera plus loin que l'équation d'une ellipse en coordonnées polaires s'écrit : $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ où p et e sont deux paramètres et $e<1$.

On peut montrer que $\frac{dr}{d\theta} = \frac{er^2 \sin\theta}{p}$ et $e\cos\theta = \frac{p}{r} - 1$.

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L_0}{m r^2} \\ (2) \Rightarrow E_0 - E_p(r) = \frac{1}{2} m (r^2 (\frac{d\theta}{dt})^2 + (\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt})^2) = \frac{1}{2} m (r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2)(\frac{d\theta}{dt})^2 \end{cases}$$

Sachant que $r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2 = \frac{r^4}{p^2}(e^2 - 1 + \frac{2p}{r})$, on en déduit que $-E_p(r) = \frac{L_0^2}{mpr} + C^{te}$ et donc la valeur algébrique de la force : $F(r) = -\frac{L_0^2}{mpr^2}$.

5) Nature des trajectoires :

Cette partie est la réciproque du paragraphe précédent : à partir de la force de gravitation, $\vec{F}_{gravitation}=-G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}=-\frac{k}{r^2}\vec{u}$, on va déterminer la trajectoire et montrer que celle-ci peut être une ellipse mais plus généralement une conique[1] quelconque.

En utilisant la relation fondamentale de la dynamique et la conservation du moment cinétique, on obtient successivement : $\vec{F}=m\vec{a}=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r=m(\ddot{r}-r\frac{L_0^2}{m^2 r^4})\vec{u}_r=m(\ddot{r}-\frac{L_0^2}{m^2 r^3})\vec{u}_r$.

En posant $u(\theta)=\frac{1}{r(\theta)}$, on a $\dot{r}=-\frac{L_0}{m}\frac{du}{d\theta}$ et $\ddot{r}=-\frac{L_0^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$. On en déduit que l'équation du mouvement (formule de Binet) s'écrit :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{km}{L_0^2}=\frac{1}{p}$$

qui définit le paramètre p. Cette équation différentielle admet une solution de la forme $u=u_0\cos(\theta-\theta_0)+\frac{1}{p}$. On peut toujours s'arranger, en choisissant bien l'axe polaire, à prendre $u_0>0$ et même $\theta_0=0$. On pose $e=pu_0$. On en déduit l'équation de la trajectoire :

$$\boxed{r=\frac{p}{1+e\cos\theta}}$$

qui est l'équation d'une conique de paramètre p et d'excentricité e.

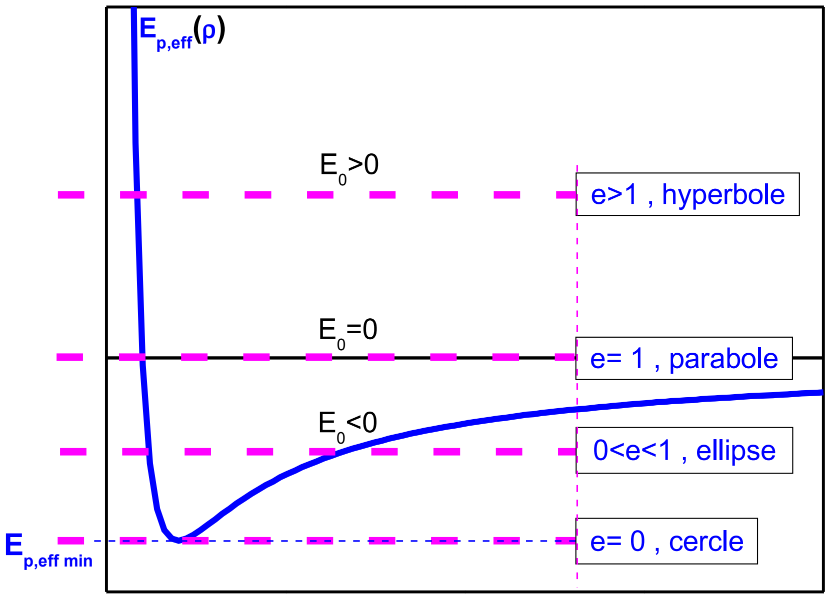
6) Graphe des énergies et énergie totale :

Connaissant la relation $r(\theta)$, on peut calculer aisément l'énergie totale de la planète. Au 3) , nous avons vu que $F(r)=-\frac{L_0^2}{mpr^2}$. Sachant que $F(r)=-\frac{k}{r^2}$, l'énergie potentielle est donc $E_p(r)=-\frac{k}{r}$, avec $k=GMm$, rappelons-le. On doit ensuite calculer l'énergie cinétique, en utilisant la conservation du moment cinétique, on obtient : $E_c(r)=\frac{L_0^2}{mpr}+\frac{L_0^2(e^2-1)}{2\mathrm{mp}^2}$. Finalement l'énergie totale est donc : $E_0=\frac{L_0^2(e^2-1)}{2\mathrm{mp}^2}=\frac{1}{2}k\frac{(e^2-1)}{p}$. Par conséquent,

$$\boxed{\begin{cases} E_0=-\frac{GMm}{2\mathrm{a}} & si\, e<1 \\ E_0=\frac{GMm}{2\mathrm{a}} & si\, e>1 \end{cases}}$$

1 Le mot de conique vien du fait que cette courbe s'obtient par intersection entre un cône et un plan. Suivant l'angle entre l'axe du cône et le plan, on obtiendra un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

où a est le demi-grand axe. Dans le cas particulier où l'excentricité est nulle, la trajectoire est circulaire de rayon R, $E_0 = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{2R}$. Le schéma ci-dessous résume la nature des trajectoires en fonction de l'énergie totale.



7) Période du mouvement :

A partir de la loi des aires, $\frac{d\mathscr{A}}{dt} = \frac{L_0}{2m} = C^{te}$ où $\mathscr{A}(t)$ est l'aire balayée par le rayon vecteur, on peut en déduire la période du mouvement. En effet, lorsque la trajectoire est une ellipse[1] (seul cas où le mouvement est périodique), l'aire de l'ellipse , $A = \pi ab$, est balayée pendant la période T du mouvement. Donc, $\frac{L_0 T}{2m} = \pi ab$. Sachant que $L_0^2 = GMm^2 p = GMm^2 a(1-e^2)$ et $b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1-e^2)$, $\frac{L_0^2 T^2}{4m^2} = \pi^2 a^2 b^2 = \pi^2 a^4 (1-e^2)$, on en déduit :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

qui est un rapport qui ne dépend pas de la planète considérée. On vient de redémontrer la troisième loi de Kepler. Ainsi, connaissant G et mesurant le rapport $\frac{T^2}{a^3}$, on peut en déduire la masse M de la planète.

1 Le cercle est un cas particulier d'ellipse.

Chapitre VII : Dynamique d'un système à N corps

Dans l'ensemble des chapitres précédents, nous avons considéré un système mécanique qui pouvait être ramené à un point matériel, c'est à dire qu'on pouvait considérer que l'évolution du système pouvait être assimilé à celui d'un point matériel ayant comme masse, celle de l'ensemble du système. Nous avons aussi considéré que le mouvement de ce point matériel décrivait le mouvement global du système étendu spatialement. D'autre part, en considérant les forces d'interaction entre ce point matériel et le milieu extérieur, nous avons toujours considéré que ce milieu extérieur était à priori statique (le centre de forces est immobile que ce soit la Terre pour le poids ou le Soleil pour le mouvement des planètes, ou bien la force de frottement lié au sol irrégulier). Dans ce chapitre, nous allons considérer N ($N \geqslant 2$) objets discrets qui ont au contraire des caractéristiques plutôt relativement voisines et qui interagissent entre eux : c'est le cas par exemple de deux (trois) étoiles dans un système binaire(ternaire), c'est le cas de deux atomes formant une molécule, de deux atomes dans un liquide. C'est aussi le cas des collisions, phénomène plus violent. Dans le chapitre suivant, nous allons considérer le cas d'un système continu où $N \rightarrow \infty$ qui est le cas d'un solide indéformable.

Dans la plupart des cas, nous traiterons explicitement le cas N=2.

