



Université de Caen



IUT Caen - Département Génie Chimique et Procédés

Version du
mercredi 22 septembre 2004 à 12 h 01

Cours de Régulation

Responsable Pédagogique :

Eric Magarotto

☎ : 02 31 45 27 09,
email : eric.magarotto@greyc.ismra.fr

Avertissement : Ce document est constitué de notes de cours et ne prétend donc ni à l'originalité, ni à l'exhaustivité. Ces notes doivent beaucoup aux emprunts fait à de nombreux ouvrages et à différents travaux de collègues. Ce document est une version provisoire qui s'adresse aux étudiants du département Génie Chimique et Génie des Procédés de l'IUT de Caen. Il contient les notes du cours (environ 15 h).

Table des matières

Objectifs du Cours de Régulation

iv

I Systèmes Élémentaires

Chapitre 1

Introduction - Principes Généraux

1.1	Introduction	2
1.2	Notion de Système	3
1.3	Notion de Boucle Ouverte/Fermée	5
1.4	Notion de Modèle	7
1.5	Notion de Fonction de Transfert	12
1.6	Schémas Blocs et Algèbre de Diagrammes	15

Chapitre 2

Systèmes du Premier Ordre

2.1	Objectifs	20
2.2	Systèmes du premier ordre	20
2.3	Réponses temporelles	21
2.4	Cas particulier des systèmes du premier ordre généralisé	26
2.5	Cas particulier des systèmes intégrateurs	26
2.6	Cas particulier des systèmes avec retard	27

Chapitre 3 Systemes du Deuxieme Ordre
--

3.1 Généralités	28
3.2 Etude des pôles d'un système du deuxième ordre	29
3.3 Réponses temporelles	29
3.4 Systèmes d'ordre supérieur	37

II Notions de Performances

Chapitre 4 Stabilité

4.1 Le concept	41
4.2 Critère de Routh-Hurwitz	43
4.3 Lieu des pôles	45
4.4 Résumé	46

Chapitre 5 Précision et Rapidité

5.1 Introduction	48
5.2 Classe d'un système asservi	51
5.3 Effets d'une perturbation sur l'erreur permanente	53
5.4 Rapidité et précision dynamique	55

III Méthodes de Correction & Identification

Chapitre 6 Correction PID
--

6.1 Introduction	60
----------------------------	----

6.2	Correction «Tout ou rien»	61
6.3	Correcteur Proportionnel (P)	61
6.4	Correcteurs à actions proportionnelle et intégrale (PI)	65
6.5	Correcteurs à actions proportionnelle et dérivée (PD)	70
6.6	Correcteurs à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)	72
6.7	A propos de la commande...	73
6.8	Méthodes temporelles de synthèse des correcteurs	73
6.9	Stratégies de Régulations	78
6.10	Limitation et Faiblesse du correcteur PID	79

Chapitre 7

Identification

7.1	Introduction	80
7.2	Présentation du problème	81
7.3	Quelques méthodes	82

Liste des figures	92
--------------------------	-----------

Liste des tableaux	95
---------------------------	-----------

Bibliographie	96
----------------------	-----------

Remerciements

Je tiens particulièrement à remercier :

- *L'ensemble de l'équipe pédagogique et administrative de l'IUT département Génie Chimique et Génie des Procédés qui m'a apporté son aide et sa confiance en me donnant la responsabilité pédagogique de la partie régulation des procédés.*
- *Mes assistants (moniteurs) **M. Pouliquen, M. Dinh, M. Sekher et P. Pognant-Gros** qui ont effectués les TD et TP en ma compagnie. Ils ont aussi participé activement à l'élaboration des textes de TD et TP. Par leurs remarques, ils m'ont aussi permis d'améliorer ce document de cours pour en faire une version «décente».*
- *Les étudiants de deuxième année des promotions **2002 et 2003** qui m'ont « supporté » et qui, par leurs remarques, m'ont permis d'améliorer (notamment de rendre accessible) ce cours, les TD et les TP.*

Objectifs du Cours de Régulation

Maîtrise du vocabulaire

La Régulation possède un vocabulaire spécifique à acquérir.

Outils mathématiques

Ce cours nécessite la maîtrise de certains outils mathématiques tels que :

- la transformée de Laplace ;
- les nombres complexes ;
- la dérivation et l'intégration ;
- l'algèbre de base et celui de blocs fonctionnels.

Notions liées à la Régulation

Voici une liste (non exhaustive) des *principales* notions qu'il s'agit de comprendre et de connaître :

- modèle / système ;
- boucle ouverte / fermée ;
- ordre d'un système ;
- stabilité ;
- classe d'un système ;
- performances d'un système ;
- correction P, PI, PID ;
- identification ;
- point de fonctionnement.

Réguler un système c'est réaliser :

1. l'étude physique du système ;
2. la modélisation, voire l'identification ;
3. l'analyse du modèle ;
4. la définition (ou traduction/compréhension s'il vous est imposé) du cahier des charges ;
5. le choix du type de correcteur (P,PI,PID) ;
6. l'obtention et le réglage des paramètres du correcteur ;
7. la simulation/validation du système régulé ;
8. la réalisation physique ou l'instrumentation (pas fait ici).

Première partie

Systemes Elémentaires

Chapitre 1

Introduction - Principes Généraux

Sommaire

1.1	Introduction	2
1.2	Notion de Système	3
1.3	Notion de Boucle Ouverte/Fermée	5
1.4	Notion de Modèle	7
1.5	Notion de Fonction de Transfert	12
1.6	Schémas Blocs et Algèbre de Diagrammes	15

1.1 Introduction

Le contrôle est un concept de sens commun. On en trouve des exemples dans le monde naturel, dans le monde vivant (par exemple la régulation de la température du corps humain). Les premières réalisations datent de l'antiquité (régulation de niveau d'eau). Il a toutefois fallu attendre le 19^{ème} siècle pour que les propriétés des boucles de régulation soient étudiées de manière formelle. Depuis les progrès sont constants.

La *Régulation* est une partie de la science technique appelée *Automatique*. On considère généralement que l'automatique (et donc la régulation) a débuté dans les années 1930, avec les premiers asservissements de position et surtout une première définition de la stabilité ; naturellement, des systèmes à fonctionnement "autonome" existaient auparavant (les automates), mais ils n'étaient pas théorisés. Après ces premiers pas, tout s'accéléra, avec le développement des premières méthodes de synthèse de correcteurs au cours de la décennie 1940-1950, puis dès 1960, avec l'explosion de l'informatique.

Aujourd'hui l'automatique est partout :

- dans la vie quotidienne : chauffage, appareils photographiques, lecteurs CD, lecteurs DVD, machines à laver, domotique, ...
- dans l'industrie : chimie, industrie manufacturière, métallurgie, industrie plastique, production d'énergie, environnement, automobile, ...
- dans l'agriculture : alimentation du bétail, régulation de température d'élevages industriels, régulation d'hygrométrie pour des cultures sous serres, ...
- dans l'aéronautique : aviation civile et militaire, missiles, satellites, navette spatiale, ...
- dans la médecine : examens lourds, thérapie embarquée, chirurgie assistée, ...

1.2 Notion de Système

Un système est un dispositif isolé, soumis aux lois de la physique, de la chimie, de la biologie, de l'économie, etc....

Définition 1.1 (Système). *Un **système** est un ensemble d'éléments interconnectés pour accomplir une tâche prédéfinie. Il est affecté par une (ou plusieurs) variable(s) : les **entrées** du système. Le résultat de l'action des entrées est la **réponse** du système caractérisée par l'évolution d'une ou plusieurs variables : les **sorties**. Voir figure 1.1 ci dessous.* ■

Remarque 1.1. Un système industriel est souvent appelé «processus». ■

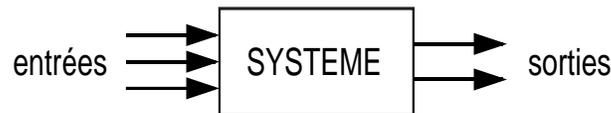


figure 1.1: Notion de système

Les systèmes que l'on abordera dans ce cours possèdent les caractéristiques suivantes :

Représentation : un système est généralement représenté par un schéma fonctionnel sous forme de rectangle. Les signaux d'entrée appliqués à ce rectangle sont caractérisés par des flèches entrantes et annotées. L'action de ces entrées produit de cette manière (*causale*) des effets, mesurés par des signaux de sortie, représentés par des flèches sortantes et annotées. Ce mode de représentation est détaillée à la section 1.6.

SISO/MIMO : les entrées que l'on décide d'appliquer au système (et les sorties de ce système) peuvent être multiples : on parlera de système **MIMO** (Multi-Input Multi-Output, multi-entrées multi-sorties), ou uniques : on parlera de système **SISO** (Single-Input Single Output, mono-entrée mono-sortie). L'objectif de ce cours se limitera aux systèmes SISO.

Nature des Entrées : les entrées affectant un système peuvent être de différentes natures (voir figure 1.2) :

- la commande $e(t)$: elle a pour but d'exercer une action entraînant le fonctionnement souhaité du système ;
- la perturbation $d(t)$: il s'agit d'une entrée particulière (car elle est indépendante de notre décision) qui trouble le fonctionnement désiré du système.

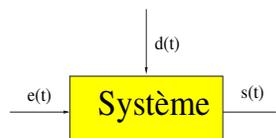


figure 1.2: Types d'entrées d'un système

Modèle : un système est caractérisé par des relations entrées/sorties exprimées sous la forme de lois mathématiques.

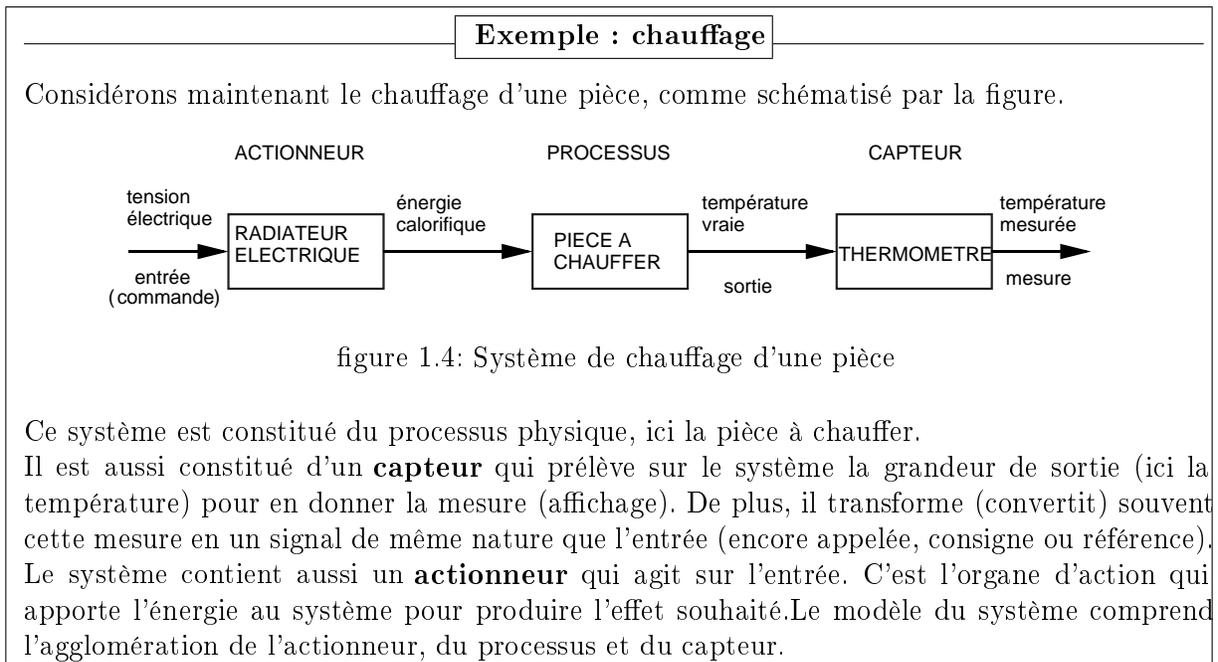
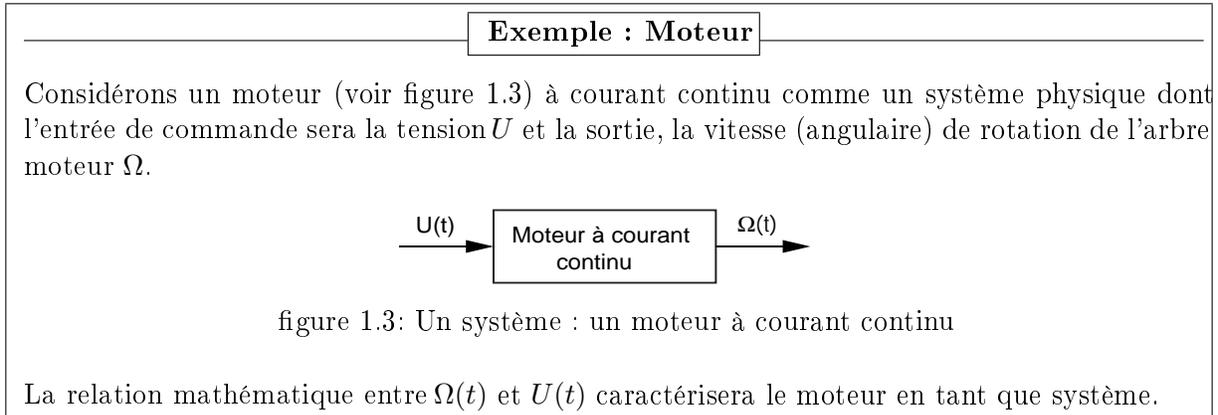
Système Linéaire : les lois mathématiques entre l'entrée et la sortie sont des équations différentielles linéaires. Un système linéaire possède les propriétés de superposition et de proportionnalité. Le principe de superposition permet (entre autres) de décomposer l'étude de systèmes complexes en sous-systèmes plus simples à étudier.

Causalité : l'action (l'entrée) précède la réponse (la sortie).

Invariant dans le temps : le fonctionnement du système est le même quelque soit le moment l'instant où on l'utilise → les coefficients des équations différentielles sont constants et réels.

1.2.1 Système physique

D'après la définition, un système est excité («attaqué») par une entrée et délivre («répond par») une sortie. Dans un premier temps, on va faire figurer le processus physique à l'intérieur d'un bloc auquel on va appliquer les entrées et sorties.



1.2.2 Objectifs de la régulation

Le rôle de l'automaticien (chargé d'obtenir un système régulé) sera multiple :

- Instrumenter le système : choisir les capteurs et actionneurs en fonction des besoins physiques, de coût et de performances demandées au système.
- Déterminer les relations entrées-sorties du système, des capteurs et des actionneurs. On parlera dès lors de :
 - **modéliser** quand on s'attachera à déterminer la structure mathématique de ces relations.
 - **identifier** quand on s'intéressera à calculer les coefficients du modèle.

- Synthétiser une loi de commande (un correcteur) afin d’obtenir un système performant : **précis, rapide et stable**, tout en s’affranchissant des influences néfastes des perturbations.

Le système ainsi corrigé (asservi, régulé) devra assurer deux objectifs :

- la **poursuite** : suivre une entrée de consigne (référence). On désire asservir la sortie à l’entrée (la sortie doit « ressembler » le plus possible à l’entrée) et ainsi assurer des performances (stabilité, rapidité, précision).
- La **régulation** : annuler (ou diminuer) les effets de la (ou des) perturbation(s).

1.3 Notion de Boucle Ouverte/Fermée

1.3.1 Système en boucle ouverte

Un système en boucle ouverte est un système qui ne comporte pas de contre-réaction (« feedback ») entre la sortie et l’entrée. Classiquement, il est composé du processus physique, d’un capteur pour en mesurer la sortie et d’un actionneur pour agir sur la grandeur d’entrée du processus.

Définition 1.2 (capteur). *Un capteur est un organe qui transforme une grandeur physique quelconque en une autre grandeur physique (généralement électrique) pouvant être transportée et traitée plus facilement. Par exemple, on peut trouver des capteurs de position, de vitesse, de débit, de température, de pression, de niveau, de pH, de densité, de masse, de conductivité, d’oxygène ou de gaz carbonique, de concentration, etc...* ■

Définition 1.3 (actionneur). *Un actionneur est un organe qui est capable d’apporter de l’énergie ou de la matière dans une boucle de régulation, en fonction de l’information fournie par le régulateur (ou bien le correcteur). Par exemple, un moteur électrique associé à son amplificateur de puissance représente un actionneur. Les vannes et les pompes sont d’autres actionneurs...* ■

On se placera dans le cas idéal en faisant les approximations suivantes :

- Les actionneurs n’introduisent ni retard, ni distorsion, mais on ne doit pas oublier qu’ils ont une action *limitée* par des saturations (« butées »).
- Le capteur est lui aussi supposé excellent. Sa précision et sa rapidité sont deux critères importants. On tiendra compte en régulation, des bruits (perturbations de sortie) qu’il est susceptible d’introduire dans la chaîne de régulation

Cette solution est envisageable dans le cas où le système est parfaitement connu (ce qui est théoriquement impossible) et dans le cas où l’obtention d’une mesure de la sortie n’est pas économiquement possible. L’exemple typique est celui de la machine à laver (le linge ou bien la vaisselle) fonctionnant sur la base de cycles pré-programmés ne possédant pas d’informations quant à la mesure du degré de saleté (du linge ou bien de la vaisselle). Si une quelconque perturbation l’affecte ou si le système n’est pas parfaitement connu (poids ou type du linge, quantité de vaisselle ou qualité de l’eau variable), le résultat escompté peut varier sensiblement...

On peut représenter un système en boucle ouverte par le schéma de principe suivant :

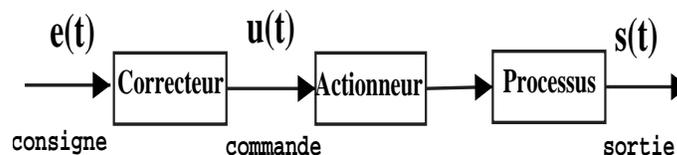


figure 1.5: Système en BO

Dans le cas de l'exemple 1.2.1 du chauffage, un de nos objectifs sera d'assurer une température constante dans la pièce, quels que soient les éventuels changements qui peuvent intervenir : conditions météorologiques, courant d'air...

Avec un tel système, ce challenge n'est pas tenable puisque, si l'on mesure la température de la pièce, on ne se sert pas de cette mesure pour réagir sur l'entrée du système.

En résumé, la BO (boucle ouverte) possède les inconvénients suivants :

- On ne peut commander/asservir/réguler des systèmes instables (nous reviendrons plus en détail sur la notion de stabilité lors d'un prochain cours),
- Les perturbations ont des effets indésirables non compensés,
- Il est difficile d'obtenir une sortie possédant la valeur souhaitée avec précision et rapidité.

Ces problèmes vont être résolus (ou sensiblement améliorés) par l'introduction d'un «feedback» ⇒ notion de boucle fermée (BF).

1.3.2 Système en boucle fermée

On peut représenter un système en boucle fermée par le schéma de principe suivant

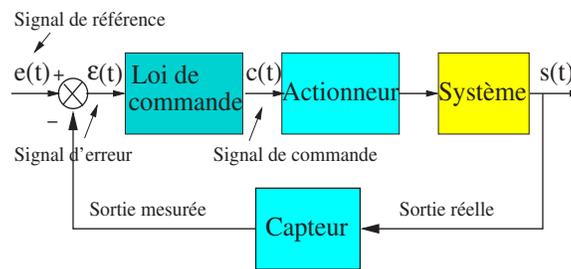


figure 1.6: Système en BF

Si on compare la mesure de la sortie du système à une grandeur de consigne (ou référence), on sera capable d'agir sur la grandeur d'entrée du système (la commande), pour en corriger le fonctionnement.

Dans le cas du système de chauffage de l'exemple 1.4, on obtient le schéma de principe décrit par la figure 1.7 suivante :

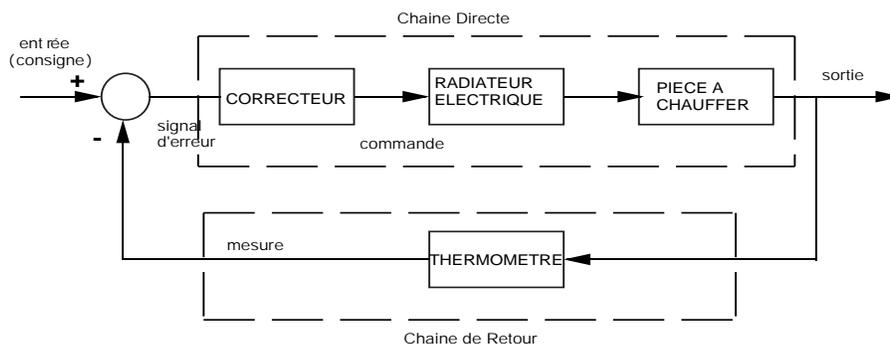


figure 1.7: Système en boucle fermée : chauffage d'une pièce

On notera sur ce schéma la présence d'un organe chargé d'effectuer la comparaison des signaux d'entrée (consigne encore appelée référence) avec la mesure. En réalité (dans la pratique), on ne

compare pas directement la consigne à la mesure mais plutôt des tensions représentant ces deux grandeurs.

Avec la boucle fermée on introduit la notion *d'asservissement*.

Définition 1.4 (système dynamique). *Un système dynamique est un système dont l'étude ne peut être réalisée qu'en prenant en compte les valeurs passées du phénomène. Les grandeurs de sorties dépendent des valeurs présentes et passées des grandeurs d'entrées.* ■

Exemple : chauffage

Reprenons l'exemple du chauffage. Supposons que l'on veuille faire passer la température de la pièce de 20 ° C à 30 ° C. L'inertie thermique en fait un système lent. Il apparaît évident que la température de la pièce à un instant donné dépend de la température à l'instant précédent. Le système du chauffage de la pièce est un système dynamique.

1.4 Notion de Modèle

1.4.1 Modèle Mathématique

Pour pouvoir utiliser les schémas précédents, il faut pouvoir décrire «efficacement» chaque processus physique situé à l'intérieur des blocs rectangulaires. Pour pouvoir analyser le comportement de ces processus, il est intéressant de pouvoir disposer d'un modèle mathématique de ces processus.

La phase de modélisation est essentielle dans le processus de mise au point de régulateurs. Toutefois, le but de ce cours n'est pas d'étudier en détails la modélisation des systèmes dynamiques. On se contentera donc de savoir modéliser rapidement et simplement (modèles élémentaires).

Définition 1.5 (Modèle mathématique). *On définit le modèle mathématique d'un système dynamique comme un ensemble d'équations qui représentent le comportement dynamique du système avec la précision souhaitée. Il est obtenu en écrivant les lois de la physique qui régissent le comportement du système (lois fondamentales de la dynamique, bilan des forces, de matière, etc...).* ■

Obtention du modèle de comportement :

- Définir le système étudié et ses composants élémentaires
- Formuler le modèle mathématique idéal (*modèle de connaissance*) et dresser la liste des hypothèses à retenir
- Ecrire les lois de la physique (équations différentielles)
- Définir le modèle dédié à la régulation (fonction de transfert) → *modèle de comportement*

Remarque 1.2. Il ne sert pas à grand chose de vouloir obtenir par les équations un modèle mathématique très compliqué. En effet, mieux vaut émettre plusieurs hypothèses simplificatrices afin de simplifier l'étude du système et la démarche future de mise au point de régulateur. Toutefois, le modèle mathématique devra être *suffisamment* précis pour refléter le comportement réel du système. On voit donc apparaître un compromis précision/complexité dans l'étape de modélisation. De plus, étant donné le caractère non-linéaire des processus réels, on est naturellement amenés à faire des simplifications telles que la linéarisation autour d'un point de fonctionnement (développement en série de Taylor) ■

1.4.2 Transformée de Laplace - Rappels

1.4.2.1 Introduction et motivation

L'étude des systèmes dynamiques revient à étudier les relations mathématiques qui les gouvernent (en l'occurrence des équations différentielles). La manipulation d'équations différentielles étant complexe, on utilisera la transformée de Laplace (\mathcal{L}). L'intérêt principal de cette transformée réside dans le fait qu'elle permet de remplacer une équation différentielle (resp. un produit de convolution) dans le domaine temporel par une équation polynômiale (resp. une multiplication) dans le domaine symbolique. La recherche de la solution de cette équation différentielle se limite alors, à partir des racines du polynôme, à la recherche dans une table des transformées.

