

# RÉGULATION INDUSTRIELLE

Outils de modélisation, méthodes  
et architectures de commande

Tout le catalogue sur  
[www.dunod.com](http://www.dunod.com)



ÉDITEUR DE SAVOIRS

Emmanuel Godoy *et coll.*



# RÉGULATION INDUSTRIELLE

Outils de modélisation, méthodes  
et architectures de commande

Préface de Luc Dugard


2<sup>e</sup> édition

DUNOD

Toutes les marques citées dans cet ouvrage sont des marques déposées par leurs propriétaires respectifs.

Illustration de couverture :  
Chaîne de montage automatisée © mickey hoo – Fotolia.com

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--



© Dunod, 2007, 2014

5 rue Laromiguière, 75005 Paris  
[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-071794-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

La notion de régulation, liée à celle de rétroaction, est très ancienne puisque les premiers procédés de régulation remontent à l'Antiquité avec comme exemples célèbres, la régulation de niveau pour l'horloge à eau, et plus récemment, le régulateur à boules de James Watt qui, au XVIII<sup>e</sup> siècle, inventa ce très fameux procédé de régulation pour maintenir au mieux la vitesse de rotation d'une machine à vapeur malgré des variations de charge. Depuis, les immenses progrès réalisés au niveau des technologies et des concepts théoriques ont permis de concevoir et de mettre en œuvre des techniques et procédés de régulation numérique beaucoup plus complexes et performants, grâce en particulier aux avancées de l'électronique (pour le support matériel) et de l'informatique (pour le support logiciel).

Cet ouvrage présente un ensemble cohérent de développements méthodologiques et appliqués pour la synthèse de régulateurs dans l'optique clairement affichée de leur mise en œuvre dans le contexte applicatif industriel. Les auteurs ont volontairement limité ces développements aux principales techniques de commande linéaire mono-entrée mono-sortie, avec une petite incursion dans le domaine non linéaire *via* la méthode du 1<sup>er</sup> harmonique. Un effort tout particulier a été fait pour rendre la lecture de l'ouvrage agréable et pour faciliter la compréhension des concepts et des méthodes grâce à l'introduction de nombreux exemples et études de cas, notamment dans les domaines électriques, électroniques, mécaniques, électromécaniques.

Une vingtaine de chapitres constituent cet ouvrage qui comporte trois grandes parties. La première, avec sept chapitres, est consacrée aux outils mathématiques pour la représentation, l'analyse et la commande des systèmes dynamiques avec les diverses représentations dans les cadres fréquentiel, temporel, continu, discret, l'analyse de stabilité, la modélisation par *bond-graph*, la modélisation par identification, l'analyse de la boucle fermée. Cette partie constitue le socle théorique sur lequel s'appuie toute la démarche de synthèse et de mise en œuvre des lois de commande. La deuxième partie comporte huit chapitres consacrés à diverses méthodologies de synthèse de lois de commande linéaire « classiques », principalement orientées vers les applications industrielles (approches fréquentielles, régulateurs PID, structure RST, commande prédictive, commande floue, commande par retour d'état, méthode du 1<sup>er</sup> harmonique). Les auteurs se sont attachés à bien faire ressortir les problèmes pratiques de mise en œuvre au-delà de la stricte méthodologie de synthèse. La dernière partie de l'ouvrage est dédiée aux aspects plus pratiques, mais également essentiels, pour la mise en œuvre effective des techniques de régulation développées dans la partie précédente. Sont particulièrement étudiés les convertisseurs de l'électronique de puissance qui sont les actionneurs privilégiés dans de nombreux domaines industriels, ainsi que divers types de capteurs qui sont, au même titre que les actionneurs, insérés dans la chaîne globale de régulation. Un chapitre est consacré à l'évolution récente des systèmes de contrôle-commande industriels et des architectures associées, et aux diverses solutions envisageables pour la mise en œuvre des chaînes de régulation. Le dernier chapitre de l'ouvrage donne, en guise de conclusion, un résumé de la démarche et des étapes à suivre pour la mise en œuvre d'une chaîne de régulation, et fait une analyse comparative des différentes méthodes de commande développées dans l'ouvrage. Tous les auteurs de cet ouvrage sont, excepté un ingénieur-chercheur senior R&D d'EDF, des enseignants-chercheurs de Supélec. Leurs domaines de compétence concernent principalement

l'automatique puisque la plupart d'entre eux sont au département Automatique de Gif-sur-Yvette, avec quelques « renforts » en génie électrique, électronique et signal. Leur forte implication, que ce soit en enseignement (formation initiale ou continue), en recherche amont et méthodologique dans le cadre universitaire, ou en recherche plus appliquée et finalisée dans le cadre de leurs très nombreuses activités contractuelles avec l'industrie, a constitué un atout très précieux pour la rédaction de cet ouvrage. Celui-ci devrait constituer un excellent document de référence, aussi bien pour la formation initiale des étudiants que pour l'aide à l'ingénieur automaticien chargé de mettre en place des chaînes de régulation dans le contexte industriel. La clarté de l'ouvrage, la facilité de lecture et de compréhension, liées aux nombreux exemples, schémas et figures agrémentant le texte, vont sans nul doute satisfaire non seulement bon nombre d'ingénieurs et étudiants automaticiens qui trouveront des méthodologies de synthèse accessibles et efficaces, mais aussi des ingénieurs non spécialistes de l'automatique, qui pourront s'initier, avec cet ouvrage auto-contenu, aux techniques de la régulation industrielle.

Très bonne lecture à toutes et à tous.

Luc Dugard  
Directeur de recherche  
au CNRS  
GIPSA-lab Grenoble

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Les auteurs</b>	<b>1</b>
<b>1 • Introduction</b>	<b>3</b>
1.1 Comment définir l'automatique ?	3
1.2 Notion de systèmes automatiques	4
1.3 Régulation ou asservissement ?	5
1.4 Hiérarchisation des systèmes automatiques industriels	6
1.5 Bref historique	7
Bibliographie	8

## **A**

---

### Outils mathématiques d'analyse et de conception

<b>2 • Outils mathématiques</b>	<b>11</b>
2.1 Introduction	11
2.2 Convolution	11
2.3 Transformée de Fourier	14
2.4 Transformée de Laplace	17
2.5 Transformée en $z$	22
Bibliographie	26
<b>3 • Représentation des signaux et des systèmes</b>	<b>27</b>
3.1 Introduction	27
3.2 Modèles et caractéristiques des signaux à temps continu et à temps discret	27
3.3 Caractéristiques des systèmes	33
3.4 Représentation temporelle des systèmes à temps discret	34
3.5 Représentation temporelle des systèmes à temps continu	35
3.6 Représentation d'état et propriétés associées	36
3.7 Représentations fréquentielles	39
3.8 Linéarisation	50
Bibliographie	52