I Centre de masse :

Nous allons considérer N points matériels placés aux points A_i de l'espace, chaque point matériel ayant une masse m_i. Le centre de masse G de ce système, appelé aussi barycentre du système est défini par :

$$\boxed{(\sum_i m_i)\overrightarrow{OG} = \sum_i (m_i \overrightarrow{OA_i})}$$

où O est un point quelconque. Si on choisit O=G, alors le centre de masse, G, vérifie :

$$\boxed{\sum_i (m_i \overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}}$$

Pour N=2, on a $\boxed{(m_1+m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2}}$ ou $\boxed{m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} = \vec{0}}$. Par exemple, pour le système Terre-Lune, en notant T et L les centres de la Terre et de la Lune respectivement, M_T et M_L , leurs masses respectives, G, le centre de masse de l'ensemble, on a : $(M_T+M_L)\mathrm{TG} = M_L TL$ en utilisant la première relation avec O=T. La distance Terre-Lune est d'environ 60 rayons terrestres, R_T et la masse de la Terre est 81 fois plus grande que celle de la Lune. On en déduit que $TG = \frac{60}{82} R_T = 0{,}73\, R_T$. Le centre de masse de l'ensemble se trouve donc à l'intérieur de la Terre, mais finalement relativement éloigné du centre de la Terre. Le dessin suivant représente les différents points, le dessin n'étant évidemment pas à l'échelle.

II Elements cinétiques d'un système à N corps :

1) Définitions :

On se place dans un référentiel $(\Re)$, une masse ponctuelle, m, animée d'une vitesse $\vec{v}$ se trouve au point A à un instant donné. On considère un point O quelconque de ce référentiel. Les éléments cinétiques du point A sont :

- sa quantité de mouvement : $\vec{p}=m\vec{v}$
- son moment cinétique par rapport à O : $\vec{L}_O=\overrightarrow{OA}\wedge m\vec{v}=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{p}$
- son énergie cinétique : $E_c=\frac{1}{2}mv^2$

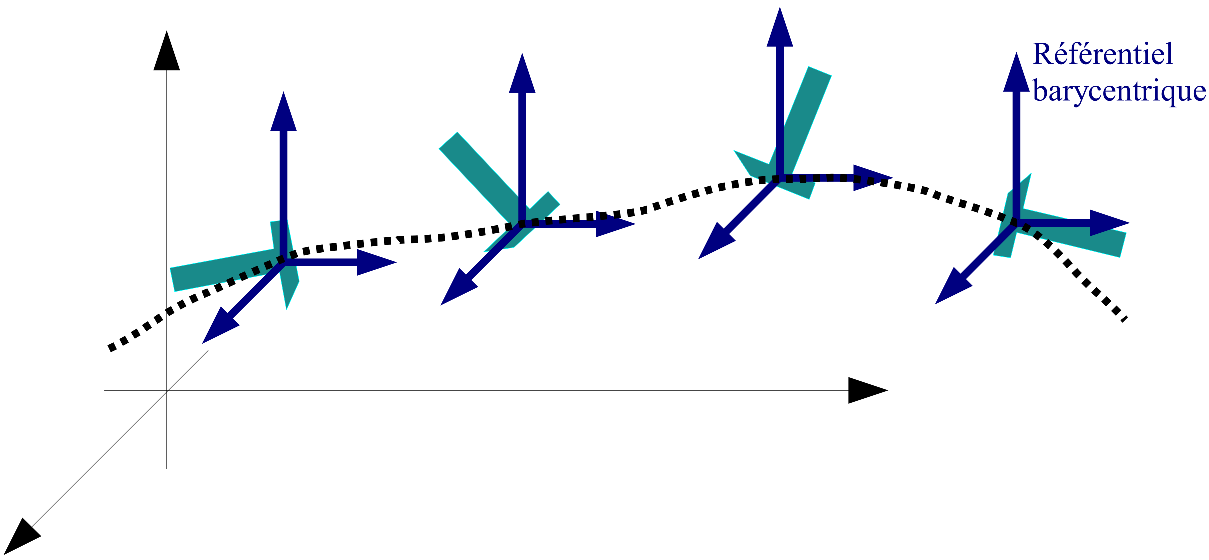
Toujours dans ce même référentiel, on considère maintenant N masses ponctuelles, m_i animées des vitesses $\vec{v}_i$ se trouvant aux points A_i à un instant donné. Pour un tel système, on définit :

- sa quantité de mouvement totale : $\vec{P}=\sum_i \vec{p}_i=\sum_i m_i\vec{v}_i$.
- son moment cinétique total : $\vec{L}_O=\sum_i \overrightarrow{OA}_i\wedge m_i\vec{v}_i=\sum_i \overrightarrow{OA}_i\wedge\vec{p}_i$
- son énergie cinétique totale : $E_c=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$

Si N=2, on a $\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$, $\vec{L}_O=\overrightarrow{OA}_1\wedge m_1\vec{v}_1+\overrightarrow{OA}_2\wedge m_2\vec{v}_2$ et $E_c=\frac{1}{2}m_1 v_1^2+\frac{1}{2}m_2 v_2^2$.

2) Référentiel du centre de masse :

On suppose que le référentiel $(\Re)$ de départ a des directions fixes parallèles aux directions du référentiel de Copernic. Le référentiel du centre de masse d'un système, $(\Re^*)$, est le référentiel dont l'origine coïncide avec le barycentre du système et dont les axes ont des directions fixes parallèles aux directions du référentiel de Copernic. Ceci est schématisé sur le dessin suivant qui sépare bien le mouvement de ce référentiel du centre de masse par rapport à celui de l'assemblée de points matériels. Par commodité, l'assemblée de points matériels est représentée par un solide continu qui correspond à la limite $N \to \infty$.



Ce schéma est également très instructif car il montre qu'en regardant de près, le mouvement du marteau peut finalement être décomposé en deux :

- le mouvement du centre de masse G représenté par la ligne pointillée.
- le mouvement des parties constituant le marteau lui-même par rapport au centre de masse G.

Ce schéma s'applique également au mouvement du couple Terre-Lune. En effet, si on considère que la Terre est représentée par la partie métallique du marteau et que la Lune se trouve au bout du manche, le mouvement de l'ensemble {Terre+Lune} autour du Soleil peut-être décomposé en : le mouvement du centre d'inertie de l'ensemble (en gros, le mouvement de la Terre autour du Soleil) et le mouvement de la Terre ou de la Lune autour du centre d'inertie (en gros, la Terre semble immobile et la Lune tourne autour de la Terre). Cette décomposition s'avère finalement très naturelle pour décrire le mouvement complexe de deux objets ou d'un solide matériel massif.

De $\sum_i (m_i \overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}$, on déduit en dérivant, $\sum_i (m_i \frac{d\overrightarrow{GA_i}}{dt}) = \vec{0}$. *Dans la suite, toutes les quantités liées au référentiel du centre de masse,* $(\Re *)$ *, seront notées avec le symbole ** : $\vec{v}*_i = \frac{d\overrightarrow{GA_i}}{dt}$ représente la vitesse du point A_i dans le référentiel $(\Re *)$ et $\vec{v}*_i = m\vec{v}*_i = m\frac{d\overrightarrow{GA_i}}{dt}$ est la quantité de mouvement du point A_i dans ce référentiel $(\Re *)$.

On en déduit alors que :

$$\boxed{\sum_i m_i \vec{v}*_i = \sum_i \vec{p}*_i = \vec{0}}$$

En utilisant la loi de composition des vitesses, et sachant que les axes du référentiel du centre de masse sont en translation par rapport à ceux de $(\Re)$, on peut écrire :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{v}*_i$$

où $\vec{v}_G$ est la vitesse du centre d'inertie, G.