La partie suivante est un rappel sur la transformée de Laplace et quelques unes de ses propriétés les plus utilisées.

Pour l'automaticien, la transformée de Laplace ne sera qu'un outil, qu'il conviendra toutefois de maîtriser ; par conséquent, il ne s'agit pas de vouloir trouver ici une rigueur mathématique absolue.

Définition 1.6 (Transformée de Laplace). *Par définition, la transformée de Laplace unilatérale d'une fonction $f(t)$, nulle $\forall t < 0$, est donnée par la relation (1.1).*

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (1.1)$$

où la variable p est une variable complexe (on pourra aussi trouver la notation anglo-saxonne où la variable p est remplacée par la variable s). ■

Exemple : Calcul de la T.L. d'un échelon unitaire

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

En utilisant l'intégrale de définition (1.1), on peut écrire :

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

1.4.2.2 Principales propriétés

Linéarité :

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p) \quad (1.2)$$

Démonstration : utiliser la définition (1.1)

Transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0) \quad (1.3)$$

Démonstration : intégrer par partie

Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n d'une fonction :

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (1.4)$$

Cette propriété se déduit par itération de la propriété (1.3).

Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \quad (1.5)$$

Démonstration : utiliser la propriété (1.3)

Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad (1.6)$$

La démonstration de cette propriété est du même ordre que celle du théorème de la valeur initiale.

Attention : ceci est valable uniquement pour les signaux stables (\neq sinus). En effet, il faut que le signal de sortie possède un régime permanent constant ou borné

Facteur d'échelle :

$$\mathcal{L} [f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \quad (1.7)$$

Démonstration : utiliser la définition (1.1)

Multiplication par t :

$$\mathcal{L} [tf(t)] = -\frac{dF(p)}{dp} \quad (1.8)$$

Démonstration : utiliser la définition (1.1)

Division par t :

$$\mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] = \int_p^\infty F(p) dp \quad (1.9)$$

Démonstration : utiliser la définition (1.1)

Théorème du retard :

$$\mathcal{L} [f(t - T)] = e^{-pT} F(p) \text{ pour tout } T \geq 0 \quad (1.10)$$

Démonstration : utiliser la définition (1.1)

Multiplication par une fonction exponentielle :

$$\mathcal{L} [e^{-at} f(t)] = F(p + a) \quad (1.11)$$

La simple écriture de l'intégrale de définition permet de se convaincre de cette propriété.

Fonctions périodiques : Soit $g(t)$ une fonction périodique de période T , et $f(t)$ la fonction telle que : $f(t) = \begin{cases} g(t), & \text{si } t \in [0, T[\\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$ alors, on a :

$$\boxed{F(p) = (1 - e^{-pT}) G(p)} \quad (1.12)$$

On peut remarquer que : $f(t) = g(t) - g(t - T)$.
 Par conséquent : $F(p) = G(p) - e^{-pT} G(p) = (1 - e^{-pT}) G(p)$

1.4.2.3 Application à la résolution d'équations différentielles

La résolution d'équations différentielles à coefficients constants est très largement simplifiée par l'usage de la transformée de Laplace, comme le montre l'exemple qui suit.

Exemple : Résolution d'une équ. diff.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2y' + 2 = e^{-t} \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 2$$

Il suffit pour résoudre cette équation d'en calculer la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} [p^2 Y(p) - p - 2] + 2[pY(p) - 1] + \frac{2}{p} &= \frac{1}{p+1} \\ Y(p) [p^2 + 2p] &= p + 4 - \frac{2}{p} + \frac{1}{p+1} \\ Y(p) &= \frac{(p+4)p(p+1) - 2(p+1) + p}{p^2(p+1)(p+2)} \\ &= \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p+2} \\ &= \frac{-1}{p^2} + \frac{3}{p} + \frac{-1}{p+1} + \frac{-1}{p+2} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire, par transformée inverse de Laplace (utiliser les tables) :

$$\boxed{y(t) = -t + 3 - e^{-t} - e^{-2t}}$$

1.4.2.4 Tables de Transformées de Laplace

$f(t) \quad t \geq 0$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$
$\delta(t)$ impulsion unité (Dirac)	1
$1(t)$ échelon unité	$\frac{1}{p}$
$1(t - \tau)$ éch. unité retardé de τ	$\frac{e^{-p\tau}}{p}$
$1(t) - 1(t - \tau)$ impulsion rect. \equiv $_{-}\square_{-}$	$\frac{1 - e^{-p\tau}}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p + a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p + a)^2}$
$t^2 e^{-at}$	$\frac{2}{(p + a)^3}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p + a)^{n+1}}$

$f(t) \quad t \geq 0$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$
$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{ab} \left(1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right)$	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$
$\frac{1}{a^2} (1 - (at+1)e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)^2}$
$\frac{1}{a^2} (at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{p^2(p+a)}$
$\frac{1}{(a-b)^2} [e^{-at} + ((a-b)t - 1)e^{-bt}]$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)^2}$
$\frac{e^{-at}}{(a-b)(a-c)} + \frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$

$f(t) \quad t \geq 0$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \sin(\varphi) + \omega \cos(\varphi)}{p^2 + \omega^2}$
$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega} \sin(\omega t + \theta) \quad \theta = \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$	$\frac{p + \alpha}{p^2 + \omega^2}$
$1 - \cos(\omega t)$	$\frac{\omega^2}{p(p^2 + \omega^2)}$
$\frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin\left(\omega_n t \sqrt{1 - \zeta^2}\right)$	$\frac{1}{p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2}$

1.5 Notion de Fonction de Transfert

Pour un système, la fonction de transfert est l'expression mathématique plus ou moins complexe qui indique le rapport entre une fonction du signal de sortie et une fonction du signal d'entrée.

1.5.1 Définition

Définition 1.7 (Fonction de Transfert). La fonction de transfert d'un système continu est le rapport de la transformée de Laplace de sa sortie sur la transformée de Laplace de son entrée en considérant les *conditions initiales nulles* : $F(p) = \frac{\text{Sortie}(p)}{\text{Entrée}(p)}$ ■

Remarques :

- Le concept de fonction de transfert permet de représenter le comportement *dynamique* du système de manière algébrique (le rapport sortie / entrée est variable dans le temps).
- La fonction de transfert est une caractéristique *indépendante* de l'amplitude et de la nature de l'entrée du système.
- C'est un modèle entrée-sortie qui ne contient aucune information sur la structure interne physique du système

Exemple : Système électrique

Considérons le système (simple) électrique suivant, où l'on définira l'entrée u et la sortie i .

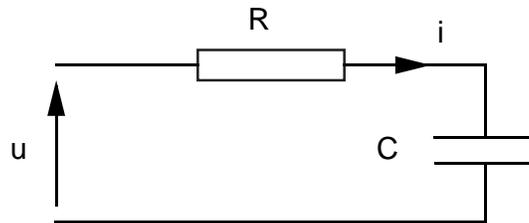


figure 1.8: Circuit RC

On peut écrire la relation entre la tension d'alimentation $u(t)$ de ce circuit et le courant qui y circule $i(t)$:

$$u(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

ou bien encore :

$$u'(t) = Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t)$$

et si l'on calcule la transformée de Laplace de cette équation :

$$\begin{aligned} pU(p) &= RpI(p) + \frac{1}{C}I(p) \\ &= \left(Rp + \frac{1}{C} \right) I(p) \end{aligned}$$

On a considéré les conditions initiales ($u(0)$ et $i(0)$) nulles. En effet, la tension initiale au borne de la résistance et l'intensité initiale du condensateur son nulles.

On obtient ainsi la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{Cp}{1+RCp}$$

Nous allons voir comment obtenir le modèle d'un système mécanique représentatif d'un grand nombre de problème.

Exemple : amortisseur

Considérons le système décrit par la figure 1.9 :

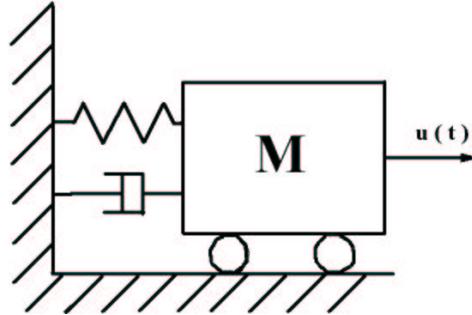


figure 1.9: Système Masse - Ressort

Par application du Principe Fondamental de la Dynamique, l'équation différentielle régissant le comportement de la masse M soumise à une force $u(t)$ est donnée par :

$$My''(t) + fy'(t) + Ky(t) = ut$$

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation et en choisissant la position $y(t)$ de la masse comme sortie, on obtient la fonction de transfert du système comme le rapport de $Y(p)$ sur $U(p)$, soit :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{Mp^2 + fp + K}$$

D'autres exemples seront traités plus en détails lors des séances de TD...

1.5.2 Notions associées

Un certain nombre de notions découlent directement de la définition de la fonction de transfert.

Définition 1.8 (Ordre). *L'ordre du système est le degré le plus élevé du polynôme du dénominateur appelé polynôme caractéristique.* ■

Exemple :

$T(p) = \frac{2p+3}{p^2+5p+10}$ représente la fonction de transfert d'un système du deuxième ordre.

Définition 1.9 (Pôle(s)). *Le(s) pôle(s) sont les racines du dénominateur (le polynôme caractéristique) de la fonction de transfert. Le nombre de pôles correspond à l'ordre du système. Ils peuvent être réels ou complexes puisque les coefficients du dénominateur sont réels.* ■

Un système est suffisamment caractérisé par la nature et le positionnement dans le plan complexe de ses pôles (lieu des pôles).

Exemple :

Le système décrit par la fonction de transfert $T(p) = \frac{2p+3}{p^2+5p+10}$ est un système du deuxième ordre. Il possède alors 2 pôles complexes conjugués $p_1 = -2.5 + j1.94$ et $p_2 = -2.5 - j1.94$.

Définition 1.10 (Régime). *Il existe deux régimes de fonctionnement successifs :*

- *régime transitoire : évolution de la sortie dans le temps suite à une variation de l'entrée. Il est délimité par les réponses initiale et finale. C'est la «raison d'être» de la régulation*
- *La sortie et la commande sont maintenues constantes. On atteint une amplitude constante de la sortie quelque soit le temps. On l'appelle aussi régime stationnaire, d'équilibre ou établi.*

■

Remarque : On associe souvent les notions de dynamique à transitoire et statique à permanent.

1.6 Schémas Blocs et Algèbre de Diagrammes

1.6.1 Introduction

Les schémas qui illustrent la régulation des procédés se présentent sous deux formes majeures :

- **schémas blocs** (ou schémas fonctionnels) : les rôles des blocs sont fonction des différents éléments de la boucle de régulation. Ils sont reliés entre eux par des flèches annotées et représentant les signaux qui y circulent. Ces blocs sont indépendants de la nature du signal à réguler.
- **schémas opérationnels** (schémas de principe, schémas réels) : on représente la circulation des fluides ou des signaux électriques à travers l'ensemble des équipements ainsi que dans le système de régulation. Les symboles sont standards.

Etant donné la diversité des signaux et des systèmes à étudier, nous choisirons d'utiliser les schémas dans la suite de ce cours.

1.6.2 Construction

Étudions en premier lieu l'organe responsable de la comparaison entre l'entrée de consigne et la mesure. Cet organe est appelé comparateur :

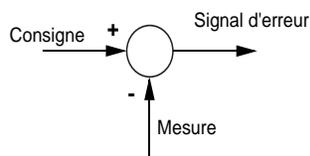


figure 1.10: Un comparateur : Signal d'erreur = Consigne - Mesure

Ce comparateur peut comporter plus de deux entrées, comme indiqué sur la figure 1.11.

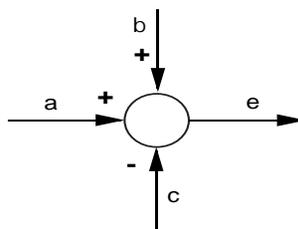


figure 1.11: comparateur à plusieurs entrées : $e = a + b - c$

Dans le cas général les schémas blocs peuvent être très ramifiés et comporter plusieurs boucles imbriquées. Toutefois, on pourra, en règle quasi-générale, utiliser le schéma-blocs «standard» sous la forme de la figure 1.12.

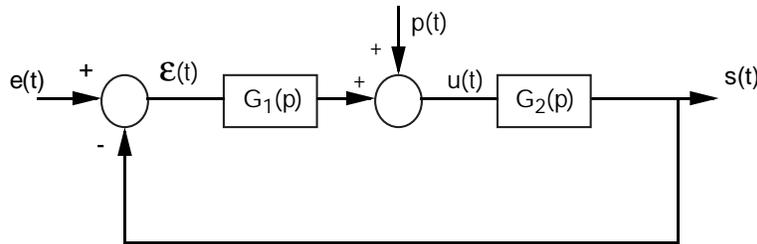


figure 1.12: Schéma-blocs d'un système en boucle fermée

Avec

- $e(t)$: signal d'entrée, consigne, référence ;
- $u(t)$: commande ;
- $s(t)$: signal de sortie ;
- $p(t)$: perturbation de commande (car $p(t)$ agit (s'ajoute) sur la commande du système $G_2(p)$) ;
- $\varepsilon(t)$: signal d'erreur (sortie du comparateur) ;
- $G_1(p)$: fonction de transfert du correcteur (on dit aussi régulateur, voire contrôleur) ;
- $G_2(p)$: fonction de transfert du système à commander (à réguler et asservir). $G_2(p)$ contient les fonctions de transfert de l'actionneur et du capteur.

Pour obtenir le schéma bloc d'un système, la démarche de construction est la suivante :

- écrire les équations de la physique associées à chaque élément constituant le système
- appliquer la transformée de laplace
- calculer la fonction de transfert associée à chaque élément en supposant les conditions initiales nulles
- identifier les relations inter-signaux et signaux-blocs
- tracer le schéma fonctionnel
- simplifier le schéma et le mettre (le plus souvent possible) sous la forme de la figure 1.12

1.6.3 Simplification - Réduction

Quand on établit le schéma-blocs d'une installation, on obtient souvent une structure complexe. On peut, grâce aux quelques règles qui suivent, simplifier ces diagrammes.

règle 1 → série : Soit le schéma 1.13 suivant :

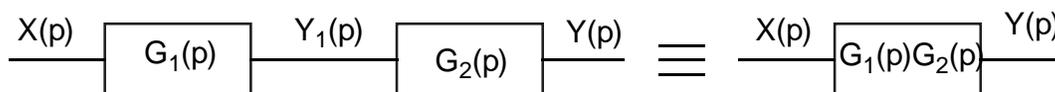


figure 1.13: Schéma-blocs en série

$$\text{On peut écrire : } \begin{cases} Y(p) = Y_1(p)G_2(p) \\ Y_1(p) = X(p)G_1(p) \end{cases} \text{ donc : } \boxed{\frac{Y(p)}{X(p)} = G_1(p)G_2(p)}$$

règle 2 → parallèle : Soit le schéma 1.14 suivant :

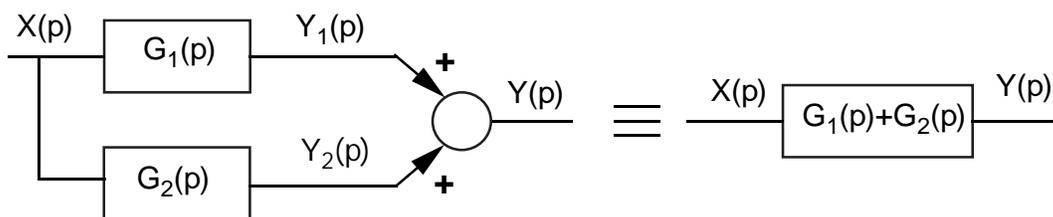


figure 1.14: Schéma-blocs en parallèle

On peut écrire :
$$\begin{cases} Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p) \\ Y_1(p) = X(p)G_1(p) \\ Y_2(p) = X(p)G_2(p) \end{cases} \quad \text{donc : } \boxed{\frac{Y(p)}{X(p)} = G_1(p) + G_2(p)}$$

règle 3 → boucle fermée : Soit le schéma 1.15 suivant :

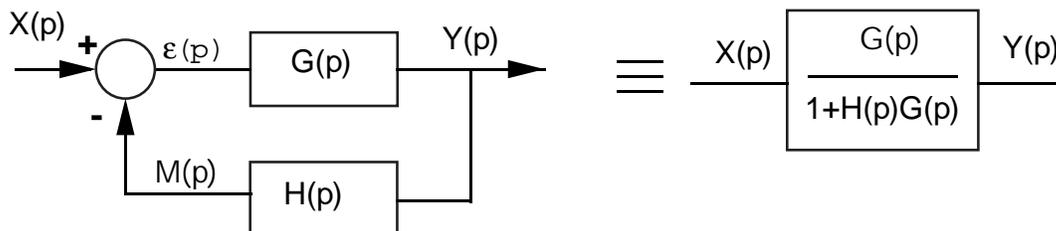


figure 1.15: Boucle fermée

On peut écrire :
$$\begin{cases} Y(p) = \varepsilon(p)G(p) \\ \varepsilon(p) = X(p) - M(p) \\ M(p) = H(p)Y(p) \end{cases} \quad \text{donc : } Y(p) = (X(p) - H(p)Y(p))G(p)$$

$$\boxed{\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{G(p)}{1 + H(p)G(p)}}$$

On montre de la même manière les équivalences entre les schéma-blocs suivants :

règle 4 → lien arrière : Soit le schéma 1.16 suivant :

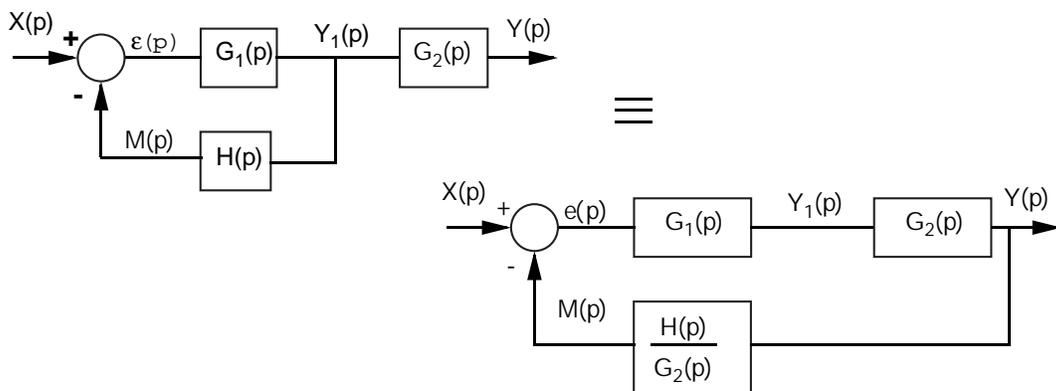


figure 1.16: Déplacement d'un lien arrière

règle 5 → lien avant : Soit le schéma 1.17 suivant :

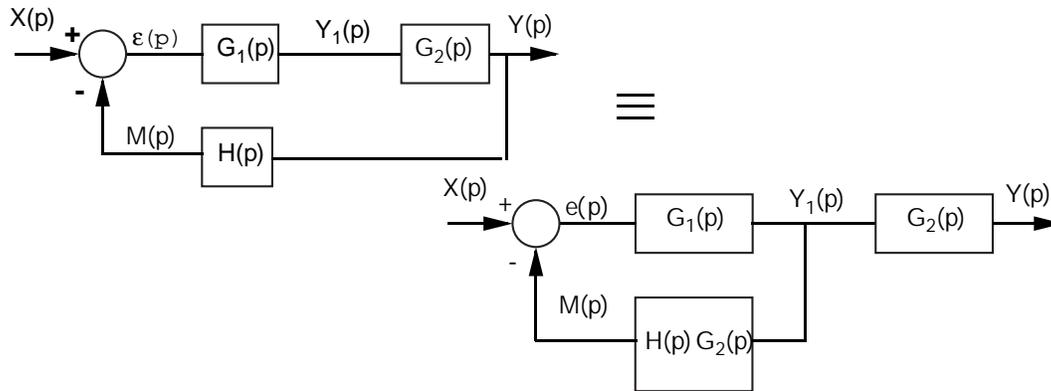


figure 1.17: Déplacement d'un lien avant

En pratique, on simplifiera toujours en premier lieu les boucles les plus internes (les plus imbriquées).

Pour simplifier un schéma-blocs, il sera possible d'utiliser les techniques graphiques exposées ci-avant, ou des techniques calculatoires. C'est l'objet de l'exemple qui suit.

1.6.4 Exemple : simplification de schéma-bloc

Par souci de clarté pour les schémas blocs on omettra volontairement la variable de laplace(p) dans les fonction de transfert. Simplifier alors le schéma bloc du système suivant :

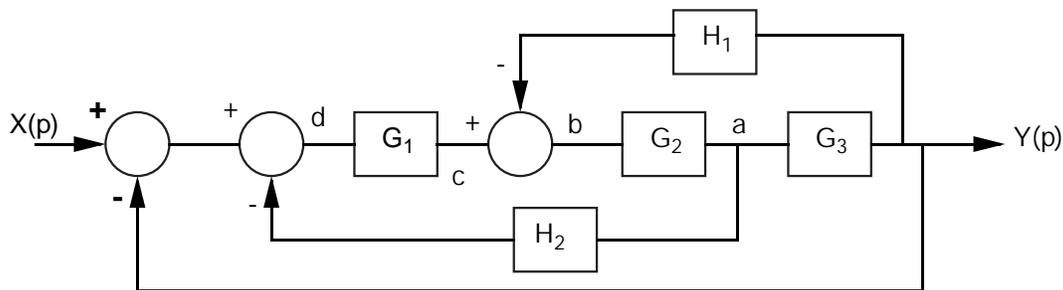


figure 1.18: Schéma-blocs à simplifier

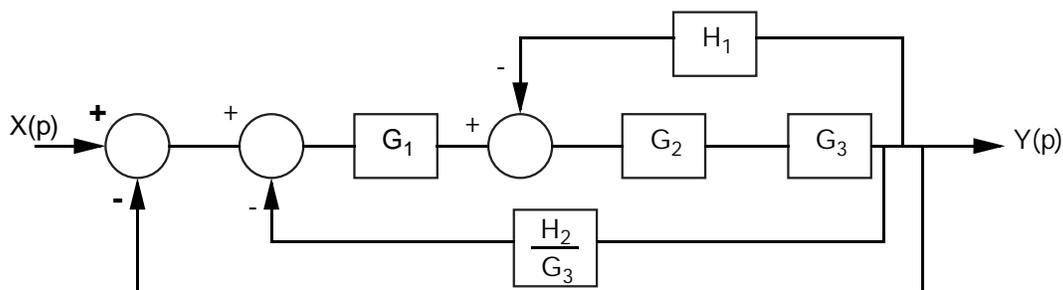


figure 1.19: Première étape de simplification

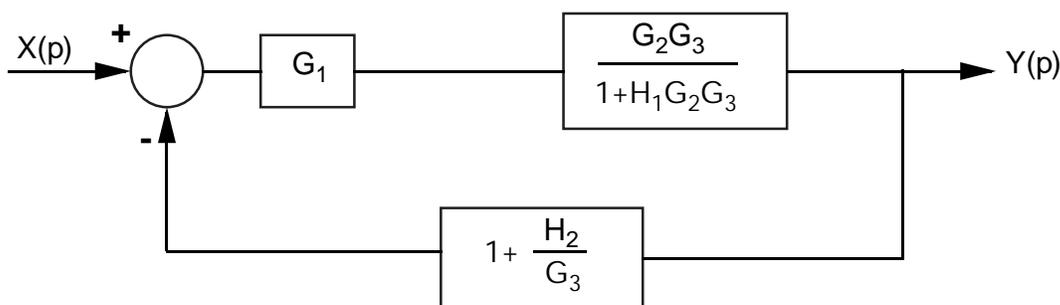


figure 1.20: Deuxième étape de simplification

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + H_1(p)G_2(p)G_3(p) + H_2(p)G_1(p)G_2(p) + G_1(p)G_2(p)G_3(p)}$$

On peut retrouver ce résultat par le calcul :

$$\begin{cases} Y = aG_3 \\ a = bG_2 \\ b = c - H_1Y \\ c = dG_1 \\ d = X - Y - H_2a \end{cases} \quad \text{donc : } Y = [(X - Y - H_2a) - H_1Y] G_2G_3$$

Ce qui conduit au résultat souhaité.

