MECANIQUE

TABLE DES MATIERES

MECANIQUE 1

UTILISATION DU COURS 9
CHAPITRE 1 INTRODUCTION 11
1.1 DERIVEES DUNE FONCTION. 11
1.2 DERIVEES D'UN VECTEUR 13
1.3 PRIMITIVES 14
1.4 DEVELOPPEMENTS LIMITES 14
1.5 RELATIONS TRIGONOMETRIQUES 15
1.6 RESOLUTION D'UN TRIANGLE 15
1.7 VECTEURS. 16
1.8 PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS. 19
1.9 DERIVEE D'UN VECTEUR UNITAIRE 20
1.10 PRODUIT VECTORIEL DE DEUX VECTEURS. 21
1.11 VECTEUR MOMENT D'UN VECTEUR LIE 22
1.12 TORSEUR 23
CHAPITRE 2 LIAISONS ENTRE DEUX SOLIDES 26
2.1 DEGRES DE LIBERTE 26
2.2 DEFINITIONS 26
2.3 EXEMPLES DE LIAISONS 27
CHAPITRE 3 ACTIONS MECANIQUES 32
3.1 ACTIONS MECANIQUES DE CONTACT ET ACTIONS MECANIQUES S'EXERÇANT A DISTANCE. 32
3.2 ACTIONS MECANIQUES REPARTIES ET ACTIONS MECANIQUES LOCALISEES 32
3.3 MODELISATION D'UNE ACTION MECANIQUE : LA FORCE 33
3.4 EXEMPLES DE FORCES 34
CHAPITRE 4 ACTIVITES EXPERIMENTALES EN STATIQUE 38
4.1 ACTIVITE 1 : EQUILIBRE D'UN SOLIDE SOUMIS A DEUX FORCES. 38
4.2 ACTIVITE 2 : EQUILIBRE D'UN SOLIDE SOUMIS A TROIS FORCES NON PARALLELES 38
4.3 ACTIVITE 3 :ALLONGEMENT D'UN RESSORT SOUS L'ACTION D'UNE CHARGE. 39
4.4 ACTIVITE 4: EQUILIBRE D'UN SOLIDE MOBILE AUTOUR D'UN AXE 41
4.5 COUPLE DE FORCES 44
4.6 ACTIVITE 5 :TORSION D'UN FIL SOUS L'ACTION D'UN COUPLE DE FORCES. 45

4.7 ACTIVITE 6 :EQUILIBRE D'UN CORPS SOUMIS A TROIS FORCES PARALLELES 47
4.8 COMPOSITION DES FORCES. 48
4.9 ACTIVITE 7 : ADHERENCE 49
4.10 EXERCICES 52
4.11 CORRIGE DES EXERCICES 57
CHAPITRE 5 STATIQUE – EQUILIBRE D' UN SOLIDE 68
5.1 PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE. 68
5.2 RESOLUTION D'UN PROBLEME DE STATIQUE 69
5.3 APPLICATION 1 :EQUILIBRE D'UN SOLIDE 69
5.4 APPLICATION 2 : EQUILIBRE D'UN ENSEMBLE DE SOLIDES 72
5.5 APPLICATION 3 : EXERCICE FAISANT INTERVENIR DES FORCES DE FROTTEMENT. 74
5.6 EXERCICES 77
5.7 CORRIGES DES EXERCICES 80
CHAPITRE 6 CINEMATIQUE - MOUVEMENT GENERAL D'UN POINT 84
6.1 GENERALITES 84
6.2 REPERAGE D' UN POINT DANS L' ESPACE 85
6.3 VECTEUR VITESSE 86
6.4 VECTEUR ACCELERATION 88
6.5 EXERCICES 91
6.6 CORRIGES DES EXERCICES 93
CHAPITRE 7 MOUVEMENTS RECTILIGNES 98
7.1 MOUVEMENT RECTILIGNE QUELCONQUE 98
7.2 MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME 99
7.3 MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMEMENT VARIE 99
7.4 COMPOSITION DES VITESSES ET DES ACCELERATIONS. 100
7.5 EXERCICES 102
7.6 CORRIGES DES EXERCICES 104
CHAPITRE 8 MOUVEMENTS CIRCULAIRES 110
8.1 ACTIVITE 110
8.2 MOUVEMENT CIRCULAIRE QUELCONQUE 112
8.3 MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME 114
8.4 MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORMEMENT VARIE 115
8.5 EXERCICES 116
8.6 CORRIGES DES EXERCICES 118
CHAPITRE 9 MOUVEMENTS SINUSOIDAUX 122

9.1 ACTIVITE. 122
9.2 MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOIDAL 124
9.3 MOUVEMENT CIRCULAIRE SINUSOIDAL. 127
9.4 EXERCICES 128
9.5 CORRIGES DES EXERCICES 130
CHAPITRE 10 PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE 134
10.1 ACTIVITES 134
10.2 PRINCIPE DE L'INERTIE. 135
10.3 LES REPERES GALILEENS. 137
10.4 CENTRE D' INERTIE D' UN SYSTEME MATERIEL 139
10.5 VECTEUR QUANTITE DE MOUVEMENT 139
10.6 FORCES INTERIEURES ET FORCES EXTERIEURES. 141
10.7 LOIS DE NEWTON 141
10.8 APPLICATIONS A L' ETUDE DU MOUVEMENT DE G D'UN PROJECTILE 143
10.9 APPLICATION AU MOUVEMENT DE TRANSLATION D'UN SOLIDE SUR UN PLAN INCLINE 146
10.10 APPLICATION AU PENDULE CONIQUE. 147
10.11 EXERCICES 149
10.12 CORRIGES DES EXERCICES 154
CHAPITRE 11 DYNAMIQUE DE ROTATION 166
11.1 MOMENT D' INERTIE D' UN SOLIDE PAR RAPPORT A UN AXE. 166
11.2 VECTEUR ROTATION 168
11.3 MOMENT CINETIQUE 169
11.4 RELATION DE LA DYNAMIQUE DE ROTATION 170
11.5 APPLICATION AU FREINAGE D' UN ROTOR SOUS L' ACTION D'UN COUPLE DE MOMENT CONSTANT 172
11.6 ETUDE D' UN SYSTEME DEFORMABLE 173
11.7 EXERCICES 175
11.8 CORRIGES DES EXERCICES 177
CHAPITRE 12 PUISSANCE ET TRAVAIL D'UNE FORCE 184
12.1 DEFINITION DE LA PUISSANCE D'UNE FORCE. 184
12.2 TRAVAIL D'UNE FORCE. 184
12.3 PUISSANCE MOYENNE ET PUISSANCE INSTANTANEE D'UNE FORCE 190
12.4 EXERCICES 192
12.5 CORRIGES DES EXERCICES 194
CHAPITRE 13 ENERGIE CINETIQUE D' UN SOLIDE - THEOREME DE L' ENERGIE CINETIQUE 198

13.1 ENERGIE CINETIQUE 198
13.2 THEOREME DE L' ENERGIE CINETIQUE 199
13.3 APPLICATION AU MOUVEMENT D'UN PROJECTILE. 201
13.4 APPLICATION DU THEOREME A UN MOUVEMENT DE TRANSLATION 202
13.5 APPLICATION DU THEOREME A UN SYSTEME DEFORMABLE 203
13.6 APPLICATION AU ROULEMENT SANS GLISSEMENT D'UN CYLINDRE HOMOGENE SUR UN PLAN INCLINE 205
13.7 EXERCICES 207
13.8 CORRIGES DES EXERCICES 209
CHAPITRE 14 ENERGIE POTENTIELLE 213
14.1 ENERGIE POTENTIELLE DE PESANTEUR 213
14.2 ENERGIE POTENTIELLE ELASTIQUE 215
14.3 EXERCICES 217
CHAPITRE 15 ENERGIE MECANIQUE 221
15.1 ACTIVITES 221
15.2 ENERGIE MECANIQUE 224
15.3 VARIATION D'ENERGIE MECANIQUE D'UN SOLIDE 224
15.4 RETOUR SUR LES EXEMPLES DES ACTIVITES 225
CHAPITRE 16 CONSERVATION DE L'ENERGIE MECANIQUE 227
16.1 DANS QUELLES CONDITIONS L'ENERGIE MECANIQUE SE CONSERVE ? 227
16.2 EXEMPLES DE CONSERVATION DE L'ENERGIE MECANIQUE 227
16.3 EXERCICES 228
16.4 CORRIGE DES EXERCICES 231
CHAPITRE 17 NON CONSERVATION DE L'ENERGIE MECANIQUE. 235
17.1 DANS QUELS CAS L'ENERGIE MECANIQUE NE SE CONSERVE PAS? 235
17.2 EXEMPLES DE NON CONSERVATION DE L'ENERGIE MECANIQUE 235
17.3 EXERCICES 237
17.4 CORRIGES DES EXERCICES 238
CHAPITRE 18 PROBLEMES DE CHOCS 241
18.1 CHOC ENTRE DEUX CORPS SUPPOSES PONCTUELS 241
18.2 COUPLAGE DE DEUX SOLIDES TOURNANT AUTOUR DU MÊME AXE 241
18.3 EXERCICES 242
18.4 CORRIGES DES EXERCICES 244
CHAPITRE 19 OSCILLATEURS MECANIQUES LIBRES 247
19.1 PENDULE SIMPLE 247
19.2 PENDULE PESANT. 250
19.3 PENDULE DE TORSION. 252

19.4 OSCILLATEUR HARMONIQUE HORIZONTAL 255
19.5 OSCILLATEUR HARMONIQUE VERTICAL 257
19.6 EXERCICES 259
19.7 CORRIGES DES EXERCICES 262
CHAPITRE 20 OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES. 267
20.1 EXCITATEUR ET RESONATEUR 267
20.2 EXPERIENCE DE RESONANCE 268
CHAPITRE 21 RELATIONS APPLICABLES AUX MILIEUX CONTINUS 271
21.1 INTRODUCTION 271
21.2 GRANDEURS RELATIVES AUX MASSES 271
21.3 DYNAMIQUE 272
21.4 ENERGIE 272

UTILISATION DU COURS

Il est conseillé aux utilisateurs de ce cours d'étudier chaque chapitre en faisant, au fur et à mesure, les exercices d'application directe du cours proposés pratiquement à chaque paragraphe (☐ Exercice)

Ensuite à la fin de chaque chapitre, faire les autres exercices proposés (* Exercice) Ces exercices sont des exercices complémentaires, plus difficiles que les précédents ou portant sur l'ensemble du chapitre.

C'est volontairement que certains exercices ont été proposés dans plusieurs chapitres de ce cours : il est intéressant de comparer les différentes méthodes de résolution d'un même exercice.

Les corrigés de tous les exercices proposés se trouvent à la fin de chaque chapitre.

Comment réussir en mécanique ?

Ce qu'il ne faut pas faire :

- lire le cours de manière superficielle
- vouloir résoudre les exercices sans bien connaître le cours
- se limiter à la comparaison des résultats avec ceux du corrigé ; on peut avoir un bon résultat et une méthode fausse. C'est très fréquent !

Conseils :

- Lire la totalité de l'énoncé ; l'analyser
- Faire un ou des schéma(s), même dans un cas simple
- Réfléchir au système physique proposé
- Essayer de voir à quelle partie du cours se rapporte l'exercice
- Définir le système que l'on va étudier et préciser le référentiel d'étude.
- Faire l'inventaire des actions mécaniques subies par le système
- Appliquer le principe fondamental ou utiliser l'énergie
- Mettre en équation et résoudre en faisant preuve de rigueur mathématique
- Présenter le résultat avec une unité et voir si l'ordre de grandeur du résultat est conforme au bon sens.

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 DERIVEES DUNE FONCTION.

1.1.1 Dérivée première

y' = f'(x), dérivée par rapport à x de la fonction y=f(x) est souvent notée en physique: $\frac{dy}{dx}$

Dans le cas où il s'agit d'une dérivée par rapport au temps, on pourra utiliser la notation suivante : $\frac{dy}{dt}$ ou $\dot{y}$

1.1.2 Dérivée seconde

y''= f ''(x), dérivée seconde par rapport à x, de la fonction y=f(x) est souvent notée en physique: $\frac{d^2y}{dx^2}$ Dans le cas où il s'agit d'une dérivée par rapport au temps, on pourra utiliser la notation suivante : $\frac{d^2y}{dt^2}$ ou $\ddot{y}$

Exemple :

$$\text{Si } y = 5t^3 + 3t - 1, \qquad \dot{y} = 15t^2 + 3 \qquad \ddot{y} = 30t$$

1.1.3 Expressions de quelques dérivées de fonctions.

y=f(x)	$\frac{dy}{dx}$		y=f(x)	$\frac{dy}{dx}$
ax^n	$a\,n\,x^{n-1}$		tan x	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
sin x	cosx		e^{ax}	$a\,e^{ax}$
cos x	-sin x		$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
sin (a x+b)	a cos(a x+b)		$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

1.1.4 Intérêt de la notation différentielle des dérivées

➢ **Premier exemple :**

Si y est fonction de u et si u est fonction de x :

y = sin3x y = sinu avec u = 3x

La dérivée de y par rapport à u est cos u

La dérivée de y par rapport à x est (cos u).u' c'est-à-dire (cos3x).3

On peut écrire

$$\frac{dy}{du} = \cos u \qquad \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = (\cos u)3 = 3\cos 3x$$

➢ **Deuxième exemple :**

Si y est fonction de u, si u est fonction de θ et si θ est fonction du temps , on peut écrire

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{d\theta} \text{ et } \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$

Exemple $y = \sin^2(3t+2)$

$y = u^2$ avec $u = \sin(\theta + 2)$ et $\theta = 3t$

$$\frac{dy}{du} = 2u \qquad \frac{du}{d\theta} = \cos(\theta + 2) \qquad \frac{d\theta}{dt} = 3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = 2u.(\cos(\theta + 2)).3 = 6u\cos(\theta + 2)$$

$$\frac{dy}{dt} = 6\sin(\theta + 2)\cos(\theta + 2) = 6\sin(3t + 2)\cos(3t + 2)$$

➢ **Troisième exemple :**

Calculer la variation dZ de l'impédance d'un dipôle RC série lorsque l'on fait varier la pulsation de ω à ω+dω.

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} = (R^2 + C^{-2}\omega^{-2})^{1/2}$$

$$\frac{dZ}{d\omega} = \frac{1}{2}(R^2 + C^{-2}\omega^{-2})^{-1/2}.\frac{d(R^2 + C^{-2}\omega^{-2})}{d\omega}$$

$$\frac{dZ}{d\omega} = \frac{1}{2}(R^2 + C^{-2}\omega^{-2})^{-1/2}.(-2C^{-2}\omega^{-3})$$

$$\frac{dZ}{d\omega} = -\frac{\omega^{-3}}{C^2\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}$$

$$d'où\ \ dZ = -\frac{d\omega}{C^2\omega^3\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}$$

1.2 DERIVEES D'UN VECTEUR

Soit un vecteur $\vec{A}$ dépendant d'un paramètre, par exemple, le temps

$\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ x, y et z étant des fonctions du temps.

Par définition, on appelle dérivée du vecteur $\vec{A}$ par rapport au temps, le vecteur ayant pour composantes $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$. Ce vecteur est noté $\frac{d\vec{A}}{dt}$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad \text{ou} \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

La dérivée seconde du vecteur est:

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

La dérivée d'un vecteur est un vecteur

Exemple :

$$si\ \overrightarrow{OM} = (3t^2 + 2t)\vec{i} + 5t\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (6t + 2)\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = 6\vec{i}$$

1.3 PRIMITIVES

y=f(x)	Primitives		y=f(x)	Primitives
$\int ax^n dx$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1}+C$		$\int \cos(ax+b)dx$	$\frac{\sin(ax+b)}{a}+C$
$\int \sin(ax+b)dx$	$-\frac{\cos(ax+b)}{a}+C$		$\int e^{ax}dx$	$\frac{e^{ax}}{a}+C$

1.4 DEVELOPPEMENTS LIMITES

Expression	Expression approchée	Condition
$(1+\varepsilon)^n$	$\approx 1+n\varepsilon$	Si $\varepsilon << 1$
$\frac{1}{1+\varepsilon}$	$\approx 1-\varepsilon$	Si $\varepsilon << 1$
sin x	$\approx x$	x petit et exprimé en rad
cos x	$\approx 1-\frac{x^2}{2}$	x petit et exprimé en rad
tan x	$\approx x$	x petit et exprimé en rad

Exemple :

Calculons l'erreur relative effectuée lorsque l'on assimile sinx à x pour :

- ***x=6 degrés***

x=0,104719 rad sinx = 0,104528. L'erreur relative est ;

$$\frac{(0,104719-0,104528)}{0,104528}100=0,2\%$$

- ***x=15 degrés***

x=0,261799 rad sinx= 0,258819 L'erreur relative est ;

$$\frac{(0,261799-0,258819)}{0,258819}100=1,1\%$$

Ce calcul montre qu'il faut être prudent dans les approximations. Tout dépend en effet de l'erreur que l'on veut bien tolérer en faisant l'approximation !

1.5 RELATIONS TRIGONOMETRIQUES

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

cos(a+b)=cosa cosb-sina sinb

sin(a+b) =sina cosb+cosa sinb

sin 2a= 2 sina cosa

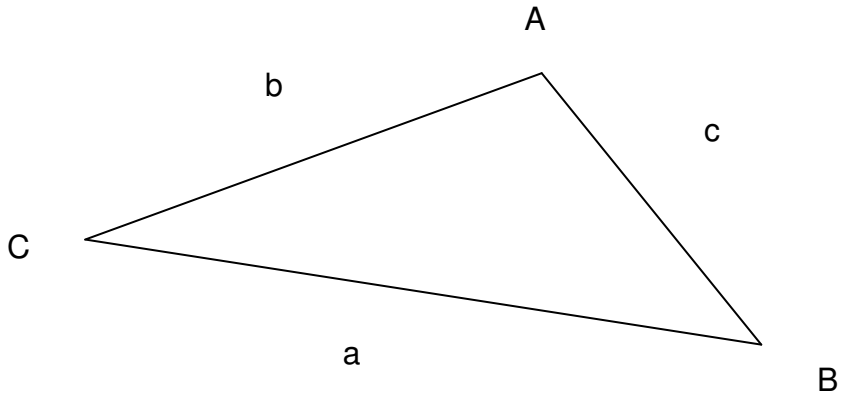
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$1+\cos 2a = 2\cos^2 a$

$1-\cos 2a = 2\sin^2 a$

1.6 RESOLUTION D'UN TRIANGLE

Soit un triangle ABC quelconque; a, b et c sont les longueurs des côtés respectivement opposés aux angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, et $\hat{C}$



D'après le théorème d'Al Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

De même : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

Cas particulier :

Si le triangle est rectangle en A, on obtient $a^2 = b^2 + c^2$ relation de Pythagore.

Autre relation :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

1.7 VECTEURS.

1.7.1 Egalité de deux vecteurs

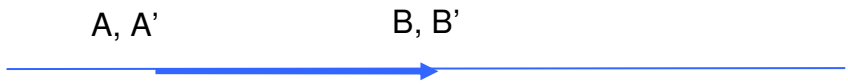
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même norme.

1.7.2 Différentes catégories de vecteurs

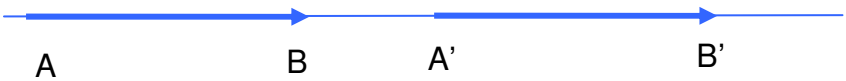
L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ n'a pas la même signification suivant la catégorie de vecteur utilisée.

1.7.2.1 Cas des vecteurs liés .

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ signifie dans ce cas que A et A' sont confondus et que A'et B'sont confondus.



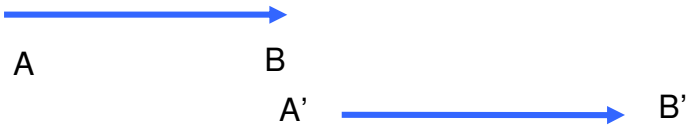
1.7.2.2 Cas des vecteurs glissants.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ signifie dans ce cas que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ont même support.

1.7.2.3 Cas des vecteurs libres.

Les deux vecteurs n'ont dans ce cas ni origine déterminée ni support déterminé.



Remarque :

Ces trois catégories de vecteurs sont utilisées en physique ;

Le poids d'un corps est un vecteur lié.

La tension d'un fil, inextensible et de masse négligeable, se transmet de proche en proche le long du fil et est représentée par un glisseur.

Dans une région où on peut le considérer comme uniforme, le champ de pesanteur est représenté par un vecteur libre : le vecteur $\vec{g}$

1.7.3 Produit d'un vecteur par un scalaire

Quand on multiplie un vecteur par un scalaire on obtient un vecteur.

Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$:

les supports des vecteurs sont parallèles ou confondus

les vecteurs ont même sens si k>0 et ont des sens contraires si k<0

$AB = |k| \; CD$

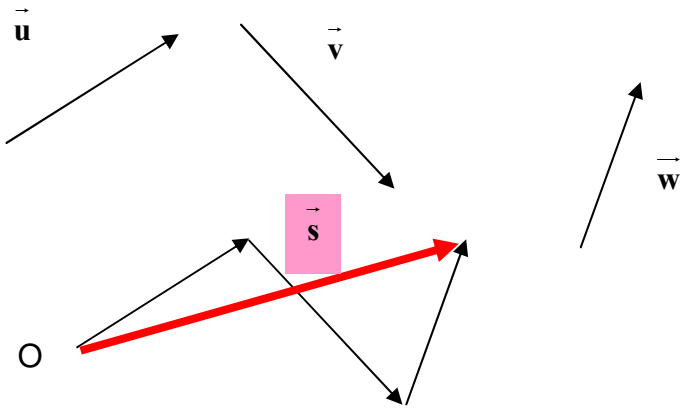
1.7.4 Somme de vecteurs

Soit $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

Le vecteur $\vec{s}$ est obtenu de la façon suivante :

Par un point O de l'espace on trace un vecteur égal au vecteur $\vec{u}$. Par l'extrémité de $\vec{u}$ on trace un vecteur égal au vecteur $\vec{v}$. Par l'extrémité de $\vec{v}$. on trace un vecteur égal au vecteur $\vec{w}$. Le vecteur qui a pour origine O et pour extrémité celle de $\vec{w}$ est le vecteur somme.

Dans le cas général, la norme du vecteur somme est différente de la somme des normes des vecteurs composant la somme.



Cas général

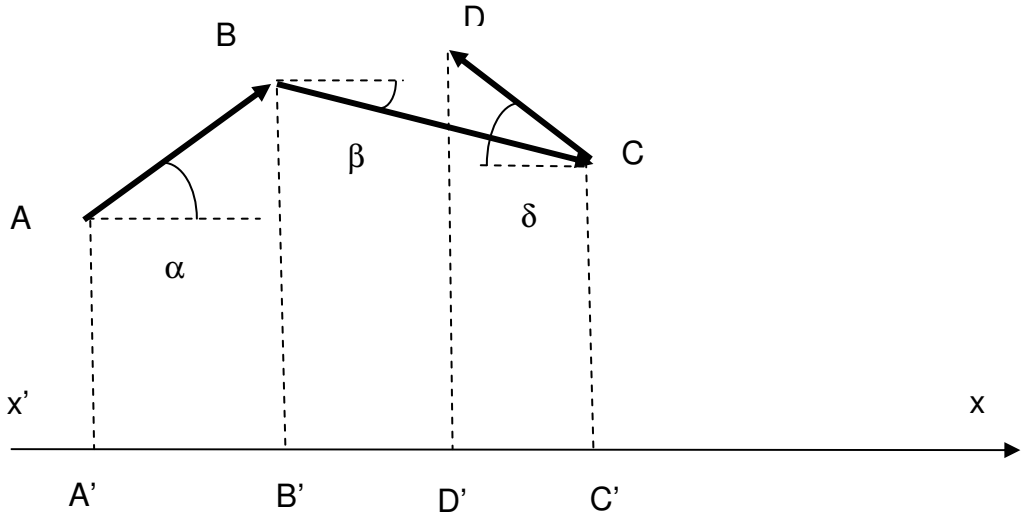
$$\left\|\vec{s}\right\| \neq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\| + \left\|\vec{w}\right\|$$

Cas particulier :

si les trois vecteurs composant la somme ont même direction et même sens :

$$\left\|\vec{s}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\| + \left\|\vec{w}\right\|$$

1.7.5 Projection d'une somme vectorielle sur un axe.



On considère la somme vectorielle : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

En projetant cette somme vectorielle sur l'axe x'x, on peut écrire.

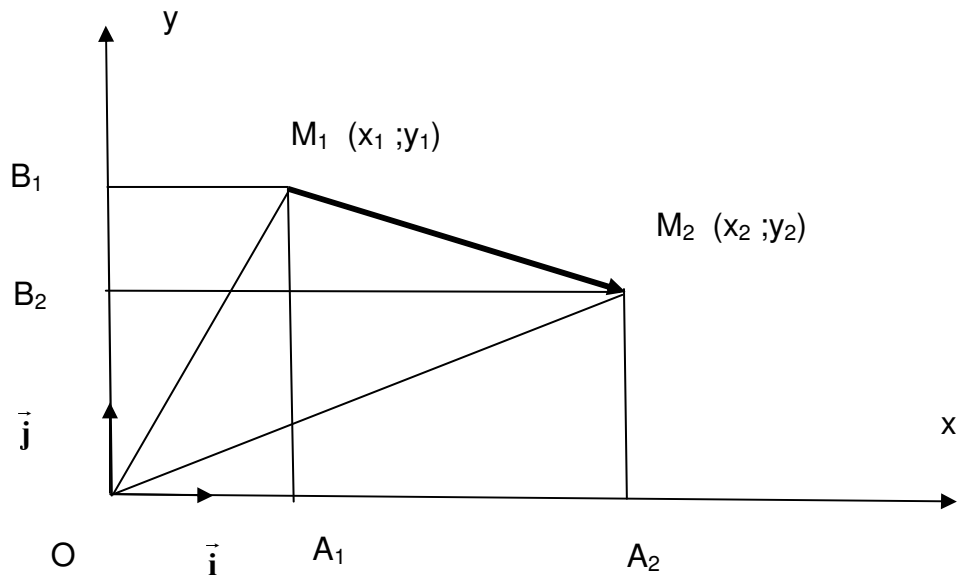
$$\overline{A'D'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'}$$

La mesure algébrique de la projection sur un axe du vecteur somme est égale à la somme des mesures algébriques des projections sur cet axe des vecteurs composant la somme.

Ceci se traduit, dans le cas particulier de la figure, par :

$$\overline{A'D'} = AB\cos\alpha + BC\cos\beta - CD\cos\delta$$

1.7.6 Composantes d'un vecteur



$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1M_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$

$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2M_2} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ X et Y sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$

1.8 PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS.

1.8.1 Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs est un réel.

$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = V_1.V_2\cos(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$

1.8.2 Propriétés

- Ce produit est commutatif
- Lorsque deux vecteurs sont orthogonaux, $\cos(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) = 0$ et le produit scalaire est nul.

Conséquence : $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$

➢ si a et b sont des réels :

$$(a\overrightarrow{V_1} + b\overrightarrow{V_2})\overrightarrow{V_3} = a\overrightarrow{V_1}\overrightarrow{V_3} + b\overrightarrow{V_2}\overrightarrow{V_3}$$

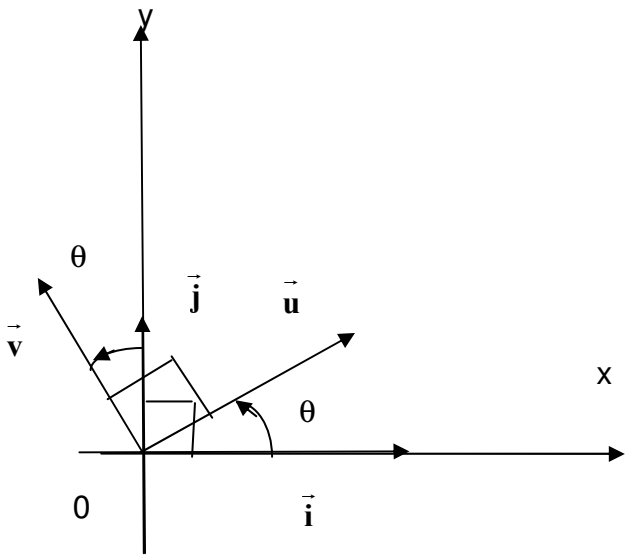
1.8.3 Expression en fonction des composantes des vecteurs.

Si $\overrightarrow{V_1} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}$ et si $\overrightarrow{V_2} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}$

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k})(X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k})$$

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = (X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2)$$

1.9 DERIVEE D'UN VECTEUR UNITAIRE



On considère les quatre vecteurs unitaires suivants :

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont portés par les axes Ox et Oy

$\vec{u}$ fait un angle θ avec Ox

$\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ (cf schéma)

Les normes de ces quatre vecteurs sont égales à un

On peut écrire

$\vec{u}\vec{u} = \vec{u}^2 = 1$ On dérive cette relation par rapport à θ.

$2\vec{u}\dfrac{d\vec{u}}{d\theta} = 0$ le produit scalaire étant nul, on en déduit que les deux vecteurs

$\vec{u}$ et $\dfrac{d\vec{u}}{d\theta}$ sont orthogonaux.

$$\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\| \cos\theta\, \vec{i} + \left\|\vec{u}\right\| \sin\theta\, \vec{j} = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j} \qquad \frac{d\vec{u}}{d\theta} = -\sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j}$$

On remarque que $\vec{v} = -\sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j}$ donc $\frac{d\vec{u}}{d\theta}$ et $\vec{v}$ sont égaux.

Le vecteur $\frac{d\vec{u}}{d\theta}$ est en quadrature avance sur $\vec{u}$

1.10 PRODUIT VECTORIEL DE DEUX VECTEURS.

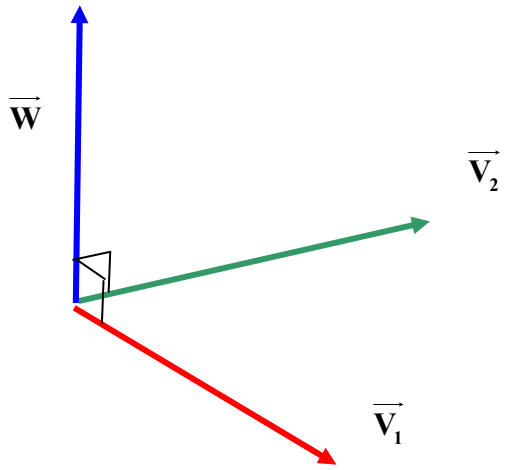
1.10.1 Définition

On appelle produit vectoriel du vecteur $\overrightarrow{V_1}$ par le vecteur $\overrightarrow{V_2}$ le vecteur $\overrightarrow{W}$ défini de la manière suivante :

- $\overrightarrow{W}$ est orthogonal à $\overrightarrow{V_1}$ et à $\overrightarrow{V_2}$
- le trièdre, $\overrightarrow{V_1}$ $\overrightarrow{V_2}$ $\overrightarrow{W}$, est direct
- $W = V_1.V_2 \left|\sin(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})\right|$

1.10.2 Notation :

$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$



1.10.3 Propriétés.

➢ Le produit vectoriel est anticommutatif :

$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = -\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_1}$

➢ Produit vectoriel de vecteurs unitaires

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$

$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$

$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0} \quad \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0} \quad \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

➢ $\overrightarrow{V_1} \wedge (\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}) = (\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}) + (\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_3})$

1.10.4 Expression en fonction des composantes des vecteurs.

Si $\overrightarrow{V_1} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}$ et si $\overrightarrow{V_2} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}$

$\overrightarrow{W} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

$\overrightarrow{W} = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\vec{i} + (Z_1X_2 - X_1Z_2)\vec{j} + (X_1Y_2 - Y_1X_2)\vec{k}$

ou encore

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \overrightarrow{W} = \begin{bmatrix} Y_1Z_2 - Z_1Y_2 \\ Z_1X_2 - X_1Z_2 \\ X_1Y_2 - Y_1X_2 \end{bmatrix}$$

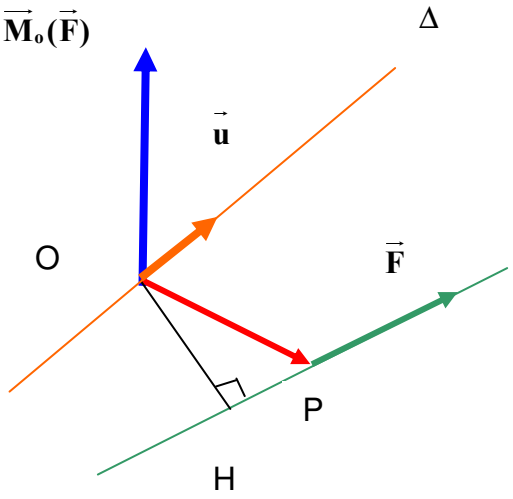
1.11 VECTEUR MOMENT D'UN VECTEUR LIE.

Soit un vecteur $\vec{F}$ lié au point P : (P, $\vec{F}$)

1.11.1 Vecteur moment de $\vec{F}$ par rapport à un point O.

Par définition le vecteur moment de $\vec{F}$ par rapport à O est le vecteur :

$\overrightarrow{M_0(\vec{F})} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$



1.11.2 Moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe Δ portant le vecteur unitaire $\vec{u}$

Par définition le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe **Δ** est la grandeur algébrique :

$\mathbf{M_\Delta(\vec{F}) = \vec{u}.\overrightarrow{M_O}(\vec{F})}$. Ce moment est un réel.

Ce moment est indépendant du choix de O sur l'axe ; en effet si $\mathbf{O' \in \Delta}$,

$\mathbf{\vec{u}.\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \vec{u}.\overrightarrow{M_{O'}}(\vec{F})}$

1.11.3 Moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe Δ, orthogonal à $\vec{F}$

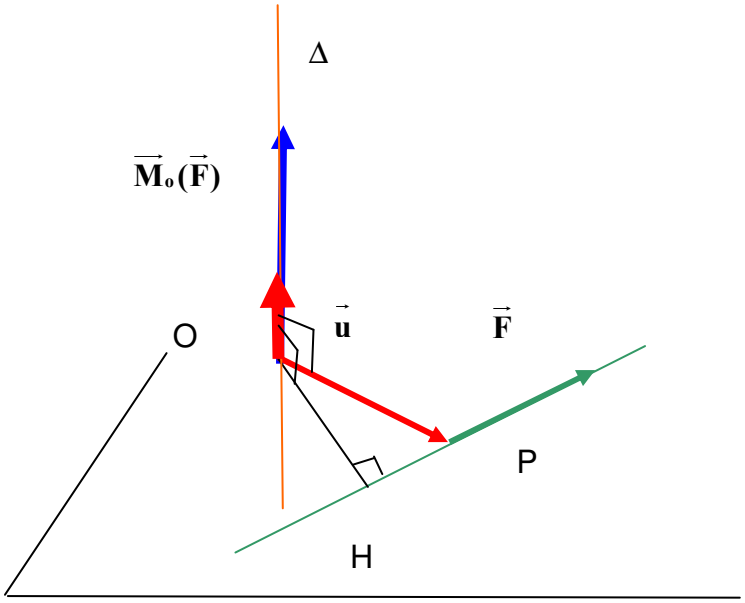
C'est un cas particulier fréquent et important

Dans ce cas le vecteur unitaire $\vec{u}$ a même direction que $\overrightarrow{M_O}(\vec{F})$

$\mathbf{M_\Delta(\vec{F}) = \vec{u}.\overrightarrow{M_O}(\vec{F})}$

$\left| \mathbf{M_{\Delta(\vec{F})}} \right| = \left\| \mathbf{\overrightarrow{M}_{O(\vec{F})}} \right\|$

Dans le cas où $\vec{F}$ est orthogonale à l'axe Δ la valeur absolue du moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe Δ est égale à la norme du vecteur moment de $\vec{F}$ par rapport à O, intersection de Δ et du plan orthogonal à Δ contenant $\vec{F}$.



1.12 TORSEUR

1.12.1 Notion de torseur.

Soit un ensemble de n points Pi ; à chacun de ces points est associé un vecteur $\overrightarrow{q_i}$ qui peut être, par exemple, la vitesse du point ou une force appliquée en ce point.

On définit, pour le système de vecteurs, la résultante $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{q_i}$ et le moment en O,

$$\vec{M_O} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{q_i}$$

La résultante $\vec{R}$ et le moment en O, $\vec{M_O}$ sont les éléments de réduction en O du torseur associé au système de vecteurs $\vec{q_i}$

Les éléments de réduction en A du torseur seraient :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{q_i} \quad \text{et} \quad \vec{M_A} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{q_i}$$

Les éléments de réduction en B du torseur seraient :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{q_i} \quad \text{et} \quad \vec{M_B} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{BP_i} \wedge \vec{q_i}$$

$$\vec{M_A} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{q_i} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP_i}) \wedge \vec{q_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AB} \wedge \vec{q_i} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{BP_i} \wedge \vec{q_i}$$

$$\vec{M_A} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AB} \wedge \vec{q_i} + \vec{M_B}$$

$$\vec{M_A} = \overrightarrow{AB} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{q_i} + \vec{M_B} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R} + \vec{M_B}$$

$$\vec{M_A} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R} + \vec{M_B}$$

1.12.2 Notation du torseur :

$$\{T\} =_A \{\vec{R}, \vec{M_A}\}$$

$\vec{R}$ et $\vec{M_A}$ sont les éléments de réduction au point A du torseur

1.12.3 Propriétés ;

Soient $\{T_1\} =_A \{\vec{R_1}, \vec{M_{A,1}}\}$ et $\{T_2\} =_A \{\vec{R_2}, \vec{M_{A,2}}\}$

1.12.3.1 Egalité de deux torseurs

$$\{T_1\} = \{T_2\} \Leftrightarrow \vec{R_1} = \vec{R_2} \text{ et } \vec{M_{A,1}} = \vec{M_{A,2}}$$

1.12.3.2 Torseur nul

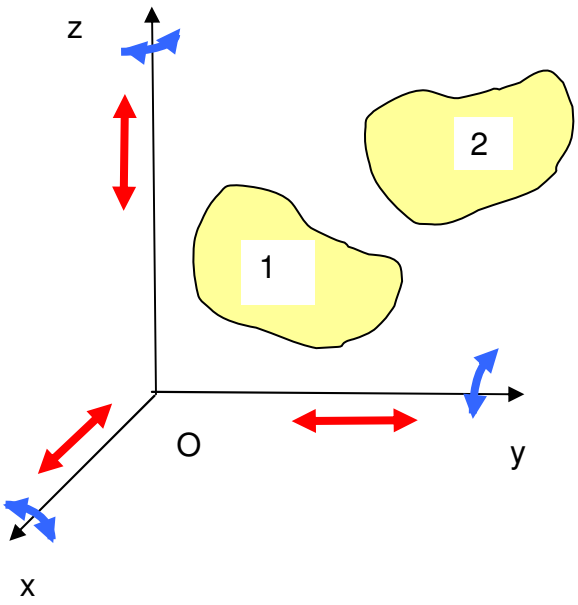
$$\{T\} = \{0\} \Leftrightarrow \vec{R} = \vec{0} \text{ et } \vec{M_A} = \vec{0}$$

1.12.3.3 Somme de deux torseurs

$$\{T\} = \{T_1\} + \{T_2\} \Leftrightarrow \vec{R} = \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} \text{ et } \overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_{A,1}} + \overrightarrow{M_{A,2}}$$

CHAPITRE 2 LIAISONS ENTRE DEUX SOLIDES

2.1 DEGRES DE LIBERTE



On considère les deux positions 1 et 2 d'un même solide dans l'espace. A partir de la position 1, on peut déplacer le solide et l'amener dans la position 2 à l'aide de mouvements simples de translation et de rotation. Quelles que soient les positions 1 et 2, il est possible d'effectuer cette opération à l'aide de rotations d'axes Ox, Oy et Oz et de translations d'axes Ox, Oy et Oz .
Si le solide était totalement libre dans l'espace, il disposerait de six degrés de liberté : trois degrés de translation et trois degrés de rotation.

2.2 DEFINITIONS

2.2.1 Liaison

On appelle liaison entre deux solides une relation de contact entre les deux solides.

2.2.2 Contact entre deux solides

Théoriquement, le contact entre deux solides peut être ponctuel, linéique ou surfacique. Dans la réalité il sera toujours surfacique même si la surface de contact est très petite.

2.2.3 Degrés de liberté

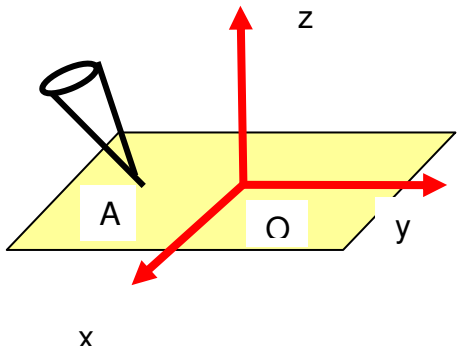
Chaque liaison est caractérisée par son nombre de degrés de liberté, c'est-à-dire le nombre total de translations et de rotations autorisées. Ce nombre est au maximum égal à 6.

2.2.4 Degrés de liaison

Si le nombre de degrés de liberté est de 2, cela signifie que les quatre autres sont interdits. On dit dans ce cas que le nombre de degrés de liaison est de 4.
Le nombre de degrés de liaison est le nombre total de translations et de rotations interdites.

2.3 EXEMPLES DE LIAISONS

2.3.1 Liaison ponctuelle

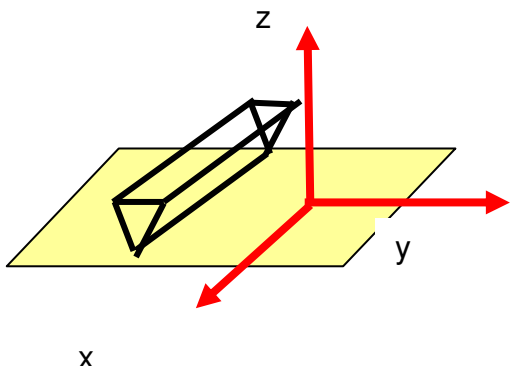


	TRANSLATION	ROTATION
AXE X'X	1	1
AXE Y'Y	1	1
AXE Z'Z	0	1

Le tableau de vérité montre que le solide peut pivoter autour de A ; A peut être déplacé dans le plan xOy mais ne peut pas subir de translation suivant Oz

.

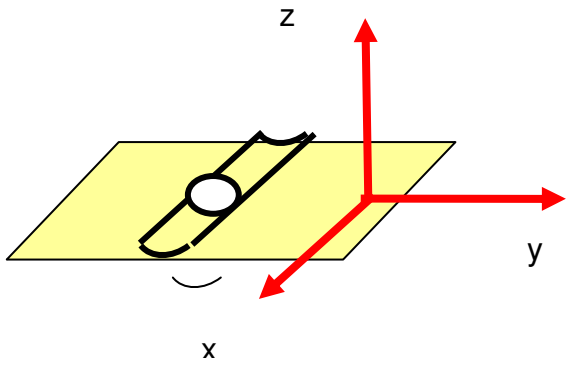
2.3.2 Liaison rectiligne



	TRANSLATION	ROTATION
AXE X'X	1	1
AXE Y'Y	1	0
AXE Z'Z	0	1

La ligne de contact entre le solide et le plan xOy peut se déplacer en restant dans ce plan

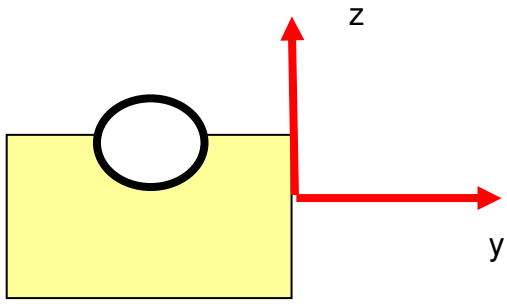
2.3.3 Liaison linéaire annulaire



Seules les translations suivant Oy et Oz sont interdites

	TRANSLATION	ROTATION
AXE X'X	1	1
AXE Y'Y	0	1
AXE Z'Z	0	1

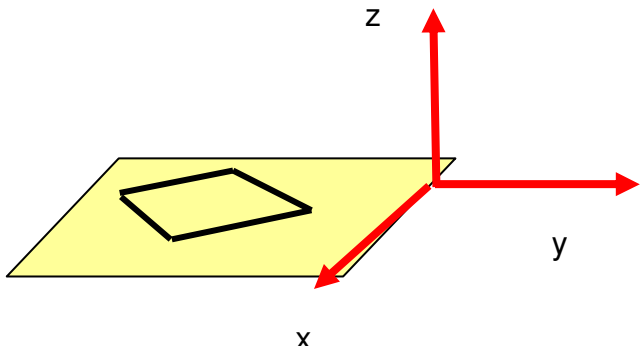
2.3.4 Liaison rotule



	TRANSLATION	ROTATION
AXE X'X	0	1
AXE Y'Y	0	1
AXE Z'Z	0	1

Aucune translation n'est permise. Les rotations suivant les axes Ox, Oy et Oz sont possibles

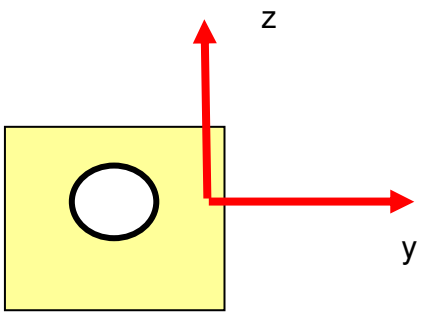
2.3.5 Liaison appui plan



	TRANSLATION	ROTATION
AXE X'X	1	0
AXE Y'Y	1	0
AXE Z'Z	0	1

La surface de contact entre le solide et le plan xOy reste dans ce plan

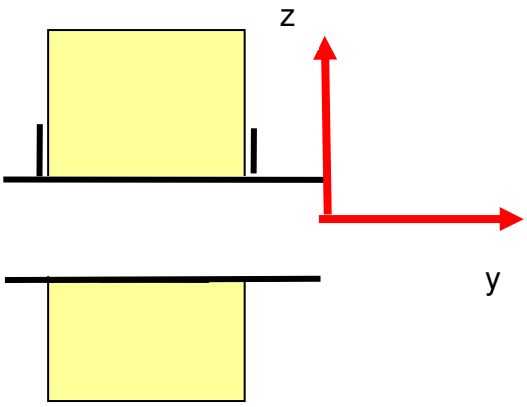
2.3.6 Liaison pivot glissant



	TRANSLATION	ROTATION
AXE X'X	1	1
AXE Y'Y	0	0
AXE Z'Z	0	0

La pièce peut tourner autour de Ox et glisser suivant cet axe

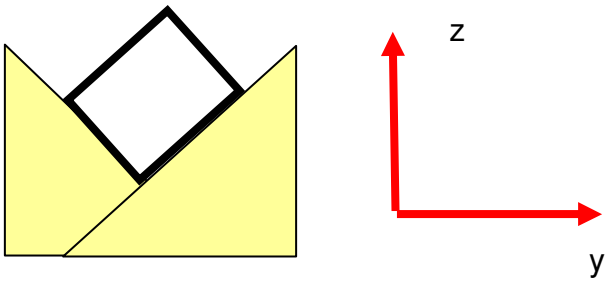
2.3.7 Liaison pivot



	TRANSLATION	ROTATION
AXE X'X	0	0
AXE Y'Y	0	1
AXE Z'Z	0	0

La pièce ne peut que tourner autour de Oy

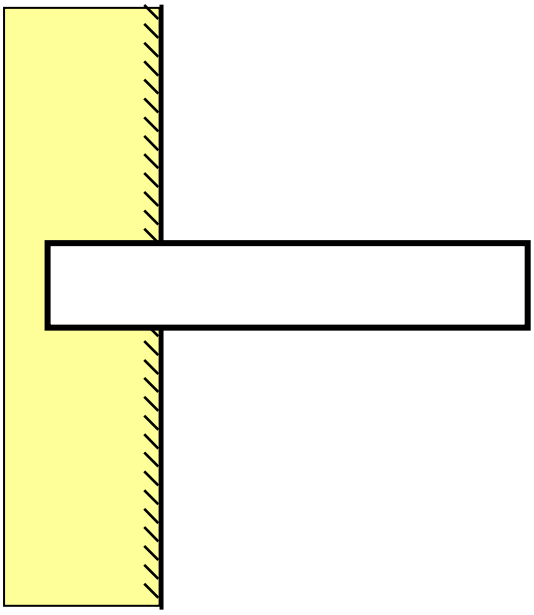
2.3.8 Liaison glissière



	TRANSLATION	ROTATION
AXE X'X	1	0
AXE Y'Y	0	0
AXE Z'Z	0	0

La pièce ne peut que glisser suivant Ox

2.3.9 Liaison encastrement



	TRANSLATION	ROTATION
AXE X'X	0	0
AXE Y'Y	0	0
AXE Z'Z	0	0

La pièce ne peut absolument pas se déplacer

CHAPITRE 3 ACTIONS MECANIQUES

3.1 ACTIONS MECANIQUES DE CONTACT ET ACTIONS MECANIQUES S'EXERÇANT A DISTANCE.

3.1.1 Actions mécaniques de contact

Le corps A exerce une action mécanique sur B et A et B sont en contact.

Exemples :

- l'action du vent sur une voile
- l'action d'une table sur un livre placé sur cette table
- l'action d'un fil sur un objet

3.1.2 Actions mécaniques s'exerçant à distance.

Le corps A exerce une action mécanique sur B et A et B ne sont pas en contact.

Exemples :

- l'action de pesanteur exercée par la Terre sur un corps.
- les actions mécaniques exercées par un aimant sur des clous (initialement, il n'y a pas nécessairement contact entre l'aimant et les clous)

3.2 ACTIONS MECANIQUES REPARTIES ET ACTIONS MECANIQUES LOCALISEES

3.2.1 Actions réparties :

L'action du vent sur une voile s'exerce sur la surface de la voile ; c'est une action répartie. Il en est de même pour l'action de la Terre sur un objet qui est répartie et s'exerce sur chaque particule formant le corps.

3.2.2 Actions localisées

Si l'action s'exerce sur une très petite surface, on peut considérer qu'elle est localisée en un point.

3.3 MODELISATION D'UNE ACTION MECANIQUE : LA FORCE.

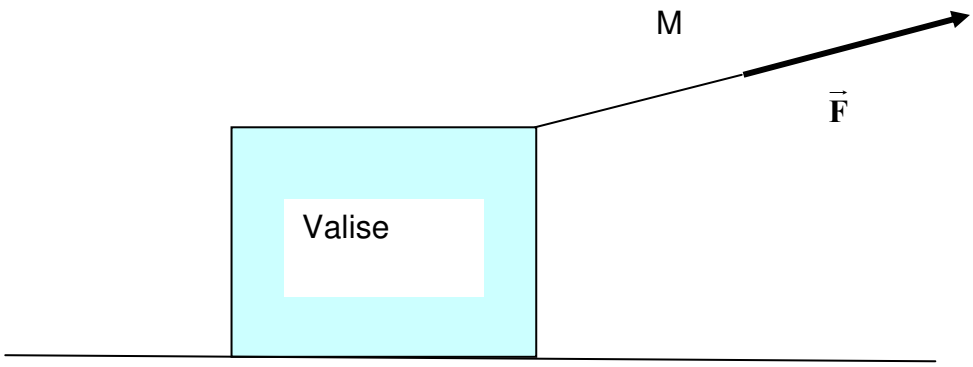
3.3.1 La force.

Les actions mécaniques sont modélisées par des forces. Il s'agit d'une simplification au niveau macroscopique. La force est un vecteur, le vecteur-force.

Ce vecteur, a une direction, un sens et une norme proportionnelle à la valeur de la force exprimée en N.

3.3.2 Action localisée en M

Dans le cas d'une action mécanique localisée en un point M, le vecteur-force est appliqué en ce point



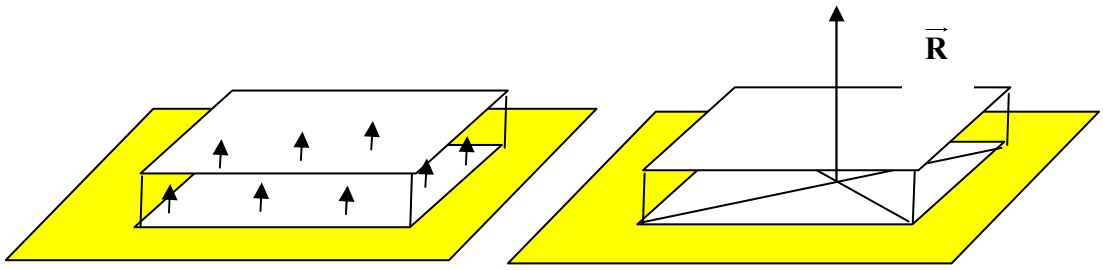
3.3.3 Action non localisée

Dans le cas d'une action répartie, chaque action élémentaire exercée sur chaque particule est représentée par une force élémentaire. Cet ensemble de forces élémentaires admet une résultante $\vec{R}$

En général la résultante est considérée comme un vecteur libre, $\vec{R} = \sum \vec{F}$ **ou** $\vec{R} = \int d\vec{F}$. Pour un solide les forces réparties ou localisées équivalent à la résultante appliquée en un point déterminé, tel que le moment de la résultante soit égal au moment résultant des forces qu'elle remplace. C'est pour cette raison qu'on applique le poids au centre de gravité.

Exemple

Dans le cas d'un livre reposant sur un plan horizontal, l'ensemble des actions exercées en chaque point de la surface de contact, admet une résultante verticale $\vec{R}$ appliquée au centre de la surface de contact



Remarque :

Une action mécanique n'est pas une force ; Une action mécanique est modélisée par une force. La modélisation est une simplification du problème.

Par souci de simplification, tous les physiciens parlent de « solides soumis à des forces $\vec{F}$ ». Nous ferons de même ; néanmoins le lecteur, en pensée, rectifiera.

3.4 EXEMPLES DE FORCES

3.4.1 Poids d'un corps

Force verticale dirigée vers le bas, appliquée au centre de gravité G du corps et dont la valeur est P=mg

P en N m masse en kg g en $N.kg^{-1}$

La masse du corps est une grandeur invariable, dont la valeur ne varie pas avec le lieu

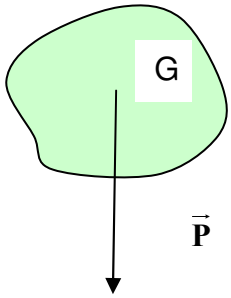
g est l'intensité de la pesanteur au lieu considéré, g dépend du lieu (altitude, longitude, latitude).

Le poids d'un objet dépend donc du lieu

g= 9,78 $N.kg^{-1}$ à l'équateur et 9,81 $N.kg^{-1}$ à Paris. Le poids d'un objet de masse 10 kg est donc égal à 978 N à l'équateur et de 981 N à Paris.

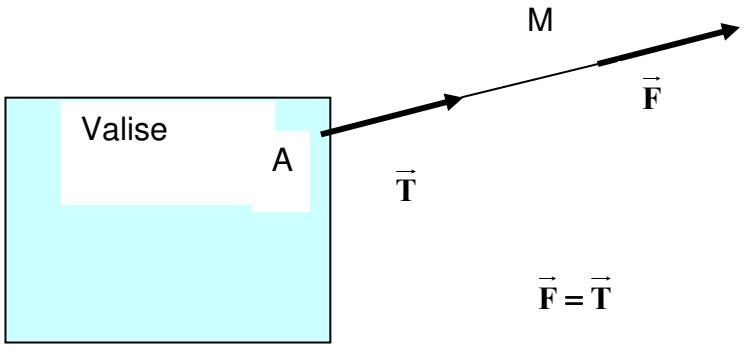
La masse d'un corps est une grandeur scalaire, le champ de pesanteur et le poids sont des grandeurs vectorielles.

$$\vec{P} = m\vec{g}$$



3.4.2 Tension d'un fil (de masse négligeable)

Lorsque l'on exerce une traction sur l'extrémité d'un fil dont l'autre est reliée à un solide, le fil transmet la force de proche en proche. Il en résulte, une force de contact, exercée par le fil sur le solide : c'est la tension du fil.



La force $\vec{F}$, exercée par l'opérateur en M est transmise. En A s'exerce une force $\vec{T}$, tension du fil.

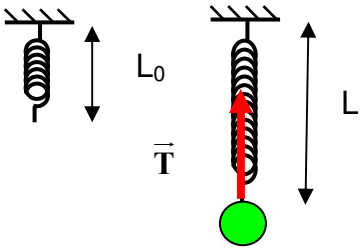
$\vec{F}$ et $\vec{T}$ ont même support (le fil) et $\vec{F} = \vec{T}$

3.4.3 Tension d'un ressort.

$\vec{T}$ est la tension du ressort.

C'est la force exercée par le ressort sur le solide.

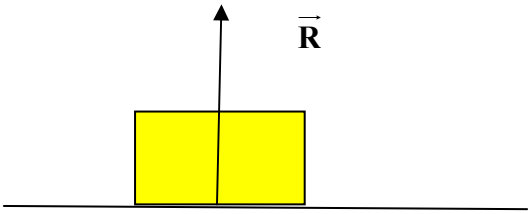
Si le ressort est comprimé, la force $\vec{T}$ est orientée en sens inverse



L_0= longueur à vide du ressort.

L = longueur du ressort à l'équilibre en charge

3.4.4 Réaction d'un plan d'appui



Le plan d'appui exerce sur le solide une force $\vec{R}$, appelée réaction du plan d'appui.

Cette force est, s'il n'y a pas frottement, perpendiculaire au plan d'appui

3.4.5 Poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède est la force qui vous permet de flotter à la surface de l'eau.

Lorsqu'un corps est immergé dans un fluide homogène (liquide ou gaz), il subit de la part de ce fluide une poussée, verticale, dirigée de bas en haut, dont la valeur est égale au poids du volume de fluide déplacé.

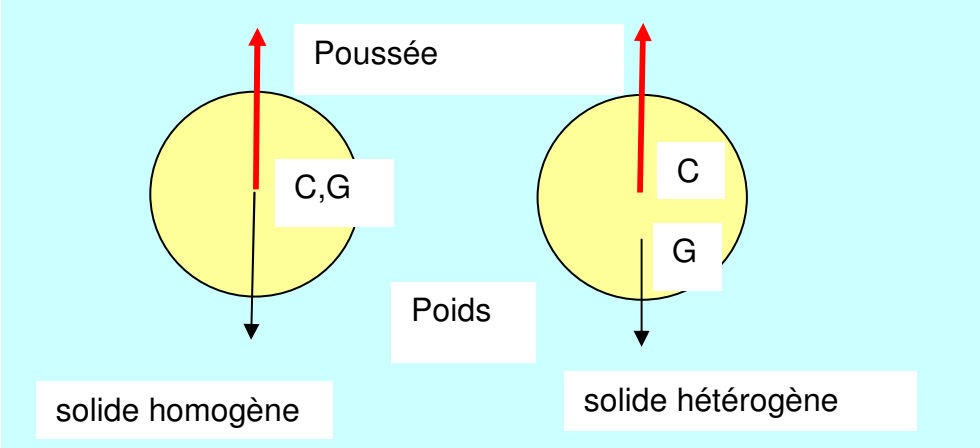
Cette force est appliquée au centre de poussée C.

Si le corps est homogène, C est confondu avec le centre d'inertie G du corps.

Si le corps n'est pas homogène, C est confondu avec le centre d'inertie du volume de fluide déplacé.

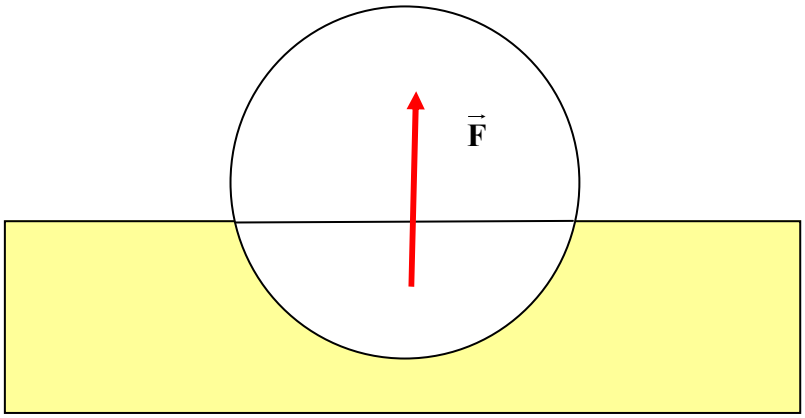
Cas d'un corps complètement immergé

$$F = \rho_{fluide} g V_{solide}$$



Cas d'un corps partiellement immergé.

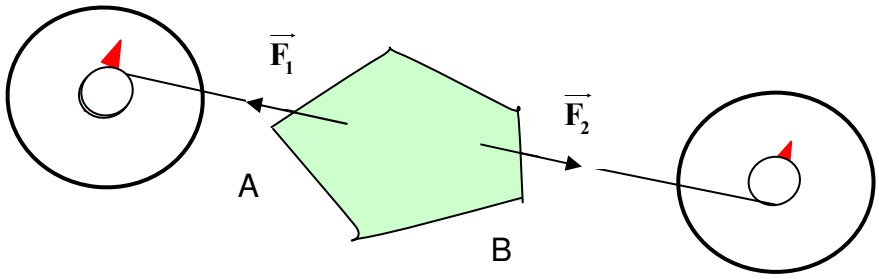
$$F = \rho_{fluide} g V_{immergé}$$



CHAPITRE 4 ACTIVITES EXPERIMENTALES EN STATIQUE

4.1 ACTIVITE 1 : EQUILIBRE D'UN SOLIDE SOUMIS A DEUX FORCES.

Deux dynamomètres sont reliés à deux fils qui exercent en A et B deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ .sur un solide de poids négligeable (plaque de polystyrène).



A l'équilibre les indications des dynamomètres sont identiques (F_1=F_2) et les deux fils sont dans le prolongement l'un de l'autre.

A l'équilibre : $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$

On peut généraliser le résultat:

Lorsqu'un solide, soumis à deux forces, $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$, est en équilibre, ces deux forces ont même support et $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$

☐ Exercice 1

4.2 ACTIVITE 2 : EQUILIBRE D'UN SOLIDE SOUMIS A TROIS FORCES NON PARALLELES.

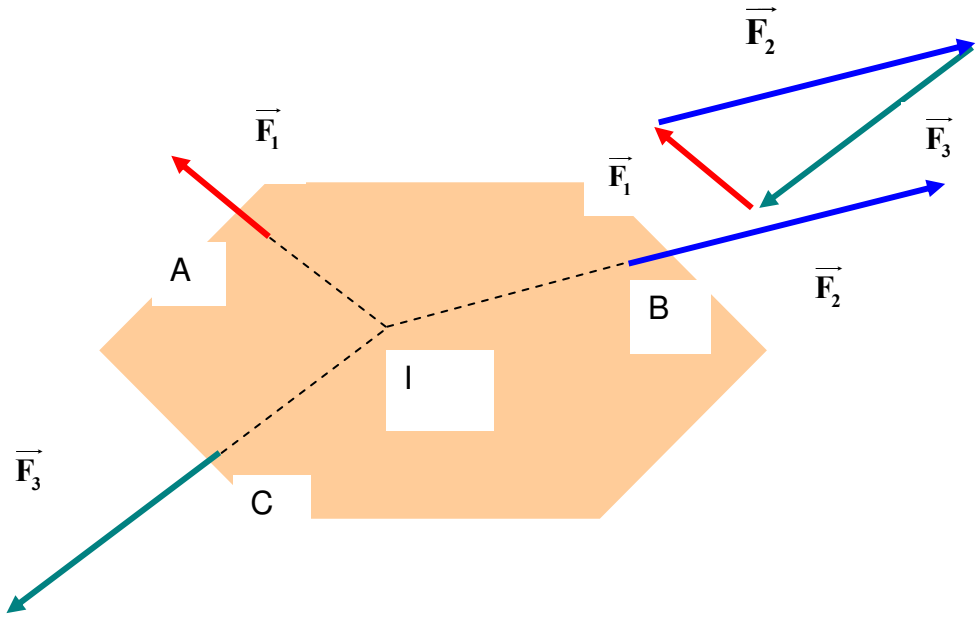
Trois dynamomètres sont reliés à trois fils qui exercent en A, B et C, trois forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ .sur un solide de poids négligeable (plaque de polystyrène)

A l'équilibre les indications des dynamomètres sont relevées ainsi que l'orientation de chaque fil.

On peut constater que, à l'équilibre, les forces sont coplanaires et que leurs supports concourent en un point I.

Par un point quelconque, on construit la somme, $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}$ en respectant les valeurs, les sens et directions des forces. On constate que :

$\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{0}$



On peut généraliser le résultat:

Lorsqu'un solide, soumis à trois forces non parallèles, $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$, est en équilibre, les trois forces sont concourantes et coplanaires et $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{0}$

☐ Exercice 2

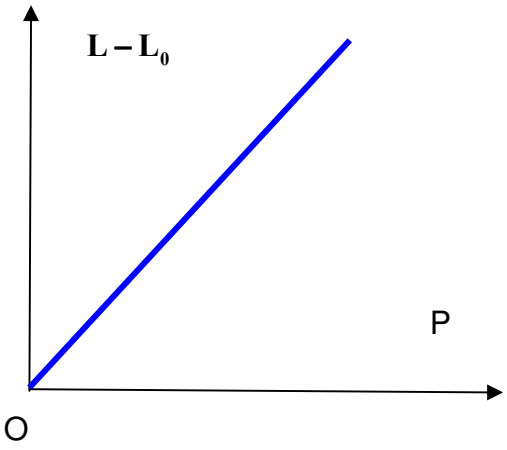
4.3 ACTIVITE 3 :ALLONGEMENT D'UN RESSORT SOUS L'ACTION D'UNE CHARGE.

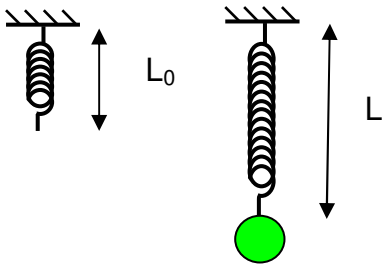
Un milieu élastique est un milieu qui, étant déformé sous l'action d'une cause quelconque, reprend sa forme lorsqu'on supprime la cause.

On considère un ressort parfaitement élastique, à spires non jointives et de masse négligeable. On suspend à ce ressort une charge de poids P .

On fait varier P et pour chaque valeur de P, on mesure l'allongement $L-L_0$ du ressort

On trace la courbe représentative de $L-L_0 = f(P)$.





L_0= longueur à vide du ressort.

L = longueur du ressort à l'équilibre en charge

L'équation de la droite est :$L-L_0=$ C P

C est une constante dont la valeur ne dépend que des caractéristiques du ressort

$\frac{1}{C}$ est une autre constante dont la valeur ne dépend que des caractéristiques du ressort : c'est la raideur k du ressort.

$$P = \frac{1}{C}(L - L_0) \quad = P = k(L - L_0)$$

Unités : P en N $L-L_0$ en m k en $N.m^{-1}$

Si on considère le système « corps suspendu », deux forces s'exercent sur ce système

$\vec{P}$ exercé par la Terre sur le corps

$\vec{T}$ exercée par le ressort sur le corps

A l'équilibre $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$ et les deux forces ont même support.

T=P $T=k\ (L-L_0)$

Cette relation est très importante ; elle donne la valeur de la tension d'un ressort en fonction de son allongement.

Remarque :

dans le cas où le ressort est comprimé : $T=k\ (L_0-L)$

La valeur de la tension d'un ressort à spires non jointives et de masse négligeable est égale à la raideur du ressort multipliée par l'allongement ou le raccourcissement du ressort

☐ Exercice 3

4.4 ACTIVITE 4: EQUILIBRE D'UN SOLIDE MOBILE AUTOUR D'UN AXE

4.4.1 Description du matériel

On utilise une plaque plane, mobile autour d'un axe Δ, horizontal, passant par son centre de gravité ; la plaque est alors en équilibre indifférent (en équilibre dans n'importe quelle position). Un roulement à billes permet de réduire considérablement les frottements au niveau de l'axe.

En utilisant des fils et des masses marquées, on exerce des forces sur la plaque. Dans toute la suite, on se limite à des forces orthogonales à l'axe.

4.4.2 Moment d'une force par rapport à un axe Δ.

On exerce une force à gauche de l'axe. On rétablit l'équilibre initial en exerçant à droite de Δ une autre force. On modifie le point d'application, la valeur, la direction de la force exercée à droite de manière à retrouver la même position d'équilibre ; Cette position peut être repérée par un diamètre peint qui doit toujours occuper la même position. En aucun cas on ne modifie les caractéristiques de la force exercée à gauche de Δ.

fig 1 et fig 2 : On conserve la valeur de la force ; on peut modifier le point d'application sous réserve de garder la même distance d1

fig 1 et fig3 : On modifie d, il faut modifier la valeur de la force. Si on augmente d, il faut diminuer F.

fig 4 on exerce une force oblique.

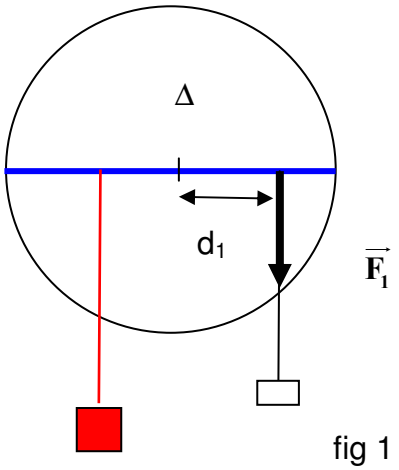


fig 1

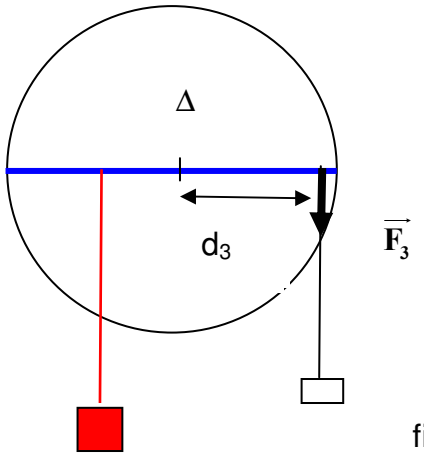


fig 3

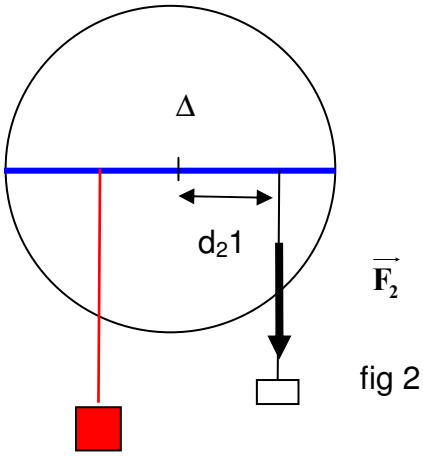


fig 2

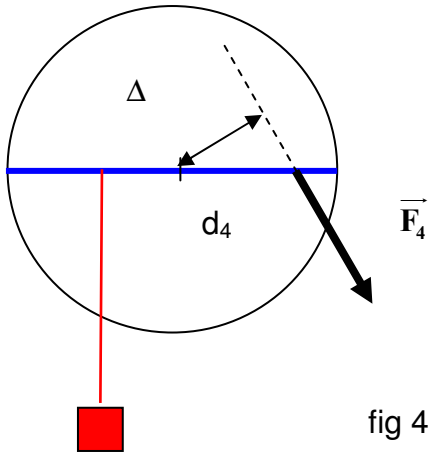


fig 4

Toutes ces forces, permettant de réaliser le même équilibre, elles sont équivalentes.