<b>4 • Échantillonnage et reconstitution analogique</b>	<b>53</b>
4.1 Échantillonnage	53
4.2 Relations entre les représentations complexes	59
4.3 Reconstitution analogique	61
<b>5 • Caractérisation des systèmes à temps continu et à temps discret</b>	<b>67</b>
5.1 Introduction	67
5.2 Définitions générales relatives à la stabilité	67
5.3 Étude de la stabilité des systèmes linéaires invariants	72
5.4 Représentation d'un système linéaire échantillonné	77
5.5 Comportement transitoire d'un système linéaire	79
5.6 Propriétés spécifiquement liées à la représentation d'état	85
Bibliographie	92
<b>6 • Modélisation par bond graphs</b>	<b>93</b>
6.1 Introduction	93
6.2 Éléments de base des bond graphs	94
6.3 Génération des bond graphs dans les domaines électriques et mécaniques	101
6.4 Calcul du modèle mathématique associé à un bond graph	106
6.5 Exemple	113
Bibliographie	115
<b>7 • Identification des systèmes linéaires</b>	<b>117</b>
7.1 Généralités	117
7.2 Modèles « candidats »	118
7.3 Considérations sur le protocole expérimental	122
7.4 Méthodes non paramétriques graphiques	128
7.5 Traitement des données	132
7.6 Identification paramétrique	136
7.7 Exemple	144
Bibliographie	149
<b>8 • Analyse des systèmes asservis</b>	<b>151</b>
8.1 Fonctionnement des boucles de régulation	151
8.2 Stabilité	155
8.3 Précision	164
8.4 Analyse d'un cahier des charges	171
Bibliographie	171



# B

## Méthodes et structures de commande

<b>9 • Synthèse des lois de commande par approche fréquentielle « classique »</b>	<b>175</b>
9.1 Introduction : structure de corrections	175
9.2 Correction « série »	175
9.3 Correction « parallèle »	186
9.4 Discrétisation d'un correcteur continu	191
9.5 Conclusions	200
Bibliographie	200
<b>10 • Structure RST – Synthèse par placement des pôles</b>	<b>201</b>
10.1 Architecture et cadre d'application	201
10.2 Principe de synthèse du régulateur	202
10.3 Étude de cas	209
10.4 Cas des zéros	213
10.5 Conclusions	214
Bibliographie	214
<b>11 • Régulateurs PI – PID</b>	<b>217</b>
11.1 Introduction	217
11.2 Modèles de régulateurs PID	219
11.3 Approche temporelle du régulateur PID	222
11.4 Approche fréquentielle du régulateur PID	229
11.5 Implémentation numérique des régulateurs	233
11.6 Forme RST des régulateurs PID	239
11.7 Conclusions	241
Bibliographie	241
<b>12 • Structures particulières de commande</b>	<b>243</b>
12.1 Régulation cascade	243
12.2 Régulation de tendance	252
12.3 Systèmes à retard	257
12.4 Commande par modèle interne	260
Bibliographie	269
<b>13 • Commande prédictive</b>	<b>271</b>
13.1 Introduction : les concepts de base	271
13.2 Algorithme GPC	273
13.3 Étude de cas : application à un système électromécanique	282
13.4 Conclusions	287
Bibliographie	288

<b>14 • Introduction à la commande floue</b>	<b>291</b>
14.1 Présentation de la logique floue et de la commande floue	291
14.2 Définition des ensembles flous (fuzzyfication)	292
14.3 Définition des bases de règles	296
14.4 Méthodes d'inférence	297
14.5 Agrégation des résultats	300
14.6 Défuzzyfication	301
14.7 Exemples	304
14.8 Conclusions	312
Bibliographie	313
<b>15 • Commande dans l'espace d'état</b>	<b>315</b>
15.1 Introduction	315
15.2 Retour d'état	316
15.3 Reconstruction de l'état	327
15.4 Commande par retour d'état et observateur	332
15.5 Exemple : commande d'un pont roulant	340
Bibliographie	347
<b>16 • Analyse des systèmes non linéaires</b>	<b>349</b>
16.1 Hypothèses fondamentales de la méthode du 1 <sup>er</sup> harmonique	349
16.2 Calculs de gains complexes équivalents	352
16.3 Étude de la stabilité en régime libre	356
16.4 Étude de la stabilité en régime dissymétrique	361
16.5 Amélioration du comportement	367
16.6 Commande par mode de glissement	368
16.7 Conclusions	378
Bibliographie	379

## C

---

### Composants et architecture

<b>17 • Modélisation des convertisseurs de l'électronique de puissance</b>	<b>383</b>
17.1 Intérêt et contraintes du « découpage »	383
17.2 Les structures élémentaires de conversion	388
17.3 Évolution vers d'autres convertisseurs	398
17.4 Modélisation en régime dynamique	407
17.5 L'abaisseur en régime dynamique	413
17.6 L'élévateur en régime dynamique	426
17.7 L'inverseur en régime dynamique	433
17.8 Autres familles de convertisseurs en régime dynamique	439
17.9 Approche qualitative de l'amortissement du filtre d'entrée	439
17.10 Éléments de calcul des filtres	441

<b>18 • Capteurs</b>	<b>445</b>
18.1 Introduction	445
18.2 Principes physiques	446
18.3 Quelques exemples de mesures de grandeurs physiques	463
18.4 Perspectives de développement des capteurs	475
Bibliographie	477
<b>19 • Systèmes de contrôle et de commande</b>	<b>479</b>
19.1 Introduction	479
19.2 L'évolution des systèmes de contrôle-commande	480
19.3 Les SNCC actuels	487
19.4 Les API et les superviseurs	496
19.5 Les régulateurs de tableau et petits systèmes	500
19.6 Les calculateurs et systèmes embarqués	502
19.7 Les réseaux de terrain	509
19.8 Les outils de configuration	513
19.9 Quelle solution pour la régulation : SNCC ou API ?	515
Bibliographie	517
<b>20 • Méthodes de commande : synthèse, comparaison et critères de choix</b>	<b>519</b>
20.1 Généralités	519
20.2 Les méthodes et outils d'ingénierie	520
20.3 Conclusions générales	522
<b>Index</b>	<b>533</b>



# LES AUTEURS

---

- BEAUVOIS Dominique, Professeur, département d'Automatique, Supélec
- BOUCHER Patrick, Ancien chef du département d'Automatique, Supélec  
Président du conseil scientifique du Pôle de compétitivité S2E2
- BUISSON Jean, Professeur, Supélec Rennes
- DAVOUST Marie-Eve, Ancien professeur, département de Traitement du signal  
et systèmes électroniques, Supélec
- DEMERLÉ Martial, Ancien professeur, département d'Automatique, Supélec
- DUC Gilles, Professeur, département d'Automatique, Supélec
- DUMUR Didier, Professeur, chef du département d'Automatique, Supélec
- GODOY Emmanuel, Professeur, département d'Automatique, Supélec
- KARIMI Mohammad Charif, Professeur, département d'Énergie, Supélec
- RODRIGUEZ Pedro, Professeur, département d'Automatique, Supélec
- SADARNAC Daniel, Professeur, département d'Énergie, Supélec
- SALAUN Patrick, Ingénieur-chercheur Senior, EDF Recherche & Développement
- SANDOU Guillaume, Professeur, département d'Automatique, Supélec
- SIGUERDIDJANE Houria, Professeur, département d'Automatique, Supélec
- TEBBANI LE BRUSQUET Sihem, Professeur, département d'Automatique, Supélec
- VANNIER Jean Claude, Professeur, chef du département d'Énergie, Supélec
- VANZO Jean-Marc, Ancien directeur de l'établissement Supélec de Metz