Remarque 1.3. Maintenant que nous possédons et maîtrisons la représentation graphique (schéma bloc) des systèmes, nous allons pouvoir commencer l'étude de différents types de systèmes en leur appliquant des entrées canoniques (impulsion, échelon, rampe) et en étudiant les réponses (temporelles) à ces entrées qui permettront de caractériser ces systèmes. C'est le but du prochain chapitre

...

Chapitre 2

Systemes du Premier Ordre

Sommaire

2.1	Objectifs	20
2.2	Systemes du premier ordre	20
2.3	Reponses temporelles	21
2.4	Cas particulier des systemes du premier ordre generalise	26
2.5	Cas particulier des systemes integrateurs	26
2.6	Cas particulier des systemes avec retard	27

2.1 Objectifs

L'idée de ce chapitre est de poursuivre l'étude des systemes dynamiques. Conformement à ce qui a été énoncé auparavant, nous allons soumettre un systeme élémentaire à des signaux élémentaires appelés **entrées canoniques**. Les systemes les plus élémentaires (les plus simples) sont des systemes du premier ordre dont l'étude temporelle va être détaillée ci après.

Définition 2.1. *L'analyse temporelle consiste à étudier la réponse d'un systeme représenté par sa fonction de transfert à un signal d'entrée variant dans le temps* ■

Le signal d'entrée peut en principe être quelconque. Toutefois, pour obtenir une expression analytique, nous utiliserons des signaux élémentaires (impulsion, échelon, rampe). Ceci se justifie par le fait que l'on peut décomposer tout signal en une somme de signaux élémentaires.

2.2 Systemes du premier ordre

Par définition, ces systemes obéissent à une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$x(t) = a \frac{dy(t)}{dt} + by(t) \tag{2.1}$$

où $x(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement l'entrée et la sortie du systeme.

Outre l'intérêt purement pédagogique de cette partie (elle permet de travailler sur la représentation la plus simple possible, sous quelques hypothèses simplificatrices), il faut noter qu'un grand nombre de systemes physiques peuvent être représentés par des modèles du premier ordre.

La transformée de Laplace de l'équation 2.1, où les conditions initiales sont considérées nulles, permet d'obtenir facilement la forme générale de la fonction de transfert des systèmes du premier ordre :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{ap + b} = \frac{1/b}{1 + \frac{a}{b}p} \quad (2.2)$$

En utilisant les changements de variables $K = 1/b$ et $\tau = a/b$ on obtient la forme (appelée forme standard) d'une fonction de transfert d'un système du premier ordre :

$$\boxed{F(p) = \frac{K}{1 + \tau p}} \quad (2.3)$$

$F(s)$ possède 2 paramètres essentiels : K et τ .

- Le **gain statique** du système K s'exprime dans la même unité que le rapport $\frac{\Delta y(t)}{\Delta x(t)}$. Pour un système stable (la sortie est constante en régime permanent), le gain statique représente la valeur prise par sa réponse à une entrée en échelon unitaire quand $t \rightarrow \infty$.
- La **constante de temps** τ du système s'exprime en secondes et caractérise la vitesse (dynamique) de réaction d'un système.

Ces deux grandeurs suffisent à caractériser tout système du premier ordre : ce sont ses **grandeurs (paramètres) caractéristiques**.

2.3 Réponses temporelles

Il est intéressant de connaître et de reconnaître les réponses des systèmes du premier ordre aux signaux temporels classiques : impulsion, échelon, rampe. Cela permettra en particulier une comparaison avec les signaux réponses du système physique sur lequel on travaille.

2.3.1 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système est la sortie de ce système suite à une sollicitation en impulsion de Dirac :

$$x(t) = \begin{cases} \infty & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t \neq 0 \end{cases} \implies X(p) = 1 \quad (2.4)$$

Les équations 2.2 et 2.4 permettent d'écrire l'expression de la réponse impulsionnelle :

$$Y(p) = \frac{K}{1 + \tau p} X(p) = \frac{K}{\tau} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad (2.5)$$

La tangente à l'origine de cette réponse a pour coefficient directeur : $y'(0) = -\frac{K}{\tau^2}$ (la pente de la tangente est égale à la dérivée en ce point).

On peut montrer facilement que l'intersection de cette tangente à l'origine avec l'axe des temps se fait à $t = \tau$ comme indiqué sur la figure 2.1.

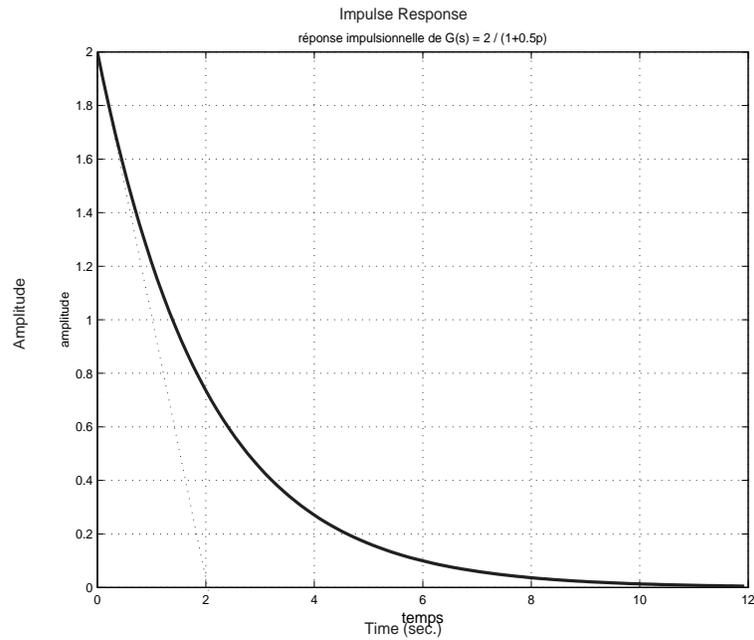


figure 2.1: Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre

La figure suivante (figure 2.2) permet de se rendre compte de l'influence de τ sur la réponse impulsionnelle :

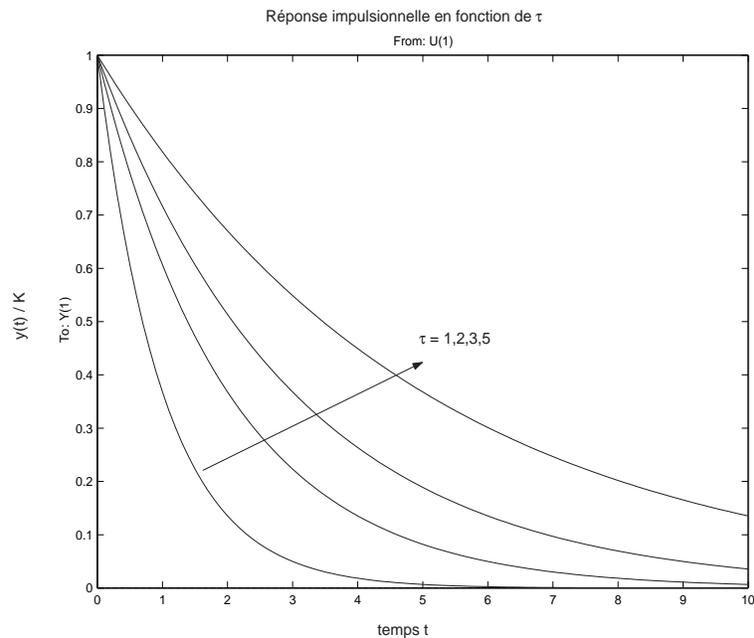


figure 2.2: Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre en fonction de τ

On remarque donc que τ influence la rapidité du système (le temps que le système met pour revenir à l'état initial après une impulsion) mais ne modifie pas l'allure générale de la courbe. La variation de K ne fait que déplacer le point de départ de cette courbe de réponse. Par souci de clarté, cette courbe est normalisée par rapport à K .

2.3.2 Réponse indicielle

La réponse indicielle d'un système est sa réponse à une entrée en échelon (entrée constante de valeur A). L'entrée du système est donc définie par l'équation 2.6.

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \implies X(p) = \frac{A}{p} \quad (2.6)$$

Les équations 2.3 et 2.6 permettent d'écrire l'expression de la réponse indicielle :

$$Y(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \times \frac{A}{p} = AK \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{y(t) = AK \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)} \quad (2.7)$$

Remarque 2.1. D'après le théorème de la valeur finale, on a : $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = AK$. La réponse atteint donc un régime final stable. Le coefficient directeur de la tangente à l'origine est donné par : $y'(0) = \frac{AK}{\tau}$. ■

Définition 2.2 (temps de réponse). On appelle **temps de réponse** d'un système, le temps que met la réponse indicielle du système pour ne plus sortir d'un intervalle de $\pm 5\%$ autour de sa réponse finale (les anglo-saxons utilisent couramment une référence à $\pm 2\%$). On considère alors que le régime permanent est obtenu au bout d'un temps égal au temps de réponse du système (la sortie est alors «quasi-équivalente» au gain statique $K \times$ amplitude de l'entrée). L'évolution de la sortie jusqu'au temps de réponse correspond alors au régime transitoire. Cette définition est valable quelque soit l'ordre du système considéré. ■

Pour déterminer le temps de réponse d'un système du premier ordre, il suffit de trouver t_r (pour temps de réponse) tel que : $y(t_r) = 0.95AK$. C'est à dire :

$$y(t_r) = AK \left(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}} \right) = 0.95AK \implies e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0.05$$

et donc : $\boxed{t_r = -\tau \ln 0.05 \simeq 3\tau}$.

Définition 2.3 (erreur statique). Si le système est stable, on appelle **erreur statique** (aussi erreur de position), la différence que l'on relève sur une réponse indicielle, entre l'entrée et la sortie d'un système lorsque $t \rightarrow \infty$. ■

Pour un système du premier ordre, on peut calculer l'erreur statique comme suit :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - y(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} p [X(p) - Y(p)] \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p [X(p) - Y(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} A [1 - G(p)] \\ &= A(1 - K) \end{aligned}$$

L'erreur statique n'est donc nulle que pour les systèmes du premier ordre dont le gain statique K est unitaire. On l'exprime en pourcentage (en divisant par A). Elle est alors **indépendante** de l'amplitude A de l'entrée!!!

Remarque 2.2. – La tangente à l'origine coupe l'axe horizontal $y = AK$ pour $t = \tau$.
– La réponse indicielle est la dérivée de la réponse impulsionnelle.

- L'amplitude de la réponse indicielle pour $t = \tau$ est :
 $y(\tau) = AK(1 - e^{-1}) \simeq 0.632AK$.



Pour un système du premier ordre, la constante de temps est donc le temps au bout duquel la réponse indicielle atteint 63,2% de son régime final.

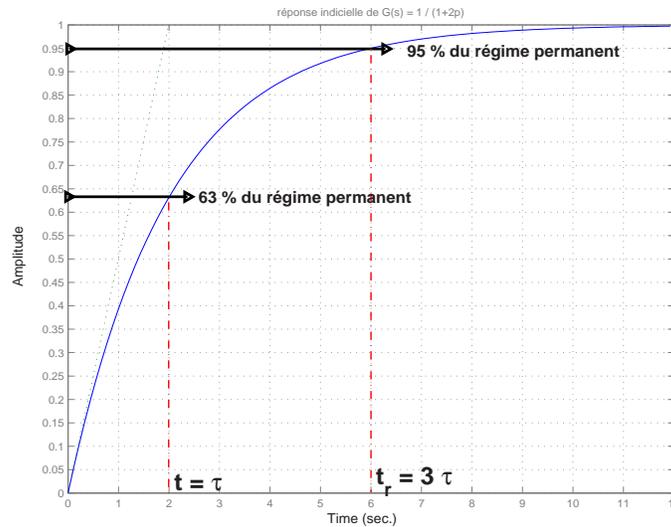


figure 2.3: Réponse indicielle d'un système du premier ordre

De la même façon que pour la réponse impulsionnelle, on peut se rendre compte de l'influence de τ et de K sur la réponse indicielle en consultant les figures 2.4 et 2.5 :

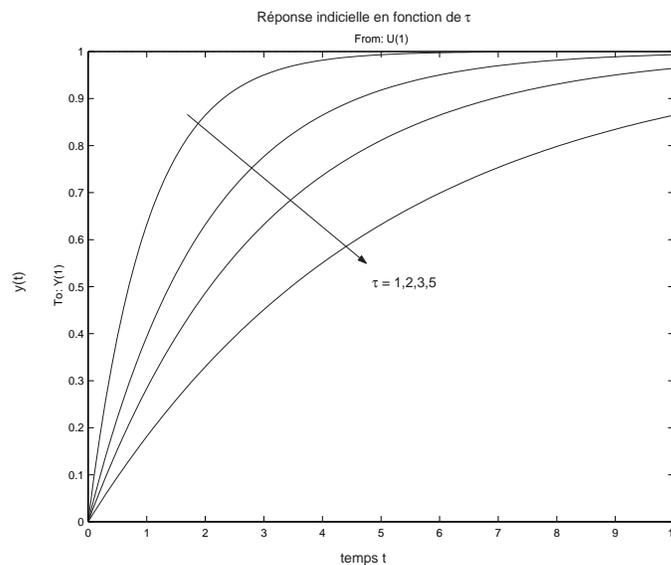


figure 2.4: Réponse indicielle d'un système du premier ordre en fonction de τ

On remarque donc que τ influence la rapidité du système (le temps que met le système pour parvenir à rejoindre l'entrée) mais ne modifie pas l'allure générale de la courbe.

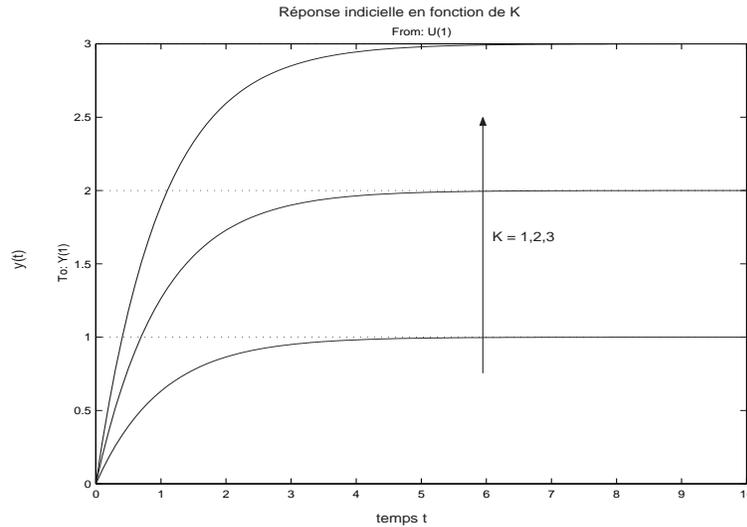


figure 2.5: Réponse indicielle d'un système du premier ordre en fonction de K

La variation de K ne fait que traduire verticalement la courbe mais ne modifie pas la rapidité du système (temps de réponses identiques).

2.3.3 Réponse à une rampe

Un signal d'entrée en rampe est défini par :

$$x(t) = \begin{cases} At & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \implies X(s) = \frac{A}{p^2} \quad (2.8)$$

Les équations 2.3 et 2.8 permettent d'écrire l'expression de la réponse d'un système du premier ordre à une rampe :

$$Y(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \times \frac{A}{p^2} = AK \left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau}{p + \frac{1}{\tau}} \right)$$

$$\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{y(t) = AK \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right)} \quad (2.9)$$

Définition 2.4 (erreur de traînage). On appelle *erreur de traînage* (aussi *erreur de vitesse*), la différence que l'on relève entre l'entrée et la sortie d'un système, lorsque $t \rightarrow \infty$, pour une entrée en rampe. Cette définition est valable quelque soit l'ordre du système considéré. ■

Dans le cas d'un système du premier ordre, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - y(t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[At(1 - K) + \tau - \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [At(1 - K) + \tau] \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{cases} \text{si } K = 1 & \text{l'erreur de traînage est égale à } \tau \\ \text{si } K \neq 1 & \text{l'erreur de traînage est infinie} \end{cases}$$

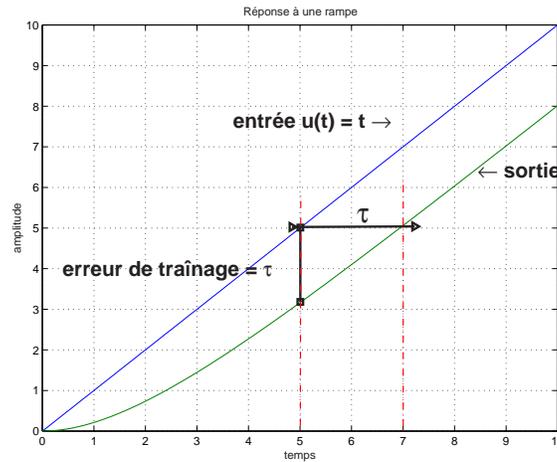


figure 2.6: Réponse d'un système du premier ordre à une rampe quand $K=1$

2.4 Cas particulier des systèmes du premier ordre généralisé

Son équation différentielle vaut :

$$k_0x(t) + k_1 \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} + by(t)$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k_0 + k_1 p}{1 + \tau p}$$

On note la présence d'un zéro (solution du numérateur). Il y a alors modification de la réponse indicielle. En effet, si on cherche la réponse (avec C.I. nulles), on s'aperçoit que la réponse indicielle débute à k_1/τ .

2.5 Cas particulier des systèmes intégrateurs

Ce type de système est très fréquent en pratiques : asservissement de position d'un moteur, modèle d'une cuve, etc...

Son équation différentielle vaut :

$$Kx(t) = \tau \frac{dy(t)}{dt}$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{\tau} \times \frac{1}{p}$$

On note la présence d'un pôle à l'origine.

2.5.1 Réponse impulsionnelle

$$Y(p) = \frac{K}{\tau p} X(p) = \frac{K}{\tau p} \times 1 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{K}{\tau} = \text{constante, pas de retour à zéro} \quad (2.10)$$

2.5.2 Réponse indicielle

$$Y(p) = \frac{K}{\tau p} X(p) = \frac{K}{\tau p} \times \frac{1}{p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{K}{\tau} t \quad (2.11)$$

Dans ce cas la réponse indicielle **diverge** (elle croît indéfiniment). La notion de gain statique n'a pas de sens ici car nous n'avons pas de régime permanent.

2.6 Cas particulier des systèmes avec retard

Les retards peuvent être de différentes natures :

- retard physique : il est dû aux éléments physiques qui composent le processus : il provient par exemple du chemin à parcourir pour le transport de l'information, du parcours des fluides entre le point d'introduction et le capteur.
- le retard de mesure provient du temps que met le capteur pour délivrer la mesure. Dans le cas des débits, pressions, etc...la mesure se déplace à la vitesse proche du son et le retard est quasiment négligeable. Dans le cas des températures, pH, COD, la mesure se déplace à la vitesse des fluides conducteurs et le retard est plus important...

La forme de la fonction de transfert est un premier ordre faisant apparaître un terme exponentiel au dénominateur :

$$F(p) = \frac{K e^{-Tp}}{1 + \tau p} \quad (2.12)$$

En effet, en se basant sur le théorème du retard (voir relation 1.10), on en déduit la fonction temporelle $f(t - T)$ qui est bien la fonction retardée d'une valeur T .

Exemple 2.1. *A titre d'exemple, on peut constater l'effet d'un retard de 2.5 s sur la réponse indicielle d'un système de fonction de transfert $F(p) = \frac{e^{-2.5p}}{1+2p}$ (ce qui pourrait illustrer le fait qu'on allume le radiateur, la pièce ne chauffe pas immédiatement ...)*

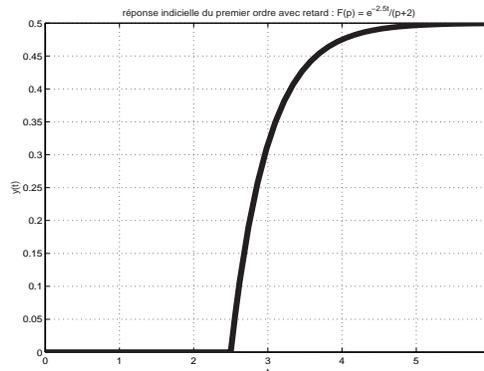


figure 2.7: Réponse indicielle d'un système du premier ordre retardé

■

Chapitre 3

Systemes du Deuxieme Ordre

Sommaire

3.1 Généralités	28
3.2 Etude des pôles d'un système du deuxième ordre	29
3.3 Réponses temporelles	29
3.4 Systèmes d'ordre supérieur	37

3.1 Généralités

Ce chapitre permet d'étudier le comportement des systèmes linéaires invariants du deuxième ordre. Par définition, ces systèmes obéissent à une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants :

$$x(t) = a \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + cy(t) \quad (3.1)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement l'entrée et la sortie du système.

La transformée de Laplace de l'équation 3.1, où les conditions initiales sont considérées nulles, permet d'obtenir facilement la forme générale de la fonction de transfert des systèmes du premier ordre :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{ap^2 + bp + c} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2} \quad (3.2)$$

- K est appelé **gain statique** du système.
- ω_0 est la **pulsation propre non amortie** du système (elle s'exprime en radians par seconde).
- ζ est le **facteur d'amortissement** du système.

Ces trois grandeurs suffisent à caractériser tout système du deuxième ordre : ce sont ses **grandeurs caractéristiques**.

3.2 Etude des pôles d'un système du deuxième ordre

Les pôles d'une fonction de transfert $G(p)$ sont les valeurs de « p » qui annulent le dénominateur de $G(p)$. Ce sont donc les racines de l'équation caractéristique qui suit :

$$p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \quad (3.3)$$

Le discriminant réduit associé à cette équation est : $\Delta = (\zeta^2 - 1)\omega_0^2$. Selon que ζ sera supérieur ou inférieur à 1, l'équation 3.3 admettra des solutions réelles ou complexes conjuguées.

valeur de ζ	$\zeta > 1$	$\zeta = 1$	$\zeta < 1$
pôles p_{1-2}	$-\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} = \frac{-1}{\tau_{1-2}}$	$-\omega_0 = \frac{-1}{\tau_0}$	$-\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$
transfert :	$F(p) = \frac{K}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)}$	$F(p) = \frac{K}{(1+p\tau_0)^2}$	$F(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$

On voit donc que les pôles sont de natures différentes selon la valeur de ζ . Les réponses temporelles vont donc s'étudier en fonction de la valeur de ζ .

3.3 Réponses temporelles

Il est intéressant de connaître et de reconnaître les réponses des systèmes du deuxième ordre aux signaux temporels classiques : impulsion, échelon, rampe. Cela permettra en particulier une comparaison avec les signaux réponses du système physique sur lequel on travaille.