Les mesures montrent que $F_1d_1=F_2d_2=F_3d_3$

Cette expérience montre que, dans l'équilibre étudié, le produit de la valeur de la force par la distance entre l'axe et le support de la force intervient.

Ce produit est $\left|\mathbf{M}_{\Delta}(\vec{\mathbf{F}})\right|$

4.4.3 Equilibre d'un solide mobile autour d'un axe.

On reprend le dispositif précédent et on exerce des forces, de manière à réaliser un équilibre (fig 5)

On connaît les valeurs des forces et l'on peut mesurer pour chacune d'elles, la longueur du bras de levier.

Dans le cas de figure on aurait, à l'équilibre :$F_1d_1+F_2d_2-F_3d_3-F_4d_4=0$

D'une manière générale, on pourrait vérifier que

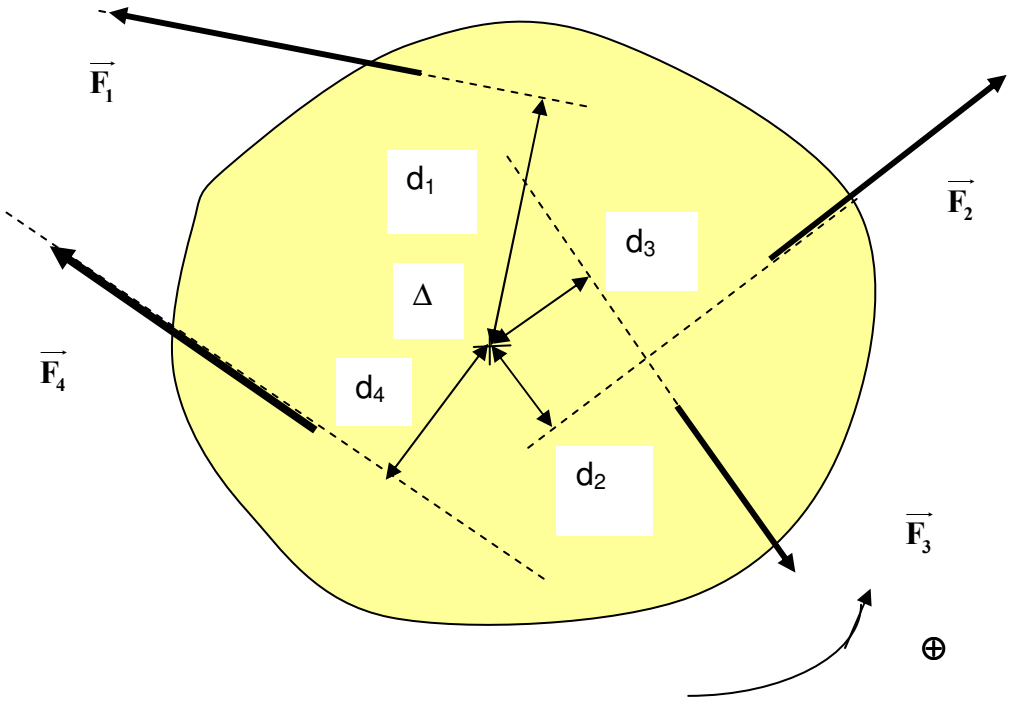
$$M_{\Delta}(\vec{F_1}) + M_{\Delta}(\vec{F_2}) + M_{\Delta}(\vec{F_3}) + M_{\Delta}(\vec{F_4}) = 0$$

Le poids $\vec{P}$ de la plaque et la réaction de l'axe $\vec{R}$ sont des forces orthogonales à l'axe mais coupant l'axe donc leurs moments, par rapport à cet axe, sont nuls. On en déduit donc, qu'à l'équilibre, la somme des moments, par rapport à l'axe, de toutes les forces appliquées au solide est nulle.

On peut généraliser :

Lorsqu'un solide, mobile autour d'un axe, est en équilibre, la somme des moments, par rapport à l'axe, de toutes les forces appliquées, est nulle.

Fig 5

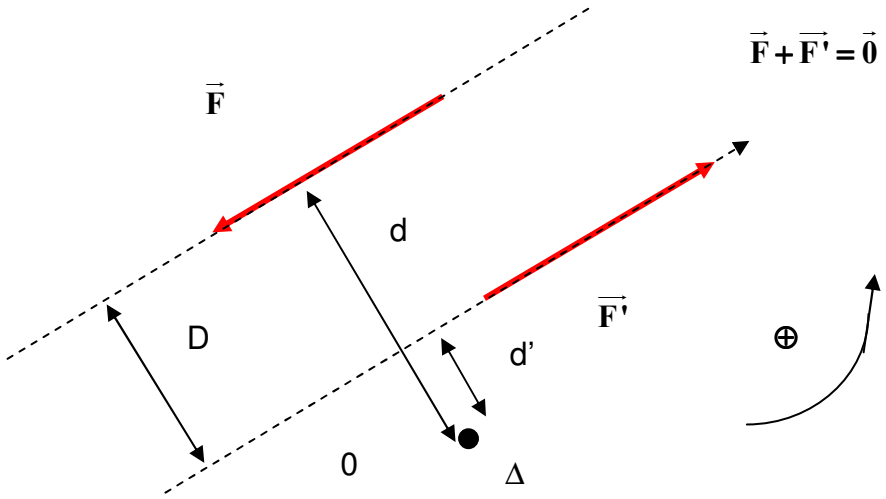


☐ Exercice 4

4.5 COUPLE DE FORCES

4.5.1 Définition.

C'est un ensemble de deux forces parallèles, de même valeur, de même direction, de sens contraires et ayant des supports distincts. Ces deux forces forment un plan, le plan du couple.



4.5.2 Effets d'un couple.

Lorsqu'il est appliqué à un solide, le couple de forces peut provoquer soit une rotation du solide soit une torsion

4.5.3 Moment par rapport à un axe orthogonal au plan du couple.

Soit Δ, axe orthogonal au plan du couple passant par O qulconque.

$$\vec{M}_{\Delta}(couple)=\vec{M}_{\Delta}(\vec{F})+\vec{M}_{\Delta}(\vec{F'})$$

Dans le cas de figure : $\vec{M}_{\Delta}(couple)=Fd-F'd'=F(d-d')=FD$

On peut vérifier, en prenant un autre axe, orthogonal au plan du couple, que l'on obtient le même résultat.

Le moment d'un couple de forces, par rapport à n'importe quel axe Δ orthogonal au plan du couple est donnée par la relation $\vec{M}_{\Delta}(couple)=\pm FD$

F est la valeur commune des forces constituant le couple

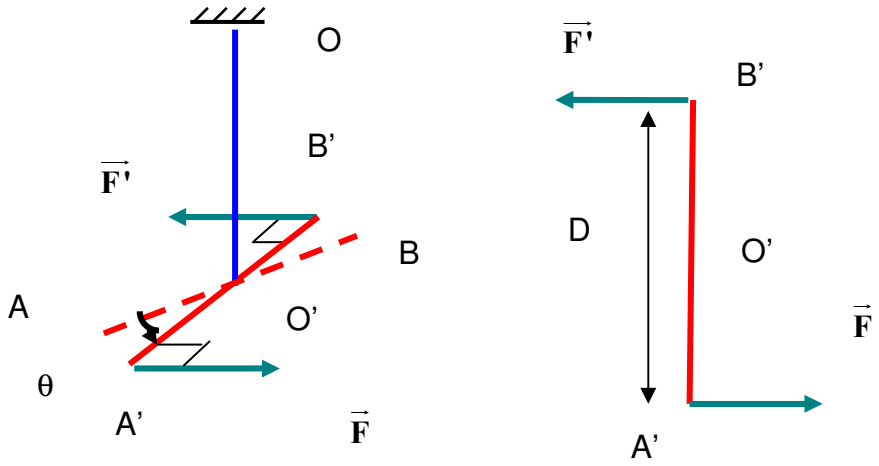
D est la distance entre les supports des deux forces constituant le couple.

Remarque :

$\vec{F}+\vec{F'}=\vec{0}$ mais $\vec{M}_{\Delta}(couple)=\pm FD$ c'est l'existence de ce moment non nul qui explique la rotation ou la torsion du solide auquel le couple s'applique.

4.6 ACTIVITE 5 :TORSION D'UN FIL SOUS L'ACTION D'UN COUPLE DE FORCES.

L'une des extrémités O d'un fil d'acier est maintenue fixe. A l'autre extrémité O', est suspendue une barre AB ; on exerce sur cette barre, un couple de forces dans le plan horizontal contenant cette barre. Sous l'action de ce couple, la barre AB tourne de θ et s'immobilise dans la position A'B'.

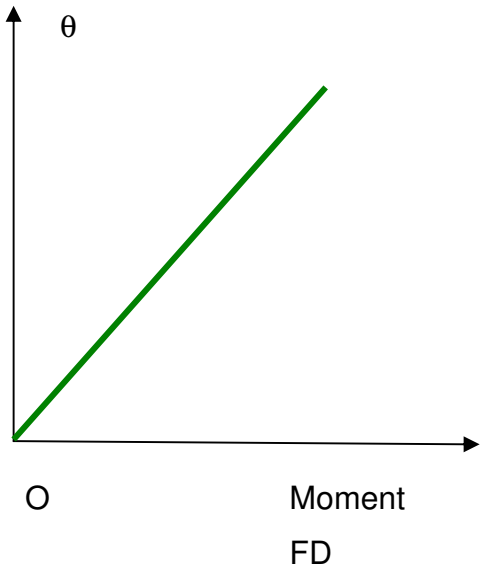


Pour chaque valeur de F=F', on mesure la valeur de θ.

C'est le couple de forces qui provoque la torsion du fil OO'.

Le moment de ce couple, par rapport à l'axe de rotation Δ , support de OO', est $M_{\Delta}(couple)=FD$

On trace la courbe représentative de θ=f (FD).



L'équation de la droite est :

$\theta = K\, M_{\Delta}(couple)$

K est une constante dont la valeur ne dépend que des caractéristiques du fil de torsion

$\frac{1}{K}$ est une autre constante dont la valeur ne dépend que des caractéristiques du fil de torsion : c'est la constante de torsion C du fil de torsion..

$$\mathbf{M_{\Delta}(couple\vec{F},\vec{F'}) = C\theta}$$

Unités M en N.m θ en rad C en $N.m.rad^{-1}$

On peut recommencer l'étude précédente pour divers fils de torsion, de diamètres, de longueurs différentes ; on peut aussi utiliser des fils de mêmes caractéristiques géométriques et constitués de matériaux différents.

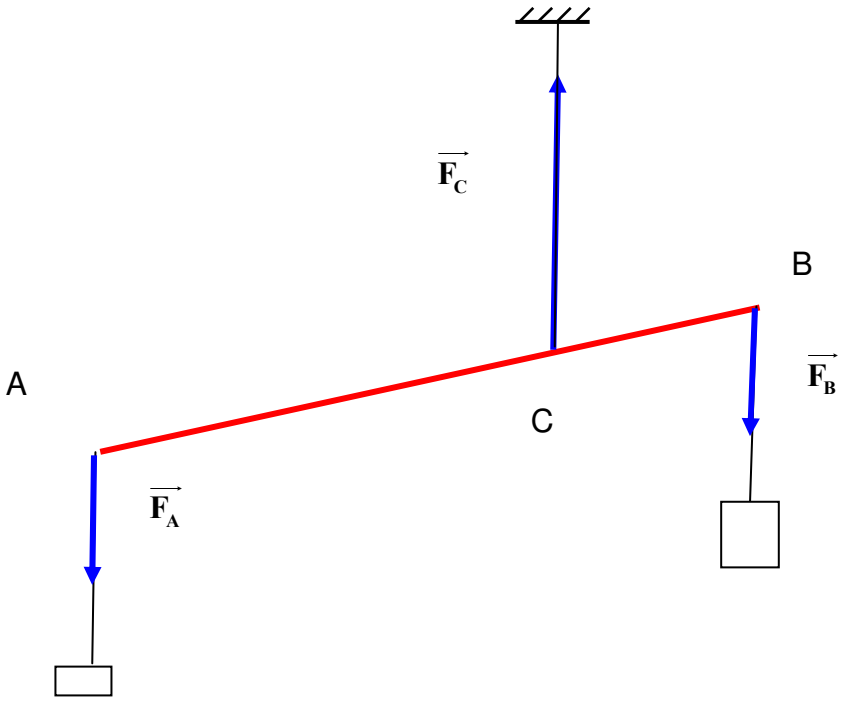
On peut ainsi établir, que la constante de torsion d'un fil de diamètre d et de longueur l est donnée par la relation :

$$\mathbf{C = \mu \frac{d^4}{l}}$$

μ est une constante dépendant de la nature du matériau.

☐ Exercice 5

4.7 ACTIVITE 6 :EQUILIBRE D'UN CORPS SOUMIS A TROIS FORCES PARALLELES



On utilise une barre AB, homogène, de section constante, de poids négligeable. Cette barre est suspendue en C à un fil vertical. Elle est soumise à trois forces : $\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$ sont les forces exercées par des masses marquées suspendues en A et B. $\overrightarrow{F_C}$ est la force exercée par le fil vertical accroché en C. Un dynamomètre permet de déterminer la valeur F_C de $\overrightarrow{F_C}$.

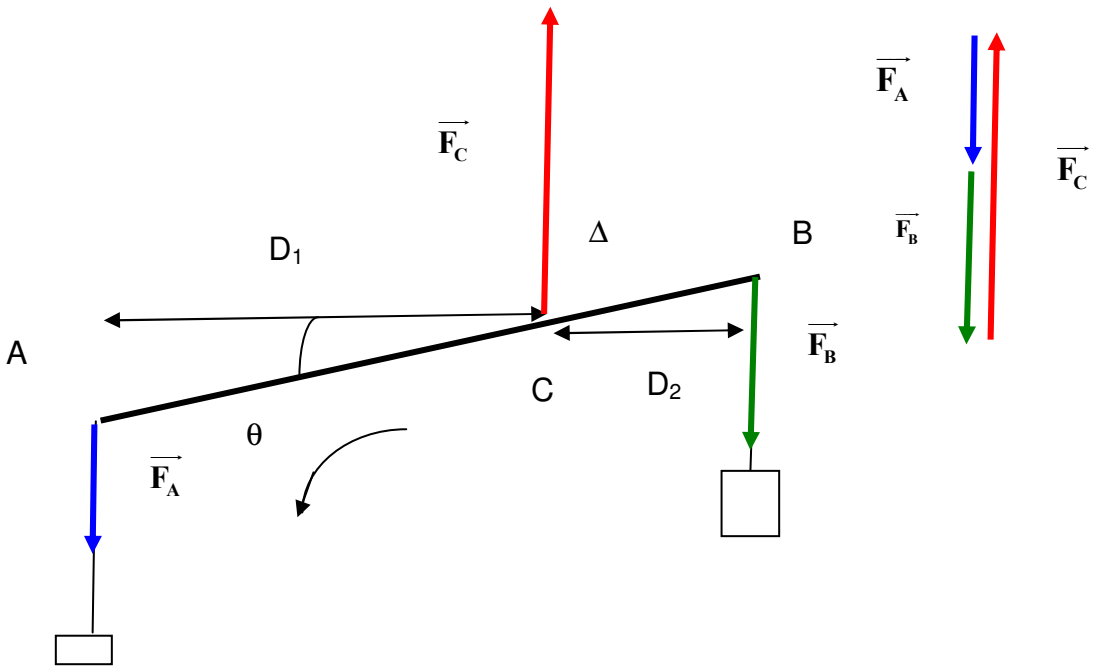
A l'équilibre les trois forces sont parallèles.

On constate d'une part que $\mathbf{F_A + F_B = F_C}$ à l'équilibre et que d'autre part, il n' a équilibre que si le point C occupe une position bien déterminée, telle que $\mathbf{F_A\, CA = F_B\, CB}$.

Toutes ces conditions sont vérifiées si

$\overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} + \overrightarrow{F_C} = \vec{0}$ et si $\mathbf{M_\Delta}\overrightarrow{F_A} + \mathbf{M_\Delta}\overrightarrow{F_B} + \mathbf{M_\Delta}\overrightarrow{F_C} = \mathbf{0}$ Δ étant l'axe passant par C et orthogonal au plan de figure.

En effet si $\overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} + \overrightarrow{F_C} = \vec{0}$: $\mathbf{F_A + F_B = F_C}$



Si $\mathbf{M_{\Delta}(\overrightarrow{F_A}) + M_{\Delta}(\overrightarrow{F_B}) + M_{\Delta}(\overrightarrow{F_C}) = 0}$

$\mathbf{F_A D_1 - F_B D_2 + 0 = 0}$ $\mathbf{F_A AC\cos\theta - F_B CB\cos\theta + 0 = 0}$ $\mathbf{F_A AC = F_B CB}$

Remarque :

Les deux forces $\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$ pourraient être remplacées par leur résultante ; cette résultante serait appliquée en C, aurait la même valeur et la même direction que $\overrightarrow{F_C}$ mais serait de sens contraire

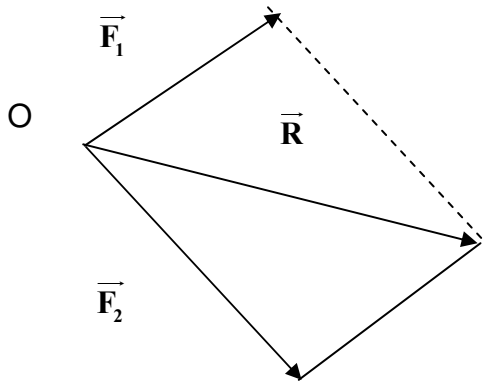
☐ Exercice 6

4.8 COMPOSITION DES FORCES.

La résultante d'un ensemble de forces est la force unique qui aurait le même effet que l'ensemble des forces qu'elle remplace.

4.8.1 Résultante de deux forces concourantes en O.

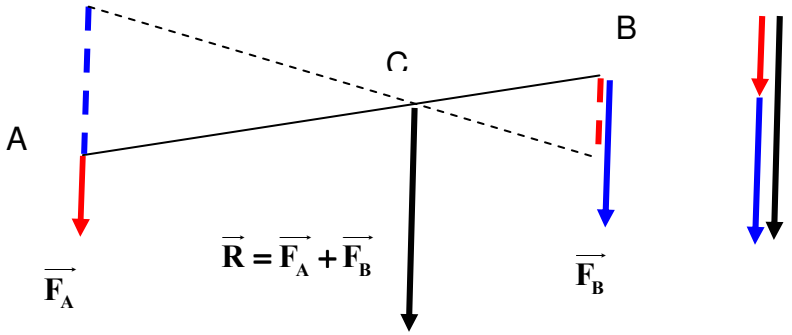
La résultante $\overrightarrow{R}$ de deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ appliquées en O est la force appliquée en O telle que $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$



4.8.2 Résultante de deux forces parallèles.

La résultante $\vec{R}$ de deux forces parallèles $\vec{F_A}$ et $\vec{F_B}$ appliquées en A et B est la force unique appliquée en un point C du segment AB telle que :

$\vec{R} = \vec{F_A} + \vec{F_B}$ et $\vec{M_0}(\vec{R}) = \vec{M_0}(\vec{F_A}) + \vec{M_0}(\vec{F_B})$ O étant un point quelconque



Construction graphique :

Il suffit de tracer les segments représentés en pointillés, dont les longueurs sont proportionnelles aux forces puis de tracer le troisième segment en pointillés qui coupe AB en C

4.9 ACTIVITE 7 : ADHERENCE

4.9.1 Différence entre adhérence et frottement

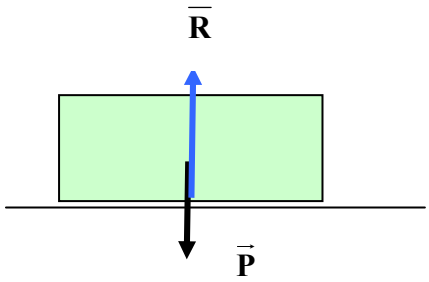
On parle de frottement lorsque deux surfaces rugueuses, en contact l'une avec l'autre se déplacent l'une par rapport à l'autre.

Lorsque les deux surfaces en contact ont tendance à glisser l'une par rapport à l'autre mais ne se déplacent pas l'une par rapport à l'autre on parle d'adhérence.

Le terme adhérence est réservé à la statique, le terme frottement à la dynamique

4.9.2 Cas d'un solide reposant sur un plan horizontal.

Le solide reposant sur le plan horizontal est soumis à deux forces : son poids P et la réaction R du support. A l'équilibre les deux forces ont même support et P=R. (figure 1)

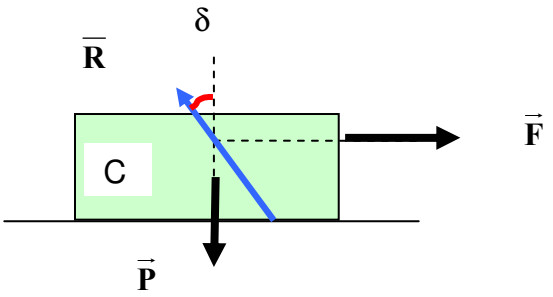


Equilibre

$\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$

Figure 1

Si on exerce sur le solide une force F horizontale et si la valeur de cette force est faible, le corps et le support étant rugueux, il peut y avoir équilibre. Dans ces conditions les trois forces appliquées ont une somme nulle, elles sont concourantes et coplanaires. R n'est plus normale au plan d'appui et fait avec la normale à ce plan un angle δ (figure 2)



Equilibre

$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=\vec{0}$ $\delta<\varphi$

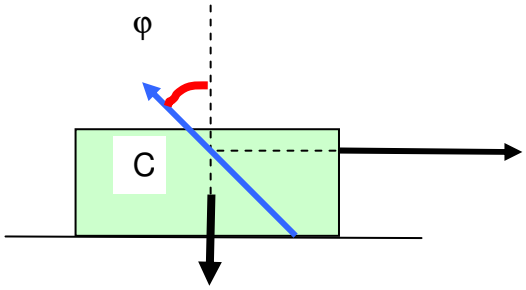
Figure 2

Si on augmente progressivement F, l'angle δ augmente et atteint la valeur φ quand le solide est sur le point de se mettre en mouvement. On dit que le solide est alors en équilibre strict (ou équilibre limite).

A l'équilibre strict, la réaction est alors la plus inclinée possible par rapport à la normale au plan d'appui ; elle forme un angle φ, appelé angle d'adhérence, avec la normale. (figure 3)

Souvent on utilise f ,nombre sans dimension, appelé coefficient d'adhérence et tel que f= tanφ

f ne dépend que de la nature et de l'état de surface des surfaces en contact.



Equilibre strict

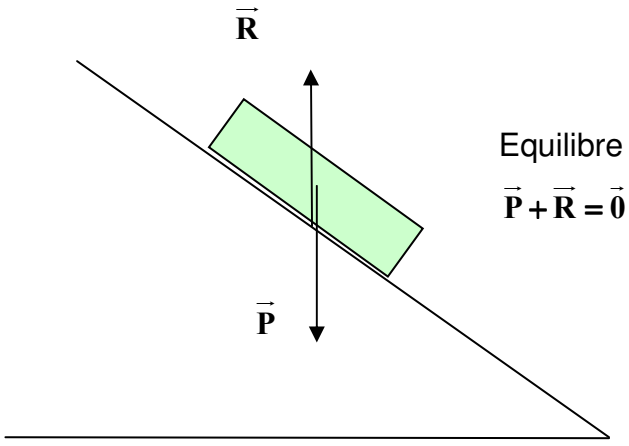
$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$ $\quad \delta = \varphi$

Figure 3

4.9.3 Cas d'un solide reposant sur un plan incliné

S'il n' y a pas de frottement, le solide ne peut pas rester en équilibre sur le plan incliné car le poids est vertical et la réaction est perpendiculaire au plan incliné ; la somme de ces deux forces ne peut donc pas être nulle.

S'il y a frottement et s'il y a équilibre les deux forces ont même valeur, sont verticales et opposées.



Equilibre

$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

4.9.4 Caractéristiques de la réaction d'un plan d'appui.

D'une manière générale lorsqu'un solide est en contact avec un plan d'appui (horizontal ou non) :

↳ La réaction du plan d'appui n'est normale au plan d'appui que s'il n'y a pas d'adhérence.

↳ Dans le cas où il y a adhérence, la réaction du plan d'appui est inclinée de δ par rapport à la normale.

δ est toujours inférieur à l'angle d'adhérence φ sauf à l'équilibre strict où $\delta=\varphi$

☐ Exercice 7

4.10 EXERCICES

☐ Exercice 1

Lorsqu'un solide, soumis à deux forces, $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$, est en équilibre, ces deux forces ont même support et $\vec{F_1}+\vec{F_2}=\vec{0}$

Est-il exact qu'un solide soumis à deux forces ayant même support et vérifiant $\vec{F_1}+\vec{F_2}=\vec{0}$ est en équilibre ?

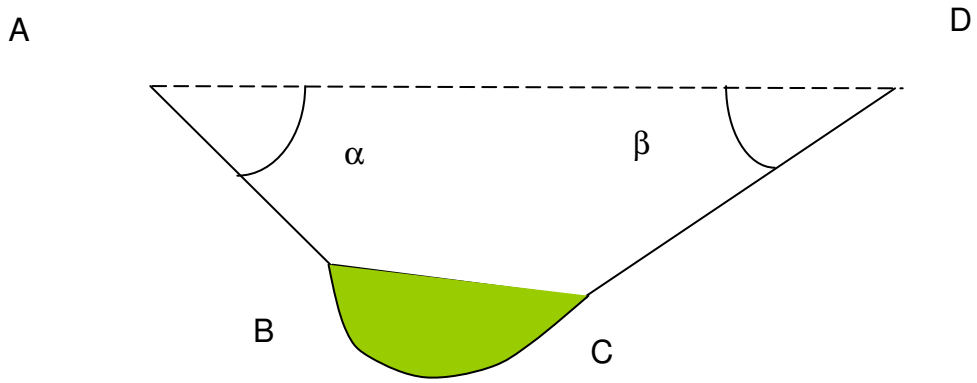
☐ Exercice 2

La figure représente un élève se reposant dans un hamac. A et D sont à la même hauteur et le poids de l'élève vaut P = 800 N. Le poids du hamac est négligé. $\alpha = 30°$ et $\beta = 50°$

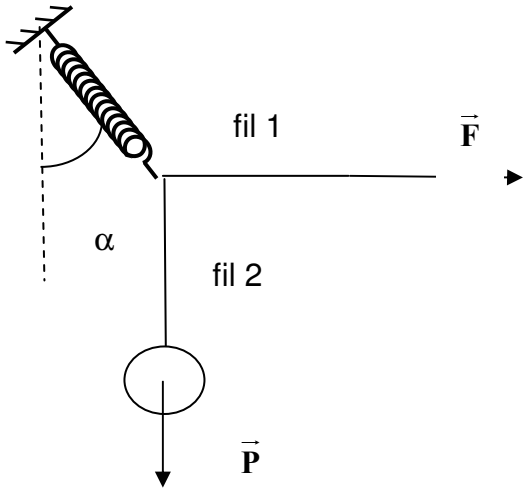
Le système {élève + hamac}, soumis à trois forces, est en équilibre.

Déterminer la valeur T_1 de la tension de la corde AB ainsi que la valeur T_2 de la tension de la corde CD :

- à partir d'une construction graphique réalisée à l'échelle (1 cm pour 200 N) et en respectant les valeurs des angles ($\alpha = 30°$ et $\beta = 50°$)
- en utilisant les relations du triangle quelconque
- par une résolution analytique.



☐ Exercice 3

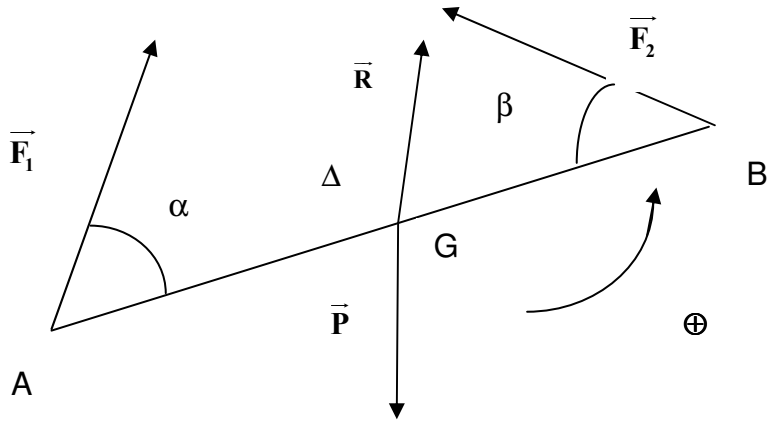


Le système représente un corps de masse m en équilibre ; $\vec{F}$ est la force horizontale exercée par un opérateur.

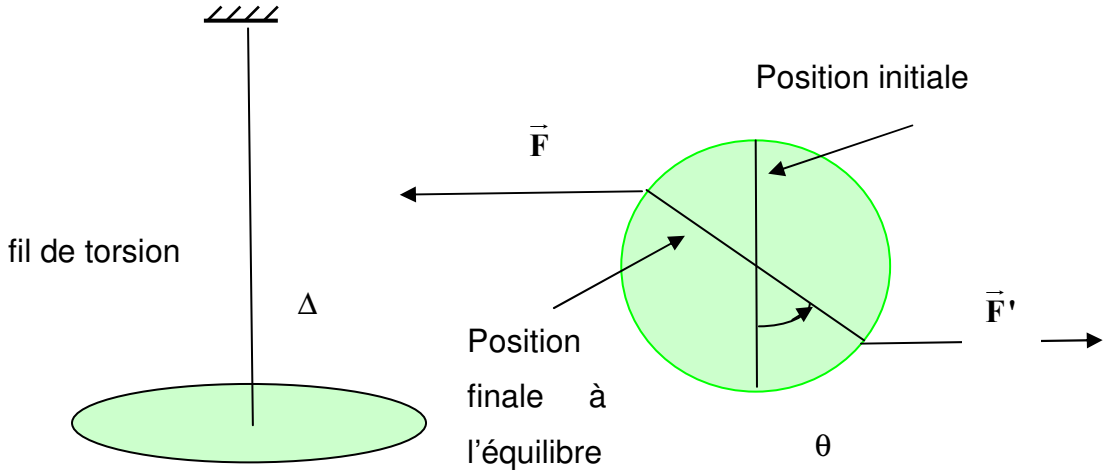
Etablir les relations permettant de déterminer L, longueur du ressort et F en fonction des données : m, g, α, k , L_0 longueur à vide du ressort

☐ Exercice 4

Une barre AB, homogène, de section constante, est mobile autour d'un axe horizontal Δ passant par son centre de gravité. Elle est soumise à deux forces appliquées en A et B et perpendiculaires à l'axe. Etablir la relation, à l'équilibre, entre F_1, F_2, α, β, AG et GB



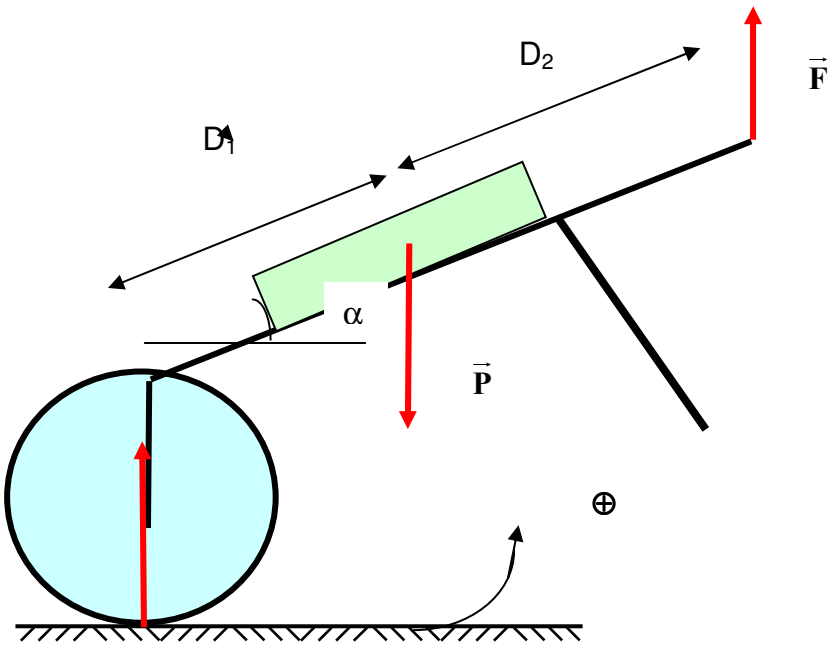
☐ Exercice 5



L'une des extrémités d'un fil de torsion vertical est serrée entre les mors d'un mandrin fixe. L'autre extrémité est liée au centre d'un disque de rayon R. On applique en A et B un couple de forces ; le disque tourne autour de Δ et s'immobilise après avoir tourné de θ

Quelle est la relation, à l'équilibre, entre F, R, C et θ ?

☐ Exercice 6



La figure représente une brouette chargée à l'équilibre. $\vec{F}$ représente l'action globale verticale exercée sur les deux poignées par l'utilisateur.

Etablir, la relation existant, à l'équilibre, entre F, D_1, D_2 et P

☐ Exercice 7

Un corps est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. La valeur du coefficient de frottement entre le corps et le plan est $f=\tan\varphi$. On augmente progressivement la valeur de α

A partir de quelle valeur de α le solide glisse-t-il sur le plan incliné ?

Le solide a une forme telle qu'il ne risque pas de basculer.

∗ Exercice 8

Calculer le rapport du volume de la partie émergée au volume de la partie immergée d'un iceberg.

La masse volumique de la glace est de 920 $kg.m^{-3}$ et celle de l'eau de mer 1028 $kg.m^{-3}$

∗ Exercice 9

Un corps (S),de masse M, de volume V, est suspendu à un ressort de masse négligeable, de longueur à vide L_0 et de raideur k ; la longueur du ressort est alors L.

Lorsqu'on immerge complètement le corps dans un liquide de masse volumique ρ, la longueur est alors L'.

Donner l'expression de L' en fonction de k, L, L_0, ρ, g et V

Qu'appelle-t-on poids apparent du corps ?

∗ Exercice 10

Une péniche, enfermée dans un sas, perd son chargement de minerai, lequel coule au fond du sas. Que devient le niveau d'eau dans le sas ?

∗ Exercice 11

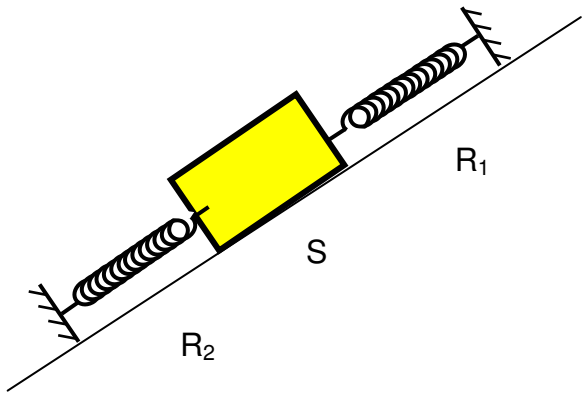
A un ressort R_1 est suspendu un corps (S_1) de masse m_1 ; à (S_1) est suspendu un ressort R_2, à l'extrémité libre duquel on suspend (S_2) de masse m_2.

Les deux ressorts R_1 et R_2 ont respectivement pour raideurs k_1 et k_2 et pour longueurs à vide L_{01} et L_{02}.

Déterminer les longueurs L_1 et L_2 des deux ressorts à l'équilibre.

∗ Exercice 12

On considère le système suivant:

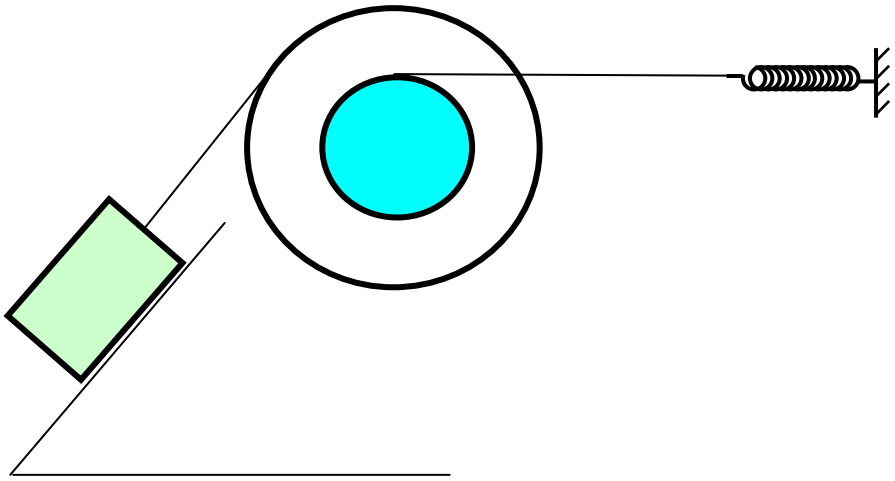


Le solide S, de masse M est en équilibre sur le plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Les deux ressorts R_1 et R_2 ont respectivement pour raideurs k_1 et k_2 et pour longueurs à vide L_{01} et L_{02}.

A l'équilibre R_1 est étiré et R_2 est comprimé

Etablir une relation entre les longueurs L_1 et L_2 des deux ressorts à l'équilibre.

∗ Exercice 13



Un solide de masse M, repose sur un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal.

Il est maintenu en équilibre grâce à un fil passant dans la gorge de rayon R d'une poulie à deux gorges. Un autre fil passe dans la gorge de rayon r (r<R) et est relié à un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0. A cause de frottements, la réaction du plan incliné fait, avec la normale à ce plan un angle β ($\beta < \varphi$ angle de frottement)

Exprimer la longueur L du ressort à l'équilibre, uniquement en fonction de α, β, R, r, φ , M, g k, et L_0.

4.11 CORRIGE DES EXERCICES

4.11.1 Corrigé de l'exercice 1

C'est faux. Le solide n'est pas forcément en équilibre !

Exemple :

Un palet de curling se déplace sur une piste horizontale verglacée. Le palet est soumis à son poids et à la réaction normale de la piste si on néglige les frottements. Ces deux forces ont même support et leur somme vectorielle est nulle mais il n'y a pas équilibre !

4.11.2 Corrigé de l'exercice 2

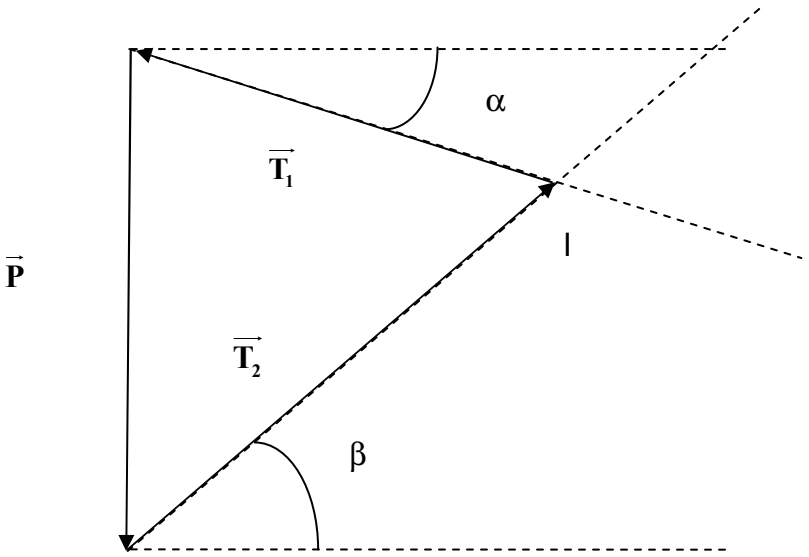
Le système {élève+hamac} est soumis à son poids et aux tensions exercées par les cordes.

A l'équilibre : $\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \vec{P} = \vec{0}$

1. Principe de la résolution graphique :

En respectant l'échelle imposée, P est représenté par un segment de longueur 4 cm. Par les extrémités de ce segment on trace les parallèles aux cordes en respectant les valeurs des angles. L'intersection I de ces deux droites fait apparaître deux segments dont les longueurs sont proportionnelles aux valeurs T_1 et T_2 des forces.

La figure ci-dessous n'a pas été réalisée à l'échelle.



2. Résolution géométrique.

On trace le triangle des forces vérifiant $\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \vec{P} = \vec{0}$

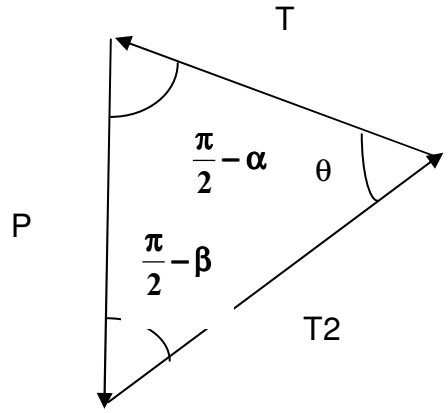
Il n'est absolument pas nécessaire ici de respecter angles et distances.

Dans le triangle quelconque :

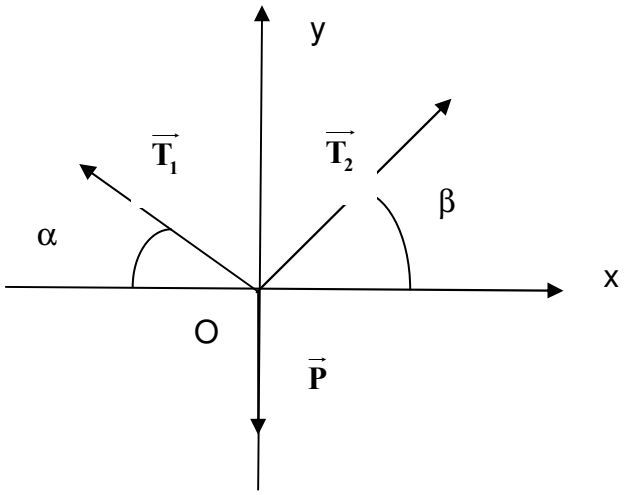
$$\frac{T_1}{\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)} = \frac{T_2}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = \frac{P}{\sin\theta} \quad \text{d'où} \quad T_1 = \frac{P}{\sin\theta}\sin(\frac{\pi}{2}-\beta) = \frac{P\cos\beta}{\sin\theta}$$

$$T_2 = \frac{P}{\sin\theta}\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \frac{P\cos\alpha}{\sin\theta}$$

$$\theta = 180 - 30 - 50 = 100° \qquad T_1 = \frac{800\cos 50}{\sin 100} = 522\,N \qquad T_2 = \frac{800\cos 30}{\sin 100} = 703,5\,N$$



3. Résolution analytique.



$$\vec{T_1}+\vec{T_2}+\vec{P}=\vec{0}$$

Projection sur x'x de la relation vectorielle : $-T_1\cos\alpha+T_2\cos\beta+0=0$

Projection sur y'y de la relation vectorielle : $T_1\sin\alpha+T_2\sin\beta-P=0$

Résolution :

$$T_1\sin\alpha+\frac{T_1\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta-P=0\Rightarrow T_1=\frac{P\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$T_2=\frac{T_1\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{P\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{P\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

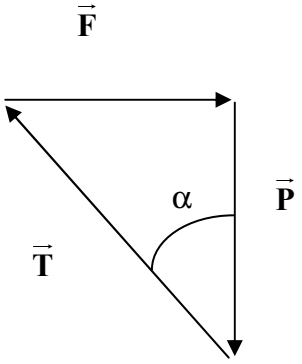
T_1=522 N T_2=703.5 N

4.11.3 Corrigé de l'exercice 3

On considère comme système le point A.

Sur le système s'exercent trois forces : la tension du ressort et les tensions exercées par les fils 1 et 2. La tension du fil 1 est égale à F et celle du fil 2 à P

A l'équilibre : $\vec{F}+\vec{P}+\vec{T}=\vec{0}$



$$\cos\alpha=\frac{P}{T}=\frac{mg}{k(L-L_0)}\Rightarrow L=\frac{mg}{k\cos\alpha}+L_0$$

$$\tan\alpha=\frac{F}{mg}\Rightarrow F=mg\tan\alpha$$

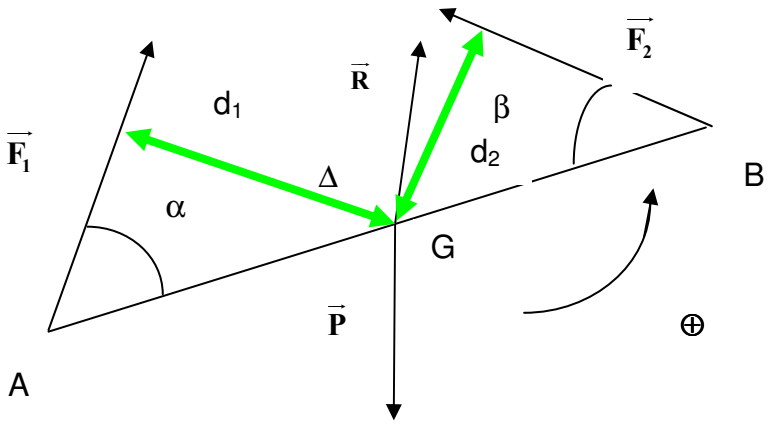
4.11.4 Corrigé de l'exercice 4

On considère comme système la barre ; la barre est soumise à quatre forces : $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ de l'axe.

A l'équilibre : $M_\Delta(\vec{F_1})+M_\Delta(\vec{F_2})+M_\Delta(\vec{P})+M_\Delta(\vec{R})=0$

$-F_1d_1+F_2d_2+0+0=0$ $\vec{F_1}$

$F_1AG\sin\alpha=F_2BG\sin\beta$



4.11.5 Correction de l'exercice 5.

Le système disque est soumis au couple de forces, à son poids, à la tension de la barre et à un couple exercé par le fil de torsion sur le disque.

A l'équilibre : $\mathbf{M_\Delta(couple) + M_\Delta(couple\ exercé\ par\ le\ fil) + M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{T}) = 0}$

$\mathbf{FD - C\theta + 0 + 0 = 0}$

$\mathbf{F2R\cos\theta = C\theta}$

4.11.6 Corrigé de l'exercice 6

Système : la brouette Forces exercées sur la brouette $\vec{P}$, $\vec{F}$, $\vec{R}$

$\vec{R}$ est verticale, car les deux autres forces sont verticales.

Δ axe horizontal passant par le centre de la roue $\mathbf{M_\Delta(\vec{F}) + M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) = 0}$

$F(D_1+D_2)\cos\alpha - P\ D_1\cos\alpha+0=0$ $F(D_1+D_2) - P\ D_1=0$

Remarque: on peut très bien utiliser un axe de rotation fictif, par exemple l'axe parallèle à Δ passant par le point de contact de la roue avec le sol.

On peut aussi écrire, étant donné que la brouette est soumise à trois forces parallèles, que la résultante de deux forces est égale et opposée et a le même support que la troisième.

4.11.7 Corrigé de l'exercice 7

Le corps est soumis à deux forces : son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ du plan

Etant donné qu'il y a frottement, la réaction $\vec{R}$ est inclinée par rapport à la normale au plan incliné. A l'équilibre, $\vec{P}$ et $\vec{R}$ ont même support et $\mathbf{\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}}$

On peut décomposer $\vec{R}$ en $\overrightarrow{R_T}$ et $\overrightarrow{R_N}$.

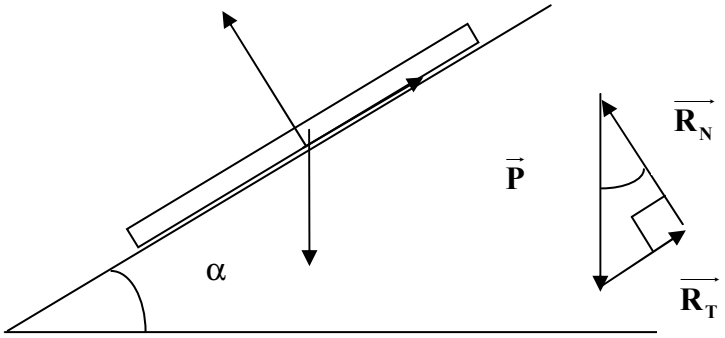
$\mathbf{\overrightarrow{R_N} + \vec{P} + \overrightarrow{R_T} = \vec{0}}$

Tant que l'angle formé par R et la normale au plan incliné est inférieur à φ, il y a équilibre.

$\tan\alpha < \tan\varphi$ $\mathbf{\frac{R_T}{R_N} < f}$ avec $R_N=P\cos\alpha$

A l'équilibre strict, $\alpha = \varphi$ $\mathbf{\frac{R_T}{R_N} = f}$

si $\alpha > \varphi$ il y a glissement du solide sur le plan



4.11.8 Corrigé de l'exercice 8

L'iceberg est en équilibre sous l'action de deux forces verticales : son poids et la force d'Archimède.

F=P

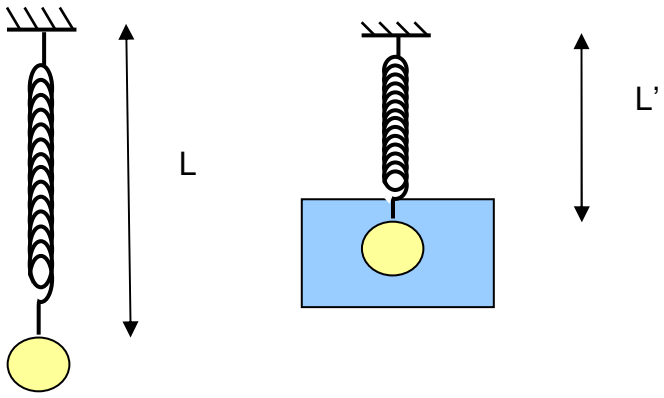
$$\rho_e g Vi = \rho_g g v_{iceberg} = \rho_g g Vi + \rho_g g Ve$$

$$\frac{Ve}{Vi} = \frac{\rho_e - \rho_g}{\rho_g} = \frac{1028 - 920}{920} = 0,12$$

Vi est le volume immergé ; Ve est le volume émergé

Ce calcul montre les dangers des icebergs pour la navigation

4.11.9 Corrigé de l'exercice 9



Initialement le système (corps S) est soumis à deux forces $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

$$Mg = k(L - L_0)$$

Lorsqu'il est immergé dans l'eau $\vec{P} + \vec{F} + \vec{T'} = \vec{0}$ $\quad Mg - F - T' = 0$

$$Mg - \rho g V - k(L' - L_0) = 0$$

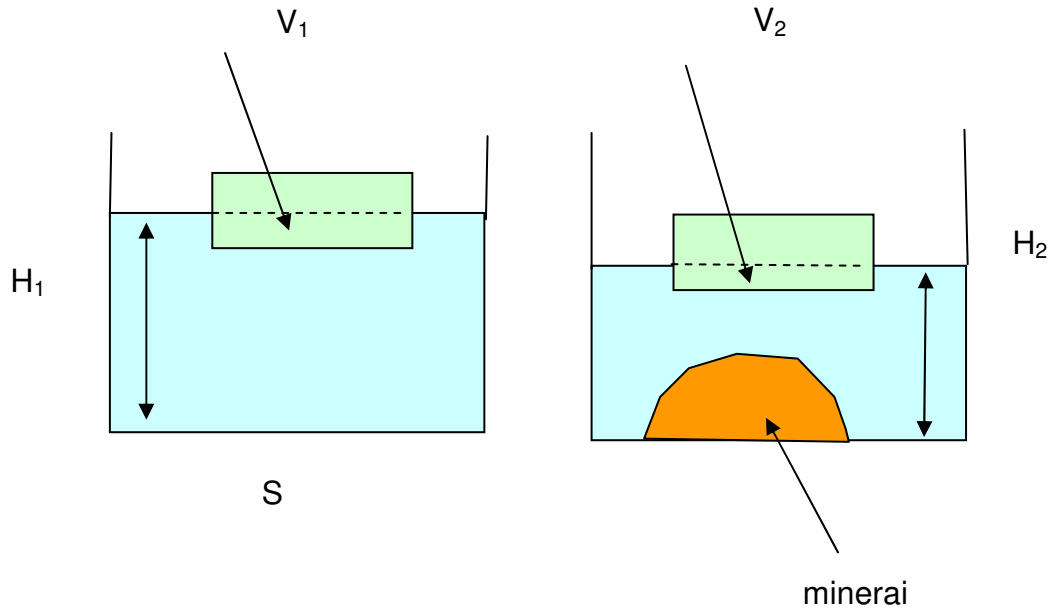
D'où $\mathbf{k(L-L_0)-\rho gV-k(L'-L_0)=0}$

$$\mathbf{L'=\frac{kL-\rho gV}{k}+L_0}$$

Lorsque le corps est immergé, tout se passe comme si il était soumis à deux forces : $\vec{T'}$ dirigée verticalement vers le haut et $\vec{P'}$ dirigée verticalement vers le bas. $\vec{P'}=\vec{P}+\vec{F}=-\vec{T'}$

$\vec{P'}$ est le poids apparent du corps ; cette force fictive est inférieure au poids. Dans le liquide, du fait de la poussée d'Archimède, le corps semble peser moins.

4.11.10 Corrigé de l'exercice 10



P est le poids de la péniche sans le minerai

P'est le poids du minerai qui se rassemble au fond du sas

H_1 est la hauteur initiale de l'eau dans le sas

H_2 est la hauteur finale de l'eau dans le sas

S est la surface horizontale du sas

V_1 est le volume initial immergé de la péniche

V_2 est le volume final immergé de la péniche

ρ est la masse volumique de l'eau, ρ' est celle du minerai.

Le poids de la péniche est égal à la poussée d'Archimède :

$\mathbf{P + P' = \rho g V_1}$ $\mathbf{P = \rho g V_2}$

Le volume d'eau dans le sas est égal à $\mathbf{H_1 S - V_1}$ ou à $\mathbf{H_2 S - V_2 - v}$, v étant le volume occupé par le minerai au fond du sas.

Le volume d'eau dans le sas n'a pas varié. $\mathbf{H_1 S - V_1 = H_2 S - V_2 - v}$

$$\mathbf{(H_1 - H_2)S = V_1 - V_2 - v}$$

$$\mathbf{(H_1 - H_2)S = \frac{P + P'}{\rho g} - \frac{P}{\rho g} - \frac{P'}{\rho' g}}$$

$$\mathbf{(H_1 - H_2)S = \frac{P'}{g}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)}$$

$\rho' > \rho \Rightarrow H_1 > H_2$ donc le niveau d'eau dans le sas baisse.

4.11.11 Corrigé de l'exercice 11

On considère comme système S_2

S_2 est soumis à son poids P_2 et à la tension exercée par R_2

$\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T_2} = \vec{0}$ $m_2g=k_2(L_2-L_{02})$

$$\mathbf{L_2 = \frac{m_2 g}{k_2} + L_{02}}$$

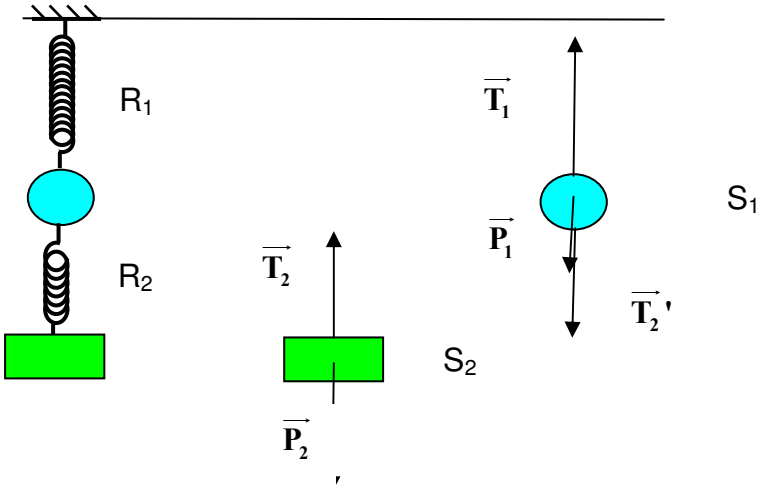
On considère comme système S_1

S_1 est soumis à son poids P_1, et à la tension T'_2 exercée par R_2 et à la tension T_1 exercée par R_1

$\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T_2}' + \overrightarrow{T_1} = \vec{0}$ $T_1=T'_2+P_1$

$k_1((L_1-L_{01}) = k_2(L_2-L_{02})+m_1g = m_2g+m_1g$

$$\mathbf{L_1 = \frac{(m_1 + m_2 g)}{k_1} + L_{01}}$$



4.11.12 Corrigé de l'exercice 12

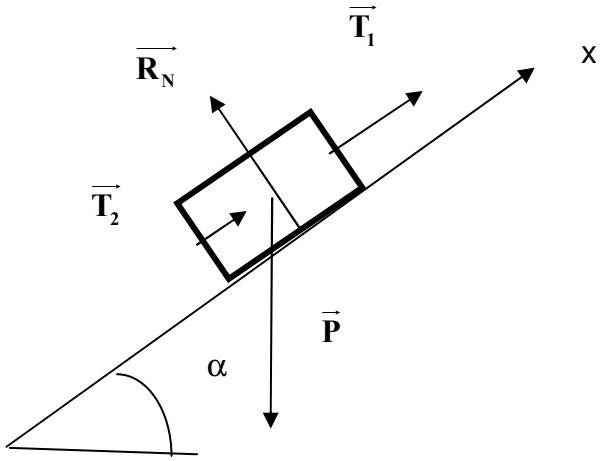
système : le solide S

S est soumis à $\vec{P}$, $\vec{R_N}$, $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ force exercée par le ressort R_2.

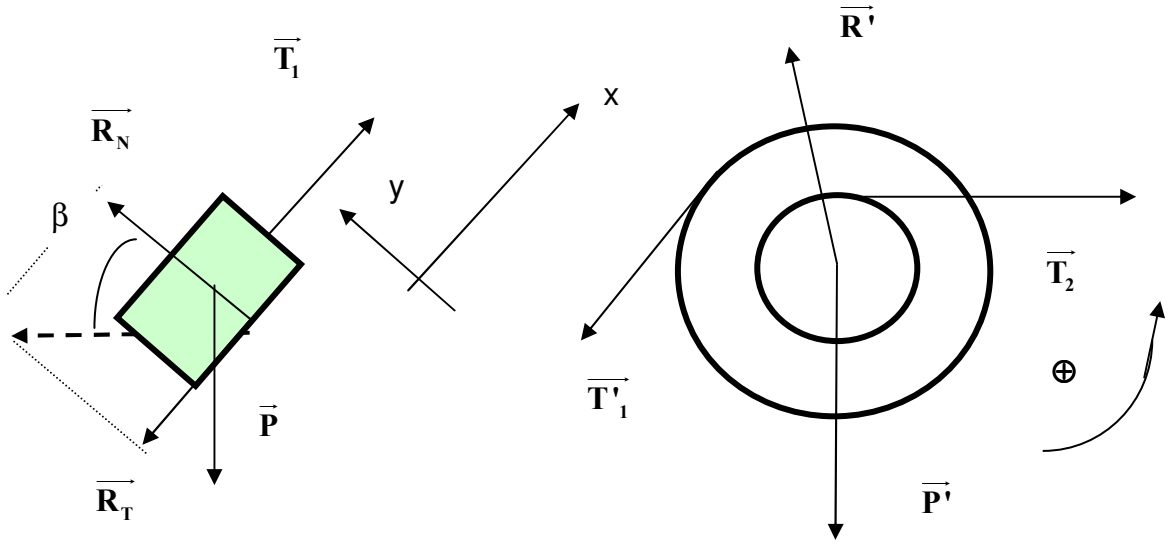
$\vec{P}+\vec{R_N}+\vec{T_1}+\vec{T_2}=\vec{0}$ on projette sur x'x

$$-mg\sin\alpha+0+T_1+T_2=0$$

$$-mg\sin\alpha+0+k_1(L_1-L_{01})+k_2(L_{02}-L_2)=0$$



4.11.13 Corrigé de l'exercice 13



Système : le corps de masse M

$$\vec{P} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{R_N} = \vec{0}$$

projection sur x'x : $-Mg\sin\alpha + T_1 - R_T + 0 = 0$

projection sur y'y : $-Mg\cos\alpha + 0 + 0 + R_N = 0$

$$\tan\beta = \frac{R_T}{R_N} \qquad R_T = R_N \tan\beta = Mg\cos\alpha\tan\beta$$

d'où $T_1 = Mg\cos\alpha\tan\beta + Mg\sin\alpha$

Système : la poulie mobile autour de l'axe Δ

$$0 + T'_1 R + 0 - T_2 r = 0$$

$$0 + T'_1 R + 0 - T_2 r = 0$$

Résolution

T_1=T'_1 car le fil a une masse négligeable

T_2 est la tension du ressort

$$Mg\cos\alpha\tan\beta + Mg\sin\alpha = \frac{r}{R}k(L - L_0)$$

$$L = \frac{RMg}{rk}(\cos\alpha\tan\beta + Mg\sin\alpha) + L_0$$

CHAPITRE 5 STATIQUE – EQUILIBRE D' UN SOLIDE

La statique est l'étude des corps aux repos. Ne sont envisagés ici que les systèmes isostatiques c'est-à-dire ceux pour lesquels les seules équations de la mécanique suffisent pour étudier l'équilibre.

Dans l'exemple traité dans le chapitre précédent (activité 6), nous avons vu qu'à l'équilibre la résultante des forces appliquées était nulle ainsi que la somme des moments par rapport à un axe. Il s'agissait d'un cas particulier, où toutes les forces sont orthogonales à l'axe.

Il est intéressant de connaître les relations, à l'équilibre d'un corps quelconque, n'ayant pas forcément d'axe réel de rotation et soumis à un ensemble quelconque de forces. L'équilibre est régi, dans ce cas, par le principe fondamental de la statique. Un principe ne se démontre pas ; il est applicable tant que l'on n'a pas trouvé de faits expérimentaux ou de considérations théoriques en contradiction avec son énoncé.

5.1 PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE.

L'équilibre d'un système matériel (corps ou ensemble de corps) ne dépend que des actions extérieures c'est-à-dire des actions exercées par des corps ou agents extérieurs au système.

Lorsqu'un système matériel est en équilibre dans un référentiel:

- la résultante de toutes forces représentant les actions mécaniques appliquées au système est nulle.

$$\vec{\mathbf{R}}\mathbf{ext} = \vec{\mathbf{0}}$$

- le moment résultant en un point A quelconque de toutes forces représentant les actions mécaniques appliquées au système est nul.

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}\mathbf{ext} = \vec{\mathbf{0}}$$

D'une manière plus condensée : Lorsqu'un système matériel est en équilibre dans un référentiel, le torseur d'action mécanique en un point A quelconque est nul.

$\{T\} =_A \{\vec{R}, \vec{M}_A\} = 0$

5.2 RESOLUTION D'UN PROBLEME DE STATIQUE

Il est conseillé d'utiliser la méthode suivante

- Bien lire l'énoncé ; s'il s'agit d'un mécanisme faisant intervenir plusieurs pièces, il faut comprendre parfaitement le fonctionnement de ce mécanisme.
- Définir le système étudié ; ce peut être un solide ou un ensemble de solides. Définir le référentiel d'étude.
- Faire le bilan des forces exercées sur le système méthodiquement :

- en recherchant tous les contacts avec l'extérieur pour faire le bilan des forces de contact exercées sur le système.
-en faisant le bilan des actions exercées à distance sur le système.

Ne pas confondre les forces exercées sur le système et les forces exercées par le système. Désigner les forces en utilisant une notation adaptée, par exemple $\overrightarrow{F_{2/1}}$ ou $\overrightarrow{F_{2\to 1}}$

- Appliquer le principe fondamental au système (ou le cas échéant à chaque système).
- Dans le cas où il y a plusieurs systèmes, appliquer la troisième loi de Newton.

Cette loi nous dit que si un corps 2 exerce sur un corps 1 une force $\overrightarrow{F_{2/1}}$, le corps 1 exerce sur 2 une force $\overrightarrow{F_{1/2}}$. Dans tous les cas : $\overrightarrow{F_{1/2}} + \overrightarrow{F_{2/1}} = \vec{0}$ et les forces $\overrightarrow{F_{1/2}}$ et $\overrightarrow{F_{2/1}}$ ont même support

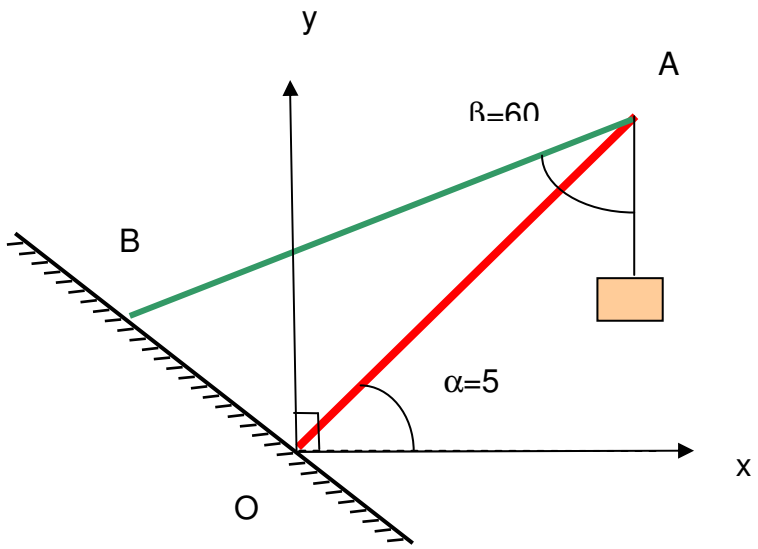
- Résoudre le système d'équations.

5.3 APPLICATION 1 :EQUILIBRE D'UN SOLIDE

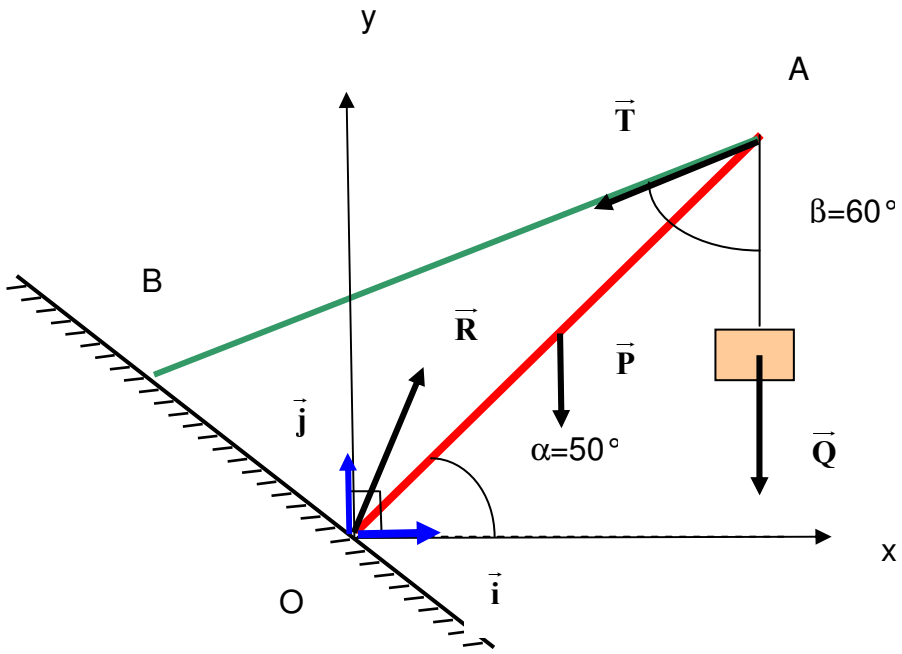
5.3.1 Enoncé

Un mât OA, de longueur L, de masse M, articulé en O grâce à une liaison pivot est maintenu en équilibre par un câble BA de poids négligeable. En A est suspendue une charge de poids Q

Déterminer la tension du câble ainsi que les caractéristiques de l'action exercée en O par l'axe sur le mât.



5.3.2 Résolution



le système étudié est le mât sur lequel s'exercent quatre forces :

$\vec{P}$ poids du mât : force exercée par la terre sur le mât

$\vec{Q}$ poids de la charge : force exercée par la terre sur la charge

$\vec{T}$ tension du câble : force exercée par le câble sur le mât. La valeur T de cette force est inconnue.