## 1.1 Comment définir l'automatique ?

La régulation est une des techniques, sans aucun doute à avoir vocation industrielle, de la théorie des systèmes automatiques asservis, utilisés en automatique. Cette discipline, qui fait partie des sciences de l'ingénieur, nécessite néanmoins d'être préalablement précisée, le *Petit Larousse illustré* propose la définition suivante : « *Automatique : science et technique de l'automatisation, qui étudie les méthodes scientifiques et les moyens technologiques utilisés pour la conception et la construction de systèmes automatiques.* »

L'automatique peut donc se définir comme un ensemble de théories mathématiques et une technique de raisonnement concernant la prise de décision et la commande de systèmes. La traduction anglaise *automatic control* est plus explicite puisqu'elle précise la notion de commande. Le terme anglais *control* est un faux ami à ne surtout pas traduire par « contrôle », il signifie *commande*.

L'automatique ne s'est longtemps appliquée qu'aux systèmes mécaniques et électromécaniques, mais elle est maintenant aussi utilisée en gestion, biologie, économie, etc.

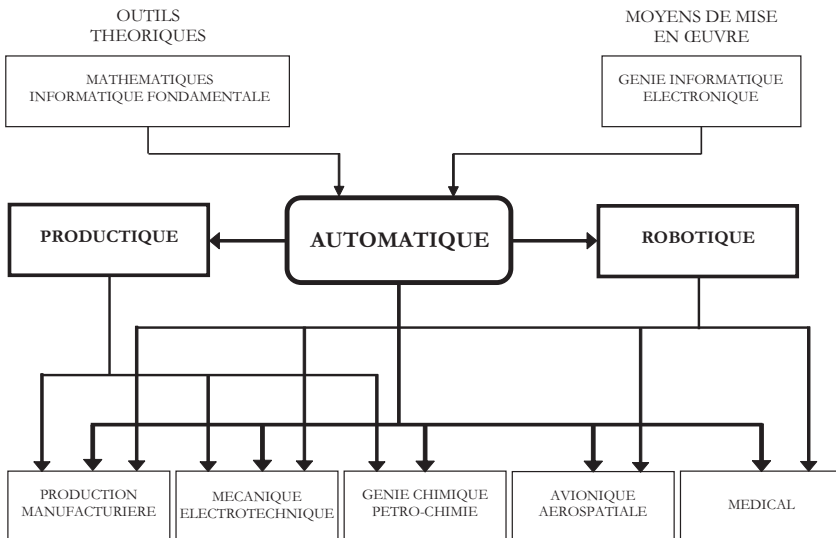


Figure 1.1 – Domaines d'application de l'automatique

La *figure 1.1* montre que l'automatique est une science transversale et concerne tous les secteurs d'application. Bien que les outils théoriques et les bases méthodologiques utilisés dans les problèmes d'automatique soient communs, les méthodologies de commande peuvent différer selon le secteur d'application. Les raisons de ces différences sont liées en grande partie à la spécificité des problèmes posés.

## 1.2 Notion de systèmes automatiques

Précisons tout d'abord le mot *système* avec la définition du dictionnaire *Larousse* : « *Un système consiste en une combinaison de parties qui se coordonnent pour concourir à un résultat.* »

Des objets agencés entre eux, c'est-à-dire ayant une certaine dépendance, constituent un système réalisant une certaine fonction. Les entrées sont les signaux qui apportent au système les informations du milieu extérieur, les sorties fournissent la réponse du système par dépendance des entrées ; on peut parler de causes (entrées) et d'effets (sorties). On utilise de manière synonyme à *système* le terme *procédé* ou même *processus* (*process* en anglais).

La commande consiste à appliquer, *via* les entrées de commande, une action sur le système de manière à obtenir en sortie un comportement déterminé. Cette sollicitation s'exerce souvent par l'intermédiaire d'une variation sur le flux d'énergie ou de matériau injecté dans le système. Lorsque cette influence est exercée par l'homme, la commande est dite manuelle. Lorsque l'homme est remplacé par des dispositifs techniques autonomes, on parle de commande automatique.

Les systèmes de commande automatiques copient le plus souvent le comportement de l'homme. Un exemple introductif simple s'obtient par l'observation d'un conducteur au volant de son véhicule. Le système que l'homme commande est sa voiture dans l'environnement de la route ; le cerveau et les membres constituent les organes de décision et de commande. Les décisions concernant la direction, l'accélération et le freinage sont prises, à partir des mesures effectuées par l'œil, de manière à satisfaire un critère de performance qui peut être un compromis entre la durée du trajet, le confort, la consommation ou les réglementations.

Cet exemple révèle les trois phases fondamentales accomplies par l'homme :

- observation ;
- réflexion ;
- action, puis retour à l'observation.

Il est intéressant de noter que des types d'action différents peuvent être appliqués, en fonction des critères intégrés lors de la phase de réflexion. Par exemple on peut comprendre intuitivement qu'un conducteur pressé appliquera une succession de freinages et d'accélération, au détriment de sa consommation alors qu'un conducteur économe adoptera une conduite plus souple.

La structure à trois phases met en évidence une opération de bouclage (*feedback* en anglais). Ce retour constitue l'une des notions fondamentales de l'automatique.

Il existe deux grands types de systèmes automatiques :

- les *systèmes logiques combinatoires et séquentiels*, câblés ou programmés, qui n'ont pas nécessairement une structure bouclée, c'est-à-dire qu'ils ne prennent pas nécessairement en considération une mesure sur l'état courant du système. De plus l'automatisation porte sur un nombre fini d'opérations prédéterminées dans leur déroulement. Par exemple un programmeur de machine à laver automatique est un tel système. De tels systèmes sont appelés *systèmes à événements discrets* ou encore *automatismes séquentiels* ;
- les *systèmes asservis*, fonctionnant en maintien d'une grandeur donnée ou en poursuite d'une loi de référence. Dans le cas des systèmes asservis, toutes les situations possibles n'étant pas prévisibles (arrivée d'une perturbation par exemple), le déroulement des opérations ne peut être prédéterminé à l'avance. Les systèmes asservis sont nécessairement bouclés, c'est-à-dire qu'une mesure de la situation est en permanence prise en considération dans la détermination de la commande.

Un système complexe peut présenter simultanément des aspects séquentiels et des aspects continus, on parle alors de systèmes hybrides ou de traitement « par lots » ou *batch*. Des confusions interviennent parfois entre *automatismes*, terme qui désigne des systèmes séquentiels, et *automatique* qui a une portée plus générale.



## 1.3 Régulation ou asservissement ?

Bien que les outils et méthodes soient communs aux régulations et aux asservissements il est préférable de définir ces termes :

- *Régulation* : une grandeur physique doit être maintenue à un niveau constant en dépit de la présence de perturbations.
- *Asservissement* : une grandeur physique doit suivre une évolution temporelle imposée par l'utilisateur du système.