Enfin, de $(\sum_i m_i)\overrightarrow{OG}=\sum_i (m_i\overrightarrow{OA_i})$, on déduit, en dérivant, que : $\vec{P}=(\sum_i m_i)\vec{v_G}=\sum_i (m_i\vec{v_i})$

3) Premier théorème de Koenig :

Ce théorème permet d'exprimer le moment cinétique en un point O quelconque. Le moment cinétique total s'écrit $\vec{L_O}=\sum_i \overrightarrow{OA_i}\wedge m_i\vec{v_i}$. Nous allons déterminer $\vec{L_O}$ dans le référentiel $(\Re)$ en fonction de $\vec{L}*_G$ dans le référentiel $(\Re *)$:

$$\vec{L_O}=\sum_i (\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA_i})\wedge m_i\vec{v_i}=\overrightarrow{OG}\wedge(\sum_i m_i\vec{v_i})+\sum_i \overrightarrow{GA_i}\wedge m_i\vec{v_i}$$

Le premier terme s'écrit $\overrightarrow{OG}\wedge(\sum_i m_i)\vec{v_G}$, dans le deuxième terme, on utilise la loi de composition des vitesses : $\sum_i \overrightarrow{GA_i}\wedge m_i(\vec{v_G}+\vec{v}*_i)=(\sum_i m_i\overrightarrow{GA_i})\wedge\vec{v_G}+\sum_i \overrightarrow{GA_i}\wedge m_i\vec{v}*_i$. Le premier terme est nul par définition de G et le deuxième terme est exactement $\vec{L}*_G$. Par conséquent,

$$\boxed{\vec{L_O}=\overrightarrow{OG}\wedge(\sum_i m_i)\vec{v_G}+\vec{L}*_G}$$

qui constitue le premier théorème de Koenig. Ecrit en toutes lettres, ce théorème peut s'énoncer sous la forme suivante : *le moment cinétique en un point O quelconque est égal à la somme du moment cinétique du centre d'inertie G affecté de toute la masse du système et du moment cinétique par rapport au centre d'inertie pris dans le référentiel barycentrique.*

4) Deuxième théorème de Koenig :

On effectue les mêmes transformations mais avec l'énergie cinétique cette fois.

$$E_c=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum_i \frac{1}{2}m_i(\vec{v_G}+\vec{v}*_i)^2=\frac{1}{2}(\sum_i m_i)v_G^2+\sum_i \frac{1}{2}m_i v*_i^2+\vec{v_G}.\sum_i m_i\vec{v}*_i \quad .$$

Le troisième terme est nul par définition du centre d'inertie, le deuxième terme correspond à l'énergie cinétique du système dans le référentiel $(\Re *)$. On a donc :

$$\boxed{E_c=\frac{1}{2}(\sum_i m_i)v_G^2+E*_c}$$

qui constitue le deuxième théorème de Koenig. Ecrit en toutes lettres, ce théorème peut s'énoncer de la manière suivante : *l'énergie cinétique d'un système est égale à la somme de l'énergie cinétique du centre d'inertie affectée de toute la masse du système et de l'énergie cinétique du système correspondant à son mouvement dans le référentiel barycentrique.*

Remarque : comment faire le lien avec ce qui a été fait dans les chapitres précédents et ces relations sont-elles compatibles avec ces chapitres précédents? La réponse est évidemment oui. Dans les chapitres précédents, nous avons considéré que toute la masse était concentrée en un seul point, en l'occurrence, le centre d'inertie du système. Dans les chapitres précédents, nous avons simplement écrit, sans le préciser, que $\sum_i m_i = m$ où m était la masse totale de l'objet ramené au centre d'inertie. A partir du moment où toute la masse est ramenée au centre d'inertie, les termes $\vec{L}*_G$ et $E*_c$ sont évidemment nuls et on retrouve les lois vues aux chapitres précédents.

5) Forces extérieures et intérieures :

On note $\vec{f}_i$, la somme de toutes les forces qui s'exercent sur le point A_i. On définit alors deux vecteurs :

- la résultante des forces : $\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i$.
- le moment résultant des forces en un point quelconque O : $\vec{\mathscr{M}}_O = \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{f}_i$.

On peut montrer facilement que pour un autre point O' quelconque, $\vec{\mathscr{M}}_{O'} = \vec{\mathscr{M}}_O + \vec{F} \wedge \overrightarrow{OO'}$.

Les forces qui s'exercent sur les points A_i peuvent avoir deux origines : une origine interne, c'est à dire que ces forces sont dues aux autres points du système, on parle de forces intérieures et une origine externe, on parle de forces extérieures. Par exemple, si on considère un ion positif et un électron, et qu'on considère comme système l'ensemble {ion+électron}, la force électromagnétique entre l'ion et l'électron est une force intérieure, par contre le poids de l'ion et le poids de l'électron sont des forces extérieures.

On peut ainsi distinguer la résultante des forces intérieures, $\vec{F}_{\text{int}}$ et la résultante des forces extérieures, $\vec{F}_{ext}$ et faire de même avec le moment.

Sachant que si une force $\vec{f}_{jk}$ s'exerce sur A_j par le point A_k et $\vec{f}_{kj}$ s'exerce sur A_k par le point A_j, le principe de l'action et de la réaction impose $\vec{f}_{jk} = -\vec{f}_{kj}$. Ainsi, en additionnant toutes ces forces internes deux à deux, on en déduit que $\vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}$ et aussi, $\vec{\mathscr{M}}_{O,\text{int}} = \vec{0}$.

Il se peut que certaines de ces forces intérieures dérivent d'un énergie potentielle U : $\vec{f}_{j,\text{int}} = -\overrightarrow{grad}_j U$ où $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ est une fonction scalaire qui dépend de la position des différents points du système, $\vec{r}_i = \overrightarrow{OA_i}$. L'indice j indique qu'on ne dérive U que par rapport aux coordonnées du point A_j . La fonction U s'appelle *énergie potentielle d'interaction*.

6) Théorème du centre d'inertie :

Le mouvement du centre d'inertie d'un système est celui d'un point qui aurait pour masse, la masse totale du système auquel serait appliqué la résultante des forces extérieures au système.

De $\vec{F}=\sum_i \vec{f}_i=\sum_i \vec{f}_{i,ext}=\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i$, on déduit : $\boxed{(\sum_i m_i)\frac{d\vec{v}_G}{dt}=\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum \vec{f}_{i,ext}=\vec{F}_{ext}}$.

7) Théorème du moment cinétique :

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique en un point O fixe dans un référentiel galiléen est égale au moment des forces extérieures appliquées au système : $\frac{d}{dt}\vec{L}_O=\vec{\mathscr{M}}_{O,ext}$.

III Cas particulier d'un système à 2 corps :

Dans cette partie, nous allons résumer tous les résultats précédents en ne considérant que deux corps.

1) Eléments cinétiques d'un système à 2 corps :

On considère deux corps de masses m_1 et m_2 situés aux points A_1 et A_2 et animés des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ respectivement.

- 1. Le centre de masse, G, de ces deux masses est tel que : $\boxed{(m_1+m_2)\overrightarrow{OG}=m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}}$ ou $\boxed{m_1\overrightarrow{GA_1}+m_2\overrightarrow{GA_2}=\vec{0}}$. Ces expressions entraînent par dérivation que $(m_1+m_2)\vec{v}_G=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$.
- 2. La quantité de mouvement totale est $\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{v}_G$.
- 3.Le moment cinétique total au point O quelconque est $\vec{L}_O=\overrightarrow{OA_1}\wedge m_1\vec{v}_1+\overrightarrow{OA_2}\wedge m_2\vec{v}_2$.
- 4.L'énergie cinétique totale est $E_c=\frac{1}{2}m_1 v_1^2+\frac{1}{2}m_2 v_2^2$.
- 5.Le premier théorème de Koenig s'écrit : $\vec{L}_O=\overrightarrow{OG}\wedge(m_1+m_2)\vec{v}_G+\vec{L}^*_G$ sachant que les * indiquent que les quantités sont prises dans le référentiel du centre de masse.
- 6.Le deuxième théorème de Koenig s'écrit : $E_c=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_G^2+E^*_c$.
- 7.Le théorème du centre d'inertie s'écrit : $(m_1+m_2)\frac{d\vec{v}_G}{dt}=\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum\vec{f}_{i,ext}=\vec{F}_{ext}$

De toutes ces relations, on déduit quelques propriétés importantes :

- Dans un référentiel galiléen, pour un système de deux points isolés, la quantité de mouvement est une constante du mouvement (d'après 2. et 7.). Par conséquent, le mouvement du centre de masse est rectiligne uniforme.
- Le mouvement du centre de masse est celui d'un point matériel fictif affecté de la masse totale du système soumise à la résultante des forces extérieures dans un référentiel galiléen.