3.3.1 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système est la sortie de ce système suite à une sollicitation en impulsion de Dirac :

$$x(t) = \begin{cases} \infty & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t \neq 0 \end{cases} \implies X(p) = 1 \quad (3.4)$$

3.3.1.1 $\zeta > 1$

Dans ce cas on peut écrire la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle comme suit :

$$\begin{aligned} Y(p) &= F(p)X(p) = F(p) \\ &= \frac{K}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)} \\ &= \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \left[\frac{\tau_1}{1 + \tau_1 p} - \frac{\tau_2}{1 + \tau_2 p} \right] \end{aligned}$$

ou bien encore, dans le domaine temporel :

$$y(t) = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \left[e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] \quad (3.5)$$

Etudions cette courbe de réponse impulsionnelle :

- $\tau_1 > \tau_2$ donc $y(t) \geq 0 \forall t$.

- $y(0) = 0$

- $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$

- $y'(t) = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \left[-\frac{1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{1}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$

donc la courbe possède un maximum :

$$t_{max} = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \ln \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right) \text{ et } y(t_{max}) = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \left[\left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}} - \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^{\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}} \right]$$

On peut voir l'allure de cette réponse impulsionnelle sur la figure 3.1.

3.3.1.2 $\zeta = 1$

Dans ce cas la transformée de Laplace de la sortie d'un système du deuxième ordre soumis à une entrée en impulsion est donnée par l'équation suivante :

$$Y(p) = \frac{K}{(1 + p\tau_1)^2} = \frac{K\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2}$$

donc :

$$y(t) = K\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}$$

Cette courbe a la même allure que dans le cas où $\zeta > 1$, comme le montre la figure 3.1. Le maximum est alors atteint pour : $t_{max} = \frac{1}{\omega_0}$ et son amplitude est : $y(t_{max}) = \frac{K\omega_0}{e}$.

3.3.1.3 $\zeta < 1$

Dans ce cas la transformée de Laplace de la sortie d'un système du deuxième ordre soumis à une entrée en impulsion est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2} \\ &= \frac{K\omega_0^2}{(p + \zeta\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \zeta^2)} \\ &= \frac{K\omega_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \times \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}}{(p + \zeta\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \zeta^2)} \end{aligned}$$

donc :

$$y(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t)$$

(3.6)

On peut remarquer que le signal 3.6 est oscillant (à cause de $\sin(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t)$) et amorti (à cause de $e^{-\zeta\omega_0 t}$). On note $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ la **pulsation propre amortie** du système. La période de ces

pseudo oscillations est $T_P = \frac{2\pi}{\omega_P}$.

Une étude de la fonction 3.6 montre qu'elle possède des extremas aux points d'abscisses $t = \left[\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) + k\pi \right] \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$.

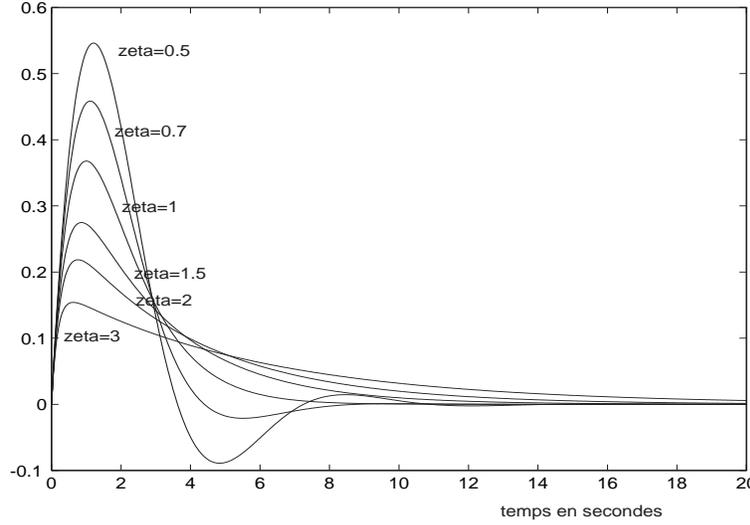


figure 3.1: Réponse impulsionnelle en fonction de ζ pour ω_0 fixé

La variation de ζ provoque des maxima sur les réponses impulsionnelles de plus en plus élevés.

3.3.2 Réponse indicielle

Il s'agit d'étudier la réponse du système à une entrée en échelon d'amplitude A . On peut donc écrire la transformée de Laplace de la sortie :

$$Y(p) = \frac{AK\omega_0^2}{p(p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2)}$$

Remarque 3.1. - $y(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} pY(p) = 0$

- $y(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = AK$

- Pente de la tangente en 0 de $y(t)$ nulle puisque : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dt} = \lim_{p \rightarrow \infty} p[pY(p) - y(0^+)] = 0$

■

3.3.2.1 $\zeta > 1$

Dans ce cas, on obtient par transformation de Laplace inverse de $Y(p)$:

$$y(t) = AK \left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right] \quad (3.7)$$

Une étude plus poussée de la fonction montre l'existence d'un point d'inflexion lorsque le temps a pour valeur :

$$t_i = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \ln \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right)$$

On peut remarquer que la réponse impulsionnelle du système correspond à la dérivée de sa réponse indicielle.

3.3.2.2 $\zeta = 1$

$$Y(p) = \frac{AK\omega_0^2}{p(p + \omega_0)^2}$$

Le signal temporel de sortie est donnée par :

$$y(t) = AK \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T}\right) e^{-\frac{t}{T}} \right] \quad \text{avec} \quad T = 1/\omega_0$$

C'est le cas de l'amortissement critique et l'allure de la réponse est sensiblement analogue au cas précédent. Le point d'inflexion se situe au point d'abscisse $t_i = T$.

3.3.2.3 $\zeta < 1$

$$Y(p) = \frac{AK\omega_0^2}{p(p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2)}$$

On trouve :

$$y(t) = AK \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_p t + \theta) \right]$$

avec $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ et $\theta = \arcsin(\sqrt{1 - \zeta^2})$

De nouveau, nous obtenons des oscillations amorties de pulsation ω_p . Il est alors possible de déterminer l'amplitude des dépassements successifs. Le maximum de la fonction est obtenu lorsque la dérivée de $y(t)$ par rapport au temps est nulle. Soit :

$$\frac{dy}{dt} = AK \left[\frac{\zeta\omega_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_p t + \theta) - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \omega_p \cos(\omega_p t + \theta) \right]$$

Cette dérivée s'annule pour :

$$\zeta \sin(\omega_p t + \theta) = \sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\omega_p t + \theta)$$

$$\tan(\omega_p t + \theta) = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

$$\omega_p t + \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right) + k\pi$$

$$t_{max} = \left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right) + k\pi - \theta \right) \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$t_{max} = \left(\arctan \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) + k\pi - \arcsin(\sqrt{1-\zeta^2}) \right) \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$t_{max} = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$$

L'amplitude du premier dépassement est donc :

$$y_{max} = y(t_{max}) = AK \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \sin(\pi + \theta) \right]$$

$$= AK \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \sin(\theta) \right] \text{ avec } \theta = \arcsin(\sqrt{1-\zeta^2})$$

$$= AK \left[1 + (-1)^{k+1} e^{-\frac{k\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \right]$$

Par conséquent le premier dépassement est donné par :

$$D_1 = y_{max} - y(\infty) = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

soit en pourcentage : Par conséquent le premier dépassement est donné par :

$$D_1\% = 100 \times e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Remarque 3.2. – Par extension on détermine les k dépassements successifs de la manière suivante :

$$D_k = (D_1)^k$$

– La durée entre 2 dépassements successifs est constante. Elle est appelée pseudo-période et est notée T_P . ■

Différentes réponses indicielles, en fonction du facteur d'amortissement sont données par la figure 3.2.

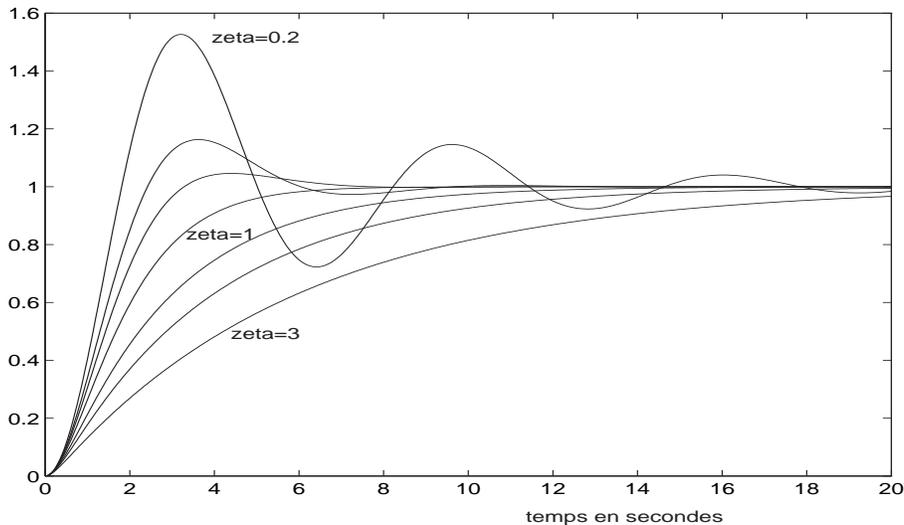


figure 3.2: Réponse indicielle en fonction de ζ

3.3.2.4 Allures des réponses indicielles

ζ	caractéristiques	allure
$\zeta > 1$	apériodique, $D=0\%$, lent si ζ grand, $t_r = \frac{6\zeta}{\omega_0}$	
$\zeta = 1$	critique, $D=0\%$, $t_r = 0.75T_0$	
$\zeta < 1$	pseudo-périodique, $\zeta = 0.7 \Rightarrow D = 4\%$, $t_r = 0.45T_0$ (minimal)	

3.3.2.5 Spécifications sur le régime transitoire

Très souvent, les caractéristiques de performances sont spécifiées en terme de réponse transitoire à une entrée en échelon facile à générer. En général, la réponse (indicielle pour notre étude) transitoire laisse apparaître des oscillations amorties avant d'atteindre un régime permanent (voir figure 3.3).

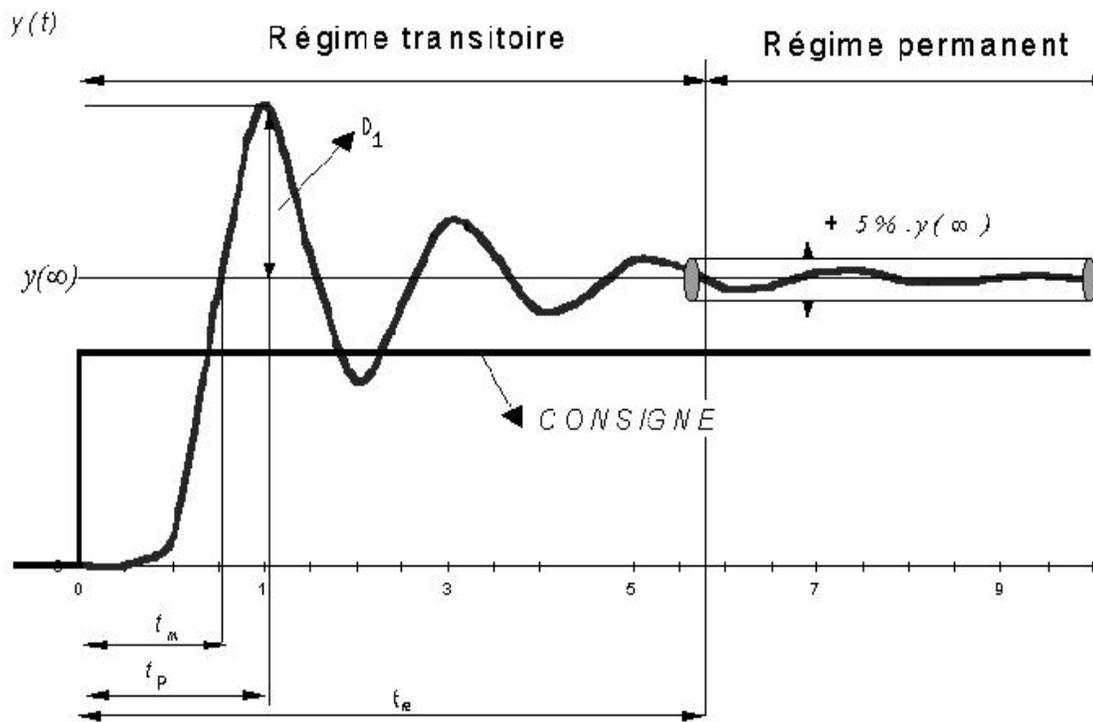


figure 3.3: Caractéristiques Transitoires

Il est alors possible (et intéressant) de spécifier sur la réponse indicielle les caractéristiques suivantes :

- la **pseudo-période** : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$
- le **temps de montée** en sec. (« rise time ») : $t_m = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$
- le **temps de pic** en sec. (« peak time ») : $t_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$
- le **temps de réponse** (« settling time ») : $t_r \approx \frac{3}{\zeta\omega_0}$
- le **dépassement maximal** en % (« overshoot ») : $D_1\% = 100 * \frac{y(max) - y(\infty)}{y(\infty)}$

3.3.2.6 Influence de ω_0

Considérons ζ fixé, on peut remarquer l'influence de la variation de ω_0 sur la réponse indicielle (voir figure 3.4).

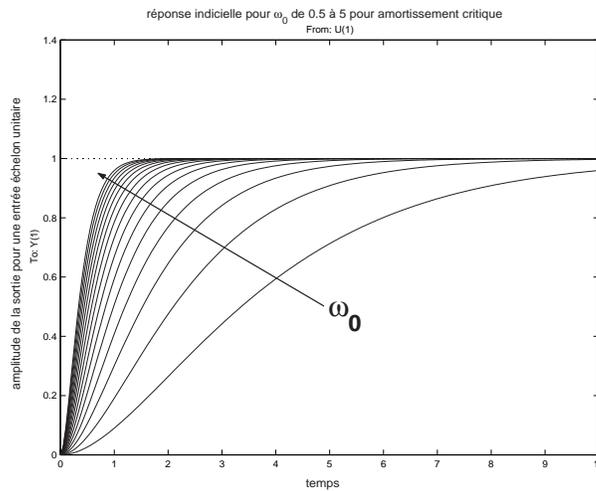


figure 3.4: Réponse indicielle en fonction de ω_0 pour $\zeta = 1$

On remarquera que l'augmentation de ω_0 provoque une rapidité de la réponse indicielle de plus en plus élevée.

On observe le même phénomène pour les systèmes aperiodiques sur la figure 3.5 :

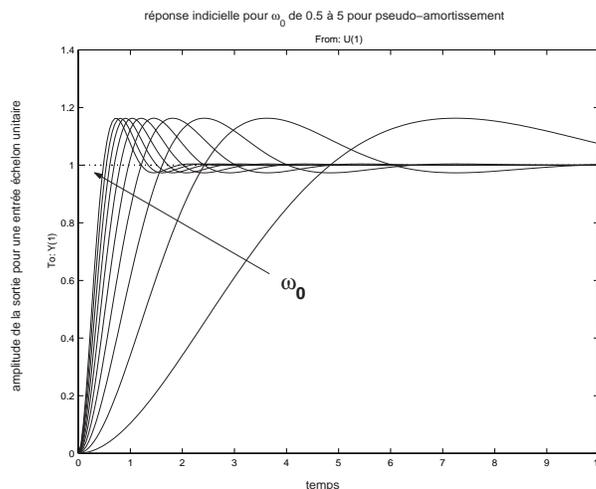


figure 3.5: Réponse indicielle en fonction de ω_0 pour $\zeta < 1$

3.3.2.7 Temps de réponse

Le temps de réponse à $\pm 5\%$ n'est pas facile à exprimer dans le cas des systèmes du deuxième ordre. On utilise en général l'approximation (régression linéaire) suivante déduite de la courbe 3.6 :

$$t_r \simeq \frac{3}{\zeta\omega_0} \text{ pour } \zeta < 0.7 \qquad t_r \simeq \frac{6\zeta}{\omega_0} \text{ pour } \zeta > 1$$

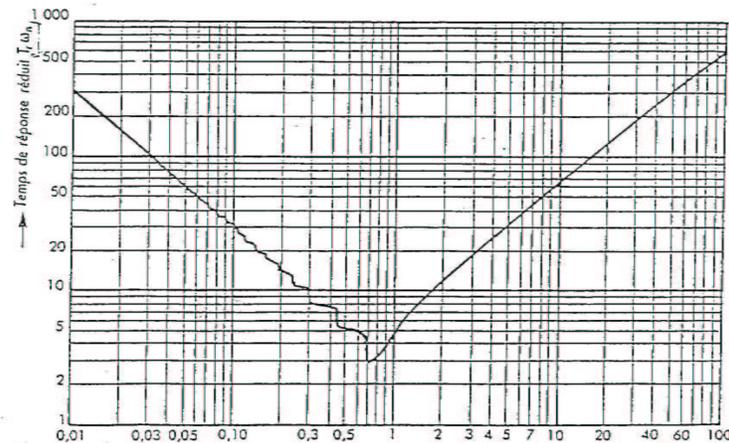


figure 3.6: Temps de réponse réduit ($t_r\omega_0$) en fonction de ζ

3.3.3 Réponse à une rampe

La transformée de Laplace du signal d'entrée est $X(p) = \frac{a}{p^2}$, d'où :

$$Y(p) = F(p)X(p) = \frac{aK\omega_0^2}{p^2(p^2 + 2\zeta\omega_0p + \omega_0^2)}$$

On peut remarquer que la réponse $y(t)$ à une rampe unité ($a=1$) est l'intégrale de la réponse indicielle unitaire.

Par le Théorème de la valeur finale, on obtient : $y(0^+) = 0$ et $\frac{dy(0^+)}{dt} = 0$.

Comme pour les systèmes du premier ordre, on peut calculer l'erreur de traînage du système étudié lorsque $K = 1$. En utilisant le Théorème de la valeur finale, l'erreur de traînage est :

$$x(+\infty) - y(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p[X(p) - Y(p)] = a \frac{2\zeta}{\omega_0}$$

L'erreur de traînage est proportionnelle à la quantité $2\zeta/\omega_0$ qui joue le rôle que jouait la constante de temps dans le cas d'un système du premier ordre. On appelle quelquefois **constante de traînage** C_t l'inverse de cette quantité, de sorte que :

$$x(+\infty) - y(+\infty) = a/C_t \quad \text{avec} \quad C_t = \omega_0/2\zeta$$

Dans le cas où $K \neq 1$, l'erreur de traînage est infinie et les signaux d'entrée et de sortie divergent.

Plusieurs réponses du système (pour différents ζ) sont tracées sur la figure 3.7.

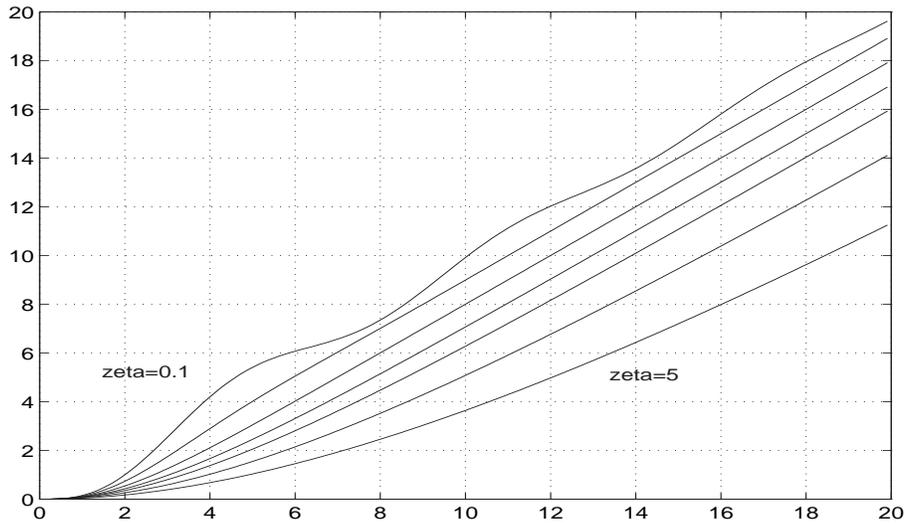


figure 3.7: Réponse du système à une rampe pour $\zeta \in \{0.1, 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 5\}$

3.4 Systèmes d'ordre supérieur

Nous venons de voir que la forme de la réponse d'un système linéaire est déterminée par l'ordre du système, et plus particulièrement par la valeur et donc la position (ω_0 et ζ déterminent la situation dans le plan complexe) de ses pôles.

Un système d'ordre élevé comporte un grand nombre de paramètres et étudier ses réponses temporelles (surtout si on l'effectue de la même manière que précédemment) peut se révéler fastidieux. L'objectif est de pouvoir déterminer le comportement d'un système en fonction de ses réponses temporelles tout en considérant un nombre restreint de paramètres (un système relativement simple).

Un système d'ordre élevé comporte un grand nombre de pôles (réels ou complexes conjugués) et tous ne possèdent pas la même influence sur les réponses temporelles. Sur l'exemple ci-dessous on remarque qu'il n'y a plus de différence en régime permanent. Le résultat mis en évidence par cet exemple possède plusieurs conséquences :

- un système d'ordre élevé possède, la plupart du temps, 1 ou 2 pôles dominants et se «comporte» donc comme un système du premier ou du deuxième ordre.
- on peut simplifier la fonction de transfert d'un système d'ordre élevé en ne conservant que le (ou les) pôle(s) dominant(s) (approximation par un système du premier ou du deuxième ordre).
- en pratique, un pôle peut être négligé dès qu'il est 3 à 4 fois supérieur au précédent

Exemple : Système d'ordre 3

Considérons le système suivant : $H(p) = \frac{1}{(1+p)(1+\frac{p}{6})(1+\frac{p}{22})}$. Il possède 3 pôles réels en -1 , -6 et -22 et sa réponse indicielle unitaire vaut :

$$y(t) = 1 - 1.257\exp(-t) + 0.275\exp(-6t) - 0.017\exp(-22t)$$

. Au fur et à mesure que l'on avance dans le temps, ces termes «s'éteignent» les uns après les autres. En effet, le terme en $\exp(-22t)$ décroît très rapidement et devient très vite négligeable. Au contraire les termes correspondant aux pôles situés les plus proches de l'origine du plan complexe conservent plus longtemps leur influence sur l'allure de la réponse temporelle. Dans notre cas, -1 est le pôle lent et -6 et -22 sont les pôles rapides. On parle alors de **pôle dominant** pour le pôle -1 .