Concernant les techniques de commande, cet ouvrage met l'accent sur un ensemble de méthodologies et techniques de commande que l'on retrouve dans tous les secteurs d'application. Une orientation particulière est accordée à la problématique de la régulation industrielle.

Le *Petit Larousse* donne cette définition : « *Industrie* : ensemble des activités économiques qui produisent des biens matériels par la transformation et la mise en œuvre de matières premières. »

Suivant cette définition sont concernées en premier lieu des industries qui mettent en œuvre des systèmes de régulation pour piloter leur processus de transformation. Ainsi cet ouvrage s'intéresse de ce fait :

- aux procédés : modélisation, identification, caractérisation, etc. ;
- aux systèmes de contrôle et de commande : lois de commande classiques et avancées, produits de contrôle commande disponibles (systèmes numériques de contrôle commande (SNCC), automates programmables industriels (API), etc.) ;
- aux mesures et actions : capteurs, actionneurs, pré-actionneurs (convertisseurs de puissance) ;
- à l'homme, dans sa relation avec son système de contrôle et de commande : supervision, pilotage, réglage...

Cependant les outils méthodologiques abordés (des outils théoriques à l'analyse et à la commande) pourront intéresser également tous les ingénieurs de recherche et développement ayant à traiter des problèmes de commande. Dans cet esprit, la modélisation des actionneurs électriques est abordée de par leur importance croissante dans tous les domaines où des chaînes de motorisation sont mises en œuvre, mais aussi les systèmes d'électronique de puissance.

Le choix des méthodes de commande retenues a été guidé par leur potentiel dans le cadre des problèmes industriels :

- les correcteurs et les régulateurs « classiques » : régulateurs PI et PID, à avance de phase, etc., en raison de leur importance pratique ;
- des méthodes plus « avancées » : approche polynomiale (structure RST), commande prédictive, commande dans l'espace d'état, logique floue.

Ces méthodes de commande attirent par ailleurs les remarques suivantes :

- les régulateurs PI-PID peuvent résulter d'une méthode de synthèse évoluée, toute loi de commande réalisant globalement une combinaison de ces fonctions élémentaires ;
- certaines techniques propres à l'espace d'état (chapitres 5 et 15), éventuellement associées à des méthodes d'identification (chapitre 7), peuvent être utilisées comme techniques de base pour des problèmes de détection de panne ou encore pour des objectifs de maintenance prédictive ;
- le choix d'une méthode de commande n'est pas un problème simple et dépend de multiples facteurs, tenant compte avant tout du cahier des charges mais aussi d'autres aspects comme le coût, la facilité de réglage sur site, le niveau de modélisation requis pour la synthèse, le niveau de formation, etc. ; une brève analyse est effectuée dans le chapitre 20, en guise de conclusion, avec un tableau comparatif, suivant différents critères, des méthodes exposées.

Certaines méthodes assez récentes comme l'optimisation  $H_\infty$ , à séquencement de gains (LPV) ou encore des techniques de platitude, n'ont volontairement pas été abordées. Ces techniques ont actuellement peu d'applications industrielles : d'une part leur haut niveau de technicité nécessite

un degré de formation assez élevé en automatique, d'autre part, en raison d'une algorithmique « lourde », elles nécessitent l'utilisation d'outils logiciels très spécialisés. Bien que l'on retrouve ces méthodes dans différents domaines (comme l'automobile sur des problèmes ponctuels), leurs secteurs applicatifs typiques sont les milieux de l'aéronautique, l'aérospatiale, les structures flexibles, etc.

L'utilisation d'une approche formalisée pour la définition et la mise en œuvre de structures de commande et de régulation présente de nombreux atouts. D'une part, elle permet un gain de temps pour les réglages, des validations partielles avant expérimentation, etc., d'autre part, elle permet, avec les outils de simulations disponibles actuellement, de traiter différentes solutions pour ne retenir dans une phase d'avant-projet que les solutions les plus simples qui sont susceptibles de satisfaire un cahier des charges.

Dans cet ouvrage trois aspects sont analysés :

- une première partie (chapitres 2 à 8) présente les outils mathématiques d'analyse permettant de comprendre, de modéliser et d'analyser les systèmes et les signaux mis en jeu ;
- une deuxième partie (chapitres 9 à 16) présente un ensemble de méthodes et de structures de commande ;
- une troisième partie (chapitres 17 à 19) plus « pratique » aborde les modélisations des éléments constitutifs d'une chaîne de régulation : actionneurs et pré-actionneurs (convertisseurs), capteurs, etc. ; les architectures et matériels de contrôle-commande.

Enfin un chapitre de conclusion présente, d'une part, un ensemble d'outils pour l'ingénieur travaillant sur les problèmes de régulation ou d'asservissement, d'autre part, un essai de comparaison de différentes méthodes de commande.

## 1.4 Hiérarchisation des systèmes automatiques industriels

La commande de systèmes complexes nécessite la mise en œuvre de stratégies multiples. On a l'habitude de classer les sous-systèmes élémentaires suivant leur fonctionnalité. L'ensemble peut se représenter dans une structure pyramidale montrée par la *figure 1.2*.

- **Niveau 0** : ce niveau ne fait pas partie du système de commande, il contient les divers équipements et machines contribuant au processus de fabrication.
- **Niveau 1** : c'est le niveau des systèmes d'asservissements auxiliaires qui ont pour objectif le maintien des sorties à une valeur de consigne fixée ou le suivi d'une trajectoire spécifique. À ce niveau on situe aussi les automatismes qui gèrent le séquençage des cycles de production.
- **Niveau 2** : c'est le niveau dévolu au système de supervision destiné à assurer le suivi et la coordination des systèmes du niveau inférieur. C'est à ce niveau que l'on situe les stratégies d'optimisation économique pour une entité élémentaire de production telle un atelier. Les équipements relatifs à ce niveau sont en général regroupés dans la salle de commande ou de conduite.
- **Niveau 3** : on trouve à ce niveau les fonctionnalités d'optimisation de la marche de l'ensemble des installations. On place au niveau 3 les outils permettant une optimisation économique de la production (par exemple les outils de CFAO, construction et fabrication assistées par ordinateur).
- **Niveau 4** : toute entreprise moderne met en œuvre une stratégie d'optimisation impliquant entre autre une planification des outils de production. Cette fonction est au niveau 4, au sommet de la pyramide.