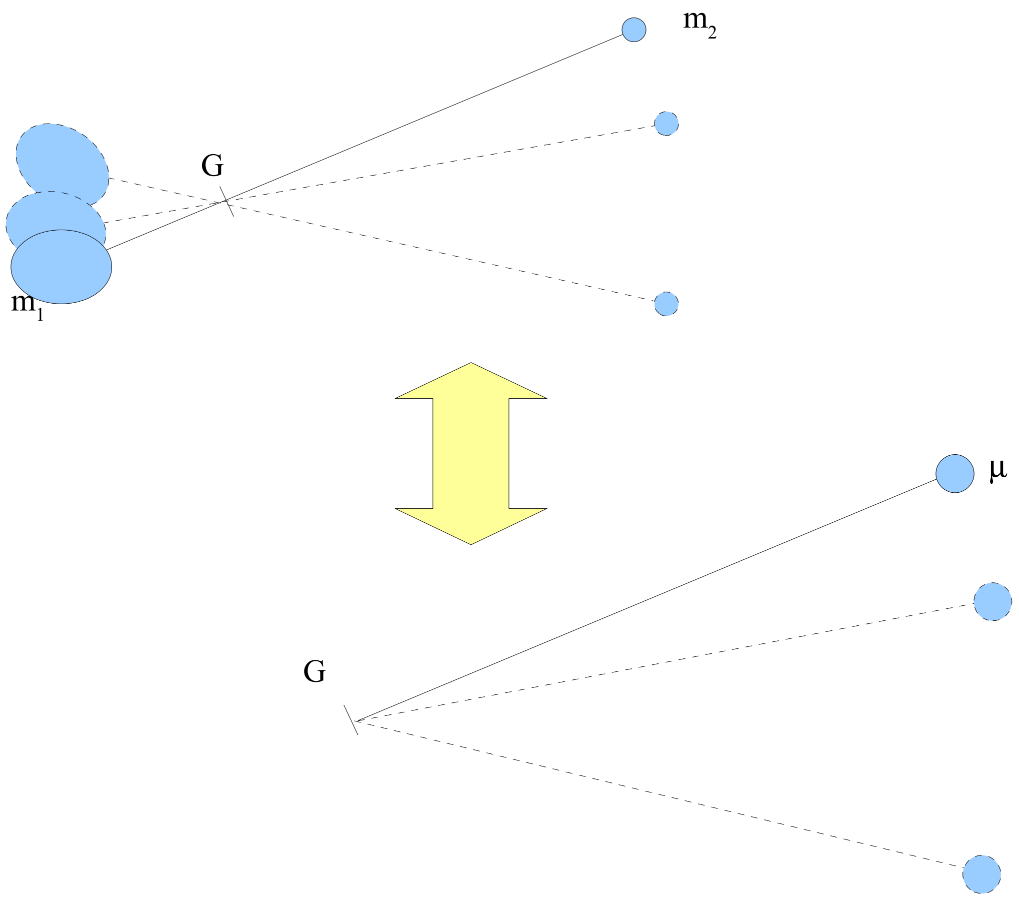
2) Masse réduite :

On considère un système isolé constitué de deux masses, dans le référentiel du centre de masse $(\Re *)$. On en déduit que la quantité de mouvement totale dans ce référentiel est nulle : $\vec{P}_G=\vec{0}$. Nous allons maintenant nous intéresser au mouvement relatif des deux masses c'est à dire à l'évolution au cours du temps du vecteur $\overrightarrow{A_1 A_2}=\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}$. Les équations du mouvement pour chaque point A_1 et A_2 sont respectivement : $m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OA_1}}{dt^2}=\vec{F}_{2/1}$ et $m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OA_2}}{dt^2}=\vec{F}_{1/2}$ où $\vec{F}_{2/1}$ et $\vec{F}_{1/2}$ sont respectivement la force exercée par A_2 sur A_1 et la force exercée par A_1 sur A_2. La loi de l'action et de la réaction impose : $\vec{F}_{2/1}=-\vec{F}_{1/2}$.

On en déduit alors que : $(m_1+m_2)\vec{F}_{1/2}=m_1 m_2(\frac{d^2 \overrightarrow{OA_2}}{dt^2}-\frac{d^2 \overrightarrow{OA_1}}{dt^2})=m_1 m_2\frac{d^2 \overrightarrow{A_1 A_2}}{dt^2}$. On pose,

$$\boxed{\mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}$$

la *masse réduite du système*. On peut aussi remarquer que $\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$. On en déduit que $\vec{F}_{1/2}=\mu\frac{d^2 \overrightarrow{A_1 A_2}}{dt^2}$. Par conséquent, l'étude dans le référentiel du centre de masse du mouvement des 2 masses se ramène à l'étude du mouvement d'un point fictif P dont la masse est μ et dont la position est définie par $\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{A_1 A_2}$. On peut également noter que si une des masses est nettement plus importante que l'autre, $m_1 \gg m_2$ par exemple, alors $\mu \approx m_2$, On retrouve alors les cas vu dans les chapitres précédents. En effet, dans ce cas, le centre de masse se trouve quasiment au point A_1 où se trouve la masse m_1 et étudier le mouvement de A_2 par rapport à A_1 dans le référentiel du centre de masse revient à étudier le mouvement de A_2 en supposant A_1 fixe. On se ramène alors au cas des chapitres précédents.



IV Collisions :

1) Introduction :

Les collisions sont des phénomènes très répandus : ils ont lieu en permanence sans qu'on s'en aperçoive forcément tels que les chocs entre atomes dans un gaz (chocs élastiques), les collisions maitrisées telles que celles dans un réacteur nucléaire ou les accélérateurs de particules ou bien au billiard. Ces collisions sont parfois beaucoup plus involontaires tels que les chocs entre voitures ou autres mobiles.

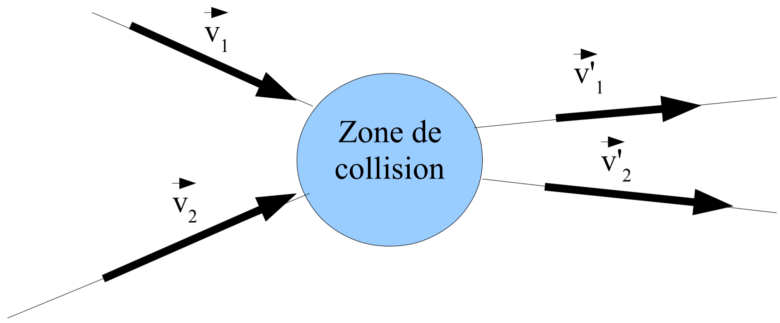
Les collisions sont dites élastiques lorsque l'état de chaque corps reste inchangé entre l'état avant le choc et celui après le choc (ex billard, gaz dans un récipient). Sinon, les collisions sont dites inélastiques (accident de voiture) où une partie de l'énergie cinétique est transformée en d'autres types d'énergie (thermique par exemple).

2) Modélisation :

- On suppose que les 2 corps en collission sont remplacés par des points matériels.
- Ces deux points sont amenés à se rapprocher suite à leur mouvement.

- Les interactions entre ces deux corps sont négligeables sauf à très petite distance entre eux.
- On suppose que les deux corps ont des trajectoires rectilignes uniformes avant et après le choc. Ceci est toujours vrai si on se place dans un intervalle de temps suffisamment petit autour de l'instant de collision.
- On suppose que la durée du choc est très brève devant l'échelle de temps caractéristique du mouvement de chacun des corps.

On se place dans un référentiel galiléen. On note $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les vitesses des deux particules avant le choc et $\vec{v}\,'_1$ et $\vec{v}\,'_2$ leurs vitesses après le choc. Pour les quantités de mouvement, on note $\vec{p}_1=m_1\,\vec{v}_1$ et $\vec{p}_2=m_2\,\vec{v}_2$, celles des deux particules avant le choc, $\vec{p}\,'_1=m'_1\,\vec{v}\,'_1$ et $\vec{p}\,'_2=m'_2\,\vec{v}\,'_2$, celles des particules après le choc. On n'a pas nécessairement $m_1=m'_1$ et $m_2=m'_2$ mais on a <u>conservation de la masse</u> : $\boxed{m_1+m_2=m'_1+m'_2}$.



3) Conservation de la quantité de mouvement :

On considère que les deux particules se déplacent dans un référentiel galiléen. La quantité de mouvement est conservée lors de la collision :

$$\boxed{\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}\,'_1+\vec{p}\,'_2}$$

Connaissant $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$, on voit qu'il y a 6 inconnues pour les composantes de $\vec{p}\,'_1$ et $\vec{p}\,'_2$. La conservation de la quantité de mouvement nous donne 3 équations seulement. Si le choc est élastique, la conservation de l'énergie cinétique :

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1\,v_1^2+\frac{1}{2}m_2\,v_2^2=\frac{1}{2}m'_1\,v'^2_1+\frac{1}{2}m'_2\,v'^2_2}$$

nous donne une équation supplémentaire. Il nous reste deux inconnues dans ce cas et ces deux inconnues seront choisies comme paramètres, cela peut être par exemple la direction de $\vec{p}\,'_1$ qui fixe ces deux paramètres. Si les particules sont assimilés à des points matériels, il n'y a plus qu'une inconnue car les deux points matériels interagissent par une force centrale et donc la trajectoire est nécessairement plane.