La forme de la réponse dépend essentiellement des pôles dominants. Les pôles les plus éloignés ne jouent que sur la forme du début du régime transitoire comme le montre la figure 3.8 (où l'on a tracé les réponses indicielles des systèmes d'ordre 1 : $\frac{1}{1+p}$, d'ordre 2 : $\frac{1}{(1+p)(1+\frac{p}{6})}$ et $H(p)$:

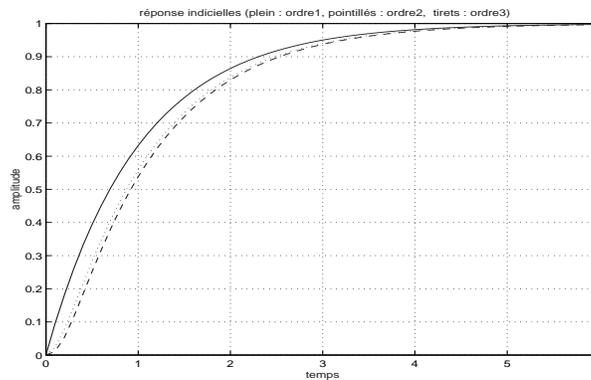


figure 3.8: Réponse indicielles et pôles dominants

Ce qui est plus visible si on trace l'erreur entre les 3 systèmes :

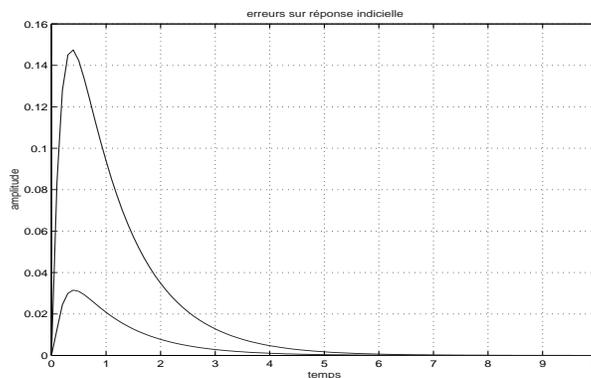


figure 3.9: Erreurs sur les réponses indicielles et pôles dominants

Deuxième partie

Notions de Performances

Qualités demandées à un système

Stabilité

C'est la première qualité demandée à un système. Pour pouvoir en effectuer la correction, il faut **absolument** respecter cette condition. Cela implique que tous les pôles de la fonction de transfert soient à partie réelle négative. Dans le cas où le modèle du système considéré est instable, le correcteur aura la charge de «ramener» les pôles instables du côté stable (demi-plan complexe gauche) et donc de *stabiliser* le système

Poursuite

Le problème de poursuite consiste à ce que la sortie du système «suive au mieux» son entrée (en général, la consigne). Le système doit être :

- **précis** : en régime permanent, la sortie doit atteindre «*au plus près*» le niveau demandé par la consigne ;
- **rapide** : la sortie doit atteindre la valeur de consigne le plus rapidement possible. Le temps de réponse doit être le plus petit possible. La situation des pôles dans le plan complexe en est responsable.

Régulation

Le système est soumis à une (ou des) perturbation(s). Malgré celle-ci, il doit être :

- **précis** : la sortie doit atteindre «*au plus près*» le niveau de l'entrée même si une perturbation vient tenter de l'en écarter ;
- **rapide** : il doit «*effacer*» l'influence de la perturbation. La sortie doit «revenir» le plus vite possible au niveau souhaité. .

Commande

La commande appliquée au système doit être limitée (notamment en amplitude) afin d'éviter un mauvais fonctionnement : au mieux l'actionneur sature et la commande appliquée au système est maximale (dans ce cas, il y a plus de régulation), au pire on risque de détruire l'actionneur ou le système...

Ces qualités s'évaluent en général en appliquant au système une entrée en forme d'échelon. On verra dans la pratique que ces exigences de performances ne peuvent être satisfaites de manière idéale. On adoptera alors un compromis en fonction des priorités du cahier des charges.

Chapitre 4

Stabilité

Sommaire

4.1	Le concept	41
4.2	Critère de Routh-Hurwitz	43
4.3	Lieu des pôles	45
4.4	Résumé	46

4.1 Le concept

Un **système est dit stable** si sa réponse à une entrée bornée (consigne, signal de référence ou perturbation dont l'amplitude n'augmente pas indéfiniment) est bornée. Cette notion de stabilité est assez délicate à appréhender, toutefois on peut en avoir une vue assez juste en considérant la figure 4.1, où une balle roule sur une surface.

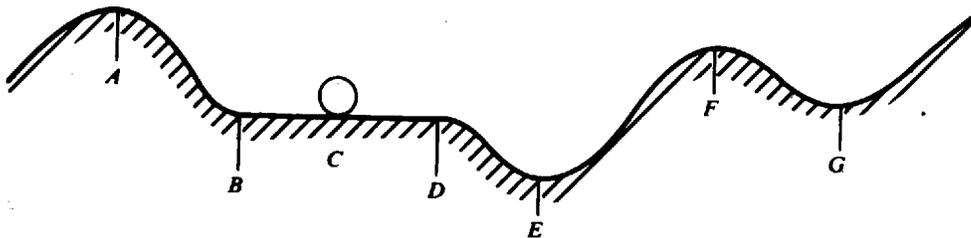


figure 4.1: Stabilité : exemple de la balle qui roule

Sur la figure 4.1, les points A , B , C , D , E et F sont des **points d'équilibre** :

- A et F sont des **points d'équilibre instable** puisqu'une très petite excitation (une «pichenette») suffit pour que la balle quitte ces points et s'en éloigne irrémédiablement.
- E et G sont des **points d'équilibre stable** puisque la balle y retournera après une petite excitation.
- Les autres points sont dits **points d'équilibre neutre** car une petite excitation éloigne la balle mais celle-ci ne diverge pas.

On ne parle dans cet exemple que de **stabilité locale** puisque si les perturbations sont suffisamment grandes, la balle quittera les points E et G sans y revenir. De manière plus simpliste, on

pourra considérer la stabilité comme une condition nécessaire pour un déplacement à un nouveau point d'équilibre ou bien un retour au point d'équilibre initial suite à une excitation (entrée) bornée.

Exemple : Réservoir

Considérons le remplissage d'un réservoir à soutirage de débit constant (voir figure 4.2).

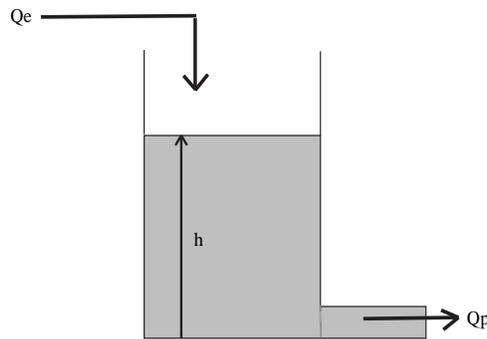


figure 4.2: Un système instable : un reservoir à débit de sortie constant

Le procédé est en boucle ouverte. Supposons que le système est à l'équilibre à l'état initial (c'est à dire que Q_E est réglée de manière à compenser exactement le débit de sortie Q_P). Un changement de commande (variation de Q_E) déstabilise le système (sans pour autant provoquer sa destruction!). En effet, une augmentation de Q_E provoque un débordement tandis qu'une diminution provoque la vidange du reservoir. On remarque qu'on atteint pas d'autre point d'équilibre et qu'on ne revient pas non plus au point d'équilibre initial. Le système en boucle ouverte est donc instable.

Deux notions importantes sont donc liées à celle de stabilité :

- celle de point de fonctionnement stable ou instable
- celle de domaine de stabilité

Pour les systèmes linéaires invariants dans le temps, la stabilité peut-être définie simplement et de manière algébrique comme suit : un système linéaire invariant dans le temps sera **stable** si et seulement si les **pôles** de sa fonction de transfert ont une **partie réelle négative**.

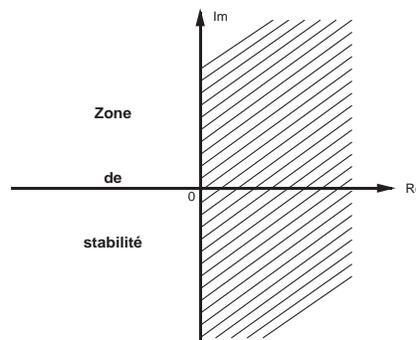


figure 4.3: **Position des pôles et stabilité**

Il suffit donc, pour étudier la stabilité d'un système, de déterminer les pôles de sa fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{\text{Num}(p)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (4.1)$$

Pour cela on peut résoudre l'équation caractéristique du système :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (4.2)$$

Cette résolution n'est pas toujours aisée. On utilisera en général d'autres techniques pour étudier la stabilité des systèmes : critère de Routh, critère de Nyquist...

4.2 Critère de Routh-Hurwitz

À la fin du 19^{ème} siècle, E.J. Routh et A. Hurwitz ont proposé une méthode qui porte désormais leurs noms, pour étudier la stabilité. Trouver les racines d'un polynôme n'est pas toujours aisé, notamment dans le cas des systèmes d'ordres supérieurs à 2. Cette méthode algébrique permet de savoir si les racines d'un polynôme sont à partie réelle négative.

Cette méthode consiste, à partir de l'équation 4.2, à construire le tableau suivant :

$$\begin{array}{l|llll} p^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ p^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ p^{n-2} & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots \\ p^{n-3} & c_n & c_{n-1} & a_{n-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p^0 & h_n & & & \end{array}$$

avec :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \\ b_{n-1} &= \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \\ &\vdots \\ c_n &= \frac{b_n a_{n-3} - a_{n-1} b_{n-1}}{b_n} \\ c_{n-1} &= \frac{b_n a_{n-5} - a_{n-1} b_{n-2}}{b_n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Le critère de Routh-Hurwitz dit que le **nombre de pôles instables** (c'est à dire à partie réelle positive) est égal au nombre de **changements de signe dans la première colonne** du tableau construit ci-dessus. Par conséquent, si tous les éléments de la première colonne du tableau sont de même signe, le système est stable.

En pratique, différents cas peuvent se produire suivant que la première colonne comporte ou non un terme nul.

Exemple : système stable

Soit $G(p) = \frac{1}{p^4+7p^3+17p^2+17p+6}$

$$\begin{array}{c|ccc} p^4 & 1 & 17 & 6 \\ p^3 & 7 & 17 & 0 \\ p^2 & \frac{7 \cdot 17 - 1 \cdot 17}{7} & \frac{7 \cdot 6 - 1 \cdot 0}{7} & 0 \\ p^1 & \frac{\frac{102}{7} \cdot 17 - 7 \cdot 6}{\frac{102}{7}} & 0 & \\ p^0 & 6 & & \end{array} \iff \begin{array}{c|cc} p^4 & 1 & 17 \ 6 \\ p^3 & 7 & 17 \ 0 \\ p^2 & 14, 57 & 6 \ 0 \\ p^1 & 14, 12 & 0 \\ p^0 & 6 & 6 \end{array}$$

Tous les termes de la première colonne sont positifs, le système de fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{p^4+7p^3+17p^2+17p+6}$ est donc stable.

Exemple : système instable

Soit $G(p) = \frac{1}{p^4+2p^3+3p^2+4p+5}$

$$\begin{array}{c|cc} p^4 & 1 & 3 \ 5 \\ p^3 & 2 & 4 \ 0 \\ p^2 & \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{2} = 1 & \frac{2 \cdot 5 - 1 \cdot 0}{2} = 5 \ 0 \\ p^1 & \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 5}{1} = -6 & 0 \\ p^0 & \frac{-6 \cdot 5 - 1 \cdot 0}{-6} = 5 & 0 \end{array}$$

Tous les termes de la première colonne ne sont pas de même signe donc le système est instable. De plus, il y a deux changements de signe (de 1 à -6 et de -6 à 5), par conséquent on peut affirmer que le système possède deux pôles instables.

Exemple : terme nul dans la première colonne

Soit $G(p) = \frac{1}{p^5+2p^4+2p^3+4p^2+p+1}$

$$\begin{array}{c|cc} p^5 & 1 & 2 \ 1 \\ p^4 & 2 & 4 \ 1 \\ p^3 & \epsilon & 0.5 \ 0 \\ p^2 & c_1 & 1 \ 0 \\ p^1 & d_1 & 0 \ 0 \\ p^0 & 1 & 0 \ 0 \end{array}$$

Si un terme de la première colonne est nul et que tous les termes de la même ligne ne sont pas nuls, on remplace le terme nul par un ϵ très petit de même signe que les termes de la première colonne (ici : positif). Dès lors on obtient : $c_1 = \frac{4\epsilon-1}{\epsilon} \simeq \frac{-1}{\epsilon} < 0$ et $d_1 = \frac{0.5c_1-\epsilon}{c_1} \simeq 0.5 > 0$.

Tous les termes de la première colonne ne sont pas de même signe donc le système est instable. De plus, il y a deux changements de signe, par conséquent on peut affirmer que le système possède deux pôles instables.

Exemple : ligne nulle

Soit $G(p) = \frac{1}{p^3+2p^2+4p+8}$

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 4 \\ p^2 & 2 & 8 \\ p^1 & 0 & 0 \\ p^0 & 8 & 0 \end{array}$$

Quand tous les termes d'une même ligne sont nuls, cela peut traduire deux phénomènes différents :

- soit on est en présence de deux pôles réels opposés : $+a$ et $-a$, dans ce cas le système est **instable**.
- soit on est en présence de deux pôles imaginaires purs opposés : $+ja$ et $-ja$, dans ce cas le système est **marginalelement stable**.

Pour analyser la stabilité, on construit alors l'**équation auxiliaire**, c'est à dire l'équation formée à partir des coefficients de la ligne précédent la ligne uniformément nulle :

$$Z(p) = 2p^2 + 8 = 2(p + 2j)(p - 2j)$$

Les racines de cette équation auxiliaire sont racines de l'équation caractéristique du système. Ici on obtient $p_{1,2} = \pm 2j$, par conséquent le système est marginalelement stable.

Exemple : Fonction de transfert dépendante d'un paramètre

On peut naturellement analyser la stabilité d'un système en fonction d'un paramètre.

Soit $G(p) = \frac{K(p+10)}{p^3+4p^2+(4+K)p+10K}$

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 4+K \\ p^2 & 4 & 10K \\ p^1 & 4-1,5K & 0 \\ p^0 & 10K & 0 \end{array}$$

Le système sera stable si $0 < K < \frac{4}{1,5}$. Dans le cas limite où $K = \frac{4}{1,5}$, on construit l'équation auxiliaire : $4p^2 + \frac{40}{1,5} = 4(p + j\sqrt{\frac{10}{1,5}})(p - j\sqrt{\frac{10}{1,5}})$ et on constate que le système est marginalelement stable.

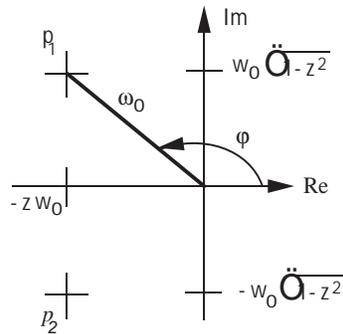
4.3 Lieu des pôles

4.3.1 Système du premier ordre

Un tel système est stable si son pôle est stable. Il suffit qu'il soit situé dans le demi-plan complexe gauche (à partie réelle négative). Les pôles se déplacent uniquement sur l'axe réel.

4.3.2 Système du second ordre

Dans le cas des pôles complexes conjugués, ceux-ci ne se déplacent plus uniquement horizontalement (l'axe des réels) mais aussi verticalement (axe des imaginaires) comme l'indique la figure ci-dessous :



4.3.3 Cas particuliers des pôles sur l'axe imaginaire

Un système intégrateur possède un unique pôle situé en 0. On est alors en limite de stabilité.

Un système du deuxième ordre peut être non-amorti. Cela signifie qu'il possède 2 pôles imaginaires purs (sur l'axe imaginaire) donc en limite de stabilité. C'est un système oscillant (les oscillations ne sont pas amorties mais entretenues).

4.4 Résumé

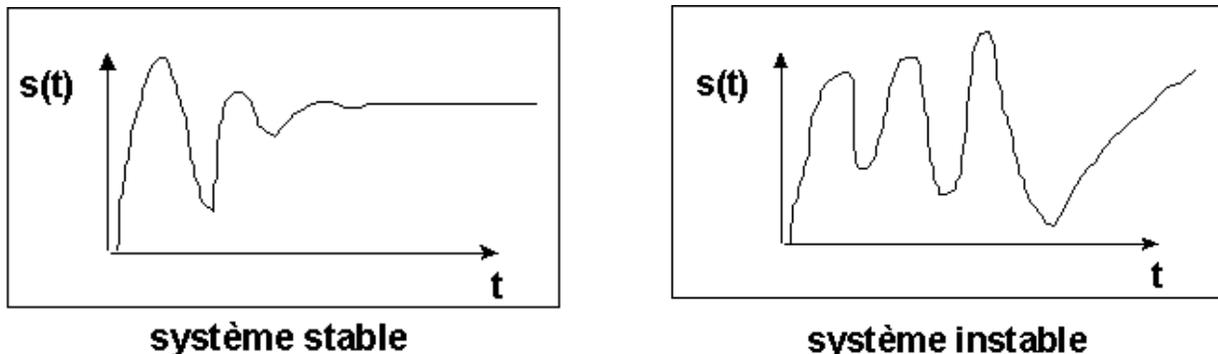


figure 4.4: Stabilité : contexte général (sur réponse indicielle)

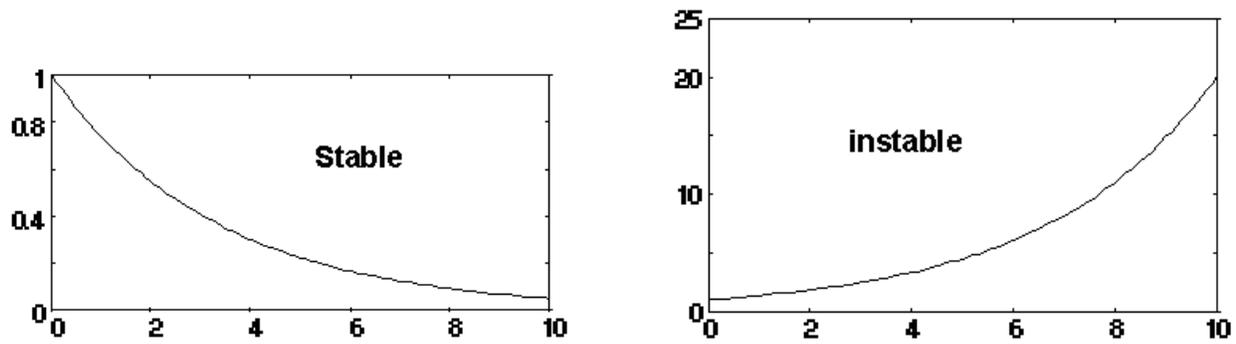


figure 4.5: Stabilité : premier ordre (sur réponse impulsionnelle)

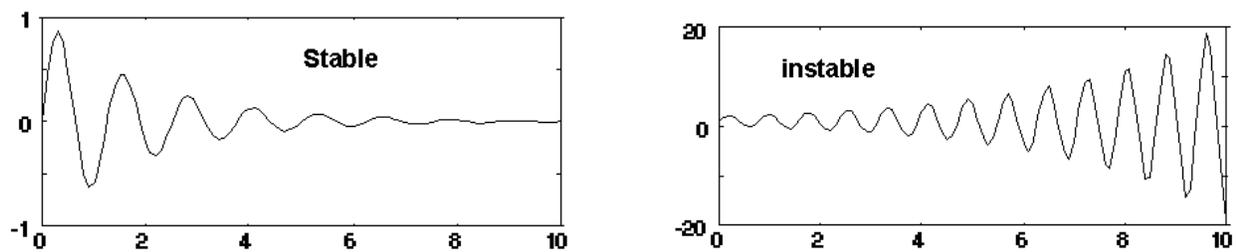


figure 4.6: Stabilité : deuxième ordre (sur réponse impulsionnelle)

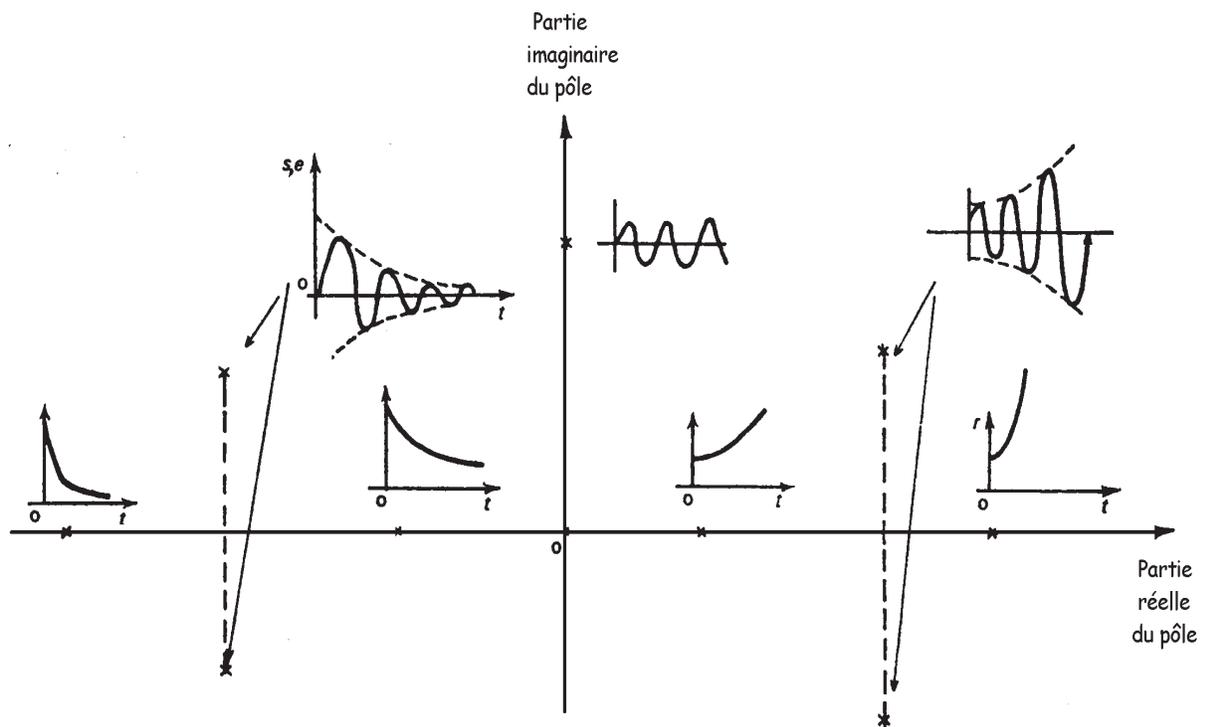


figure 4.7: Allure des réponses impulsionnelles et stabilité versus lieu des pôles

Chapitre 5

Précision et Rapidité

Sommaire

5.1	Introduction	48
5.2	Classe d'un système asservi	51
5.3	Effets d'une perturbation sur l'erreur permanente	53
5.4	Rapidité et précision dynamique	55

5.1 Introduction

On utilisera dans la suite les notations de la figure 1.1 suivante :

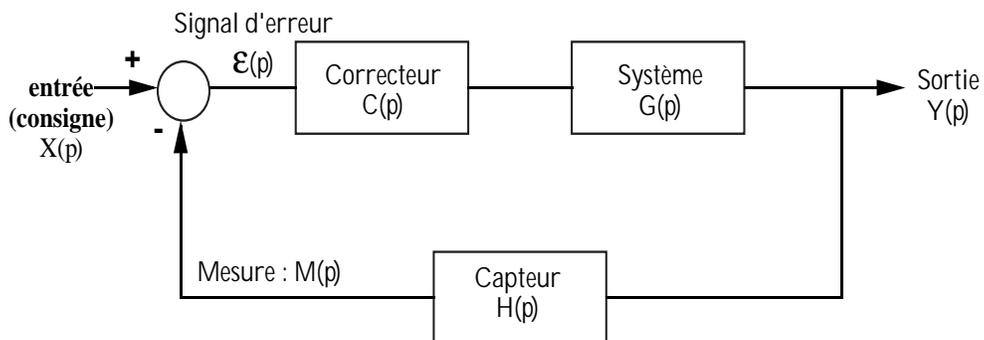


figure 5.1: Représentation classique d'un asservissement

La valeur finale du signal d'erreur (encore appelée erreur en régime permanent) pour différentes entrées se visualise sur les réponses aux entrées canoniques sur la figure 5.2 ci-dessous :

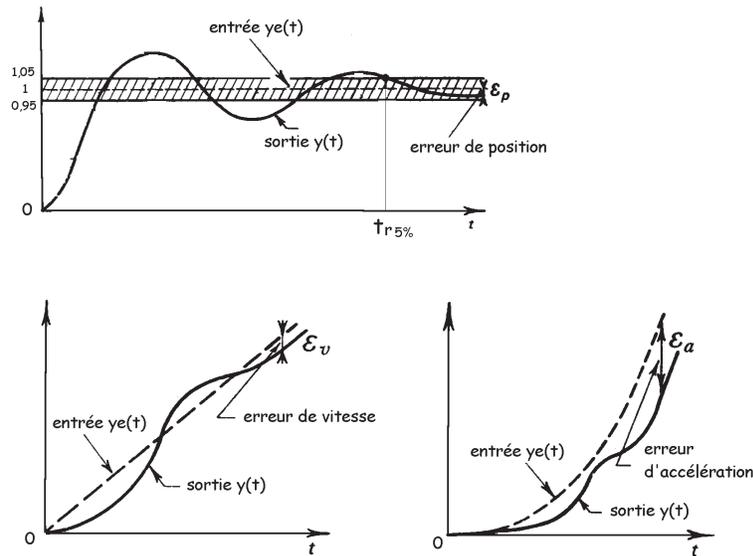


figure 5.2: Visualisation des erreurs en régime permanent

Déterminons maintenant une expression mathématique de cette erreur. La fonction de transfert du système de la figure 1.1 est donné par :

$$F(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)H(p)} \quad (5.1)$$

Le système de la figure 1.1 est précis si le signal d'erreur finit par s'annuler : $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$.