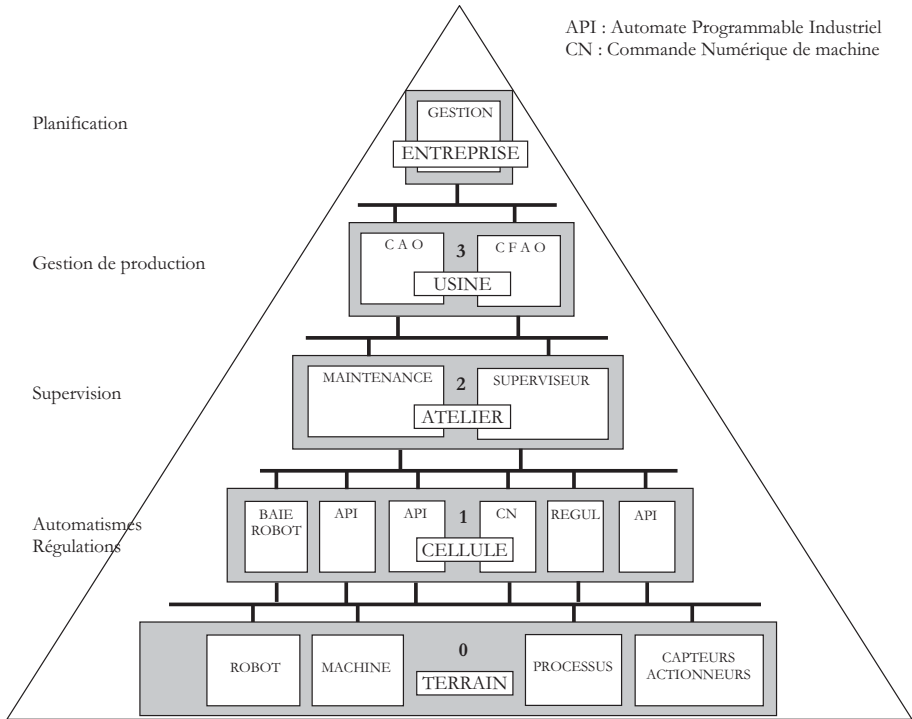


Figure 1.2 – Hiérarchisation des systèmes automatiques

## 1.5 Bref historique

Pour finir cette introduction, il nous paraît intéressant de brosser un bref historique de l'automatique afin de rappeler aux lecteurs la relative « jeunesse » des concepts utilisés. L'histoire des systèmes automatiques peut se diviser en trois époques.

La première époque, que l'on peut qualifier de *Préhistoire de l'automatique* s'étend de l'Antiquité au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle. Des inventeurs géniaux ont conçu des systèmes automatiques de manière purement intuitive. Dès 250 avant J.-C., nous avons des exemples de régulation de niveau : l'horloge automatique à eau de Ktesybios, la lampe à huile de Philon de Bizance et la machine à doser le vin de Héron d'Alexandrie.

Plus tard la période de la révolution industrielle a donné lieu à des réalisations importantes. Ainsi Réaumur, Watt et son régulateur de vitesse pour une machine à vapeur (1788), Jacquard et son métier à cartes perforées font progresser l'automatisation. On comprend que ces progrès sont tirés par les enjeux et les nécessités industriels et cela dans différents domaines : transport (par exemple avec les machines à vapeur), dans la production (machines à tisser), etc.

Cependant l'approche est restée très expérimentale jusqu'au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle. De cette époque datent les premiers travaux sur la formalisation de la théorie du bouclage et les applications de l'algèbre de Boole. Les premiers travaux sur le bouclage sont dus à Maxwell (1868), à Routh avec son critère algébrique (1872) et à Hurwitz (1890). De cette époque datent également les premières définitions rigoureuses, dues à Lyapunov, sur la stabilité et les méthodes d'étude de la stabilité (méthodes de Lyapunov, 1892) qui constituent encore aujourd'hui l'outil de base pour les études de stabilité des systèmes non linéaires.

L'étude analytique de la stabilité du régulateur de Watt fut commencée par Maxwell en 1868 et complétée en 1876 par Wichnegradsky.

Le développement des télécommunications (télégraphe, radiodiffusion...) et les études de dispositifs électroniques à lampes au début du XX<sup>e</sup> siècle (l'invention de la diode date de 1904 et celle du tube de 1906) ont conduit à l'extension de la notion de rétroaction. Ainsi l'étude des systèmes bouclés doit beaucoup à l'approche fréquentielle développée à partir de cette époque :

- Black (début des années 1930) et ses travaux sur la rétroaction (dans un but de linéarisation des amplificateurs et de réduction de la distorsion) ;
- Nyquist qui a énoncé le critère de stabilité des systèmes bouclés à partir de la réponse fréquentielle en boucle ouverte (1932) ;
- Bode et ses travaux sur la relation gain-phase des fonctions de transfert (1938) et les notions de marge de phase et de gain.

Enfin Nichols, Hall, Evans... qui ont laissé leur nom à des représentations et ont publié la plupart de leurs résultats à la fin de la seconde guerre mondiale. Les premières implémentations des systèmes de commande à cette époque reposaient sur l'utilisation de dispositifs électroniques à lampes.

En termes d'outils mathématiques, l'approche fréquentielle est fondée sur l'utilisation des fonctions de la variable complexe (et donc des travaux de Cauchy) et des transformations complexes : Laplace (fin XVIII<sup>e</sup>-début XIX<sup>e</sup> siècle), Fourier (fin XVIII<sup>e</sup>-début XIX<sup>e</sup> siècle).

La troisième époque débute avec les années cinquante. L'apparition de calculateurs numériques révolutionne le monde de l'automatique. La puissance de calcul disponible fait naître les méthodes dites de l'automatique « moderne » ou « avancée ». Parmi les faits marquants on peut citer les suivants :

- introduction de la représentation d'état, particulièrement bien adaptée à l'utilisation des calculateurs numériques pour l'étude et la commande des systèmes complexes et multivariables (Kalman 1960) ;
- étude de la commande optimale par Pontryagin (1958) et le principe du maximum, Bellman (1956) et les travaux sur la programmation dynamique, etc. ;
- développement des méthodes d'étude des systèmes non linéaires (Kockenburger, Cypkin) et des systèmes échantillonnés (Jury, Ragazzini) ;
- prise en compte des phénomènes aléatoires dans les théories récentes comme celles de Kalman, Wiener, Bucy.

Enfin des méthodes récentes, telles que la synthèse  $H_\infty$  (Zhou, Glover et Doyle, 1990) cherchent à concilier l'apport des notions introduites par les méthodes fréquentielles (telles que bande passante, marges de stabilité...) et la souplesse d'utilisation de la représentation d'état, cette dernière permettant des développements plus approfondis sur le plan algorithmique et s'appliquant plus facilement aux systèmes multivariables.

Dans le cadre de cet ouvrage, les outils théoriques s'appuieront principalement sur les travaux de Black-Nichols, Nyquist et Bode datant des années 1930 à 1940.

## Bibliographie

D'Azzo J. et Houpis C. – *Linear Control System Analysis and Design. Conventional and Modern.* McGraw Hill, 1995.

Åström K.J. et Wittenmark B. – *Computer Controlled Systems. Theory and Design.* Prentice Hall, 1997.

De Larminat Ph. – *Automatique : commande des systèmes linéaires.* Hermès, 1993.

Franklin G.F., Powell J.D. et Workman M.L. – *Digital Control of Dynamic Systems.* Addison-Wesley, 1998.

# A

---

## Outils mathématiques d'analyse et de conception



## 2 • OUTILS MATHÉMATIQUES

### 2.1 Introduction

Les principaux outils mathématiques nécessaires à l'étude des signaux et des systèmes, et utilisés dans la suite de cet ouvrage, sont présentés dans ce chapitre. Les cas des signaux continus et des signaux discrets sont traités. La convolution de signaux, la transformée de Fourier, la transformée de Laplace (domaine continu) et la transformée en  $z$  (domaine discret) sont successivement abordées.