$\vec{R}$ réaction de l'axe : force exercée par l'axe en O sur le mât. Toutes les caractéristiques de cette force sont inconnues sauf son point d'application O

A l'équilibre : $\overrightarrow{M}_{O(\vec{P})} + \overrightarrow{M}_{O(\vec{T})} + \overrightarrow{M}_{O_{(\vec{R})}} + \overrightarrow{M}_{O(\vec{Q})} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{Q} + \overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{Q} + \overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = \left(\frac{L}{2}\cos\alpha\,\vec{i} + \frac{L}{2}\sin\alpha\,\vec{j}\right) \wedge (-mg\vec{j}) = -mg\cos\alpha\frac{L}{2}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{T} = \left(L\cos\alpha\,\vec{i} + L\sin\alpha\vec{j}\right) \wedge (-T\sin\beta\vec{i} - T\cos\beta\vec{j})$$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{T} = L\cos\alpha\,\vec{i} \wedge (-T\cos\beta\vec{j}) + L\sin\alpha\vec{j} \wedge (-T\sin\beta\vec{i})$$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{T} = -TL\cos\alpha\cos\beta\,\vec{k} + TL\sin\alpha\sin\beta\,\vec{k} = -TL\cos(\alpha+\beta)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{Q} = \left(L\cos\alpha\,\vec{i} + L\sin\alpha\vec{j}\right) \wedge (-Q\vec{j}) = -LQ\cos\alpha\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

d'où $$(-mg\cos\alpha\frac{L}{2} - TL\cos(\alpha+\beta) - LQ\cos\alpha)\vec{k} = \vec{0}$$

$$-mg\cos\alpha\frac{L}{2} - TL\cos(\alpha+\beta) - LQ\cos\alpha = 0$$

D'où l'expression de T :

$$T = -\frac{\left(\frac{mg}{2} + Q\right)\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$$

D'autre part $\vec{T} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{Q} = \vec{0}$

Projection sur Ox : $-T\sin\beta + 0 + 0 + \overline{R_x} = 0 \qquad \Rightarrow \overline{R_x} = T\sin\beta$

Projection sur Oy : $-T\cos\beta - P - Q + \overline{R_y} = 0 \qquad \overline{R_y} = T\cos\beta + P + Q$

La réaction de l'axe R $R = \sqrt{\overline{R_x}^2 + \overline{R_y}^2}$ Cette force est inclinée de θ par rapport à Ox tel que $\tan\theta = \frac{\overline{R_y}}{\overline{R_x}}$

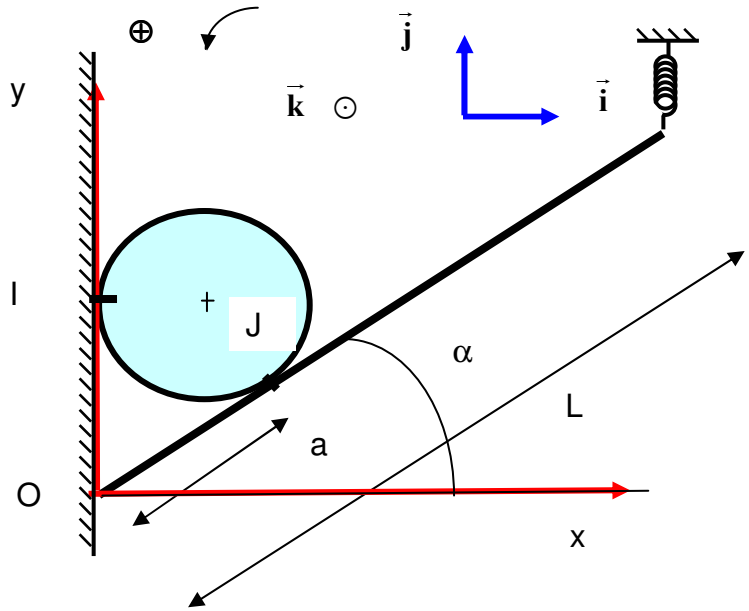
5.4 APPLICATION 2 : EQUILIBRE D'UN ENSEMBLE DE SOLIDES

5.4.1 Enoncé

Etablir les conditions d'équilibre du système matériel plan constitué d'un disque homogène de masse M et de rayon R, d'une tige homogène de section constante, de longueur L, de masse m, mobile autour de l'axe horizontal Δ passant par O et d'un ressort de raideur k. Les frottements sont négligés.

Etablir, à l'équilibre, la relation entre les grandeurs suivantes : M,m, g, α, L, a, θ et b, b étant l'allongement du ressort.

Déterminer les expressions des composantes $\overline{Rx}$ et $\overline{Ry}$ de la réaction $\vec{R}$ de l'axe en O.



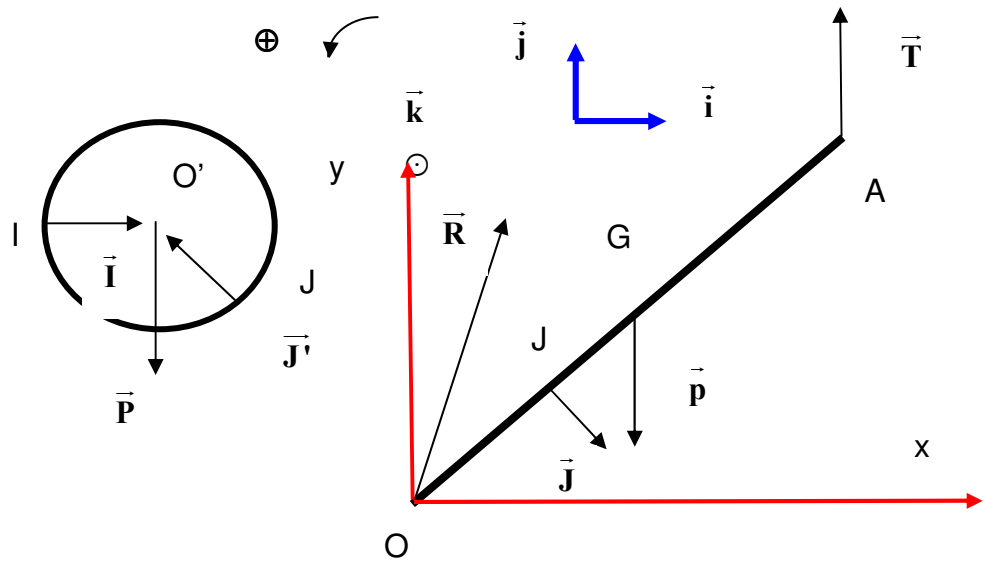
5.4.2 Résolution

Système :le disque

Sur le disque s'exercent son poids et deux forces de contact $\vec{I}$ et $\vec{J'}$ appliquées en I et J. A l'équilibre :

$\vec{P}+\vec{I}+\vec{J'}=\vec{0}$ en projetant sur Oy, on obtient $-P+0+J'\cos\alpha=0$ d'où

$$J'=\frac{P}{\cos\alpha}=\frac{Mg}{\cos\alpha}$$



Système : la barre

Sur cette barre s'exercent quatre forces : R appliquée en O et dont les autres caractéristiques sont inconnues, J force égale et opposée à J' exercée sur le disque, p le poids de la barre et T force exercée par le ressort

$$\vec{M}_O(P)+\vec{M}_O(T)+\vec{M}_O(R)+\vec{M}_O(\vec{J})=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{OG}\wedge\vec{P}+\overrightarrow{OA}\wedge\vec{T}+\overrightarrow{OJ}\wedge\vec{J}+\overrightarrow{OO}\wedge\vec{R}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{OG}\wedge\vec{p}=\left(\frac{L}{2}\cos\alpha\,\vec{i}+\frac{L}{2}\sin\alpha\,\vec{j}\right)\wedge(-mg\vec{j})=-mg\cos\alpha\frac{L}{2}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA}\wedge\vec{T}=\left(L\cos\alpha\,\vec{i}+L\sin\alpha\vec{j}\right)\wedge T\vec{j}=TL\cos\alpha\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OO}\wedge\vec{R}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{OJ}\wedge\vec{J}=(a\cos\alpha\,\vec{i}+a\sin\alpha\,\vec{j})\wedge(-J\cos\alpha\,\vec{j}+J\sin\alpha\,\vec{i})$$

$$\overrightarrow{OJ}\wedge\vec{J}=-Ja\cos\alpha\cos\alpha\,\vec{k}-Ja\sin\alpha\sin\alpha\vec{k}\qquad\overrightarrow{OJ}\wedge\vec{J}=-Ja\vec{k}$$

d'où la relation à l'équilibre

$$-\frac{mgL}{2}\cos\alpha+kbL\cos\alpha-\frac{Mg}{\cos\alpha}a=0$$

D'autre part : $\vec{T}+\vec{p}+\vec{R}+\vec{J}=\vec{0}$. En projetant cette relation sur les axes Ox et Oy, on obtient :

$$0+0+\overline{R_x}+J\sin\alpha=0 \qquad \Rightarrow \overline{R_x}=-J\sin\alpha=-\frac{P}{\cos\alpha}\sin\alpha=-Mg\tan\alpha$$

$$T-p-J\cos\alpha+\overline{R_y}=0 \qquad \overline{R_y}=-T+p+J\cos\alpha$$

$$\overline{R_y}=-kb+mg+\frac{Mg}{\cos\alpha}\cos\alpha=-kb+mg+Mg$$

La réaction de l'axe R $R=\sqrt{\overline{R_x}^2+\overline{R_y}^2}$ Cette force est inclinée de θ par rapport à Ox tel que :

$$\tan\theta=\frac{\overline{R_y}}{\overline{R_x}}$$

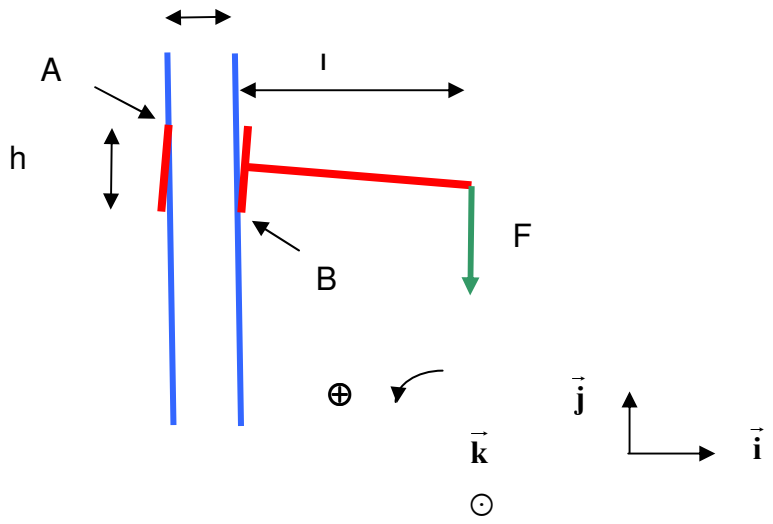
5.5 APPLICATION 3 : EXERCICE FAISANT INTERVENIR DES FORCES DE FROTTEMENT.

5.5.1 Enoncé

La pièce représentée sur la figure est constituée d'un cylindre de hauteur h soudé à une tige perpendiculaire à son axe. La pièce, de poids négligeable, peut coulisser sur un cylindre de diamètre D car il existe entre les cylindres suffisamment de jeu. Quand on exerce en bout de tige une force F verticale, la pièce s'immobilise sur le cylindre fixe par suite du phénomène d'arc-boutement. En A et en B, il y a adhérence. On donne f= tanφ coefficient de frottement entre les deux cylindres. On ne tiendra pas compte de l'inclinaison de la tige, exagérée sur le schéma.

Quelle relation existe-t-il à l'équilibre strict entre f, D, Let h ?

Quelle doit-être la condition vérifiée par L pour qu'il y ait équilibre ?



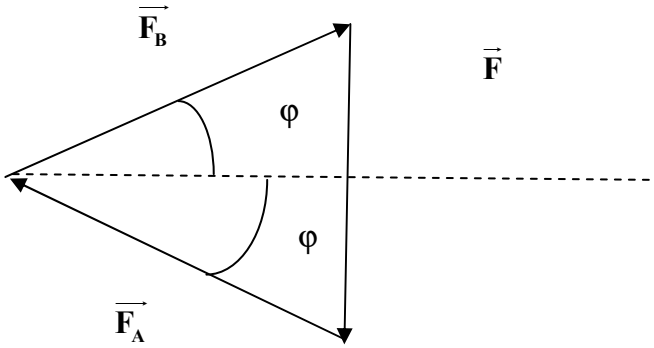
5.5.2 Résolution

Le système étudié est la pièce qui coulisse le long du cylindre ; Sur cette pièce s'exercent la force $\vec{F}$, et les actions de contact en A et B, respectivement $\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$.

$\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$ sont représentées sur le schéma à l'équilibre strict et c'est pour cela qu'elles font le même angle φ avec l'horizontale.

Première solution :

A l'équilibre $\vec{F}+\overrightarrow{F_A}+\overrightarrow{F_B}=\vec{0}$

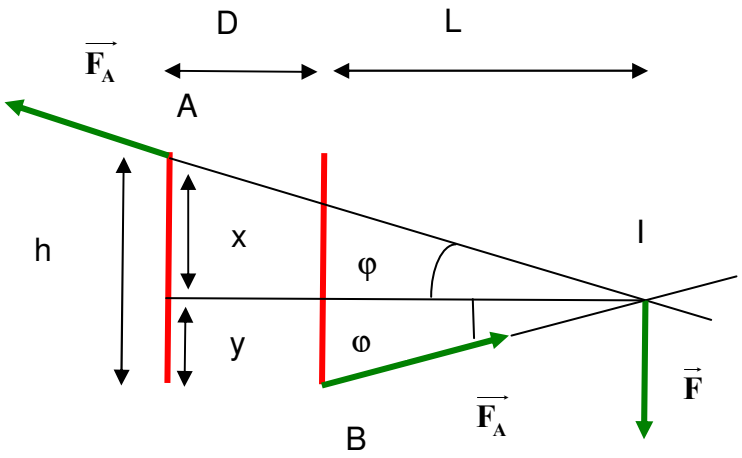


Le triangle est isocèle $\Rightarrow F_A = F_B$ $\qquad \sin\varphi = \dfrac{\frac{F}{2}}{F_A} = \dfrac{F}{2F_A}$

Ces trois forces, non parallèles, sont concourantes en I

$\tan\varphi = \dfrac{x}{L+D}$ $\qquad \tan\varphi = \dfrac{y}{L}$ $\qquad \Rightarrow x+y = \tan\varphi(2L+D)$ or x+y=h

d'où : $h = \tan\varphi(2L+D) \Rightarrow L = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{h}{\tan\varphi} - D\right)$



Deuxième solution :

A l'équilibre :

$$\overrightarrow{M}_{B(\bar{B})} + \overrightarrow{M}_{B(\bar{A})} + \overrightarrow{M}_{B(\bar{F})} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M}_{B(\bar{B})} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M}_{B(\bar{A})} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{A} = (h\vec{j} - D\vec{i}) \wedge (-A\cos\varphi\,\vec{i} + A\sin\varphi\,\vec{j})$$

$$\overrightarrow{M}_{B(\bar{A})} = (hA\cos\varphi - DA\sin\varphi)\vec{k}$$

$$hA\cos\varphi - DA\sin\varphi - FL = 0$$

D'autre part : $\vec{A} + \vec{B} + \vec{F} = \vec{0}$

Projection sur Ox : $-A\cos\varphi + B\cos\varphi + 0 = 0$

Projection sur Oy : $A\sin\varphi + B\sin\varphi - F = 0$

La résolution du système conduit à :

$$A = B \qquad 2A\sin\varphi = F \qquad A = \frac{F}{2\sin\varphi}$$

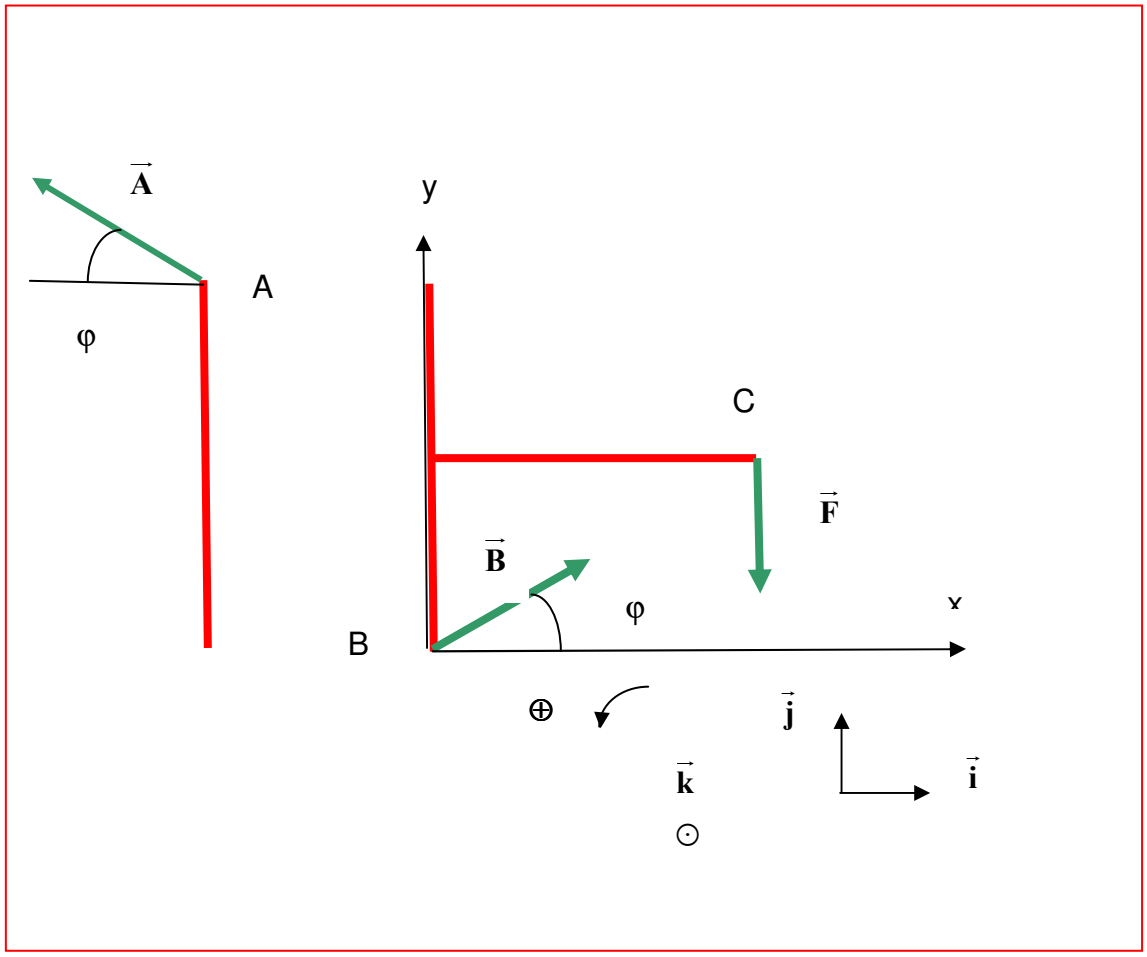
$$h\frac{F}{2\sin\varphi}\cos\varphi - D\frac{F}{2\sin\varphi}\sin\varphi - FL = 0$$

$$h\cos\varphi - D\sin\varphi - 2L\sin\varphi = 0$$

$(D + 2L)\tan\varphi = h$ Relation vérifiée à l'équilibre strict.

$$h\cos\varphi - D\sin\varphi - 2L\sin\varphi = 0 \qquad \Rightarrow L = \frac{1}{2\sin\varphi}(h\cos\varphi - D\sin\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\tan\varphi} - D\right)$$

Condition pour qu'il y ait équilibre : il faut que L soit supérieure à la valeur à l'équilibre strict : $L > \frac{1}{2}\left(\frac{h}{f} - D\right)$

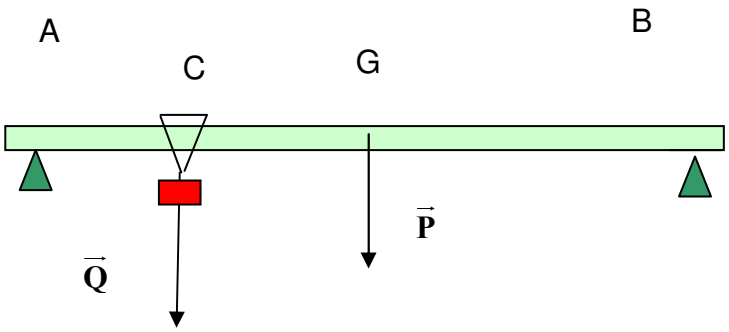


5.6 EXERCICES

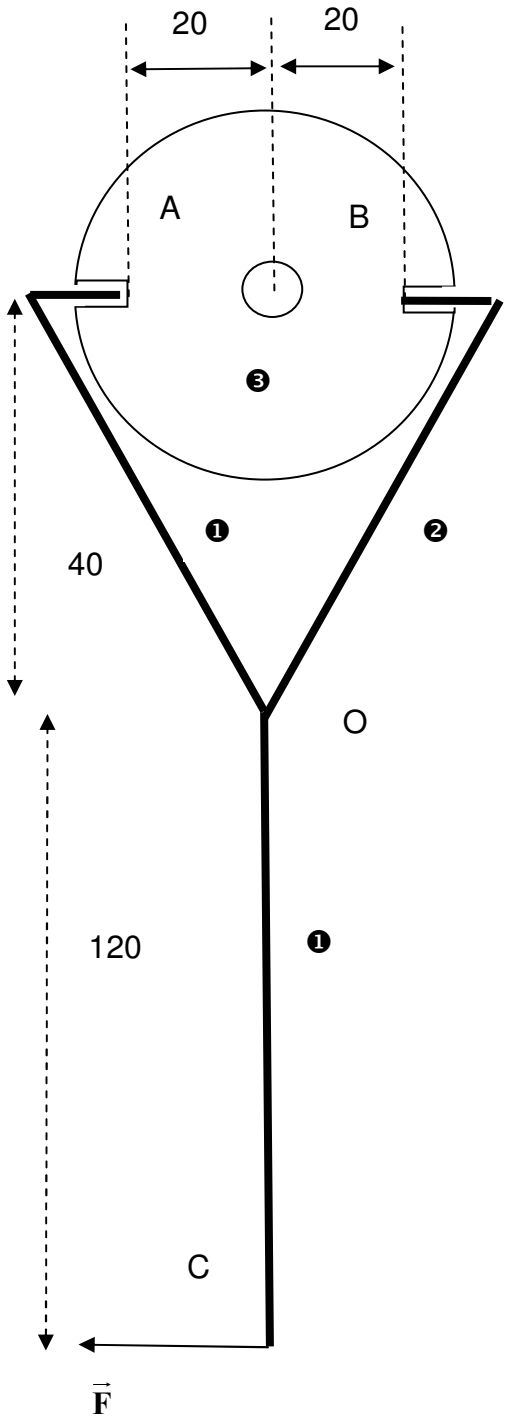
∗ Exercice 1

Un rail homogène, de poids P = 1500 N, repose sur deux appuis simples A et B tels que AB= 8m. Un chariot supportant une charge peut se déplacer sur le rail. Lorsque le chariot est en C (AC=2m), une force Q verticale de valeur 5000 N s'exerce en C.

Déterminer dans ces conditions, les valeurs des réactions des appuis en A et en B.



∗ Exercice 2



A l'aide d'une clef spéciale constituée de deux parties ❶ et❷, articulées en O, on serre la pièce ❸ en exerçant une force $\vec{F}$ perpendiculaire à OC et de valeur F=200 N.

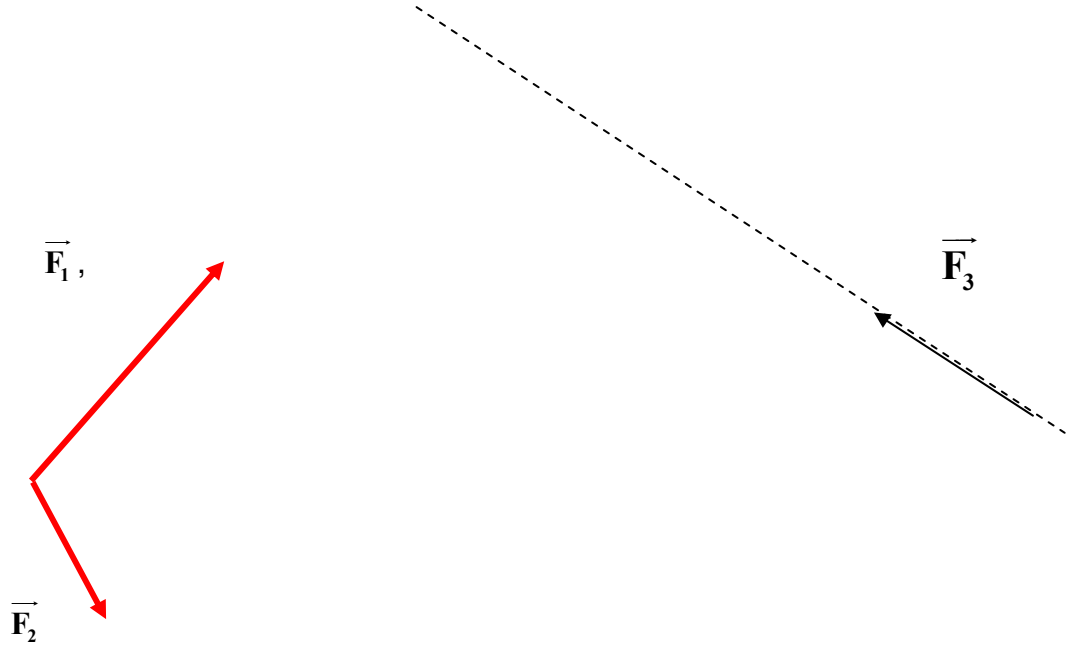
Les contacts entre l'outil et la pièce s'effectuent sur les surfaces horizontales des encoches de la pièce. Pour simplifier, on supposera que les contacts entre la clef et la pièce s'exercent en A et B extrémités à la fois de la clef et des encoches de la pièce.

L'angle d'adhérence en A et B est φ =30°. Montrer que le serrage de la pièce est possible et calculer les valeurs des forces exercées par la pièce sur la clef.

∗ Exercice 3

Un solide soumis à quatre forces coplanaires, non parallèles, est en équilibre.

Sur le schéma sont représentées $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$. Déterminer graphiquement les caractéristiques de $\vec{F_4}$



5.7 CORRIGES DES EXERCICES

5.7.1 Corrigé de l'exercice 1

Il n'y a pas de frottement : les réactions sont normales aux appuis

Le système (barre) est soumis à quatre forces.

A l'équilibre : $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R_A}+\vec{R_B}=\vec{0}$ $\quad \vec{M_0}(\vec{P})+\vec{M_0}(\vec{Q})+\vec{M_0}(\vec{R_A})+\vec{M_0}(\vec{R_B})=\vec{0}$

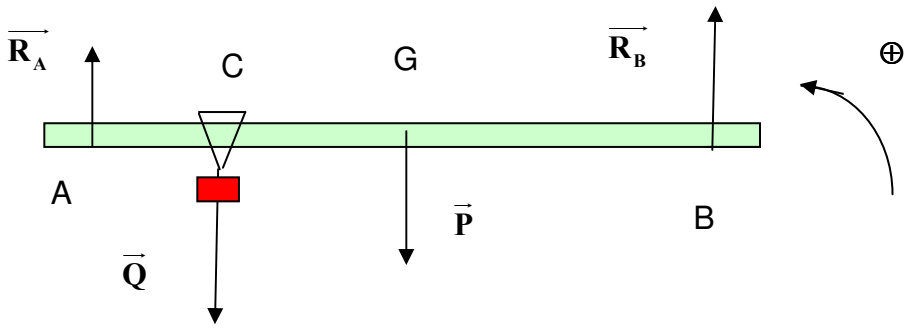
Les forces sont coplanaires, on peut écrire

$M_\Delta(\vec{P})+M_\Delta(\vec{Q})+M_\Delta(\vec{R_A})+M_\Delta(\vec{R_B})=0$ Δ étant orthogonal aux forces et passant par A. $-PAG-QAC+0+R_BAB=0$ d'où $R_B=\dfrac{PAG+QAC}{AB}$

$$R_B=\frac{1500\times4+5000\times2}{8}=2000N$$

$\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R_A}+\vec{R_B}=\vec{0}$ projection sur la verticale $-P-Q+R_A+R_B=0$

$R_A=P+Q-R_B$ $\quad R_A=1500+5000-2000=4500\,N$



5.7.2 Corrigé de l'exercice 2

Système :pièce 2

La pièce ❷, soumise à deux forces $\vec{F_{1/2}}$ et $\vec{F_{3/2}}$, est en équilibre.

$\vec{F_{1/2}}+\vec{F_{3/2}}=\vec{0}$. Ces deux forces, appliquées en O et en B, ont pour support BO.

La troisième loi de Newton permet d'écrire : $\vec{F_{1/2}}+\vec{F_{2/1}}=\vec{0}$; $\vec{F_{2/1}}$ a donc également pour support BO.

Système :pièce 1

On considère comme système la pièce ❶; cette pièce, soumise à trois forces non parallèles, est en équilibre. Les trois forces sont concourantes.

On connaît les directions de $\vec{F}$ et de $\overrightarrow{F_{2/1}}$ qui concourent en I ; on en déduit que $\overrightarrow{F_{3/1}}$, appliquée en A, passe par I.

S'il n'y avait pas de frottement, les forces $\overrightarrow{F_{3/1}}$ et $\overrightarrow{F_{2/1}}$ seraient normales à la droite AB; ici elles font respectivement les angles φ_A et φ_B avec les normales aux surfaces de contact. Pour que le serrage soit possible il faut que ces angles soient inférieurs à φ angle d'adhérence (φ=30°).

Calcul de φB et de : φA

$$\tan\varphi_B = \frac{20}{40} = 0,5 \Rightarrow \varphi_B = 26,6°$$

$$d_B = OC\tan\varphi_B = 120\times 0,5 = 60 \qquad d_A = d_B - 20 = 40$$

$$\tan\varphi_A = \frac{40}{160} = 0,25 \Rightarrow \varphi_A = 14°$$ Le serrage est donc possible.

Calcul des valeurs des forces :

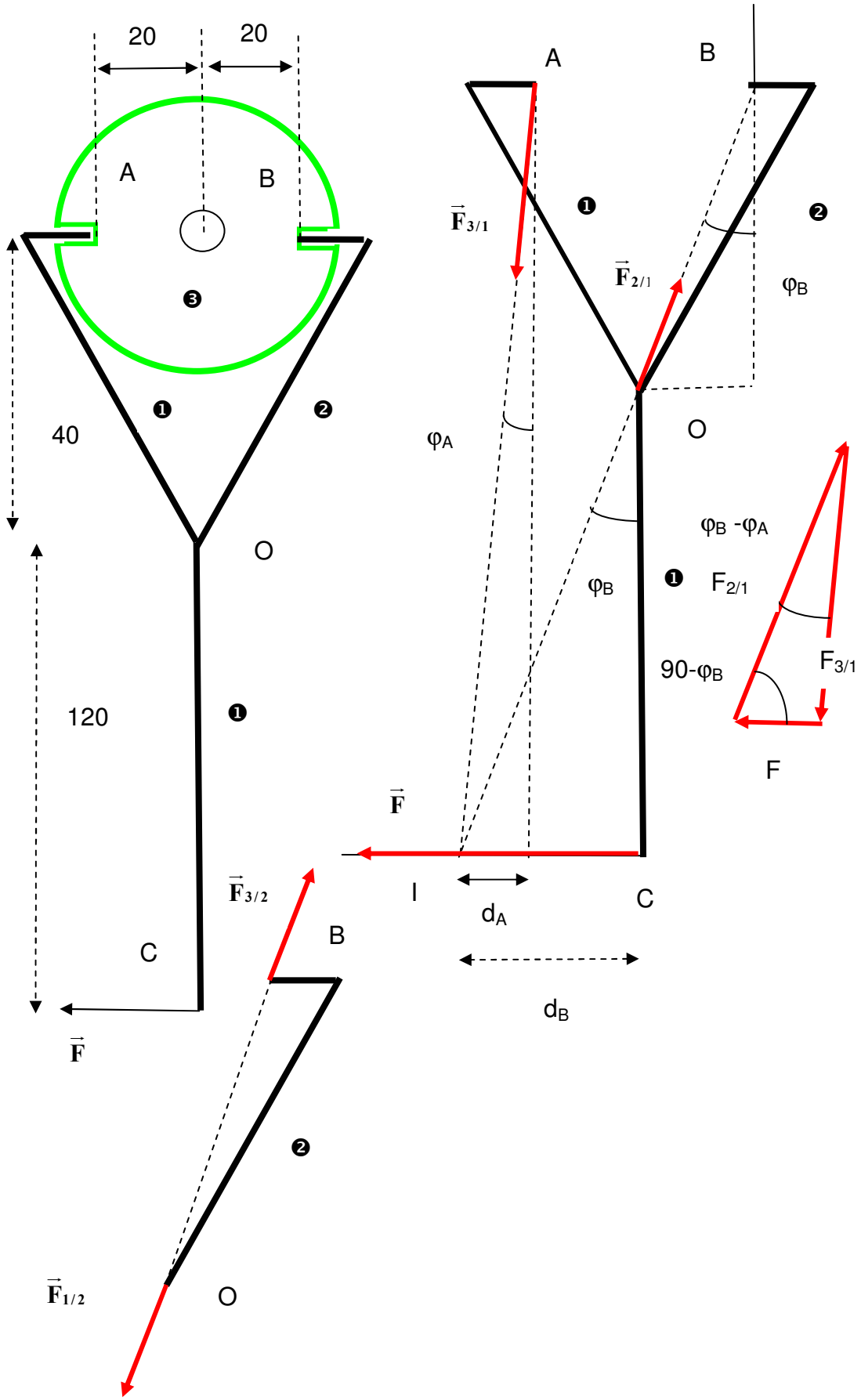
A l'équilibre : $\vec{F} + \overrightarrow{F_{2/1}} + \overrightarrow{F_{3/1}} = \vec{0}$ On trace le triangle des forces

$$\frac{F_{3/1}}{\sin(90-\varphi_B)} = \frac{F}{\sin(\varphi_B-\varphi_A)} \Rightarrow F_{3/1} = \frac{F}{\sin(\varphi_B-\varphi_A)}\sin(90-\varphi_B)$$

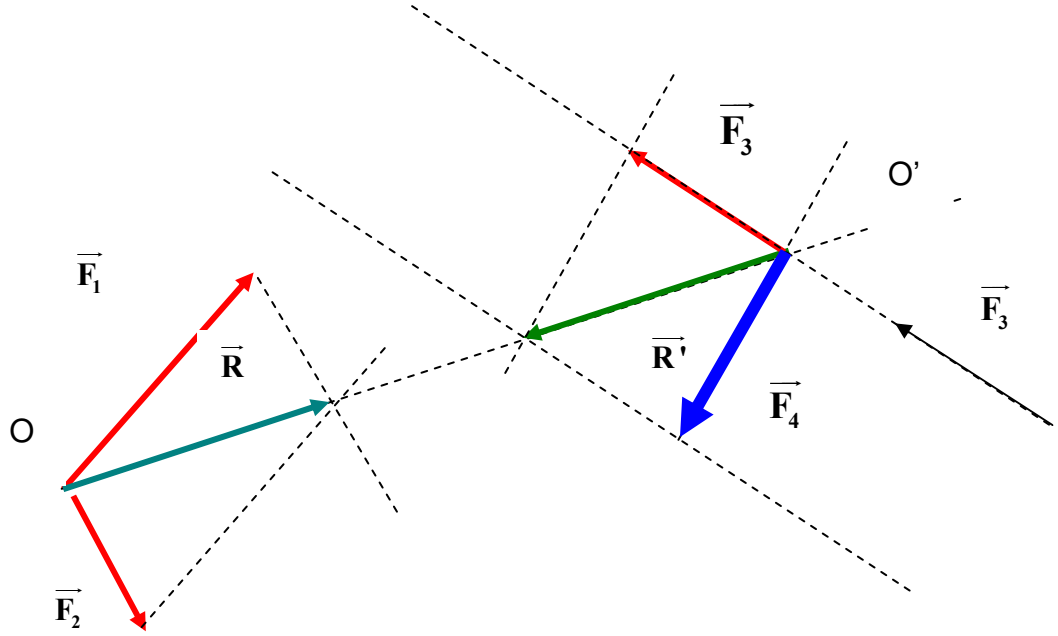
$$F_{3/1} = \frac{200}{\sin 12,6}\sin 63,4 = 820N$$

$$\frac{F_{2/1}}{\sin(180-(90-\varphi_B)-(\varphi_B-\varphi_A))} = \frac{F}{\sin(\varphi_B-\varphi_A)} \Rightarrow \frac{F_{2/1}}{\sin(90+\varphi_A)} = \frac{F}{\sin(\varphi_B-\varphi_A)}$$

$$F_{2/1} = \frac{200}{\sin 12,6}\sin 104 = 890N$$


20
20
A
B
❸
❶
❷
40
O
120
❶
C
$\vec{F}$
$\vec{F}_{3/2}$
B
❷
$\vec{F}_{1/2}$
O
A
B
$\vec{F}_{3/1}$
❶
$\vec{F}_{2/1}$
❷
φ_B
φ_A
O
$\varphi_B - \varphi_A$
φ_B
❶
$F_{2/1}$
$90-\varphi_B$
$F_{3/1}$
F
$\vec{F}$
l
d_A
C
d_B

5.7.3 Corrigé de l'exercice 3



A l'équilibre : $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}=\vec{0}$ et $M_\Delta\vec{F_1}+M_\Delta\vec{F_2}+M_\Delta\vec{F_3}+M_\Delta\vec{F_4}=0$

Soit $\vec{R}$ la résultante de $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$: $\vec{R}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$

Soit $\vec{R'}$ la résultante de $\vec{F_3}$ et $\vec{F_4}$: $\vec{R'}=\vec{F_3}+\vec{F_4}$

Pour vérifier les deux conditions d'équilibre :

$\vec{R}+\vec{R'}=\vec{0}$ et $M_\Delta(\vec{R})+M_\Delta(\vec{R'})=0$ il faut que R=R', que les deux forces $\vec{R}$ et $\vec{R'}$ soient opposées et aient même support.

On trace $\vec{R}$. Le support de $\vec{R}$ coupe le support de $\vec{F_3}$ en O'. O' est le point d'application de R'.

Il suffit, par l'extrémité de $\vec{R'}$, de tracer le parallélogramme pour obtenir $\vec{F_4}$

CHAPITRE 6 CINEMATIQUE - MOUVEMENT GENERAL D'UN POINT

La cinématique est l'étude du mouvement des corps indépendamment des forces qui les produisent.

Avant d'étudier le mouvement d'un corps, ensemble de points, il faut commencer par étudier le mouvement d'un point.

6.1 GENERALITES

6.1.1 Point mobile.

On appelle point matériel un corps de très faibles dimensions, suffisamment petit pour que l'on puisse l'assimiler à un point (exemple : un atome). Mais une étoile, un avion, situés très loin de l'observateur, pourront aussi être considérés comme des points.

6.1.2 Référentiel.

Pour étudier le mouvement d'un point il faut pouvoir le situer dans l'espace et dans le temps.

Lorsqu'on a précisé l'ensemble des corps par rapport auxquels on étudie le mouvement, ainsi qu'une horloge, on a défini un référentiel.

6.1.3 Repère d'espace.

Dans un référentiel on peut définir une infinité de repères d'espace. Un repère d'espace est constitué d'une origine des coordonnées et de trois vecteurs formant une base.

Pour traiter un problème de mécanique, il faudra choisir un référentiel et dans le référentiel choisir un repère d'espace.

6.1.4 Mouvement.

Le mouvement est un phénomène qui s'opère à la fois dans l'espace et dans le temps.

6.1.5 Trajectoire.

C'est l'ensemble des positions occupées par le point mobile au cours du temps.

Il ne faut pas confondre mouvement et trajectoire (le mouvement fait intervenir le temps, la trajectoire ne dépend pas du temps).
La trajectoire dépend du référentiel choisi pour étudier le mouvement.

6.1.6 Exemple montrant le caractère relatif du mouvement :

Le passager d'un train en mouvement par rapport à la Terre abandonne un objet.
Dans le référentiel « train », pour un observateur immobile situé dans ce train, la trajectoire de chute est une droite.
Dans le référentiel « Terre », pour un observateur immobile par rapport au sol et regardant le train se déplacer, la trajectoire est parabolique.
☐ Exercice 1

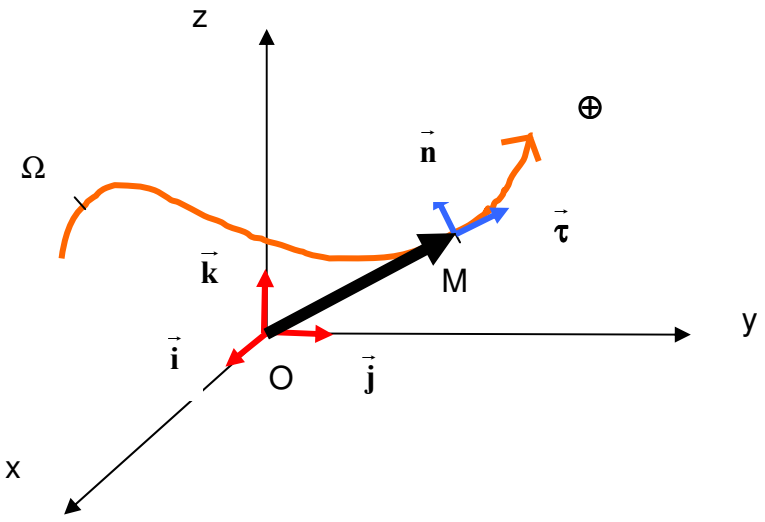
6.2 REPERAGE D' UN POINT DANS L' ESPACE

6.2.1 Repère cartésien

Dans le repère d'espace (Ox, Oy, Oz), le point mobile M a trois coordonnées x, y et z. Le point M est en mouvement si l'une au moins de ses coordonnées varie au cours du temps

A chaque instant, sa position est donnée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ appelé vecteur espace ou vecteur position.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



6.2.2 Repère de Frenet

Le repère de Frénet est lié au point mobile. Il est constitué de trois vecteurs unitaires :

le vecteur $\vec{\tau}$, tangent en M à la trajectoire, est orienté dans le sens choisi pour positif pour la trajectoire.

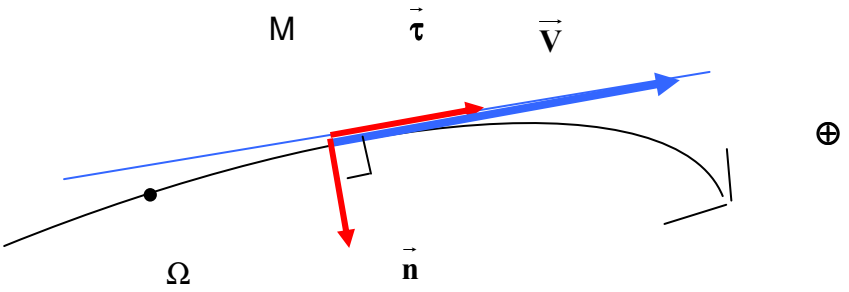
- le vecteur $\vec{n}$, normal en M à la trajectoire, est orienté vers l'intérieur de la concavité de la courbe.

- le vecteur $\vec{\chi}$, perpendiculaire aux deux autres, est tel que le trièdre ($\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{\chi}$) soit direct.

On définit sur la trajectoire une origine des espaces Ω. C'est par rapport à ce point que l'on situe le mobile, repéré par son abscisse curviligne s.

s est la mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{\Omega M}$: $s = \overset{\frown}{\Omega M}$

Le mouvement de M est connu si l'on connaît la fonction s = f(t) appelée improprement « équation horaire »



☐ Exercice 2

6.3 VECTEUR VITESSE

6.3.1 Vecteur vitesse moyenne

Soient M et M' les positions du point mobile aux instants t et t+Δt avec Δt >0

Le vecteur vitesse moyenne entre t et t+Δt est défini par : $\vec{v}_{moy} = \dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$

Ce vecteur a même direction et même sens que le vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$.

La vitesse s'exprime en $m.s^{-1}$

Cette définition est purement mathématique car le vecteur vitesse moyenne fait intervenir le vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$ et non le trajet réellement effectué entre M et M'.

☐ Exercice 3

6.3.2 Vecteur vitesse instantanée

6.3.2.1 Définition

Par définition : $\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$

6.3.2.2 expression dans le repère cartésien

O est l'origine du repère d'espace. Ω est l'origine des espaces choisie sur la trajectoire.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\overrightarrow{\Delta OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Composantes du vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

☐ exercice 4

6.3.2.3 Expression dans le repère de Frenet.

On peut écrire : $\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta t}\frac{\overrightarrow{MM'}}{MM'}$

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{Vmoy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta t} . \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{MM'}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overset{\frown}{\Delta s}}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

v est la vitesse algébrique de M

Quand Δt tend vers zéro, M' tend vers M et la corde MM' tend vers la tangente en M à la trajectoire ; il en résulte que :

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{MM'} = \vec{\tau}$ vecteur unitaire du repère de Frenet

Finalement

$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = \vec{\tau}v$ v est la vitesse algébrique de M

☐ Exercice 5

6.3.3 Caractéristiques du vecteur vitesse instantanée

Le vecteur vitesse de M est :

- appliqué au point mobile M
- tangent à la trajectoire
- orienté dans le sens du mouvement

Il a pour expression $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = \vec{\tau}v$, $\vec{\tau}$ étant dirigé dans le sens positif choisi pour la trajectoire.

6.4 VECTEUR ACCELERATION

6.4.1 Accélération moyenne.

Soient $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ les vitesses du point mobile aux instants t et t+Δt avecΔt >0

Le vecteur accélération moyenne entre t et t+Δt est défini par :

$\overrightarrow{Amoy} = \frac{\vec{V'} - \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$

L'accélération s'exprime en $m.s^{-2}$

6.4.2 Accélération instantanée.

6.4.2.1 Définition

$\vec{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{Amoy}$ $\vec{A} = \frac{\overrightarrow{dV}}{dt}$

Le vecteur accélération est la dérivée, par rapport au temps, du vecteur vitesse

6.4.2.2 Expression dans le repère cartésien

$$\vec{A} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\frac{dy}{dx}\vec{i} + \frac{dy}{dx}\vec{j} + \frac{dy}{dx}\vec{k})}{dt}$$

$$\vec{A} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \qquad \vec{A} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

6.4.2.3 Expression dans le repère de Frenet.

$$\vec{A} = \frac{\overrightarrow{dV}}{dt} \qquad \vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = \vec{\tau}.v$$

$\vec{\tau}$ varie en direction au cours du temps : sa dérivée par rapport au temps n'est pas nulle

$$\vec{A} = \vec{\tau}.\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{ds}{dt}$$

Le vecteur accélération apparaît comme une somme de deux vecteurs

Composante tangentielle de l'accélération

Le premier terme de la somme $\vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}$ est un vecteur qui a la direction de $\vec{\tau}$, vecteur unitaire porté par la tangente à la trajectoire: c'est pourquoi ce vecteur s'appelle accélération tangentielle $\vec{a_t}$

$$\vec{a_t} = \vec{\tau}.\frac{d^2s}{dt^2} = \vec{\tau}.\frac{dv}{dt}$$

Composante normale de l'accélération

Le deuxième vecteur $\frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}$ a la direction du vecteur $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ Or $\vec{\tau}$ étant un vecteur unitaire, $\vec{\tau}^2 = 1$; en dérivant par rapport au temps, on obtient : $2\vec{\tau}\frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0$ Ce produit scalaire nul montre que les vecteurs $\vec{\tau}$ et $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ sont orthogonaux ; on en déduit que $\frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}$ a la direction de $\vec{n}$ vecteur unitaire normal

$\frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}$ est l'accélération normale $\vec{a_n}$

Si l'on introduit ρ, le rayon de courbure de la trajectoire, défini au point considéré par $\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{\vec{n}}{\rho}$ on en déduit $\frac{d\vec{\tau}}{dt}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{\vec{n}}{\rho}\frac{ds}{dt}$

D'où $\overrightarrow{a_n}=\frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{\vec{n}}{\rho}\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt}=\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$

$$\overrightarrow{a_n}=\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

Dans le cas d'une trajectoire circulaire, ρ est constant et égal au rayon R du cercle.

Ce vecteur $\overrightarrow{a_n}$ est toujours dirigé vers l'intérieur de la concavité de la courbe.

Conclusion :

Le vecteur accélération apparaît comme une somme de deux vecteurs

$$\vec{A}==\overrightarrow{a_t}+\overrightarrow{a_n}$$

$\overrightarrow{a_t}$ et $\overrightarrow{a_n}$ sont les deux composantes du vecteur accélération dans le repère de Frenet

6.4.3 Accélération et décélération.

figure 1 : le mobile accélère ; $\overrightarrow{a_t}$ et $\vec{v}$ ont même direction et même sens

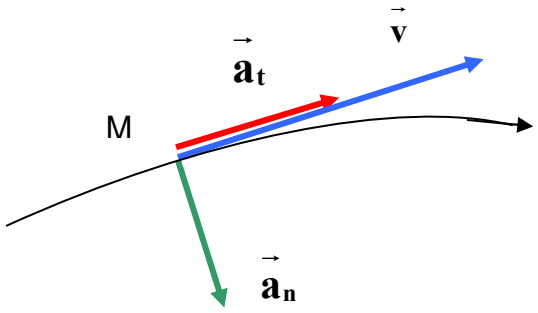
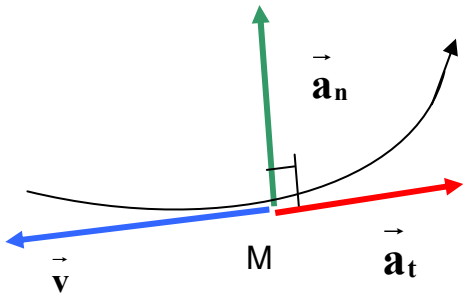


figure 2 : le mobile décélère ; $\overrightarrow{a_t}$ et $\vec{v}$ ont même direction et sont de sens contraires



Remarques :

ce n'est pas le signe de a_t qui permet de déterminer si il y a accélération ou décélération. Il faut toujours comparer les sens de $\vec{a}_t$ et de $\vec{v}$

Le vecteur $\vec{a}_n$ est toujours dirigé dans le sens de la concavité de la courbe.

☐ Exercice 6

6.5 EXERCICES

☐ Exercice 1

On considère la valve, supposée ponctuelle, d'une roue de bicyclette . La bicyclette roule sur une route rectiligne et horizontale. Peut-on formuler une seule réponse à la question : « Quelle est la trajectoire de la valve ?»

☐ Exercice 2

Un point M se déplace sur un cercle de rayon R = 5 cm.

A la date t_1= 2 s, il se trouve en M_1 (x_1=2 cm y_1>0)

A la date t_2 =5s , il se trouve en M_2 (x_2= 2 cm y_2<0)

Ω est l'origine des espaces sur la trajectoire (.x_Ω=R et y_Ω=0)

Donner les expressions des vecteurs espace et les abscisses curvilignes aux dates t_1 et t_2

☐ Exercice 3

Reprendre les données de l'exercice 2. Donner l'expression du vecteur vitesse moyenne entre t_1 et t_2. Calculer la norme de ce vecteur.

Comparer cette norme à la valeur de la vitesse moyenne déterminée dans la vie courante.

☐ Exercice 4

Un point a pour coordonnées dans un repère orthonormé :x=3 t +5, y= - 3 t+2 et z =0

x, y et z s'expriment en m et t en s.

Etablir l'équation de la trajectoire de ce point et préciser sa nature.

Donner l'expression du vecteur vitesse de ce point et calculer la valeur de la vitesse.

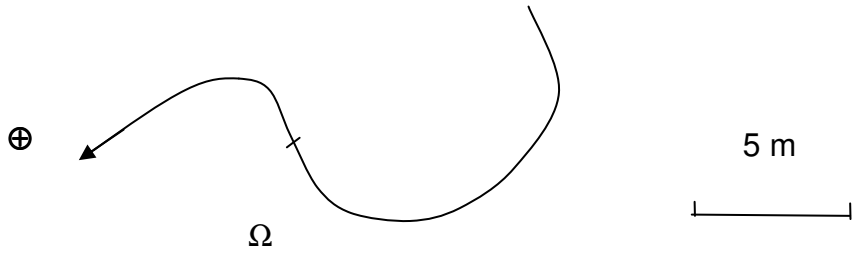
☐ Exercice 5

Un point se déplace sur une courbe. L'origine des espaces, sur sa trajectoire, est Ω.

L'abscisse curviligne a pour expression : s= -3t+5.

Dans quel sens le mobile se déplace-t-il sur sa trajectoire ? Avec quelle vitesse ?

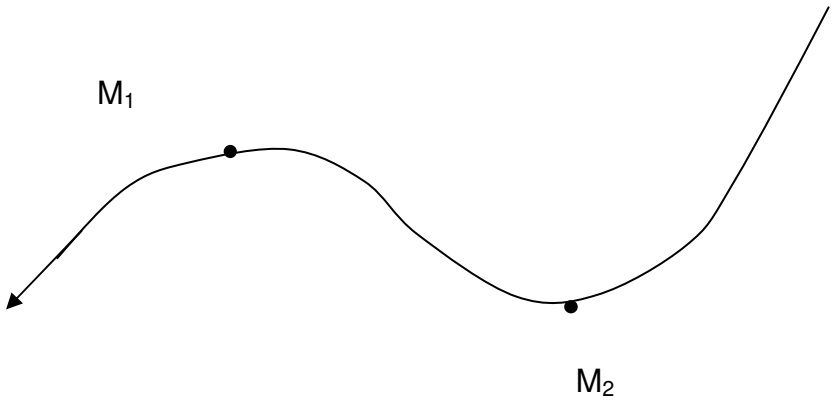
Donner sa position , le situer approximativement sur la trajectoire et représenter son vecteur vitesse à t= 5s



✳ Exercice 6

Compléter le schéma en représentant en M_1 et en M_2, les vecteurs unitaires, le vecteur vitesse, le vecteur accélération et ses composantes normale et tangentielle.

Le mobile accélère lors du passage en M_1 et décélère lors du passage en M_2. Il se déplace de la gauche vers la droite.



∗ Exercice 7

Un point a pour coordonnées dans un repère orthonormé :

x=3 sin 2t, y=3 cos 2t et z =0.

x, y et z s'expriment en m et t en s.

Etablir l'équation de la trajectoire de ce point et préciser sa nature.

∗ Exercice 8

Un point a pour coordonnées dans un repère orthonormé : x=3 t , y= - 3 t^2+2 et z =0

x, y et z s'expriment en m et t en s.

Etablir l'équation de la trajectoire de ce point et préciser sa nature.

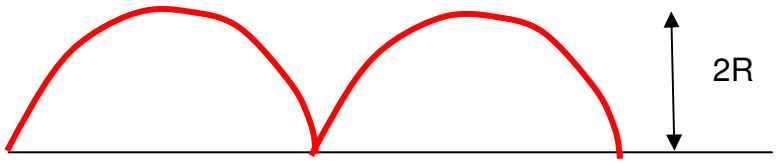
Déterminer à la date t= 2s, la position du point mobile ainsi que les composantes des vecteurs vitesse et accélération, les valeurs des vitesse et accélération dans le repère cartésien .

6.6 CORRIGES DES EXERCICES

6.6.1 Corrigé de l'exercice 1

Il n'est pas possible de répondre correctement à la question si le référentiel d'étude n'est pas précisé.

Dans le référentiel « Terre », la trajectoire est une cycloïde.



Dans le référentiel « roue », la valve est immobile.

Dans le référentiel « axe de la roue », le mouvement de la valve est circulaire.

6.6.2 Corrigé de l'exercice 2

$$y_1 = \sqrt{R^2 - x_1^2} \qquad y_1 = \sqrt{5^2 - 2^2} \qquad y_1 = 4,58\,cm \qquad \overrightarrow{OM_1} = 2\vec{i} + 4,58\vec{j}$$

$$y_2 = \sqrt{R^2 - x_2^2} \qquad y_2 = \sqrt{5^2 - (-2)^2} \qquad y_2 = -4,58\,cm \qquad \overrightarrow{OM_2} = 2\vec{i} - 4,58\vec{j}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{y_1}{R} \qquad \sin\theta_1 = \frac{4,58}{5} \qquad \theta_1 = 1,16\,rad$$

$$\sin\theta_2 = \frac{y_2}{R} \qquad \sin\theta_2 = -\frac{4,58}{5} \qquad \theta_2 = -1,16\,rad$$

$$s_1 = R\theta_1 = 5 \times 1,16 = 5,8\,cm$$

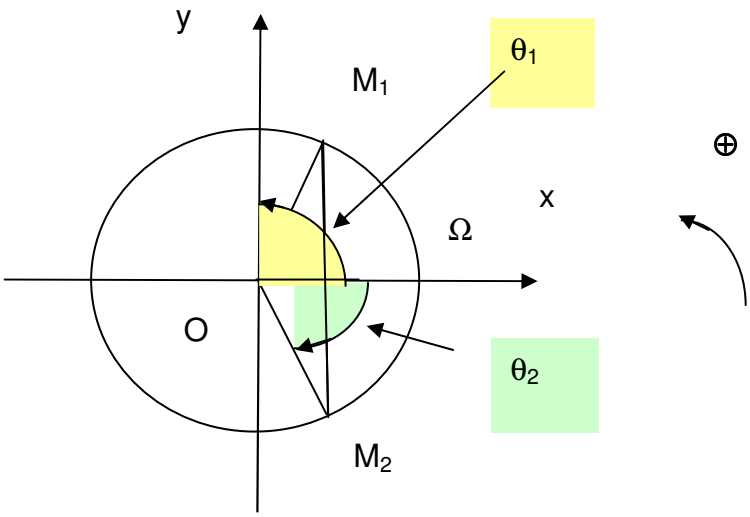
$$s_2 = R\theta_2 = 5 \times (-1,16) = -5,8\,cm$$

6.6.3 Corrigé de l'exercice 3

$$\overrightarrow{Vmoy} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1}$$

$$\overrightarrow{Vmoy} = \frac{-9,16}{5-2}\vec{j} \qquad \left\| \overrightarrow{Vmoy} \right\| = 3,05\ cm.s^{-1}$$

Dans la vie courante, on dirait que le mobile a parcouru réellement une distance égale à $s_1 + |s_2| = 5,8 + 5,8 = 11,6\,cm$ en trois secondes et que la vitesse moyenne est de 3,9 $cm.s^{-1}$.



6.6.4 Corrigé de l'exercice 4

z=0 Le point se déplace dans le plan xOy

$$t = \frac{x-5}{3} \Rightarrow y = -3(\frac{x-5}{3}) + 2 \qquad y = -x + 7$$ Equation d'une droite

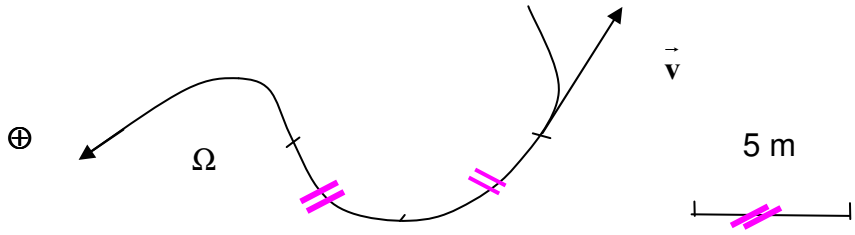
$$\overrightarrow{OM} = (3t+5)\vec{i} + (-3t+2)\vec{j} \qquad \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$v = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 4,24\ m.s^{-1}$$

6.6.5 Corrigé de l'exercice 5

$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(-3t+5)}{dt} = -3$ m.s^{-1} v est constante et négative : le mobile se déplace donc en sens inverse du sens positif choisi sur la trajectoire, c'est-à-dire de la gauche vers la droite.

A t=5s , s=(-3×5 +5)= -10 m



6.6.6 Corrigé de l'exercice 6

Les vecteurs vitesse $\vec{v}$ sont orientés dans le sens du mouvement

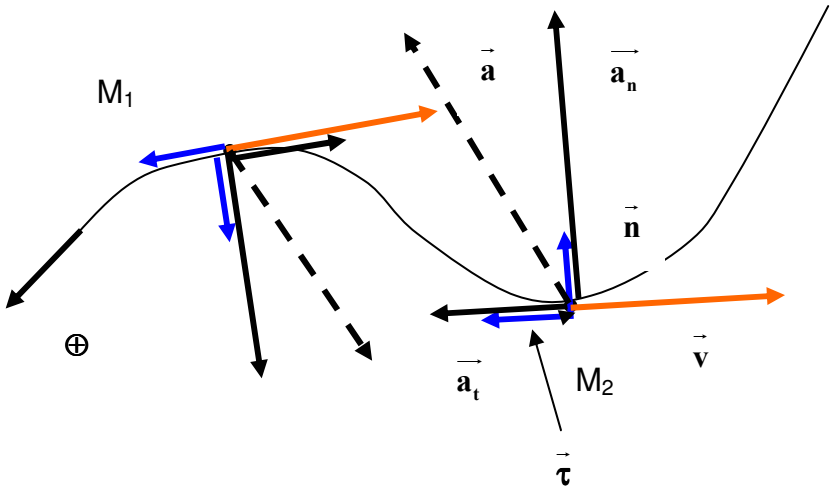
Les vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ sont orientés dans le sens positif de la trajectoire

Les vecteurs $\vec{a_n}$ et $\vec{n}$ sont orientés dans le sens de la concavité de la courbe

En M_1 $\vec{a_t}$ et $\vec{v}$ ont même sens

En M_2 $\vec{a_t}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires

Les vecteurs accélération $\vec{a}$ sont représentés en pointillés.



6.6.7 Corrigé de l'exercice 7

z=0 Le point se déplace dans le plan xOy

L'équation de la trajectoire ne fait pas intervenir le temps ; on élimine t entre x et y en écrivant :

$$x^2 + y^2 = 9\sin^2 2t + 9\cos^2 2t = 9(\sin^2 2t + \cos^2 2t) = 9$$

la trajectoire est le cercle de centre O et de rayon 3

6.6.8 Corrigé de l'exercice 8

Position

z=0 Le point se déplace dans le plan xOy

$\mathbf{t = \frac{x}{3} \rightarrow y = -3\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 2 = -\frac{x^2}{3} + 2}$ La trajectoire est une portion de parabole

à t= 2s, x=6m et y=-10 m

Repère cartésien

Composantes de la vitesse : $\mathbf{\dot{x} = 3 \text{ et } \dot{y} = -6t}$

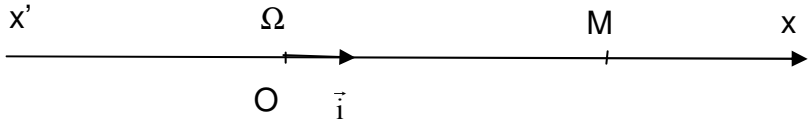
$\mathbf{v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$ $\mathbf{\text{à } t = 2s \; v = \sqrt{3^2 + (-12)^2} = 12,4 m.s^{-1}}$

Composantes de l'accélération : $\mathbf{\ddot{x} = 0 \text{ et } \ddot{y} = -6}$

$\mathbf{a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}}$ $\mathbf{\text{à } t = 2s \; a = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6 m.s^{-2}}$

CHAPITRE 7 MOUVEMENTS RECTILIGNES

7.1 MOUVEMENT RECTILIGNE QUELCONQUE



7.1.1 Repérage du point

La trajectoire du point, c'est l'axe x'x. L'origine du repère d'espace O et celle de la trajectoire Ω sont ici confondues, de même que les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{\tau}$.

Le point M est repéré par le vecteur espace $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$ et par son abscisse x = $\overline{OM}$ qui se confond avec son abscisse curviligne $s = \widehat{\Omega M} = x$.

7.1.2 Vitesse

Il suffit de reprendre les relations écrites dans « mouvement général d'un point »

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{i}$ Si on utilise les relations établies dans le repère de Frenet, on obtient les mêmes résultats :

$$\vec{v} = \vec{\tau}\frac{ds}{dt} = \vec{i}\frac{dx}{dt} = \vec{i}\dot{x}$$

7.1.3 Accélération

Vecteur-accélération : $\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i}$ $\qquad\qquad$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}\frac{dv}{dt}$

$\vec{a} = \vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{ds}{dt} = \vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} = \vec{i}\frac{d^2x}{dt^2}$ car $\vec{\tau}$ est ici constant et sa dérivée par rapport au temps est nulle.

$\overrightarrow{a_n}$ est nulle $\qquad\qquad$ $\vec{a} = \overrightarrow{a_T}$

Le mobile accélère si $\vec{a}$ et $\vec{v}$ ont même sens

Le mobile décélère si $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires

7.2 MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

7.2.1 Définition

La trajectoire du point mobile est rectiligne, son vecteur accélération est nul : $\vec{a} = \vec{0}$ et sa vitesse non nulle

Expressions générales de v et de x en fonction du temps

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ par intégration on obtient $\vec{v} = \vec{K}$

$\vec{v} = \vec{K}$ par intégration on obtient $\overrightarrow{OM} = \vec{K}t + \vec{K'}$

Tous ces vecteurs sont portés par l'axe x'x ; par projection sur cet axe on obtient :

a =0 $\Rightarrow$ v=K (K=cte) $\Rightarrow$ x= Kt + K' (K' = cte) K et K' dépendent du choix des origines.

7.2.2 Expressions de v et de x suivant les conditions initiales

- si à t =0, $x = x_0$ $\Rightarrow$ $x = vt + x_o$
- si à t = t0, $x = x_0$ $\Rightarrow$ $x = v(t-t_0) + x_0$

☐ Exercice 1

7.3 MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMEMENT VARIE

7.3.1 Définition

La trajectoire du point mobile est rectiligne et le vecteur accélération est constant mais non nul $\vec{a} = \vec{C}$ avec $\vec{C} \neq \vec{0}$

7.3.2 Expressions générales de v et de x en fonction du temps

a = C (C constante) $\Rightarrow$ v = at + K $\Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + Kt + K'$ K et K' constantes dépendent du choix des origines

7.3.3 Expressions de v et de x suivant les conditions initiales

- si à t = 0, $x = x_0$ et $v = v_0$ $\Rightarrow$ $v = at + v_0$ $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

$v = at + v_0 \Rightarrow \mathbf{v^2 = v_0^2 + a^2 t^2 + 2 a t v_0}$ $\quad$ $\mathbf{v^2 - v_0^2 = a^2 t^2 + 2 a t v_0}$

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \qquad \Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \qquad \Rightarrow 2a(x - x_0) = a^2t^2 + 2atv_0$

d'où $v^2 - v_0^2 = 2a(x-x_0)$

Cette dernière relation est intéressante car elle ne fait pas intervenir le temps.

- si à $t = t_0$, $x = x_0$ et $v = v_0 \Rightarrow \quad v = a(t-t_0) + v_0$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 + v_0(t-t_0) + x_0$

- si à $t = 0$, $x = x_0 = 0$ et $v = v_0 = 0 \Rightarrow \quad v = at \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow$

$v^2 = 2ax$

Remarques :

Il n'est pas nécessaire de mémoriser toutes ces formules : la connaissance des relations du mouvement général d'un point suffit si l'on maîtrise la dérivation et l'intégration. Les constantes d'intégration sont déterminées en tenant compte des origines des espaces et des temps choisies ou imposées.

☐ Exercice 2

7.4 COMPOSITION DES VITESSES ET DES ACCELERATIONS.

7.4.1 Composition des vitesses.

Soit un point M en mouvement par rapport par rapport à un repère R' (O', x', y',z') qui est en translation par rapport à un repère fixe R (O, x, y,z). Le point M a pour coordonnées x, y, z dans R et x', y' et z' dans R'.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \overrightarrow{OO'} + x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

$$\frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')}{dt}$$

Si le repère R' est en translation par rapport à R :

$$\vec{i} = \vec{i}' \qquad \vec{j} = \vec{j}' \qquad \vec{k} = \vec{k}'$$

On dérive la relation par rapport au temps. $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

Les dérivées par rapport au temps de ces six vecteurs unitaires sont nulles

$$\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+\frac{dx'}{dt}\vec{i}'+\frac{dy'}{dt}\vec{j}'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

$$\vec{v}=\vec{v_e}+\vec{v_r}$$

$\vec{v}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$ est la vitesse de M par rapport au repère fixe R : c'est la vitesse absolue.

$\vec{v_r}=\frac{dx'}{dt}\vec{i}'+\frac{dy'}{dt}\vec{j}'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}'$ est la vitesse de M par rapport au repère R' : c'est la vitesse relative.

$\vec{v}_e=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$ est la vitesse de O' dans R : c'est la vitesse d'entraînement

7.4.2 Composition des accélérations.

En dérivant une nouvelle fois par rapport au temps on obtient si le repère R' est en translation par rapport à R :

$$\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}'+\frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}'+\frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'$$

$$\vec{a}=\vec{a_e}+\vec{a_r}$$

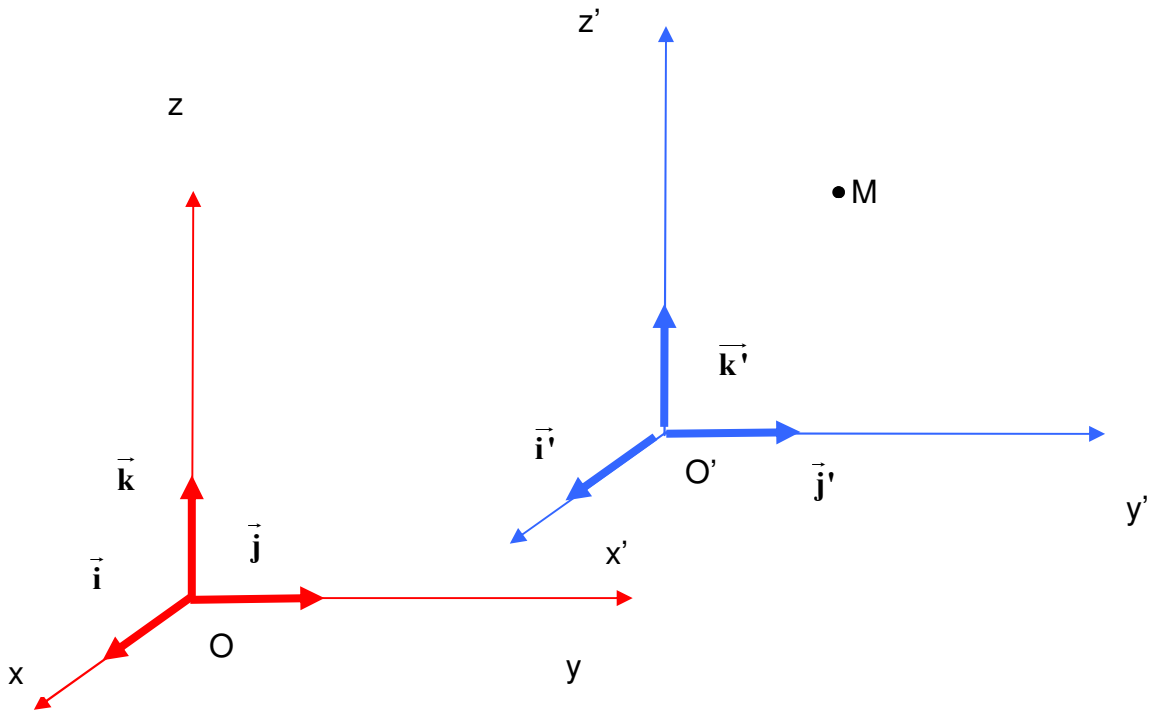
$\vec{a}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$ est l'accélération de M par rapport au repère fixe R : c'est l'accélération absolue.

$\vec{a}_r=\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}'+\frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}'+\frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'$ est l'accélération de M par rapport au repère R' : c'est l'accélération relative.

$\vec{a}_e=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$ est l'accélération de O' dans R : c'est l'accélération d'entraînement

Remarque importante :

si R' tournait par rapport à R, les relations ne seraient plus applicables car les dérivées, par rapport au temps, des vecteurs unitaires $\vec{i}',\vec{j}'\text{et}\,\vec{k}'$ ne seraient plus nulles.



☐ Exercice 3

7.5 EXERCICES

☐ Exercice 1

Un mobile, animé d'un mouvement rectiligne uniforme, parcourt une distance de 10 m en 5 s. Il se déplace dans le sens négatif de l'axe x'x. Déterminer son équation horaire dans le cas où, à t=0, il passe au point d'abscisse x=5m.

Représenter, sur un même graphe, x ,v et a en fonction du temps.

Quelle serait la nouvelle équation horaire si l'on déclenchait le chronomètre de telle manière qu'à t=2s le mobile passe au point d'abscisse x= - 2 m ?