On peut calculer la transformée de Laplace du signal d'erreur :

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= X(p) - M(p) &&= X(p) - H(p)Y(p) \\ &= X(p) [1 - H(p)F(p)] &&= X(p) \left[1 - H(p) \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)H(p)} \right] \\ &= \frac{X(p)}{1 + C(p)G(p)H(p)} &&= \boxed{\frac{X(p)}{1 + T(p)}} \end{aligned}$$

où $T(p)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte (sans perte de généralités, on peut intégrer le terme $H(p)$ dans $G(p)$ et se ramener au schéma standard avec retour unitaire.

Le calcul précédent montre que le signal d'erreur dépend :

- du signal d'entrée du système : $X(p)$ donc de $x(t)$.
- de la fonction de transfert du système en boucle ouverte : $T(p)$.

On distingue en général deux types d'erreurs, dont les conséquences sont de natures différentes :

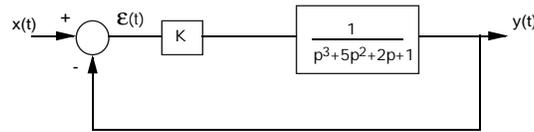
- l'erreur **transitoire** (*erreur dynamique*) qui disparaît avec le temps et que l'on retrouvera à chaque variation de la consigne.

- l'erreur **en régime permanent** (*erreur statique*) : $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$, qui caractérise la précision du système asservi.

Définition 5.1 (Poursuite). On appelle problème de **poursuite** le fait de garantir que la sortie $y(t)$ suive au mieux (sans écart) l'entrée $x(t)$. Pour cela, on doit assurer une erreur statique nulle (ou minimale) en régime permanent, soit $\varepsilon(\infty) = 0$. ■

Exemple : Exemple de calcul d'erreurs

Considérons le système de la figure 5.1 soumis dans un premier temps à une entrée en échelon unité, puis à une entrée en rampe unité. Déterminons ensuite les erreurs en régime permanent.



a) entrée en échelon unité : on a $X(p) = \frac{1}{p}$, et $T(p)$ vaut :

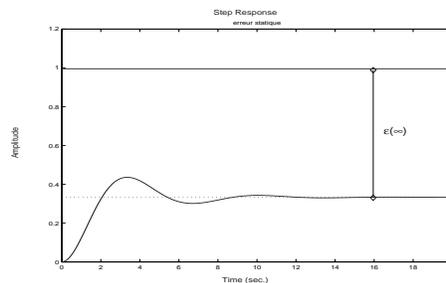
$$T(p) = \frac{K}{p^3 + 5p^2 + 2p + 1}$$

donc, la transformée de Laplace de l'erreur est :

$$\varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + T(p)} = \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{K}{p^3 + 5p^2 + 2p + 1}} = \frac{p^3 + 5p^2 + 2p + 1}{p(p^3 + 5p^2 + 2p + 1 + K)}$$

or, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$, donc $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \frac{1}{1+K}$

Avec $K = 0.5$, on peut constater que $\varepsilon(\infty) = 2/3 \equiv 66\%$ sur la figure 5.1.

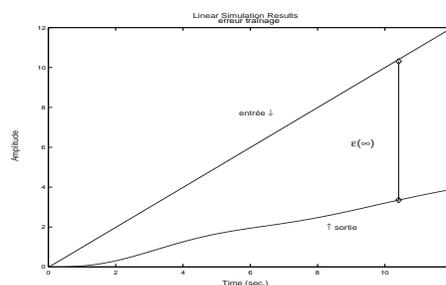


b) entrée en rampe unité : on a $X(p) = \frac{1}{p^2}$, donc l'erreur vaut :

$$\varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + T(p)} = \frac{\frac{1}{p^2}}{1 + \frac{K}{p^3 + 5p^2 + 2p + 1}} = \frac{p^3 + 5p^2 + 2p + 1}{p^2(p^3 + 5p^2 + 2p + 1 + K)}$$

or, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$, donc $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \infty$

Avec $K = 0.5$, on peut constater que $\varepsilon(\infty) = \infty$ sur la figure 5.1.



5.2 Classe d'un système asservi

5.2.1 Expression générale de l'erreur permanente

On a vu dans le chapitre 5.1 que l'erreur peut s'exprimer en fonction du signal d'entrée $X(p)$ et de la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ par $\varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1+T(p)}$. Par conséquent si l'on écrit la fonction de transfert en boucle ouverte sous la forme générale suivante :

$$T(p) = \frac{K}{p^\alpha} \left(\frac{1 + b_1p + b_2p^2 + \dots}{1 + a_1p + a_2p^2 + \dots} \right) \text{ où } \alpha \text{ est appelé } \mathbf{classe} \text{ du système}$$

on obtient :

$$\varepsilon(p) = \frac{X(p)p^\alpha(1 + a_1p + a_2p^2 + \dots)}{p^\alpha(1 + a_1p + a_2p^2 + \dots) + K(1 + b_1p + b_2p^2 + \dots)}$$

donc :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{X(p)p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K} \quad (5.2)$$

L'erreur permanente dépend donc de **l'entrée** et de **la classe** du système, c'est à dire du nombre d'intégrateurs (termes en p^α) présents dans la chaîne directe. **Attention** : ne pas confondre ordre et classe!!!

5.2.2 Erreur statique

L'erreur statique est l'erreur dans le cas d'une entrée en échelon. On parle aussi d'erreur permanente d'ordre 0, ou d'erreur de position.

Dans ce cas : $X(p) = \frac{E_0}{p}$, donc l'équation 5.2 devient :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0p^\alpha}{p^\alpha + K}$$

donc :

$$\varepsilon(\infty) = \begin{cases} \frac{E_0}{1+K} & \text{pour } \alpha = 0 \\ 0 & \text{pour } \alpha > 0 \end{cases}$$

L'erreur de position est donc nulle pour tout système de classe supérieure ou égale à 1.

5.2.3 Erreur de traînage

L'erreur de traînage est l'erreur dans le cas d'une entrée en rampe. On parle aussi d'erreur permanente d'ordre 1 ou erreur de vitesse.

Dans ce cas : $X(p) = \frac{E_0}{p^2}$, donc l'équation 5.2 devient :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K}$$

donc :

$$\varepsilon(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{pour } \alpha = 0 \\ \frac{E_0}{K} & \text{pour } \alpha = 1 \\ 0 & \text{pour } \alpha > 1 \end{cases}$$

L'erreur de traînage est donc nulle pour tout système de classe supérieure ou égale à 2.

5.2.4 Erreur en régime d'accélération

L'erreur en régime d'accélération est l'erreur dans le cas d'une entrée en t^2 . On parle aussi d'erreur permanente d'ordre 2 ou erreur d'accélération .

Dans ce cas : $X(p) = \frac{E_0}{p^3}$, donc l'équation 5.2 devient :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0 p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K}$$

donc :

$$\varepsilon(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{pour } \alpha = 0 \text{ ou } 1 \\ \frac{E_0}{K} & \text{pour } \alpha = 2 \\ 0 & \text{pour } \alpha > 2 \end{cases}$$

L'erreur en régime d'accélération est nulle pour tout système de classe supérieure ou égale à 3.

Définition 5.2 (Erreur d'ordre quelconque). En règle générale, l'erreur permanente d'ordre m est **nulle** pour tout système de classe supérieure à $m + 1$, **finie** (constante) pour tout système de classe m et **infinie** pour tout système de classe inférieure à m . ■

5.2.5 Résumé

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des erreurs en fonction de la classe du système :

classe	0	1	2	3
échelon $\frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
rampe $\frac{E_0}{p^2}$	∞	$\frac{E_0}{K}$	0	0
parabole $\frac{E_0}{p^3}$	∞	∞	$\frac{E_0}{K}$	0

Les allures des erreurs sont les suivantes :

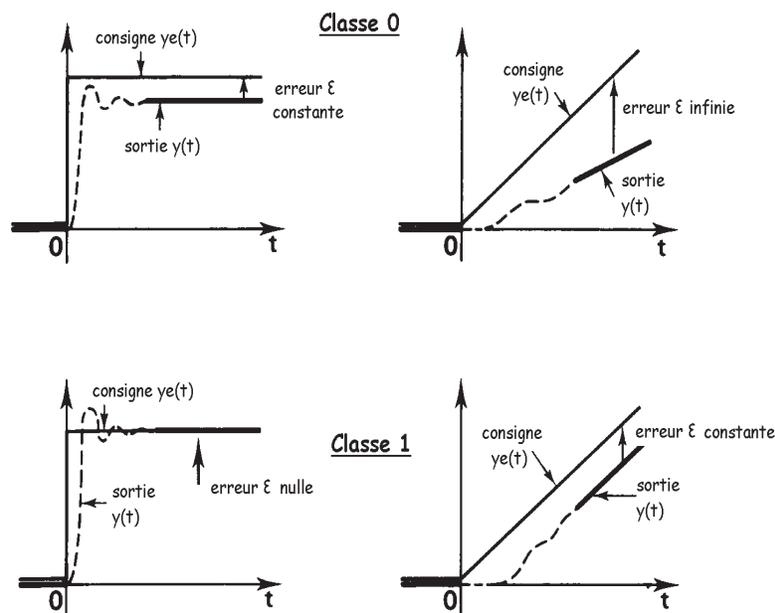


figure 5.3: Allure des erreurs en fonction de la classe du système

5.3 Effets d'une perturbation sur l'erreur permanente

Dans cette partie, on se placera dans le cas d'une perturbation de commande qui agit sur le signal de commande u (sortie du correcteur) ou, de manière équivalente, sur l'entrée du système. On pourra généraliser au cas des perturbations en sortie sans trop de difficultés (les conclusions seront bien sûr différentes).

On se place dans le cas où un système est soumis à une entrée $x(t)$ et à une perturbation $w(t)$, comme sur la figure 5.4.

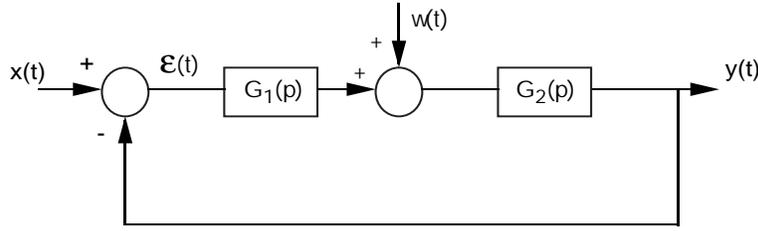


figure 5.4: Schéma-blocs d'un système perturbé

L'objectif est d'étudier l'influence des perturbations sur la précision des réponses (problème de **régulation**). Pour cela, on annule le signal de consigne $x(t)$ et on étudie la fonction de transfert qui relie l'entrée de perturbation au signal d'erreur.

Si le système de la figure 5.4 n'est soumis qu'à la perturbation $w(t)$, il est possible de le représenter comme sur la figure 5.5.

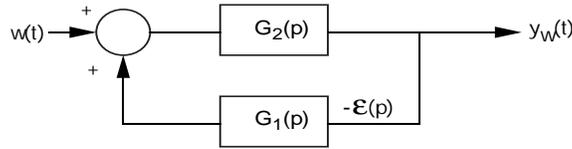


figure 5.5: Système perturbé : perturbation seule

Si l'on note ε_w le signal d'erreur du à la seule perturbation, on peut écrire :

$$\varepsilon_w(p) = -Y(p) = -\frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} \frac{1}{G_1} W(p)$$

donc :

$$\varepsilon_w(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = -\lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} \frac{1}{G_1} p W(p) \right]$$

Dans le cas général (en utilisant le théorème de superposition), on peut écrire :

$$G_1 G_2 = \frac{K}{p^\alpha} \left(\frac{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots} \right) \text{ et}$$

$$G_1 = \frac{K_1}{p^\beta} \left(\frac{1 + d_1 p + d_2 p^2 + \dots}{1 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots} \right) \text{ avec } \alpha \geq \beta$$

donc :

$$\varepsilon_w(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[-\frac{K}{K_1} \frac{p^\beta}{p^\alpha + K} p W(p) \right] \quad (5.3)$$

La classe d'un système asservi vis à vis d'une perturbation est égale au nombre d'intégrateurs contenus dans la partie de la boucle comprise entre l'erreur et le point d'application de la perturbation.

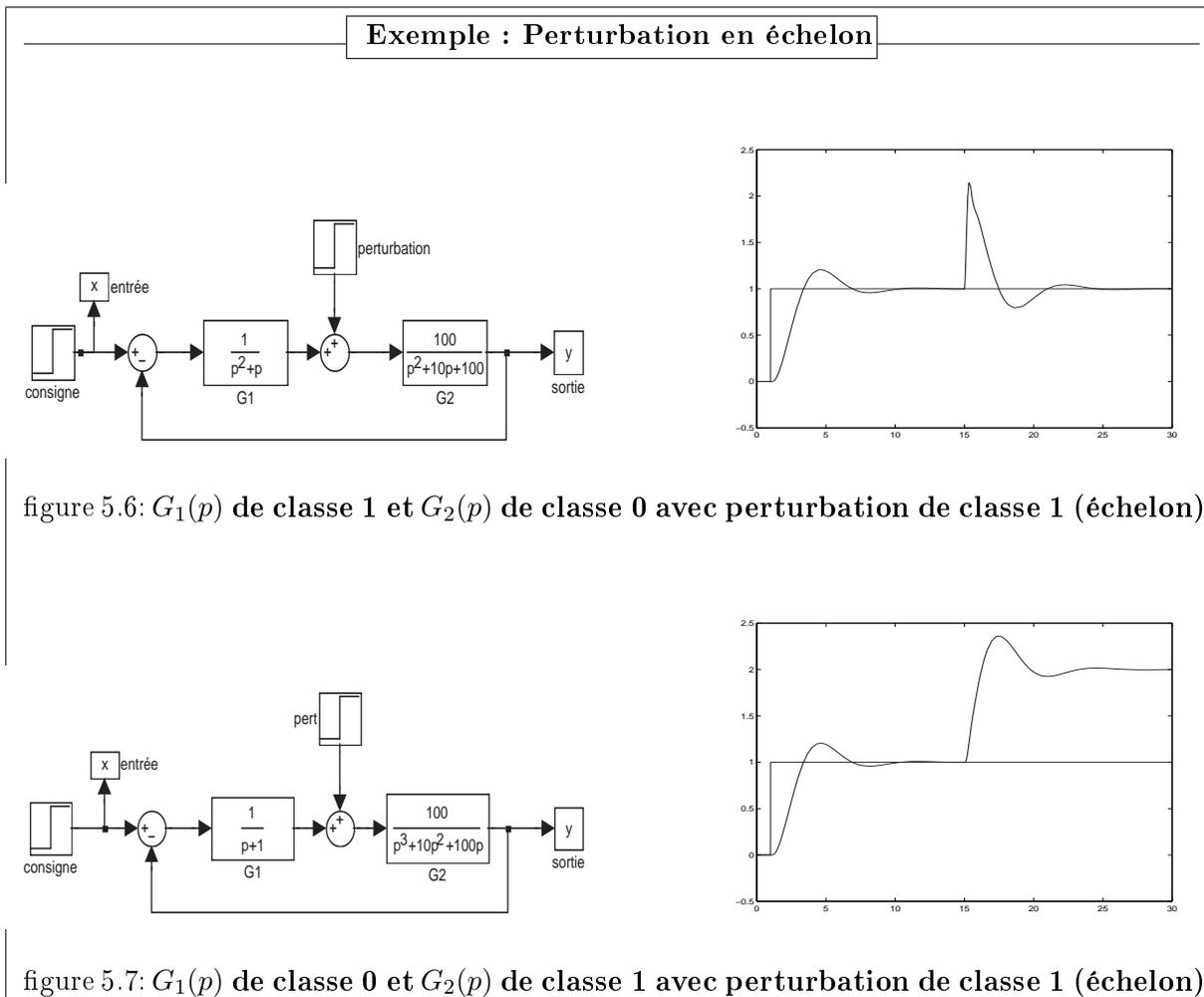
En conclusion, pour assurer le rejet d'une perturbation de classe n ($W(p) = \frac{E_0}{p^n}$), il faut que le système $G_1(p)$ soit de classe équivalente à la classe de la perturbation.

5.3.1 Cas de la perturbation en échelon

Dans ce cas : $W(p) = \frac{E_0}{p}$, donc :

$$\varepsilon_w(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[-\frac{E_0 K}{K_1} \frac{p^\beta}{p^\alpha + K} \right]$$

$$\varepsilon_w(\infty) = \begin{cases} -\frac{E_0}{K_1} \frac{K}{1+K} & \text{pour } \alpha = \beta = 0 \\ \frac{E_0}{K_1} & \text{pour } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta = 0 \\ 0 & \text{pour } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0 \end{cases}$$



5.3.2 Cas de la perturbation en rampe

Dans ce cas : $W(p) = \frac{E_0}{p^2}$, donc :

$$\varepsilon_w(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[-\frac{E_0 K}{K_1} \frac{p^\beta}{p(p^\alpha + K)} \right]$$

$$\varepsilon_w(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{pour } \alpha = \beta = 0 \\ -\frac{E_0}{K_1} \frac{K}{1+K} & \text{pour } \alpha = 0 \text{ et } \beta = 1 \\ \frac{E_0}{K_1} & \text{pour } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta = 1 \\ 0 & \text{pour } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 1 \end{cases}$$

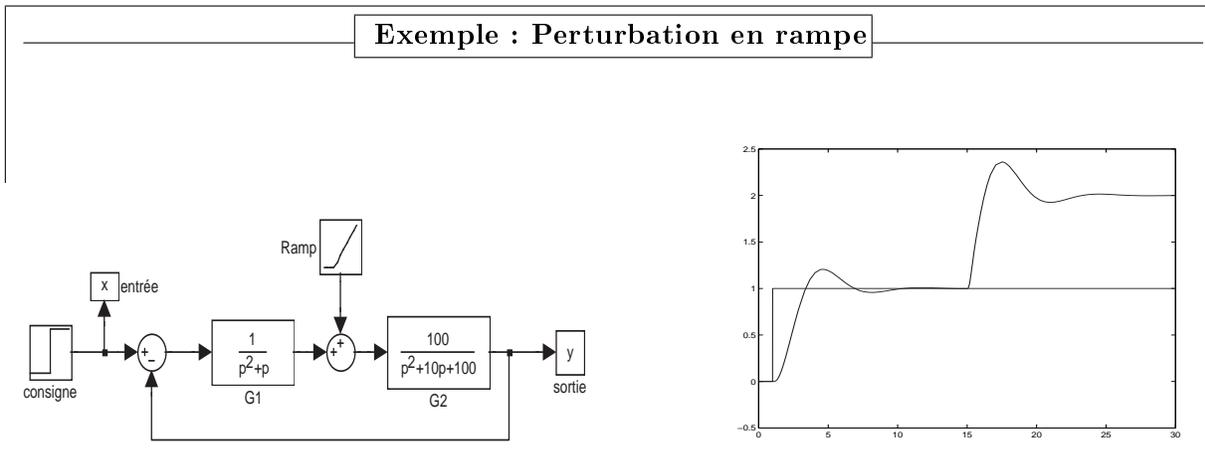


figure 5.8: $G_1(p)$ de classe 1 et $G_2(p)$ de classe 0 avec perturbation de classe 2 (rampe)

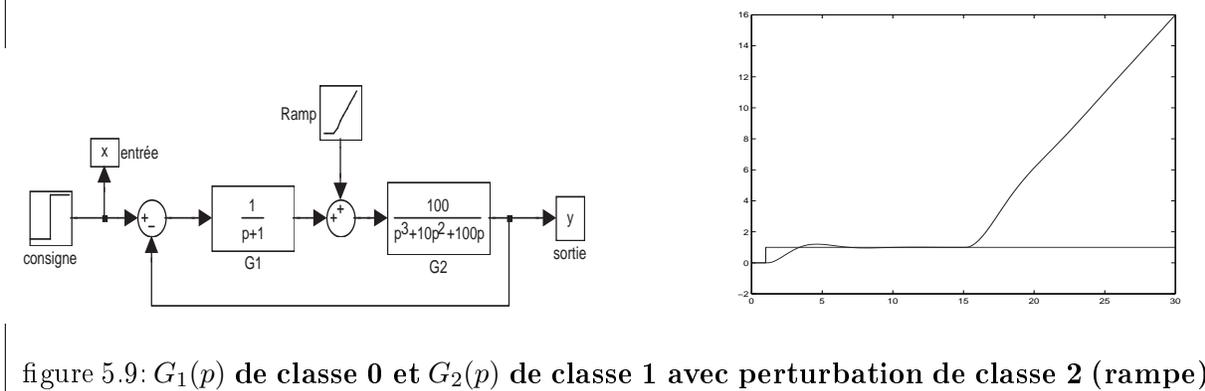


figure 5.9: $G_1(p)$ de classe 0 et $G_2(p)$ de classe 1 avec perturbation de classe 2 (rampe)

5.4 Rapidité et précision dynamique

Pour assurer de bonnes performances il nous reste à considérer l'erreur dynamique caractérisée principalement par la rapidité et le dépassement pendant le régime transitoire.

La rapidité est caractérisée par le temps de réponse du système (voir figure 5.10), autant par le temps que le système met à atteindre son régime permanent que par le temps que le système met pour rejeter les perturbations. C'est l'inertie propre du processus physique qui limite sa rapidité de

réponse. On ne peut donc espérer rendre un processus plus rapide qu'en modifiant son signal de commande. Ce dernier fera l'objet du prochain cours.

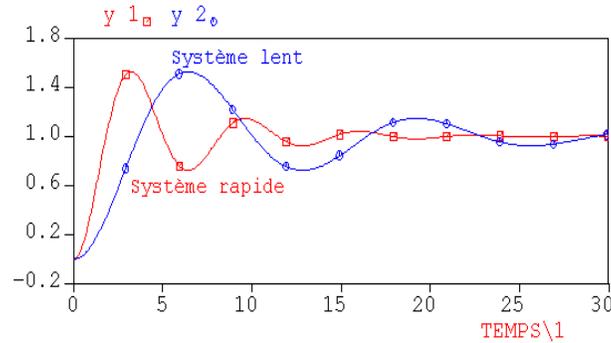


figure 5.10: Système lent et rapide

Dans un premier temps, nous allons analyser la rapidité des systèmes en fonction de la situation des pôles.

5.4.1 rapidité

Définition 5.3 (mode). On a vu précédemment que la nature (l'allure) de la réponse (indicielle par exemple) dépend des pôles (solutions du dénominateur). Ainsi, les pôles :

- réels correspondent à des **modes aperiodiques**
- complexes conjugués à des **modes oscillants**

■

Dans le cas de pôles réels, il suffit de les éloigner de l'axe imaginaire pour augmenter la rapidité. Dans le cas des pôles complexes, c'est plus délicat puisque les pôles ne se déplacent plus seulement horizontalement (sur l'axe des réels) mais aussi verticalement (axe des imaginaires). Il reste alors à considérer les constantes de temps associées à chaque pôle.