### 2.2 Convolution

#### 2.2.1 Définition et conditions d'existence

##### ■ Cas continu

Le produit de convolution de deux signaux continus  $x(t)$  et  $y(t)$  est défini par la fonction  $c(t)$  :

$$c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) y(t - \theta) d\theta \quad [2.1]$$

Ce produit de convolution est souvent noté  $*$  :  $c(t) = x * y(t)$ . L'existence de cette convolution est liée aux propriétés de convergence de l'intégrale de support infini de l'équation [2.1]. La convolution est en particulier définie pour les cas suivants :

- $x$  est absolument sommable ( $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$ ), et  $|y|$  est borné.
- $x$  et  $y$  sont localement sommables et nuls en dehors d'un intervalle fini.
- $x$  et  $y$  sont de carré sommable ( $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt < +\infty$ ).

En effet, d'après l'inégalité de Schwarz (produit scalaire dans l'espace des fonctions) :

$$|c(t)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) y(t - \theta) d\theta \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(\theta) d\theta \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t - \theta) d\theta$$

##### ■ Cas discret

De manière similaire, la convolution de deux signaux discrets  $x[k]$  et  $y[k]$  est définie par le signal discret  $c[k]$  :

$$c[k] = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n] y[k - n] = x * y[k] \quad [2.2]$$

L'existence de cette convolution est liée aux propriétés de convergence de la somme infinie de l'équation [2.2]. La convolution est en particulier définie pour les cas suivants :

- $x$  est sommable ( $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n] < +\infty$ ), et  $|y|$  est borné.
- $x$  et  $y$  sont localement sommables et nuls en dehors d'un intervalle fini.
- $x$  et  $y$  sont de carré sommable ( $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (x[n])^2 < +\infty$ ,  $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (y[n])^2 < +\infty$ ).

## ■ Support du produit de convolution

### □ Cas continu

Si  $x$  a pour support l'intervalle  $[a_x, b_x]$ , et  $y$  a pour support l'intervalle  $[a_y, b_y]$ , alors l'équation [2.1] se réécrit par exemple :

$$c(t) = \int_{\theta=a_x}^{\theta=b_x} x(\theta)y(t-\theta) d\theta$$

Cette fonction est non nulle s'il existe  $t$  tel que :

$$a_y \leq t - \theta \leq b_y$$

En utilisant le fait que  $a_x \leq \theta \leq b_x$ , le support du produit de convolution  $c$  est donc l'intervalle  $[a_x + a_y, b_x + b_y]$ .

### □ Cas discret

De la même façon que pour le cas continu, si  $x$  est une séquence de longueur  $N$  et  $y$  une séquence de longueur  $M$ , alors le produit de convolution de ces deux signaux discrets est de longueur  $N + M - 1$ . Si :

- $x[k]$  est non nul pour  $k \in \{k_0, \dots, k_0 + N - 1\}$ ,
- $y[k]$  est non nul pour  $k \in \{k_1, \dots, k_1 + M - 1\}$ ,

alors  $c[k] = x * y[k]$  est non nul pour  $k \in \{k_0 + k_1, \dots, k_0 + k_1 + N + M - 2\}$ .

## ■ Exemple

Soit à convoler deux signaux continus :

$$\begin{cases}
 x(t) = 1 & \text{si } t \in [0,1] \\
 = 0 & \text{sinon} \\
 y(t) = e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\
 = 0 & \text{si } t < 0
 \end{cases}$$

$y$  est sommable,  $x$  est borné, la convolution est donc définie, et :

$$c(t) = \int_0^1 x(\theta)y(t-\theta) d\theta$$

$y(t-\theta)$  est nulle si  $t-\theta < 0$ . On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 c(t) &= 0 & \text{si } t \leq 0 \\
 c(t) &= \int_0^t e^{-(t-\theta)} d\theta = (e^t - 1)e^{-t} = 1 - e^{-t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\
 c(t) &= \int_0^1 e^{-(t-\theta)} d\theta = (e - 1)e^{-t} & \text{si } t \geq 1
 \end{aligned}$$



## 2.2.2 Propriétés élémentaires de la convolution

### ■ Commutativité, associativité et dérivation

S'il existe, le produit de convolution est commutatif :

$$x * y = y * x$$

Sous réserve des conditions d'existence, le produit de convolution est associatif :

$$(x * y) * z = y * (x * z)$$

Dans le cas de signaux continus, la dérivation du produit de convolution de deux signaux s'exprime en fonction de la dérivée des signaux :

$$\frac{dx * y(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} * y(t) = \frac{dy(t)}{dt} * x(t)$$

### ■ Convolution de signaux périodiques

Les équations [2.1] et [2.2] ne sont pas définies lorsque les signaux  $x$  et  $y$  sont périodiques. Dans ce cas, il est possible de définir tout de même la convolution des deux signaux en utilisant les « motifs périodes ».

Soient deux signaux continus  $x$  et  $y$  (resp. discrets) de période  $T$  (resp.  $N$ ). Les motifs périodes sont notés  $x_T$  et  $y_T$  (resp.  $x_N$  et  $y_N$ ). Les produits de convolution sont définis par :

$$\begin{aligned} c(t) = x * y_T(t) &= \int_0^T y_T(\theta) x(t - \theta) d\theta & c[k] = x * y_N[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} y_N[n] x[k - n] \\ &= y * x_T(t) = \int_0^T x_T(\theta) y(t - \theta) d\theta & &= y * x_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n] y[k - n] \end{aligned}$$

Le produit de convolution est lui-même périodique de période  $T$  (resp.  $N$ ). Son motif période est dit obtenu par convolution circulaire, et noté  $c_T(t) = x_T \otimes y_T(t)$  (resp.  $c_N[k] = x_N \otimes y_N[k]$ ).

## 2.2.3 Interprétation graphique

La convolution de deux signaux peut s'interpréter de manière graphique. Pour calculer la valeur du produit de convolution en  $t_0$  de deux signaux continus, il suffit :

- de tracer la fonction  $y(\theta - t_0)$  ; elle s'obtient par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis décalage de l'origine en  $t_0$ ,
- de multiplier  $x(\theta)$  par cette fonction  $y(\theta - t_0)$ ,
- puis de calculer la valeur algébrique de l'aire placée sous cette courbe.

La *figure 2.1* illustre cette construction.

La même interprétation peut être donnée dans le cas de signaux discrets : pour calculer la convolution de  $x[k]$  et  $y[k]$  en  $k_0$ , il suffit :

- de tracer la suite  $y[k_0 - n]$ ,
- de multiplier termes à termes  $x[n]$  par cette suite  $y[k_0 - n]$ ,
- d'additionner les produits obtenus.