☐ Exercice 2

Un mobile M se déplace sur x'x. A la date t=0, il passe au point d'abscisse x=2m avec une vitesse égale à +3 $m.s^{-1}$. Son accélération est constante et vaut – 2 $m.s^{-2}$.

Etablir les expressions de v et de x en fonction du temps. Représenter les fonctions v et x au cours du temps. Décrire le mouvement de M

☐ Exercice 3

Un nageur traverse une rivière de largeur 50 m. La vitesse du courant vc a pour valeur 1 $m.s^{-1}$.

La vitesse du nageur par rapport à l'eau vn a pour valeur 2,5 $m.s^{-1}$ et le vecteur vitesse correspondant est perpendiculaire aux berges de la rivière.

Quelle est la vitesse absolue du nageur ?

Quelle est lla distance dont il a dérivé ?

Quelle est la distance réellement parcourue ?

Combien de temps faut-il au nageur pour traverser la rivière ?

2. Quelle devrait être la direction du vecteur vitesse du nageur par rapport au courant pour qu'il traverse la rivière sans dériver ?

∗ Exercice 4

Deux points mobiles M_1 et M_2 se déplacent sur le même axe x'x. A la date t=0, M_1 a pour abscisse – 4m et se déplace dans le sens positif de l'axe à la vitesse de 3 $m.s^{-1.}$

Le point M_2 se déplace en sens inverse ; la valeur de sa vitesse est 3 $m.s^{-1}$ et à la date t= 2s il a pour abscisse + 5m.

Etablir les équations horaires de M_1 et de M_2.

Vont-ils se rencontrer ? Si oui, où et quand ?

∗ Exercice 5

Une bille est lancée verticalement vers le haut, à t=0, d'un point A situé à 2m au dessus du sol (z_A=2m) et son centre d'inertie se déplace sur l'axe z'z orienté positivement vers le haut. La vitesse de la bille est v= - 10t +20

Etudier complètement le mouvement du centre d'inertie et représenter, sur un même graphe, x ,v et a en fonction du temps.

∗ Exercice 6

Un mobile M se déplace sur x'x. A la date t=2s, il passe au point d'abscisse x=2m avec une vitesse égale à +3 $m.s^{-1}$. Son accélération varie au cours du temps et a pour expression :

a =0,5 t (t en s).

Etablir les expressions de v et de x en fonction du temps.

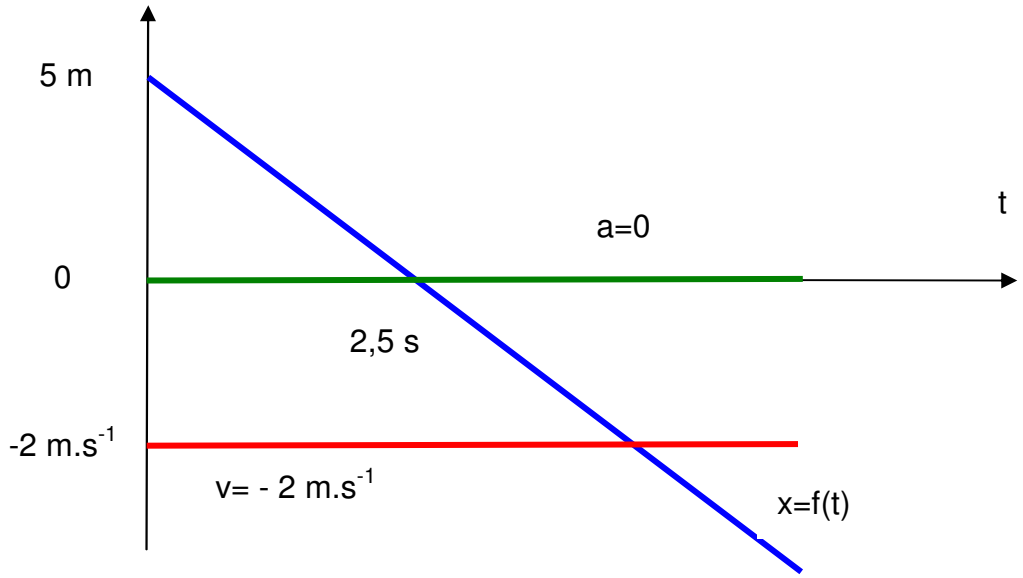
7.6 CORRIGES DES EXERCICES

7.6.1 Corrigé de l'exercice 1

La vitesse vaut – 2 $m.s^{-1}$.

par intégration : x= -2t+K à t=0, x= 5 5= -2×0 + K K=5

x= -2t+5 v= -2 a=0



nouvelle équation :

si à t=2s, x= -2 m x=-2 t+K' -2= -2×2 + K' K'= 2 x=-2t+2

7.6.2 Corrigé de l'exercice 2

a= - 2 on intègre v =-2t+C à t = 0, v=3 on remplace 3=-2×0+C C = 3 d'où v= -2t+3

v= -2t+3 on intègre x=$-t^2$+3t+C' à t=0, x=2 on remplace 2=0+0+C' C'=2 d'où x= $-t^2$+3t+2

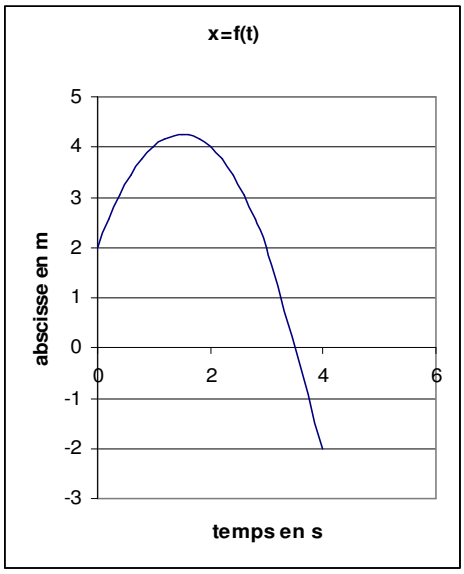
t≥0 a= -2 équation d'une droite

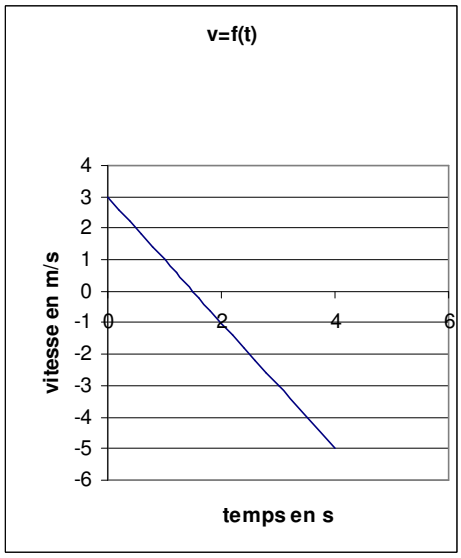
v =-2t+3 équation d'une droite

x=$-t^2$+3t+2 équation d'une parabole

T EN S	0	2,5	
V= - 2T+3 EN M.S-1	3 +	0	-
X= - T^2 + 3T +2 EN M	2 ↗		↘

t	x	v	a
		v=-2t+3	
t en s	x en m	v en m/s	a en m/s²
0	2	3	-2
0,2	2,56	2,6	-2
0,4	3,04	2,2	-2
0,6	3,44	1,8	-2
0,8	3,76	1,4	-2
1	4	1	-2
1,2	4,16	0,6	-2
1,5	4,25	0	-2
1,6	4,24	-0,2	-2
1,8	4,16	-0,6	-2
2	4	-1	-2
2,2	3,76	-1,4	-2
2,4	3,44	-1,8	-2
2,6	3,04	-2,2	-2
2,8	2,56	-2,6	-2
3	2	-3	-2
4	-2	-5	-2





L'accélération est constante : le mouvement est rectiligne uniformément varié

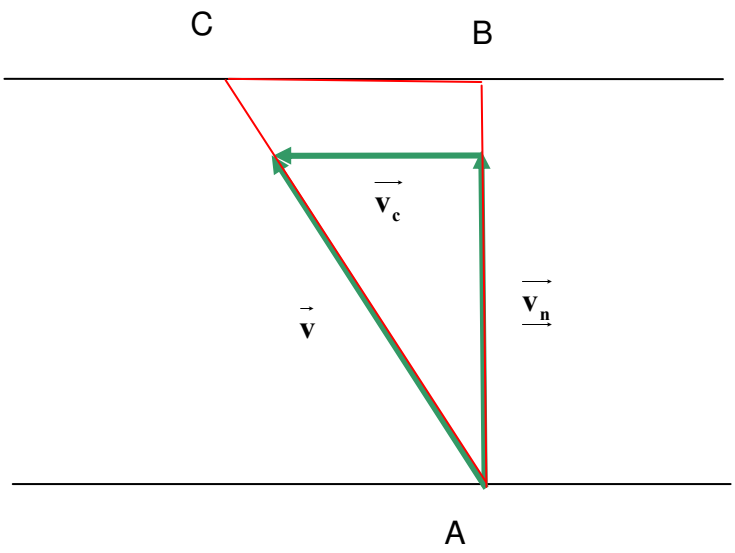
pour 0 < t < 1,5 s le mobile se déplace dans le sens positif avec une vitesse qui est positive et décroissante. Le mouvement est décéléré (v et a n'ont pas même signe)

A t = 1,5 s le mobile s'arrête et repart dans l'autre sens.

Pour t >1,5 s la vitesse du mobile est négative mais la valeur de la vitesse croit ; le mobile accélère (v et a sont de signes contraires).

7.6.3 Corrigé de l'exercice 3

1.



La loi de composition des vitesses s'écrit

$\overrightarrow{v_{nageur/sol}} = \overrightarrow{V_{nageur/eau}} + \overrightarrow{v_{eau/sol}}$ soit $\vec{v} = \vec{v_n} + \vec{v_c}$

$v = \sqrt{v_n^{\,2} + v_c^{\,2}}$ $\quad v = \sqrt{2,5^2 + 1^2} = 2,7 m.s^{-1}$

$\frac{BC}{AB} = \frac{v_c}{v_n} \Rightarrow BC = AB\frac{v_c}{v_n}$ $\quad BC = 50\frac{1}{2.5} = 20m$

La dérive est de 20 m. Le nageur effectue le trajet AC à la vitesse v

$AC = \sqrt{50^2 + 20^2} = 53,8m$

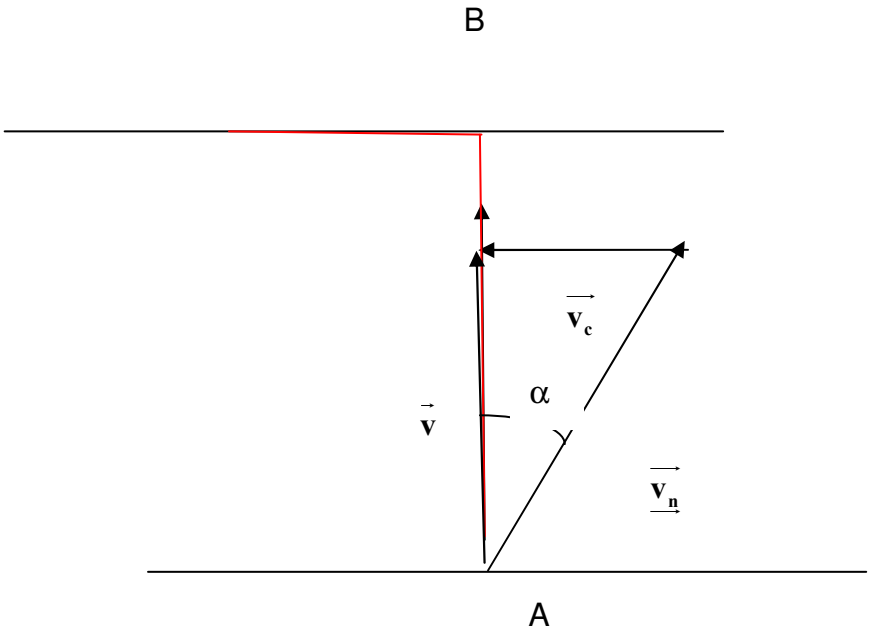
$\theta = \frac{AB}{v_n} = \frac{CB}{v_c} = \frac{AC}{v}$

Durée du trajet : $\theta = 20s$

2.

le nageur nage obliquement par rapport au courant.

$\sin\alpha = \frac{vc}{vn}$ $\quad \sin\alpha = \frac{1}{2,5} = 0,4$ $\quad \alpha = 23,6°$



7.6.4 Corrigé de l'exercice 4

v_1=3 on intègre x_1= 3t+C à t=0, x_1 = -4 on remplace -4=3×0+C C = -4

d'où x_1= 3t-4

v_2=-3 on intègre x_2= -3t+C à t=2, x2=5 on remplace 5=-3×2+C C= 11

d'où x_2= -3t+11

Si les deux mobiles se rencontrent à la date t = θ : $x_1(\theta)=x_2(\theta)$

3θ -4= -3θ +11 θ=2,5 s

La rencontre s'effectue à t=2,5 s au point d'abscisse x=3×2,5-4= 3,5 m

7.6.5 Corrigé de l'exercice 5

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(-10t+10)}{dt} = -10\ m.s^{-2}$$

$v = -10t + 10 \Rightarrow z = -5t^2 + 10t + K$ à t=0, z=2 K=2

$z = -5t^2 + 10t + 2$

A t= 1s, la vitesse s'annule ; le mouvement comporte deux phases.

Phase 1 t <1s mouvement uniformément décéléré

a= -10 v diminue de 10 à 0 $m.s^{-1}$ z croît de 2 à 7 m

Phase 2 t >1s mouvement uniformément accéléré

a= -10 v est négative et sa norme croît z décroît à partir de 7 m

7.6.6 Corrigé de l'exercice 6

a =0,5 t on intègre v= 0,25 t^2 +K à t=2, v= 3 on remplace 3= 0,25×22+K

K = 2 v= 0,25 t^2 +2

v= 0,25 t^2 +2 on intègre $\mathbf{x = \frac{0.25}{3} t^3 + 2t + K'}$, à t = 2, x=2 on remplace

$$\mathbf{2 = \frac{0.25}{3} 2^3 + 2 \times 2 + K'} \qquad \mathbf{K' = -\frac{8}{3}}$$

$$\mathbf{x = \frac{0,25}{3} t^3 + 2t - \frac{8}{3}}$$

Le mouvement est accéléré mais non uniformément accéléré car l'accélération n'est pas constante.

Dans un exercice tel que celui-ci il ne faut pas chercher de formule miracle ! Il faut intégrer.

CHAPITRE 8 MOUVEMENTS CIRCULAIRES

8.1 ACTIVITE

8.1.1 Questions.

Un cycliste M se déplace sur un cercle de rayon R=10 m et de centre O, de manière uniforme, à la vitesse de 36 km.h^{-1} soit 10 m.s^{-1}. Soient M_1, M_2, M_3 les positions du mobile aux instants t_1, t_2 et t_3 tels que $t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = \Delta t$ =0,5 s.

Représenter ces points ainsi que les vecteurs vitesse à t_1 et t_3.. Le vecteur vitesse est-il constant ?

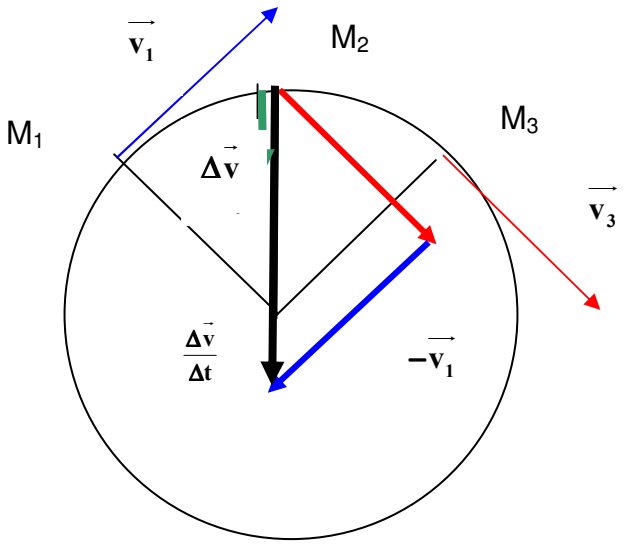
Quelle est la période du mouvement ?

Quel est l'angle $\Delta\theta$ balayé par le rayon OM pendant Δt ? Comment pourrait-on appeler le quotient $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$?

Y-a–t-il accélération du cycliste ? Représenter le vecteur $\vec{\Delta v} = \vec{v_3} - \vec{v_1}$ appliqué en M_2 et le vecteur $\frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$ également appliqué en M_2. Que représente ce dernier vecteur ? Conclure

Pouvait-on prévoir l'existence d'une accélération ?

8.1.2 Réponses :



Le vecteur vitesse n'est pas constant puisque sa direction varie mais la norme du vecteur est constante.

Le mouvement est périodique et la période T est ici la durée d'un tour. Pendant la durée T, il parcourt la longueur de la circonférence soit $2\pi R$

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi 10}{10} = 6,28\,s$$

Soit $\Delta\theta$ l'angle balayé par OM pendant Δt.

Sachant que l'angle balayé pendant t est égal à 2π, on peut écrire :

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \Delta\theta = \Delta t \frac{2\pi}{T} \qquad \Delta\theta = 0,5\frac{2\pi}{2\pi} = 0,5\,rad$$

$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\,rad.s^{-1}$ $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ s'appelle la vitesse angulaire moyenne pendant Δt. On la désigne par ω Comme le mouvement est uniforme, la vitesse angulaire instantanée est constante et égale à la vitesse angulaire moyenne.

La longueur de l'arc parcouru pendant Δt est Δs telle que $\Delta s = R\,\Delta\theta$

En divisant par Δt on obtient : $\frac{\Delta s}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ soit $v = R\,\omega$

Le vecteur $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ représente l'accélération moyenne entre t_1 et t_3. Si Δt est petit, cette accélération se confond avec l'accélération à la date t_2. On constate que le vecteur $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ est porté par M_2O et est dirigé vers O. Ceci est vrai à chaque instant.

Conclusion

Dans le cas du mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripète.

On pouvait prévoir l'existence d'une accélération :

Dans le mouvement général d'un point, nous avons vu que l'accélération moyenne $\vec{a}moy = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

Dans le cas du mouvement circulaire uniforme $\Delta\vec{v}$ n'est pas nul donc il y a accélération

8.2 MOUVEMENT CIRCULAIRE QUELCONQUE

8.2.1 Repérage du point mobile.

Dans le repère cartésien le point mobile est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ou par son abscisse angulaire $\theta = \widehat{\Omega OM}$.

Sur la trajectoire circulaire le mobile est repéré par son abscisse curviligne $s = R\theta = \widehat{\Omega OM}$. x, y, R en m θ en rad

8.2.2 Equation de la trajectoire $x^2 + y^2 = R^2$

8.2.3 Vitesse.

8.2.3.1 Vitesse linéaire

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$ $\mathbf{v = \frac{ds}{dt}}$ v en $m.s^{-1}$

8.2.3.2 Vitesse angulaire

Vitesse angulaire moyenne :

A la date t, l'élongation angulaire est égale à θ et à la date t + Δt elle vaut $\theta + \Delta\theta$

Par définition, la vitesse angulaire moyenne entre t et t+Δt est égale à $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Elle s'exprime en $rad.s^{-1}$

Vitesse angulaire instantanée $\dot{\theta}$

Par définition c'est $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ en $rad.s^{-1}$

8.2.4 . Relation entre vitesse linéaire et vitesse angulaire

$s = R\theta = \widehat{\Omega OM}$ par dérivation par rapport au temps , on obtient :

$\frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$ soit $v = R\dot{\theta}$ $\mathbf{v = R\dot{\theta}}$

8.2.5 Accélération.

8.2.5.1 Accélération linéaire

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$ a en $m.s^{-2}$

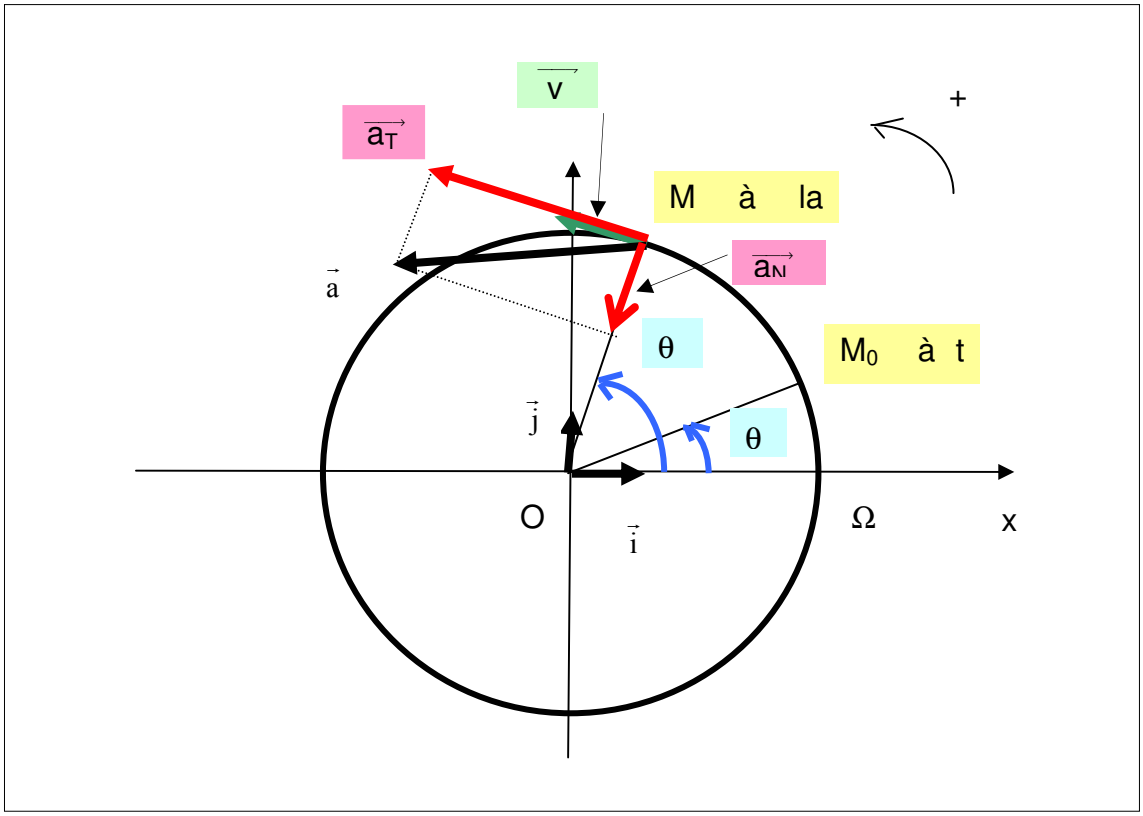
8.2.5.2 Accélération angulaire $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$ $\ddot{\theta}$ en $rad.s^{-2}$

8.2.5.3 Composantes de l'accélération dans le repère de Frenet

$$\vec{a} = \vec{aT} + \vec{aN} \qquad a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\dot{\theta})}{dt} = R\ddot{\theta} \qquad a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\dot{\theta})^2}{R} = R\dot{\theta}^2$$

SCHEMA



☐ Exercice 1

8.3 MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

8.3.1 Définition

C'est le mouvement circulaire d'un point dont le vecteur vitesse a une valeur constante

Remarque : le vecteur vitesse n'est pas constant puisque sa direction varie au cours du temps.

8.3.2 Vitesse

La vitesse linéaire étant constante, la vitesse angulaire l'est également.

Dans le cas particulier du mouvement circulaire uniforme la vitesse angulaire est notée ω

V = cte et $V = R\dot{\theta} = R\omega$

8.3.3 Equations horaires.

$\dot{\theta}$ = constante.

Par intégration on obtient $\theta = \dot{\theta}t + K$

Si à t = 0, $\theta = \theta_0$ $\quad \boldsymbol{\theta = \dot{\theta}t + \theta_0}$ or s = Rθ et $s_0 = R\theta_0$ d'où

$\boldsymbol{R\theta = R\dot{\theta}t + R\theta_0}$ $\qquad \boldsymbol{s = \omega t + s_0}$

8.3.4 Accélération.

$\boldsymbol{\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}}$ **mais** $\boldsymbol{\vec{v} \neq \overrightarrow{cte}}$ **donc** $\boldsymbol{\vec{a} \neq \vec{0}}$

Dans un mouvement circulaire uniforme l'accélération n'est pas nulle

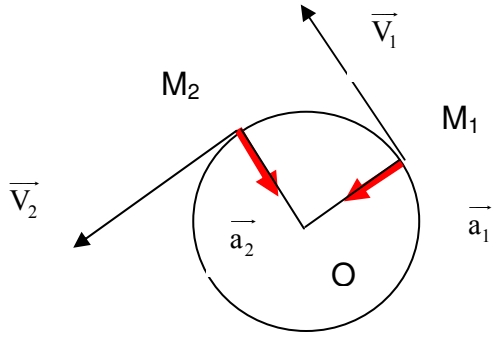
$\boldsymbol{a_T = \dfrac{dv}{dt}}$ **avec** $\boldsymbol{v = cte}$ **donc** $\boldsymbol{a_T = 0}$

l'accélération tangentielle est nulle ; on en déduit que l'accélération est normale

$\boldsymbol{\vec{a} = \overrightarrow{a_N}}$ $\qquad \boldsymbol{a = a_N = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2}$

Le vecteur accélération a une valeur constante et est porté par $\overrightarrow{MO}$; l'accélération est centripète

$\vec{a_1} \neq \vec{a_2}$ mais $a_1 = a_2 = cte = R\omega^2$



8.3.5 Le mouvement est périodique.

8.3.5.1 Période

La période est ici la durée T d'un tour

$\theta - \theta_0 = \omega t$ si $t = T$, $\theta - \theta_0 = 2\pi$ $2\pi = \omega T$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ T en s

8.3.5.2 Fréquence f

$f = \frac{1}{T}$ $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ f en Hz

☐ Exercice 2

8.4 MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORMEMENT VARIE

8.4.1 Définition

Mouvement circulaire d'un point dont l'accélération angulaire est une constante non nulle.

8.4.2 Relations

$\ddot{\theta} = cte \rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} t + K \rightarrow \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta} t^2 + Kt + K'$

8.4.3 Expressions des relations suivant les conditions initiales

si à $t = 0$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ et si $\theta = \theta_0$: $\ddot{\theta} = cte \rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} t + \dot{\theta}_0 \rightarrow \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta} t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$

si à $t = 0$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = 0$ et si $\theta = \theta_0 = 0$: $\ddot{\theta} = cte \rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} t \rightarrow \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta} t^2$ et $\dot{\theta}^2 = 2\ddot{\theta}\theta$

On retrouve des relations analogues à celles rencontrées dans l'étude du mouvement rectiligne uniformément varié :

θ remplace x, $\dot{\theta}$ remplace v et $\ddot{\theta}$ remplace a

☐ Exercice 3

8.5 EXERCICES

☐ Exercice 1

Le disque d'une meule de rayon R=10 cm est en phase de décélération. Lorsque la fréquence de rotation a la valeur 250 $tr.min^{-1}$, l'accélération tangentielle d'un point M à la périphérie du disque vaut -10 $m.s^{-2}$.

Déterminer l'accélération de M à cet instant.

☐ Exercice 2

Le plateau d'un électrophone de rayon R=15 cm est animé d'un mouvement circulaire uniforme à la fréquence de 33,3 $tr.min^{-1}$.

Calculer la période, la vitesse angulaire du plateau.

Quelles sont les caractéristiques du vecteur accélération d'un point P à la périphérie ?

☐ Exercice 3

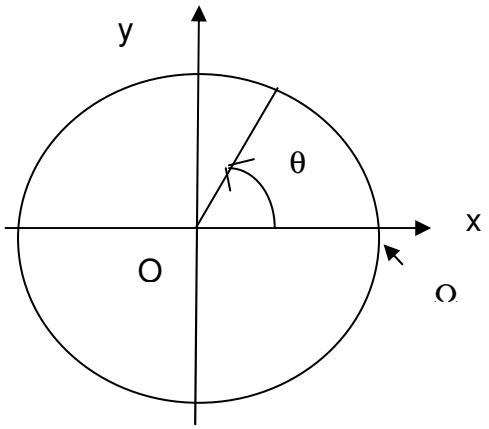
La fréquence de rotation d'une meule passe entre t=0 et t=4s de 100 à 1000 tr.min-1. On suppose que le mouvement est circulaire uniformément accéléré.

Quelle est l'expression de la vitesse angulaire en fonction du temps entre 0 et 4s ? Quelle est la vitesse angulaire à t= 3 s ?

Quelle est l'accélération angulaire de la meule entre 0 et 4s ?

Quel est le nombre de tours effectués entre 0 et 4s ?

Pour résoudre les exercices suivants (exercices 4, 5 et 6), on utilisera le schéma suivant :



∗ Exercice 4

Deux cyclistes M_1 et M_2 se déplacent sur une piste circulaire de centre O et de rayon R = 100m. La vitesse de M_1 a pour valeur 18 $km.h^{-1}$ et celle de M_2, 27 $km.h^{-1}$. A t = 0, M_1 passe en Ω, origine des espaces sur la trajectoire, alors que M_2 a pour élongation angulaire $\theta = \frac{\pi}{3}$.

M_1 se déplace dans le sens trigonométrique et M_2 en sens inverse.

Etablir les expressions des élongations angulaires des mobiles au cours du temps.

A quelles dates vont-ils se rencontrer ?

∗ Exercice 5

Un point M se déplace sur un cercle de centre O et de rayon R à la vitesse angulaire constante ω, dans le sens trigonométrique. A t= 0, il a pour élongation angulaire $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Ω est l'origine des espaces sur la trajectoire.

Etablir les expressions de l'élongation, de la vitesse et de l'accélération du point A, projection orthogonale de M sur l'axe y'y.

∗ Exercice 6

Un point M se déplace sur un cercle de centre O et de rayon R = 2m. A la date t le mobile a pour élongation angulaire θ =2t.

θ est exprimé en rad et t en s.

Le point Ω est situé sur la trajectoire et a pour coordonnées (R ; 0) dans le repère (Ox, Oy) qui la contient.

Déterminer l'équation de la trajectoire.

Etablir les expressions de toutes les grandeurs relatives à la position, à la vitesse et à l'accélération du mobile dans le repère cartésien et dans le repère de Frenet. Application numérique : t =2s

8.6 CORRIGES DES EXERCICES

8.6.1 Corrigé de l'exercice 1

$$a_T = -10 = R\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -100\,rad.s^{-2} \qquad \dot{\theta} = 250\frac{2\pi}{60}\,rad.s^{-1}$$

$$a_N = R\dot{\theta}^2 = 0,1\left(250\frac{2\pi}{60}\right)^2 = 68,5\,m.s^{-2}$$

$$a = \sqrt{a_T^{\,2} + a_N^{\,2}} = 69,2\,m.s^{-2}$$

8.6.2 Corrigé de l'exercice 2

$$f = \frac{33,3}{60} = 0,555Hz \qquad T = \frac{1}{f} = 1,8s \qquad \omega = 2\pi f = 2\pi \times 0,555 = 3,49\,rad.s^{-1}$$

$$a_T = 0 \qquad a = a_N = R\omega^2 = 0,15 \times 3,49^2 = 1,8m.s^{-2}$$

8.6.3 Corrigé de l'exercice 3

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0 \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{t} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{(1000-100)\frac{2\pi}{60}}{4} = 23,6\,rad.s^{-2}$$

$$\dot{\theta} = 23,6\,t + \frac{100 \times 2\pi}{60} \quad \text{à } t = 3s \quad \dot{\theta} = 23,6 \times 3 + \frac{100 \times 2\pi}{60} = 81,3\ rad.s^{-1}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta}^{\,2} - \dot{\theta}_0^{\,2}}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{\dot{\theta}^{\,2} - \dot{\theta}_0^{\,2}}{2 \times 2 \times \pi n} \Rightarrow n = \frac{\left(\dot{\theta}^{\,2} - \dot{\theta}_0^{\,2}\right)}{4\pi\ddot{\theta}}$$

$$n = \frac{\left(\frac{2000\pi}{60}\right)^2 - \left(\frac{200\pi}{60}\right)^2}{4\pi \times 23,6} = 36,6\,tours$$

8.6.4 Corrigé de l'exercice 4

Mobile 1 :

$v_1 = 5\,m.s^{-1}$ $\quad v_1 = \frac{ds_1}{dt} \Rightarrow s_1 = 5t + C$ $\quad$ à t=0, s_1=0 d'où C=0 $\quad s_1$=5t

$$\theta_1 = \frac{s_1}{R} = \frac{5t}{100} = \frac{t}{20}$$

Mobile 2

$$v_2 = -7,5\,m.s^{-1} \qquad v_2 = R\frac{d\theta_2}{dt} \qquad \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{v_2}{R} = -\frac{7,5}{100}$$

$$\theta_2 = -\frac{7,5}{100}t + K \qquad à\ t = 0,\ \theta_2 = \frac{\pi}{3} \qquad d'où\ K = \frac{\pi}{3} \qquad \theta_2 = -\frac{7,5}{100}t + \frac{\pi}{3}$$

Il y a rencontre si

$$\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi \qquad -\frac{7,5}{100}t + \frac{\pi}{3} = \frac{t}{20} + 2k\pi$$

$t = \frac{100}{12,5}\left(\frac{\pi}{3} - 2k\pi\right)$ Les rencontres se produisent pour toutes les valeurs de t>0, vérifiant cette relation

8.6.5 Corrigé de l'exercice 5

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \Rightarrow \theta = \omega t + K \qquad à\ t = 0,\ \theta = \frac{\pi}{3}\ d'où K = \frac{\pi}{3} \qquad \theta = \omega t + \frac{\pi}{3}$$

En projetant sur Oy

$$y = R\sin(\omega t + \frac{\pi}{3}) \qquad \frac{dy}{dt} = R\omega\cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -R\omega^2\sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

8.6.6 Corrigé de l'exercice 6

Equation de la trajectoire

$x^2+y^2=R^2$ $\quad x^2+y^2=4$

Position du mobile

abscisse angulaire : θ= 2t

Coordonnées : x= R cosθ =Rcos 2t $\quad$ y=Rsin 2t $\quad$ à t=2 s $\quad \theta$= 4 rad

x= -1.31 $\quad$ y= - 1.51

Vecteur espace : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad \overrightarrow{OM} = R\cos 2t\vec{i} + R\sin 2t\vec{j}$

à t=2s $\overrightarrow{OM} = -1,31\vec{i} - 1,51\vec{j}$

abscisse curviligne :s=Rθ= 2t à t=2s, s=8 m

Vitesse du mobile

Vitesse linéaire :

$$\dot{x} = \frac{d(R\cos 2t)}{dt} = -2R\sin 2t \quad \text{à } t = 2s, \dot{x} = 3,02$$

$$\dot{y} = \frac{d(R\sin 2t)}{dt} = 2R\cos 2t \quad \text{à } t = 2s, \dot{y} = -2,62$$

$$\vec{v} = -2R\sin 2t\,\vec{i} + 2R\cos 2t\,\vec{j}$$

à t=2s $\vec{v} = 3,02\vec{i} - 2,62\vec{j}$ $v = \sqrt{3,02^2 + (-2.62)^2} = 4$ ou encore

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(2Rt)}{dt} = 2R = 4\ m.s^{-1}$$

Vitesse angulaire : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2\ rad.s^{-1}$

Accélération

Dans le repère cartésien

$$\ddot{x} = \frac{d^2(R\cos 2t)}{dt^2} = -4R\cos 2t \quad \text{à } t = 2s, \ddot{x} = 5,24$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2(R\sin 2t)}{dt^2} = -4R\sin 2t \quad \text{à } t = 2s, \dot{y} = 6,04$$

$$\vec{a} = -4R\cos 2t\,\vec{i} - 4R\sin 2t\,\vec{j}$$

à t=2s $\vec{a} = 5,24\vec{i} + 6,04\vec{j}$ $a = \sqrt{5,24^2 + 6,04^2} = 8\ m.s^{-2}$

Dans le repère de Frenet

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \qquad \overrightarrow{a_t} = \vec{0}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4^2}{2} = 8\ m.s^{-2} \qquad \overrightarrow{a_n} = 8\vec{n}$$

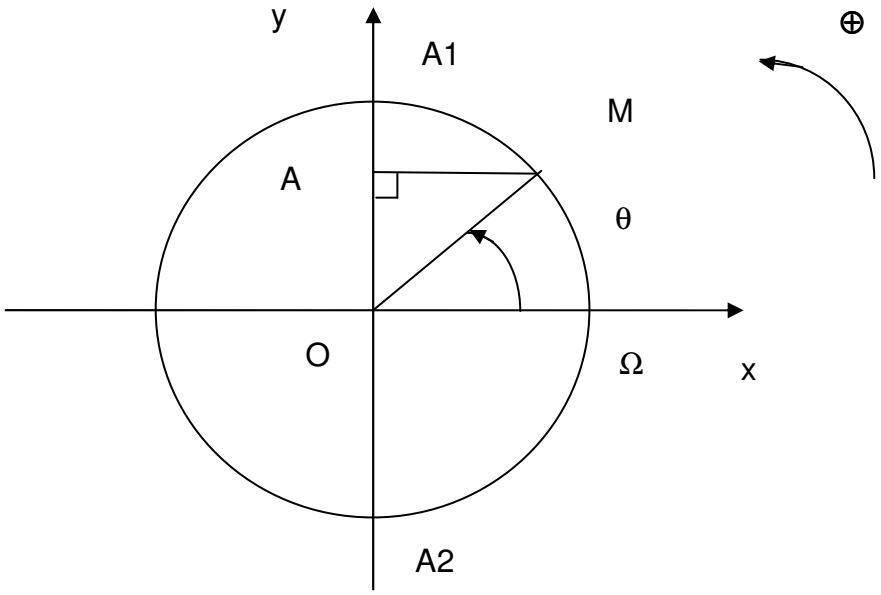
Le mouvement est circulaire uniforme

CHAPITRE 9 MOUVEMENTS SINUSOIDAUX

Nous abordons l'étude cinématique des mouvements sinusoïdaux ; nous verrons des exemples concrets lors de l'étude des oscillateurs.

9.1 ACTIVITE.

On considère un point mobile M animé d'un mouvement circulaire uniforme. La trajectoire a pour rayon R=2 cm, la vitesse angulaire $\omega = \frac{\pi}{3}\ \mathbf{rad.s^{-1}}$ et à la date t=0, l'élongation angulaire vaut $\varphi = -\frac{\pi}{6}\mathbf{rad}$. O est l'origine du repère et Ω l'origine des espaces sur la trajectoire.



9.1.1 Questions ;

Quelle est la période T du mouvement ? Représenter la position du mobile à partir de t=0, tous les douzièmes de période.

A est la projection orthogonale de M sur l'axe y'y. Tous les douzièmes de période, on connaît la position de M et par conséquent celle de A. Décrire le mouvement de A qui est un mouvement rectiligne sinusoïdal.

En déduire comment on peut représenter graphiquement, sans calcul, la fonction y=f(t)

Donner l'expression de $\mathbf{y = \overline{OA}}$ en fonction de ω, φ, R et t.

Quelles sont la nature du mouvement et l'équation du mouvement de B, projection orthogonale de M sur l'axe x'x ?

9.1.2 Réponses :

T est la durée d'un tour. Le rayon OM balaye $\frac{\pi}{3}\mathbf{rad}$ en une seconde.

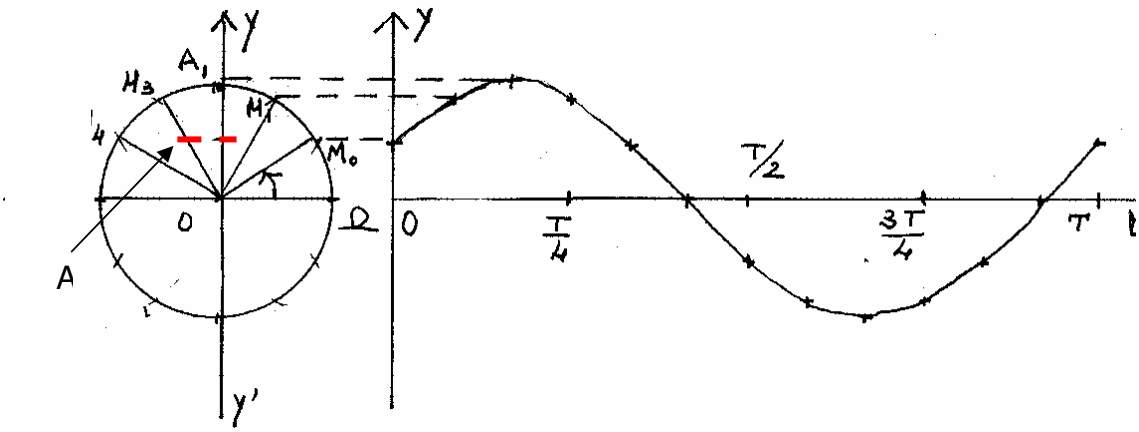
T est la durée nécessaire pour balayer 2π.

$$\mathbf{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6\mathbf{s}$$

Il suffit de diviser le cercle en douze secteurs égaux pour avoir les positions de M demandées.

A est animé d'un mouvement rectiligne qui change régulièrement de sens, entre A_1 et A_2. Ce mouvement est périodique et sa période est égale à celle de M.

3. A partir de Mo on trace la position Ao de A à t=0. On peut procéder ainsi pour tous les points. On obtient y=f(t)



4. $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{OA}} = \mathbf{R}\sin(\overrightarrow{\mathbf{O\Omega}}, \overrightarrow{\mathbf{OM}}) = \mathbf{R}\sin(\omega\mathbf{t} + \varphi)$

$\mathbf{y} = 2\sin(\frac{\pi}{3}\mathbf{t} - \frac{\pi}{6})$ y en cm.

La longueur de la trajectoire de A est 2R soit 4 cm

L'amplitude du mouvement sinusoïdal de A est égale à 2 cm

$\omega = \frac{\pi}{3}$ est la pulsation du mouvement ; elle est égale à la vitesse angulaire de M

$\varphi = -\frac{\pi}{6}$ est la phase à l'origine du mouvement de A : la connaissance de φ permet de tracer la position Mo de M à t=0 et ensuite de tracer la position Ao de A à t=0

5. Le mouvement de B est un mouvement rectiligne sinusoïdal d'équation $x = 2\cos(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6})$

9.2 MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOIDAL

9.2.1 Définition

Mouvement d'un point qui se déplace sur un axe et dont l'abscisse a pour expression :

$x = Xm\cos(\omega t + \varphi)$ où Xm, ω et φ sont des constantes.

Xm et ω sont toujours différentes de zéro

9.2.2 Caractéristiques

Xm est l'amplitude du mouvement :

Au cours du temps, $\omega t + \varphi$ varie, $\cos(\omega t + \varphi)$ varie entre -1 et 1 ; le point mobile se déplace entre les points d'abscisse –Xm et + Xm

La trajectoire est donc un segment de droite de longueur : 2 Xm

$\omega t + \varphi$ ***est l'angle de phase :***

il s'exprime en radians (rad) t est le temps (en secondes)

au cours du temps cet angle varie et le mobile oscille entre les deux positions extrêmes limitant sa trajectoire.

ω ***est la pulsation du mouvement :***

plus ω est grand plus le mouvement oscillatoire a une fréquence élevée

φ ***est la phase à l'origine.***

Sa valeur dépend de la position et du sens dans lequel se déplace le mobile à t=0.

En effet à t=0, x=xo=Xm cos(ω×0+φ)= Xm cos φ donc $\cos\varphi = \frac{x_0}{Xm}$

9.2.3 Le mouvement est périodique.

La fonction cosinus est périodique de période 2π.

Le mouvement se reproduit donc identique à lui même au cours du temps.

A la date t, le point mobile a pour abscisse $x = Xm\cos(\omega t + \varphi)$ et pour vitesse

$\mathbf{v = \frac{dx}{dt}}$ =- Xm ω sin(ω t+φ)

La période du mouvement T est le plus petit intervalle de temps séparant le passage du mobile à la même position et dans le même sens.

Si aux dates t et t', le mobile occupe la même position et a même vitesse:

Xm cos(ω t+φ)=Xm cos(ω t'+φ) et - Xm ω sin(ω t+φ) = - Xm ω sin(ω t'+φ)

Ces deux conditions seront toutes deux vérifiées si

ω t'+φ =ω t+φ +2kπ donc si ω(t'- t) = 2kπ

La période du mouvement T est le plus petit intervalle de temps séparant le passage du mobile à la même position et dans le même sens. T est donc égale à la plus petite valeur non nulle de t'-t c'est-à-dire 2π (k=1)

d'où ωT =2π

Période : $\mathbf{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ Fréquence du mouvement $\mathbf{f = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi f}$

T en s f en Hz ω en rad.s-1

9.2.4 Vitesse

A la date t, le point mobile a pour vitesse $\mathbf{v = \frac{dx}{dt}}$ = - Xm ω sin(ω t+φ)

La vitesse est une fonction sinusoïdale du temps, de période T.

$\mathbf{-Xm\,\omega \le v \le +Xm\,\omega}$

La vitesse s'annule aux extrémités de la trajectoire, et sa valeur maximale est atteinte aux passages en O. En O la valeur algébrique de la vitesse est égale à $\mathbf{\pm Xm\,\omega}$

9.2.5 Accélération

A la date t, le point mobile a pour accélération : $\mathbf{a = \frac{dv}{dt} = -Xm\,\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)}$

L'accélération est une fonction sinusoïdale du temps, de période T.

$\mathbf{-Xm\,\omega^2 \le v \le + \pm Xm\,\omega^2}$

L'accélération s'annule en O et elle atteint sa valeur maximale aux extrémités de la trajectoire. Aux extrémités de la trajectoire, la valeur algébrique de l'accélération est égale à $\mathbf{\pm Xm\,\omega^2}$

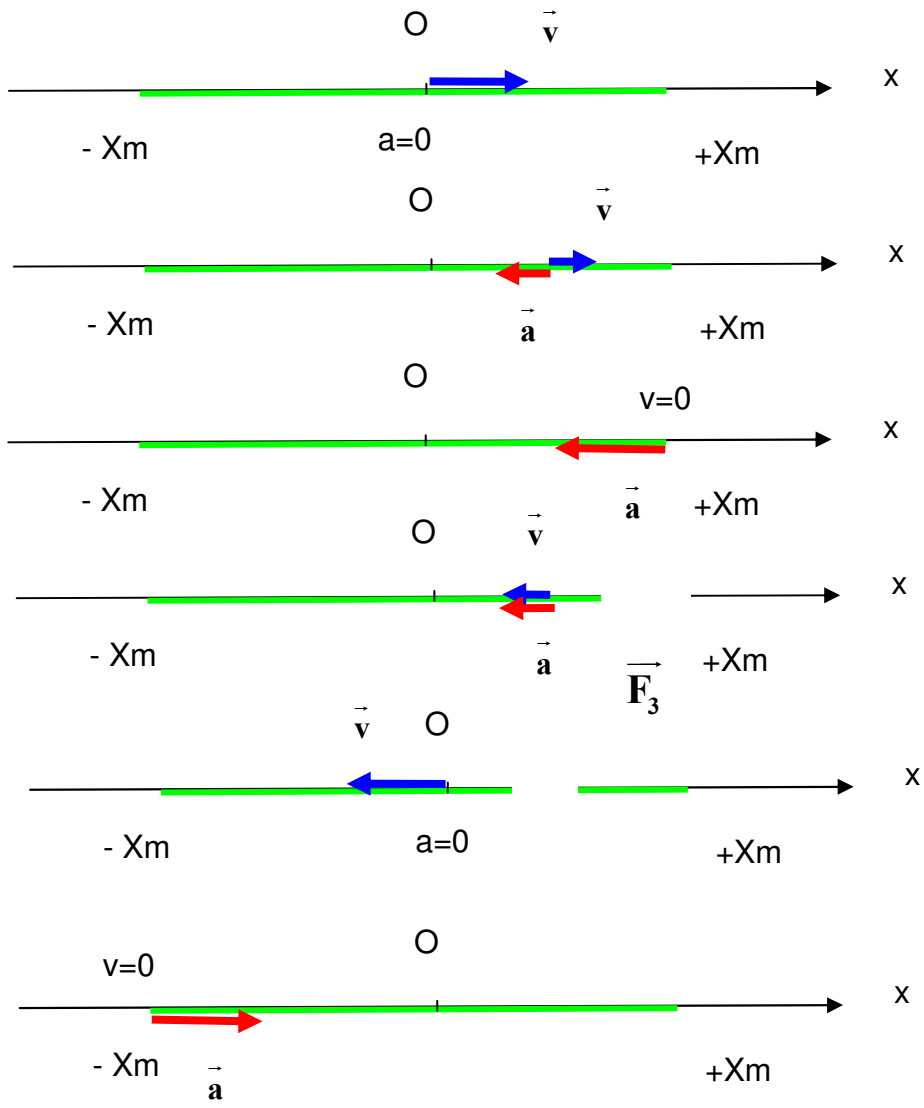
Remarque :

On constate que $\mathbf{a = -\omega^2 x}$

Quand x est >0, quel que soit le sens du mouvement, a est <0

Quand x est <0, quel que soit le sens du mouvement, a est >0

L'accélération est proportionnelle à l'élongation et de signe contraire.



Quelle que soit la position du point mobile, et quel que soit le sens de déplacement, le vecteur accélération est toujours orienté du point mobile vers

O. On dit que dans un mouvement rectiligne sinusoïdal, l'accélération est centripète.

La valeur de l'accélération est d'autant plus grande que le point est plus éloigné de O.

Le schéma suivant montre, à différents instants, la position et les vecteurs vitesse et accélération du mobile. On constate que le vecteur accélération pointe toujours vers O. L'accélération est centripète.

☐ Exercice 1

9.3 MOUVEMENT CIRCULAIRE SINUSOIDAL.

9.3.1 Définition

Mouvement d'un point qui a une trajectoire circulaire et dont l'abscisse angulaire a pour expression :

$\theta = \theta m \cos(\omega t + \varphi)$ où θm, ω et φ sont des constantes.

θm et ω sont toujours différentes de zéro

9.3.2 Caractéristiques

θm est l'amplitude angulaire du mouvement : au cours du temps, θ varie entre -θm et θm.

t est le temps (en secondes)

$\omega t + \varphi$ est l'angle de phase : il s'exprime en radians (rad)

ω est la pulsation du mouvement ; plus ω est grand plus le mouvement oscillatoire a une fréquence élevée

φ est la phase à l'origine. Sa valeur dépend de la position et du sens dans lequel se déplace le mobile à t=0. En effet à t=0, θ=θo=θm cos(ω×0+φ)= θm cos φ donc $\cos\varphi = \frac{\theta_0}{\theta m}$

9.3.3 Le mouvement est périodique.

Période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ Fréquence du mouvement $f = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi f$

T en s f en Hz ω en rad.s^{-1}

9.3.4 Vitesse angulaire

A la date t, le point mobile a pour vitesse angulaire $\dot{\theta} = -\theta m \omega \sin(\omega t + \varphi)$

La vitesse est une fonction sinusoïdale du temps, de période T.

$-\theta m \omega \leq \dot{\theta} \leq +\theta m \omega$

La vitesse s'annule aux extrémités de la trajectoire, et sa valeur maximale est atteinte aux passages en O. En O la valeur algébrique de la vitesse est égale à $\pm \theta m \omega$

Ne pas confondre $\dot{\theta}$ et ω ; ces deux grandeurs ont certes la même unité mais sont différentes.

$\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire, c'est une fonction du temps

ω est la pulsation du mouvement sinusoïdal, c'est une constante

9.3.5 Accélération angulaire

A la date t, le point mobile a pour accélération : $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\theta m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

L'accélération est une fonction sinusoïdale du temps, de période T.

$-\theta m \omega^2 \leq \ddot{\theta} \leq +\theta m \omega^2$

L'accélération s'annule en O et elle atteint sa valeur maximale aux extrémités de la trajectoire.

Aux extrémités de la trajectoire, la valeur algébrique de l'accélération est égale à $\pm \theta m \omega^2$

Remarque :

On constate que $\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$

Quand θ est >0, quel que soit le sens du mouvement, $\ddot{\theta}$ est <0

Quand θ est <0, quel que soit le sens du mouvement, $\ddot{\theta}$ est >0

☐ Exercice 2

9.4 EXERCICES

☐ Exercice 1

Un point M est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude 3 cm; à t= 0, il passe au point d'abscisse x=+ 1,5 cm et se dirige alors dans le sens des élongations négatives. La fréquence du mouvement est de 10 Hz.

Etablir les expressions de x, v et a en fonction du temps.

A quelles dates, le mobile passe-t-il au point d'abscisse x = - 2 cm ?

☐ Exercice 2

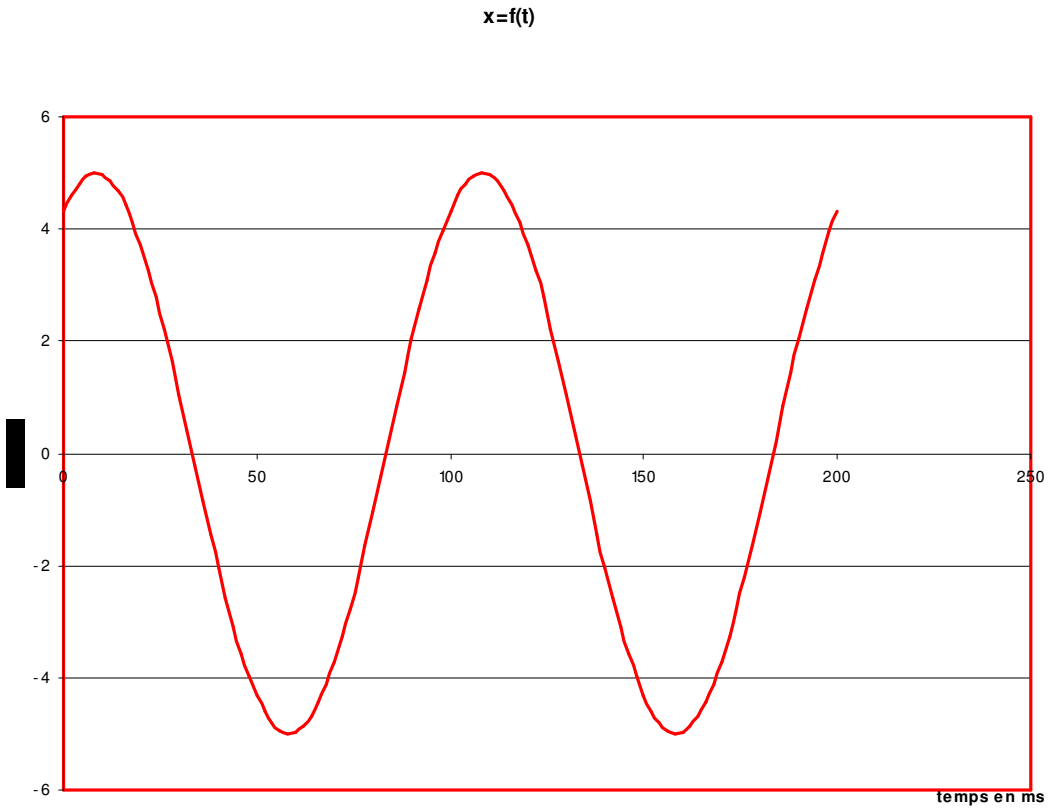
La vitesse angulaire de la tige d'un métronome, animée d'un mouvement circulaire sinusoïdal d'amplitude égale à $\frac{\pi}{12}$ a pour expression $\dot{\theta} = a\cos bt$

Déterminer a et b sachant que le métronome bat la seconde et que la période du mouvement est de deux secondes.

∗ Exercice 3

A partir du graphe de x=f(t), déterminer les caractéristiques du mouvement rectiligne sinusoïdal correspondant. Donner les expressions de v et de a au cours du temps. A t= 8 ms, x est maximal et égal à 5 cm

A t=0, x= 4,3 cm.



∗ Exercice 4

Un point est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal. L'expression de l'accélération au cours du temps est $\mathbf{a = -25\sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})}$

Déterminer les expressions de v et de x au cours du temps ainsi que les caractéristiques de ce mouvement.

∗ Exercice 5

Un point est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal $\mathbf{x = 6\cos(100\pi t - \frac{\pi}{3})}$

(x en cm)

A quelles dates le mobile passe-t-il au point d'abscisse x= - 3 cm en se dirigeant dans le sens positif de l'axe

9.5 CORRIGES DES EXERCICES

9.5.1 Corrigé de l'exercice 1

f= 10 Hz $\omega=2\pi f = 20\pi$ rad.s^{-1}

x = Xm cos(ωt+φ) La longueur de la trajectoire est 6 cm ; cela représente deux fois l'amplitude du mouvement. Donc Xm = 3 cm

x = 3 cos (20πt+φ) Déterminons φ.

à t= 0, x=1,5 on remplace 1,5 =3 cos(20π0+φ) d'où cosφ =0,5

à t= 0 le mobile passe au point d'abscisse x=+ 1,5 cm et se dirige alors dans le sens des élongations négatives. A t=0, la vitesse est donc négative.

A la date t la vitesse est $\mathbf{v = \frac{dx}{dt} = -3 \times 20\pi \sin(20\pi t + \varphi)}$

La vitesse à la date t= 0 est $\mathbf{-60\pi \sin\varphi}$; or cette vitesse est négative donc $\mathbf{\sin\varphi}$ >0

cosφ =0,5 et sin φ >0 $\Rightarrow$ $\varphi=\frac{\pi}{3}$

$\mathbf{x = 3\cos(20\pi t + \frac{\pi}{3})}$ $\mathbf{x\ en\ cm}$ $\mathbf{v = -60\pi\sin(20\pi t + \frac{\pi}{3})}$ $\mathbf{v\ en\ cm.s^{-1}}$

A quelles dates, le mobile passe-t-il au point d'abscisse x = - 2 cm ?

$$\mathbf{-2 = 3\cos(20\pi t + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \cos(20\pi t + \frac{\pi}{3}) = -\frac{2}{3} = \cos(2,3rad)}$$

$$\mathbf{20\pi t + \frac{\pi}{3} = \pm 2,3 + 2k\pi \Rightarrow t = \frac{1}{20\pi}\left(\pm 2,3 + 2k\pi - \frac{\pi}{3}\right)}$$

Toutes les valeurs de t vérifiant cette relation sont les dates de passage du mobile au point considéré.

9.5.2 Corrigé de l'exercice 2

La phase à l'origine est nulle ; l'élongation angulaire a pour expression

$$\theta = \theta m \sin \omega t = \theta m \sin \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow \dot{\theta} = \theta m \omega \cos \omega t = \theta m \omega \cos \frac{2\pi}{T} t$$

$$b = \frac{2\pi}{T} = \pi \, rad.s^{-1} = 3,14 \, rad.s^{-1}$$

$$a = \theta m \omega \qquad a = \frac{\pi}{12} \pi = 0,822 \ rad.s^{-1}$$

Remarque : a et b ont la même unité mais il ne s'agit pas de la même grandeur : a est la vitesse angulaire maximale et b la pulsation du mouvement circulaire sinusoïdal.

9.5.3 Corrigé de l'exercice 3

La période est T=100ms soit 0,1 s la fréquence vaut $f = \frac{1}{T} = 10Hz$

$\omega = 2\pi f = 20\pi \, rad.s^{-1}$ x=Xm cos(ωt+φ) Xm=5 cm

à t=0, x= 4.3 cm 4,3=5 cosφ cosφ=0,86

x=Xm cos(ωt+φ) $v = \frac{dx}{dt} = -Xm\omega \sin(\omega t + \varphi)$

A t=0, la fonction x=f(t) est croissante, sa dérivée est >0 donc v >0

$-Xm\omega \sin(0t + \varphi) = -Xm\omega \sin \varphi > 0$ donc sinφ < 0

$\cos \varphi = 0,86 \ et \ \sin \varphi < 0 \Rightarrow \varphi = -0,535 \, rad$

$x = 5 \times 10^{-2} \cos(20\pi t - 0,535)$ x en m

$v = 5 \times 10^{-2} \times 20\pi \sin(20\pi t - 0,535) = \pi \sin(20\pi t - 0,535)$

$a = -(20\pi)^2 \times 5 \times 10^{-2} \cos(20\pi t - 0,535)$

9.5.4 Corrigé de l'exercice 4

$$a = -25 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})$$

$$v = \frac{25}{100\pi} \cos(100\pi t + \frac{\pi}{6}) = 7,96 \times 10^{-2} \cos(100\pi t + \frac{\pi}{6})$$

$$x = \frac{7,96\times10^{-2}}{100\pi}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{6}) = 2,53\times10^{-4}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})$$

9.5.5 Corrigé de l'exercice 5

$$x = 6\cos(100\pi t - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow v = -600\pi\sin(100\pi t - \frac{\pi}{3})$$

à t= ?, x= - 3 et v > 0

$$-3 = 6\cos(100\pi t - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \cos(100\pi t - \frac{\pi}{3}) = -0,5 \Rightarrow 100\pi t - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$-600\pi\sin(100\pi t - \frac{\pi}{3}) > 0 \Rightarrow \sin(100\pi t - \frac{\pi}{3}) < 0$$

pour vérifier ces deux conditions : $100\pi t - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ d'où

$$t = \frac{1}{100\pi}\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

CHAPITRE 10 PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

10.1 ACTIVITES

Y-a-t-il une relation entre les forces exercées sur un corps et la variation de vitesse de son centre d'inertie ?

Etude du mouvement d'un projectile.

Une bille est lancée d'un point O avec une vitesse initiale oblique $\overrightarrow{v_0}$ contenue dans le plan (Ox,Oz). Cette bille, fortement éclairée est filmée à l'aide d'une caméra à raison de 25 images par seconde. Un logiciel permet d'obtenir la position de la bille tous les 1/25 s et de calculer les vitesses en chaque point.

Exploitation du document.

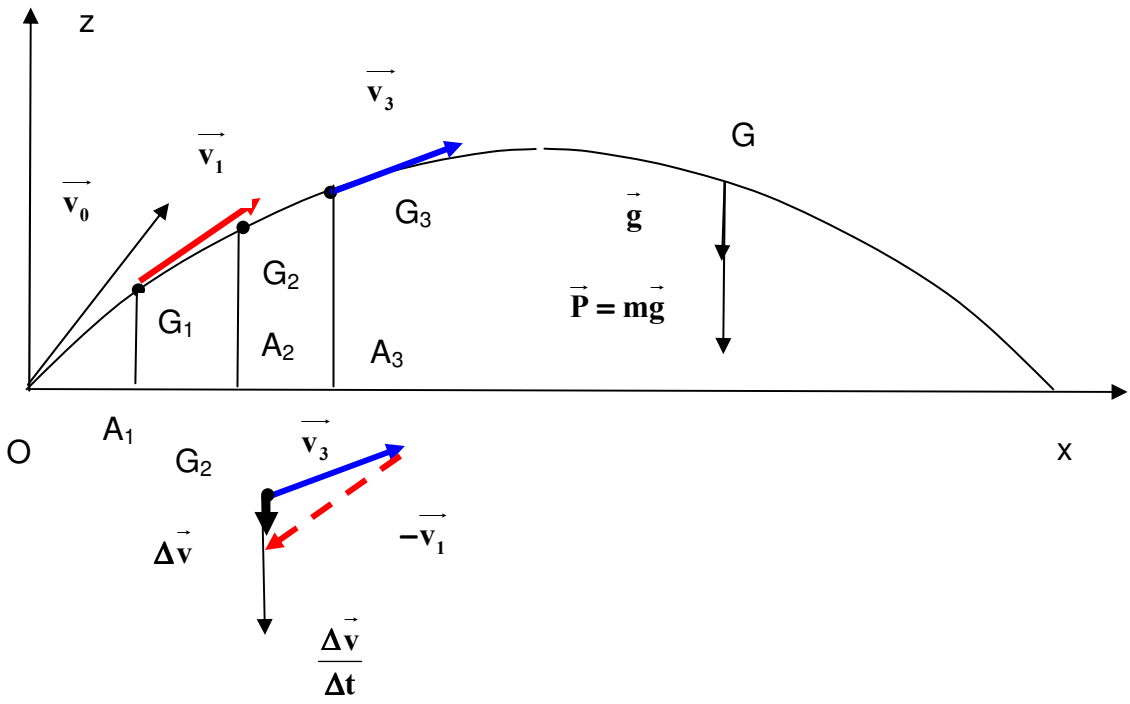
On peut vérifier que la trajectoire est parabolique.

Soient G_1, G_2, G_3 les positions du mobile aux instants t_1, t_2 et t_3 tels que $t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = \Delta t$ =1/25 s. On représente les vecteurs vitesse à t_1 et t_3..ainsi que le vecteur $\Delta\vec{v} = \overrightarrow{v_3} - \overrightarrow{v_1}$ appliqué en M_2 et le vecteur $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ également appliqué en G_2. Pour plus de clarté, la construction des vecteurs appliqués en G_2 a été décalée.

On constate que le vecteur $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ et le vecteur $\vec{g}$ ont même direction, même sens et même valeur ; ils sont égaux. Δt étant petit, l'accélération instantanée $\vec{a}$ est assimilable à $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$. $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m\vec{g} \Rightarrow m\vec{a} = \vec{P}$ Il y a une relation directe entre l'accélération et la force appliquée.

Soient A_1, A_2 et A_3 les projections orthogonales de G_1, G_2 et G_3 sur l'axe Ox. On constate que $A_1A_2=A_2A_3$. Le point A est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. De même, on peut montrer que B, projection orthogonale de G sur Oz, est animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération g.



10.2 PRINCIPE DE L'INERTIE.

10.2.1 Centre d'inertie d'un solide.

Quelques définitions.

Solide isolé.

Un solide soumis à aucune action mécanique est appelé solide isolé (mécaniquement isolé)

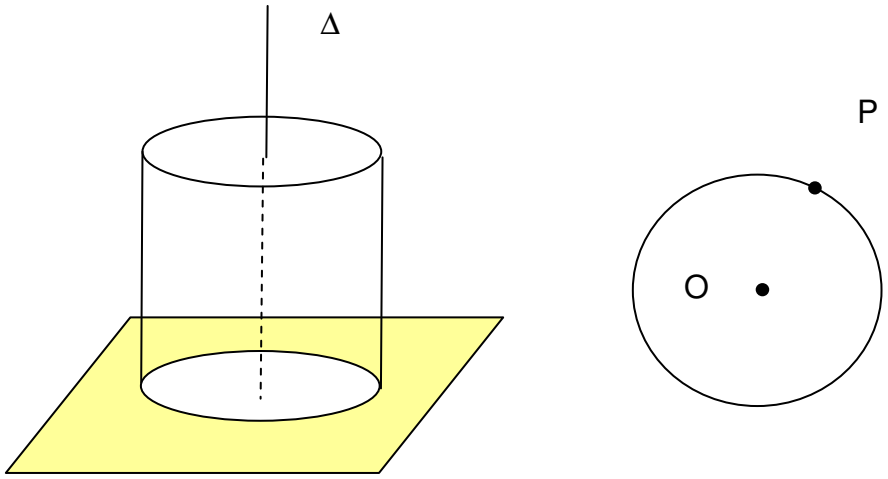
C'est un cas irréaliste.

Solide pseudo-isolé

Un solide soumis à des forces qui se compensent (leur somme vectorielle est alors nulle) est pseudo-isolé ; il s'agit cette fois d'une situation réalisable.

Exemple :

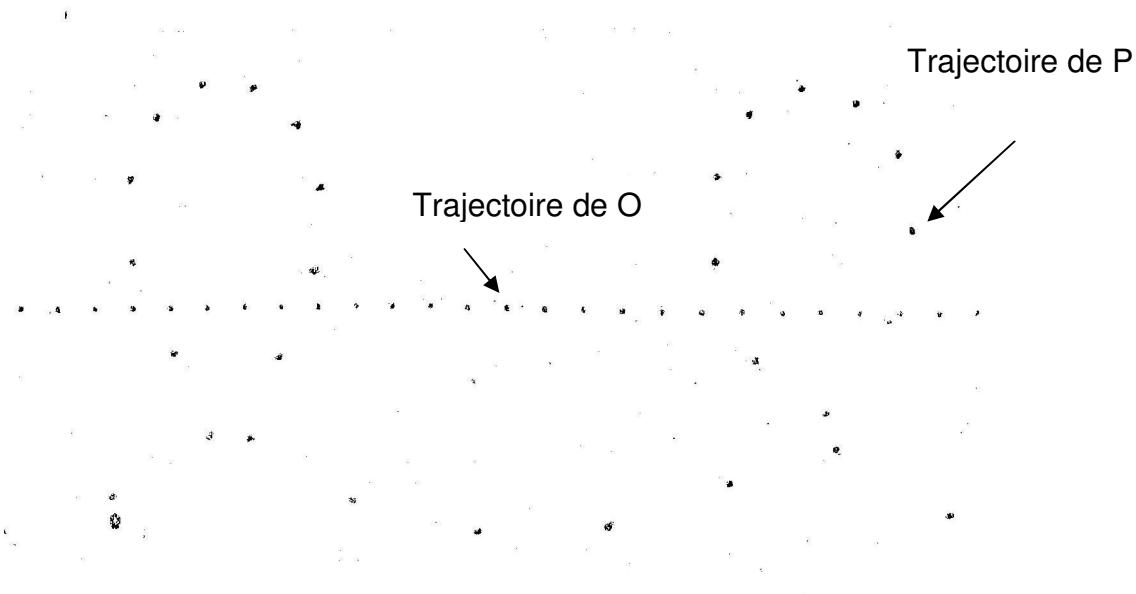
Un mobile cylindrique qui se déplace sur une table à coussin d'air horizontale constitue, si on néglige les frottements, un système pseudo-isolé. En effet le poids du corps est compensé par la réaction de la table et $\sum \vec{f} = \vec{0}$



10.2.2 Mise en évidence expérimentale du centre d'inertie d'un solide.

On lance le mobile cylindrique sur la table en lui donnant une impulsion de rotation autour de son axe vertical et on l'abandonne. On enregistre les mouvements d'un point P à la périphérie de la base et du centre O de la base circulaire en contact avec la table.

On constate que le mouvement de P est complexe et que celui de O est rectiligne uniforme quelle que soit la façon dont on lance le mobile.



Mais dans cette expérience, le mobile est assujetti à rester en contact avec la table et n'a que trois degrés de liberté.

Il serait intéressant de lancer le mobile dans l'espace pour lui donner davantage de degrés de liberté mais il ne serait plus dans ce cas pseudo-isolé.

Si cette expérience était réalisable, le solide étant pseudo-isolé, un seul point, situé au centre du mobile, serait animé d'un mouvement rectiligne uniforme ; Ce point est le centre d'inertie du mobile.

Le centre d'inertie d'un solide est le seul point du mobile qui se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme dans un repère terrestre quand le solide est pseudo-isolé. C'est le moyen de savoir si le solide est pseudo-isolé.