4) Exemples :

On se contentera ici d'exemples simples dans le plan voir le long d'un axe x.

- Chocs élastiques :

  - choc frontal élastique à une dimension : dans ce cas simple, sur un rail linéaire (cf TP), on suppose que les masses avant et après la collision sont identiques. La conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique s'écrivent :

$$m_1(v_1-v'_1)=m_2(v'_2-v_2)$$
$$m_1(v_1^2-v'^2_1)=m_2(v'^2_2-v_2^2)$$

d'où on déduit $v_1+v'_1=v_2+v'_2$ ou encore $u'=v'_2-v'_1=-(v_2-v_1)=-u$ c'est à dire que les vitesses relatives avant, u, et après, u', le choc sont égales en norme mais de signe opposé. On obtient : $v'_1=\frac{(m_1-m_2)v_1+2\mathrm{m}_2\, v_2}{m_1+m_2}$ et $v'_2=\frac{(m_2-m_1)v_2+2\mathrm{m}_1\, v_1}{m_1+m_2}$ où on peut remarquer la symétrie entre les indices 1 et 2.

On peut s'amuser à regarder les conséquences de ces deux relations en supposant au départ que $v_2=0$.

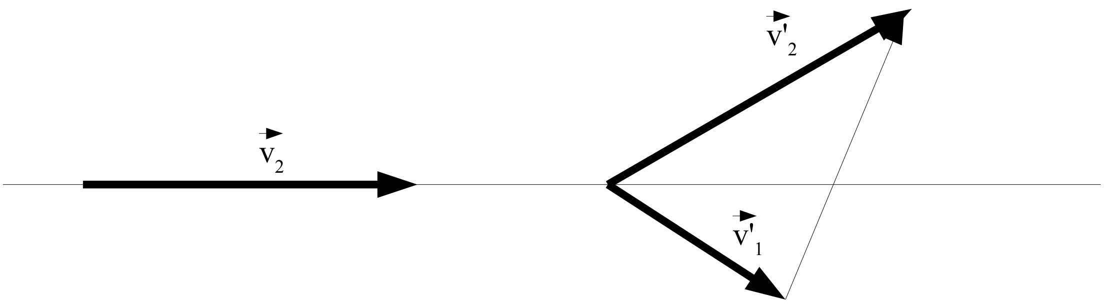
$m_1=m_2$: on obtient $v'_1=0$ et $v'_2=v_1$: c'est le « carreau ».

$m_1<m_2$: la masse légère rebondit sur l'autre.

$m_1\ll m_2$: la masse légère est 'réfléchie', la masse lourde reste immobile.

$m_1>m_2$: la masse lourde pousse l'autre.

  - Choc non frontal élastique : On suppose que les masses sont identiques avant et après le choc. On suppose que la masse m_1 est immobile. La conservation de la quantité de mouvement s'écrit : $m_2\,\vec{v}_2=m_1\,\vec{v}'_1+m_2\,\vec{v}'_2$. Par conséquent, les trois vecteurs vitesses sont coplanaires et le mouvement a donc lieu dans un plan. La résolution complète de cet exercice est assez longue et ne sera pas effectuée ici.



- Chocs mous :

On parle de choc mou lorsque l'énergie cinétique n'est pas conservée au cours du choc. Un choc parfaitement mou correspond au cas où les deux masses restent accrochées entre elles après le choc. A une dimension, cela revient à écrire $v'_1=v'_2$ c'est à dire $u'=0$. On en déduit alors que : $v'_2 = v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$. On en déduit la variation d'énergie cinétique en introduisant la masse réduite μ : $\Delta E_c = E'_c - E_c = -\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2 < 0$, il y a donc perte d'énergie cinétique qui se transforme en chaleur.

- <u>Coefficient de restitution :</u>

  On introduit une relation empirique s'inspirant des cas extrêmes précédents liant les vitesses relatives avant et après le choc à une dimension : $u' = -eu$ avec $0 \le e \le 1$ où e est le coefficient de restitution. La valeur e=1 correspond au choc élastique, la valeur e=0 au choc parfaitement mou. En introduisant cette relation combinée avec la conservation de la quantité de mouvement, on en déduit que : $\Delta E_c = E'_c - E_c = -\frac{1}{2}\mu(1 - e^2)(v_1 - v_2)^2 < 0$

Chapitre VIII: Dynamique des solides

I Elements cinétiques d'un solide :

1) Solide :

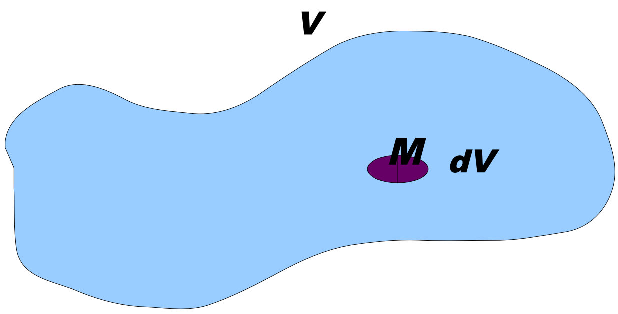
Un solide est un ensemble indéformable, c'est à dire dont la distance entre deux points quelconques est constante, quelque soit le mouvement des points la constituant.

Le solide peut être constitué d'un ensemble (discret) de N points A_i reliés rigidement, chacun ayant une masse m_i . La masse totale de cet ensemble solide est :

$$M=\sum_{i=1}^{N} m_i \quad .$$

Lorsque N devient infini, le solide est un ensemble continu. Autour de chaque point M constituant le solide, on définit un élément de volume dV . Cet élément de volume possède une masse $dm=\rho(M)dV$ en supposant que la masse volumique $\rho(M)$ est constante dans cet élément de volume dV . La masse totale du solide est :

$$M=\iiint_V \rho(M)dV=\iiint_V dm$$



Le solide est dit homogène si la masse volumique est constante en tout point du solide. On considérera dans la suite que la masse volumique du solide est indépendant du temps.

2) Centre de masse :

En utilisant les définitions du chapitre suivant, on peut définir le centre de masse, G, d'un solide constitué de N points A_i reliés rigidement, chacun ayant une masse m_i :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{(\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA_i})}{(\sum_{i=1}^{N} m_i)}$$

De même si N devient infini, cette définition se généralise de la manière suivante :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{(\iiint\limits_{(V)}\overrightarrow{OM}\,dm)}{(\iiint\limits_{(V)}dm)}$$

3) Eléments cinétiques d'un solide :

De la même manière, on peut définir les éléments cinétiques du solide, dans le référentiel galiléen $(\Re)$, dans le tableau suivant :

Quantité	***Solide rigide constitué de N masses***	***Solide continu***
Quantité de mouvement	$\vec{P}=\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i=(\sum_{i=1}^{N} m_i)\vec{v}_G=M\,\vec{v}_G$	$\vec{P}=\iiint\limits_{V}\vec{v}\,dm=M\,\vec{v}_G$
Moment cinétique	$\vec{L}_O=\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OA_i}\wedge\vec{v}_i$	$\vec{L}_O=\iiint\limits_{V}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}\,dm$
Energie cinétique	$E_c=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$	$E_c=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V} v^2\,dm$

4) Théorèmes de Koenig :

Enfin, les théorèmes de Koenig se généralisent et prennent la même forme que celle que nous avons vu au chapitre précédent :

$$\boxed{\vec{L}_O=\overrightarrow{OG}\wedge(\sum_i m_i)\vec{v}_G+\vec{L}^*{}_G}$$

$$\boxed{E_c=\frac{1}{2}(\sum_i m_i)v_G^2+E^*{}_c}$$

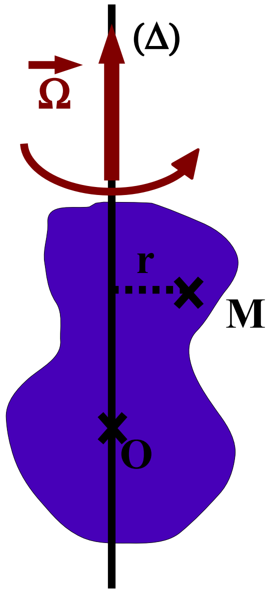
Les * indiquent que ses quantités sont calculées dans le référentiel du centre de masse.