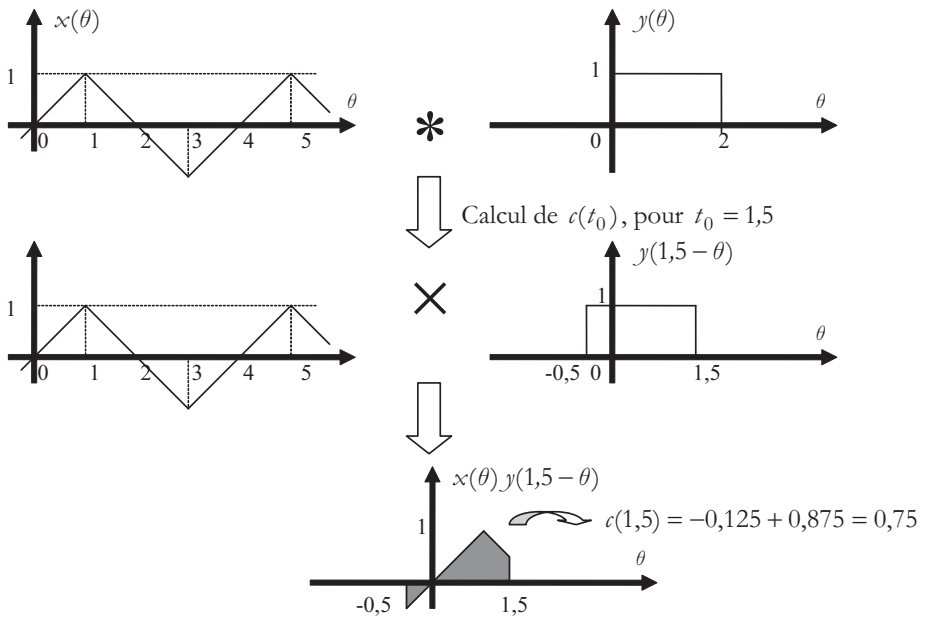


Figure 2.1 – Calcul graphique du produit de convolution

## 2.3 Transformée de Fourier

### 2.3.1 Définition et condition d'existence

La transformée de Fourier est l'opération permettant de faire le lien entre les domaines temporel et fréquentiel d'un signal. Elle est ici définie pour les signaux continus et discrets.

#### ■ Cas continu

On définit la transformée de Fourier par la fonctionnelle qui, à une fonction  $x$  de la variable temporelle  $t$ , associe une fonction  $X$  de la variable fréquentielle  $f$  par l'équation :

$$X(f) = \text{TF}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt \quad [2.3]$$

Le calcul de la transformée de Fourier pour une fréquence donnée  $f_0$  revient à effectuer un filtrage sélectif à cette fréquence : on recherche dans tout le signal l'information correspondant à cette fréquence  $f_0$ .

La transformée de Fourier est définie en particulier pour tout signal  $x$  absolument sommable, c'est-à-dire tel que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$ .

Si  $x$  est à valeur réelle, le module de la transformée de Fourier est pair, et sa phase est impaire. Sa connaissance dans le domaine positif est donc suffisante.

### ■ Cas discret

De la même façon, dans le domaine discret, la transformée de Fourier d'un signal est définie par :

$$X(\nu) = \text{TF}(x[k]) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[k] e^{-2\pi j\nu k} \quad [2.4]$$

La transformée de Fourier est en particulier définie pour les signaux absolument sommables ( $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n] < +\infty$ ).  $X(\nu)$ , lorsqu'elle est définie, est une fonction périodique de période 1. Si  $x[k]$  est à valeur réelle, alors le module de  $X(\nu)$  est pair, et la phase est impaire. La connaissance de  $X(\nu)$  sur l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$  est donc suffisante.

### ■ Exemple

Soit le signal discret  $x[k]$  défini par  $x[k] = 1$  si  $k \in [-N, N-1]$ , et nul en dehors de cet intervalle. La transformée de Fourier de ce signal est alors :

$$X(\nu) = \sum_{k=-N}^{N-1} e^{-2\pi j\nu k} = e^{2\pi j\nu N} \sum_{k=0}^{2N-1} e^{-2\pi j\nu k} = e^{2\pi j\nu N} \frac{1 - e^{-2\pi j\nu(2N)}}{1 - e^{-2\pi j\nu}} = e^{\pi j\nu} \frac{\sin(2\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)}$$

## 2.3.2 Transformées de Fourier usuelles

Le *tableau 2.1* présente quelques transformées de Fourier pour des signaux usuels continus et discrets.

**Tableau 2.1** – Transformées de Fourier de signaux continus et discrets

Signal $x(t)$	$X(f)$	Signal $x[k]$	$X(\nu)$
1	$\delta_{(0)}^1$	1	$\delta_{(0)}$
$e^{2\pi jft}$	$\delta_{(f)}$	$e^{2\pi jak}$	$\delta_{(a)}$
$\delta_{(0)}$	1	$a^k, k \geq 0,  a  < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-2\pi j\nu}}$
$\delta_{(t)}$	$e^{-2\pi jft}$	$\delta[k - a]$	$e^{-2\pi j\nu a}$
$\sin(2\pi ft)$	$\frac{1}{2j} \delta_{(f)} - \frac{1}{2j} \delta_{(-f)}$	$\sin(2\pi\nu k)$	$\frac{1}{2j} \delta_{(\nu)} - \frac{1}{2j} \delta_{(-\nu)}$
$\cos(2\pi ft)$	$\frac{1}{2} \delta_{(f)} + \frac{1}{2} \delta_{(-f)}$	$\cos(2\pi\nu k)$	$\frac{1}{2} \delta_{(\nu)} + \frac{1}{2} \delta_{(-\nu)}$
$x(t) = 1$ si $t \in [0, T]$ $x(t) = 0$ sinon	$T e^{-\pi j f T} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$	$x[k] = 1$ si $k \in [0, N-1]$ $x[k] = 0$ sinon	$e^{-\pi j\nu(N-1)} \frac{\sin(\pi\nu N)}{\pi\nu N}$

## 2.3.3 Formule d'inversion de la transformée de Fourier

### ■ Cas continu

La limite de  $x$  en  $t$  par valeur supérieure (resp. inférieure) est notée  $x(t^+)$  (resp.  $x(t^-)$ ). La formule d'inversion de la transformée de Fourier est :

$$\frac{x(t^+) + x(t^-)}{2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T X(f) e^{+2\pi jft} df \quad [2.5]$$

<sup>1</sup> L'impulsion de Dirac  $\delta$  est définie au chapitre 3.