La durée des transitoires (termes exponentiels) d'un système d'ordre quelconque est déterminé par l'ensemble des constantes de temps associées à chaque mode/pôle. Imposer une condition du type $\tau_i < \tau_{MAX}$ revient à placer les pôles à gauche d'une verticale $-1/\tau_{MAX}$ dans le plan complexe :

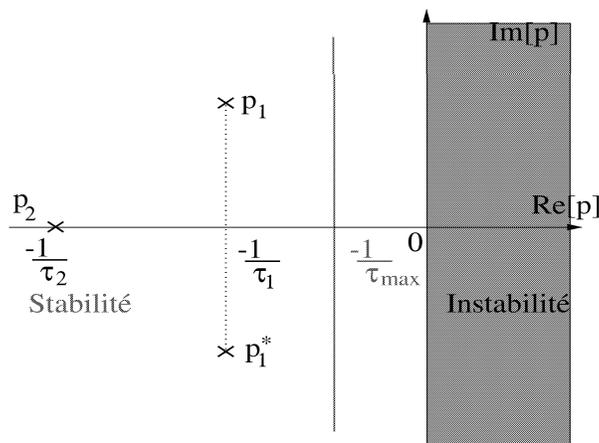


figure 5.11: Rapidité et situation des pôles

Définition 5.4 (rapidité). Le temps de disparition de la composante transitoire associée à un mode définit la **rapidité** de ce mode $\tau_i = -1/\text{Re}(p_i)$. Les modes les plus **rapides** sont donc ceux associés aux pôles les plus éloignés de l'axe imaginaire ■

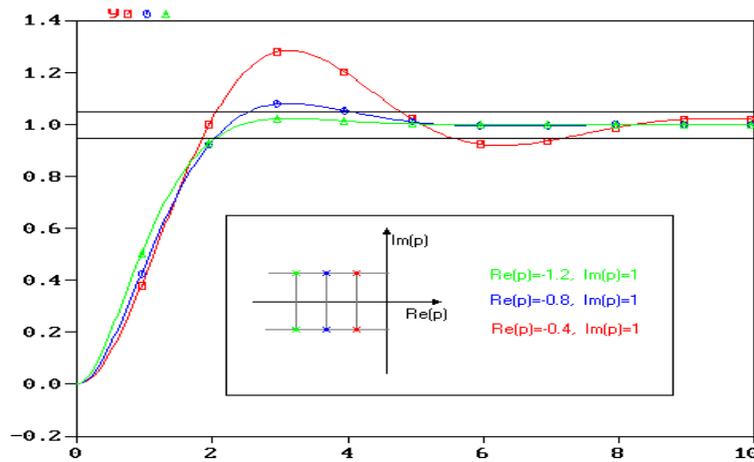


figure 5.12: Temps de réponse et situation des pôles

Pour considérer uniquement la rapidité, on se place à amortissement constant (sur une diagonale sur laquelle se déplacent les pôles). Les éloigner de l'origine revient à augmenter la rapidité comme le montre la figure 5.14 :

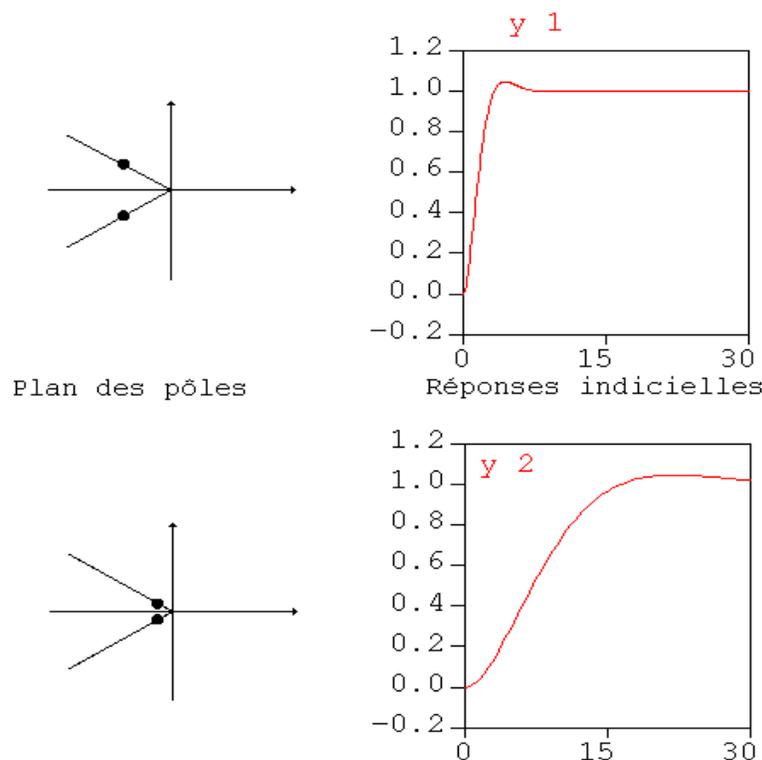


figure 5.13: Rapidité avec des pôles complexes

5.4.2 Amortissement

La précision dynamique est caractérisée par le régime transitoire, donc par l'amplitude du dépassement dans le cas des pôles complexes. Il existe une relation directe entre la valeur de l'amortissement et l'amplitude du dépassement (voir chapitre 3).

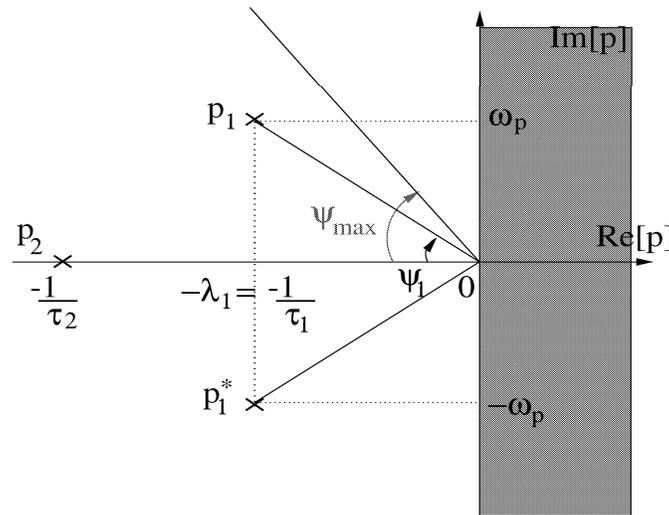


figure 5.14: Précision / amortissement et situation des pôles

Assurer une bonne précision dynamique revient à garantir un dépassement de « quelques % » (en fonction du cahier des charges). Au plus l'amortissement est faible, au plus le dépassement est important. On peut se souvenir (voir chapitre 3) que le temps de réponse (rapidité) est minimal pour un facteur d'amortissement $\zeta = 0.7$. On cherchera alors à « placer » les pôles dans la zone non hachurée délimitée par les demi-droites à 45 degrés (qui représentent le meilleur compromis dépassement/rapidité) comme le montre la figure 5.15 ci-dessous :

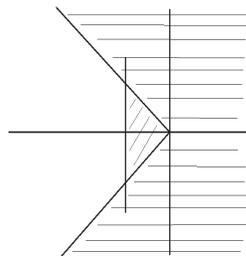


figure 5.15: Compromis Rapidité / Précision / Stabilité dans le plan complexe

Troisième partie

Méthodes de Correction & Identification

Chapitre 6

Correction PID

Sommaire

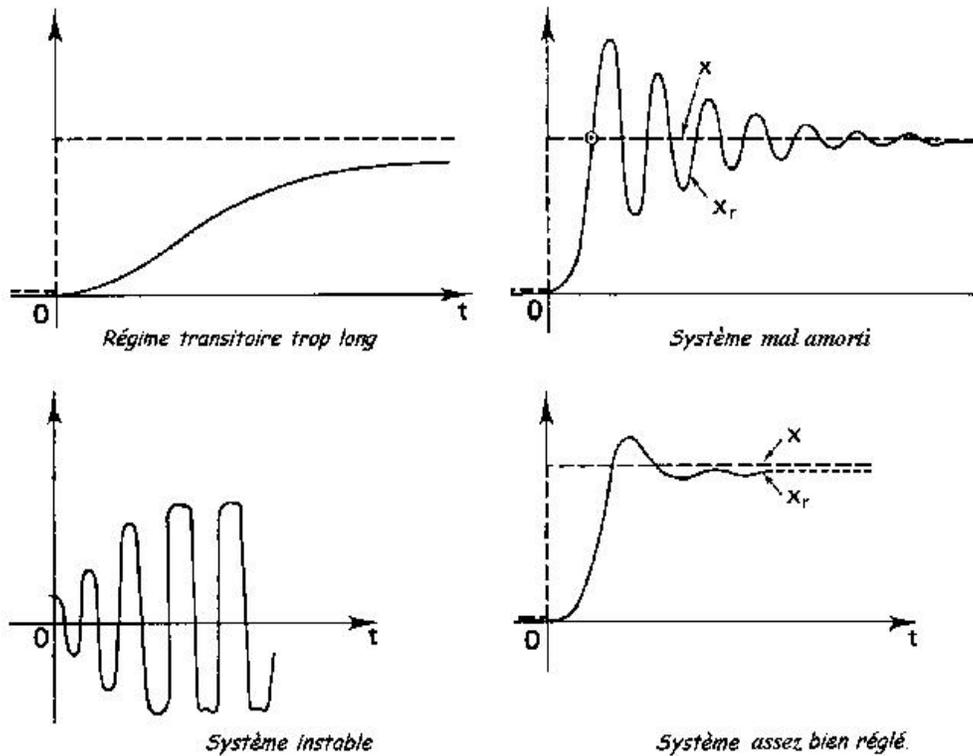
6.1	Introduction	60
6.2	Correction «Tout ou rien»	61
6.3	Correcteur Proportionnel (P)	61
6.4	Correcteurs à actions proportionnelle et intégrale (PI)	65
6.5	Correcteurs à actions proportionnelle et dérivée (PD)	70
6.6	Correcteurs à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)	72
6.7	A propos de la commande...	73
6.8	Méthodes temporelles de synthèse des correcteurs	73
6.9	Stratégies de Régulations	78
6.10	Limitation et Faiblesse du correcteur PID	79

6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit les performances obtenues par divers types de systèmes. Corriger (ou «réguler») un système, c'est améliorer ses performances intrinsèques (précision, rapidité, régulation, limitation de la commande tout en garantissant sa stabilité). En effet, le processus possède son fonctionnement propre et (souvent) quelques défaut par rapport aux objectifs souhaités. Par exemple :

- il oscille trop longtemps sous l'effet d'une perturbation (système mal amorti)
- il est, au contraire, trop lent (inertie trop importante)
- il a tendance à «dériver», à «diverger» (sa sortie ne reste pas constante alors que l'entrée l'est)

Le but de ce chapitre est de présenter quelques méthodes de synthèse des correcteurs permettant de satisfaire un certain nombre de performances et d'obtenir un système «bien» réglé :



6.2 Correction «Tout ou rien»

Si on est loin du but à atteindre on envoie le maximum de puissance sur la commande et le minimum si on s'en rapproche. Cette commande est la plus simple mais aussi la moins performante. En effet, il est préférable de réduire *progressivement* la puissance lorsque l'on se rapproche du but. C'est le but de la commande proportionnelle.

6.3 Correcteur Proportionnel (P)

Définition 6.1 (Correcteur Proportionnel). *Le correcteur à action proportionnelle, est le correcteur le plus simple, puisque défini par un simple gain K . La sortie du correcteur est donnée par :*

$$u(t) = K \cdot \varepsilon(t)$$

Sa fonction de transfert est donc : $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \boxed{K}$ ■

Remarque 6.1. L'action proportionnelle k est souvent exprimée par la bande proportionnelle $PB\%$ où :

$$PB\% = \frac{100}{k}$$

La bande proportionnelle représente le pourcentage de l'entrée du correcteur nécessaire à un changement de 100% de sa sortie. Par exemple, $K = 2$ ou bien $BP\% = 50$ signifie qu'une variation de 50% de $\varepsilon(t)$ entraîne une variation de 100% de $u(t)$. ■

6.3.1 Boucle fermée

Le schéma général de la boucle fermée est donné par :

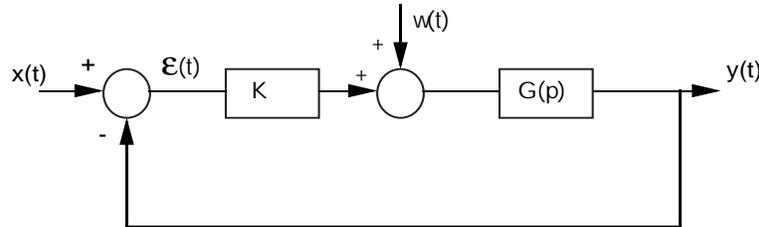


figure 6.1: Correction proportionnelle

L'expression de la boucle fermée est :

$$Y(p) = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)}X(p) + \frac{G(p)}{1 + KG(p)}W(p)$$

Ou encore

$$Y(p) = \frac{\mathbf{K} \text{ den}G(p)}{\text{num}G(p) + \mathbf{K} \text{ den}G(p)}X(p) + \frac{\text{num}G(p)}{\text{num}G(p) + \mathbf{K} \text{ den}G(p)}W(p)$$

6.3.2 Performances

Pour étudier les performances (stabilité, précision statique et dynamique), il nous faut étudier la boucle fermée. Le faire dans le cas général représenterai une trop grande difficulté. Nous allons plutôt détailler ces études sur des systèmes du premier ordre de classe 0 et 1.

6.3.2.1 Correcteur P et système de classe zéro

Considérons tout d'abord un système du premier ordre de fonction de transfert $G(p) = \frac{A}{1 + \tau p}$, en présence d'une perturbation $W(p)$. Le schéma-blocs de ce système en boucle fermée est donné par la figure 6.2.

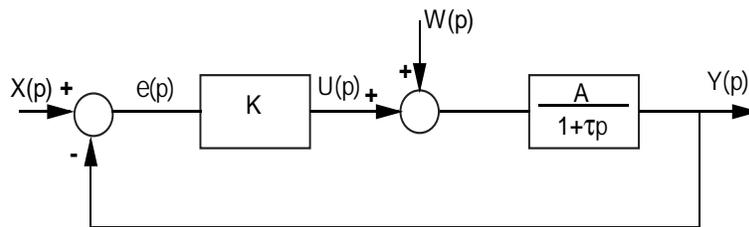


figure 6.2: Système de classe zéro et correcteur P

La sortie $Y(p)$ est donnée par l'équation 6.1 :

$$Y(p) = \frac{\frac{AK}{1+AK}}{1 + \frac{\tau}{1+AK}p}X(p) + \frac{\frac{1}{1+AK}}{1 + \frac{\tau}{1+AK}p}W(p) \quad (6.1)$$

On constate que le système en boucle fermée a une constante de temps $\frac{\tau}{1+AK}$, qui est plus petite que τ . Le système est donc plus **rapide** en boucle fermée. De plus, si l'entrée $x(t)$ est un échelon unité, le régime permanent, en l'absence de perturbation $w(t)$ est donné par :

$$y(\infty) = \frac{AK}{1 + AK} \quad (6.2)$$

et l'erreur de position par :

$$\varepsilon_1(\infty) = 1 - y(\infty) = \frac{1}{1 + AK} \quad (6.3)$$

Ce résultat a été obtenu dans le cas général pour un système de classe zéro. On peut remarquer que l'introduction du correcteur proportionnel a permis de placer le pôle du système initial $P_1 = -\frac{1}{\tau}$ en $P_K = -\frac{1 + AK}{\tau}$, et par conséquent de modifier la dynamique du système (déplacement du pôle vers la gauche donc amélioration de la rapidité).

Si $x(t) = 0$ et si $w(t)$ est un échelon unité, alors l'écart entre l'entrée et la sortie du système $\varepsilon_2(\infty) = 0 - y(\infty)$ est donné par :

$$\varepsilon_2(\infty) = -\frac{1}{1 + AK} \quad (6.4)$$

et l'écart entre la perturbation et la sortie $\varepsilon_3(\infty) = 1 - y(\infty)$ devient :

$$\varepsilon_3(\infty) = 1 - \frac{1}{1 + AK} = \frac{AK}{1 + AK} \quad (6.5)$$

Lorsque K est grand ($K \rightarrow \infty$), cette erreur tend vers 1, alors que $\varepsilon_1(t)$ et $\varepsilon_2(t)$ tendent vers zéro. Le système devient donc précis et insensible à la perturbation. Bien sûr, ce cas ($K \rightarrow \infty$) n'est pas physiquement réaliste, puisque plus K augmente, plus l'influence des dynamiques (ici négligées) se fait sentir, et plus les phénomènes de saturation (limitation des actionneurs) interviennent.

On peut donc en conclure que l'insensibilité aux perturbations et la précision du système ne sont pas réalisables à l'aide d'un correcteur proportionnel, sur un système de classe zéro.

6.3.2.2 Correcteur P et système de classe 1

Considérons maintenant un système de classe un, représenté par une fonction de transfert du type $G(p) = \frac{A}{p(1 + \tau p)}$ (voir figure 6.3).

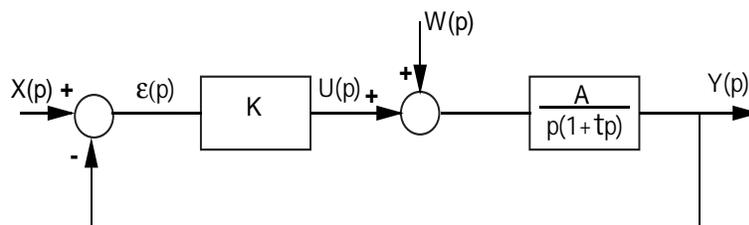


figure 6.3: Système de classe un et correcteur P

La sortie $Y(p)$ est donnée par :

$$Y(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0p + \omega_0^2}X(p) + \frac{\frac{A}{\tau}}{p^2 + 2\zeta\omega_0p + \omega_0^2}W(p) \quad (6.6)$$

où $\omega_0^2 = \frac{AK}{\tau}$ et $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{AK\tau}}$

cas 1 $\rightarrow K > \frac{1}{4A\tau}$: on a affaire à un système du deuxième ordre pseudo-périodique, car $\zeta < 1$.

Dans ce cas les pôles sont complexes conjugués. Les pôles se déplacent à la verticale, donc on n'améliore plus la rapidité. Par contre, on détériore la précision dynamique (dépassement de plus en plus important)

L'erreur $\varepsilon(p)$ est donnée par :

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2 + 2\zeta\omega_0p}{p^2 + 2\zeta\omega_0p + \omega_0^2}X(p) - \frac{\frac{A}{\tau}}{p^2 + 2\zeta\omega_0p + \omega_0^2}W(p) \quad (6.7)$$

Lorsque $x(t)$ est un échelon unité, et en l'absence de perturbation $p(t)$, le régime permanent est donné par :

$$y(\infty) = A$$

l'erreur de position par : $\varepsilon_1(\infty) = 0$

et l'erreur de traînage par : $\varepsilon_2(\infty) = \frac{1}{AK}$.

Comme dans le cas précédent, ce résultat était attendu car le modèle du système en boucle ouverte est de classe 1.

On constate que la présence d'un intégrateur dans la chaîne directe, a permis d'avoir un système précis par rapport à l'échelon, et que l'erreur de traînage est constante.

cas 2 $\rightarrow K > \frac{1}{4A\tau}$: le système est pseudo-périodique, avec un premier dépassement :

$$D_1\% = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{4AK\tau - 1}}} \quad (6.8)$$

et un temps d'atteinte du premier dépassement :

$$t_1 = \frac{\tau}{\sqrt{4AK\tau - 1}} \quad (6.9)$$

Maintenant, lorsque l'entrée $x(t) = 0$ et que la perturbation $p(t)$ est un échelon unité, on peut écrire :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-\frac{A}{\tau}}{p^2 + 2\zeta\omega_0p + \omega_0^2} = -\frac{A}{K}$$

et en régime permanent on a : $y(\infty) = \frac{A}{K}$. On peut donc rendre le système moins sensible aux perturbations, et $\varepsilon_3(\infty) \rightarrow 0$, en augmentant (de manière infinie) le gain K .

Une augmentation de ce dernier, entraîne une diminution du facteur d'amortissement ζ , ce qui augmente le caractère oscillatoire de la réponse jusqu'à l'instabilité.

6.3.3 Conclusion

Le correcteur à action proportionnelle ne permet pas de réaliser de bonnes performances en termes de **précision statique et dynamique et en rejet de perturbation**. Un faible gain K donne généralement un système stable, mais une erreur de position importante. Par contre, une grande valeur de K , donne une meilleure erreur de position mais des mauvaises performances en transitoire : plus K augmente, plus on tend vers l'instabilité.

6.4 Correcteurs à actions proportionnelle et intégrale (PI)

Définition 6.2. Le correcteur à actions proportionnelle et intégrale (PI) est défini par l'équation différentielle suivante :

$$K_P \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + K_I \varepsilon(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

où $\varepsilon(t)$ est le signal d'entrée du correcteur (ou signal d'erreur) et $u(t)$ est le signal de sortie du correcteur (ou signal de commande).

On peut naturellement écrire la fonction de transfert de ce correcteur PI :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_P + \frac{K_I}{p} = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) = \boxed{\frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)} \quad (6.10)$$

avec $K = K_P$ et $T_i = \frac{K_P}{K_I}$. ■

Ce correcteur (de classe 1) représente l'association de deux actions (P et I) et est représenté par le schéma fonctionnel de la figure 6.4 :

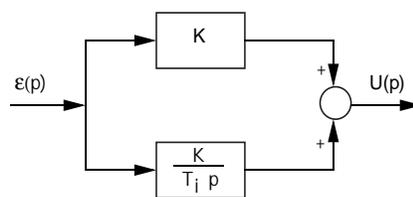


figure 6.4: Schéma fonctionnel d'un correcteur PI

6.4.1 Boucle fermée

Le schéma général de la boucle fermée est donné par :

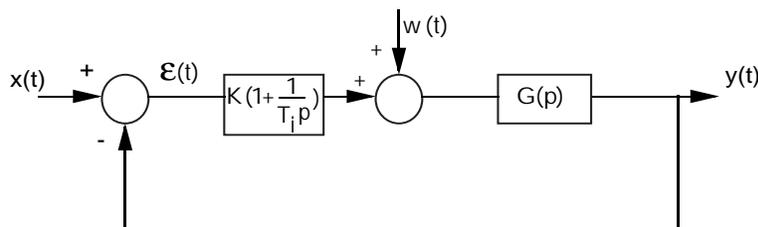


figure 6.5: Correction proportionnelle-intégrale

L'expression de la boucle fermée est :

$$Y(p) = \frac{K(1 + T_i p)G(p)}{T_i p + K(1 + T_i p)G(p)} X(p) + \frac{G(p)T_i p}{T_i p + K(1 + T_i p)G(p)} W(p)$$

Soit

$$Y(p) = \frac{\mathbf{numPI}(p) \mathbf{denG}(p)}{\mathbf{numPI}(p) \mathbf{numG}(p) + \mathbf{denPI}(p) \mathbf{denG}(p)} X(p) + \frac{\mathbf{numG}(p) \mathbf{denPI}(p)}{\mathbf{numG}(p) \mathbf{numPI}(p) + \mathbf{denPI}(p) \mathbf{denG}(p)} W(p)$$

6.4.2 Performances

6.4.2.1 Correcteur PI et système de classe zéro

Considérons l'exemple du système du premier ordre précédent en présence d'un correcteur PI, et d'une perturbation $P(p)$ représenté par la figure 6.6.