II Solide en rotation autour d'un axe fixe :

1) Définitions :

On dit qu'un solide est animé d'un mouvement de translation si à chaque instant tous les points du solide ont la même vitesse. La translation est rectiligne si le vecteur vitesse garde toujours la même direction. Cette translation est uniforme si le vecteur vitesse garde la même norme.

Dans la suite de ce chapitre, on considère un axe (Δ) fixe par rapport à un référentiel $(\Re)$ et un solide (S) animé d'un mouvement de rotation autour de cet axe (Δ) . On notera ω , la vitesse angulaire de rotation du solide autour de (Δ) . On notera $\vec{u}$, un vecteur unitaire porté par l'axe (Δ) . Dans ce cas, on peut définir le vecteur rotation $\vec{\Omega}=\omega\vec{u}$. On notera O un point fixe de l'axe (Δ) .



2) Moment d'inertie :

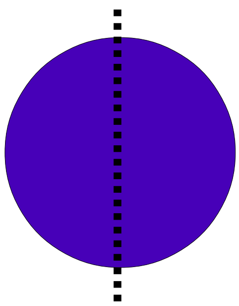
On cherche à calculer ici le moment cinétique du solide par rapport à l'axe (Δ) défini par: $L_\Delta = \vec{u}.\vec{L}_O$ avec $\vec{L}_O = \iiint_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\, dm$. Donc $L_\Delta = \iiint_V \vec{u}.(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v})\, dm$

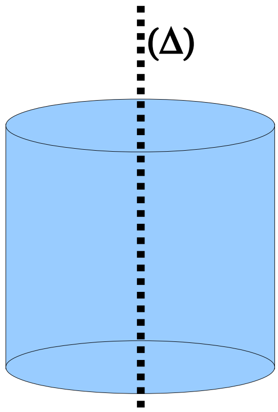
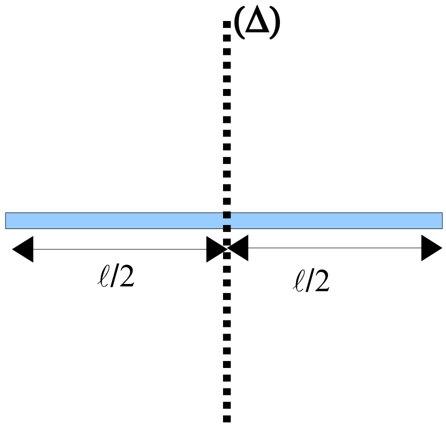
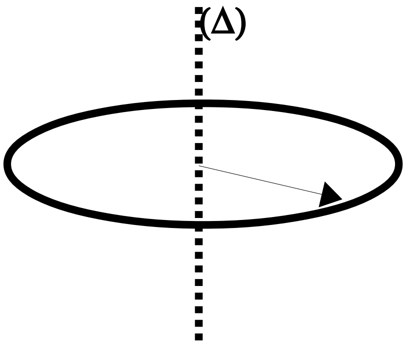
Pour un point M quelconque du solide, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ étant constant, on sait que la vitesse du point M est alors donnée (cf chapitre II) par : $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})$. D'autre part, on peut montrer que $\vec{u}.(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}) = (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}).\vec{v}$ On en déduit que : $L_\Delta = \iiint_V \omega(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})^2\, dm = \omega I_\Delta$ avec :

$$\boxed{I_\Delta = \iiint_V (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})^2\, dm = \iiint_V r^2\, dm}$$

qui est *le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe* (Δ) . En effet $\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM} = r\,\vec{w}$ où $\vec{w}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$, r est tout simplement la distance entre M et sa projection sur l'axe (Δ) .

Pour des géométries simples, on peut en déduire le moment d'inertie. Le tableau ci-dessous donne quelques exemples :

Système	***Moment d'inertie***
 Sphère pleine homogène de rayon R	$I_\Delta = \frac{2}{5} M R^2$

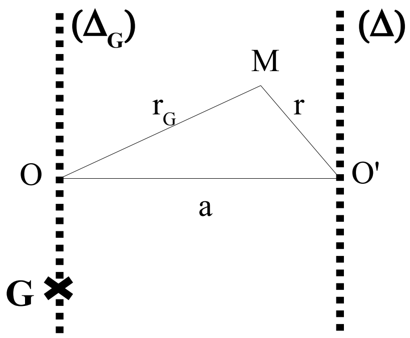
Système	***Moment d'inertie***
 Cylindre plein homogène de rayon R (ou bien disque homogène de rayon R)	$I_\Delta = \frac{1}{2} MR^2$
 Tige mince homogène de longueur ℓ	$I_\Delta = \frac{1}{12} M\ l^2$
 Anneau filiforme de rayon R	$I_\Delta = MR^2$

On appelle rayon de giration, k, du solide par rapport à l'axe (Δ) , la quantité telle que : $I_\Delta = Mk^2$.

3) Théorème d'Huygens :

Ce théorème permet de calculer le moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) quelconque, I_Δ, connaissant celui par rapport à l'axe (Δ_G) passant par le centre de masse G, I_G. On suppose évidemment que les deux axes (Δ) et (Δ_G) sont parallèles. Si a est la distance entre les deux axes :

$$\boxed{I_\Delta = I_G + Ma^2}$$



En effet, $r^2 = \overrightarrow{OM}^2 = r_G^2 + a^2 - 2\,\vec{a}\,.\vec{r_G}$ et $\vec{a}\,.\vec{r_G} = \vec{a}\,.\overrightarrow{GM}$ donc $I_\Delta = \iiint r^2\,dm = \iiint r_G^2\,dm + \iiint a^2\,dm - 2\,\vec{a}\,.\iiint \overrightarrow{GM}\,dm$. Par définition de G, la dernière intégrale est nulle, on en déduit le théorème d'Huygens.

Une conséquence du théorème d'Huygens est que le moment d'inertie est minimal lorsque l'axe passe par le centre de masse.

4) Energie cinétique :

La vitesse du point M situé à la distance r de l'axe (Δ) est $v = \omega r$. on en déduit que l'énergie cinétique du solide en rotation est : $E_c = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$.

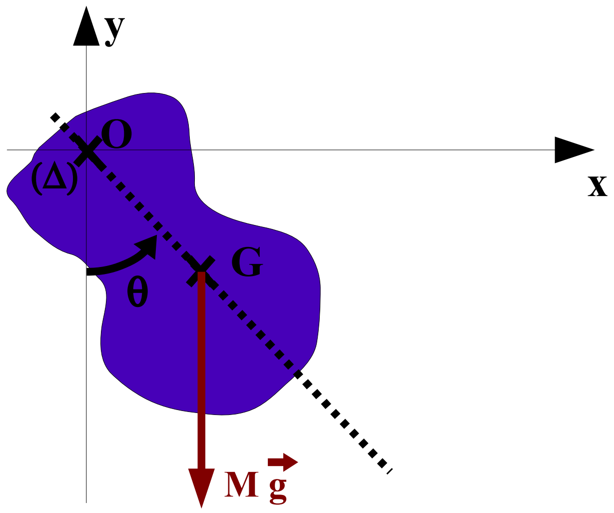
III Dynamique d'un solide :

1) Théorème du moment cinétique :

Soit O un point fixe de l'axe (Δ). Le théorème du moment cinétique pour le solide en rotation autour de l'axe (Δ) indique que le moment des forces extérieures par rapport à cet axe est :

$$\boxed{\mathscr{M} = I_\Delta \frac{d\omega}{dt} = I_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

2) Pendule pesant :



Un pendule pesant est un solide de forme quelconque mobile autour d'un axe horizontal ne passant pas par son centre d'inertie. Un pendule simple est constitué par un point matériel accroché à l'extrémité d'un fil rigide et de masse négligeable.