Cette limite est la valeur principale de Cauchy. Dans le cas où  $X(f)$  est absolument sommable, l'équation [2.5] devient :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+2\pi jft} df \quad [2.6]$$

### ■ Cas discret

La formule d'inversion de la transformée de Fourier est donnée par :

$$x[k] = \int_0^1 X(v) e^{+2\pi jvk} dv$$

## 2.3.4 Propriétés de la transformée de Fourier

### ■ Propriétés générales

#### □ La transformée de Fourier est linéaire

Par linéarité de l'intégrale (cas continu) ou de la somme (cas discret) :

$$\forall \alpha, \beta \quad \text{TF}(\alpha x + \beta y) = \alpha \text{TF}(x) + \beta \text{TF}(y)$$

#### □ Facteur d'échelle

Un changement d'unité de la variable continue  $t$  se traduit dans le domaine fréquentiel par :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^* \quad \text{TF}(x(\alpha t)) = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

#### □ Transformée de Fourier d'un signal retardé

La transformée de Fourier d'un signal retardé se déduit de la transformée de Fourier du signal initial par :

$$\text{TF}(x(t - \tau)) = e^{-2\pi jf\tau} X(f)$$

$$\text{TF}(x[k - p]) = e^{-2\pi jvp} X(v)$$

### ■ Transformée de Fourier d'une convolution

#### □ Cas continu

En utilisant la définition du produit de convolution (équation [2.1]), il vient :

$$\begin{aligned} \text{TF}(x * y(t)) &= \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \left( \int_{\theta=-\infty}^{\theta=+\infty} x(\theta) y(t - \theta) d\theta \right) e^{-2\pi jft} dt \\ &= \left( \int_{\theta=-\infty}^{\theta=+\infty} x(\theta) e^{-2\pi jf\theta} d\theta \right) \cdot \left( \int_{t-\theta=-\infty}^{t-\theta=+\infty} y(t - \theta) e^{-2\pi jf(t-\theta)} d(t - \theta) \right) \end{aligned}$$

On reconnaît les transformées de Fourier de  $x$  et  $y$ . La transformée de Fourier d'un produit de convolution de deux signaux est donc le produit de leurs transformées de Fourier :

$$\text{TF}(x * y(t)) = \text{TF}(x(t)) \cdot \text{TF}(y(t))$$

□ **Cas discret**

De la même façon, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \text{TF}(x * y[k]) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[k-n] \right) e^{-2\pi j\nu k} \\ &= \left( \sum_{k-n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-2\pi j\nu n} \right) \cdot \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[k-n]e^{-2\pi j\nu(k-n)} \right) \end{aligned}$$

Et finalement :

$$\text{TF}(x * y[k]) = \text{TF}(x[k]) \cdot \text{TF}(y[k])$$

■ **Transformée de Fourier d'un produit**

□ **Cas continu**

La formule d'inversion de l'équation [2.6] indique le rôle symétrique joué par le signal et sa transformée de Fourier. La transformée de Fourier d'un produit de signaux est ainsi le produit de convolution des transformées de Fourier des signaux :

$$\text{TF}(x \cdot y(t)) = \text{TF}(x(t)) * \text{TF}(y(t))$$

□ **Cas discret**

Le cas des signaux discrets est à peu près identique en se rappelant que la transformée de Fourier d'un signal discret est périodique de période 1. La transformée de Fourier du produit de deux signaux discrets est donc obtenue en effectuant la convolution circulaire des transformées de Fourier. En notant  $X_1(\nu)$  (resp.  $Y_1(\nu)$ ) le motif période de la transformée de Fourier du signal  $x[k]$  (resp.  $y[k]$ ), la transformée de Fourier de  $x \cdot y[k]$  est donc :

$$\text{TF}(x[k] \cdot y[k]) = X_1(\nu) \otimes Y_1(\nu)$$

■ **Transformée de Fourier et dérivation**

Dans le cas d'un signal continu  $m$  fois continûment dérivable, la transformée de Fourier vérifie la propriété :

$$\text{TF} \left( \frac{d^m x(t)}{dt^m} \right) = (2\pi j f)^m \text{TF}(x(t))$$

Inversement, si  $t^m x(t)$  est sommable,

$$\text{TF}((-2\pi j t)^m x(t)) = \frac{d^m \text{TF}(x(t))}{dt^m}$$

## 2.4 Transformée de Laplace

### 2.4.1 Définition et domaine de convergence

■ **Définition**

La transformée de Fourier d'un signal continu n'est pas définie pour un signal à divergence exponentielle ( $x(t) \approx a^{|t|}$  quand  $|t| \rightarrow +\infty$ , et  $|a| > 1$ ). Afin de caractériser ce type de signal, la transformée de Laplace est introduite. La transformée de Laplace est la fonctionnelle qui à un signal de la variable temporelle  $t$  associe une fonction de la variable complexe  $s = \sigma + 2\pi j f$  définie par :

$$X(s) = L(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma + 2\pi j f t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \quad [2.7]$$

À condition qu'elle soit définie pour ces valeurs de  $s$ , la transformée de Laplace pour  $s$  imaginaire pur est ainsi la transformée de Fourier du signal  $x$ .

### ■ Condition d'existence

L'existence de la transformée de Laplace est liée à la convergence de l'intégrale définie par l'équation [2.7]. Supposons qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  et deux constantes positives  $c$  et  $d$  tels que :

$$\begin{cases} |x(t)| \leq c e^{at} & \forall t \geq t_1 \geq 0 \\ |x(t)| \leq d e^{bt} & \forall t \leq t_2 \leq 0 \end{cases} \quad [2.8]$$

Alors, l'équation [2.7] permet d'écrire :

$$\begin{aligned} |X(s)| &\leq \int_{-\infty}^{t_2} |x(t) e^{-(\sigma+2\pi jft)}| dt + \left| \int_{t_2}^{t_1} x(t) e^{-(\sigma+2\pi jft)} dt \right| + \int_{t_1}^{+\infty} |x(t) e^{-(\sigma+2\pi jft)}| dt \\ &\leq c \int_{-\infty}^{t_2} e^{-(\sigma-b)t} dt + \left| \int_{t_2}^{t_1} x(t) e^{-(\sigma+2\pi jft)} dt \right| + d \int_{t_1}^{+\infty} e^{-(\sigma-a)t} dt \end{aligned}$$

La transformée de Laplace de  $x$  est donc définie si :

- $x$  est localement sommable,
- $a < \sigma = \text{Re}(s) < b$

Le domaine de convergence de la transformée de Laplace est obtenu pour les bornes minimales  $\underline{a}$  et  $\bar{b}$  que l'on peut trouver pour l'équation [2.8]. En particulier, dans le cas de signaux causaux, c'est-à-dire nuls pour les temps négatifs, la transformée de Laplace est définie dans un demi-plan  $\underline{a} < \sigma = \text{Re}(s)$ .

Si  $X(s)$  a une expression rationnelle en  $s$ , les pôles de  $X$  sont les racines de son dénominateur, ses zéros sont les racines de son numérateur. Dans le cas de systèmes causaux, la borne  $\underline{a} < \sigma = \text{Re}(s)$  est alors égale à la plus grande partie réelle des pôles de  $X(s)$ .

### ■ Exemple

Soit le signal :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \\ x(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Un tel signal, nul pour les temps négatifs, est dit causal. La transformée de Laplace de ce signal est donnée par :

$$X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \left[ -\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s+a} \quad \text{pour } \text{Re}(s) > -a$$

Dans l'exemple précédent,  $X$  n'a qu'un pôle, situé en  $-a$ .

## 2.4.2 Transformées de Laplace usuelles

Le tableau 2.2 présente quelques transformées de Laplace pour des signaux continus et causaux.  $\mathcal{U}(t)$  désigne l'échelon de Heaviside<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Voir chapitre 3.