10.2.3 Principe de l'inertie.

10.2.3.1 Première formulation.

Ce principe, pressenti par Galilée (1564 -1642) est formulé par Newton (1642-1727) :

« Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état. »

10.2.3.2 Enoncé :

Dans un repère terrestre, le centre d'inertie G d'un solide pseudo-isolé est au repos ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme

Si l'on recommence l'expérience lorsque la table à coussin d'air est fixée à un chariot qui tourne par rapport à la terre, le mouvement de O n'est plus rectiligne uniforme !

Dans le référentiel chariot, le principe énoncé n'est plus applicable (si on suppose les forces indépendantes du référentiel).

10.3 LES REPERES GALILEENS.

Le principe d'inertie n'est applicable que dans certains repères, les repères galiléens.

La définition d'un repère galiléen sort du cadre de ce cours. On se limitera à donner des exemples de repères galiléens.

10.3.1 Exemples de repères galiléens

Le repère de Copernic est un repère rigoureusement galiléen ; ce repère a pour origine le centre d'inertie du système solaire et trois axes fixes ayant des directions déterminées.

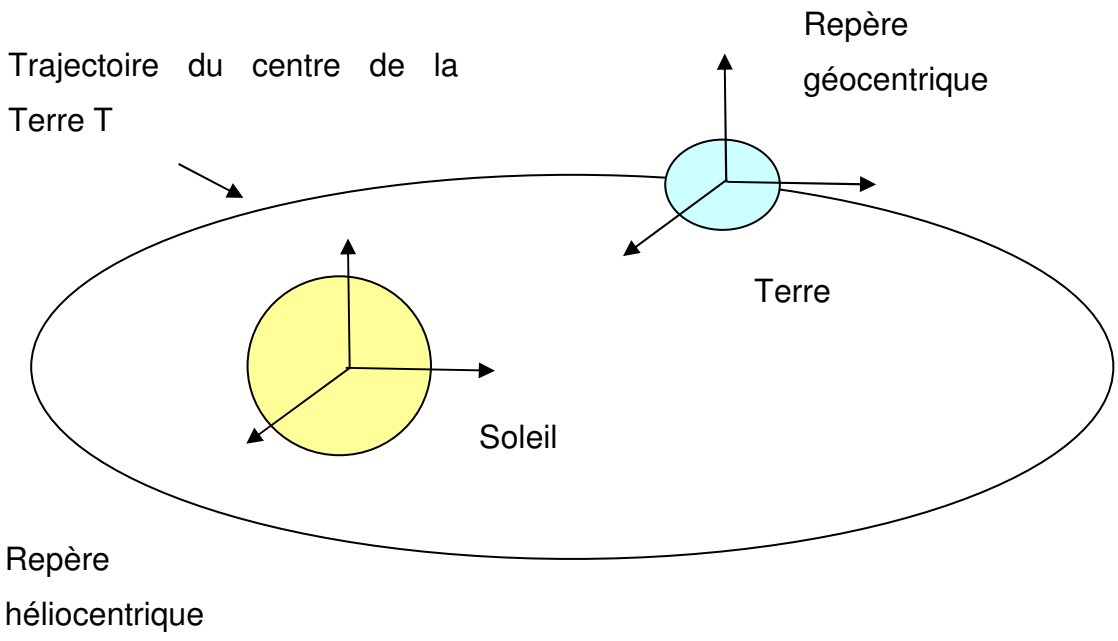
Le repère héliocentrique dont le centre est le centre du Soleil et dont les axes sont parallèles à ceux du repère de Copernic est considéré comme galiléen.

On peut démontrer que tout repère ayant un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à un repère galiléen est lui-même galiléen.

Le repère géocentrique a pour centre le centre T de la terre et pour axes des axes restant parallèles à ceux du repère de Copernic. Le mouvement de T dans le système solaire n'étant pas rectiligne uniforme, ce repère n'est pas galiléen. Toutefois, il pourra être considéré comme galiléen pour l'étude de mouvements dont la durée est de l'ordre du jour.

Le repère terrestre a une origine située à la surface de la Terre et à cause de la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles, il est encore moins galiléen que le précédent

Néanmoins, pour des mouvements ayant une courte durée et s'effectuant dans une zone restreinte de l'espace, tous les repères énoncés pourront être considérés comme galiléens.



10.3.2 Enoncé du principe de l'inertie.

Dans un repère galiléen, le centre d'inertie G d'un solide pseudo-isolé est soit au repos soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme

10.4 CENTRE D' INERTIE D' UN SYSTEME MATERIEL

10.4.1 Définitions.

Un système matériel quelconque, déformable ou non déformable (solide) est constitué d'un ensemble de points matériels A_1, A_2, A_n de masses m_1,m_2, m_n.
On appelle centre de masse du système, le point G tel que :

$$(m_1 + m_2 + ...m_n)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + ...m_n\overrightarrow{OA_n}$$

O étant un point quelconque.
Le centre d'inertie et le centre de masse sont confondus.

Remarque :

Si le système est situé dans une zone de l'espace suffisamment restreinte pour que l'on puisse considérer que le vecteur champ de pesanteur est constant, le centre de gravité du système (point d'application du poids du système) est confondu avec le centre d'inertie.

10.4.2 Centre d'inertie d'un ensemble de solides

L'ensemble étant constitué de solides ayant pour centres d'inertie Gi et pour masses Mi
le centre d'inertie de l'ensemble est le point G tel que :

$$(M_1 + M_2 + ... + M_n)\overrightarrow{OG} = M_1\overrightarrow{OG_1} + M_2\overrightarrow{OG_2} + ... + M_n\overrightarrow{OG_n}$$

☐ Exercice 1

10.5 VECTEUR QUANTITE DE MOUVEMENT

10.5.1 Définitions.

10.5.1.1 Cas d'un point matériel.

Le vecteur quantité de mouvement est $\vec{p}$ tel que $\vec{p} = m.\vec{v}$
Unités : p en $kg.m.s^{-1}$ m en kg v en $m.s^{-1}$

10.5.1.2 Cas d'un système matériel

Le vecteur quantité de mouvement est la somme des vecteurs quantité de mouvement de tous les points matériels qui le constituent.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i}$$

10.5.2 Vecteur quantité de mouvement d'un système.

Le centre d'inertie G du système est tel que :

$$(M_1 + M_2 + ... + M_n)\overrightarrow{OG} = M_1\overrightarrow{OA_1} + M_2\overrightarrow{OA_2} + ... + M_n\overrightarrow{OA_n}$$

En dérivant par rapport au temps

$$(M_1 + M_2 + ... + M_n)\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = M_1\frac{d\overrightarrow{OA_1}}{dt} + M_2\frac{d\overrightarrow{OA_2}}{dt} + ... + M_n\frac{d\overrightarrow{OA_n}}{dt}$$

$$(M_1 + M_2 + ... + M_n)\overrightarrow{vG} = M_1\overrightarrow{v_{A_1}} + M_2\overrightarrow{v_{A_2}} + ... + M_n\overrightarrow{v_{A_n}}$$

ou encore :

$$(\sum_{i=1}^{n} M_i)\overrightarrow{v_G} = \sum_{i=1}^{n} M_i\overrightarrow{v_{Ai}} = \vec{p}$$

$$M\overrightarrow{v_G} = \vec{p}$$

$$\vec{p} = M\overrightarrow{v_G}$$

Le vecteur quantité de mouvement d'un système est égal au produit de la masse totale du système par le vecteur vitesse de son centre d'inertie.

10.5.3 Cas d'un système mécaniquement isolé

Dans ce cas G est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Il en résulte que le vecteur quantité de mouvement est constant puisque le vecteur vitesse de G l'est.

☐ Exercice 2

10.6 FORCES INTERIEURES ET FORCES EXTERIEURES.

10.6.1 Définition de la force.

C'est en exerçant une action mécanique sur un ballon de football qu'on le met en mouvement ; c'est aussi sous l'action d'une action mécanique ou force que le joueur renvoie le ballon dans une autre direction. Dans les deux cas, le joueur a fait varier la quantité de mouvement du ballon.
On appelle action mécanique toute cause capable de produire la variation de la quantité de mouvement d'un solide.

10.6.2 Forces intérieures et forces extérieures à un système.

10.6.2.1 Forces intérieures

Les forces intérieures sont des forces exercées entre les différents corps ou sous-systèmes formant un système.
exemple si on considère le système {ballon+terre}, le poids du ballon est une force intérieure.

10.6.2.2 Forces extérieures

Les forces extérieures sont des forces exercées par un corps ou un agent qui ne fait pas partie du système.
exemple si on considère le système {ballon}, le poids du ballon est une force extérieure.

10.7 LOIS DE NEWTON

10.7.1 Première loi de Newton: c'est le principe d'inertie

Dans un repère galiléen, le centre d'inertie G d'un solide pseudo-isolé est soit au repos soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme

10.7.2 Deuxième loi de Newton.

Dans un référentiel galiléen, à chaque instant, la somme des forces extérieures s'exerçant sur un système est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement du système

$$\vec{F} = \sum \overrightarrow{f\,ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{p} = M\overrightarrow{v_G}$$

En remplaçant, on obtient :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dM\overrightarrow{v_G}}{dt} = M\frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt} = M\overrightarrow{a_G}$$

$$\vec{F} = M\overrightarrow{a_G}$$

Théorème du centre d'inertie :

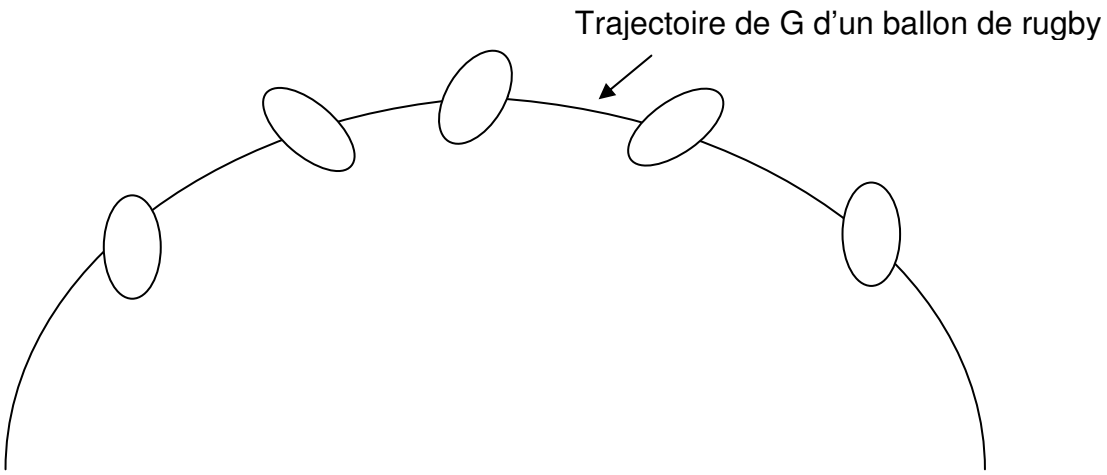
Dans un référentiel galiléen, à chaque instant, la somme des forces extérieures s'exerçant sur un système est égale au produit de la masse du système par le vecteur accélération de son centre d'inertie.

Remarques :

Cette relation montre que pour l'étude du mouvement de G d'un solide, on peut ramener toutes les forces en G.

Il n'est possible d'étudier que le mouvement de G et non pas le mouvement éventuel du solide autour de G (mouvement propre)

Dans le cas d'un système déformable, seules les forces extérieures sont susceptibles de modifier le mouvement de G, les forces intérieures, dont la somme vectorielle est nulle, n'intervenant pas.



La relation ne permet pas d'étudier le mouvement propre du ballon de rugby autour de G mais seulement le mouvement de G sur sa trajectoire

Définition du newton :

Une force ne peut être mesurée que par ses effets . $\vec{F} = m\vec{a}$ constitue la définition de la force

F=ma si a=1 $m.s^{-2}$ et m =1kg F= 1N

Le newton est la valeur de la force qu'il faut appliquer à un solide de masse un kilogramme pour communiquer, dans un référentiel galiléen, à son centre d'inertie, une accélération de valeur 1 $m.s^{-2}$.

☐ Exercice 3

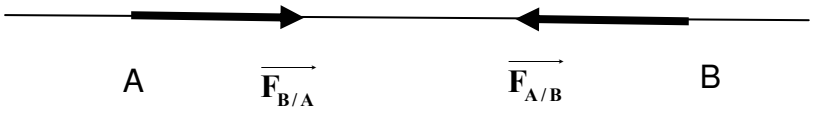
10.7.3 Troisième loi de Newton.

C'est le principe des interactions mutuelles.

Lorsqu'un corps A exerce sur un corps B une force $\overrightarrow{F_{A/B}}$, le corps B exerce sur le corps A une force $\overrightarrow{F_{B/A}}$

Dans tous les cas, que A et B soient en mouvement ou au repos : $\overrightarrow{F_{A/B}} + \overrightarrow{F_{B/A}} = \vec{0}$

Les forces $\overrightarrow{F_{A/B}}$ et $\overrightarrow{F_{B/A}}$ ont même droite d'action :AB



10.8 APPLICATIONS A L' ETUDE DU MOUVEMENT DE G D'UN PROJECTILE

10.8.1 Hypothèses :

On étudie le mouvement du centre d'inertie G d'un solide en chute libre (soumis uniquement à la pesanteur). On suppose que la région de l'espace dans laquelle se déplace le mobile est suffisamment restreinte pour que l'on puisse considérer que le vecteur champ de pesanteur est constant.

A la date t=O, le centre d'inertie G du projectile est en A et sa vitesse est $\overrightarrow{v_o}$

L'application au système (le projectile) de la deuxième loi de Newton dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, conduit à : $\sum \vec{f} = \vec{P} = m\overrightarrow{a_G} = m\vec{a}$

$\vec{a} = \vec{g}$ donc $\vec{P} = m\vec{g}$

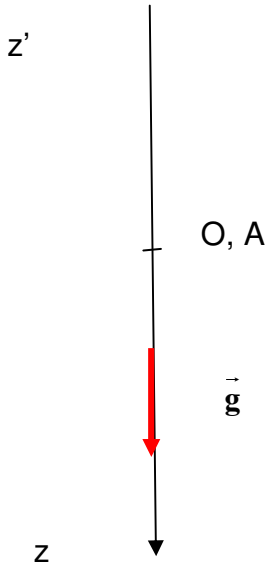
10.8.2 Chute d'une bille sans vitesse initiale.

A est confondu avec O et vo=0 : l'axe z'z est orienté vers le bas.

$$\vec{a} = \vec{g} \quad \Rightarrow \ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = 0 \quad \ddot{z} = +g \qquad (g > 0)$$

Par intégration par rapport au temps :

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = cte = \dot{x}_0 = v_{ox} = 0$$



$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x = cte = x_0 = 0$$

$$\ddot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y} = cte = \dot{y}_0 = v_{oy} = 0$$

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow y = cte = y_0 = 0$$

$$\ddot{z} = g \Rightarrow \dot{z} = gt + cte = gt + \dot{z}_0 = gt + 0 = gt$$

$$\dot{z} = gt \Rightarrow z = \frac{1}{2}gt^2 + cte = \frac{1}{2}gt^2 + v_{0z} = \frac{1}{2}gt^2$$

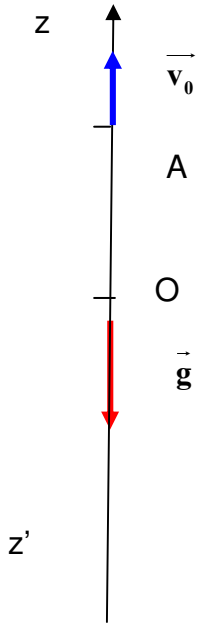
En résumé : $x = 0, \quad y = 0 \quad z = \frac{1}{2}gt^2$

le mouvement est rectiligne uniformément accéléré, d'accélération g ; il s'effectue vers le bas, suivant la verticale.

☐ Exercice 4

10.8.3 Etude du mouvement d'une bille lancée verticalement vers le haut.

A est situé au dessus de O à l'altitude h. La bille est lancée de A avec $\vec{v_0}$ dirigée vers le haut. L'axe z'z est orienté vers le haut.



$$\vec{a} = \vec{g} \quad \Rightarrow \ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = 0 \quad \ddot{z} = -g \qquad (g > 0)$$

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = cte = \dot{x}_0 = v_{ox} = 0$$

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x = cte = x_0 = 0$$

$$\ddot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y} = cte = \dot{y}_0 = v_{oy} = 0$$

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow y = cte = y_0 = 0$$

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -gt + cte = gt + \dot{z}_0 = -gt + v_0$$

$$\dot{z} = -gt + v_0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + cte = z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h$$

En résumé : $x = 0,\ y = 0$ et $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h$

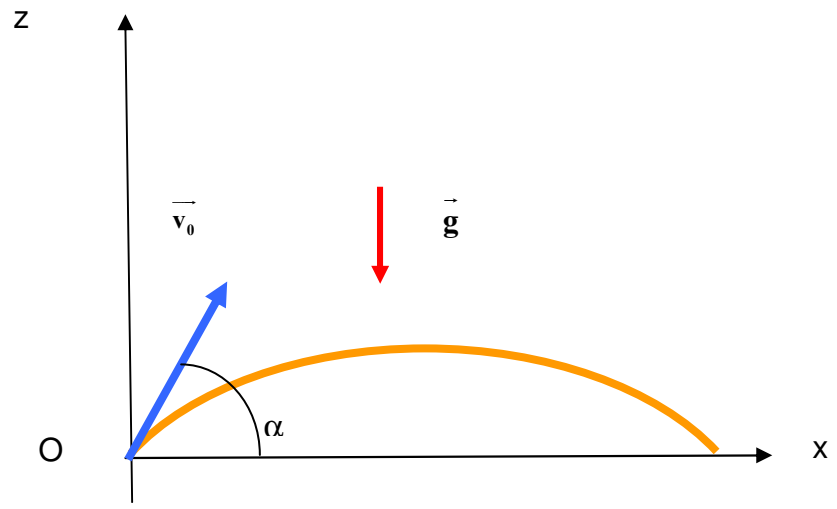
le mouvement est rectiligne uniformément varié(décéléré puis accéléré), d'accélération - g ; il s'effectue vers le haut puis vers le bas, suivant la verticale.

Il est à noter que les équations écrites décrivent tout le mouvement (montée et descente)

☐ Exercice 5

10.8.4 Mouvement d'un projectile.

Le projectile est lancé obliquement. A t=0, son centre d'inertie passe en O avec la vitesse $\vec{v_0}$ qui fait alors avec Ox l'angle α.



$$\vec{a} = \vec{g} \quad \Rightarrow \ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = 0 \quad \ddot{z} = -g \qquad (g > 0)$$

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = cte = \dot{x}_0 = v_{ox} = v_o \cos\alpha$$

$$\dot{x} = v_o \cos\alpha \Rightarrow x = v_o(\cos\alpha)t + cte = v_o(\cos\alpha)t$$

$$\ddot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y} = cte = \dot{y}_0 = v_{oy} = 0$$

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow y = cte = y_0 = 0$$

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -gt + cte = gt + \dot{z}_0 = -gt + v_0 \sin\alpha$$

$$\dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)t + cte$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)t$$

Conclusions :

$y = 0 \Rightarrow$ le mouvement de G est plan ; il s'effectue dans le plan vertical contenant $\overrightarrow{v_0}$

$$x = v_0(\cos\alpha)t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}.$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)t$$

$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0(\sin\alpha)\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)$$

$$z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$$

z=f(x) est de la forme $z=Ax^2+Bx$; la trajectoire est donc une portion de parabole.

☐ Exercice 6

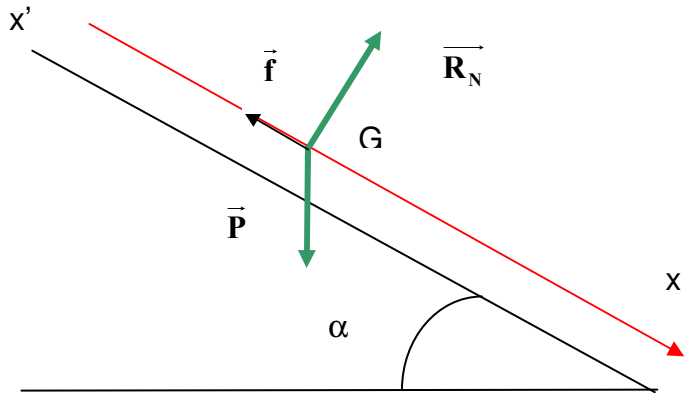
10.9 APPLICATION AU MOUVEMENT DE TRANSLATION D'UN SOLIDE SUR UN PLAN INCLINE

Un solide de masse M est abandonné sans vitesse initiale sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Les frottements, au cours de la descente, équivalent à une force opposée au vecteur vitesse et de valeur constante f. On étudie le mouvement du solide.

Le référentiel terrestre choisi est supposé galiléen.

Système : le solide

Forces appliquées : le poids, la réaction normale du plan et la force de frottement.



Application au système du théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P}+\overrightarrow{R_N}+\vec{f}=M\overrightarrow{a_G}=M\vec{a}$$

on projette sur l'axe x'x : $Mg\sin\alpha+0-f=Ma$

$$a=g\sin\alpha-\frac{f}{M}$$

g, α, M et f étant constants, a est constant. Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

Remarque :

Si les frottements sont négligeables, f = 0 et a= g sinα.

L'accélération ne dépend pas dans ce cas de la masse M

10.10 APPLICATION AU PENDULE CONIQUE.

10.10.1 Expérience.

On considère le système suivant : Une tige t, de masse négligeable, est articulée en O (liaison pivot non glissant) sur une tige verticale qui peut être mise en mouvement de rotation, à la vitesse angulaire ω, à l'aide d'un moteur. La tige t , de longueur L porte à l'autre extrémité un corps (S) de masse m, supposé ponctuel.

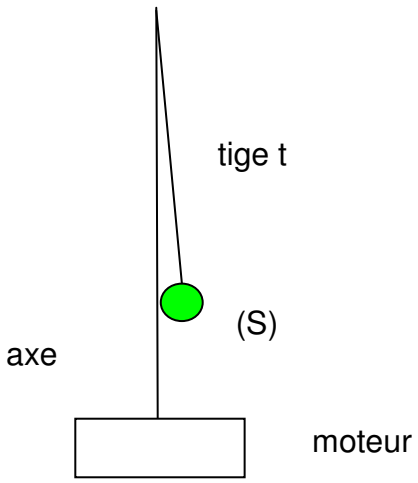
On fait tourner le moteur :

Pour $0\leq\omega\leq\omega_0$ la tige t ne s'écarte pas de l'axe

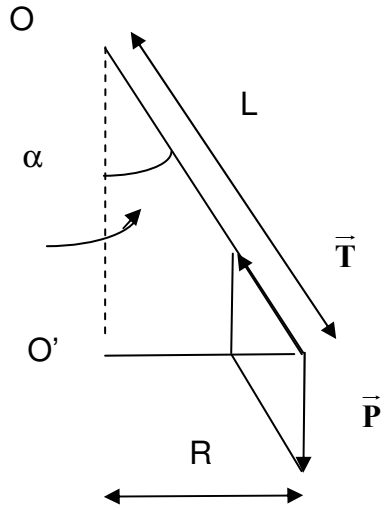
Ensuite pour $\omega>\omega_0$ quand ω croît α, angle d'écart, croît

Pour $\omega>\omega_0$ et pour ω=constante, le mouvement de (S) est circulaire uniforme et la tige t engendre un cône au cours de la rotation d'où le nom « pendule conique »

$$\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}=m\vec{a_t}+m\vec{a_n}=m\vec{a_n}$$



Système à l'équilibre



Mouvement circulaire uniforme

10.10.2 Etude du mouvement circulaire uniforme

Le système (S), soumis à son poids et à la tension exercée par la tige est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

$$\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}=m\vec{a_t}+m\vec{a_n}=m\vec{a_n}$$

La résultante $\vec{F}$ des deux forces appliquée est donc centripète.

$$\tan\alpha=\frac{ma_n}{mg}=\frac{\omega^2R}{g}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\omega^2R}{g}\Rightarrow\frac{R}{L\cos\alpha}=\frac{\omega^2R}{g}$$ d'où

$$\frac{R}{L\cos\alpha}=\frac{\omega^2R}{g}\qquad\cos\alpha=\frac{g}{\omega^2L}\ \cos\alpha=\sqrt{\frac{g}{\omega^2L}}$$

Remarque : $$\cos\alpha\geq0\Rightarrow\frac{g}{\omega^2L}\geq0\Rightarrow\omega\geq\sqrt{\frac{g}{L}}$$ si on pose $$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{L}}$$

On en déduit, en accord avec l'expérience , qu'il ne peut y avoir écart que si $\omega\geq\omega_0$

La tension de la tige

$$\cos\alpha=\frac{P}{T}\Rightarrow T=\frac{P}{\cos\alpha}=\frac{mg}{\frac{g}{\omega^2L}}=m\omega^2L$$

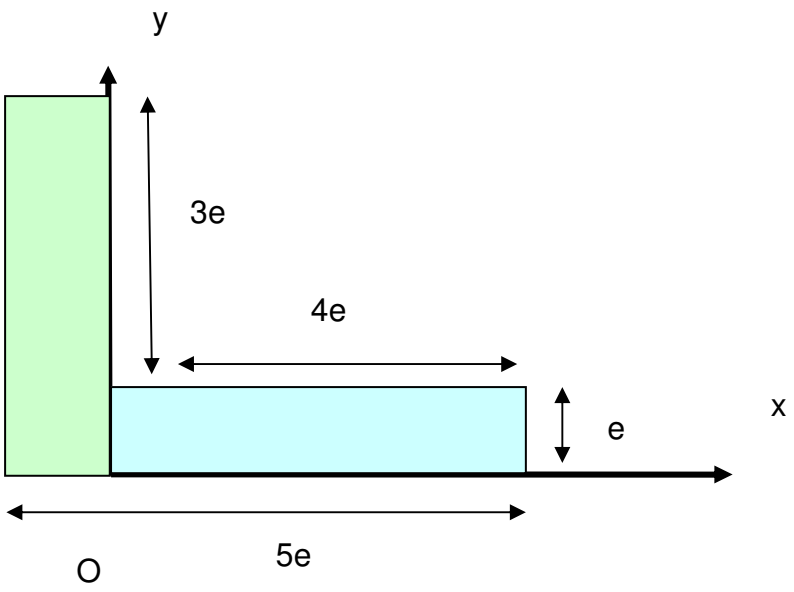
$T = m\omega^2 L$ la tension est proportionnelle au carré de la vitesse angulaire. La tension est donc multipliée par quatre lorsque la vitesse angulaire est multipliée par deux. T peut, très vite, atteindre une valeur élevée. Attention aux risques de rupture dans les systèmes en rotation rapide !

10.11 EXERCICES

10.11.1 ☐ Exercice 1

On considère un solide, découpé dans une feuille de carton homogène et d'épaisseur constante, et ayant la forme d'une lettre L. Déterminer la position du centre d'inertie de la plaque :

- à l'aide d'une construction graphique.
- par le calcul



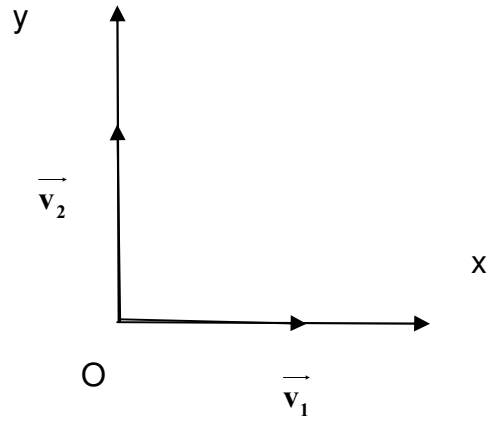
10.11.2 ☐ Exercice 2

Un rocher initialement immobile explose sous l'action d'une charge introduite dans le rocher. Trois fragments sont propulsés, à l'issue de l'explosion :

l'un de masse m1 à la vitesse $\vec{v_1}$

le deuxième de masse m2 à la vitesse $\vec{v_2}$

le troisième de masse m3 à la vitesse $\vec{v_3}$



$\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont perpendiculaires.

Déterminer les caractéristiques de $\overrightarrow{v_3}$.

10.11.3 ☐ Exercice 3.

Une automobile de masse m=1500 kg, roule à la vitesse de 72 $km.h^{-1}$ sur une route horizontale et rectiligne.

Sous l'action d'une force de freinage, opposée au vecteur vitesse et de valeur constante f, la voiture s'arrête en cinq secondes.

Quelle est la valeur de f et la distance parcourue par la voiture au cours du freinage ?

10.11.4 ☐ Exercice 4

Un enfant abandonne une pierre, sans vitesse initiale, à l'orifice d'un puits. Il perçoit l'impact de la pierre sur l'eau, 4,0 s après l'avoir abandonnée. Calculer la distance entre l'orifice du puits et la surface libre de l'eau. g = 9,8 $m.s^{-2}$

La vitesse de propagation du son est V=340 $m.s^{-1}$

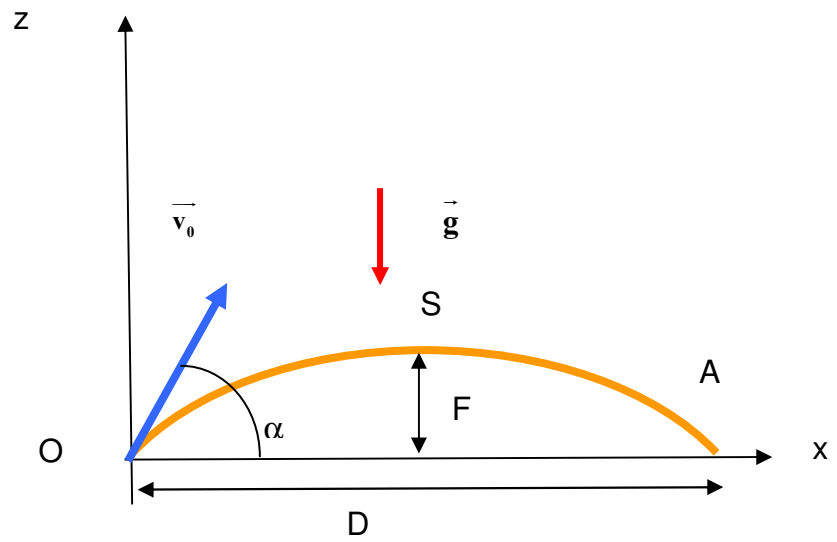
10.11.5 ☐ Exercice 5

Une bille B_1 de masse est abandonnée sans vitesse initiale d'un point A situé à 20 m au dessus et à la verticale d'un point O choisi comme origine des espaces. L'axe z'z est vertical et orienté vers le haut.

A la date t =θ = 0,5 s, une bille B_2 est lancée de O verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de valeur 10 $m.s^{-1}$. g = 10 $m.s^{-2}$

Déterminer où et à quelle date les billes se rencontrent.

10.11.6 ☐ Exercice 6



Une balle est tirée d'un point O avec une vitesse initiale oblique $\vec{v_0}$ contenue dans le plan (Ox,Oz). Déterminer la portée horizontale du tir D ainsi que la flèche F (portée verticale)

Pour une valeur de v_0.donnée, déterminer la valeur de l'angle de tir pour que la portée D soit maximale.

Montrer que pour deux angles de tirs complémentaires, v_o étant donnée, la portée D est la même.

10.11.7 ∗ Exercice 7

Lors d'un feu d'artifice, deux fusées sont tirées verticalement d'un point O et explosent lorsqu'elles ont atteint l'altitude maximale. On néglige les frottements. L'axe vertical est orienté vers le haut

La fusée 1 est lancée à la date t = 0 avec une vitesse $v_{o1} = 20 m.s^{-1}$

La fusée 2 est lancée à la date t = 2 s avec une vitesse vo_2

Trois secondes séparent l'explosion des deux fusées. Calculer v_{02}

10.11.8 ∗ Exercice 8

Un skieur chaussé de ses skis (de masse M = 90 kg) remonte une piste inclinée de $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale, en téléski à la vitesse constante v = 3,5 $m.s^{-1.}$ La force de frottement a la même direction que le vecteur vitesse et le sens inverse ; sa valeur constante vaut f= 30 N.

La direction de la perche fait avec le plan incliné un angle $\beta = 60°$.

Représenter les forces s'exerçant sur le système. Déterminer la valeur T de la force exercée par la perche sur le système.

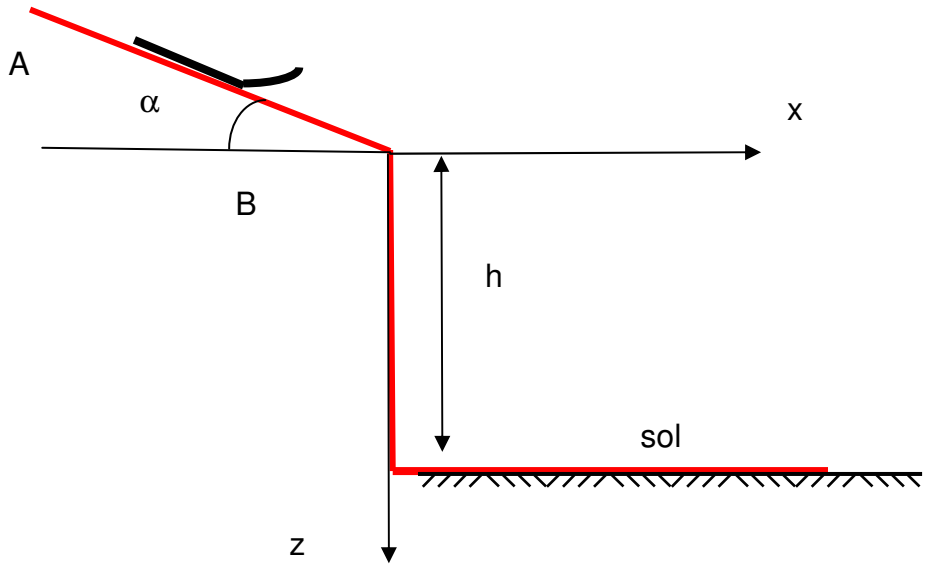
$g = 10\ m.s^{-2}$

10.11.9 ∗ Exercice 9

Une luge dévale la piste inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Arrivée en B à la vitesse v_0, elle tombe en chute libre et s'écrase en M sur le sol.

Dans le repère (Bx,Bz) :

- établir l'équation de la trajectoire du centre d'inertie de la luge,
- Déterminer la position de M
- Déterminer la durée θ du trajet entre B et M
- Déterminer la vitesse de la luge à son arrivée en M



10.11.10 ∗ Exercice 10

Un solide de masse M= 500g arrive avec une vitesse de 2 $m.s^{-1}$ au bas d'un plan incliné faisant un angle $\alpha=30°$ avec l'horizontale. Les frottements équivalent à une force opposée au vecteur vitesse et de valeur constante

f =0, 5 N. $g = 10\ m.s^{-2}$

Etudier complètement le mouvement du solide. Déterminer la durée séparant les deux passages au bas du plan incliné.

10.11.11 ∗ Exercice 11.

Une voiture de masse M_1 tracte une caravane de masse M_2. Sous l'action d'une force motrice de valeur constante F, l'ensemble gravit une côte de 5% et la vitesse croît de v_1 à v_2 sur un parcours de longueur d.

Les forces de frottements qui s'exercent sur la voiture équivalent à une force de valeur constante f_1 et celles qui s'exercent sur la caravane à une force f_2. Ces forces sont opposées au vecteur vitesse de l'ensemble.

Etudier le mouvement de l'ensemble, déterminer son accélération.

Calculer la valeur de la force motrice F ainsi que la tension du timon.

AN : $\sin \alpha = 0,05$ $M_1=1200$ kg $M_2=600$ kg $v_1 = 36$ km.h^{-1} $v_2 = 72$ km.h^{-1}

d=200 m $f_1=1000$N $f_2=500$ N $g = 10$ m.s^{-2}

10.11.12 ∗ Exercice 12

Deux tiges perpendiculaires sont soudées en O. Sur la tige horizontale, un ressort est enfilé. L'une des extrémités du ressort est liée en O, l'autre est liée à un corps de masse m qui peut coulisser, sans frottement sur la tige.

Le ressort, parfaitement élastique, à spires non jointives et de masse négligeable, a pour raideur k

La tige verticale est mise en mouvement de rotation, à la vitesse angulaire ω, à l'aide d'un moteur.

Déterminer la longueur L du ressort en rotation en fonction de k, L, Lo, g et m.

.

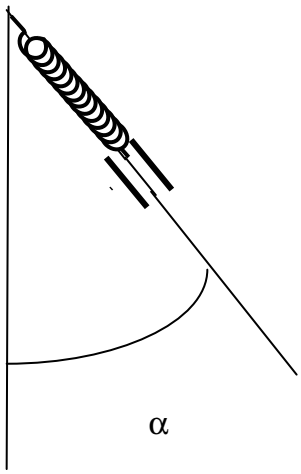
10.11.13 ∗ Exercice 13

Deux tiges sont soudées en O. Sur la tige oblique, un ressort est enfilé. L'une des extrémités du ressort est liée en O, l'autre est liée à un corps de masse m qui peut coulisser, sans frottement sur la tige.

Le ressort, parfaitement élastique, à spires non jointives et de masse négligeable, a pour raideur k

La tige verticale est mise en mouvement de rotation, à la vitesse angulaire ω, à l'aide d'un moteur.

Déterminer la longueur L du ressort en rotation en fonction de α, k, L, Lo, g et m.



10.12CORRIGES DES EXERCICES

Le référentiel choisi est le référentiel terrestre ; il est supposé galiléen

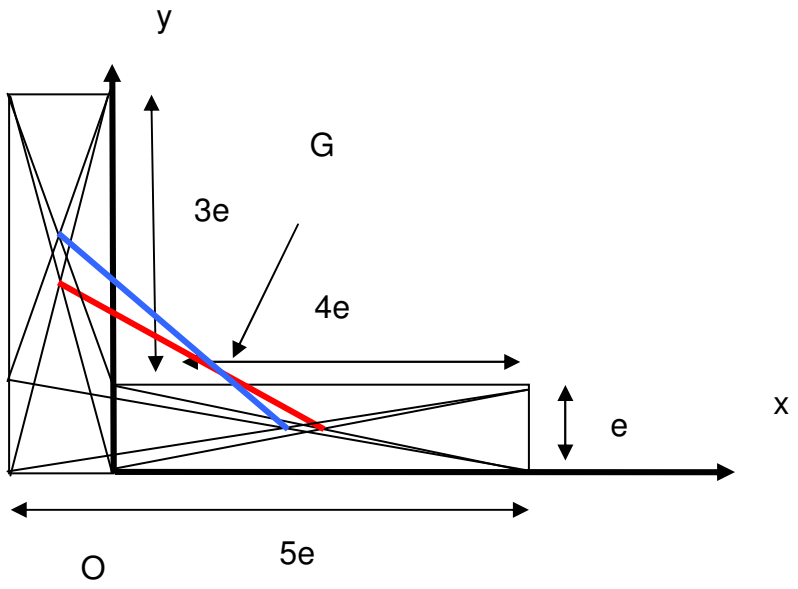
10.12.1 Corrigé de l'exercice 1

Résolution graphique :

le solide est formé de deux rectangles de centres d'inertie G_1 et G_2. G est situé sur G_1G_2.

On peut aussi considérer que le solide est formé de deux rectangles de centres d'inertie G'_1 et G'_2. G est situé sur $G'_1G'_2$.

G est donc situé à l'intersection de G_1G_2 et de $G'_1G'_2$



Résolution par le calcul :

Détermination des coordonnées de G

$(M_1+M_2)\overrightarrow{OG}=M_1\overrightarrow{OG_1}+M_2\overrightarrow{OG_2}$ les masses sont ,dans le cas d'une plaque d'épaisseur constante et homogène, proportionnelles aux aires.

$$(S_1+S_2)\overrightarrow{OG}=S_1\overrightarrow{OG_1}+S_2\overrightarrow{OG_2}$$

$$x_G=\frac{S_1x_{G1}+S_2x_{G2}}{S_1+S_2}=\frac{(4e^2)(-0,5e)+(4e^2)(2e)}{8e^2}=\frac{3}{4}e$$

$$y_G=\frac{S_1y_{G1}+S_2y_{G2}}{S_1+S_2}=\frac{(4e^2)(2e)+(4e^2)(0,5e)}{8e^2}=\frac{5}{4}e$$

Détermination de G sur G1G2

On peut aussi écrire : $S_1\overrightarrow{GG_1}+S_2\overrightarrow{GG_2}=\vec{0}\Rightarrow S_1\overrightarrow{GG_1}+S_2(\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1G_2})=\vec{0}$

soit $\overrightarrow{GG_1}=-\frac{S_2}{S_1+S_2}\overrightarrow{G_1G_2}$ d'où $GG_1=\frac{S_2}{S_1+S_2}G_1G_2$

10.12.2 Corrigé de l'exercice 2

On considère le système formé par le rocher et l'explosif, la masse de ce dernier étant négligeable par rapport à celle du rocher.

Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, le système est pseudo-isolé et immobile et la quantité de mouvement, avant l'explosion est nulle. Cette

quantité de mouvement restera nulle et nous pourrons écrire, juste après l'explosion : $\mathbf{0 = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + m_3\overrightarrow{v_3}}$

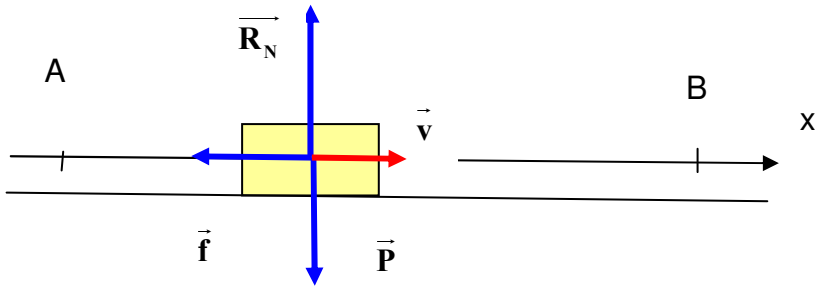
En projetant sur les axes : $\overline{v_{3x}} = -\frac{m_1 v_1}{m_3}$ et $\overline{v_{3y}} = -\frac{m_2 v_2}{m_3}$

10.12.3 Corrigé de l'exercice 3

Le système (voiture) est soumis à son poids, à la réaction normale du sol et à la force de freinage.

Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, la deuxième loi de Newton nous permet d'écrire :

$\overrightarrow{R_N} + \vec{f} + \vec{P} = M\overrightarrow{a_G} = M\vec{a}$



En projetant sur l'axe x'x la relation vectorielle : 0 – f +0 = Ma

f et M étant constants, on en déduit que a = constante.

Les vecteurs vitesse et accélération sont de sens contraires, il y a décélération.

Le mouvement est rectiligne uniformément décéléré.

v= at +K si on choisit l'origine des temps au passage de G en A

$v=at+v_A$ L'arrêt est obtenu au bout de θ = 5s

Si A et B sont respectivement les positions du centre d'inertie de la voiture au début et à la fin du freinage :

$\mathbf{v_B^2 - v_A^2 = 2a(x_B - x_A) = 2a\,AB}$ $\mathbf{v_B^2 - v_A^2 = 2a(x_B - x_A) = 2a\,AB}$

10.12.4 Corrigé de l'exercice 4

les 4 secondes représentent la durée de la chute plus la durée de propagation du son

$$h=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}g\left(4-\frac{h}{340}\right)^2 \Rightarrow \frac{2h}{g}=16+\frac{h^2}{340^2}-\frac{8h}{340}$$

On obtient deux racines 26241 et 70,4 m

Or la durée de la chute est inférieure à 4 s ; la hauteur de chute est donc inférieure à $\frac{1}{2}g4^2=78,4\,m$. Donc la profondeur du puits est de 70,4 m

10.12.5 Corrigé de l'exercice 5

Bille 1 $a_1=-g=-10$ $v_1=-10t+C=-10t$ (à t=0, v=0) $z_1=-5t^2+C'=-5t^2+20$

Bille 2 $a_2=-10$ $v_2=-10t+K$ à t= 0,5, $v_2=10$ $10=-10\times0,5+K$ K=15

$v_2=-10t+15$

$z_2=-5t^2+15t+K'$ à t=0,5 s, $z_2=0$ $0=-5\times0,52+15\times0,5+K'$ K'=-6,25

$z_2=-5t^2+15t-6,25$

Rencontre si $z_1=z_2$ $-5t^2+20==-5t^2+15t-6,25$ t=1,75 s cette valeur convient car elle est ≥0,5 s

$z=-5\times1.75^2+20=4.69$ m

La rencontre s'effectue à t=1,75 s à 4,69 m du sol

10.12.6 Corrigé de l'exercice 6

D, portée du tir, est égale à OA

Les coordonnées de A vérifient l'équation de la trajectoire

$$z=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+(\tan\alpha)x$$

$$z=0\Rightarrow 0=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+(\tan\alpha)x=\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x+\tan\alpha\right)x$$

$$x_A\neq 0\Rightarrow -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_A+\tan\alpha=0\Rightarrow x_A=\tan\alpha\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}$$

$$D=\tan\alpha\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$$

pour v_0 donnée la portée est maximale si $\alpha=\frac{\pi}{4}$ sin2α est alors =1

Pour deux angles de tir complémentaires α_1 et α_2

$$\alpha_1+\alpha_2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha_1=\frac{\pi}{2}-\alpha_2\Rightarrow 2\alpha_1=\pi-2\alpha_2\Rightarrow\sin 2\alpha_1=\sin 2\alpha_2$$

la portée est la même.

Flèche.

Le mobile passe en S, sommet de la trajectoire, à la date θ avec un vecteur vitesse horizontal.

Ecrivons donc qu'en S, la composante verticale de la vitesse est nulle.

$v_{zS}=0$ $\quad -g\theta + vo\sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \theta = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

On calcule z à la date θ

$$z_{\text{à}t=\theta} = -\frac{1}{2}g\theta^2 + (v_0\sin\alpha)\theta = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + (v_0\sin\alpha)\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

$$F = \frac{{v_0}^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

10.12.7 Corrigé de l'exercice 7

fusée 1 :

a = - g $\quad v_1 = -gt + vo_1$ $\quad$ A la date θ_1 la fusée 1 a atteint l'altitude maximale ($v_1=0$) et explose $\theta_1 = \dfrac{v_{01}}{g}$

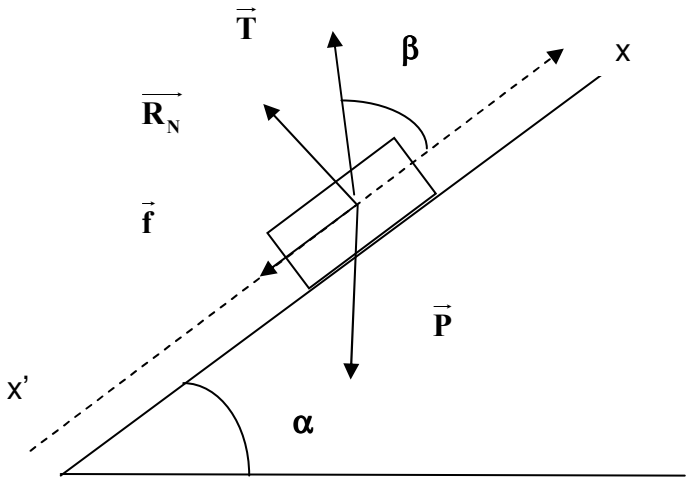
fusée 2 :

a = - g $\quad v_2 = -g\,(t-2) + vo_2$ $\quad$ A la date θ_2 la fusée 2 a atteint l'altitude maximale ($v_2=0$) et explose $\theta_2 = \dfrac{v_{02}}{g} + 2$

Calcul de v_{o2}

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{v_{02}}{g} + 2 - \frac{v_{01}}{g} \qquad 3 = \frac{v_{02}}{10} + 2 - \frac{20}{10} \Rightarrow v_{o2} = 10\,\text{m.s}^{-1}$$

10.12.8 Corrigé de l'exercice 8



Système le skieur $\vec{P}+\vec{T}+\vec{R_N}+\vec{f}=m\vec{a}$

Projection sur x'x $\quad -mg\sin\alpha+T\cos\beta+0-f=0$

$$T=\frac{mg\sin\alpha+f}{\cos\beta} \qquad T=\frac{90\times10\times\sin 20+30}{\cos 60}=676N$$

10.12.9 Corrigé de l'exercice 9

Système : la luge la luge n'est soumise qu'à son poids.

d'où $\vec{a}=\vec{g}$

$\ddot{x}=0\Rightarrow\dot{x}=cte=v_0\cos\alpha\Rightarrow x=v_0\cos\alpha\, t$ car à t=0 $v_x=v_{ox}=v_o\cos\alpha$ et x=0

$\ddot{z}=g\Rightarrow\dot{z}=gt+cte=gt+v_0\sin\alpha\Rightarrow z=\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha\, t$ car à t=0

$v_y=v_{oy}=v_o\sin\alpha$ et y=0

Equation de la trajectoire : $z=\frac{g}{2v_0{}^2\cos^2\alpha}x^2+\tan\alpha\, x$

Coordonnées de M ; ils vérifient l'équation de la trajectoire

$z_M=h$ x_M est la racine positive de l'équation du second degré

$$h=\frac{g}{2v_0{}^2\cos^2\alpha}x^2+\tan\alpha\, x$$

Durée θ $\quad \theta=\frac{x_M}{v_0\cos\alpha}$

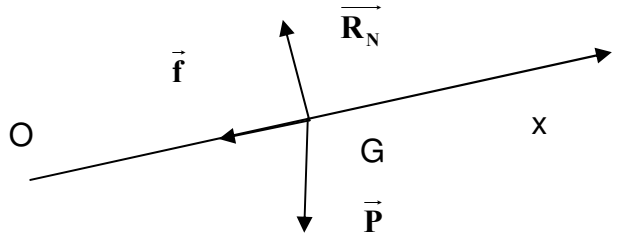
Vitesse à l'arrivée en M $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (g\theta + v_0 \sin\alpha)^2}$

10.12.10 Corrigé de l'exercice 10

Référentiel terrestre supposé galiléen Système : le solide

Le solide est soumis à son poids, à la réaction normale et à la force de frottement.

Etude de la montée



A t= 0, le solide se trouve au bas de la montée, en O origine des espaces et sa vitesse vaut 2 m.s^{-1}

$\vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \vec{f} = M\overrightarrow{a_G} = M\vec{a}$

On projette sur x'x : -Mgsinα-f= Ma $a = -\dfrac{Mg\sin\alpha + f}{M}$

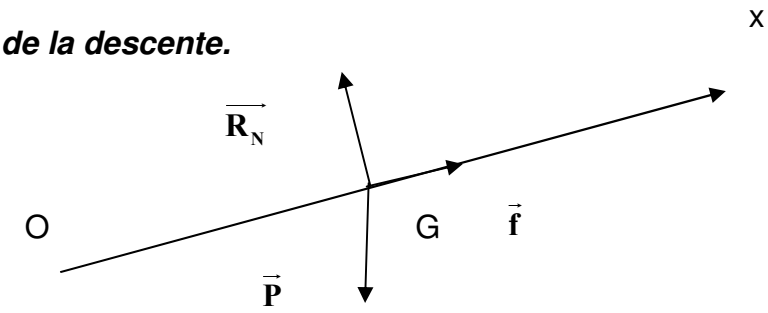
$a = -\dfrac{0,5 \times 10 \sin 30 + 0,5}{0,5} = -6\ m.s^{-2}$ Le mouvement de G est rectiligne uniformément décéléré

On intègre v=-6t +2 x=-3t^2+2t (à t=0, v=2 et x=0)

à la date t=1/3s, la vitesse s'annule, le corps a atteint l'altitude maximale et a parcouru sur le plan

x= -3×(0.333)^2+2×0,333 = 0,33 m

Etude de la descente.



On conserve les origines des espaces et des temps précédentes ; la force de frottement a changé de sens

$\vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \vec{f} = M\overrightarrow{a_G} = M\vec{a}$

On projette sur x'x : -Mgsinα+f= Ma $a = \frac{-Mg\sin\alpha + f}{M} = -4\ m.s^{-2}$

On intègre : v=-4t +K (à t=0.33s, v=0) 0=-4×0,33 +K K= 1.33

v=-4t+1,33

On intègre : $x= -2t^2+1,33t +K'$ à t= 3, x= 0,33 $0,33=-2\times0,33^2+1,33\times0,33 +K'$ K'=0,109

donc $x= -2t^2+1,33t +0,109$

Quand le mobile repasse en O, x= 0 $-2t^2+1,33t+0,109= 0$ t= 0,738 s

Cette valeur convient car ≥ 0,33 s

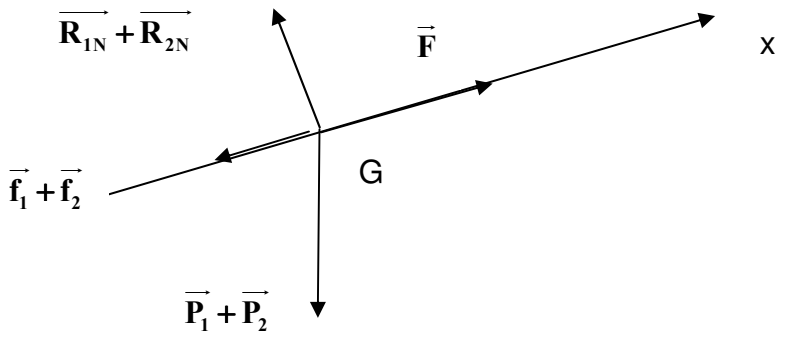
La vitesse du mobile est alors égale à -4×0,738+1.33 = - 1,625 ms-1

10.12.11 Corrigé de l'exercice 11

Référentiel terrestre supposé galiléen

Système l'ensemble (voiture+caravane)

On ramène en G du système toutes les forces extérieures exercées sur le système.



$\vec{F} + \vec{P_1} + \vec{P_2} + \overrightarrow{R_{1N}} + \overrightarrow{R_{2N}} + \vec{f_1} + \vec{f_2} = (M_1 + M_2)\overrightarrow{a_G}$

On projette la relation sur x'x :

$F - M_1 g\sin\alpha - M_2 g\sin\alpha + 0 + 0 - f_1 - f_2 = (M_1 + M_2)a$

a est constante. Le mouvement est donc uniformément varié.

On peut appliquer la relation $v_2^2 - v_0^2 = 2a(x_2 - x_0)$ $v_1^2 - v_0^2 = 2a(x_1 - x_0)$

En soustrayant membre à membre, on obtient $v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1) = 2ad$

d'où $a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$ $a = \frac{20^2 - 10^2}{2\times200} = 0,75\ m.s^{-2}$

Valeur F de la force motrice :

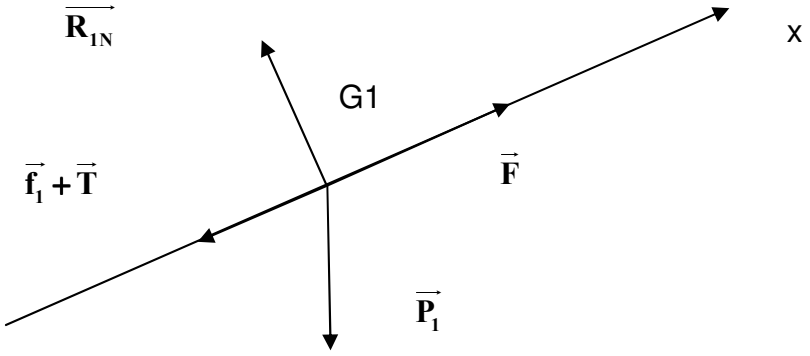
$$F = M_1 g \sin\alpha + M_2 g \sin\alpha + f_1 + f_2 + (M_1 + M_2)a$$

$$F = 1800 \times 10 \times 0,05 - 1000 - 500 + 1800 \times 0,75 \qquad F = 3750\,N$$

Valeur T de la tension du timon

On considère maintenant le système formé par la voiture seule.

On ramène les forces en G_1



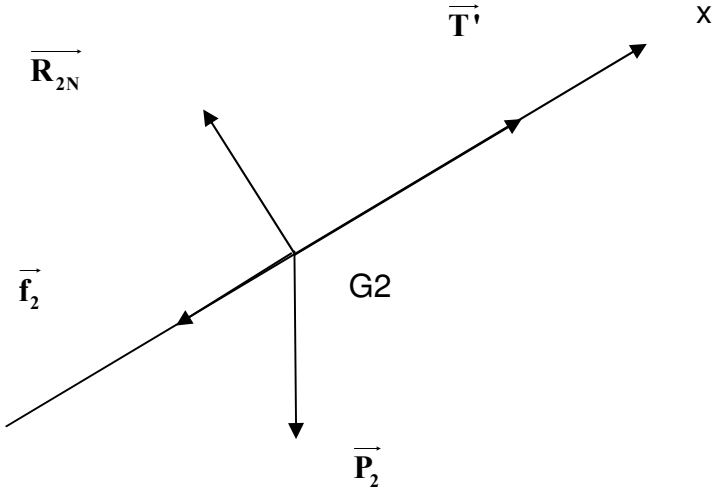
$\vec{F} + \vec{P_1} + \overrightarrow{R_{1N}} + \vec{f_1} + \vec{T} = M_1 \overrightarrow{a_{G1}}$ en projetant sur x's

$$F - M_1 g \sin\alpha + 0 - f_1 - T = M_1 a$$

d'où $T = -M_1 a + F - M_1 g \sin\alpha - f_1$

$$T = -1200 \times 0,75 + 3750 - 1200 \times 10 \times 0,05 - 1000 \qquad T = 1250\,N$$

On peut aussi prendre comme système la caravane



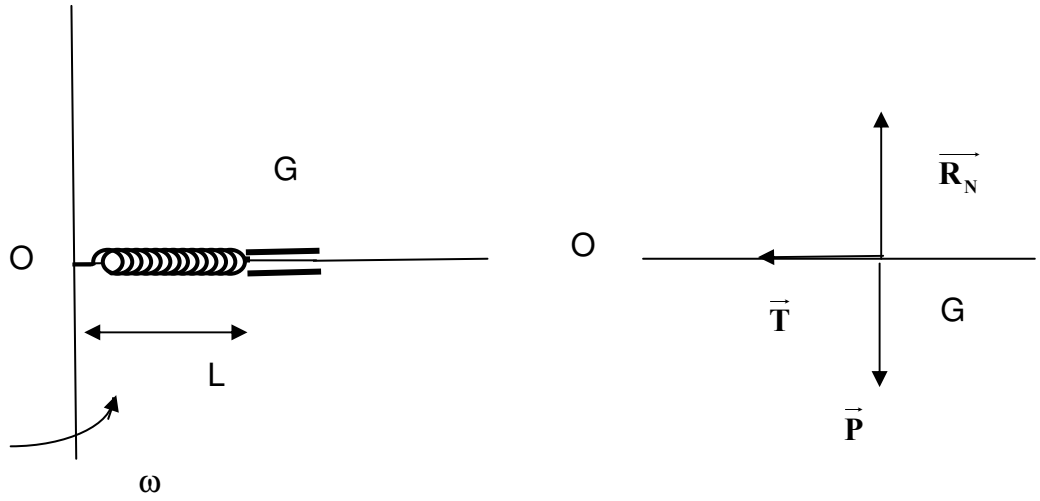
Sur la caravane la voiture exerce la force $\overrightarrow{T'} = -\vec{T}$

$$\vec{P_2} + \vec{R_{2N}} + \vec{T'} + \vec{f_2} = M_2 \vec{a_{G2}}$$

$$-M_2 g \sin\alpha + 0 + T' - f_2 = M_2 a \qquad T' = +f_2 + M_2 a + M_2 g \sin\alpha$$

$$T' = +500 + 600 \times 0,75 + 600 \times 10 \times 0,05 \qquad T' = 1250\,N$$

10.12.12 Corrigé de l'exercice 12



Le système (S), soumis à son poids, à la réaction normale de la tige et à la tension exercée par le ressort, est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R_N} = m\vec{a} = m\vec{a_t} + m\vec{a_n} = m\vec{a_n}$$

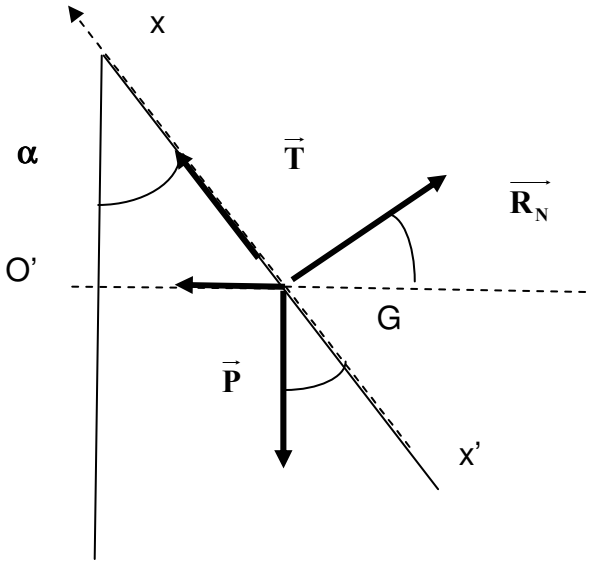
En projetant sur l'axe horizontal:

0+T+0=maN $\qquad k(L - L_0) = m\omega^2 L$

$$L = \frac{kL_0}{k - m\omega^2}$$

10.12.13 Corrigé de l'exercice 13

Système : le corps



$\vec{T}+\vec{P}+\overrightarrow{R_N}=m\vec{a}=m\overrightarrow{a_T}+m\vec{a}_N$ $a_N=0$ car mouvement uniforme

Projection sur x'x $T-mg\cos\alpha+0=0+ma_N\sin\alpha$

G décrit, à vitesse constante, un cercle de centre O' et de rayon R=Lsinα

$k(L-Lo)-mg\cos\alpha=+mR\omega^2\sin\alpha$

$k(L-Lo)-mg\cos\alpha=+mL\sin\alpha\,\omega^2\sin\alpha$

$$L=\frac{kLo+mg\cos\alpha}{k-m\omega^2\sin^2\alpha}$$

CHAPITRE 11 DYNAMIQUE DE ROTATION

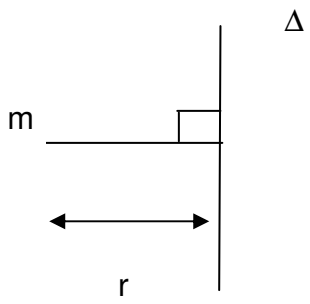
11.1 MOMENT D' INERTIE D' UN SOLIDE PAR RAPPORT A UN AXE.

La masse d'un corps est un facteur d'inertie ; plus elle est importante plus il est difficile de mettre le corps en mouvement. Dans le cas du mouvement de rotation autour d'un axe, la masse intervient mais également sa répartition par rapport à l'axe. A masse égale, plus les points matériels constituant le solide seront écartés de l'axe plus il sera difficile de mettre le solide en mouvement de rotation. Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe, dépendant de la constitution et de la géométrie et par conséquent de la répartition de la masse autour de l'axe, est un facteur qui s'oppose d'autant plus à la mise en rotation autour de l'axe qu'il est plus important.

11.1.1 Cas d'un point matériel.

Si un point matériel de masse m décrit un cercle de rayon r autour d'un axe Δ, son moment d'inertie par rapport à cet axe est défini par la relation suivante :

$\mathbf{J_\Delta = mr^2}$ m en kg r en m J en kg.m^2



m en kg
r en m
J_Δ en kg.m^2

Point matériel $J_\Delta = m.r^2$

11.1.2 Cas d'un solide

Soit un solide tournant autour d'un axe fixe Δ. Il est constitué d'un ensemble de n points matériels de masses m_i décrivant autour de Δ des cercles de rayons ri.

Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ est : $\mathbf{J_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2}$

Si le solide a une forme complexe, l'expression de son moment d'inertie sera compliquée.

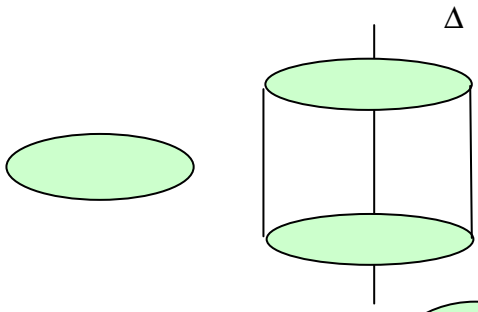
☐ Exercice 1

11.1.3 Expression du moment d'inertie dans quelques cas simples

Il s'agit de solides présentant une symétrie par rapport à Δ

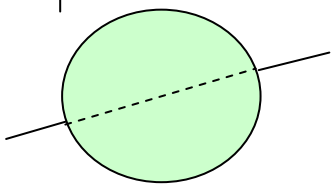
Cylindre plein ou disque

$$J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2$$

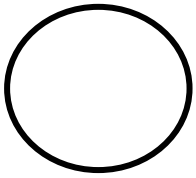


Sphère pleine (boule) de rayon R

$$J_\Delta = \frac{2}{5}MR^2$$



Circonférence de masse M et de rayon R $J_\Delta = MR^2$



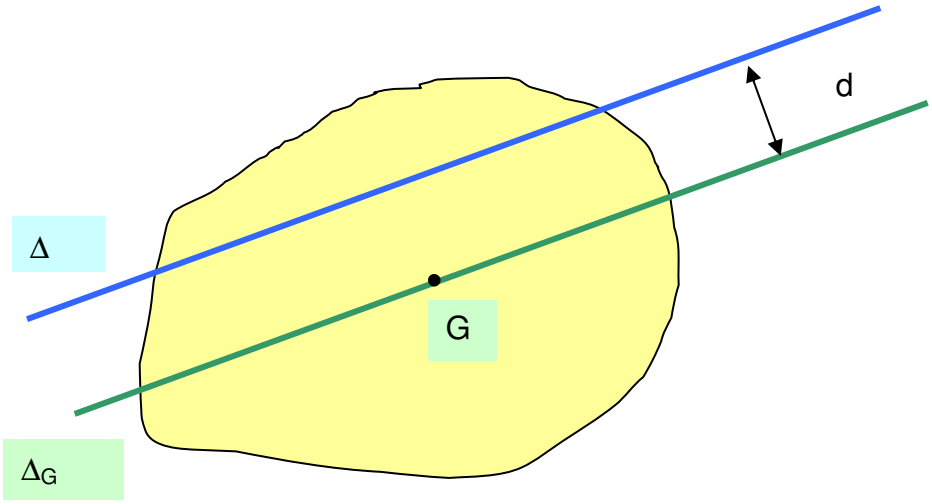
M en kg R en m J_Δ en kg.m^2

☐ Exercice 2

11.1.4 Théorème de Huyghens.

On démontre que :

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ est égal à la somme du moment d'inertie de ce solide par rapport à un axe ΔG parallèle à Δ et passant par le centre d'inertie G du solide et du produit de la masse du solide par le carré de la distance d entre les axes.



$\mathbf{J_\Delta = J_{\Delta G} + Md^2}$

☐ Exercice 3

11.2 VECTEUR ROTATION

11.2.1 Définition.

Lorsqu'un solide tourne à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour de l'axe Δ, le vecteur rotation est le vecteur $\vec{\Omega}$, porté par l'axe de rotation Δ tel que :

$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{k}$ $\vec{k}$ est un vecteur unitaire porté par Δ,

11.2.2 Vecteur vitesse d'un point du solide

De la relation précédente et de la relation $v = R\dot{\theta}$, il résulte que le vecteur vitesse d'un point M du solide, tournant autour de O situé sur l'axe de rotation Δ, a pour expression : $\vec{v} = \overrightarrow{MO} \wedge \vec{\Omega} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

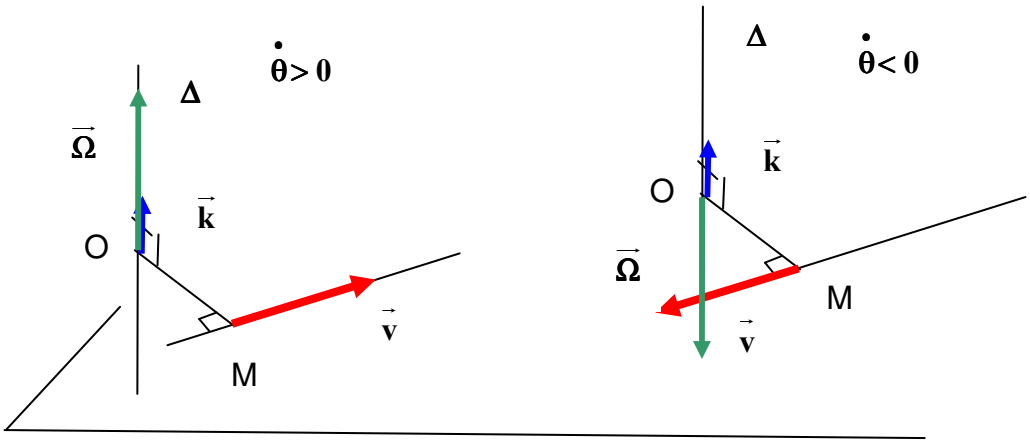
Démonstration :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = R\cos\theta\vec{i} + R\sin\theta\vec{j}$

$\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -R\sin\theta\dot{\theta}\vec{i} + R\cos\theta\dot{\theta}\vec{j}$

$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \dot{\theta}\vec{k} \wedge (R\cos\theta\vec{i} + R\sin\theta\vec{j}) = R\cos\theta\,\dot{\theta}\vec{j} - R\sin\theta\,\dot{\theta}\vec{i}$

d'où $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$



11.3 MOMENT CINETIQUE

11.3.1 Cas d'un point matériel.

Un point matériel de masse m animé de la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel possède une quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$.

Si un point matériel de masse m décrit un cercle de rayon r autour d'un axe Δ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, il est intéressant de définir une nouvelle grandeur faisant intervenir le moment d'inertie par rapport à Δ et la vitesse angulaire.

Cette nouvelle grandeur, analogue de la quantité de mouvement pour la rotation, est le moment cinétique par rapport à Δ du point matériel : $\sigma_\Delta = J_\Delta \dot{\theta}$

m en kg r en m $\dot{\theta}$ en rad.s^{-1} J en kg.m^2 σ_Δ en kg.m^2.rad.s^{-1}

11.3.2 Cas d'un solide

Le solide tournant autour d'un axe fixe Δ est constitué d'un ensemble de n points matériels de masses mi décrivant autour de Δ des cercles de rayons r_i.

$\sigma_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \dot{\theta}_i$ or tous les points ont même vitesse angulaire $\dot{\theta}$

$$\sigma_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \dot{\theta}_i = \dot{\theta} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_\Delta \dot{\theta}$$

$$\sigma_\Delta = J_\Delta \dot{\theta}$$

☐ Exercice 4

11.4 RELATION DE LA DYNAMIQUE DE ROTATION

11.4.1 Cas d'un point matériel

Sous l'action de forces admettant pour résultante F, un point matériel de masse m décrit un cercle de rayon r dans un référentiel supposé galiléen.