Dans le schéma précédent, l'axe (Δ) est perpendiculaire au plan de la page et passe par le point O. On note I_Δ , le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Δ) . On suppose que l'ensemble est placé dans le référentiel $(\Re)$ lié à la Terre qui est donc galiléen. On utilise un repère orthonormé direct $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, l'axe (Δ) correspondant au vecteur $\vec{u}_z$. On applique le théorème du moment cinétique :

$$I_\Delta \frac{d\,\omega}{dt} = I_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathscr{M} = \vec{u}_z . (\overrightarrow{OG} \wedge M\,\vec{g}) \quad .$$

Si on note $a = \|\overrightarrow{OG}\|$, on en déduit que le moment $\mathscr{M} = -Mga \sin\theta$. L'équation du mouvement est donc :

$$\ddot{\theta} + \frac{Mga}{I_\Delta} \sin\theta = 0$$

Si on pose $\omega_0^2 = \dfrac{Mga}{I_\Delta}$, on retrouve l'équation du mouvement d'un pendule habituel. Ainsi si on se place pour de petites oscillations , on peut écrire $\sin\theta \approx \theta$. L'équation différentielle du mouvement s'écrit simplement : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$ dont la solution est $\theta = \theta_0 \sin(\omega_0\, t)$. La période du mouvement est :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{Mga}}$$

Pour un pendule simple, tel que nous l'avions obtenu en mécanique du point dans les chapitres précédents, on a $a = l$ où l est la longueur du fil inextensible reliant la masse M au point d'attache O. On a évidemment $I_\Delta = M l^2$. On retrouve alors que $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, qui est la formule classique pour le pendule simple.

3) Pendule de torsion :

Un solide suspendu à un fil vertical peut être animé d'un mouvement de torsion autour de cet axe vertical de moment $\mathscr{M} = -C\theta$ où θ est l'angle de torsion du fil et C une constante dite constante de torsion du fil. Pour un fil cylindrique de diamètre d et de longueur l, on a $C = \gamma\frac{d^4}{l}$ (loi de Coulomb), γ est de l'ordre de quelques 10^9 en unités S.I.

L'équation du mouvement est alors : $I_\Delta\ddot{\theta} + C\theta = 0$. Cette équation différentielle du deuxième ordre admet une solution sinusoïdale pour toute valeur initiale de la torsion. La période du mouvement est donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{C}}$.

4) Analogies entre translation et rotation unidimensionnelles :

On peut faire une analogie entre une translation à une dimension selon l'axe Ox et la rotation autour d'un axe fixe.

	Translation	***Rotation***
Position	x	θ
Vitesse	$\dot{x}$	$\omega = \dot{\theta}$
Inertie	Masse m	Moment d'inertie I_Δ
Grandeur cinétique	Quantité de mouvement $p = m\dot{x}$	Moment cinétique $L_\Delta = I_\Delta\dot{\theta}$
Energie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$	$E_c = \frac{1}{2}I_\Delta\dot{\theta}^2$
Loi du mouvement	$m\ddot{x} = F_x$	$I_\Delta\ddot{\theta} = \mathscr{M}$

IV Axe instantané de rotation,roulement sans glissement :

Dans les partie qui précèdent, nous avons vu les définitions des éléments cinétiques et le théorème du moment cinétique pour un solide tournant autour d'un axe fixe. Ceci est adapté pour décrire le mouvement d'un pendule mais pas celui d'une roue d'un véhicule (vélo, voiture, brouette...) sur une route ou un chemin. Pour cela, nous avons besoin de définir l'axe instantané de rotation.

1) Axe instantané de rotation :

Nous allons reprendre les notations prises au chapitre II sur les changements de référentiels. On considère un référentiel absolu $(\Re)$ muni d'un repère OXYZ par rapport auquel un solide (S) est en mouvement. Nous allons considérer le référentiel $(\Re')$ lié au solide muni d'un repère O'xyz. On notera $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$, les vecteurs de base de OXYZ et $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs de base de O'xyz.

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires donc, on peut écrire :

$$\frac{d\vec{i}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{i} \quad , \quad \frac{d\vec{j}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{j} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{k}$$

Le vecteur $\vec{\omega}$ ainsi défini, s'appelle *le vecteur vitesse instantanée de rotation du solide (S) par rapport au référentiel* $(\Re)$. A priori, ce vecteur dépend du temps.

2) Distribution des vitesses dans un solide :

On considère deux points A et B du solide (S). Dans le repère O'xyz, A est de coordonnées (a_x, a_y, a_z) et B (b_x, b_y, b_z). On peut remarquer que ces coordonnées sont constantes au cours du temps car ces deux points appartiennent au solide. Il est aisé de calculer la vitesse de B en fonction de la vitesse de A. On se place dans le référentiel $(\Re)$. En dérivant l'expression $\vec{O}'B=\vec{O}'A+\overrightarrow{AB}$, et sachant que les coordonnées de A et B sont constantes, on en déduit :

$$\boxed{\vec{v}(B)=\vec{v}(A)+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AB}}$$

Cette loi représente la *loi de distribution des vitesses dans le solide*. Elle permet de calculer la vitesse en tout point du solide connaissant la vitesse en un point (le centre de masse par exemple) et le vecteur $\vec{\omega}$.

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, si O désigne un point de cet axe qui est aussi un point du solide, alors sa vitesse est nulle. On en déduit alors que pour tout point M du solide, $\vec{v}(M)=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$.

Pour en revenir au cas général, le lieu des points M où la vitesse $\vec{v}(M)$ est colinéaire à $\vec{\omega}$ est appelé *axe instantané de rotation du solide par rapport au référentiel* $(\Re)$, cette droite est évidemment parallèle au vecteur $\vec{\omega}$. Si on prend un point I de cet axe instantané de rotation, on peut remarquer que tous les points de cet axe ont la même vitesse. Cette vitesse, $\vec{v}_g$, est appelée vitesse de glissement du solide (S) à l'instant considéré. Ainsi, pour tout point M du solide, on a :

$$\boxed{\vec{v}(M)=\vec{v}(I)+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{IM}=\vec{v}_g+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{IM}}$$

Le mouvement d'un point quelconque du solide est ainsi la superposition d'un mouvement de translation le long de l'axe instantané de rotation et d'un mouvement de rotation autour de cet axe (en gros comme une visse). Il faut bien noter qu'à chaque instant, le vecteur $\vec{\omega}$ et l'axe instantané de rotation sont modifiés.

Remarque : si la vitesse de glissement est nulle, l'axe instantané de rotation du solide par rapport au référentiel $(\Re)$ est alors caractérisé par le fait que tous les points de cet axe ont une vitesse nulle.

3) Calcul de $\vec{\omega}$:

Pour calculer le vecteur $\vec{\omega}$, nous allons utiliser les formules de changement de référentiel vues au chapitre II. Pour cela, nous allons considérer le référentiel lié au solide, $(\Re')$, qui sera donc le référentiel relatif. En utilisant les mêmes repères notations qu'au 2) et au chapitre II, on obtient immédiatement que :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

où $\vec{v}_e$ est la vitesse d'entraînement ou vitesse du point coïncidant P, $\vec{v}_r$, la vitesse relative et $\vec{v}_a$, la vitesse absolue. En introduisant la vitesse instantanée de rotation, $\vec{\omega}_e$ du repère O'xyz par rapport au repère OXYZ, et en utilisant les notions vues précédemment, on a immédiatement :

$$\vec{v}_e = \vec{v}(P) = \vec{v}(O') + \vec{\omega}_e \wedge \overrightarrow{O'P}$$

où les quantités sans indices indiquent que les vitesses sont prises par rapport au référentiel $(\Re)$.

On peut ensuite obtenir des formules voisines pour les accélérations :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

où $\vec{a}_a$ est le vecteur accélération absolue, $\vec{a}_r$ est le vecteur accélération relative, $\vec{a}_e$, le vecteur accélération d'entraînement et $\vec{a}_c$, le vecteur accélération de Coriolis. Ces deux derniers termes ont les mêmes expressions qu'en cinématique du point si on remplace $\vec{\omega}$ par $\vec{\omega}_e$:

$$\vec{a}_c = 2\ \vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}(P) = \vec{a}(O') + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \wedge \overrightarrow{O'P} + \vec{\omega}_e \wedge (\vec{\omega}_e \wedge \overrightarrow{O'P})$$

Revenons maintenant au fait que le repère O'xyz est un repère lié au solide. Nous allons appliquer la loi de distribution des vitesses du solide. Celle-ci s'applique aussi bien dans le référentiel relatif que dans le référentiel absolu, car en fait au 2) nous n'avons pas eu besoin de préciser quoi que ce soit pour ce référentiel. On considère donc de nouveau, deux points A et B du solide. Dans $(\Re)$, nous avons :

$$\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{\omega}_a \wedge \overrightarrow{AB}$$

où $\vec{\omega}_a$ est la vitesse absolue instantanée de rotation. Dans $(\Re')$, nous avons de même :

$$\vec{v}_r(B) = \vec{v}_r(A) + \vec{\omega}_r \wedge \overrightarrow{AB}$$

où $\vec{\omega}_r$ est la vitesse relative instantanée de rotation. En utilisant l'expression de la vitesse d'entraînement, on montre aisément qu'on a aussi :

$$\vec{v}_e(B) = \vec{v}_e(A) + \vec{\omega}_e \wedge \overrightarrow{AB}$$

En additionnant ces trois relations et en utilisant la loi de composition des vitesses, on obtient immédiatement que :