Le mouvement est régi par la deuxième loi de Newton :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\overrightarrow{a_T} + m\overrightarrow{a_n}$$

Cette résultante est contenue dans le plan du cercle et perpendiculaire à l'axe de rotation Δ

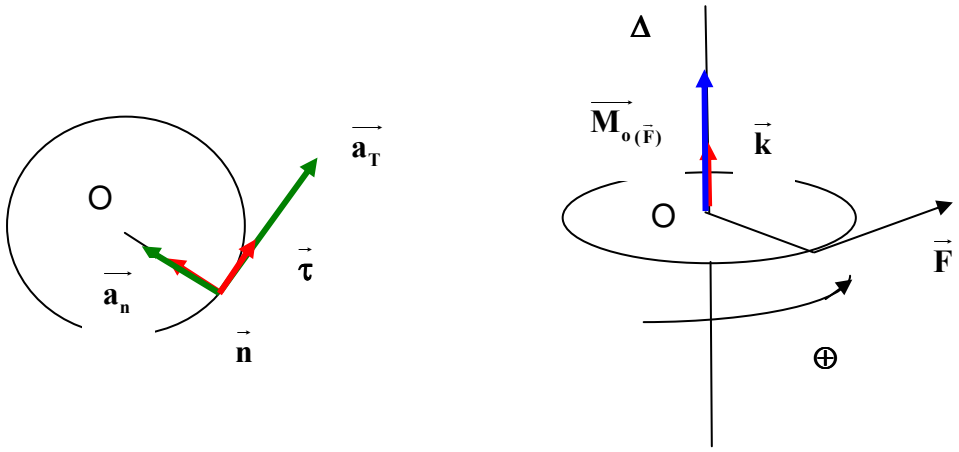
Le moment de $\vec{F}$ par rapport à O c'est-à-dire le moment résultant (grandeur vectorielle) est :

$$\overrightarrow{M_{o(\vec{F})}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge (m\overrightarrow{a_T} + m\overrightarrow{a_n})$$

$$\overrightarrow{M_{o(\vec{F})}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{a_n} = -r\vec{N} \wedge m\overrightarrow{a_T} + \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M_{o(\vec{F})}} = -r\vec{n} \wedge mr\ddot{\theta}\vec{\tau} = mr^2\ddot{\theta}\vec{k}$$

$\vec{k}$ est un vecteur unitaire porté par l'axe Δ, orienté comme l'indique la figure, compte tenu du sens positif pour la rotation.



Le moment de $\vec{F}$ par rapport à Δ c'est-à-dire le moment résultant (grandeur scalaire)

$$M_{\Delta(\vec{F})} = \vec{k}.\overrightarrow{M_O}(\vec{F})$$

Le vecteur unitaire porté par Δ est donc colinéaire à $\overrightarrow{M_{o(\vec{F})}}$ d'où

$$M_{\Delta(\vec{F})} = \vec{k}.mr^2\ddot{\theta}\vec{k} = mr^2\ddot{\theta}$$

$$J_\Delta = mr^2 \text{ et } mr^2\ddot{\theta} = \frac{d\sigma}{dt}$$

$$M_{\Delta(\vec{F})} = J_\Delta\ddot{\theta} = \frac{d\sigma}{dt}$$

11.4.2 Cas d'un solide.

On applique à chaque point matériel la relation précédente

Pour le point matériel 1 $M_{1\Delta} = m_1r_1^2\ddot{\theta}$

Pour le point matériel 2 $M_{2\Delta} = m_2r_2^2\ddot{\theta}$

En faisant la somme membre à membre pour les n points du solide on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i\Delta} = \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2\ddot{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\sigma_i}{dt}$$

Les forces appliquées aux points matériels constituant le solide se répartissent en forces intérieures au solide et en forces extérieures. Les forces intérieures s'exerçant entre deux points matériels ont une somme nulle (Troisième loi de Newton). Il en résulte que la somme des moments des forces intérieures au solide est nulle.

La somme des moments de toutes les forces appliquées à tous les points matériels constituant le solide est donc égale à la somme des moments des forces extérieures appliquées au solide.

$$M_\Delta(Fext) = J_\Delta\ddot{\theta} = \frac{d\sigma}{dt}$$

Dans un référentiel galiléen, à chaque instant, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un solide par rapport à son axe de rotation Δ est égale à la somme des moments par rapport à l'axe des forces extérieures appliquées au solide.

Cet énoncé peut être généralisé à un système matériel quelconque.

Relation vectorielle :

Dans le cas où le solide tourne autour de Δ et sous réserve que :

- Δ est un axe de symétrie

- Δ passe par O

- $\vec{k}$ est un vecteur unitaire porté par Δ

$$\sum \vec{M}_{o(Fext)} = J_\Delta \ddot{\theta}\vec{k} = J_\Delta \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

En effet dans ce cas, le moment par rapport à Δ et le moment par rapport à O $\vec{M}_O(\vec{F})$, colinéaire à (Δ) ont même valeur.

Cette relation pourra être appliquée dans le cas où un solide tourne par rapport à son axe de symétrie

☐ Exercice 5

11.5 APPLICATION AU FREINAGE D' UN ROTOR SOUS L' ACTION D'UN COUPLE DE MOMENT CONSTANT

Un rotor de moment d'inertie JΔ par rapport à son axe de rotation est lancé à la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0 > 0$

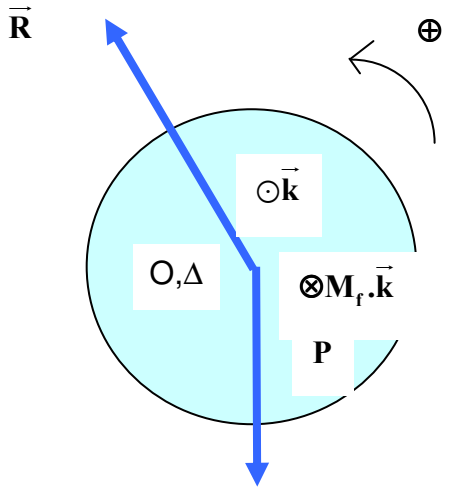
A la date t=0, on lui applique un couple de freinage de moment constant Mf . Il s'arrête à la date τ. Déterminer τ.

Système : le rotor

Forces extérieures appliquées au système : son poids, la réaction de l'axe et les forces de freinage

Appliquons la relation de la dynamique de rotation.

$$\sum \vec{M}_{o(Fext)} = J_\Delta \ddot{\theta}\vec{k}$$



$$\overrightarrow{OO} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} + M_f . \vec{k} = J_\Delta \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$M_f < 0$$

$$\vec{0} \wedge \vec{P} + \vec{0} \wedge \vec{R} - |M_f| \vec{k} = J_\Delta \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$-|M_f| \vec{k} = J_\Delta \ddot{\theta} \vec{k} \qquad \Rightarrow -|M_f| = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{|M_f|}{J_\Delta}$$

L'accélération angulaire est constante et de signe contraire à la vitesse angulaire : le mouvement est circulaire uniformément décéléré

Par intégration par rapport au temps on obtient :

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta} t + K \text{ or à } t = 0, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \text{ d'où } K = \dot{\theta}_0$$

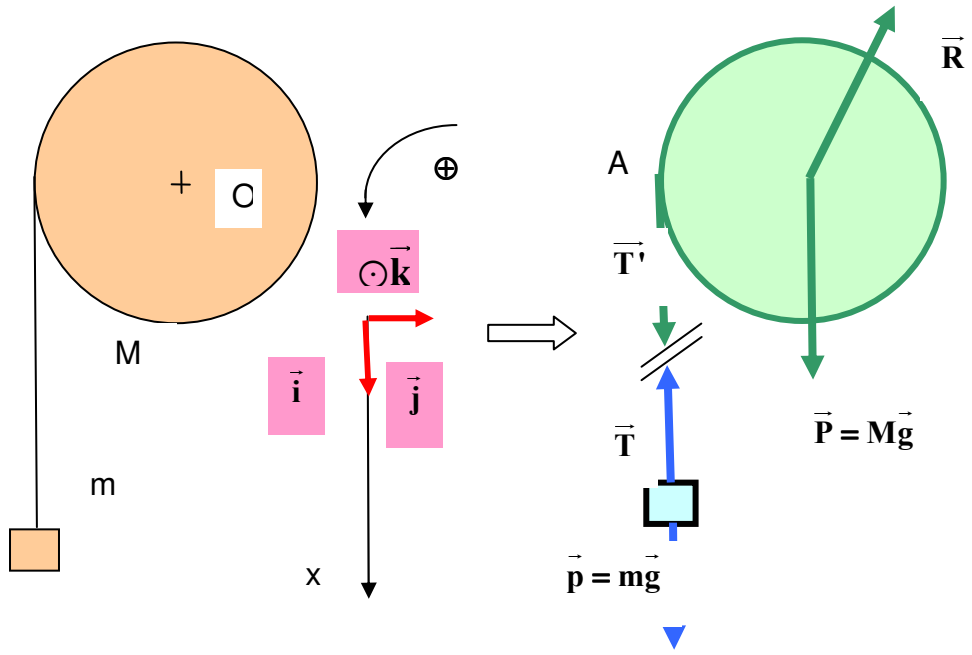
$$\dot{\theta} = \ddot{\theta} t + \dot{\theta}_0 \text{ à } t = \tau, \dot{\theta} = 0 \text{ d'où } 0 = \ddot{\theta} \tau + \dot{\theta}_0 \Rightarrow \tau = -\frac{\dot{\theta}_0}{\ddot{\theta}}$$

$$\tau = -\frac{\dot{\theta}_0}{|M_f|} J_\Delta$$

11.6 ETUDE D' UN SYSTEME DEFORMABLE

On considère le système représenté. Ce système, maintenu en équilibre, est abandonné sans vitesse initiale. Le corps de masse m tombe entraînant la rotation du cylindre de masse M et de rayon R.

On étudie séparément les deux parties de l'ensemble



Système 1 :solide de masse m

Ce corps, soumis à son poids et à la tension du fil, est animé d'un mouvement de translation régi par la deuxième loi de Newton.

$\vec{p} + \vec{T} = m\vec{a}$ en projetant sur x'x : $mg - T = ma$

système 2 : cylindre en rotation

Ce système est soumis à son poids, à la réaction de l'axe et à une force exercée par le fil.

$$\overrightarrow{OO} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{T}' = J_\Delta \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$\vec{0} + \vec{0} - \vec{j}R \wedge T'\vec{i} = J_\Delta \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$T'R\vec{k} = J_\Delta \ddot{\theta} \vec{k} \Rightarrow T'R = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow T' = \frac{J_\Delta \ddot{\theta}}{R}$$

Condition de non glissement du fil sur la poulie

Si cette condition est réalisée, la vitesse linéaire d'un point P situé à la périphérie de la poulie est égale à la vitesse d'un point du fil :

$v_P = v$ $\qquad R\dot{\theta} = v$

par dérivation par rapport au temps on obtient $R\ddot{\theta} = a$

Le fil est inextensible et de masse négligeable : T = T'

Résultats :

en utilisant toutes les relations précédentes

$$mg - T = ma \qquad mg - \frac{J_\Delta \ddot{\theta}}{R} = ma \qquad mg - \frac{J_\Delta a}{R^2} = ma$$

$$a = \frac{mg}{m + \frac{J_\Delta}{R^2}}$$ a est constante

Le mouvement de m est rectiligne uniformément accéléré ; celui du cylindre est circulaire uniformément accéléré .

11.7 EXERCICES

11.7.1 ☐ Exercice 1

Démontrer que le moment d'inertie d'une circonférence de masse M et de rayon R par rapport à l'axe perpendiculaire à son plan et passant par son centre est égal à MR^2.

11.7.2 ☐ Exercice 2

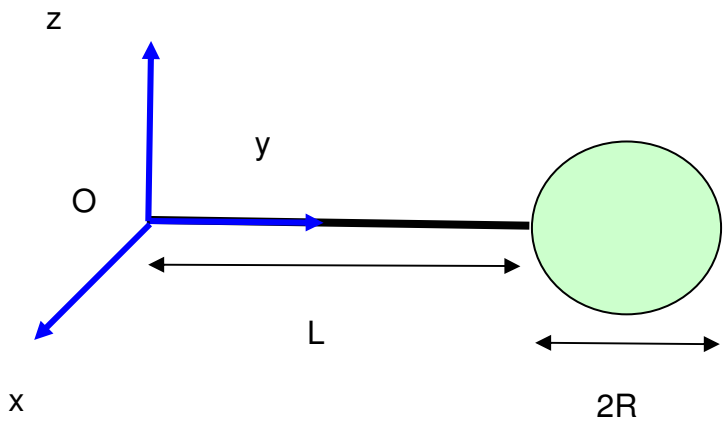
Donner l'expression du moment d'inertie, par rapport à l'axe de révolution, d'un cylindre creux de rayon intérieur r, de rayon extérieur R, de hauteur h, constitué d'un matériau de masse volumique ρ

11.7.3 ☐ Exercice 3

Etablir les expressions du moment d'inertie du solide par rapport aux trois axes Ox, Oy et Oz

La tige de masse m et de longueur L est soudée à une boule de masse M et de rayon R.

Le moment d'inertie de la tige par rapport à un axe qui lui est perpendiculaire et qui passe par son milieu est égal à $\frac{mL^2}{12}$

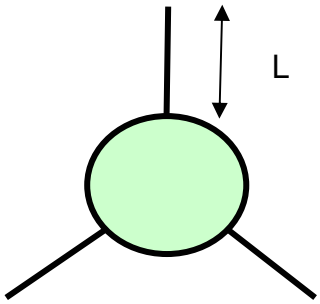


11.7.4 ☐ Exercice 4

Le rotor d'une éolienne est schématisé par un cylindre, de moment d'inertie J par rapport à son axe, de masse M et de rayon R, sur lequel sont soudées trois tiges de masse m et de longueur L chacune.

Le moment d'inertie de la tige de masse m et de longueur L par rapport à un axe qui lui est perpendiculaire et qui passe par son milieu est égal à $\frac{mL^2}{12}$

Donner l'expression du moment cinétique du rotor, lorsqu'il tourne à la vitesse angulaire ω



11.7.5 ☐ Exercice 5

Une tige horizontale, de masse M et de longueur L, est mobile autour de l'axe vertical passant par son centre. Elle porte à chacune de ses extrémités un corps ponctuel de masse m. L'ensemble, initialement au repos, est soumis à t=0 à un couple moteur de moment constant C.

Le moment d'inertie de la tige par rapport à un axe qui lui est perpendiculaire et qui passe par son milieu est égal à $\frac{mL^2}{12}$

Exprimer sa vitesse angulaire en fonction du temps.

11.7.6 ∗ Exercice 6

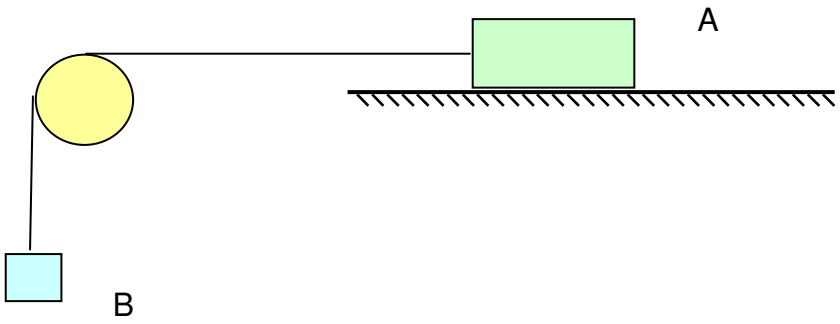
Etablir les expressions du moment d'inertie d'une tige de masse M et de longueur L :

- par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par son centre.
- par rapport à un axe parallèle au précédent et passant par l'une des extrémités de la tige.

11.7.7 ∗ Exercice 7

On considère l'ensemble représenté, constitué de deux corps A et B de masses respectives M et m reliés par un fil inextensible et de masse négligeable passant sur la gorge d'une poulie assimilable à un disque de masse m' et de rayon r. Les frottements s'exerçant sur la poulie équivalent à un couple dont le moment par rapport à l'axe est constant et a pour valeur C. Ceux qui s'exercent sur A équivalent à une force opposée à la vitesse et de valeur constante f.

Le système, maintenu en équilibre, est abandonné. Déterminer l'accélération de B.



11.8 CORRIGES DES EXERCICES

11.8.1 Corrigé de l'exercice 1

La circonférence est formée d'un ensemble de n points matériels, tous situés à la même distance R de l'axe Δ.

$$J_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = R^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = R^2 M = MR^2$$

11.8.2 Corrigé de l'exercice 2

On considère que le solide est un cylindre de rayon R qui a été évidé.

$$I_\Delta = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2 \quad I_\Delta = \frac{1}{2}\rho\pi R^2 h R^2 - \frac{1}{2}\rho\pi r^2 h m r^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2}\rho\pi h(R^4 - r^4)$$

11.8.3 Corrigé de l'exercice 3

On applique le théorème de Huyghens pour déterminer le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe. On fait de même pour la sphère.

On obtient le moment d'inertie du solide par rapport à un axe en faisant la somme des moments d'inertie de la tige et de la sphère, par rapport à ce même axe

$$I_{Ox} = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M(L+R)^2$$

$$I_{Oz} = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M(L+R)^2$$

$$I_{Oy} = \frac{2}{5}MR^2$$

11.8.4 Corrigé de l'exercice 4

On applique le théorème de Huyghens aux pales

moment d'inertie d'une pale par rapport à l'axe de rotation du rotor :

$$\frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2} + R\right)^2$$

moment d'inertie des 3 pales par rapport à l'axe de rotation du rotor :

$$3\left(\frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2} + R\right)^2\right)$$

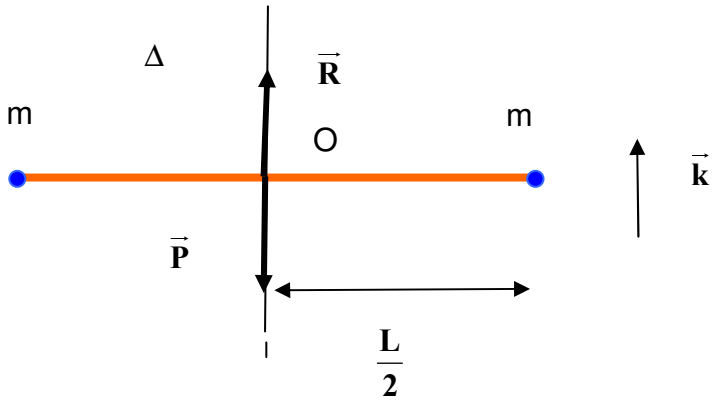
Moment d'inertie du rotor par rapport à l'axe de rotation :

$$3\left(\frac{mL^2}{12}+m\left(\frac{L}{2}+R\right)^2\right)+\frac{1}{2}MR^2$$

Moment cinétique du rotor par rapport à l'axe de rotation

$$\left[3\left(\frac{mL^2}{12}+m\left(\frac{L}{2}+R\right)^2\right)+\frac{1}{2}MR^2\right]\omega$$

11.8.5 Corrigé de l'exercice 5



$$J_\Delta = M\frac{L^2}{12}+2m\left(\frac{L}{2}\right)^2=(M+6m)\frac{L^2}{12}$$

Système : la tige

Forces appliquées : $\vec{P}$ poids de la tige et des surcharges, $\vec{R}$ Réaction de l'axe et $\vec{C}$ couple moteur.

Application au système de la relation de la dynamique :

$$\vec{M}_0\vec{P}+\vec{M}_0\vec{R}+\vec{M}couple=J_\Delta\ddot{\theta}\vec{k}$$

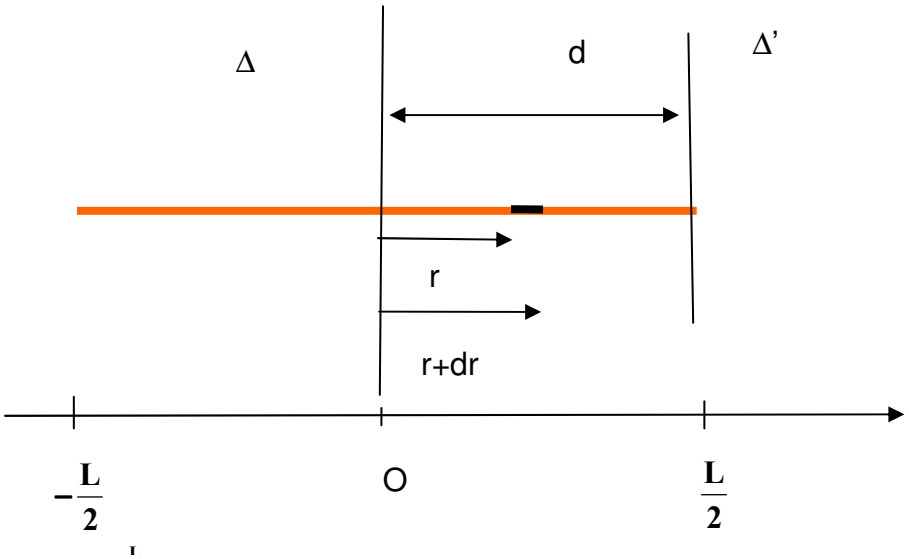
$$\vec{0}+\vec{0}+C\vec{k}=J_\Delta\ddot{\theta}\vec{k}$$

$$C=J_\Delta\ddot{\theta}\Rightarrow\ddot{\theta}=\frac{C}{J_\Delta}\Rightarrow\dot{\theta}=\frac{C}{J_\Delta}t \quad +K$$

à t=0 la vitesse angulaire est nulle K=0 $\dot{\theta}=\frac{C}{J_\Delta}t$

$$\dot{\theta}=\frac{C}{J_\Delta}t=\frac{C}{(M+6m)\frac{L^2}{12}}t=\frac{12C}{(M+6m)L^2}t$$

11.8.6 Corrigé de l'exercice 6



Le moment d'inertie élémentaire dJ du petit élément de tige de longueur dr situé à la distance r de l'axe Δ est dJ= dm r2 = $\lambda dr\, r^2$

λ est la masse linéique (masse par unité de longueur de la tige). $\lambda = \frac{M}{L}$

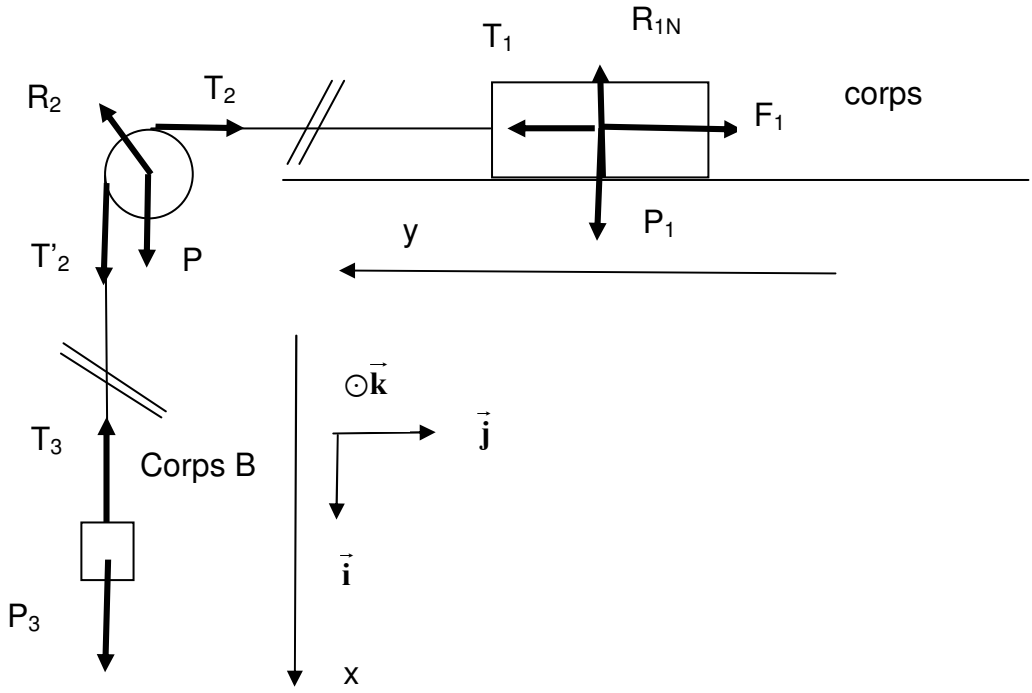
Le moment d'inertie de la tige s'obtient par intégration :

$$J_\Delta = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dm r^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \lambda dr\, r^2 = \left[\lambda \frac{r^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \lambda \frac{L^3}{12} = M\frac{L^2}{12}$$

Par application du théorème de Huyghens :

$$J_{\Delta'} = M\frac{L^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = M\frac{L^2}{3}$$

11.8.7 Corrigé de l'exercice 7



Mouvement de B :

$$\vec{T_3} + \vec{P_3} = m\vec{a_B} \qquad -T_3 + P_3 = ma_B$$

Mouvement de la poulie de centre O

$$\vec{M}_O T'_2 + \vec{M}_O T_2 + \vec{M}_O R_2 + \vec{M}_O P_2 + \vec{M}_{couple} = J_\Delta \ddot{\theta}\vec{k}$$

$$T'_2 r - T_2 r - C = J_\Delta \ddot{\theta} = \frac{1}{2} m' r^2 \ddot{\theta}$$ ici C > 0

Mouvement de A :

$$\vec{T_1} + \vec{P_1} + \vec{R}_{1N} + \vec{F_1} = M\vec{a_A} \qquad T_1 - F_1 = Ma_A$$

A et B ont même vitesse ; cette vitesse est égale à la vitesse d'un point à la périphérie de la poulie. La condition de non glissement du fil sur la poulie s'écrit : $v = r\dot{\theta}$ en dérivant par rapport au temps : $a = r\ddot{\theta}$

$$T_1 - F_1 = Ma \qquad \Rightarrow T_1 = F_1 + Ma$$

$$-T_3 + P_3 = ma \quad \Rightarrow T_3 = mg - ma$$

$$T'_2 r - T_2 r - |C| = \frac{1}{2} m' r^2 \frac{a}{r}$$

Les fils sont inextensibles et de masses négligeables

$T_1=T_2$ et $T'_2=T_3$

$$(mg - ma)r - (F_1 + Ma)r - |C| = \frac{1}{2} m' r^2 \frac{a}{r}$$

$$a = \frac{mg - F_1 - \frac{C}{r}}{m + M + \frac{m'}{2}} = \frac{2(mgr - F_1 r - C)}{r(2m + 2M + m')}$$

CHAPITRE 12 PUISSANCE ET TRAVAIL D'UNE FORCE

12.1 DEFINITION DE LA PUISSANCE D'UNE FORCE.

Lorsqu'une force $\vec{F}$ est appliquée en un point d'un système et lorsque ce point se déplace à la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel d'étude, la puissance P de cette force est donnée par la relation : $P = \vec{F}\vec{v}$

Unités : P en W F en N v en $m.s^{-1}$

La puissance dépend du référentiel.

☐ Exercice 1

12.2 TRAVAIL D'UNE FORCE.

Si la puissance d'une force n'est pas nulle, la force travaille.

12.2.1 Travail élémentaire d'une force.

Pendant la durée élémentaire dt, le travail élémentaire d'une force dont la puissance est P est :

$$\delta W = Pdt = \vec{F}.\vec{v}\,dt = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

$\overrightarrow{dl}$ est le déplacement élémentaire du point d'application de la force.

Lorsque le point d'application de la force se déplace de $\overrightarrow{dl}$, le travail est, par définition, $\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$

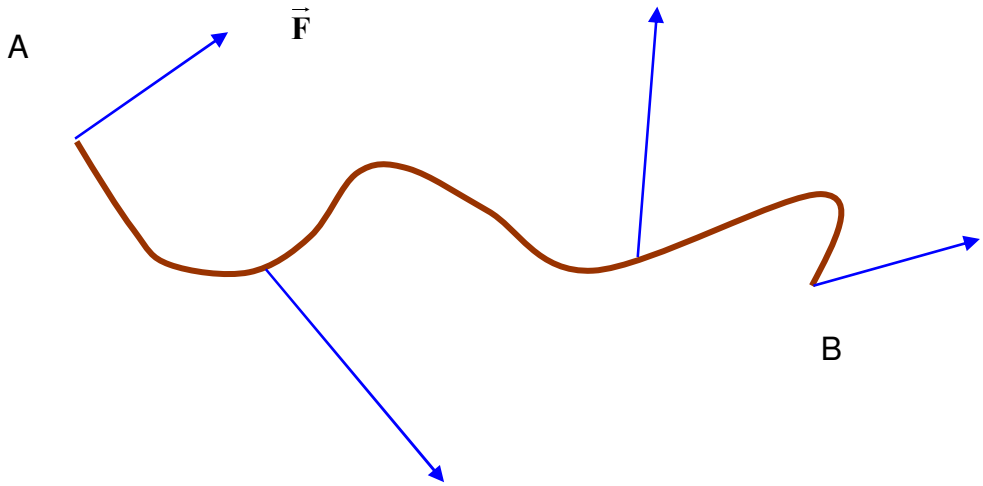
Remarque ; dans un repère cartésien

$$\overrightarrow{dl} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz \qquad \vec{F} = \vec{i}\,Fx + \vec{j}\,Fy + \vec{k}Fz$$

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = Fx\,dx + Fy\,dy + Fz\,dz$$

12.2.2 Travail d'une force dont le point d'application se déplace de A en B

12.2.2.1 Cas général



Lorsque le point d'application de la force se déplace de A en B

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_{A}^{B} \vec{F}.\vec{dl}$$

Comme la puissance, le travail dépend du référentiel.

Cette relation exprime le travail d'une force quelconque dont le déplacement du point d'application est quelconque.

Cette relation se simplifie dès que l'on sort du cas général pour se trouver dans des conditions plus particulières.

12.2.2.2 Cas d'une force non constante dont le déplacement du point d'application est rectiligne

Exemple : force exercée sur l'extrémité d'un ressort provoquant l'allongement du ressort. La force est dirigée suivant l'axe du ressort, sa valeur est F=kx

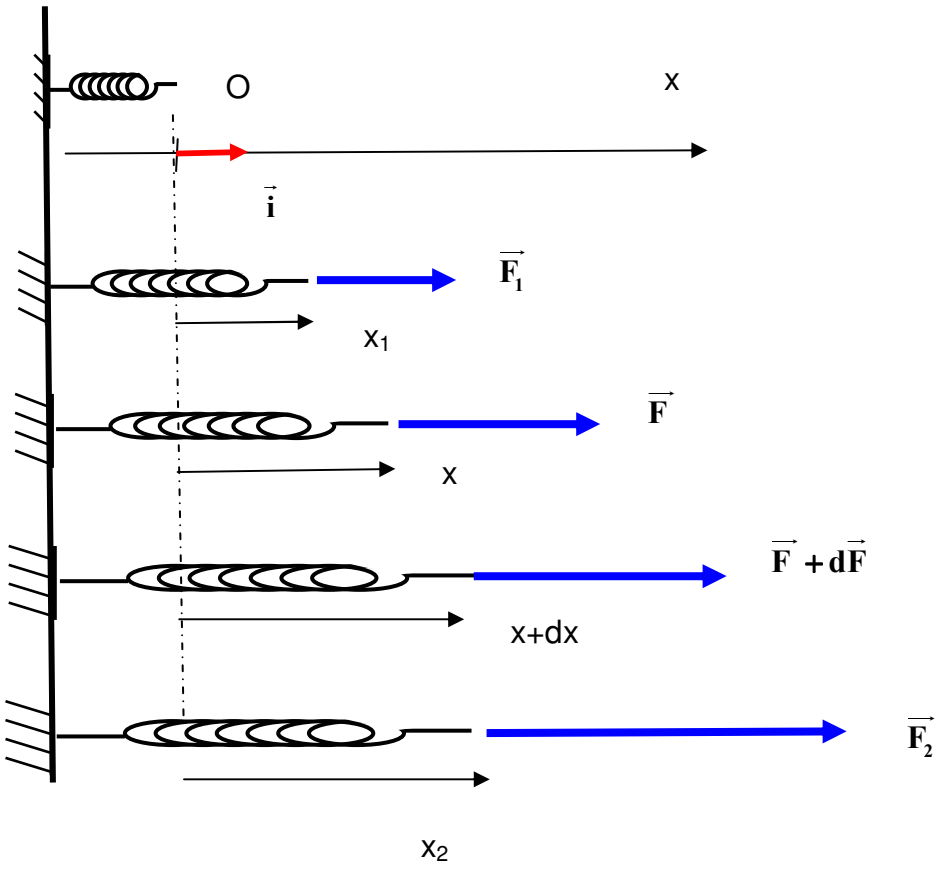
k raideur du ressort et x allongement.

Pour un allongement élémentaire dl, le travail exercé par l'opérateur est

$$\delta W = \vec{F}\vec{dl} = (kx\vec{i})(\vec{i}dx) = kxdx$$

Le travail exercé par l'opérateur pour faire varier l'allongement de x_1 à x_2 est :

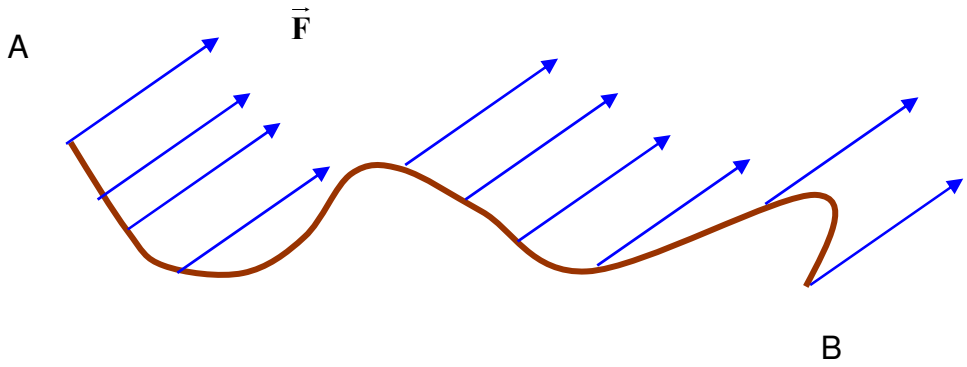
$$W_{12}(\vec{F}) = \int_{x1}^{x2} kxdx = \frac{1}{2}kx_2^{\,2} - \frac{1}{2}kx_1^{\,2}$$



☐ Exercice 2

12.2.2.3 Cas d'une force constante dont le point d'application a un déplacement quelconque :

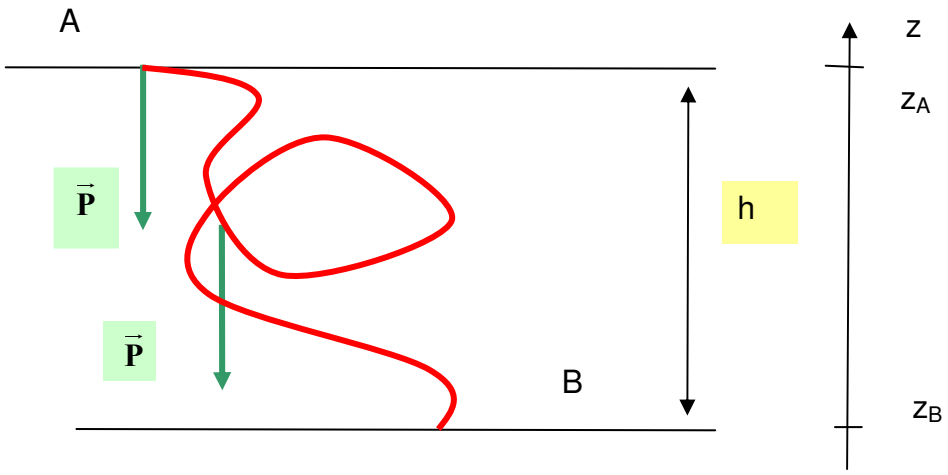
Le vecteur force $\vec{F}$ est constant (en direction, sens et norme)



$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = \vec{F}\int_A^B \vec{dl} = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$ W en J AB en m F en N

12.2.3 Travail du poids d'un corps

Le poids est une force constante si le centre de gravité du corps effectue des déplacements limités au voisinage de la Terre



$W_{AB}\vec{P} == \vec{P}.\overrightarrow{AB} = mg(z_A - z_B) = \pm mgh$ (avec h >0)

Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi entre A et B. On dit que le poids est une force conservative.

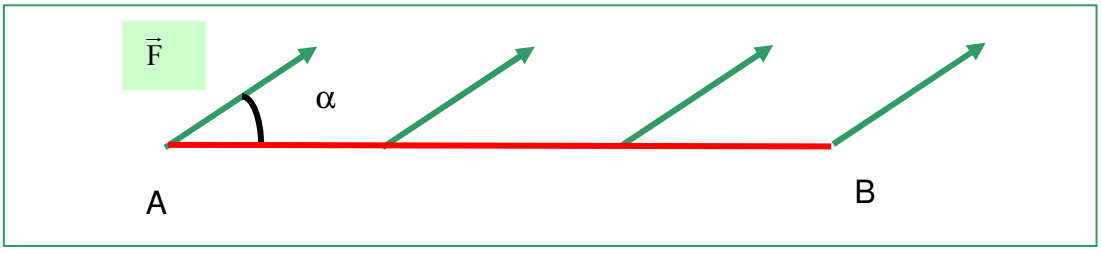
Le travail est >o si l'altitude du point initial A est supérieure à celle de B ; dans ce cas le travail est moteur.

Le travail est <0 si l'altitude du point initial A est inférieure à celle de B ; dans ce cas le travail est résistant.

Le travail est nul si l'altitude du point initial A est égale à celle de B

☐ Exercice 3

12.2.4 Cas d'une force constante dont le point d'application a un mouvement rectiligne



$\mathbf{W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = FAB.cos(\vec{F}, \overrightarrow{AB})}$

étant l'angle formé par les deux vecteurs.

si $0 < \alpha < \pi/2$ le travail est >0 ; le travail est moteur

si $\pi/2 < \alpha < \pi$ le travail est <0 ; le travail est résistant

si $\alpha = \pi/2$ le travail est nul

☐ Exercice 4

12.2.5 Cas où le travail d'une force est nul.

Le travail est nul :

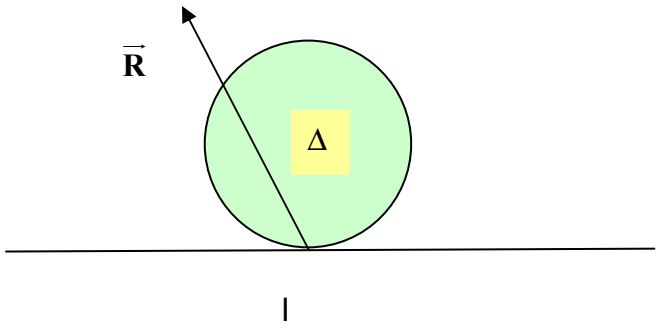
- si F = 0 ou si le point d'application de la force ne se déplace pas.
- si le vecteur-force est constamment orthogonal au déplacement de son point d'application.

☐ Exercice 5

- si le point d'application de la force est confondu avec le centre instantané de rotation.(ce cas important est mentionné mais sera traité ultérieurement)

Exemple : lorsqu'un cylindre roule sur un plan en tournant autour de son axe de révolution Δ qui se déplace en translation, le point de contact I entre le solide et le plan se déplace ; ce point est le centre instantané de rotation. La force de réaction du plan d'appui $\vec{R}$, appliquée en I, a un travail nul.

Une force peut donc déplacer son point d'application sans travailler.



Remarque : cas où le déplacement n'est pas nul mais où A et B sont confondus

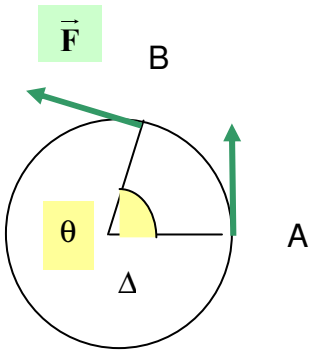
Dans le cas d'une force conservative (ex poids) le travail est nul

Dans le cas d'une force non conservative, le travail n'est pas nul. Exemple : après déplacement du point d'application à partir de A et retour en A, une force de frottement effectue un travail qui est d'autant plus important que le déplacement est plus grand

☐ Exercice 6

12.2.6 Cas d'une force de valeur constante dont le point d'application a un mouvement circulaire

Dans ce cas on peut considérer que l'angle formé par le vecteur déplacement élémentaire du point d'application de la force et le vecteur représentant la force est nul



$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = \int F.dl.\cos 0 = \int F.dl = \int F.R.d\theta = F.R.\theta$$

$W_{AB}(\vec{F}) = M_{\Delta}(\vec{F}).\theta$ W en J $M_{\Delta}(\vec{F})$ en Nm et θ en rad.

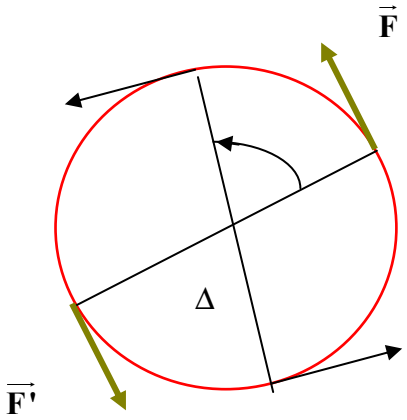
Le travail est alors égal au produit du moment par rapport à l'axe Δ perpendiculaire au cercle décrit par le point d'application de la force par l'angle de rotation θ.

12.2.7 Travail d'un couple de forces.

Un couple de forces est un ensemble de deux forces opposées, de même valeur, ayant des supports parallèles non confondus.

Appliqué à un solide, un couple de forces peut provoquer une rotation de ce solide.

θ



$$F = F'$$

$$\vec{F} + \vec{F'} = \vec{0}$$

$$M_{\Delta}(couple\,\vec{F},\vec{F'}) = M_{\Delta}(\vec{F}) + M_{\Delta}(\vec{F'})$$

$$M_{\Delta}(couple\,\vec{F},\vec{F'}) = FR + FR = 2FR$$

Au cours de la rotation d'angle θ :

$$W\,(couple\,\vec{F},\vec{F'}) = W(\vec{F}) + W\,(\vec{F'})$$

$$W(couple\,\vec{F},\vec{F'}) = FR\theta + FR\theta = 2FR\theta$$

$$W(couple\,\vec{F},\vec{F'}) = M_{\Delta}(couple\,\vec{F},\vec{F'}).\theta$$

☐ Exercice 7

12.3 PUISSANCE MOYENNE ET PUISSANCE INSTANTANEE D'UNE FORCE

12.3.1 Puissance moyenne d'une force F effectuant un travail ΔW pendant une durée Δt

La puissance moyenne d'une force est d'autant plus grande qu'elle effectue un travail plus important pendant une durée donnée.

Par définition : $P = \dfrac{W_{12}}{t_2 - t_1}$

P en W W en J $t_2 - t_1$ en s

12.3.2 Puissance instantanée d'une force P(t)

12.3.2.1 Cas général.

Nous avons déjà donné la définition de la puissance instantanée d'une force :

$$P = \vec{F}\,\vec{v}$$

v étant la vitesse du point d'application de la force

P en W W en J V en $m.s^{-1}$

12.3.3 Puissance instantanée d'une force de valeur constante dont le point d'application a un mouvement circulaire (fig 1)

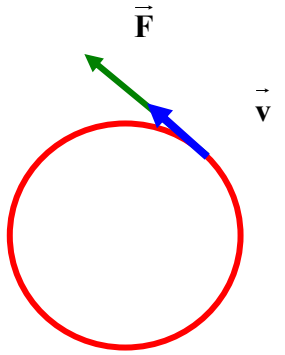


fig 1

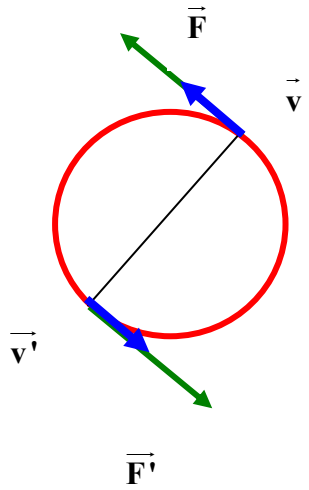


fig 2

$$P = \vec{F}.\vec{v} = F\,v = F\,R\,\dot{\theta} = M_{\Delta}(\vec{F})\,\dot{\theta}$$

$$P = M_{\Delta}(\vec{F})\,\dot{\theta}$$

P en W $M_{\Delta}(F)$ en Nm $\dot{\theta}$ en $rad.s^{-1}$

12.3.3.1 Puissance d'un couple de forces.

$$P\,couple = P(\vec{F}) + P(\vec{F'})$$

$$P\,couple = M_{\Delta}(\vec{F})\,\dot{\theta} + M_{\Delta}(\vec{F'})\,\dot{\theta}$$

$$P\,couple = M_{\Delta}(couple\vec{F},\vec{F'}).\dot{\theta}$$

12.3.4 UNITES

Dans le système international, P s'exprime en watts (W) et W en joules (J)

Autres unités pour le travail :

l'électron-volt $1eV = 1{,}6\times10^{-19}$ J

le kWh 1kWh=3600 J

12.4 EXERCICES

☐ Exercice 1

Une grue soulève une charge de masse m=10 tonnes à la vitesse constante de 0,1 $m.s^{-1}$ .g=10 $m.s^{-2}$.

Quelle est la valeur de la force exercée par la grue ?

Quelle est la puissance développée par la grue ?

☐ Exercice 2

Un ressort a pour longueur à vide L_0= 20 cm et pour raideur k = 20 $N.m^{-1}$. On le comprime de manière que sa longueur soit L = 10 cm.

Calculer le travail qu'il pourrait fournir lors de sa détente complète.

☐ Exercice 3

Exprimer la puissance d'une chute d'eau en fonction de la hauteur de chute h, du débit volumique Q (en $m^3.s^{-1}$), de la masse volumique de l'eau ρ et de g.

Préciser les unités

☐ Exercice 4

Une péniche parcourt une distance L suivant l'axe d'un canal rectiligne à la vitesse $\vec{v}$ constante. Elle est remorquée à partir du quai de halage par un tracteur ; le câble fait un angle α avec la perpendiculaire aux berges. Donner l'expression du travail de la force $\vec{F}$ exercée sur la péniche.

☐ Exercice 5

Un point matériel est animé d'un mouvement circulaire ; il est .soumis à une force radiale $\vec{F}$, dirigée vers le centre O du cercle . Les coordonnées du point mobile dans un repère cartésien dont le centre est le centre O du cercle de rayon R sont : x= R cos θ et z=R sinθ θ étant fonction du temps.

Démontrer que le travail de cette force, constamment perpendiculaire au déplacement de son point d'application et dirigée vers O, est nul

☐ Exercice 6

Une caisse de masse m= 60kg, est traînée sur le sol, rectilignement, sur une longueur de 10m. Les frottements équivalent à une force unique opposée au vecteur vitesse, de valeur constante 50 N. Calculer les travaux des forces appliquées au solide. g =10 $m.s^{-2}$

☐ Exercice 7

On exerçe une force $\vec{F}$ dont la valeur F est constante sur l'extrémité d'une manivelle solidaire d'un cylindre sur lequel s'enroule une corde de masse négligeable. La force étant perpendiculaire à la manivelle de longueur L, on remonte un seau d'eau de masse m d'une hauteur h à partir d'un puits.

On admet que le travail moteur compense exactement le travail résistant.

Calculer F sachant que g =10 $m.s^{-2}$, L = 50 cm, m=12 kg, R rayon du cylindre= 15 cm et h=10m

∗ Exercice 8

Un brise- glace à propulsion nucléaire, opérant dans l'Arctique développe une puissance de 70×10^3 ch à la vitesse de 7 nœuds

1 nœud= 1 mille marin par heure.

1 mille marin=1852 m

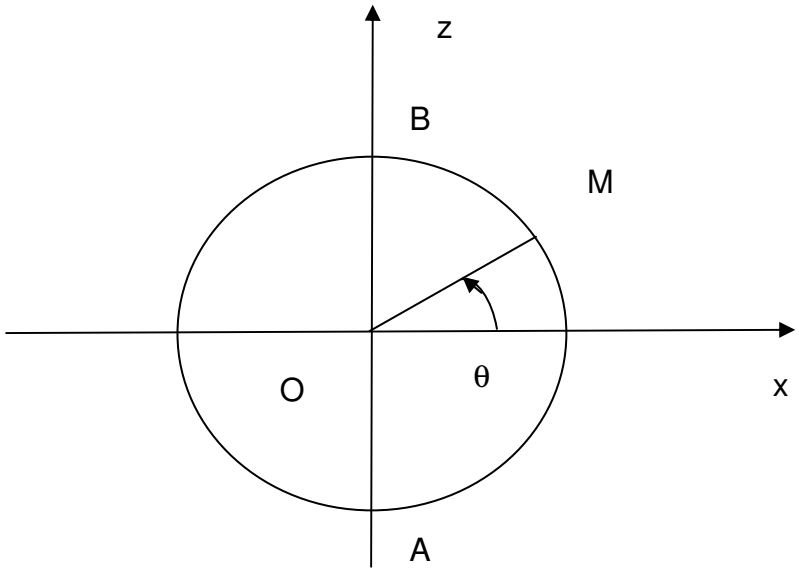
1ch= 0,736 kW

Calculer la valeur de la force propulsive et le travail fourni en 8 heures

∗ Exercice 9

Un objet se déplace à grande vitesse à l'intérieur d'une glissière circulaire de rayon R. Les coordonnées du point sont : x= R cos θ et y=R sinθ θ étant fonction du temps.

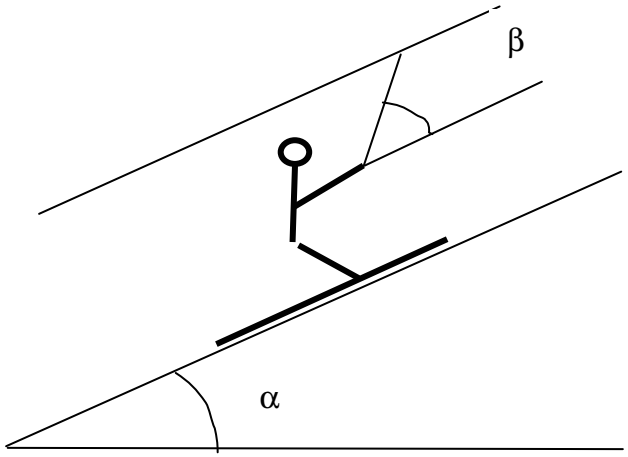
Etablir à partir de la définition du travail, l'expression du travail du poids du corps de masse m entre les passages en A et B.



∗ Exercice 10

Un skieur de masse m est tiré par un remonte-pente sur une piste faisant avec le plan horizontal un angle α. La perche fait avec la piste un angle β. Il parcourt une distance D sur le plan incliné pendant une durée Δt à vitesse constante. Les frottements équivalent à une force constante de valeur f, opposée au vecteur vitesse.

Exprimer les travaux et les puissances de toutes les forces supposées constantes s'exerçant sur le skieur au cours de la montée.



∗ Exercice 11

Sous l'action d'un couple de freinage dont le moment est constant et dont le valeur est C , un volant, de moment d'inertie J_Δ lancé à la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$ s'arrête au bout d'une durée τ. Calculer la puissance moyenne du couple de freinage.

12.5 CORRIGES DES EXERCICES

12.5.1 Corrigé de l'exercice 1

la vitesse est constante ; l'accélération est nulle $\vec{F}+\vec{P}=\vec{0}$ F=P=mg=10^5 N

$P=\vec{F}.\vec{V}=Fv$ P= $10^5\times0,1$= 10000W soit 10 kW

12.5.2 Corrigé de l'exercice 2

Le travail nécessaire pour comprimer le ressort de dx, à partir de la position où son raccourcissement est x, est

$\mathbf{dW = \vec{F}\overline{dl} = kx\vec{i}dx\vec{i} = kxdx}$ (x>0 et dx>0)

La force exercée par l'opérateur n'a pas une valeur constante !

$$\mathbf{W = \int_0^x kxdx = \left[\frac{kx^2}{2}\right]_0^{Lo-L} = \frac{1}{2}k(L-Lo)^2}$$

Le travail fourni lors de la détente du ressort vaut donc $\mathbf{W = \frac{20}{2}(0,1)^2 = 0,1\,J}$

12.5.3 Corrigé de l'exercice 3

$$\mathbf{P(\vec{P}) = \frac{Mgh}{\Delta t} = \frac{\rho Vgh}{\Delta t} = \rho Qgh}$$

ρ en $kg.m^{-3}$ Q en $m3.s^{-1}$ g en $m.s^{-2}$ h en m

P en W

12.5.4 Corrigé de l'exercice 4

$$\mathbf{W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = FAB\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = FAB\sin\alpha}$$

12.5.5 Corrigé de l'exercice 5

dW=Fx dx + Fz dz

dW=(- F cos θ)(- R sinθ dθ) + (- Fsinθ)(R cosθ dθ)= 0

Le travail de la force est donc nul

12.5.6 Corrigé de l'exercice 6

$\mathbf{W(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = PAB\cos 90 = 0}$ $\mathbf{W(\overrightarrow{R_N}) = \overrightarrow{R_N}.\overrightarrow{AB} = R_N AB\cos 90 = 0}$

$\mathbf{W(\overrightarrow{R_T}) = \overrightarrow{R_T}.\overrightarrow{AB} = R_T AB\cos 180 = -R_T AB}$

Le travail du poids est nul

Le travail de la réaction du sol $\mathbf{W(\vec{R}) = W(\overrightarrow{R_N}) + W(\overrightarrow{R_T}) = -R_T AB}$

$\mathbf{W(\vec{R}) = -50 \times 10 = -500J}$ si on augmente la longueur du trajet, le travail est plus important.

La force R n'est pas conservative

12.5.7 Corrigé de l'exercice 7

$$W(\vec{F}) = \left|W(\vec{P})\right| \qquad M_{\Delta}(\vec{F}).\theta = mgh$$

θ est l'angle dont a tourné le cylindre du treuil lorsque la charge a été soulevée de h. La condition de non glissement du câble s'écrit $\theta = \frac{h}{R}$

$$FL\theta = mgh \qquad FL\frac{h}{R} = mgh \Rightarrow F = \frac{mgR}{L}$$

F=36 N

12.5.8 Corrigé de l'exercice 8

$$P = \vec{F}\vec{V} = FV \Rightarrow F = \frac{P}{V}$$

$$F = \frac{P}{V} = \frac{70\times10^{3}\times736}{7\times\frac{1852}{3600}} = 14,3\times10^{6}N$$

12.5.9 Corrigé de l'exercice 9

dW= - mgdz (quand dz > 0, W < 0)

z = R sinθ dz= R cosθ dθ

$$W_{AB}(\vec{P}) = \int_{A}^{B} -mgR\cos\theta\, d\theta = -mgR\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2mgR$$

Il est plus simple d'écrire que la variation d'altitude h=2R et que, étant donné les positions de A et de B, le travail du poids est résistant et < 0

12.5.10 Corrigé de l'exercice 10

Le mouvement est rectiligne, la vitesse est constante et l'accélération est nulle. L'application, au système skieur, de la relation fondamentale, conduit à ;

$$\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{f} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$-mg\sin\alpha + 0 - f + T\cos\beta = 0 \qquad T = \frac{mg\sin\alpha + f}{\cos\beta}$$

$$W(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{AB} = mgD\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -mgD\sin\alpha \qquad P(\vec{P}) = -\frac{mgD\sin\alpha}{\Delta t}$$

$$W(\vec{R_N}) = \vec{R_N}.\vec{AB} = 0 \qquad P(\vec{R_N}) = 0$$

$$W(\vec{f}) = \vec{f}.\vec{AB} = fAB\cos\pi = -fD \qquad P(\vec{f}) = -\frac{fD}{\Delta t}$$

$$W(\overrightarrow{T}) = \vec{T}.\overrightarrow{AB} = TAB\cos\beta = TD\cos\beta \qquad P(\overrightarrow{T}) = \frac{TD\cos\beta}{\Delta t}$$

12.5.11 Corrigé de l'exercice 11

On suppose $\dot{\theta} > 0$

L'application au système volant de la relation de la dynamique de rotation conduit à :

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{P}) + \overrightarrow{M_O}(\vec{R}) + \overrightarrow{M_O}(couple) = J_\Delta \ddot{\theta}\vec{k} \qquad -C = J_\Delta \ddot{\theta}$$

Par intégration par rapport au temps $\dot{\theta} = -\frac{C}{J_\Delta}t + K \qquad \dot{\theta} = -\frac{C}{J_\Delta}t + \dot{\theta}_0$:

par intégration $\theta = -\frac{C}{2J_\Delta}t^2 + \dot{\theta}_0 t$

L'angle balayé au cours du freinage est égal à $\theta = -\frac{C}{2J_\Delta}t^2 + \dot{\theta}_0 t$

Le travail du couple de freinage vaut $-C\theta = -\frac{C}{2J_\Delta}(\tau^2 + \dot{\theta}_0 \tau)$

et la puissance moyenne du couple de freinage $P = \frac{-C(-\frac{C}{2J_\Delta}\tau^2 + \dot{\theta}_0 \tau)}{\tau}$

$$P = C(\frac{C}{2J_\Delta}\tau - \dot{\theta}_0)$$

CHAPITRE 13 ENERGIE CINETIQUE D' UN SOLIDE - THEOREME DE L' ENERGIE CINETIQUE

13.1 ENERGIE CINETIQUE

13.1.1 Définition.

Une voiture lancée sur une route horizontale possède de l'énergie cinétique ; si elle rencontre un obstacle c'est la transformation de cette énergie en travail mécanique qui va expliquer les dégâts.

L'énergie cinétique d'un solide est l'énergie qu'il possède de par sa vitesse ; elle dépend de sa masse et de sa vitesse.

Dans l'exemple précédent, si on considère le référentiel « voiture », l'énergie cinétique de la voiture immobile dans ce référentiel est nulle ; néanmoins les dégâts lors de la rencontre avec l'obstacle seront les mêmes. Il faudrait dans ce cas faire intervenir l'énergie cinétique de l'obstacle dans le référentiel « voiture »

Cet exemple montre qu'il est parfois difficile de formuler une définition.

13.1.2 Expressions de l'énergie cinétique.

13.1.2.1 Point matériel

Par définition l'expression de l'énergie cinétique d'un point matériel de masse m animée de la vitesse v dans un référentiel est dans ce référentiel :

$$E_C = \frac{1}{2} m.v^2$$ Ec en J m en kg v en $m.s^{-1}$

☐ Exercice 1

13.1.2.2 Système de points matériels

l'énergie cinétique d'un système formé de n points matériels de masse m_i et de vitesse v_i est :

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

On peut appliquer facilement ce résultat dans deux cas simples :

13.1.2.3 Solide en translation

Tous les points du solide ont à chaque instant même vitesse V

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} V^2 \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$E_C = \frac{1}{2} M V^2$$

☐ Exercice 2

13.1.2.4 Solide en rotation autour d'un axe fixe

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i . \dot{\theta}_i)^2$$

Tous les points du solide ont à chaque instant même vitesse angulaire $\dot{\theta}$

$$E_C = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} J_\Delta . \dot{\theta}^2$$

Ec en J J_Δ en kg.m_2 $\dot{\theta}$ en rad.s^{-1}

☐ Exercice 3

13.1.2.5 Cas d'un solide en rotation autour d'un axe qui se déplace en translation et qui passe par G.

On applique le théorème de Koenig :

$$Ec = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$$

Le solide tourne sur lui-même autour de Δ passant par G. L'énergie cinétique est égale à la somme de l'énergie cinétique du point matériel G affecté de la masse totale du solide et de l'énergie cinétique de rotation du solide dans son mouvement propre autour de Δ

☐ Exercice 4

13.2 THEOREME DE L' ENERGIE CINETIQUE

Ce théorème est établi à partir du principe fondamental de la dynamique.

13.2.1 Démonstration du théorème dans le cas d'un point matériel

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m soumis à une résultante de forces F varie de dEc pendant dt. Le travail élémentaire de F pendant ce temps est :

$$\delta W = \vec{F}.\vec{dl} = Fdl = madl = m\frac{dv}{dt}dl = m\frac{dl}{dt}dv = mvdv$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow dEc = \frac{1}{2}m2vdv = mvdv$$

On en déduit que : $dEc = \delta W \text{ et par suite } E_{CB} - E_{CA} = W_{AB}\vec{F}$

Les forces qui s'exercent sur le point matériel sont des forces extérieures.

On peut alors énoncer le théorème pour un point matériel :

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale à la somme des travaux de toutes les forces appliquées au point matériel entre ces mêmes instants

$$E_{Cf} - E_{Ci} = \sum W\vec{f}$$

Ecf et Ec_i sont respectivement les énergies cinétiques finale et initiale

On peut ensuite généraliser

13.2.2 Enoncé du théorème dans le cas d'un système quelconque

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un système entre deux instants est égale à la somme des travaux de toutes les forces appliquées aux différents points matériels constituant le système entre ces mêmes instants

$$E_{Cf} - E_{Ci} = \sum W\vec{f}$$

Les forces appliquées aux points matériels sont toutes des forces extérieures aux points matériels mais se répartissent en forces intérieures et extérieures au système

$$E_{Cf} - E_{Ci} = \sum W\overrightarrow{f\,int} + \sum W\overrightarrow{fext}$$

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un système entre deux instants est égale à la somme des travaux de toutes les forces intérieures et extérieures appliquées au système matériel entre ces mêmes instants

13.2.3 Enoncé du théorème dans le cas d'un solide

Dans le cas d'un solide, la distance entre deux points quelconques du solide est constante et les forces intérieures sont égales et opposées deux à deux ce qui fait que la somme des travaux des forces intérieures au solide est nulle

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un solide entre deux instants est égale à la somme des travaux de toutes les forces extérieures appliquées au solide entre ces mêmes instants

$$E_{Cf} - E_{Ci} = \sum W\overrightarrow{fext}$$

Remarque :

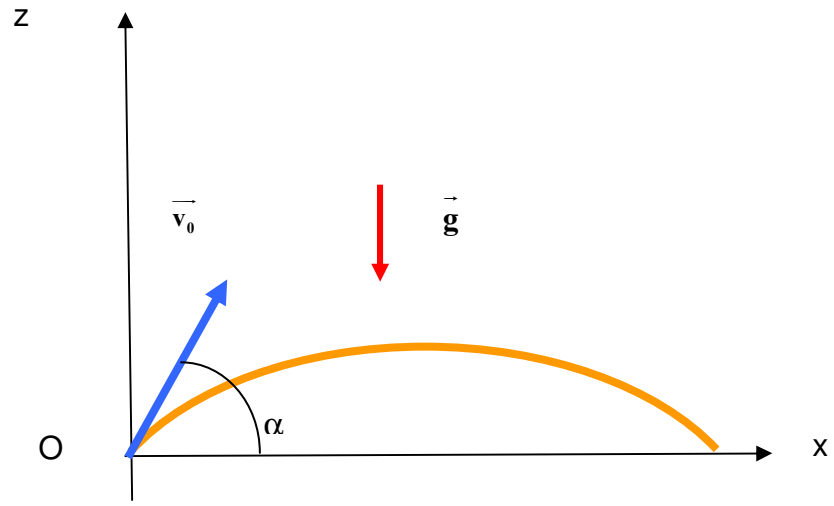
On constate que les forces intérieures interviennent dans certains cas et pas dans d'autres. Or la classification des forces en forces intérieures et forces extérieures dépend du choix du système.

Ceci montre l'intérêt, quand on est confronté à un problème de mécanique, de bien choisir et de préciser le système.

☐ Exercice 5

13.3 APPLICATION AU MOUVEMENT D'UN PROJECTILE.

Le projectile supposé ponctuel, est lancé obliquement. A t=0, son centre d'inertie passe en O avec la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ qui fait alors avec Ox l'angle α. A la date t, le centre d'inertie a pour vitesse v et son altitude est z.



On applique le théorème au système (le corps) entre t=0 et t

$$Ec - Eco = W(\vec{P}) = mgzo - mgz = -mgz \qquad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = -mgz$$

$$v^2 - v_o^2 = -2gz$$

Cette relation montre que v ne dépend pas de la masse du corps.

Elle montre également que, pour une même altitude, la valeur v de la vitesse sera la même, à la montée et à la descente.

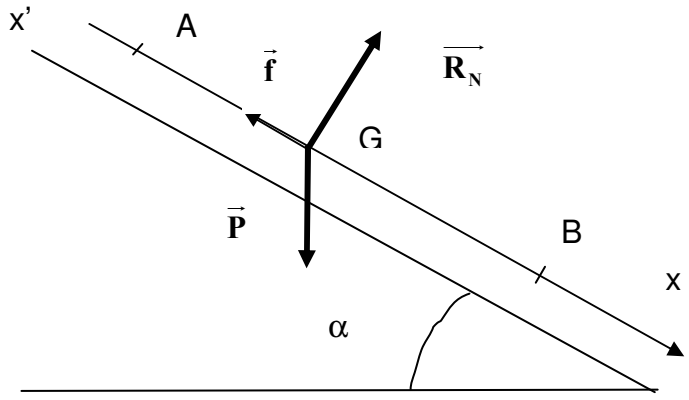
13.4 APPLICATION DU THEOREME A UN MOUVEMENT DE TRANSLATION

Un solide de masse m est abandonné sans vitesse initiale à t=0 sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Les frottements, au cours de la descente, équivalent à une force opposée au vecteur vitesse et de valeur constante f. On étudie le mouvement du solide.

Système : le solide

Forces appliquées : le poids, la réaction normale du plan et la force de frottement.

A la date t=O, le centre d'inertie G se trouve en A et sa vitesse est nulle et à une date quelconque t il passe en B avec la vitesse v



On applique au système le théorème de l'énergie cinétique entre t=0 et t:

$$Ec_B - Ec_A = \sum W\vec{f}ext = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\overrightarrow{R_N}) + W_{AB}(\vec{f})$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \vec{P}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{R_N}\overrightarrow{AB} + \vec{f}\overrightarrow{AB}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgAB\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + R_N AB\cos\frac{\pi}{2} + fAB\cos\pi$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgx\sin\alpha + 0 - fx$$

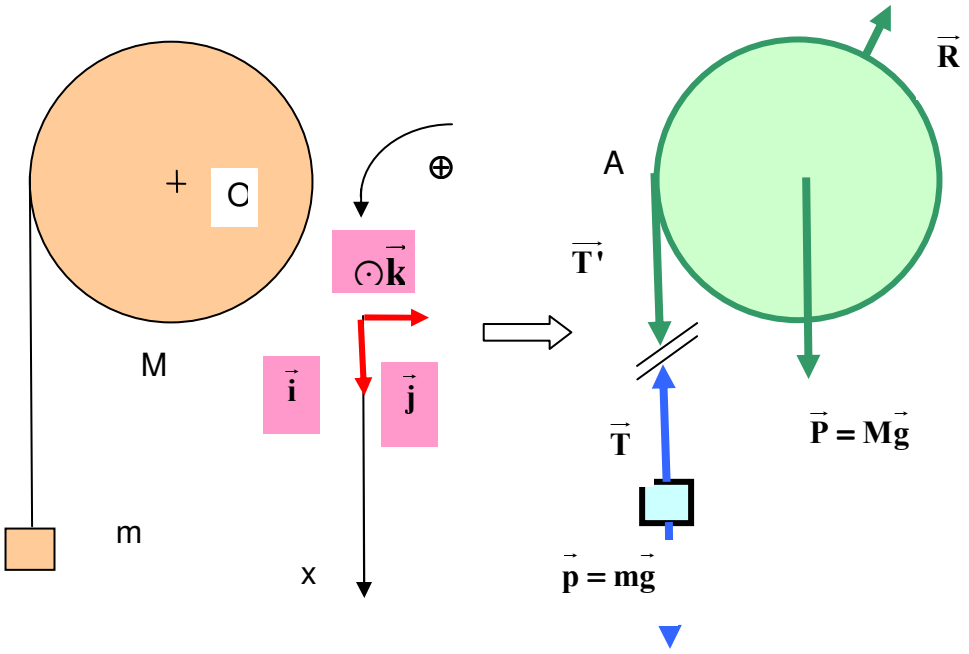
v et x sont fonctions du temps ; on dérive l'expression par rapport au temps

$$\frac{1}{2}m2v\frac{dv}{dt} = mg\frac{dx}{dt}\sin\alpha + 0 - f\frac{dx}{dt} \quad \text{or} \quad v = \frac{dx}{dt} \text{ et } a = \frac{dv}{dt}$$

$a = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$ On retrouve un résultat connu

13.5 APPLICATION DU THEOREME A UN SYSTEME DEFORMABLE

On considère le système représenté. Ce système, maintenu en équilibre, est abandonné sans vitesse initiale. Le corps de masse m tombe entraînant la rotation du cylindre de masse M et de rayon R.



Déterminons la vitesse de m à la date t

Première méthode

On applique le théorème entre t=0 et t au système formé par l'ensemble {cylindre+corps de masse m+fils}

les forces intérieures $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ sont opposées et la somme de leurs travaux est nulle

La réaction de l'axe et le poids du cylindre sont des forces extérieures qui ne travaillent pas (pas de déplacement du point d'application)

Seul le poids $\vec{p}$ du corps qui tombe effectue un travail égal à mgx, si x est le déplacement de ce corps entre t=0 et t.

Ecf-Eci= Wf int+Wfext

$\frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgx$ la condition de non glissement du fil sur le cylindre

s'écrit : $v = R\dot{\theta}$ d'où $\frac{1}{2}J_\Delta \frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv^2 = mgx$

d'où en dérivant par rapport au temps : $\frac{1}{2}J_\Delta \frac{2va}{R^2} + \frac{1}{2}m2va - 0 = mgv$

l'accélération du corps de masse m est donc :

$$a = \frac{mg}{m + \frac{J_\Delta}{R^2}}$$

Deuxième méthode :

On applique le théorème de l'énergie cinétique au corps de masse m

Ecf-Eci=Wfext

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = W(\vec{T}) + W(\vec{p}) = W(\vec{T}) + mgx$$

On applique le théorème de l'énergie cinétique au cylindre

$$\frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 - 0 = W(\vec{T}') + W(\vec{P}) + W(\vec{R}) = W(\vec{T}') + 0 + 0$$

En additionnant membre à membre :

$$\frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2 - 0 = W(\vec{T}) + mgx + W(\vec{T}') = mgx$$ .....

13.6 APPLICATION AU ROULEMENT SANS GLISSEMENT D'UN CYLINDRE HOMOGENE SUR UN PLAN INCLINE

Le référentiel terrestre est supposé galiléen Système : le cylindre

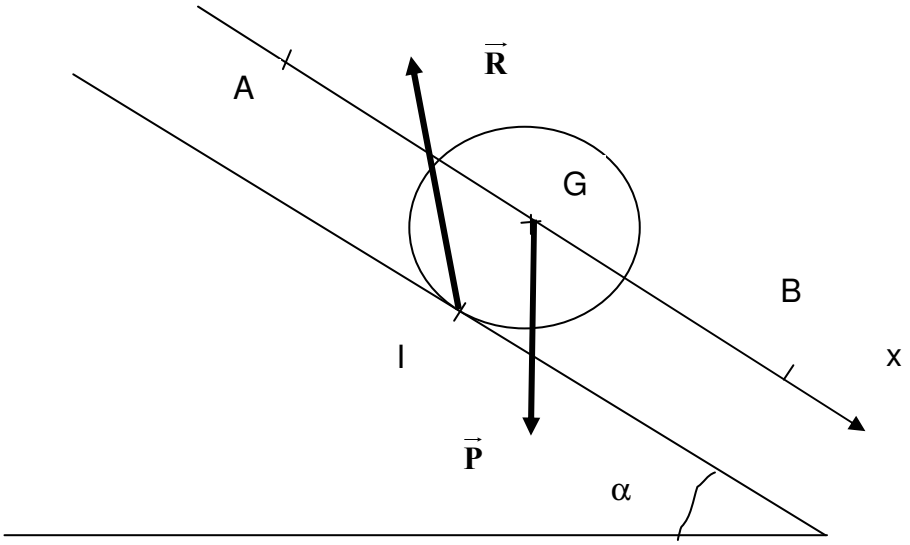
Forces appliquées : son poids $\vec{P}$ appliqué en G et la réaction $\vec{R}$ du plan incliné appliquée en I

A la date t=O, le centre d'inertie G se trouve en A et sa vitesse est nulle et à une date quelconque t il passe en B avec la vitesse v

On applique au système le théorème de l'énergie cinétique entre t=0 et t:

$$Ec_B - Ec_A = \sum W\vec{f}ext = W_{AB}\vec{P} + W_{AB}\vec{R}$$

Le travail de la force appliquée en I, centre instantané de rotation, est nul.

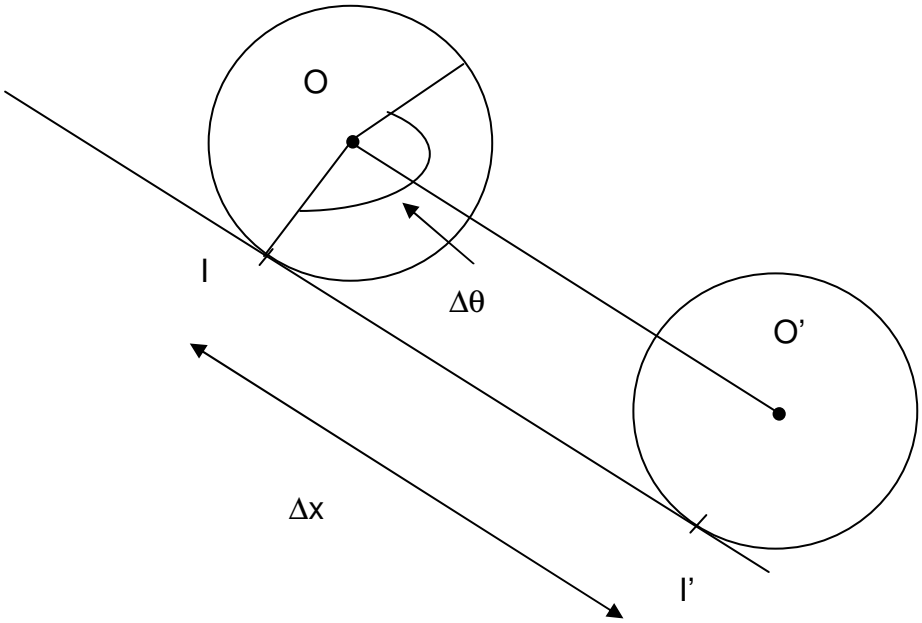


$$Ec_B - 0 = W_{AB}\vec{P} = \vec{P}\overrightarrow{AB} = P.AB\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\Delta\dot{\theta}^2 = mgAB\sin\alpha = mgx\sin\alpha$ par application du théorème de Koenig.

Condition de non glissement ;

Pendant Δt, le cylindre tourne de $\Delta\theta$ et le centre d'inertie se déplace de Δx qui représente également la longueur de l'arc intercepté par l'angle au centre $\Delta\theta$. Il en résulte $\Delta x = R.\Delta\theta$



D'où $\frac{\Delta x}{\Delta t} = R\frac{\Delta \theta}{\Delta t}$ en faisant tendre Δt vers zéro on obtient : $v = R\dot{\theta}$

En remplaçant dans la relation établie : $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_\Delta(\frac{v}{R})^2 = mgx\sin\alpha$

$$\frac{1}{2}v^2(m + \frac{J_\Delta}{R^2}) = mgx\sin\alpha$$

En dérivant par rapport au temps :

$\frac{1}{2}2va(m + \frac{J_\Delta}{R^2}) = mgv\sin\alpha$ d'où

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{(m + \frac{J_\Delta}{R^2})}$$

a, accélération de G est constante ; le mouvement de G est uniformément accéléré.

$J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2$ dans le cas d'un cylindre plein.

$J_\Delta = mR^2$ dans le cas d'un cylindre creux constitué d'une feuille de faible épaisseur.

13.7 EXERCICES

☐ Exercice 1

Calculer l'énergie cinétique d'une molécule d'oxygène de masse m= $5{,}3\times10^{-23}$ g , animée d'une vitesse égale à 500 $m.s^{-1}$, dans l'air, à température ambiante.

☐ Exercice 2

Calculer l'énergie cinétique d'une rame de TGV de masse M= 900 tonnes lancée à la vitesse de 400 $km.h^{-1}$.

A quelle hauteur pourrait-on lever le TGV si l'on disposait de cette énergie ? g = 10 $m.s^{-2}$

☐ Exercice 3

Le rotor d'un hélicoptère, comportant trois pales de longueur L et de masse M , tourne à la fréquence de rotation n ?

Quelle est l'expression de l'énergie cinétique du système formé par les trois pales ?

☐ Exercice 4

La masse de la caisse d'une voiture est M. Les quatre roues de diamètre D ont chacune pour masse m et pour moment d'inertie par rapport à leur axe de rotation J

Etablir l'expression de l'énergie cinétique de la voiture lorsque la caisse a la vitesse V

☐ Exercice 5

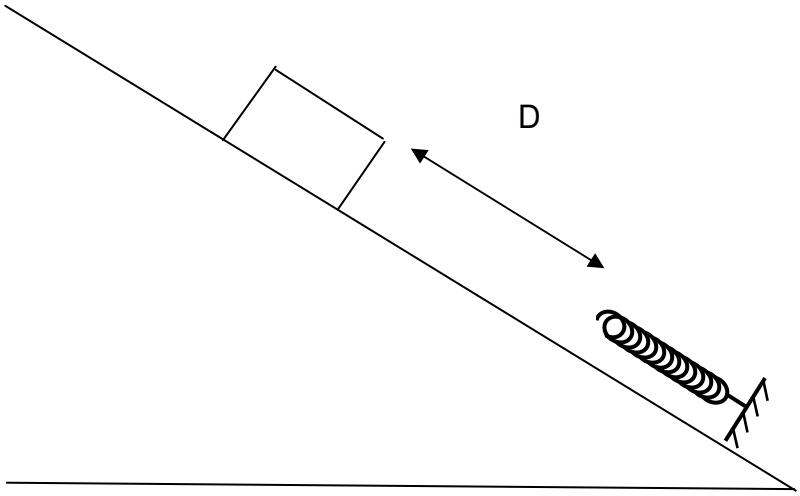
Un volant tourne autour de son axe à la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$. On lui applique un couple de freinage de moment constant. Le volant s'arrête après avoir effectué n tours. Exprimer le moment du couple de freinage.

∗ Exercice 6

Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à la descente d'une bille roulant sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. déterminer l'accélération de son centre d'inertie G.

∗ Exercice 7

Un solide de masse M est maintenu sur un plan incliné dans la position représentée. Il se trouve alors à la distance D du ressort. A la date t=0, il est abandonné sans vitesse initiale ; il glisse sans frottement et vient heurter le ressort de raideur k. Par application du théorème de l'énergie cinétique au solide, déterminer le raccourcissement maximal d du ressort.



∗ Exercice 8

1. Une automobile de masse m =1000 kg développe une puissance P constante lui permettant d'atteindre, à partir du repos, la vitesse de 72 km.h^{-1} en dix secondes. On considère qu'il n'y a pas de résistance à l'avancement.
Déterminer la puissance de la voiture et l'équation horaire du mouvement.
2. En réalité, les frottements ne sont pas nuls et équivalent à une force unique, opposée au vecteur vitesse , de valeur $\mathbf{f} = \frac{2}{3}\mathbf{v}^2$

Montrer que la vitesse de la voiture atteint une valeur limite que l'on calculera

13.8 CORRIGES DES EXERCICES

13.8.1 Corrigé de l'exercice 1

$$\mathbf{Ec} = \frac{1}{2}\mathbf{mv}^2 \quad \mathbf{Ec} = \frac{1}{2}\times 5,3\times 10^{-26}\times 500^2 = 6,6\times 10^{-21}\,\mathbf{J}$$

13.8.2 Corrigé de l'exercice 2

$$\mathbf{Ec} = \frac{1}{2}\mathbf{Mv}^2 = \frac{1}{2}900\times 10^3\left(\frac{400}{3,6}\right)^2 = 5,55\times 10^9\,\mathbf{J}$$

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{W}}{\mathbf{mg}} = \frac{5,55\times 10^9}{900\times 10^3\times 10} = 617\mathbf{m}$$

13.8.3 Corrigé de l'exercice 3

$$\mathbf{Ec} = \frac{1}{2}\mathbf{J}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(3\frac{\mathbf{ML}^2}{3}\right)(2\pi\mathbf{n})^2$$

13.8.4 Corrigé de l'exercice 4

$$\mathbf{Ec} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{M}+4\mathbf{m}+\frac{16\mathbf{J}}{\mathbf{D}^2}\right]\mathbf{V}^2 \quad \mathbf{Ec} = \frac{1}{2}\mathbf{MV}^2 + 4\left(\frac{1}{2}\mathbf{mV}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}\dot{\theta}^2\right)$$

La condition de roulement sans glissement est $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{D}}{2}\dot{\theta}$

$$\mathbf{Ec} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{M}+4\mathbf{m}+\frac{16\mathbf{J}}{\mathbf{D}^2}\right]\mathbf{V}^2$$

13.8.5 Corrigé de l'exercice 5

On applique au système (le volant), le théorème de l'énergie cinétique entre le début du freinage et l'arrêt.

$$E_{cf} - E_{ci} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\overrightarrow{Couple})$$

Les travaux de R et de P sont nuls.

$$0 - \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 = C\theta = C\,2\pi n \qquad C < 0 \qquad \theta > 0 \qquad C = -\frac{1}{4\pi n} J_\Delta \dot{\theta}^2$$

13.8.6 Corrigé de l'exercice 6

$$E_{cf} - E_{ci} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

$$\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 - 0 = Mgx\sin\alpha + 0 \qquad \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J_\Delta \frac{v^2}{R^2} = Mgx\sin\alpha$$

$$\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} M R^2\right)\frac{v^2}{R^2} = Mgx\sin\alpha \qquad \frac{M}{2}\frac{7}{5} v^2 = Mgx\sin\alpha$$

En dérivant la relation par rapport au temps

$$2va\frac{M}{2}\left(\frac{7}{5}\right) = Mgv\sin\alpha \qquad a = \frac{5}{7} g\sin\alpha$$

13.8.7 Corrigé de l'exercice 7

On applique au système (le solide), le théorème de l'énergie cinétique entre le départ et la position la plus basse atteinte.

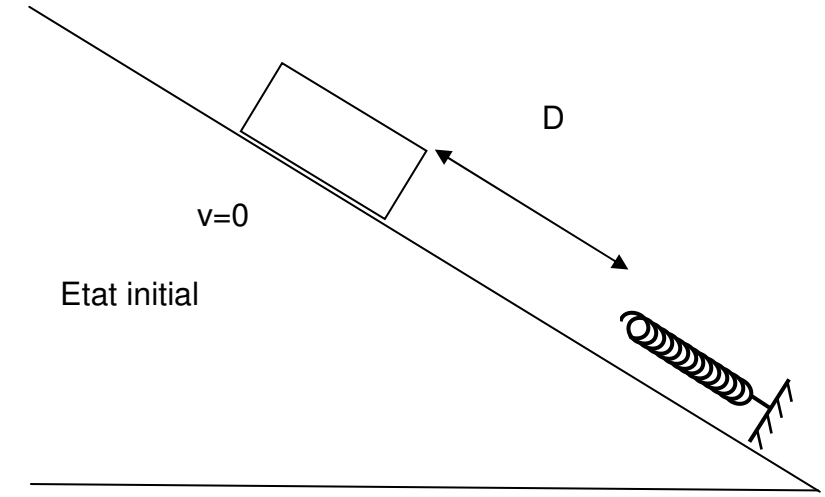
$$E_{cf} - E_{ci} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f})$$

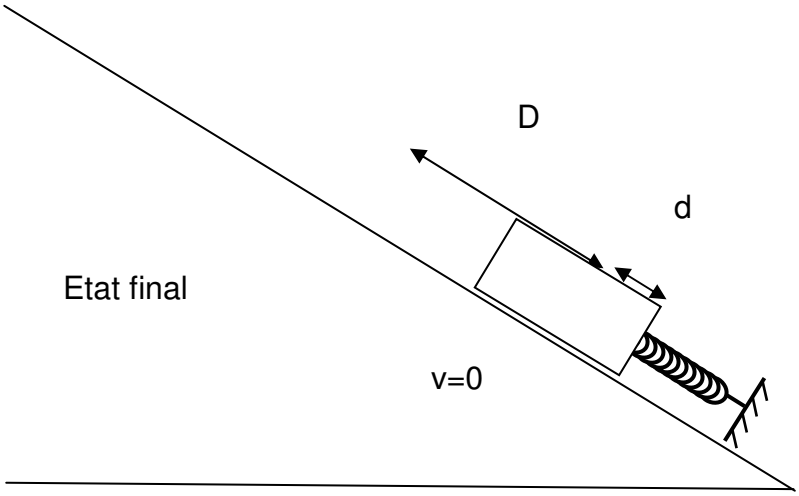
$$0 - 0 = Mg(D + d)\sin\alpha + 0 + W(\vec{f})$$

f est la force exercée par le ressort sur le solide ; elle n'a pas une valeur constante.

$$W(\vec{f}) = \int_0^d -kx\,dx = -kd^2$$

$$0 = Mg(D + d)\sin\alpha + 0 - \frac{1}{2} kd^2$$ d est la solution positive de l'équation du second degré $$d = \frac{2}{k}\left(Mg\sin\alpha + \sqrt{M^2 g^2 \sin^2\alpha + 2kMgD\sin\alpha}\right)$$





13.8.8 Corrigé de l'exercice 8

1. Le système (voiture) est soumis à son poids, à la réaction normale du sol et à la force motrice dont la puissance est P

On applique au système le théorème de l'énergie cinétique entre t=0 et t

$$\mathbf{Ec - Ec_0 = W(\vec{P}) + W(\overrightarrow{R_N}) + W(\vec{F})}$$

$$\mathbf{\frac{1}{2}mv^2 - 0 = 0 + 0 + Pt} \qquad \mathbf{P = \frac{mv^2}{2t} = \frac{1000 \times 20^2}{2 \times 10} = 20000\,W}$$

$$\mathbf{v^2 = \frac{2Pt}{m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}} \ \ or \ \ v = \frac{dx}{dt}}$$

$$\mathbf{dx = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}\ dt = \sqrt{\frac{2P}{m}}\ t^{\frac{1}{2}}\ dt \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2P}{m}}\ t^{\frac{3}{2}} + K}$$

si à t= o, x=0 K=0

$$x = \sqrt{\frac{2P}{m}}\, t^{\frac{3}{2}} \qquad x = \sqrt{\frac{2\times 20000}{1000}}\, t^{\frac{3}{2}} = 6,3\, t^{\frac{3}{2}}$$

2. On applique la deuxième loi de Newton au système

$$\vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$$

La projection sur un axe horizontal, orienté dans le sens du mouvement donne :

$$0 + 0 + F - f = ma$$

Lorsque la vitesse limite est atteinte, a est nulle et f=F

$$f = F \qquad \frac{2}{3} V_{lim}{}^2 = F = \frac{P}{V_{lim}} \Rightarrow V_{lim} = \sqrt[3]{\frac{3P}{2}}$$

$$V_{lim} = \sqrt[3]{\frac{3\times 20000}{2}} = 31\, m.s^{-1}$$

CHAPITRE 14 ENERGIE POTENTIELLE

L'énergie est difficile à définir, c'est une notion abstraite. Pour rester simple, on dit souvent qu'un système possède de l'énergie lorsqu'il peut fournir du travail. En toute rigueur, ce sont les forces qui travaillent et non les systèmes.

14.1 ENERGIE POTENTIELLE DE PESANTEUR

14.1.1 Notion

Un rocher qui se détache en montagne peut fournit du travail ; il possède donc de l'énergie.

Cette énergie est d'autant plus grande que la hauteur par rapport à la terre est plus grande et que la masse du rocher est plus grande ; c'est une énergie de position.

En fait, ce n'est pas le rocher seul qui possède de l'énergie potentielle de pesanteur, c'est le rocher dans le champ de pesanteur.

Désormais lorsque nous parlerons de l'énergie potentielle de pesanteur d'un système, nous saurons qu'il s'agit de l'énergie du système dans le champ de pesanteur.

14.1.2 Expression de la variation d'énergie potentielle de pesanteur d'un solide

L'axe z'z, vertical, est orienté vers le haut.

Lorsqu'un solide se trouve à l'altitude z_A, son énergie potentielle de pesanteur est E_{PPA} ; lorsqu'il se trouve l'altitude z_B, son énergie potentielle de pesanteur est E_{PPB}

Plus l'altitude est grande, plus Epp est élevée.

si $z_A > z_B$, $Epp_A > Epp_B$.

Entre A et B, le poids du corps travaille. La variation d'énergie potentielle est liée au travail du poids.

Par définition, nous écrirons que , pour une variation d'altitude dz, l'énergie potentielle du corps varie de dEpp et que $\mathbf{dEpp = dW(\vec{P}) = mgdz}$

Par intégration : : Epp(z) = mgz + K

L'énergie potentielle de pesanteur à l'altitude z est définie à une constante K près.

$Epp(z_A) = mgz_A + K$ $Epp(z_B) = mgz_B + K$

D'où: $Epp_A - Epp_B = W_{AB}(\vec{P})$

ce travail ne dépend pas du chemin suivi entre A et B, il est égal à $mg(z_A - z_B)$

Le poids est une force conservative.

$Epp_A - Epp_B = mg(z_A - z_B)$

14.1.3 Choix d'un niveau de référence

On peut décréter que, pour une certaine valeur de z notée zref , Epp(ref) =0

Dans ce cas $0 = mgzref + K$ $K = - mgzref$

d'où $Epp(z) = mgz - mgzref$

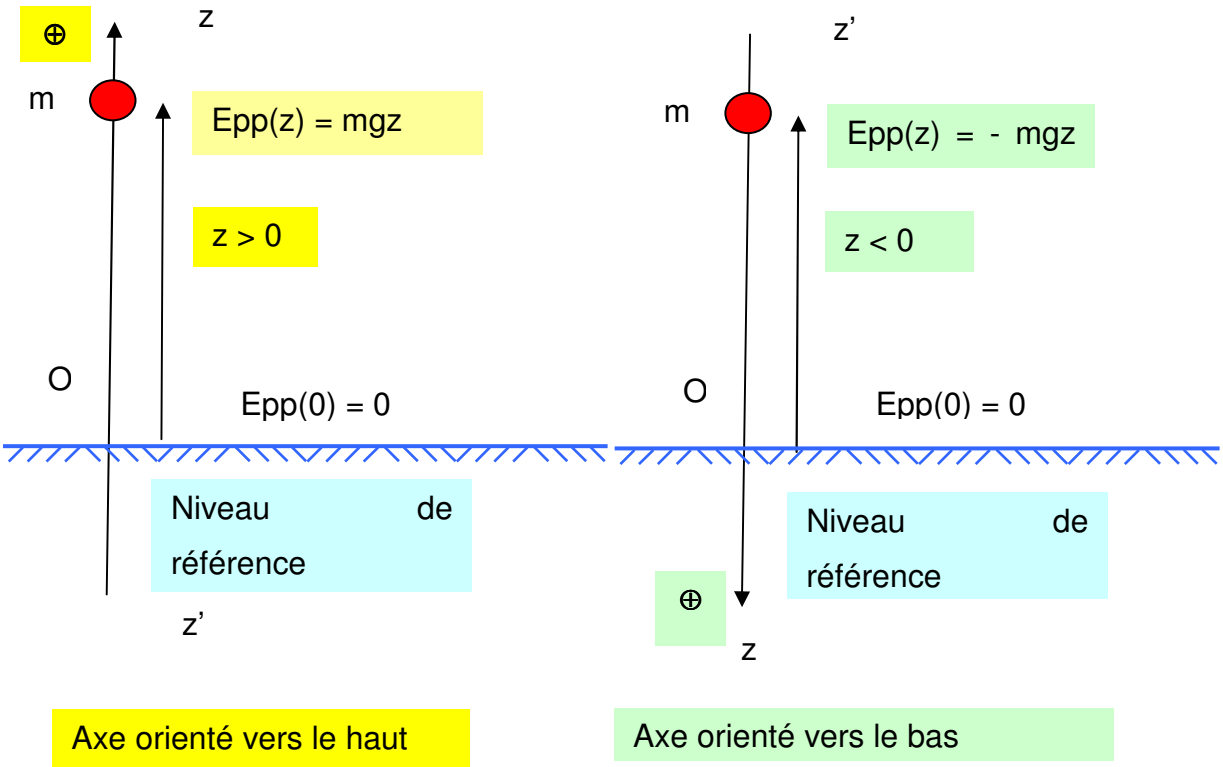
On peut encore simplifier si l'on choisit l'altitude zéro au niveau du plan horizontal choisi comme niveau de référence ; zref =0

Dans ces conditions, lorsque le solide est situé à l'altitude z, l'énergie potentielle de pesanteur est Epp=mgz

$Epp(z) = mgz$ m en kg g en $m.s^{-2}$ z en m Epp en J

axe z'z vertical orienté positivement vers le haut

Le schéma ci-après montre comment raisonner dans les deux cas de figure (axe vertical orienté vers le haut ou vers le bas)



☐ Exercice 1

14.2 ENERGIE POTENTIELLE ELASTIQUE

14.2.1 Cas d'un ressort à spires non jointives.

14.2.1.1 Notion

La variation d'énergie potentielle élastique d'un ressort est l'énergie transférée par un opérateur qui, déformant le ressort, modifie son allongement de x_1 à x_2

14.2.1.2 Expression de la variation d'énergie potentielle élastique du ressort.

Lorsque l'on exerce une force F sur un ressort , provoquant un allongement x,

$F = k.x$

k raideur du ressort en $N.m^{-1}$ x en m F en N

Le travail élémentaire qu'il faut fournir pour que l'allongement passe de x à x+dx est :

$\delta W = F.dx = k.x.dx$

Travail de la force exercée par l'opérateur pour faire varier l'allongement de x_1 à x_2 :

$$W_{AB}\vec{F} = \int_{x1}^{x2} F.dx = \int_{1}^{2} k.x.dx = \frac{1}{2}k.x_2^2 - \frac{1}{2}k.x_1^2$$

Ce travail est par définition égal à la différence d'énergie potentielle élastique

$$E_{pél2} - E_{pél1} = \frac{1}{2}k.x_2^2 - \frac{1}{2}k.x_1^2$$

Remarque : F est une force conservative ; son travail ne dépend en effet que de l'état initial et de l'état final du ressort

14.2.1.3 Expression de l'énergie potentielle élastique

Si on attribue la valeur zéro à l'énergie potentielle élastique lorsque le ressort a pour longueur sa longueur à vide, l'énergie potentielle élastique est $Epe = \frac{1}{2}kx^2$ lorsque l'allongement ou le raccourcissement du ressort est x.

☐ Exercice 2

14.2.2 Cas d'un fil de torsion.

14.2.2.1 Notion

La variation d'énergie potentielle élastique d'un fil de torsion est l'énergie transférée par un opérateur qui, déformant le fil, le tord en faisant tourner l'extrémité du fil de θ_1 à θ_2

14.2.2.2 Expression de la variation d'énergie potentielle élastique.

Le couple exercé sur l'extrémité du fil a pour expression $M_{\Delta}couple = C\theta$ lorsque l'angle de torsion est θ

C constante de torsion du fil en N.m.rad-1 θ en rad M en N.m

Le travail élémentaire qu'il faut fournir pour que l'angle de torsion passe de θ à $\theta+d\theta$ est :

$\delta W = M.d\theta = C\theta.d\theta$

14.2.2.3 Travail de la force exercée par l'opérateur pour faire varier l'angle de torsion de θ_1 à θ_2 :

$$W_{12}couple = \int_{\theta 1}^{\theta 2} C\theta.d\theta == \frac{1}{2}C.\theta_2^2 - \frac{1}{2}C.\theta_1^2$$

Ce travail est par définition égal à la différence d'énergie potentielle élastique. Il ne dépend que de l'état initial et de l'état final du ressort

$$E_{pél2} - E_{pél1} = \frac{1}{2}C.\theta_2^2 - \frac{1}{2}C.\theta_1^2$$

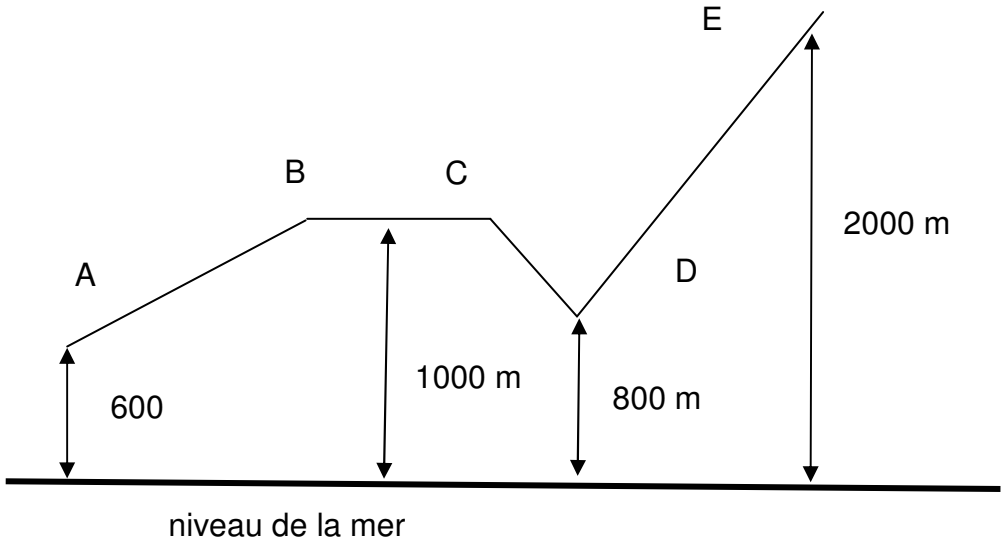
14.2.2.4 Expression de l'énergie potentielle élastique

Si on attribue la valeur zéro à l'énergie potentielle élastique lorsque le fil n'est pas tordu, l'énergie potentielle élastique est $Epe = \frac{1}{2}C\theta^2$ lorsque l'angle de torsion est θ.

14.3 EXERCICES

14.3.1 ☐ Exercice 1

Le schéma représente le chemin suivi par un montagnard de masse m=80 kg.
g=10 m.s^{-2} On néglige la variation de g avec l'altitude



Les altitudes des différents points sont données par rapport au niveau de la mer.

Compléter le tableau en y faisant figurer les valeurs de l'énergie potentielle de pesanteur du montagnard en considérant que le niveau de référence est successivement :

- le niveau de la mer
- le plan horizontal contenant B et C

- le plan horizontal contenant E

L'axe vertical z'z sera d'abord orienté vers le haut puis vers le bas

ref mer	A	B	C	D	E
z du point (en m)					
Epp=mgz en MJ					

ref Plan BC	A	B	C	D	E
z du point (en m)					
Epp=mgz en MJ					

ref Plan E	A	B	C	D	E
z du point (en m)					
Epp=mgz en MJ					

14.3.2 ☐ Exercice 2

Un opérateur comprime un ressort de constante de raideur k=40N.m^{-1} à partir de sa position de repos et provoque un raccourcissement égal à d=5 cm. Calculer la variation d'énergie potentielle élastique du système {ressort+opérateur}

14.3.3 CORRIGE DES EXERCICES

14.3.4 Corrigé de l'exercice 1

ref mer	A	B	C	D	E
z du point (en m)	600	1000	1000	800	2000
Epp=mgz en MJ	0,48	0,8	0,8	0,64	1,6

ref Plan BC	A	B	C	D	E
z du point (en m)	-400	0	0	-200	1000
Epp=mgz en MJ	-0,32	0	0	-0,16	0,8

ref Plan E	A	B	C	D	E
z du point (en m)	-1400	-1000	-1000	-1200	0
Epp=mgz en MJ	-1,12	-0,8	-0,8	-0,96	0

Si l'axe ext orienté vers le bas, on utilise Epp= -mgz et les valeurs de z sont opposées aux précédentes. On obtient lee mêmes résultats.

14.3.5 Corrigé de l'exercice 2

$$\mathbf{Epe\,initiale} = \frac{1}{2}\mathbf{kx}_1{}^2 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Epe\,finale} = \frac{1}{2}\mathbf{kx}_2{}^2 = \frac{1}{2}\times 40\times(5\times 10^{-2})^2 = \mathbf{0,05J}$$

L'énergie potentielle élastique du système augmente

CHAPITRE 15 ENERGIE MECANIQUE

15.1 ACTIVITES

15.1.1 Energies mises en jeu lors de la chute libre sans vitesse initiale d'une bille.

Une bille est abandonnée sans vitesse initiale ; elle passe en M_1 à la date t_1 avec la vitesse v_1 et en M_2 à la date t_2 avec la vitesse v_2. Que se passe-t-il au cours de la chute sur le plan énergétique ?

On applique à la bille le théorème de l'énergie cinétique entre t_1 et t_2

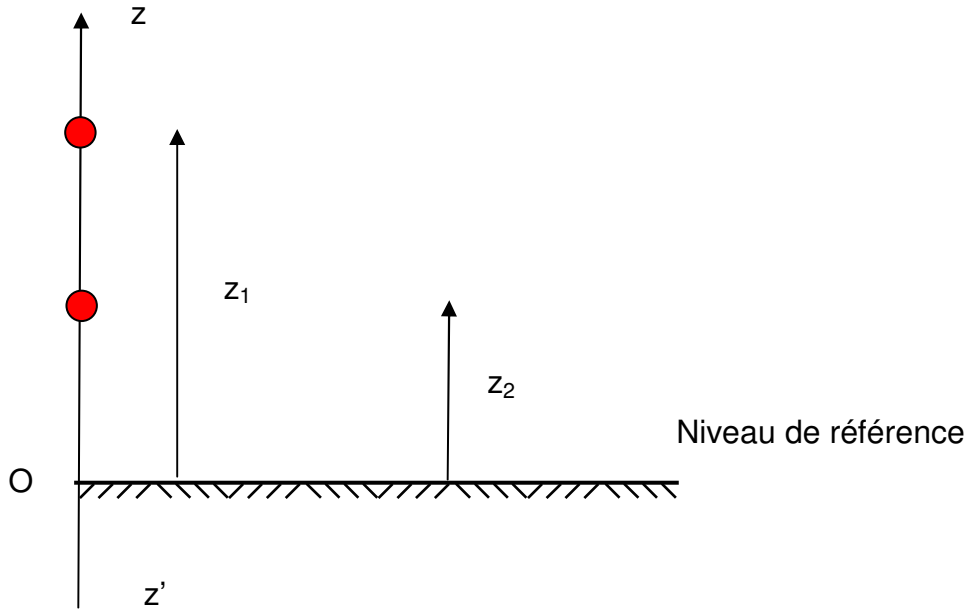
$$\mathbf{Ec_2 - Ec_1 = W_{12}(\vec{P}) = mg(z_1 - z_2) = Epp_1 - Epp_2}$$

$$\mathbf{Ec_2 - Ec_1 = Epp_1 - Epp_2}$$

On constate que, lors du passage de la position 1 à la position 2, l'augmentation de l'énergie cinétique de la bille est égale à la diminution d'énergie potentielle de pesanteur.

$$\mathbf{Ec_2 + Epp_2 = Ec_1 + Epp_1}$$

On constate qu'au cours de la chute libre, la somme Ec+Epp reste constante. Ec augmente, Epp diminue mais la somme Ec+Epp est constante.



15.1.2 Energies mises en jeu lors des oscillations d'un pendule.

Un pendule est constitué d'une barre homogène, de section constante, de masse m, mobile autour d'un axe horizontal Δ passant par l'une de ses extrémités O.

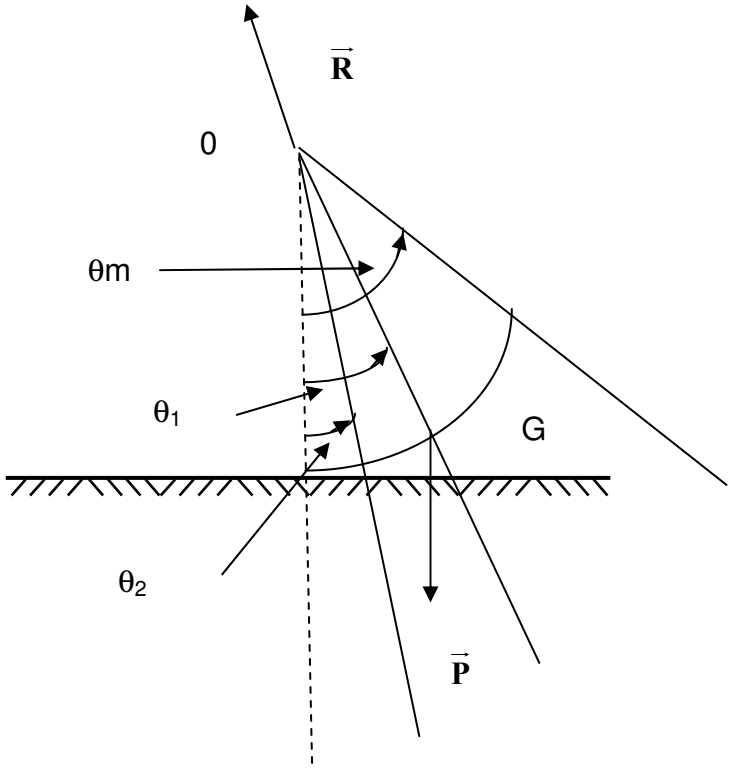
Ecarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale lorsque la barre fait avec la verticale l'angle θm, le pendule oscille. A une date t1 la barre fait avec la verticale l'angle $\theta 1$ et à une date t_2 la barre fait avec la verticale l'angle θ_2.

Que se passe-t-il au cours du mouvement sur le plan énergétique ?

On applique à la barre le théorème de l'énergie cinétique entre t_1 et t_2.Les forces extérieures appliquées à la barre sont son poids $\vec{\mathbf{P}}$ et la réaction de l'axe $\vec{\mathbf{R}}$ en O

$$\mathbf{Ec_2 - Ec_1 = W_{12}(\vec{P}) + W_{12}(\vec{R}) = mg(z_1 - z_2) + 0 = Epp_1 - Epp_2}$$

Le travail de R est nul car le point d'application O de cette force ne se déplace pas.



$$\mathbf{Ec_2 - Ec_1 = Epp_1 - Epp_2} \qquad \mathbf{Ec_2 + Epp_2 = Ec_1 + Epp_1}$$

On constate qu'au cours du mouvement, la somme Ec+Epp reste constante.

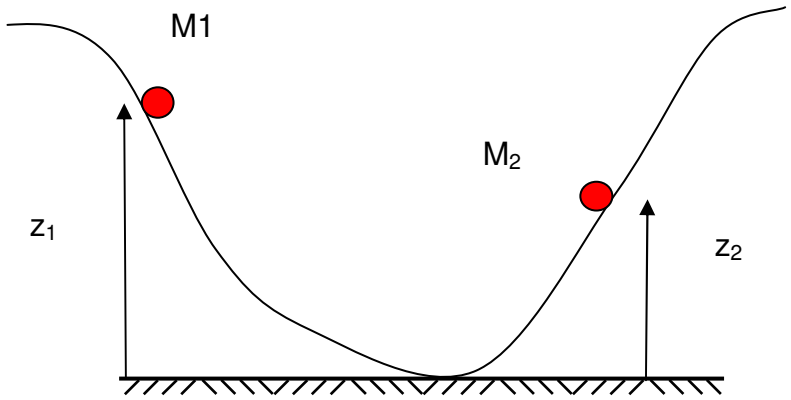
Au cours du mouvement, il y a transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique (lors des descentes) et d'énergie cinétique en énergie potentielle (lors des montées).

15.1.3 Energies mises en jeu lors du déplacement avec frottement d'un solide sur une piste

Une bille, abandonnée sans vitesse initiale en M_1à l'altitude z_1 à l'intérieur d'une glissière incurvée roule sur la paroi de la glissière, remonte jusqu'en M_2 à l'altitude z_2 puis repart en sens inverse. On constate que $z_2 < z_1$

Décrire le mouvement de la bille et interpréter.

Que se passe-t-il au cours du mouvement sur le plan énergétique ?



Système : la bille

Au départ l'énergie cinétique est nulle. Au cours de la descente, l'énergie potentielle est transformée progressivement en énergie cinétique. Lors de la montée c'est la transformation inverse qui se produit. A l'arrivée en M_2, la vitesse est nulle .

Etant donné que $z_2 < z_1$, on peut penser que de l'énergie a été perdue par frottement au cours du mouvement de 1 à 2.

Dans cette hypothèse, l'application du théorème de l'énergie cinétique au système entre 1 et 2 permet d'écrire

$$\mathbf{Ec_2 - Ec_1 = W_{12}(\vec{P}) + W_{12}(\vec{R}) + W_{12}(\vec{f}) = mg(z_1 - z_2) + 0 + W_{12}(\vec{f})}$$

$$\mathbf{Ec_2 - Ec_1 = Epp_1 - Epp_2 + W_{12}(\vec{f})}$$

$$\mathbf{(Ec_2 + Epp_2) - (Ec_1 + Epp_1) = W_{12}\vec{f}}$$

Conclusions

Dans les trois exemples précédents, très différents les uns des autres, la somme Ec+Epp intervient.

Dans les deux premiers cas, il n'y a pas de frottements et l'on constate que la somme Ec+Epp reste constante au cours du temps.

Dans le troisième cas, il y a des forces de frottements résistantes et la somme Ec+Epp diminue au cours du temps.

Cette somme intervient constamment en mécanique ; on l'appelle énergie mécanique.

15.2 ENERGIE MECANIQUE

C'est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle (de pesanteur et/ou élastique)

E = Ep+Ec

E = Epp+Epe+Ec

15.3 VARIATION D'ENERGIE MECANIQUE D'UN SOLIDE

L'application du théorème de l'énergie cinétique à un solide permet d'écrire : $\mathbf{E_{Cf} - E_{Ci} = \sum W\overrightarrow{fext}}$

Les forces extérieures appliquées au solide se répartissent en forces extérieures conservatives et forces extérieures non conservatives.

$$\mathbf{E_{Cf} - E_{Ci} = \sum W\overrightarrow{fext\ conserv} + \sum W\overrightarrow{fext\ non\ conserv}}$$

Les forces extérieures conservatives ne dépendent pas du chemin suivi par le solide mais uniquement de la position initiale et de la position finale ; on dit également qu'elles dérivent d'un potentiel. La somme des travaux de ces forces est égale à la variation d'énergie potentielle.

$$\mathbf{E_{pi} - E_{pf} = \sum W\overrightarrow{fext}\ conserv}$$

En remplaçant dans la relation précédente on obtient :

$$\mathbf{E_{Cf} - E_{Ci} = E_{pi} - E_{pf} + \sum W\overrightarrow{fext\ non\ conserv}}$$

$$\mathbf{(E_{Cf} + E_{pf}) - (E_{Ci} + E_{pi}) = \sum W\overrightarrow{fext\ non\ conservatives}}$$

$$\mathbf{E_f - E_i = \sum W\overrightarrow{fext\ non\ conservatives}}$$

Conclusion :

Dans le champ de pesanteur supposé galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un solide entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces extérieures non conservatives exercées sur le solide entre ces mêmes instants.

15.4 RETOUR SUR LES EXEMPLES DES ACTIVITES

Cas 1 :

Le système est la bille. la seule force extérieure appliquée est le poids $\vec{P}$. Le poids est une force conservative donc $E_2 - E_1 = \sum \overrightarrow{W fext\ non\ conservatives}$ =0

E_2- E_1= 0 $E_2 = E_1$ il y a conservation de l'énergie mécanique.

Cas 2 :

Le système est le pendule.

Les forces extérieures appliquées au système sont son poids $\vec{P}$ et la réaction de l'axe $\vec{R}$

Le poids est une force conservative et la réaction de l'axe ne travaille pas donc comme précédemment il y a conservation de l'énergie mécanique.

Cas 3 :

La bille est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction du support $\vec{R}$ et à des frottements résistants Le travail de $\vec{R}$ est nul car la force est appliquée au centre instantané de rotation I, celui de $\vec{f}$ est négatif.

$E_2 - E_1 = W_{12}(\vec{f})$

$E_2 < E_1$

Il n'y a pas dans cet exemple de conservation de l'énergie mécanique.

$\vec{f}$ est une force extérieure non conservative : son travail dépend du chemin suivi. Plus le trajet entre 1 et 2 sera long, plus le travail de $\vec{f}$ sera important et plus l'énergie mécanique diminuera.

CHAPITRE 16 CONSERVATION DE L'ENERGIE MECANIQUE

16.1 DANS QUELLES CONDITIONS L'ENERGIE MECANIQUE SE CONSERVE ?

On a vu que, pour un solide dans le champ de pesanteur:

$$E_f - E_i = \sum W\overrightarrow{fext\ non\ conservatives}$$

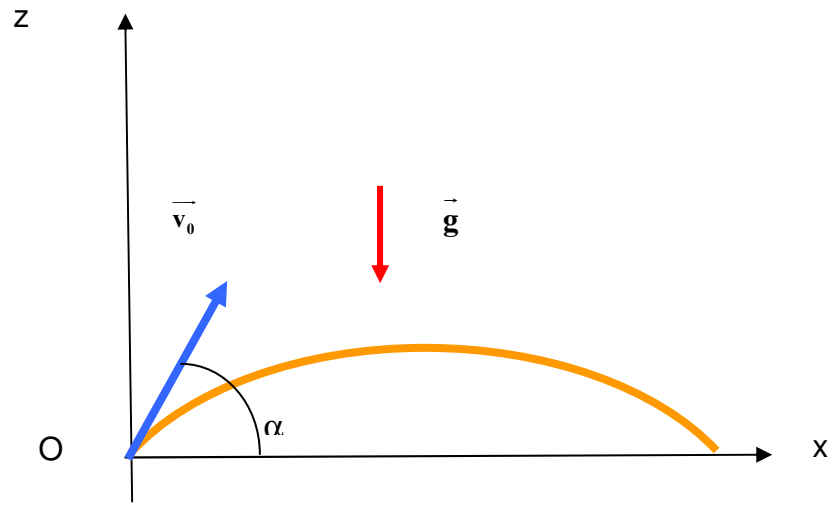
Si le solide n'est soumis à aucune force extérieure non conservative,

$E_f - E_i = 0$ donc E = constante ; l'énergie mécanique se conserve.

16.2 EXEMPLES DE CONSERVATION DE L'ENERGIE MECANIQUE

16.2.1 Application au mouvement d'un projectile.

Le projectile supposé ponctuel, est lancé obliquement. A t=0, son centre d'inertie passe en O avec la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ qui fait alors avec Ox l'angle α. A la date t, le centre d'inertie a pour vitesse v et son altitude est z.



Le système (corps ponctuel) n'est soumis qu'à une force extérieure conservative (le poids). Les frottements sont négligés.

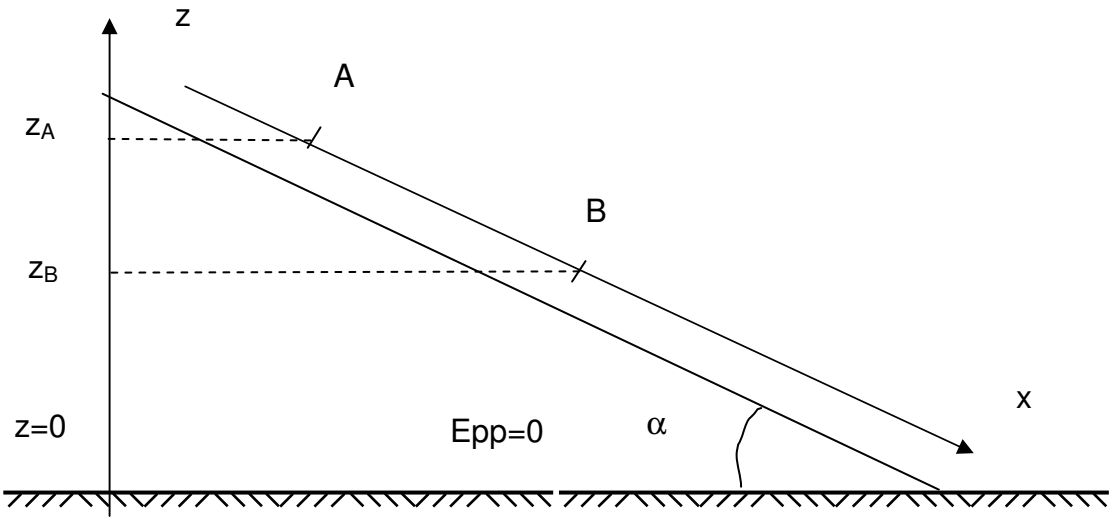
$$E = Eo \Rightarrow Ec + Epp = Eco + Eppo$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_o^2 + mgz_o = \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = -mgz \qquad v^2 - v_o^2 = -2gz$$ résultat connu

16.2.2 glissement sans frottement d'un solide sur un plan incliné

Un solide glisse sans frottement sur un plan incliné. Le système est le solide et le référentiel choisi est le référentiel terrestre, supposé galiléen.



Le corps est soumis à deux forces extérieures : $\vec{P}$ et $\overrightarrow{R_N}$

- le poids est une force conservative
- la réaction normale de la piste a un travail nul

Il n'y a pas de force non conservative : $E_A = E_B$

$Epp_A + Ec_A = Epp_B + Ec_B$

$mgz_A + 0{,}5\ mv_A^2 = mgz_B + 0.5\ mv_B^2$

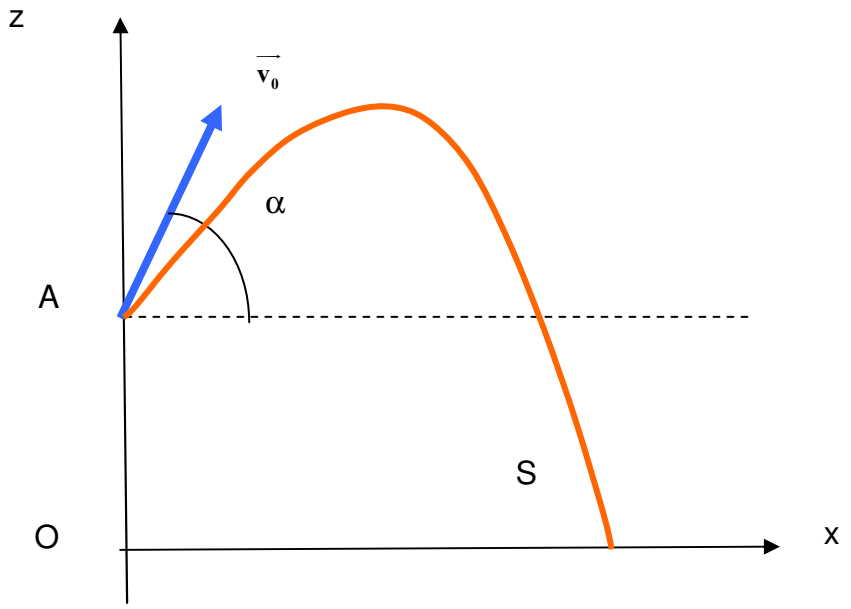
$0.5\ mv_B^2 - 0{,}5\ mv_A^2 = mgz_A - mgz_B = mg\ AB \sin\alpha$

On retrouve l'expression que l'on aurait obtenue en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

16.3 EXERCICES

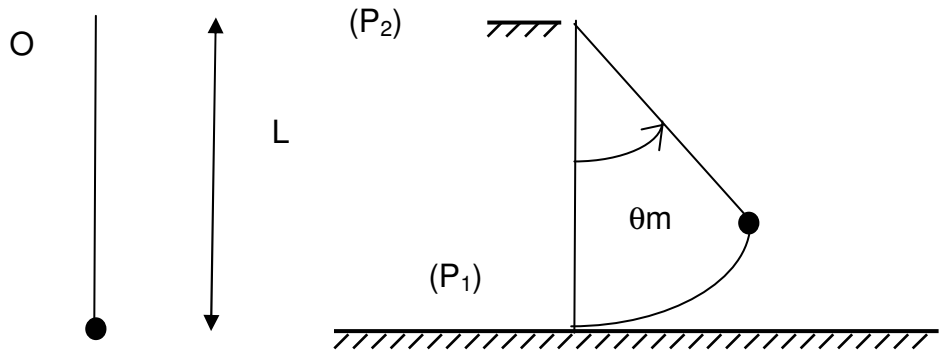
∗ Exercice 1

Un projectile de masse m, supposé ponctuel, est lancé à t=0 de A (xA=0 ; zA=h) avec la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ contenue dans le plan (Ox, Oz) et faisant avec l'axe Ox horizontal l'angle α. En utilisant l'énergie mécanique, déterminer la valeur de la vitesse d'arrivée du projectile au sol en S (zS = 0).



∗ Exercice 2

Un pendule simple est constitué d'un corps de masse m, supposé ponctuel, suspendu à un fil de longueur L, inextensible et de masse négligeable.



Ecarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale lorsque le fil fait avec la verticale l'angle θm, le pendule oscille. A une date quelconque le fil fait avec la verticale l'angle θ. Les frottements sont négligés.

Exprimer l'énergie mécanique du pendule en fonction de L, θ, m,g et de v, la vitesse du corps de masse m lorsque l'angle d' écart est θ. On prendra un axe

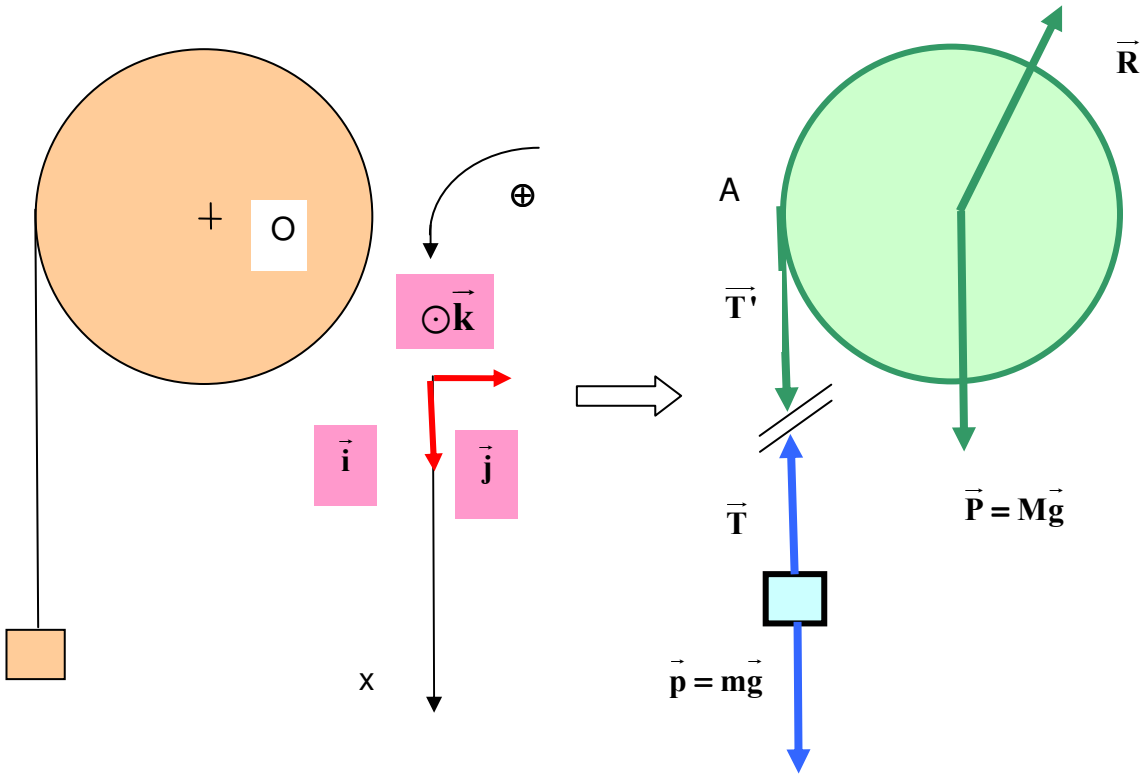
z'z vertical ascendant et pour niveau de référence le plan horizontal P_1 puis le plan horizontal P_2:

En déduire la valeur de v en fonction de L, θ, θm et g. Montrer que l'on obtient le même résultat dans les deux cas.

∗ Exercice 3

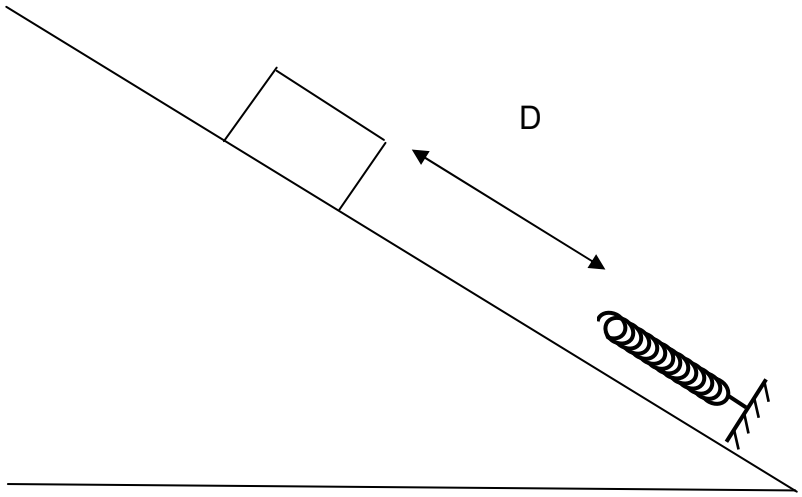
On considère le système représenté. Ce système, maintenu en équilibre, est abandonné sans vitesse initiale. Le corps de masse m tombe entraînant la rotation du cylindre de masse M et de rayon R. Déterminer l'expression de l'accélération du corps de masse m

On prendra comme système l'ensemble {corps+fil+cylindre}



∗ Exercice 4

Un solide de masse M est maintenu sur un plan incliné dans la position représentée. Il se trouve alors à la distance D du ressort. A la date t=0, il est abandonné sans vitesse initiale ; il glisse sans frottement et vient heurter le ressort de raideur k. Déterminer le raccourcissement maximal d du ressort.



16.4 CORRIGE DES EXERCICES

16.4.1 Corrigé de l'exercice 1

Système : le projectile Référentiel terrestre supposé galiléen.

La seule force extérieure appliquée au solide est son poids et cette force est conservative d'où E =cte

$E_A=E_S$ $Ec_A+Epp_A= Ec_S+Epp_S$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A = \frac{1}{2}mv_S^2 + mgz_S$$

$$v_S = \sqrt{v_A^2 + 2g(z_A - z_S)} = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$$

16.4.2 Corrigé de l'exercice 2

Système étudié :le corps

Le niveau de référence est P1

$$E = Ec + Epp = mgz + \frac{1}{2}mv^2 = mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$$

E est constante On écrit que E a même valeur au passage à une extrémité ou au passage à une position quelconque

$$mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2 = mgL(1-\cos\theta m) + 0$$

.

d'où $v^2 = 2gL(\cos\theta - \cos\theta m)$

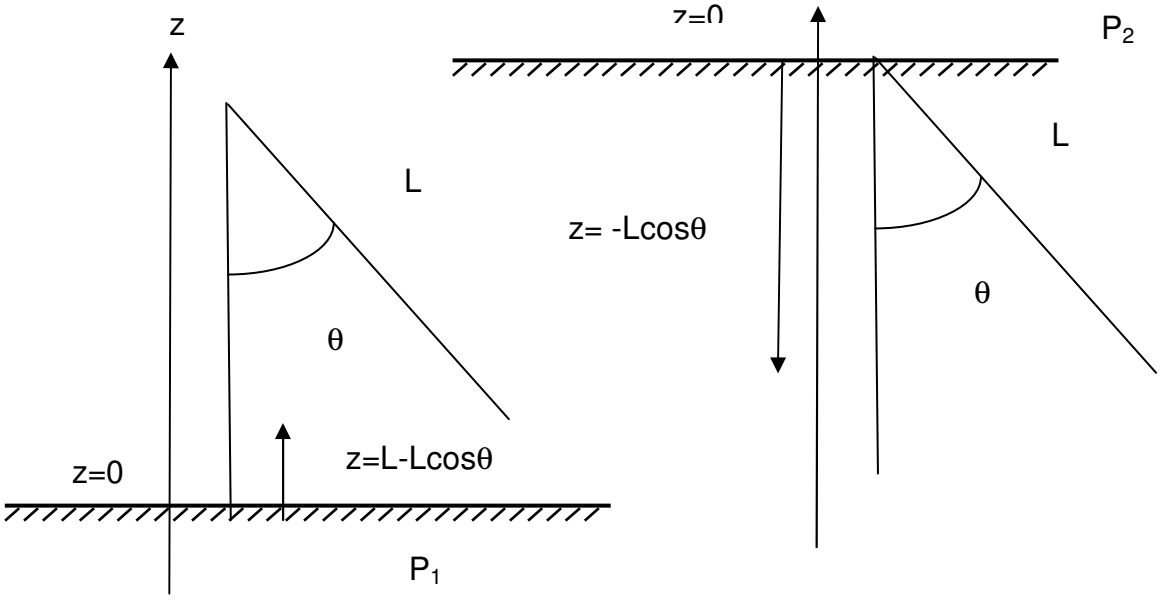
Le niveau de référence est P2

$$\mathbf{E = Ec + Epp = mgz + \frac{1}{2}mv^2}$$

$$\mathbf{E = -mgL\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2}$$

$$\mathbf{-mgL\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2 = -mgL\cos\theta m + 0}$$

même résultat pour v



16.4.3 Corrigé de l'exercice 3

Système étudié : {corps+fil+cylindre}

E=cte $\mathbf{Ec + Epp = K}$

$$\mathbf{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 - mgz = K}$$

Le niveau de référence est le plan horizontal passant par la position initiale du corps de masse m. L'énergie potentielle relative au cylindre est constante car il n'y a pas de variation d'altitude du cylindre.

L'axe z'z est orienté positivement vers le bas. Epp= - mgz

On dérive la relation par rapport au temps

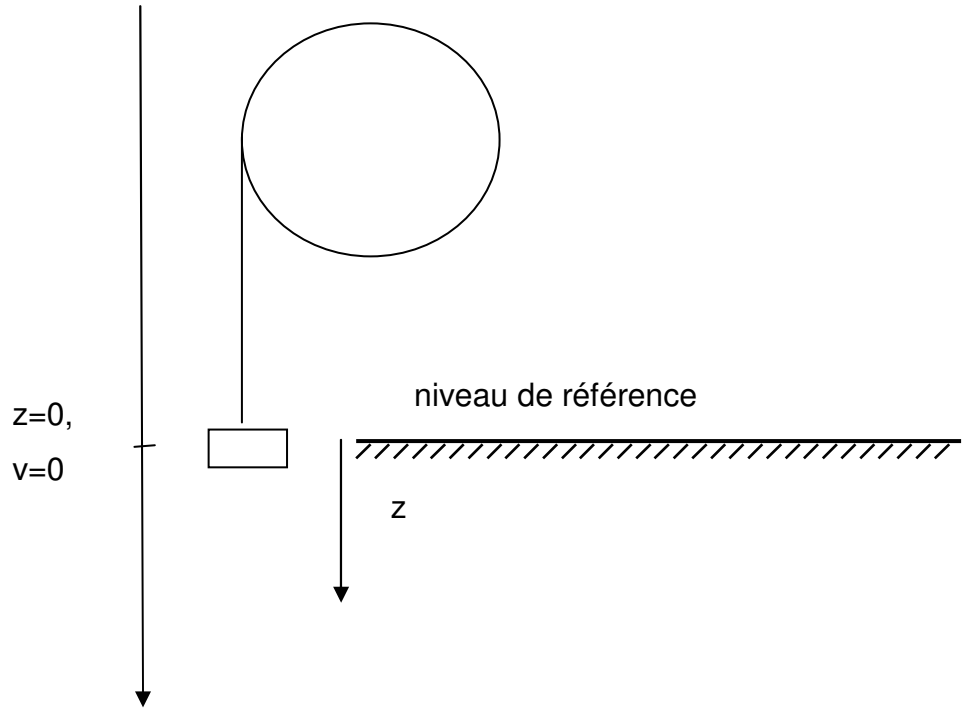
$$\mathbf{\frac{1}{2}m2va + \frac{1}{2}J_\Delta 2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgv = 0}$$

La condition de non glissement s'écrit : $\mathbf{v = R\dot{\theta}}$ en dérivant $\mathbf{a = R\ddot{\theta}}$

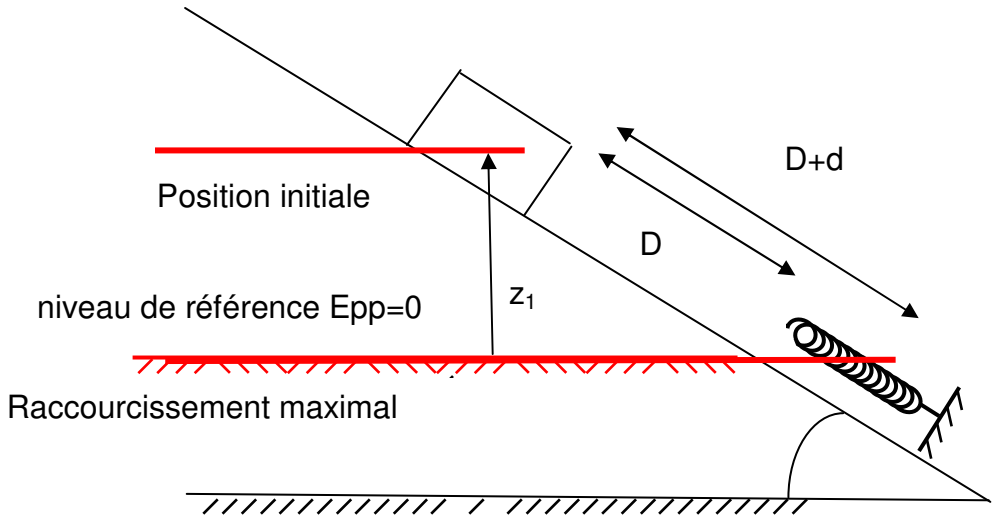
En remplaçant dans la relation, on obtient :

$$ma + J_\Delta \frac{1}{R}\frac{a}{R} = mg \qquad a = \frac{mg}{m + \frac{J_\Delta}{R^2}}$$

r



16.4.4 Corrigé de l'exercice 4



Système étudié : {corps+ressort}

$$E_1 = E_2 \qquad E_{C1} + E_{PP1} + E_{PE1} = E_{C2} + E_{PP2} + E_{PE2}$$

Le niveau de référence est le plan horizontal passant par la position la plus basse que prend le corps (raccourcissement maximal du ressort).

$z_1=(D+d)\sin\alpha$ $z_2=0$ $Epe_2=0{,}5\ kd^2$

$v_1=0$ car départ sans vitesse initiale $v_2=0$ car la vitesse est nulle lorsque le raccourcissement du ressort est maximal

$$0+Mg(D+d)\sin\alpha+0=0+\frac{1}{2}kd^2+0$$

$$0=Mg(D+d)\sin\alpha+0-\frac{1}{2}kd^2$$ d est la solution positive de l'équation du second degré $$d=\frac{2}{k}(Mg\sin\alpha+\sqrt{M^2g^2\sin^2\alpha+2kMgD\sin\alpha})$$

CHAPITRE 17 NON CONSERVATION DE L'ENERGIE MECANIQUE.

17.1 DANS QUELS CAS L'ENERGIE MECANIQUE NE SE CONSERVE PAS?

On a vu que, pour un solide dans le champ de pesanteur:

$$\mathbf{E_f - E_i = \sum \overrightarrow{W fext\ non\ conservatives}}$$

Si le solide est soumis à des forces extérieures non conservatives,

$\mathbf{E_f - E_i} \neq 0$ donc E ≠ constante ; l'énergie mécanique ne se conserve pas.

Si les forces extérieures non conservatives ont une action globale motrice,

$$\mathbf{\sum \overrightarrow{W fext\ non\ conservatives} > 0 \quad \Rightarrow \quad E_f > E_i}$$

Si les forces extérieures non conservatives ont une action globale résistante,

$$\mathbf{\sum \overrightarrow{W fext\ non\ conservatives} < 0 \quad \Rightarrow \quad E_f < E_i}$$

C'est notamment le cas lorsqu'il y a frottements.

17.2 EXEMPLES DE NON CONSERVATION DE L'ENERGIE MECANIQUE

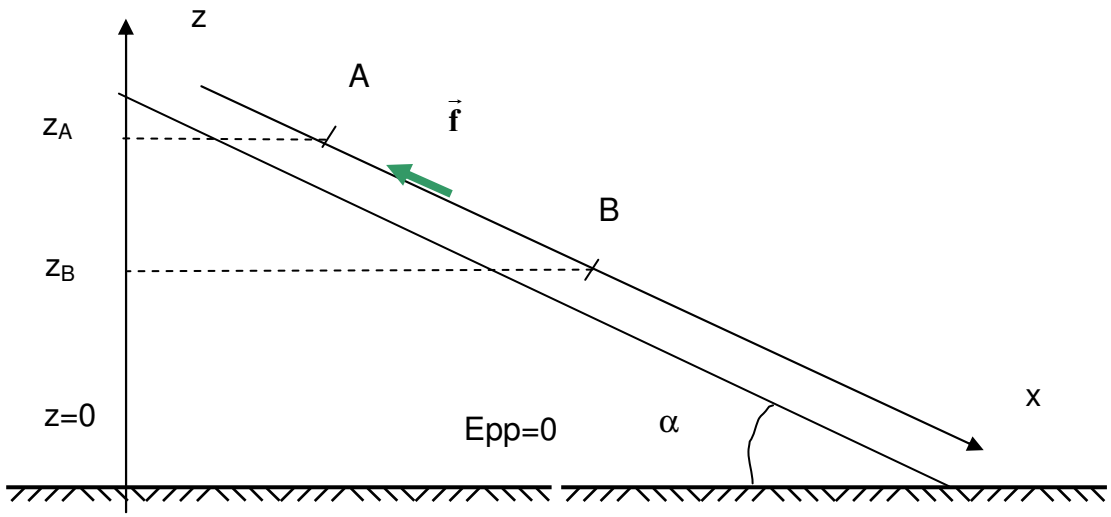
17.2.1 Glissement avec frottement sur un plan incliné

Un solide glisse avec frottement sur un plan incliné. La force de frottement est opposée au vecteur vitesse et sa valeur f est supposée constante.

Le système est le solide et le référentiel choisi est le référentiel terrestre, supposé galiléen.

Le corps est soumis à trois forces extérieures : $\vec{P}$, $\overrightarrow{R_N}$ et $\vec{f}$

- le poids est une force conservative
- la réaction normale de la piste a un travail nul
- la force de frottement est non conservative.



$E_B - E_A = \mathbf{W_{AB}(\vec{f})} = f.AB \cos \pi = - f.AB$

$Epp_B + Ec_B – (Epp_A + Ec_A) = - f.AB$

$mgz_B + 0.5\ mv_B^2 – (mgz_A + 0{,}5\ mv_A^2) = - f.AB$

$0.5\ mv_B^2 - 0{,}5\ mv_A^2 = mgz_A - mgz_B - f.AB = mg\ AB \sin\alpha - f.AB$

On retrouve l'expression que l'on aurait obtenue en appliquant le théorème de l'énergie cinétique

17.2.2 Accélération d'un cylindre

Un cylindre plein, constitué d'un matériau homogène de masse volumique ρ, a pour rayon R et pour hauteur h. Entre la date t_1 et la date t_2, le cylindre est soumis à une action motrice extérieure qui lui fournit une puissance P constante et sa vitesse angulaire passe de $\dot{\theta}_1$ à $\dot{\theta}_2$

Le système est le cylindre et le référentiel choisi est le référentiel terrestre, supposé galiléen.

Le système est soumis à des forces extérieures :

- le poids est une force conservative
- la réaction de l'axe, confondue avec l'axe a un travail nul
- les forces motrices sont non conservatives.