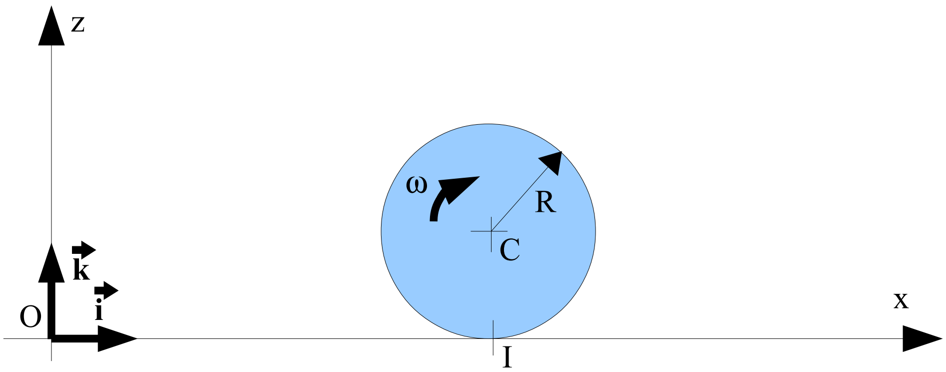
$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$$

Ainsi si on sait décomposer un mouvement de rotation en mouvement de rotations autour d'axes connus, la vitesse instantanée de rotation est alors la somme des vitesses instantanées de rotation autour de ces axes.

Si on considère que le référentiel $(\Re')$ est le référentiel du centre de masse $(\Re^*)$, c'est à dire le référentiel dont l'origine est le centre de masse G et dont les directions sont fixes et parallèles aux axes du référentiel de Copernic, alors on a évidemment $\vec{\omega}_e=\vec{0}$. On en déduit que $\vec{v}_e=\vec{v}(G)$ et $\vec{a}_e=\vec{a}(G)$ et que $\vec{\omega}(S/\Re)=\vec{\omega}(S/\Re^*)$ où les notations utilisées dans cette dernière relation sont évidentes si on note (S) le solide considéré.

4) Roulement sans glissement :

Pour introduire cette notion, nous allons considérer un exemple qui est le roulement d'une roue sur un plan (une route par exemple). Pour cela, on considère un cylindre de rayon R qui roule sur un plan sans glisser (même si cette notion n'a pas encore été définie précisément, le sens intuitif permet de le comprendre sans difficulté).



Si on considère la roue se déplaçant sur la route sans glisser, c'est à dire que la vitesse de glissement est nulle, on remarque facilement que la vitesse du centre C de la roue est : $v_C=R\dfrac{d\theta}{dt}=R\omega$. Le centre C est également le centre de masse de la roue. Dans le référentiel du centre de masse, la roue tourne à la vitesse ω autour de l'axe passant par C et normal au plan de la feuille (attention : cet axe n'est pas l'axe instantané de rotation comme nous allons le voir).

On considère le point I de la roue qui, à l'instant t (mais plus à t+dt), est en conatct avec le sol comme indiqué sur la figure ci-dessus. Les points I et C appartenant au même solide (la roue), en utilisant la loi de distribution des vitesses du solide, on a : $\vec{v}(I)=\vec{v}(C)+\vec{\omega}\wedge\vec{CI}$. En introduisant le vecteur unitaire $\vec{j}$ pour que la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ soit orthonormée directe, on a $\vec{v}(C)=R\omega\vec{i}$, $\vec{\omega}=\omega\vec{j}$ et $\vec{CI}=-R\vec{k}$. On en déduit que $\vec{v}(I)=\vec{0}$. On peut donc écrire :

$$\vec{v}(C)=\vec{\omega}\wedge\vec{IC}$$

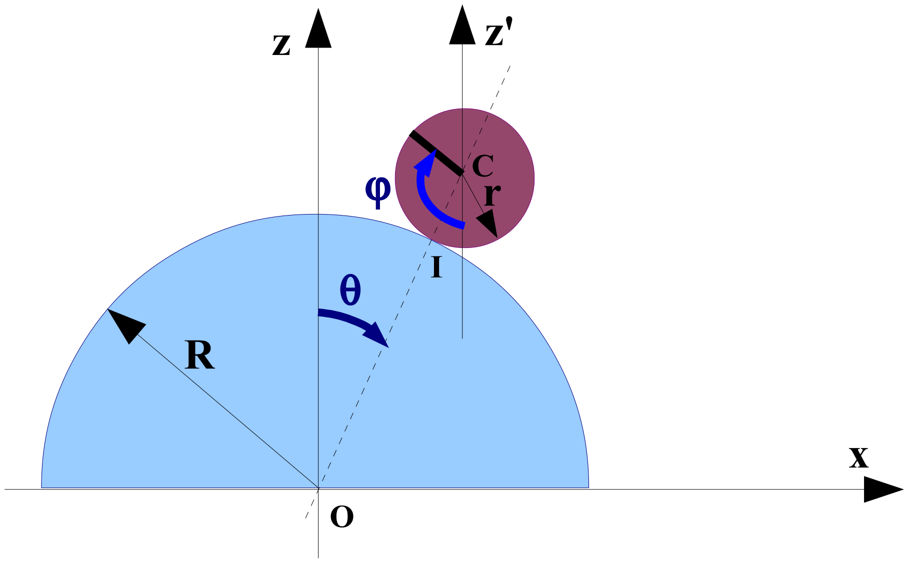
c'est à dire que le point I apparaît comme le centre instantané de rotation avec une vitesse de glissement nulle ($\vec{v}(I)=\vec{0}$). Comme la roue est cylindrique, tous les 'points I' le long de la génératrice en contact avec le sol ont donc une vitesse nulle. Cette génératrice est donc l'axe instantané de rotation du solide par rapport au référentiel $(\Re)$.

On peut donc généraliser ce résultat et énoncer la condition de roulement sans glissement. On considère un solide (S) en contact avec une surface (Σ) fixe dans le référentiel $(\Re)$ considéré : le solide (S) roule sur la surface (Σ) sans glisser si la vitesse du point de contact I mais considéré comme point du solide est nulle dans le référentiel $(\Re)$ lié à la surface (Σ) que l'on peut écrire sous la forme :

$$\vec{v}(I \in (S)/(\Sigma)) = \vec{0}$$

Il faut bien préciser que le point I est un point du solide et qu'on considère le mouvement par rapport à la surface fixe!

Pour terminer ce cours, nous allons traiter un exemple du roulement d'un cylindre sur un autre cylindre.



L'angle φ représente l'angle entre la verticale et un rayon marqué sur le cylindre. On cherche la relation qui traduit le mouvement sans glissement. On note I le point de contact du cylindre de rayon r sur le demi-cylindre fixe de rayon R.

La vitesse du point de contact I appartenant au solide est : $\vec{v}(I) = \vec{v}(C) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CI}$ en utilisant toujours la loi de distribution des vitesses. La vitesse de rotation du cylindre de rayon r, est $\omega = \dot{\varphi}$: $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{j}$. La vitesse du point C est déterminée par la rotation autour du point O à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, l'abscisse curviligne de C est évidemment $s(t) = (R+r)\theta$ donc $\vec{v}(C) = (R+r)\dot{\theta}\vec{u}_t$ où $\vec{u}_t$ est le vecteur tangent à la trajectoire. Ce vecteur est normal à la droite OC donc il est normé et proportionnel à $\vec{j} \wedge \overrightarrow{OC}$. On a $\overrightarrow{OC} \propto \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{i}$. Finalement, $\vec{v}(C) = (R+r)\dot{\theta}(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{k})$. Enfin, $\overrightarrow{CI} = -r\cos\theta\,\vec{k} - r\sin\theta\,\vec{i}$ et $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CI} = -r\omega(\vec{j} \wedge \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{i}) = -r\dot{\varphi}(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{k})$. On en déduit que la condition de glissement sans roulement qui s'écrit $\vec{v}(I) = \vec{0}$ est :

$$(R+r)\dot{\theta} = r\dot{\varphi}$$