$\mathbf{Ec_2 + Epp_2 = Ec_1 + Epp_1 + P(t_2 - t_1)}$ car la puissance est constante

$\mathbf{Epp_1 = Epp_2}$ car il n'y a pas variation d'altitude

$$\frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}_2^{\,2} = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}_1^{\,2} + P(t_2 - t_1) \quad \text{avec} \quad J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}\rho\pi R^2 hR^2 = \frac{1}{2}\rho\pi hR^4$$

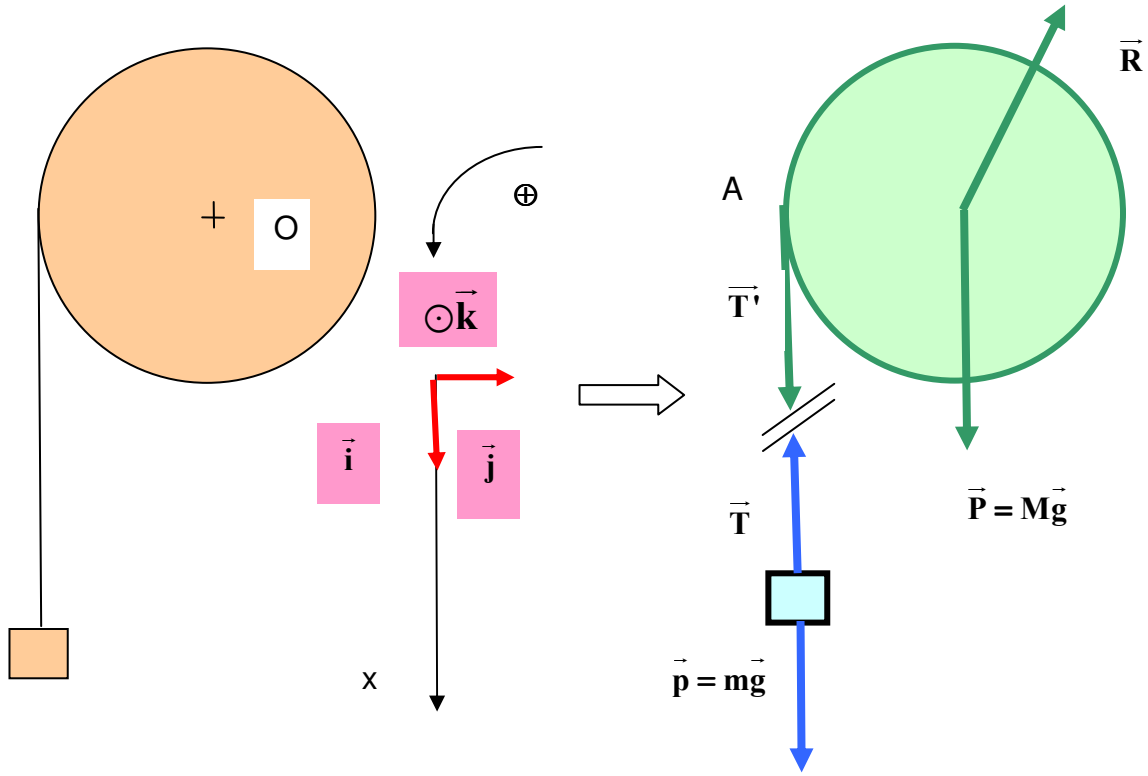
17.3 EXERCICES

∗ Exercice 1

Un solide de masse M est abandonné sans vitesse initiale sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Les frottements, au cours de la descente, équivalent à une force opposée au vecteur vitesse et de valeur constante f. On étudie le mouvement du solide.

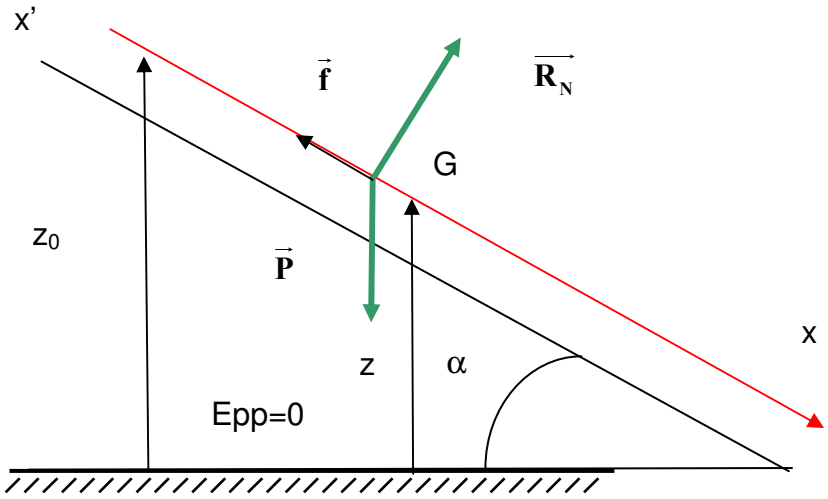
∗ Exercice 2

On considère le système représenté. Ce système, maintenu en équilibre, est abandonné sans vitesse initiale. Le corps de masse m tombe entraînant la rotation du cylindre de masse M et de rayon R. Déterminer l'expression de l'accélération du corps de masse m. On utilisera la variation d'énergie mécanique du cylindre puis celle du corps de masse m.



17.4 CORRIGES DES EXERCICES

17.4.1 Corrigé de l'exercice 1



La force de frottement est une force intérieure non conservative

E-E_0=W force extérieure non conservative

(Ec+Epp)- (Ec_0+Epp_0)=Wf

$$(\frac{1}{2}mv^2 + mgz) - (mgz_0 + 0) = W(\vec{f})$$

$\frac{1}{2}mv^2 + mg(z - z_0) = -f(x - x_0)$ L'axe z'z est orienté vers le haut, l'axe x'x est orienté vers le bas

$\frac{1}{2}mv^2 + mg(x_0 \sin\alpha - x\sin\alpha) = -f(x - x_0)$ On dérive la relation par rapport au temps

$$\frac{1}{2}m2va - mgv\sin\alpha = -fv$$

$$a = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$$

17.4.2 Corrigé de l'exercice 2

Système : le cylindre

Ecf - Êci= $W(\vec{T}')$ $\frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 - 0 = W(\vec{T}')$ (1) $W(\vec{R})$ est nul car il n'y a pas de déplacement de son point d'application.

Système : le corps de masse m

Ef-Ei= W force ext non conservative= $\mathbf{W(\vec{T})}$

Ecf+Eppf-Eci-Eppi=(Ecf-Eci)+(Eppf-Eppi)= $\mathbf{W(\vec{T})}$

$$(\frac{1}{2}mv^2 - 0) + (0 - mgx) = W(\vec{T}) \quad (2)$$

Résolution

En additionnant (1) et (2), on obtient :

$$\frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2 - mgx = W(\vec{T}) + W(\vec{T}') = 0$$

Remarque :

Il n'y a pas conservation de l'énergie mécanique pour le corps ou pour le cylindre mais il y a conservation de l'énergie mécanique pour l'ensemble 'cylindre+corps de masse m+fils} car il n'y a pas de frottement.

CHAPITRE 18 PROBLEMES DE CHOCS

18.1 CHOC ENTRE DEUX CORPS SUPPOSES PONCTUELS

18.1.1 Conservation de la quantité de mouvement.

Deux corps ponctuels de masses m_1 et m_2 ont pour vitesses $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ juste avant le choc et pour vitesses $\overrightarrow{v'_1}$ et $\overrightarrow{v'_2}$ juste après le choc. On considère le système formé par les deux corps. Les poids des deux corps sont compensés par les réactions des supports. Les forces d'interaction entre les deux corps lors du choc sont des forces intérieures au système.

Par application de la seconde loi de Newton au système : $\sum \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{0} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{p} = \overrightarrow{cons\,tan\,te}$

d'où $\vec{p}\,du\,système\,juste\,avant\,le\,choc = \vec{p'}\,du\,système\,juste\,après\,le\,choc$

$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{v'_1} + m_2\overrightarrow{v'_2}$ Cette relation traduit la conservation de la quantité de mouvement.

18.1.2 Etude énergétique.

18.1.2.1 Cas d'un choc élastique.

Dans ce cas il y a conservation de l'énergie mécanique et par conséquent de l'énergie cinétique puisqu'il n'y pas de variation d'énergie potentielle de pesanteur entre l'instant juste avant le choc et l'instant juste après.

Les corps étant ponctuels : $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2$

18.1.2.2 Cas d'un choc inélastique

Au cours du choc, une partie de l'énergie mécanique est transformée en chaleur. Il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique dans ce cas.

18.2 COUPLAGE DE DEUX SOLIDES TOURNANT AUTOUR DU MÊME AXE

Deux rotors R_1 et R_2 sont mobiles autour du même axe Δ.

R_1 est initialement immobile, R_2 tourne à la vitesse angulaire ω. Les deux rotors sont couplés à l'aide d'un embrayage et forment un seul ensemble tournant à la vitesse angulaire ω'.

On considère le système formé par les deux rotors.

Par application de la relation de la dynamique :

$$\sum \mathbf{M} = \frac{\mathbf{d}\sigma}{\mathbf{dt}} \Rightarrow 0 = \frac{\mathbf{d}\sigma}{\mathbf{dt}} \Rightarrow \sigma = \mathbf{cons\,tan\,te}$$

σ du système juste avant le choc = σ' du système juste après le choc

$$\vec{\sigma}\,\mathbf{du\ système\ juste\ avant\ le\ choc} = \vec{\sigma}'\,\mathbf{du\ système\ juste\ après\ le\ choc}$$

$$\mathbf{J_{1\Delta}}0 + \mathbf{J_{2\Delta}}\omega = (\mathbf{J_{1\Delta}} + \mathbf{J_{2\Delta}})\omega' \Rightarrow \mathbf{J_{2\Delta}}\omega = (\mathbf{J_{1\Delta}} + \mathbf{J_{2\Delta}})\omega'$$

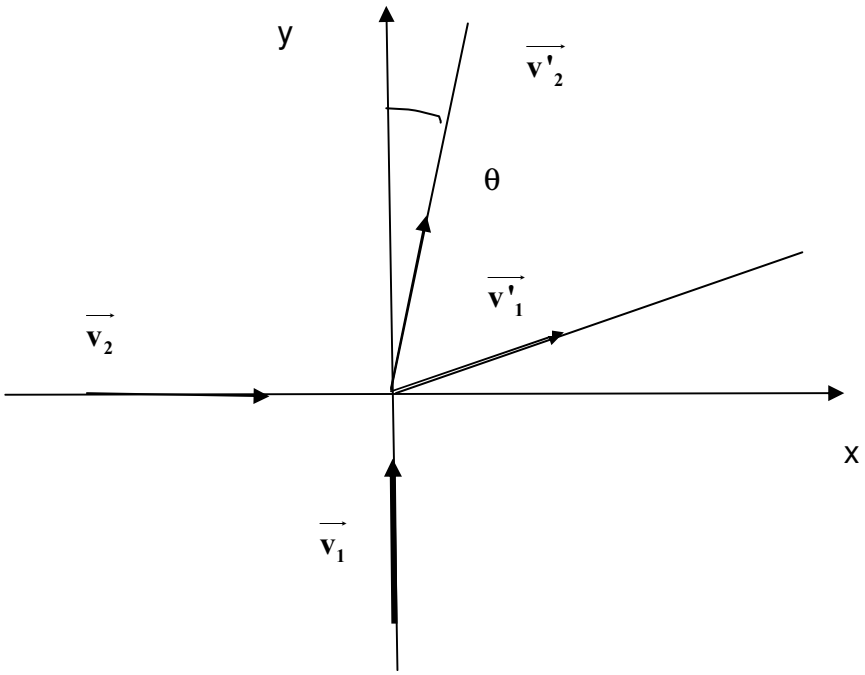
Le choc avec accrochage étant un choc mou, inélastique, il n'y aura pas conservation de l'énergie cinétique.

18.3 EXERCICES

∗ Exercice 1

Deux voitures de masses m_1 et m_2 animées des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ se déplacent sur deux voies perpendiculaires. A l'intersection, elles se heurtent. La voiture 1 a la vitesse $\vec{v'}_1$ juste après le choc ; la voiture 2 a la vitesse $\vec{v'}_2$ juste après le choc et sa trajectoire fait l'angle θ avec y'y. . On suppose que le choc est parfaitement élastique.

Etablir le système d'équations qui permettrait de déterminer les expressions de v'_1 et v'_2 juste après le choc.



∗ Exercice 2

Même énoncé que dans l'exercice précédent mais le choc est mou et s'effectue avec accrochage des véhicules.

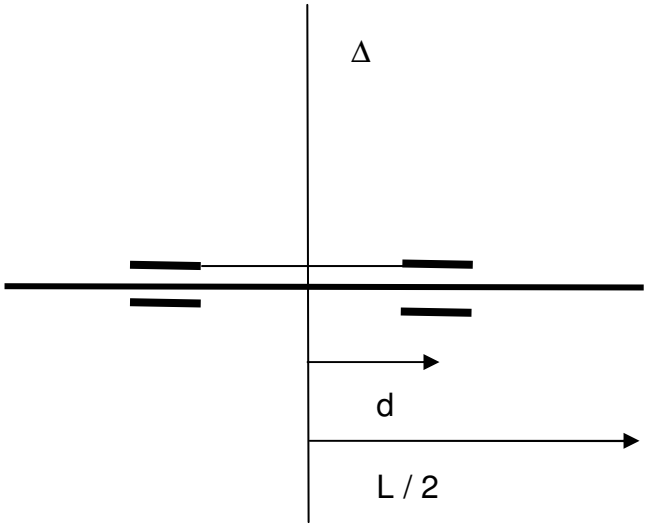
Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse de l'ensemble juste après le choc.

∗ Exercice 3

Une tige horizontale, de masse M et de longueur L, est mobile autour de l'axe vertical passant par son centre. Sur la tige peuvent coulisser deux corps ponctuels de masse m retenus par deux fils fins identiques de longueur d. L'ensemble, tourne à la vitesse angulaire ω_1 constante. Les frottements sont négligés

Déterminer la tension de chaque fil.

Au cours du mouvement les deux fils cassent en même temps et les deux corps s'écartent de l'axe et viennent se placer aux extrémités de la tige où ils sont retenus par des petites butées. L'ensemble a alors la vitesse ω_2. Déterminer ω_2.



18.4 CORRIGES DES EXERCICES

18.4.1 Corrigé de l'exercice 1

Système : l'ensemble des deux corps

Il y a conservation de la quantité de mouvement du système au cours du choc :

$$\mathbf{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{v'_1} + m_2\overrightarrow{v'_2}}$$

On projette sur les axes

sur Ox : $\mathbf{0 + m_2 v_2 = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}}$

sur Oy $\mathbf{m_1 v_1 + 0 = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}}$

Il y a conservation de l'énergie cinétique au cours de ce choc

$$\mathbf{\frac{1}{2}m_1 v_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{\,2} = \frac{1}{2}m_1 v'^{\,2}_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^{\,2}_2}$$

$$\mathbf{v'^{\,2}_1 = v'^{\,2}_{1x} + v'^{\,2}_{1y}} \qquad \mathbf{v'^{\,2}_2 = v'^{\,2}_{2x} + v'^{\,2}_{2y}}$$

On connaît la direction de la trajectoire de la voiture 2 après le choc ; c'est la direction du vecteur v'_2 , on peut écrire une nouvelle relation

$$\mathbf{\tan\theta = \frac{v'_{2x}}{v'_{2y}}}$$

Il suffit de résoudre le système d'équations (4 équations à 4 inconnues).

18.4.2 Corrigé de l'exercice 2

Système : l'ensemble des deux corps

Il y a conservation de la quantité de mouvement du système au cours du choc :

$$\mathbf{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{v'}}$$

En projetant sur les axes on obtient les deux composantes de la vitesse de l'ensemble après le choc.

sur Ox : $\mathbf{0 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v'_x}$

sur Oy $\mathbf{0 + m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v'_y}$

$$\mathbf{\overrightarrow{v'} = v'_x\vec{i} + v'_y\vec{j}}$$

18.4.3 Corrigé de l'exercice 3

Tension de chaque fil

Système; un corps (accroché au fil)

Le mouvement de ce corps est circulaire uniforme de vitesse angulaire ω_1.

L'application à ce corps de la deuxième loi de Newton donne :

$$\mathbf{\vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \vec{T} = m\overrightarrow{a_N}}$$

On projette sur le fil $T=ma_N = m\omega_1^2 d$

Vitesse de l'ensemble

On écrit la conservation du moment cinétique de l'ensemble en rotation

$$\mathbf{(J_\Delta + 2md^2)\omega_1 = (J_\Delta + 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2)\omega_2}$$

CHAPITRE 19 OSCILLATEURS MECANIQUES LIBRES

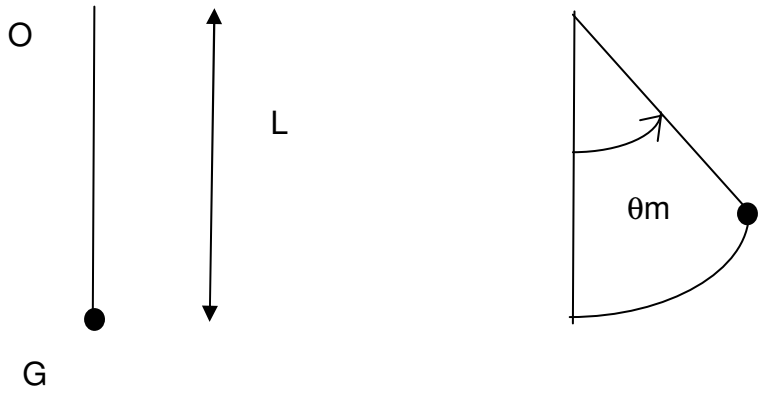
Les oscillateurs sont nombreux en physique et dans la vie courante (balancier d'horloge, balançoire …)

Dans le cas des oscillateurs mécaniques libres, le rythme des oscillations n'est pas imposé par un opérateur ou un système extérieur au système oscillant.

19.1 PENDULE SIMPLE

19.1.1 Définition

Un pendule simple est constitué d'un corps de masse m, supposé ponctuel, suspendu à un fil de longueur L, inextensible et de masse négligeable.



Ecarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale lorsque le fil fait avec la verticale l'angle θm, le pendule oscille. A une date quelconque le fil fait avec la verticale l'angle θ.

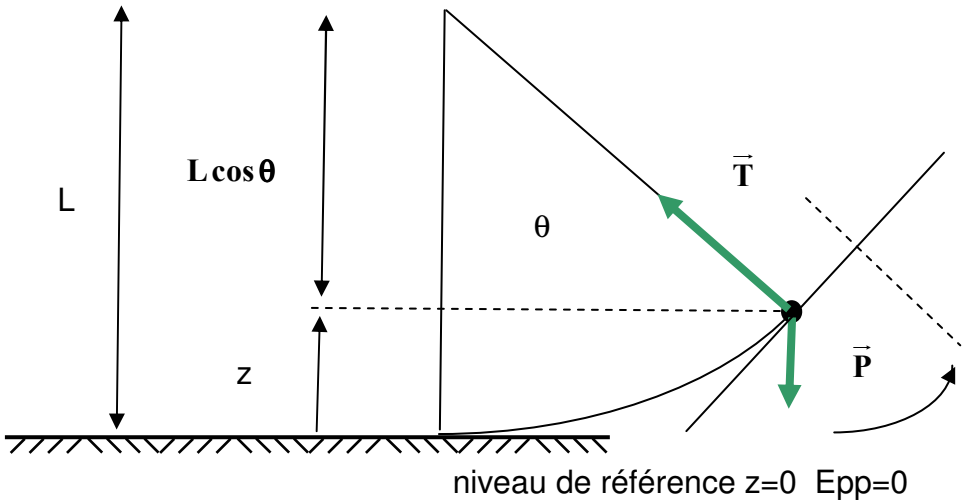
19.1.2 Equation du mouvement.

On considère comme système le corps ponctuel de masse m. On choisit comme référentiel le référentiel terrestre supposé galiléen.

Les forces appliquées au système sont son poids et la tension du fil.

On applique au système la deuxième loi de Newton à un instant quelconque, l'élongation angulaire vaut alors θ.

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a} = m\overrightarrow{a_T} + m\overrightarrow{a_N}$$



En projetant sur la tangente à la trajectoire au point considéré,

$$0 - mg\sin\theta = ma_T + 0 = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d(L\dot{\theta})}{dt}$$

$$-mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

L'équation du mouvement est une équation différentielle.

19.1.3 Etude des oscillations de faible amplitude.

19.1.3.1 Expression de θ = f(t)

si θ est faible, $\sin\theta \approx \theta$ (avec θ en rad), l'équation devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

g et L sont positifs, on pose $\frac{g}{L} = \omega_0^2$ d'où $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

$\theta = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de cette équation différentielle du second ordre.

La vitesse angulaire est alors $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$

Détermination de A et de φ.

La valeur de φ dépend du choix de l'origine des temps.

Si à t=0, $\dot{\theta}$=0 et $\theta = \theta_m$ (θ_m>0) , en remplaçant dans les relations on obtient :

θm=A cos(ω0 .0+φ) soit θm=A cosφ

et 0= -A ω0 sin (ω0 .0+φ) soit 0= - A ω sin φ $\Rightarrow$ sin φ =O car A≠0 et $\omega_0 \neq 0$

sin φ =O ⇒ cos φ =±1 ⇒ θm =±A ⇒ si on prend A>0 :

$\Rightarrow$ cos φ =1 $\Rightarrow$ φ =0 et A= θ m

D'autre part $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Avec les origines choisies : $\theta = \theta m \cos(\sqrt{\frac{g}{L}}t)$

Les oscillations de faible amplitude d'un pendule simple sont sinusoïdales.

19.1.3.2 Expression de la période des oscillations de faible amplitude.

Il s'agit d'oscillations libres de pulsation propre ω_0 et de période propre T_0

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

To est indépendante de la masse du pendule.

19.1.4 Etude énergétique.

19.1.4.1 Transformations mutuelles d'énergie cinétique en énergie potentielle de pesanteur.

On considère le système « pendule » et si l'on néglige tous frottements, l'énergie mécanique se conserve.

E = K constante Ep +Ec = K.

Au cours du mouvement il y a alternativement transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique et vice versa, de telle manière que E = K.

19.1.4.2 Equation du mouvement.

Montrons que l'on peut retrouver cette équation en partant de Ep +Ec = K.

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = K$$

z = L-L cosθ = L(1-cosθ)

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgL(1-\cos\theta) = K$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgL - mgL\cos\theta = K$$

v et θ sont fonctions du temps ; K et L sont des constantes. On dérive la relation par rapport au temps

$$\frac{1}{2}2mv\frac{dv}{dt} + 0 + mgL\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$v\frac{dv}{dt} + gL\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = 0$$

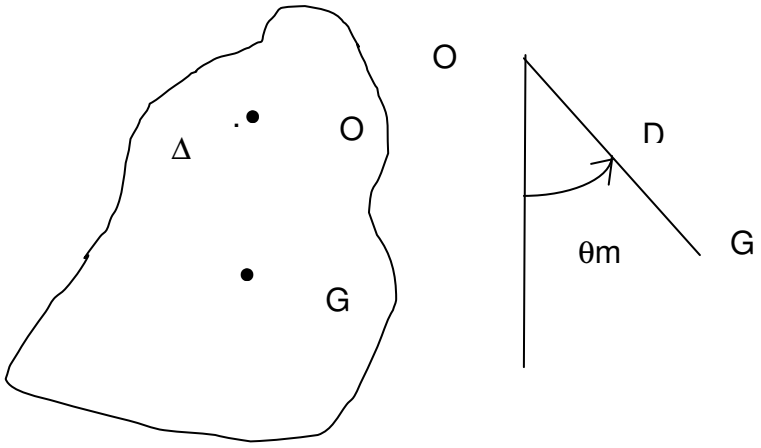
$$L\dot{\theta}\frac{d(L\dot{\theta})}{dt} + gL\sin\theta\dot{\theta} = 0 \Rightarrow L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

On a retrouvé l équation.

19.2 PENDULE PESANT.

19.2.1 Définition

Un pendule pesant est un solide mobile autour d'un axe Δ ne passant pas par son centre d'inertie.



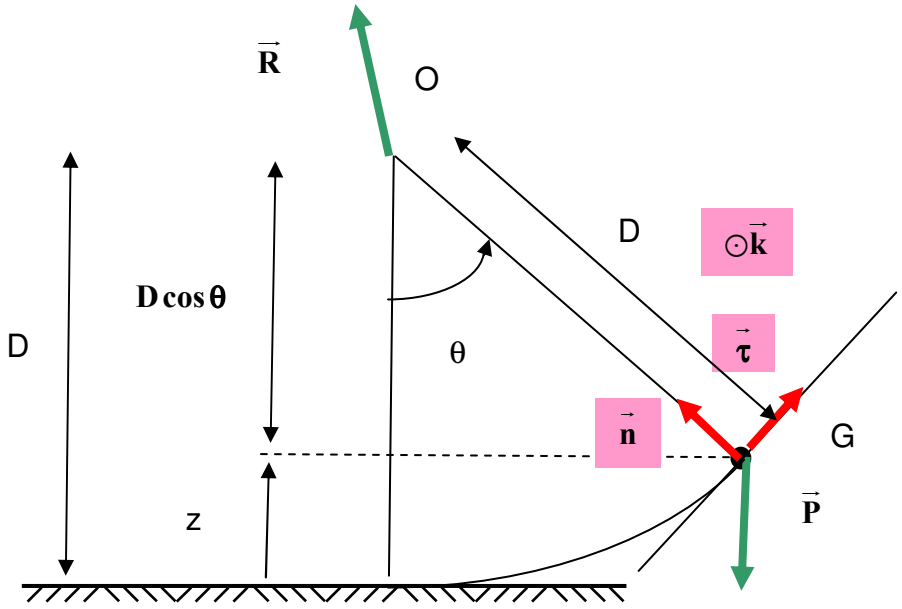
Le pendule est mobile autour de l'axe Δ horizontal passant par O

Ecarté de sa position d'équilibre par rotation autour de Δ et lâché sans vitesse initiale lorsque OG fait avec la verticale l'angle θm, le pendule oscille. A une date quelconque OG fait avec la verticale l'angle θ.

19.2.2 Equation du mouvement.

On considère comme système le pendule de masse m et de moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe Δ. On choisit comme référentiel le référentiel terrestre supposé galiléen.

Les forces appliquées au système sont son poids et la réaction $\vec{R}$ de l'axe.



niveau de référence z=0 Epp=0

On applique au système la relation de la dynamique de rotation à un instant quelconque où l'élongation angulaire vaut θ.

$$\vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{R}) = J\ddot{\theta}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} = J_\Delta \ddot{\theta}\vec{k}$$

$$-D\vec{n} \wedge (-mg\cos\theta\vec{n} - mg\sin\theta\vec{\tau}) + \vec{0} = J_\Delta \ddot{\theta}\vec{k}$$

$$\vec{0} + Dmg\sin\theta(\vec{n} \wedge \vec{\tau}) = J_\Delta \ddot{\theta}\vec{k} \qquad -Dmg\sin\theta\vec{k} = J_\Delta \ddot{\theta}\vec{k}$$

$$-Dmg\sin\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgD}{J_\Delta}\sin\theta = 0$$

L'équation du mouvement est une équation différentielle.

19.2.3 Etude des oscillations de faible amplitude.

19.2.3.1 Expression de θ = f(t)

si θ est faible, $\sin\theta \approx \theta$ (avec θ en rad), l'équation devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgD}{J_\Delta}\theta = 0$$

mgD et JΔ sont positifs, on pose $\frac{mgD}{L} = \omega_0^2$ d'où $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

$\theta = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de cette équation différentielle du second ordre.

Si à t=0, $\dot{\theta}$=0 et $\theta = \theta m$ (θm>0) , en remplaçant dans les relations on obtient :

$$\theta = \theta m \cos(\sqrt{\frac{mgD}{J_\Delta}}t)$$

Les oscillations de faible amplitude d'un pendule pesant sont sinusoïdales.

19.2.3.2 Expression de la période des oscillations de faible amplitude.

Il s'agit d'oscillations libres de pulsation propre ω_0 et de période propre T_0

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{mgD}{J_\Delta}}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgD}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgD}}$$

19.2.3.3 Longueur du pendule simple synchrone du pendule pesant.

C'est la longueur du pendule simple dont les petites oscillations ont même période que celles du pendule pesant.

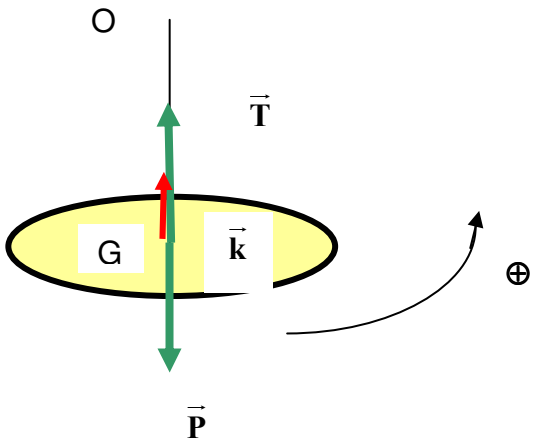
$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgD}} \Rightarrow L = \frac{J_\Delta}{mD}$$

19.3 PENDULE DE TORSION.

19.3.1 Description

Il est constitué d'un disque de masse m et de rayon R suspendu en son centre par un fil de torsion de masse négligeable. L'autre extrémité du fil est fixe.

Le disque est écarté de sa position d'équilibre par rotation dans son plan autour de Δ et lâché sans vitesse initiale lorsque l'angle de torsion vaut θm ; le pendule oscille et à une date quelconque, l'angle de torsion vaut θ.



19.3.2 Equation du mouvement

On choisit comme référentiel le référentiel terrestre supposé galiléen.

On considère comme système le disque de masse m et de moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe Δ.

Les forces appliquées au système sont son poids, la tension exercée par le fil et le couple de torsion qu'il exerce sur le disque.

On applique au système la relation de la dynamique de rotation à un instant quelconque où l'élongation angulaire vaut θ.

C est la constante de torsion du fil (elle s'exprime en $N.m.rad^{-1}$); lorsque le disque est tourné de θ par rapport à sa position d'équilibre, le fil exerce sur le disque un couple de moment de rappel - $C\theta$

$$\vec{Mo}(T) + \vec{Mo}(R) + Mtorsion = I\ddot{\theta}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OO} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{OO} \wedge \vec{P} - C\theta\vec{k} = I\ddot{\theta}\vec{k} \qquad -C\theta\vec{k} = I\ddot{\theta}\vec{k}$$

C et JΔ sont positifs. On pose $\frac{C}{J_\Delta} = \omega_0^2$ d'où :

$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ L'équation du mouvement est une équation différentielle.

19.3.3 Expression de θ = f(t)

$\theta = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de cette équation différentielle du second ordre.

Si à t=0, $\dot{\theta}$=0 et $\theta = \theta m$ (θ m>0) , on obtient :

$$\theta = \theta m \cos(\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}} t)$$

Les oscillations du pendule sont sinusoïdales.

19.3.4 Période des oscillations

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

Pour un disque : $J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2 \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2}{2C}}$

19.3.5 Etude énergétique

19.3.5.1 Transformations mutuelles d'énergie cinétique en énergie potentielle.

On considère le système « pendule » ; si l'on néglige tous frottements, l'énergie mécanique se conserve.

E = constante Ep +Epe+Ec = constante.

Au cours du mouvement il y a alternativement transformation d'énergie potentielle élastique en énergie cinétique et vice versa, l'énergie potentielle de pesanteur restant constante étant donné qu'il n'y a pas de variation d'altitude.

Il en résulte que : Epe+Ec = K.

19.3.5.2 Equation du mouvement.

Montrons que l'on peut retrouver cette équation en partant de Epe +Ec = K.

$$\frac{1}{2}C\theta^2 + \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 = K$$

En dérivant les deux membres par rapport au temps :

$$\frac{1}{2}2C\theta\dot{\theta}+\frac{1}{2}J_{\Delta}2\dot{\theta}\ddot{\theta}=0$$

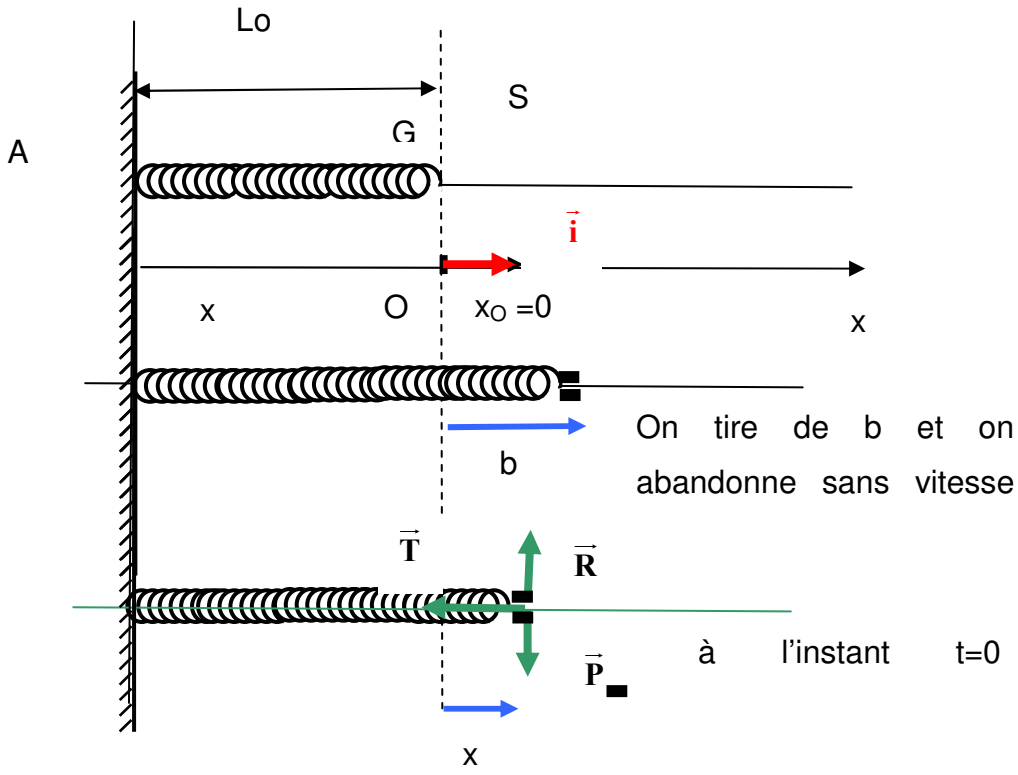
$$C\theta+J_{\Delta}\ddot{\theta}=0$$ On a retrouvé l équation.

19.4 OSCILLATEUR HARMONIQUE HORIZONTAL

19.4.1 Description.

L'oscillateur est constitué d'un ressort élastique, de raideur k, de masse négligeable, enfilé sur une tige horizontale. L'une des extrémités O du ressort est fixe, l'autre est reliée à un corps (S) de masse m, supposé ponctuel, qui peut coulisser sans frottement sur la tige.

A partir de la position d'équilibre, on tire sur la masse de manière à allonger le ressort de b puis on lâche sans vitesse initiale à t=0. Le corps (S) oscille. A un instant de date t quelconque, l'allongement du ressort est x. L'abscisse de G est égale à x.



19.4.2 Equation du mouvement

On considère comme système le corps ponctuel de masse m. On choisit comme référentiel supposé galiléen :la Terre.

Les forces appliquées au système sont son poids, la réaction de la tige et la tension du ressort.

L'application à la date t de la relation de Newton au système conduit à :

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$

Quand x est positif, le ressort est étiré et $\vec{T}$ est dirigé vers la gauche.

Quand x est négatif, le ressort est comprimé et $\vec{T}$ est dirigé vers la droite.

$\vec{T}$ est une force de rappel et dans les deux cas : $\vec{T} = -kx\vec{i}$

$\vec{P} + \vec{R} + -kx\vec{i} = m\ddot{x}\vec{i}$

On projette la relation sur x'x : $0 + 0 - kx = m\ddot{x}$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ c'est l'équation différentielle du mouvement.

k et m sont >0 ; on pose $\omega_0^{\,2} = \frac{k}{m}$

L'équation devient ; $\ddot{x} + \omega_0^{\,2}x = 0$

19.4.3 Expression de x = f(t)

$x = Xm\cos(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de cette équation différentielle du second ordre.

Si à t=0, v=0 et x=b (b>0) ,: $x = Xm\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$ avec Xm=b

Les oscillations sont sinusoïdales.

19.4.4 Expression de la période des oscillations .

Il s'agit d'oscillations libres de pulsation propre ω_0 et de période propre T_0

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

19.4.5 Etude énergétique

19.4.5.1 Transformations mutuelles d'énergie cinétique en énergie potentielle.

Au cours du mouvement il y a alternativement transformation d'énergie potentielle élastique en énergie cinétique et vice versa, l'énergie potentielle de pesanteur restant constante étant donné qu'il n'y a pas de variation d'altitude.
Il en résulte que : Epe+Ec = K.

19.4.5.2 Equation du mouvement.

Montrons que l'on peut retrouver cette équation en partant de Epe +Ec = K.

$$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2=K \qquad \frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2=K$$

En dérivant les deux membres par rapport au temps :

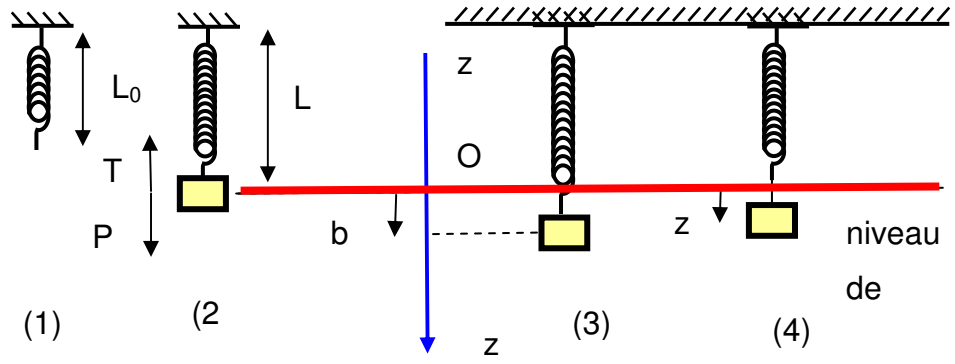
$$\frac{1}{2}2kx\dot{x}+\frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x}=0$$

$$kx+m\ddot{x}=0$$ On a retrouvé l'équation.

19.5 OSCILLATEUR HARMONIQUE VERTICAL

19.5.1 Description.

L'oscillateur est constitué d'un ressort élastique, de raideur k, de masse négligeable, suspendu par l'une des extrémités en un point fixe O. A l'autre extrémité est accroché un corps (S) de masse m.
A partir de la position d'équilibre, on tire verticalement vers le bas sur la masse de manière à allonger le ressort de b puis on lâche sans vitesse initiale à t=0. Le corps (S) oscille.



Le ressort a la longueur à vide L_0

Le ressort a la longueur à l'équilibre en charge L. A l'équilibre P=T

$mg = k(L-L_0)$

(3) On allonge le ressort de b et on abandonne le système sans vitesse initiale à t=0

(4) A la date t quelconque, au cours des oscillations, la longueur du ressort est $L+z-L_0$

19.5.2 Equation du mouvement

Le référentiel terrestre est supposé galiléen.

Système : le corps (S)

Forces appliquées : tension du fil et poids

Application au système du théorème du centre d'inertie : $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$

Projection de la relation vectorielle sur l'axe z'z descendant : $mg-T=ma$

$$mg-k(L+z-L_0)=m\ddot{z} \qquad mg-k(L-L_0)-kz=m\ddot{z}$$

en tenant compte de la relation écrite à l'équilibre, on obtient : $-kz=m\ddot{z}$

$$\ddot{z}+\frac{k}{m}z=0 \qquad \ddot{z}+\omega_0^2 z=0$$

Le mouvement est sinusoïdal ; compte tenu des conditions initiales

$z=Zm\cos\omega_0 t$

19.5.3 Période des oscillations.

La période propre est $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

T_0 en s m en kg k en $N.m^{-1}$

19.5.4 Etude énergétique

19.5.4.1 Transformations d'énergies

Au cours du temps les énergies cinétique, potentielle de pesanteur et potentielle élastique varient. E =Epp+Epe+Ec = K constante.

Equation du mouvement.

$E = -mgz + \frac{1}{2}k(L + z - L_0)^2 + \frac{1}{2}mv^2$ Epp= - mgz (axe orienté vers le bas)

$E = -mgz + \frac{1}{2}k((L - L_0) + z)^2 + \frac{1}{2}mv^2$

$E = -mgz + \frac{1}{2}k(L - L_0)^2 + \frac{1}{2}kz^2 + k(L - L_0)z + \frac{1}{2}mv^2$ or $mg = k(L - L_0)$ d'où

$E = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2 + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}mv^2$

On dérive la relation par rapport au temps :

$\frac{dE}{dt} = 0 + kz\dot{z} + mv\frac{dv}{dt}$ or $\dot{z} = v$ et $\frac{dv}{dt} = \ddot{z}$

Or $\frac{dE}{dt} = 0$ d'où $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$

19.6 EXERCICES

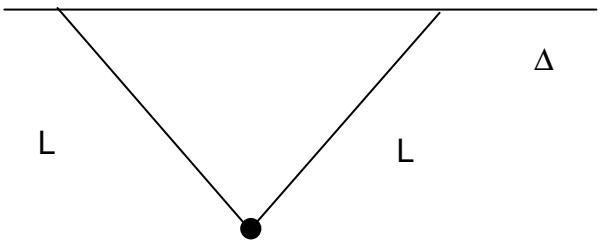
Dans tous les exercices, les frottements sont négligés. Il est demandé de les résoudre de deux manières :

- en utilisant le principe fondamental
- en utilisant la conservation de l'énergie mécanique

∗ Exercice 1

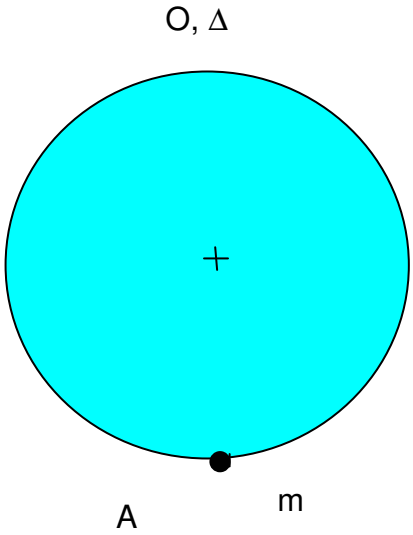
Un pendule est constitué de deux fils inextensibles, de masses négligeables, de même longueur L, liés d'un côté à un axe Δ horizontal, de l'autre à un corps ponctuel de masse m. Les fils étant tendus, on déplace le corps de sa position

d'équilibre en le faisant tourner dans le plan vertical perpendiculaire à Δ qui le contient et on le lâche sans vitesse initiale.
Etablir l'équation du mouvement et déterminer l'expression de la période des oscillations de faible amplitude de ce pendule.

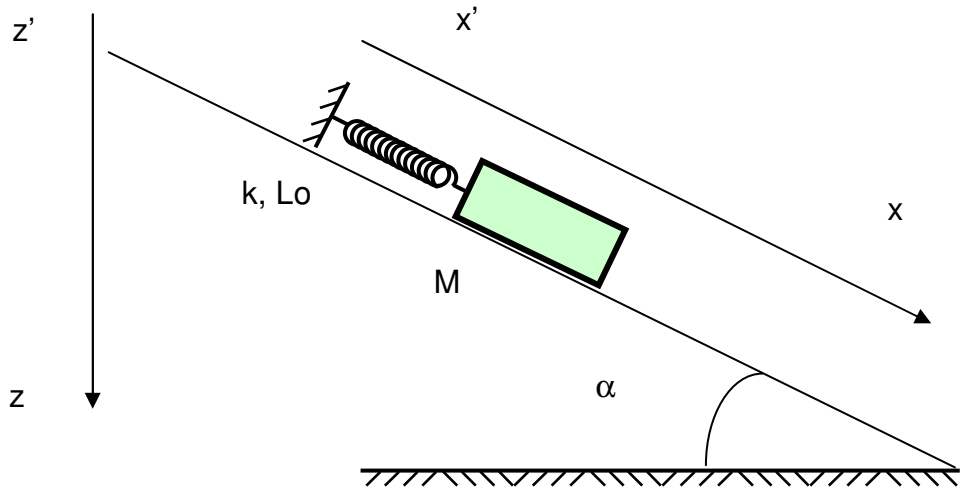


∗ Exercice 2

Un pendule pesant est constitué d'un disque homogène de masse M et de rayon R. Sur ce disque est fixé en A à la périphérie un corps ponctuel de masse m. Le pendule est mobile autour de l'axe horizontal Δ , perpendiculaire au disque et passant par O, point diamétralement opposé à A. Etudier le mouvement de ce pendule et déterminer la période des oscillations de faible amplitude



∗ Exercice 3



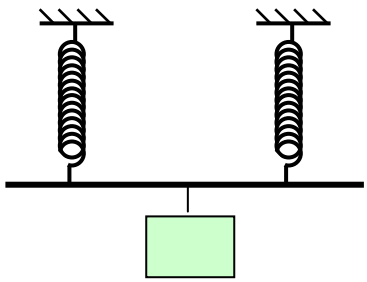
On considère le pendule formé par un ressort de masse négligeable, parfaitement élastique, de raideur k et de longueur à vide Lo. L'une des extrémités est fixe, l'autre est liée à un corps de masse M qui repose sur un plan incliné et peut de déplacer sans frottement sur celui-ci. Lors des oscillations l'axe du ressort reste parallèle à la ligne de plus grande pente du plan incliné.

Etudier le mouvement de ce pendule et déterminer la période des oscillations.

∗ Exercice 4

On considère le pendule élastique vertical formé par deux ressorts identiques (même longueur à vide et même raideur) . A ces ressorts est suspendue une tige de masse négligeable à laquelle est accrochée un corps de masse M. Au cours des oscillations, la masse se déplace suivant la verticale.

Etudier le mouvement de ce pendule et déterminer la période des oscillations.



19.7 CORRIGES DES EXERCICES

19.7.1 Corrigé de l'exercice 1

19.7.1.1 Application de la relation fondamentale

Système : le corps de masse m

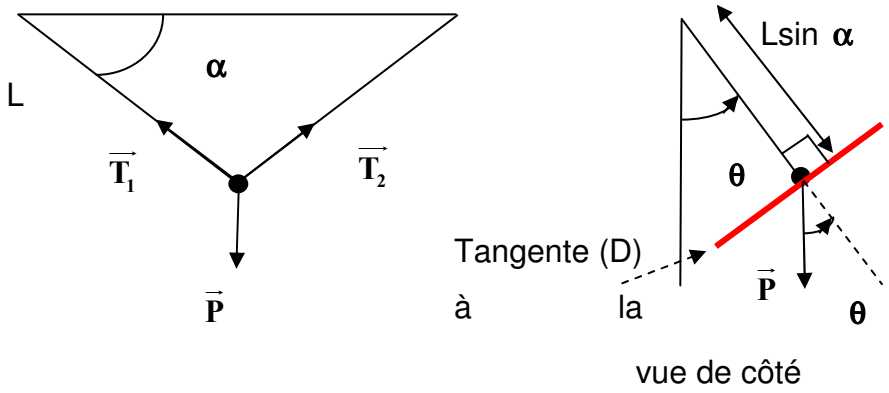
$$\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{P} = m\vec{a} = m\vec{a_T} + m\vec{a_N}$$

En projetant sur la tangente (D) à la trajectoire lorsque l'angle d'écart est θ , à une date quelconque. Les projections des deux tensions sur (D) sont nulles car ces forces sont situées dans le plan orthogonal à (D).

$$0 + 0 - mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt} + 0 = m\frac{d(b\dot{\theta})}{dt}$$

$b = L\sin\alpha$ pour θ petit :

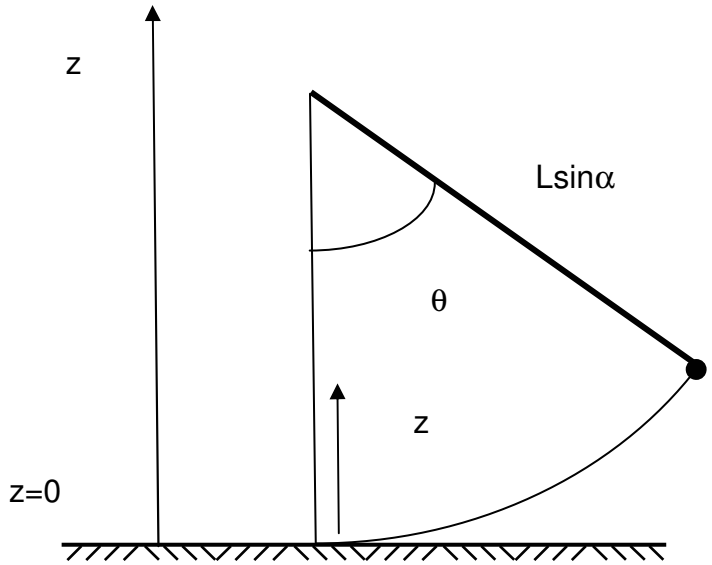
$$-g\theta = bL\sin\alpha\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L\sin\alpha}\theta = 0 \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L\sin\alpha}{g}}$$



vue de côté

19.7.1.2 2. Application de la conservation de l'énergie mécanique

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgL\sin\alpha(1 - \cos\theta)$$



niveau de référence Epp=0

$$E = \frac{1}{2} m(L \sin\alpha \dot{\theta})^2 + mgL \sin\alpha(1 - \cos\theta)$$

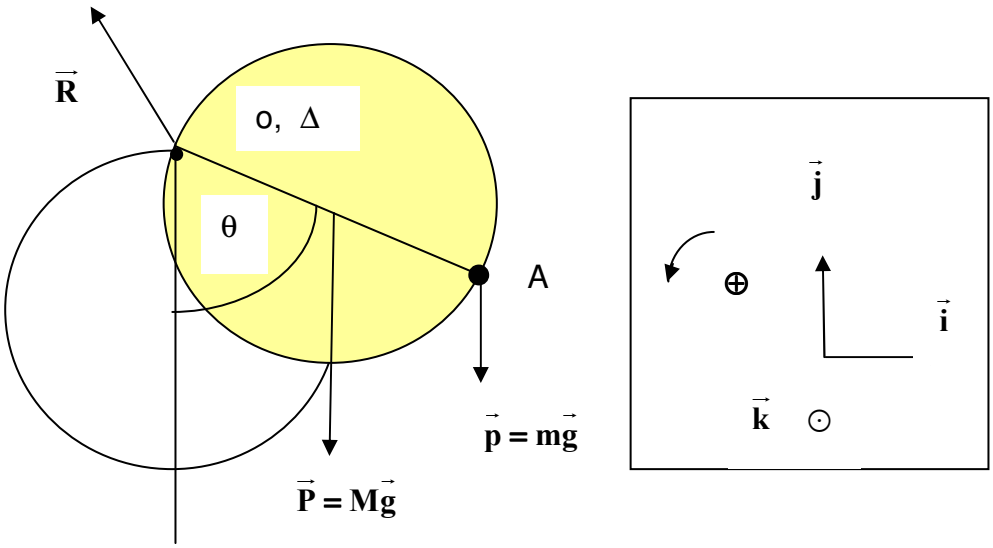
$$E = \frac{1}{2} mL^2 \sin^2\alpha \dot{\theta}^2 + mgL \sin\alpha - mgL \sin\alpha \cos\theta$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = mL^2 \sin^2\alpha \dot{\theta}\ddot{\theta} + 0 + mgL \sin\alpha \sin\theta \dot{\theta} \qquad 0 = \ddot{\theta} + \frac{g}{L \sin\alpha} \sin\theta$$

19.7.2 Corrigé de l'exercice 2

19.7.2.1 1. Application de la relation fondamentale.

Système : le disque équipé de la surcharge



$$\overrightarrow{M_O}(\vec{P}) + \overrightarrow{M_O}(\vec{p}) + \overrightarrow{M_O}(\vec{R}) = J_\Delta \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$-MgR\sin\theta - mg2R\sin\theta + 0 = J_\Delta \ddot{\theta}$$

Par application du théorème de Huyghens $J_\Delta disque = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

$$J_\Delta surcharge = m(2R)^2 = 4mR^2$$

$$-(M+2m)gR\sin\theta = \left(\frac{3}{2}MR^2 + 4mR^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{(M+2m)gR}{\left(\frac{3}{2}MR^2 + 4mR^2\right)}\theta = 0$$

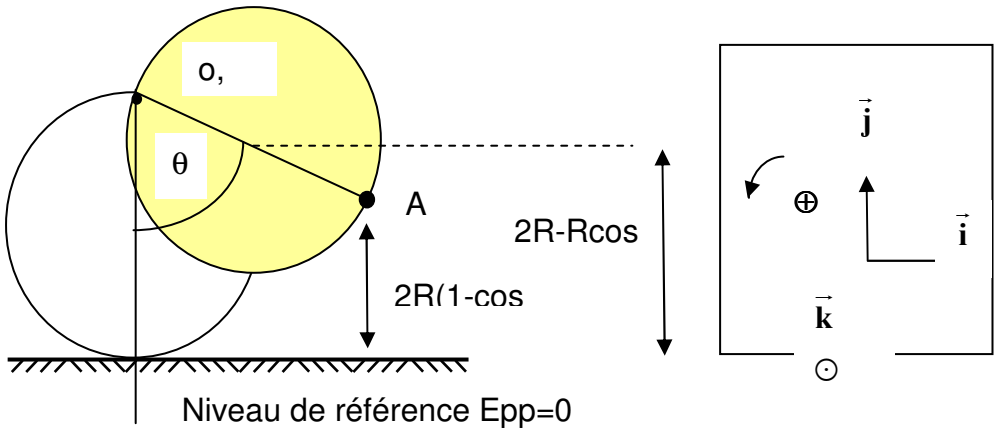
D'où la période des petites oscillations :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}MR^2 + 4mR^2}{(M+2m)gR}} = 2\pi\sqrt{\frac{(3M+8m)R}{(2M+4m)g}}$$

19.7.2.2 2. Application de la conservation de l'énergie mécanique

Système : le disque équipé de la surcharge

$$E = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 + MgR(2-\cos\theta) + mg2R(1-\cos\theta)$$



$$0 = J_\Delta \dot{\theta}\ddot{\theta} + (MgR + 2mgR)\sin\theta\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{(MgR + 2mgR)}{J_\Delta}\ddot{\theta} = 0$$

19.7.3 Corrigé de l'exercice 3

19.7.3.1 1. Application de la relation fondamentale

Système : corps de masse m

Axe x'x parallèle au plan incliné et orienté vers le bas

L_0 est la longueur à vide du ressort L est la longueur du ressort à l'équilibre en charge.

La position du corps à l'équilibre en charge est l'origine des espaces. L'abscisse du centre d'inertie du corps à la date t est x

$\vec{T}+\vec{P}=m\vec{a}$

$-T+P\sin\alpha=ma \qquad -k(L+x-L_0)+mg\sin\alpha=ma$

Or, à l'équilibre $mg\sin\alpha=k(L-L_0)$

donc $-kx=m\ddot{x} \qquad \ddot{x}+\frac{k}{m}x=0 \qquad T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

19.7.3.2 Application de la conservation de l'énergie mécanique

Système : {pendule élastique}

Axe z'z vertical dirigé vers le haut

Axe x'x parallèle au plan incliné et orienté vers le bas

E=Ec+Epp+Epe

$$E=\frac{1}{2}mv^2+mgz+\frac{1}{2}k(L+x-L_0)^2=\frac{1}{2}mv^2-mgx\sin\alpha+\frac{1}{2}k(L+x-L_0)^2$$

$$E=\frac{1}{2}mv^2-mgx\sin\alpha+\frac{1}{2}k(L-L_0)^2+\frac{1}{2}kx^2+k(L-L_0)x$$

$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k(L-L_0)^2+\frac{1}{2}kx^2$ en dérivant par rapport au temps

$$\frac{dE}{dt}=0=mva+0+kxv\Rightarrow 0=ma+kx$$

19.7.4 Corrigé de l'exercice 4

19.7.4.1 1. Application de la relation fondamentale

Système : le corps de masse m

L_0 est la longueur à vide d'un ressort L est la longueur d'un ressort à l'équilibre en charge.

La position du corps à l'équilibre en charge est l'origine des espaces. L'abscisse du centre d'inertie du corps à la date t est x

$\vec{T_1}+\vec{T_2}+\vec{P}=m\vec{a}$ Projection sur l'axe x'x vertical orienté vers le bas

$$-T_1 - T_2 + mg = ma$$

$$-k(L + x - L_0) - k(L + x - L_0) + mg = ma$$

Or, à l'équilibre $mg = 2k(L - L_0)$

Donc, $-2kx = ma \qquad \ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0 \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

19.7.4.2 2. Application de la conservation de l'énergie mécanique

Système :{les deux ressorts+le corps}

Axe z'z vertical dirigé vers le haut

Axe x'x vertical dirigé vers le bas

$$E = Ec + Epe_1 + Epe_2 + Epp$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(L + x - L_0)^2 + \frac{1}{2}k(L + x - L_0)^2 + mgz$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + k(L + x - L_0)^2 - mgx$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + k(L - L_0)^2 + kx^2 + 2k(L - L_0)x - mgx$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + k(L - L_0)^2 + kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = mva + 0 + 2kv \Rightarrow 0 = \ddot{x} + \frac{2k}{m}x$$

CHAPITRE 20 OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES.

Dans le chapitre précédent nous avons étudié les oscillations libres d'un pendule ; le pendule était déplacé de sa position d'équilibre et dès qu'il était abandonné, il oscillait librement sans contrainte extérieure. Dans ce chapitre le rythme sera imposé à l'oscillateur.

20.1 EXCITATEUR ET RESONATEUR

On considère deux pendules simples dont les fils sont noués en deux points d'une corde élastique constituant un couplage.

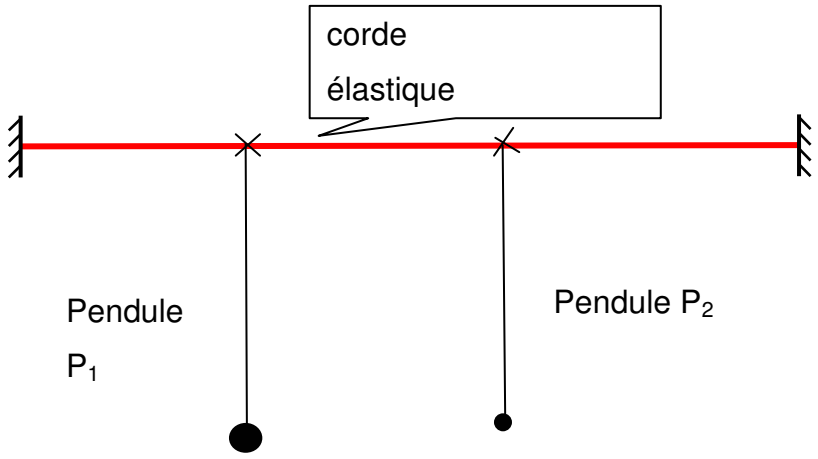
Le pendule P_1 a pour période propre T (période des oscillations libres) et le pendule P_2 a pour période propre T_0 .

La masse du pendule P_1 est très supérieure à celle du pendule P_2

Lorsque P_1 est déplacé de sa position d'équilibre et abandonné, il effectue des oscillations de période T et provoque le mouvement du pendule P_2 qui s'effectue alors à une fréquence $\mathbf{f=\frac{1}{T}}$,imposée par P_1 .

Dans cette expérience, l'excitateur est le pendule P_1 et le résonateur le pendule P_2.

Le couplage permet la transmission d'énergie de P_1 vers P_2.



20.2 EXPERIENCE DE RESONANCE

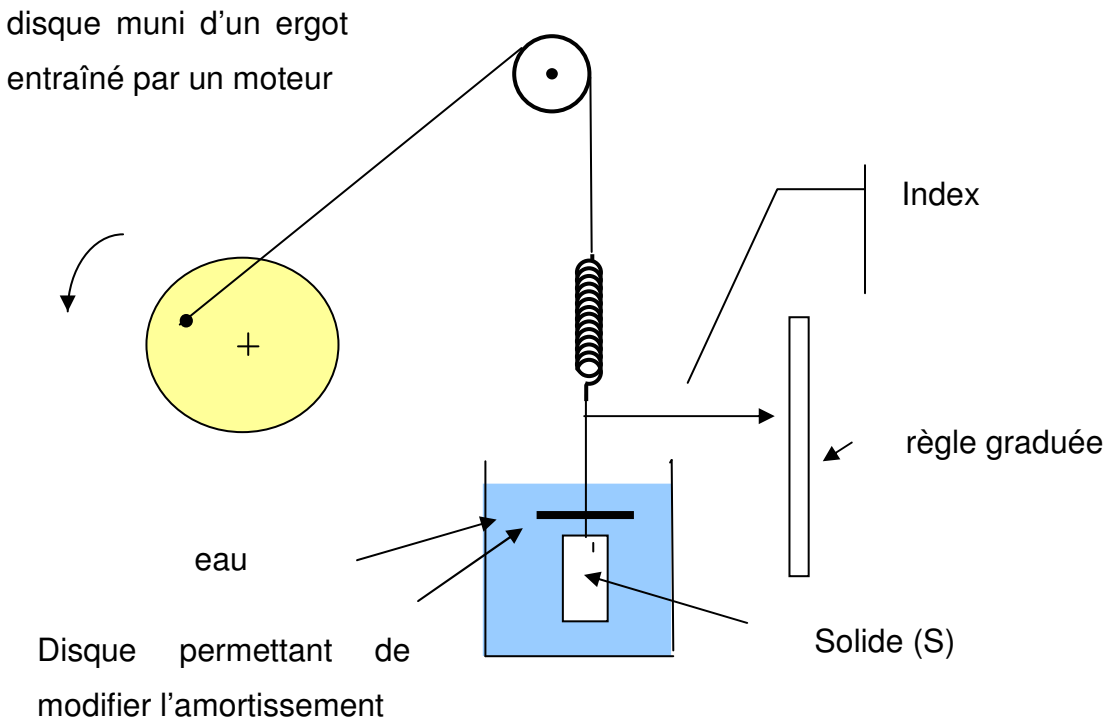
20.2.1 Dispositif expérimental.

Un pendule élastique, constitué d'un ressort auquel est suspendu un corps (S), est lié par l'intermédiaire d'un fil et d'une poulie à un ergot fixé à la périphérie d'un disque vertical entraîné en rotation à vitesse constante par un moteur. La période T de rotation du disque est réglable. Il en résulte une excitation périodique de même période du pendule.

(S) effectue des oscillations de période T dont on peut mesurer l'amplitude Xm.

Le mouvement de (S) est amorti car le corps est immergé dans l'eau.

On fait tourner le moteur à vitesse constante et pour chaque valeur de T, on relève l'amplitude du mouvement de (S), ce qui permet de tracer la courbe de réponse du résonateur (le pendule élastique) à l'excitation du résonateur (le moteur).

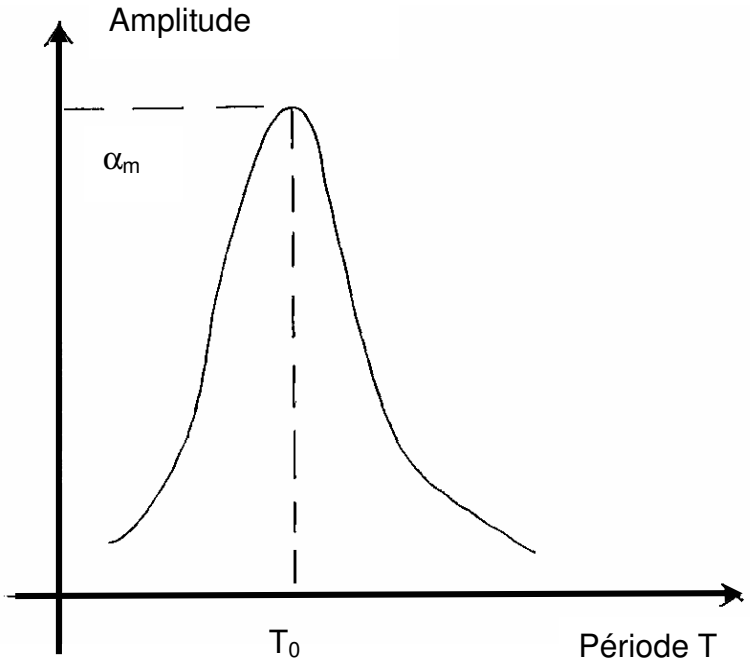


20.2.2 Courbe de réponse du résonateur

On constate que :

- (S) effectue des oscillations de période T ; ces oscillations sont des oscillations forcées à un rythme imposé par l'excitateur.

- L'amplitude du mouvement de (S) dépend de T ; elle est maximale lorsque T est voisine de To, période propre des oscillations du pendule.
- A la résonance, l'amplitude du mouvement du pendule est maximale.



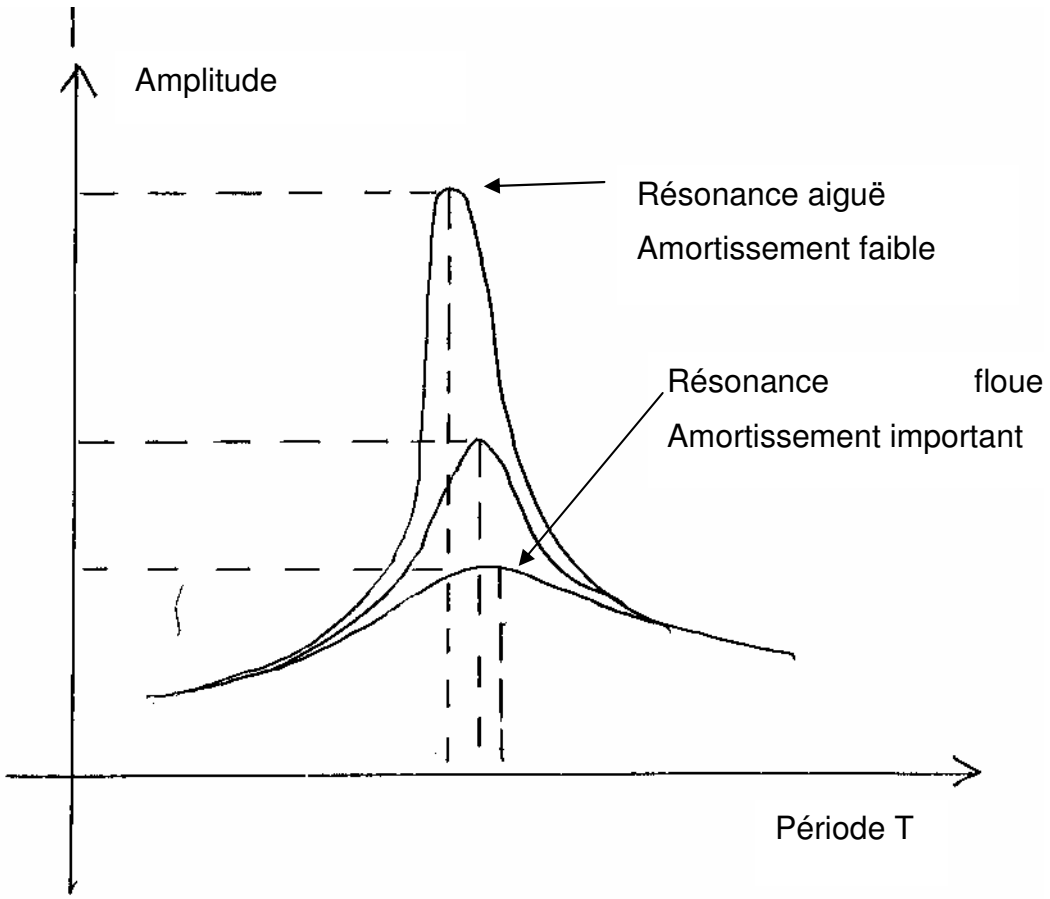
20.2.3 Influence de l'amortissement

En modifiant le diamètre du disque de masse négligeable solidaire du solide (S) on peut amortir plus ou moins le mouvement du pendule.

Si l'amortissement est faible, la résonance est aiguë ; si l'amortissement est très grand, la résonance est floue.

Ce phénomène est à rapprocher de la résonance d'un dipôle RLC en électricité.

Il est à noter que la résonance s'effectue en mécanique pour une période très légèrement différente de T_0 et d'autant plus différente de T_0 que l'amortissement est plus grand.



20.2.4 Importance de la résonance en mécanique.

Les vibrations qui se produisent en mécanique peuvent engendrer la mise en résonance de pièces mécaniques et provoquer leur desserrage ou leur rupture. Des ouvrages tels que des ponts ont été détruits ou fortement endommagés suite à des phénomènes de résonance lors de tempêtes. Cela s'est produit lorsque les phénomènes atmosphériques se sont accordés à la période d'oscillation du tablier du pont.

CHAPITRE 21 RELATIONS APPLICABLES AUX MILIEUX CONTINUS

21.1 INTRODUCTION

Jusqu'à présent, nous avons souvent considéré les systèmes étudiés comme des systèmes discrets, formés de points matériels. La masse du système était écrite : $\mathbf{M = \sum_{i=1}^{n} m_i}$

Si le système est considéré comme un ensemble continu de masses (milieu continu), nous pouvons écrire $\mathbf{M = \int dm = \int_V \rho\, dv}$.

Nous allons reprendre les relations de la mécanique dans ce dernier cas.

21.2 GRANDEURS RELATIVES AUX MASSES

21.2.1 Masse d'un système

21.2.1.1 Cas général

$\mathbf{M = \int dm = \int_V \rho\, dv}$ dv est le volume entourant un point M et ρ la masse volumique au voisinage de M. Si le système est homogène, ρ est constant. ρ s'exprime en $kg.m^{-3}$.

21.2.1.2 Cas d'un milieu à une dimension (tige de très faible diamètre)

$\mathbf{M = \int_L \lambda\, dl}$ λ masse linéique (en $kg.m^{-1}$)

21.2.1.3 Cas d'un milieu à deux dimensions (plaque d'épaisseur très faible)

$\mathbf{M = \int_S \sigma\, ds}$ σ masse surfacique (en $kg.m^{-2}$)

21.2.2 Centre d'inertie d'un système

21.2.2.1 Définition

$\mathbf{\overrightarrow{OG} \int_V dm = \int_V \overrightarrow{OM}\, dm}$ $\mathbf{M\,\overrightarrow{OG} = \int_V \overrightarrow{OM}\, dm}$ ou $\mathbf{M\,\overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OM}\, dm}$

21.2.2.2 Coordonnées de G

Il suffit de projeter la relation précédente sur les trois axes Ox, Oy et Oz.

$$x_G = \frac{\int_V x\rho\,dv}{\int_V \rho\,dv} \qquad y_G = \frac{\int_V y\rho\,dv}{\int_V \rho\,dv} \qquad z_G = \frac{\int_V z\rho\,dv}{\int_V \rho\,dv}$$

21.2.3 Moment d'inertie d'un système par rapport à un axe.

Si r est la distance d'un point de masse dm à l'axe :

$$I_\Delta = \int_V r^2 dm$$

21.3 DYNAMIQUE

21.3.1 Quantité de mouvement d'un système

$\vec{p} = \int_v \vec{v}\,dm$ où $\vec{v}$ est la vitesse d'un point de masse dm

21.3.2 Théorème du centre d'inertie

$$\overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\overrightarrow{a_G}$$

21.3.3 Relation de la dynamique applicable au solide en rotation autour d'un axe Δ

$$M_{\Delta(\vec{F})} = \frac{d\sigma_\Delta}{dt} = I_\Delta \ddot{\theta}$$

21.4 ENERGIE

21.4.1 Travail d'une force.

Soit une force $\vec{F}$ dont le point d'application se déplace de A en B

$$W_{AB(\vec{F})} = \int_A^B \vec{F}\,\overrightarrow{dl}$$

21.4.2 Energie cinétique d'un système. $Ec = \int_V \frac{1}{2} dm \vec{v}^2 = \int_v \frac{1}{2} dm\, v^2$

21.4.3 Energie potentielle de pesanteur d'un système

$$dE_{PP} = mgdz \Rightarrow E_{PP} = mgz + Cte$$

21.4.4 Energie potentielle élastique d'un ressort

$$dE_{PE} = kxdx \Rightarrow E_{PE} = \frac{1}{2} kx^2 + Cte$$

21.4.5 Energie mécanique E =Epp+Epe+Ec