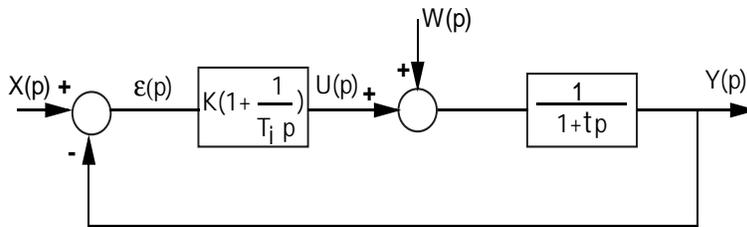


figure 6.6: Correcteur PI et système d'ordre 1 & classe 0

La sortie $Y(p)$ est donnée par :

$$Y(p) = \frac{\omega_0^2(1 + T_i p)}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2} X(p) + \frac{\frac{1}{\tau} p}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2} W(p) \quad (6.11)$$

où $\omega_0^2 = \frac{K}{T_i \tau}$ et $\zeta = \frac{1+K}{2} \sqrt{\frac{T_i}{K\tau}}$.

L'erreur $\varepsilon(p)$ est donnée par :

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2 + \frac{1}{\tau} p}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2} X(p) - \frac{\frac{1}{\tau} p}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2} W(p) \quad (6.12)$$

Lorsque $x(t)$ est un échelon unité et $w(t) = 0$, l'erreur de position vaut :

$$\varepsilon_1(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p(\varepsilon_1(p)) = 0 \quad (6.13)$$

de même, lorsque $x(t) = 0$ et $w(t)$ est un échelon unité, l'erreur de position devient :

$$\varepsilon_2(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (0 - y(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p(\varepsilon_2(p)) = 0 \quad (6.14)$$

ce qui montre que le système est précis et insensible aux perturbations.

Pour étudier le comportement du système, posons $\alpha = \frac{\tau}{T_i}$. Le coefficient d'amortissement s'écrit dès lors :

$$\zeta = \frac{1+K}{2\sqrt{K}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (6.15)$$

Le comportement du système dépend donc de K et de α .

Si $\alpha = 1$ (ou bien encore $\tau = T_i$), c'est à dire si le zéro du correcteur est égal au pôle du système, alors $\zeta \geq 1$ puisque $1+K \geq 2\sqrt{K}$. Par conséquent, si $\alpha = 1$, le système est apériodique. Les pôles du système en boucle fermée sont les racines de l'équation caractéristique :

$$p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \quad (6.16)$$

c'est à dire : $p_1 = -\frac{1}{\tau}$ et $p_2 = -\frac{K}{\tau}$.

La sortie du système devient alors :

$$Y(p) = \frac{K}{K + \tau p} X(p) + \frac{\tau p}{(1 + \tau p)(K + \tau p)} W(p) \quad (6.17)$$

On constate que la fonction de transfert en boucle fermée, en l'absence de perturbation, est celle d'un système du premier ordre de gain statique unité et de constante de temps $\frac{\tau}{K}$; on est donc en présence d'un système précis et rapide.

On constate aussi que les pôles p_1 et p_2 sont confondus si $K = 1$, ce qui correspond à $\zeta = 1$.

On remarque par ailleurs que si $\alpha < 1$, alors $\zeta > 1$, pour tout K .

Pour finir, si $\alpha > 1$, alors :

- $\zeta > 1$ si $K \geq 2\sqrt{\alpha(\alpha - 1)} - (1 - 2\alpha)$
- $\zeta < 1$ si $K < 2\sqrt{\alpha(\alpha - 1)} - (1 - 2\alpha)$

La figure 6.7 montre la réponse du système de la figure 6.6 pour une entrée $x(t)$ en échelon unité et une perturbation $w(t)$ nulle, dans le cas où $\alpha = 1$.

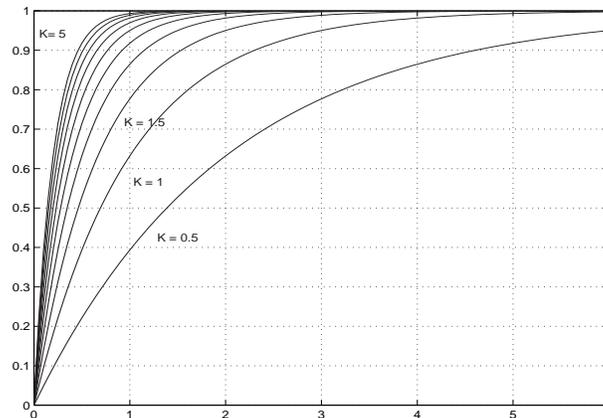


figure 6.7: Réponse du système 6.6 pour $\alpha = 1$ et K variable

La figure 6.8 montre la réponse du système de la figure 6.6 pour une entrée $x(t)$ en échelon unité et une perturbation $w(t)$ nulle, dans le cas où $\alpha < 1$.

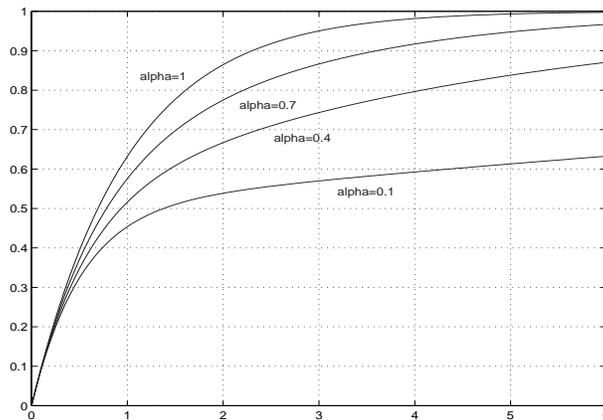


figure 6.8: Réponse du système 6.6 pour $\alpha < 1$ et $K = 1$

La figure 6.9 montre la réponse du système de la figure 6.6 pour une entrée $x(t)$ en échelon unité et une perturbation $w(t)$ nulle, dans le cas où $\alpha > 1$. On constate qu'il existe un dépassement pour les différentes valeurs de K , même lorsque $K < 2\sqrt{\alpha(\alpha - 1)} - (1 - 2\alpha)$, c'est à dire même lorsque $\zeta > 1$; cela est dû à la présence d'un zéro dans la fonction de transfert entre l'entrée et la sortie du système.

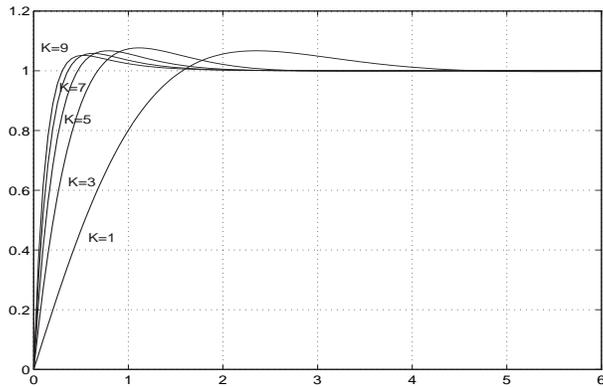


figure 6.9: Réponse du système 6.6 pour $\alpha = 2$ et K variable

6.4.2.2 Correcteur PI et système de classe un

Considérons à présent un système de classe 1 associé à un correcteur PI. Le schéma fonctionnel du système asservi est donné par la figure 6.10.

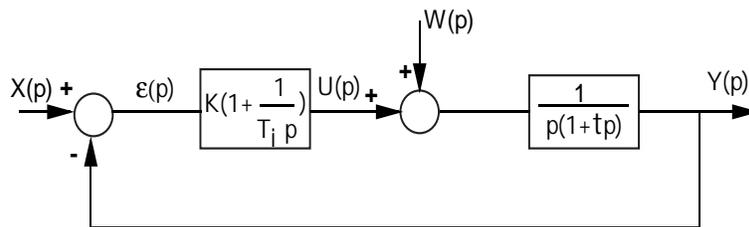


figure 6.10: Correcteur PI et système de classe 1

La fonction de transfert, en boucle ouverte et en l'absence de perturbation est donnée par :

$$C(p)G(p) = \frac{K(1 + T_i p)}{T_i p^2(1 + \tau p)} \quad (6.18)$$

et en boucle fermée par :

$$F(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)} = \frac{K(1 + T_i p)}{T_i p^2(1 + \tau p) + K(1 + T_i p)} \quad (6.19)$$

Ce système du troisième ordre peut être instable. Les conditions de stabilité sont données par le critère de Routh :

$$\begin{array}{c|ccc} p^3 & T_i \tau & K T_i & 0 \\ p^2 & T_i & K & 0 \\ p^1 & \frac{K T_i^2 - K T_i \tau}{T_i} & 0 & 0 \\ p^0 & K & 0 & 0 \end{array}$$

La condition nécessaire et suffisante de stabilité (si K , T_i et τ sont tous trois positifs) est que $T_i > \tau$. Le zéro du correcteur ($\frac{1}{T_i}$) doit donc être plus proche de l'axe imaginaire que le pôle du système ($\frac{1}{\tau}$). La stabilité du système impose donc une contrainte sur le choix du correcteur *PI*.

Si on utilisait une action intégrale seule, le système en boucle fermée serait instable, comme le montre l'absence de terme en p , au dénominateur de la fonction de transfert : $F(p) = \frac{1}{T_i \tau p^3 + T_i p^2 + 1}$. L'action intégrale n'est donc pas utilisée seule.

La sortie du système de la figure 6.10 est donnée par :

$$Y(p) = F(p)X(p) + H(p)W(p) \quad (6.20)$$

où : $F(p) = \frac{K(1 + T_i p)}{T_i p^2(1 + \tau p) + K(1 + T_i p)}$ et $H(p) = \frac{T_i p}{T_i p^2(1 + \tau p) + K(1 + T_i p)}$

et l'erreur par :

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= X(p) - Y(p) \\ &= \underbrace{\frac{T_i p^2(1 + \tau p)}{T_i p^2(1 + \tau p) + K(1 + T_i p)} X(p)}_{\varepsilon_1(p)} - \underbrace{\frac{T_i p}{T_i p^2(1 + \tau p) + K(1 + T_i p)} W(p)}_{\varepsilon_2(p)} \end{aligned} \quad (6.21)$$

On constate donc que lorsque $x(t)$ est un échelon ou une rampe, et en l'absence de perturbation $w(t)$, et sous condition de stabilité ($T_i > \tau$), alors : $\varepsilon_1(\infty) = 0$.

De même, lorsque la perturbation $w(t)$ est un échelon, et en l'absence de signal d'entrée $x(t)$: $\varepsilon_2(\infty) = 0$.

Le système ainsi corrigé peut donc être qualifié de précis et d'insensible aux perturbations.

6.4.3 Conclusion

L'introduction d'un correcteur *PI* permet d'améliorer la précision et de rejeter les perturbations de type échelon. Par contre, ce type de correcteur possède certaines limitations sur l'amélioration de la rapidité et peut même introduire une instabilité du système en boucle fermée.

6.5 Correcteurs à actions proportionnelle et dérivée (PD)

Définition 6.3. Un correcteur *PD* peut être décrit par une équation différentielle de type :

$$\begin{aligned} u(t) &= K_p \varepsilon(t) + K_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \\ &= K \left(\varepsilon(t) + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (6.22)$$

avec $K = K_p$ et $KT_d = K_d$.

et où $\varepsilon(t)$ est l'entrée du correcteur et $u(t)$ est sa sortie (la commande).

La fonction de transfert de ce type de correcteur est donnée par :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K(1 + T_d p).$$

■

Ce type de correcteur possède la structure suivante :

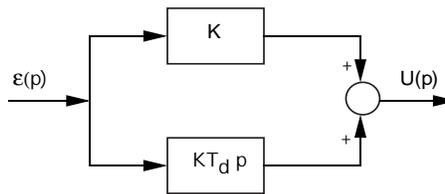


figure 6.11: Schéma fonctionnel d'un correcteur *PD*

T_d représente le temps d'avance de la sortie du correcteur *PD* sur celle du correcteur *P*, dans le cas d'une entrée en rampe.

Considérons à titre d'exemple, le système de classe un précédent, de fonction de transfert : $G(p) = \frac{1}{1(1 + \tau p)}$, associé, dans une boucle de régulation, à un correcteur *PD*. Ce système est représenté par la figure 6.12.

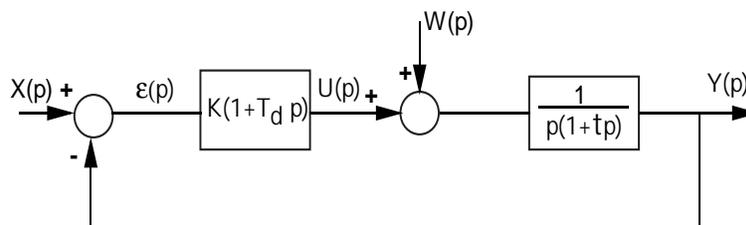


figure 6.12: Correcteur *PD* et système de classe un

La sortie $Y(p)$ est donnée par :

$$Y(p) = \frac{\frac{K}{\tau}(1 + T_d(p))}{p^2 + \left(\frac{1+KT_d}{\tau}\right)p + \frac{K}{\tau}}X(p) + \frac{\frac{1}{\tau}}{p^2 + \left(\frac{1+KT_d}{\tau}\right)p + \frac{K}{\tau}}W(p) \quad (6.23)$$

ce que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$Y(p) = \frac{\omega_0^2(1 + T_dp)}{p^2 + 2\zeta\omega_0p + \omega_0^2}X(p) + \frac{\frac{1}{\tau}}{p^2 + 2\zeta\omega_0p + \omega_0^2}W(p) \quad (6.24)$$

où : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\tau}}$ et $\zeta = \frac{1+KT_d}{2\sqrt{K\tau}}$.

L'erreur $\varepsilon(p)$ est donnée par :

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2 + \omega_0(2\zeta - T_d)p}{p^2 + 2\zeta\omega_0p + \omega_0^2}X(p) + \frac{\frac{1}{\tau}}{p^2 + 2\zeta\omega_0p + \omega_0^2}W(p) \quad (6.25)$$

Le comportement dynamique du système dépend de ζ , et on peut remarquer que :

$$\zeta^2 - 1 = \frac{(1 + KT_d)^2 - 4K\tau}{4K\tau} \quad (6.26)$$

ce qui conduit à :

1. Si $\tau < T_d$ alors $\zeta > 1$.
2. Si $\tau \geq T_d$ alors $\begin{cases} \zeta \geq 1, & \text{si } K \geq \frac{2\tau - T_d + 2\sqrt{\tau(\tau - T_d)}}{T_d^2} \\ \zeta < 1, & \text{si } K < \frac{2\tau - T_d + 2\sqrt{\tau(\tau - T_d)}}{T_d^2} \end{cases}$
3. Si $\tau = T_d$, le système possède deux pôles : $p_1 = -K$ et $p_2 = -\frac{1}{\tau}$

L'équation 6.25 montre que l'erreur statique, pour une entrée $x(t)$ en échelon, est nulle. Par contre, cette erreur statique, pour une perturbation $w(t)$ en échelon, vaut : $-\frac{1}{\tau\omega_0^2} = -\frac{1}{K}$.

Ce dernier résultat peut être comparé à celui de l'action proportionnelle.

Le correcteur *PD* permet donc d'agir sur le transitoire du système de classe un. Le rejet de perturbation impose d'augmenter K , ce qui rend le système apériodique.

Lorsque $\tau = T_d$, le système devient (en l'absence de perturbation), un système du premier ordre de fonction de transfert $F(p) = \frac{K}{K+p}$, de constante de temps $\frac{1}{K}$, et précis vis à vis d'une sollicitation $x(t)$ en échelon.

Quelques commentaires sur l'action dérivée :

L'action dérivée est décrite par :

$$u(t) = K_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (6.27)$$

ou bien encore :

$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_dp \quad (6.28)$$

Cette action n'a d'effet que lorsqu'il y a variation de l'erreur ; elle n'a aucun effet sur le fonctionnement en régime permanent. Les correcteurs *PD* permettent donc de modifier le régime transitoire

et sont utilisés pour réduire les oscillations et ainsi garantir la stabilité des systèmes.

L'action dérivée décrite par les équations 6.27 et 6.28 est idéale, et ne peut pas être réalisée dans la pratique. Elle est généralement approchée par une fonction de transfert de la forme (PD filtré) :

$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K(1 + T_d p)}{1 + \frac{T_d}{N} p} \quad (6.29)$$

avec $N \geq 3$

ou bien encore par une correction à avance de phase de la forme :

$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_d p + 1}{\alpha K_d p + 1} \quad (6.30)$$

avec $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{20}$.

De plus, si un changement brutal de point de fonctionnement se produit (variation en échelon), elle génère une réponse impulsive, qui entraîne une saturation du correcteur. Ces inconvénients peuvent être évités en utilisant la dérivée de la sortie $y(t)$ au lieu de celle de $\varepsilon(t)$. Ce qui conduit à modifier le schéma-blocs de synthèse en imbriquant plusieurs boucles (correction tachymétrique).

6.6 Correcteurs à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

Définition 6.4. Ce type de correcteur est défini par l'équation différentielle suivante :

$$u(t) = K_P \varepsilon(t) + K_I \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + K_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (6.31)$$

ou bien encore par la fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_P + \frac{K_I}{p} + K_d p = \boxed{K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)}. \quad (6.32)$$

■

6.6.1 Boucle fermée

Le schéma général de la boucle fermée est donné par :

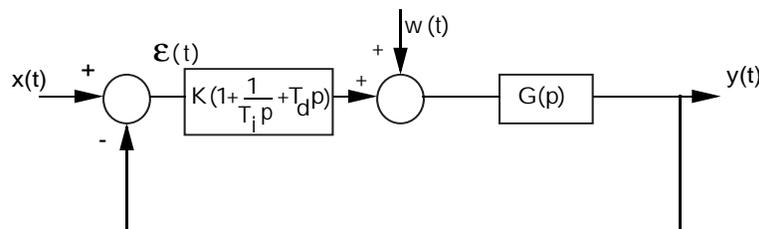


figure 6.13: Correction proportionnelle-intégrale-dérivée

L'expression de la boucle fermée est :

$$Y(p) = \frac{\text{numPID}(p) \text{ numG}(p)}{\text{numPID}(p) \text{ numG}(p) + \text{denPID}(p) \text{ denG}(p)} X(p)$$

$$+ \frac{\text{numG}(p) \text{ denPID}(p)}{\text{numG}(p) \text{ numPID}(p) + \text{denPID}(p) \text{ denG}(p)} W(p)$$

Ce type de correcteur permet de réaliser des performances telles que la stabilité, la rapidité et la précision grâce à la combinaison des trois actions P , I et D (la structure peut être série, parallèle ou mixte et étudier leurs différences déborde du cadre de ce cours). Ceci peut se faire en ajustant les paramètres associés à ces actions.

6.6.2 conclusion

L'introduction d'un correcteur PID permet de **réunir** les différents avantages de chaque action, toutefois, son réglage, donc le « poids » à donner à chaque action, est plutôt délicat.

6.7 A propos de la commande...

Jusqu'à présent, nous ne nous sommes préoccupé que des objectifs de performances sans tenir compte de l'aspect de la commande. Il s'agit du signal d'entrée du système et sa nature ne peut pas être négligée ! En effet, le correcteur modifie (génère) le signal de commande qui va être appliqué au processus. Le fait de dériver ou bien d'intégrer ce signal n'est pas sans conséquences...

Un système évolue à l'intérieur de limites qu'il faut connaître et respecter pour être assuré de la validité des hypothèses de linéarité. L'étude du signal de commande $u(t)$ est bien utile pour éviter des surcharges excessives sur les actionneurs, ou des consommations d'énergie disproportionnées avec le bénéfice à en attendre. On ne peut donc pas appliquer (surtout sur un système réel) une commande excessive : il s'agit donc de faire un compromis commande / performances.

6.8 Méthodes temporelles de synthèse des correcteurs

La synthèse des correcteurs consiste à en déterminer les paramètres afin de satisfaire un certain nombre de performances en boucle fermée. Ces dernières peuvent être résumées par :

- Stabilité du système en boucle fermée.
- Insensibilité aux perturbations (rejet de perturbations).
- Précision de la réponse du système en boucle fermée.
- Rapidité.
- Le signal de commande doit être limité en énergie.

Généralement il n'est pas possible de réaliser tous ces objectifs puisqu'ils sont conflictuels. Par exemple, un correcteur PID qui minimise l'effet d'une perturbation, tend à donner un dépassement important. Tout est affaire de **compromis** ...

Il existe une grande quantité de méthodes de synthèse des correcteurs ; nous présenterons uniquement quelques méthodes expérimentales (qui seront utilisées en lors des séances de TP).

6.8.1 Méthode par réglages successifs

La démarche manuelle de réglage est la suivante :

- régler le gain \mathbf{P} jusqu'à la limite des d'oscillations.
- ajouter l'action Intégrale (action faible au départ : T_i grand).
- diminuer T_i jusqu'à la limite de l'instabilité.
- ajouter l'action Dérivée pour limiter les dépassements.
- augmenter progressivement T_d .

Cette méthode (longue et fastidieuse) est illustrée par le schéma 6.14 :

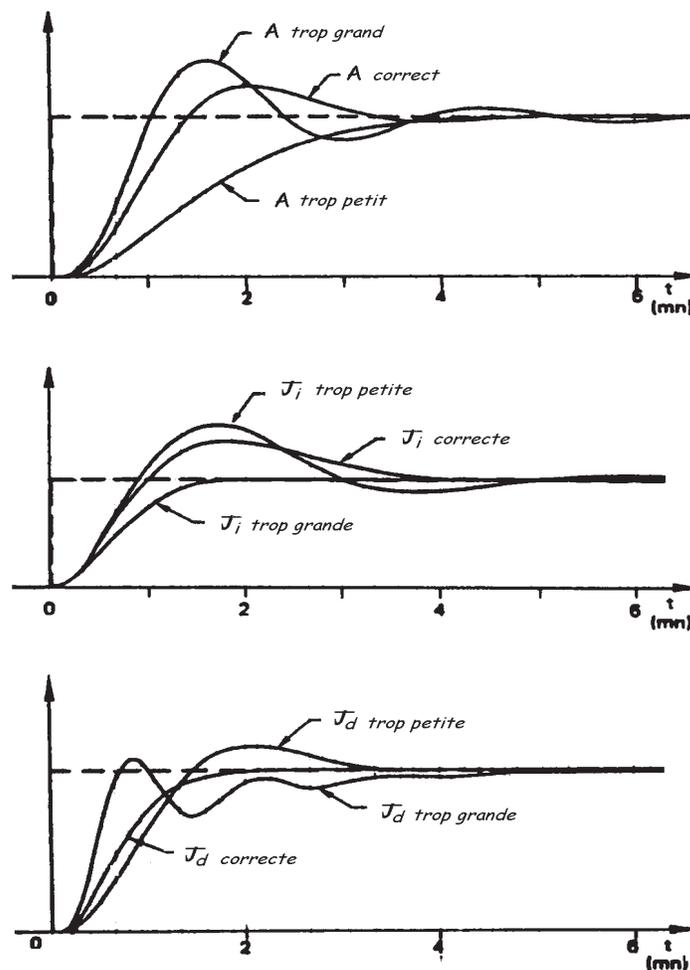


figure 6.14: Réglages successifs des PID

- Si K (A sur la figure) est grand, la correction est énergique donc rapide mais le risque de dépassements et d'oscillations s'accroît. Si K est petit, la correction est «molle» mais il y a moins de risques d'instabilité.
- L'action intégrale assure une erreur minimale ou nulle. T_i doit être *accordée* à la constante de temps dominante (qui mesure l'inertie du processus). Si T_i est trop petit, la commande «monte» trop vite sans laisser au système le temps de démarrer progressivement. Si T_i est trop grand, la commande est «molle» et le démarrage est trop lent.
- T_d réagit à la vitesse de variation de l'erreur. L'action dérivée permet d'améliorer la stabilité et la rapidité du système corrigé (régulé).

Plutôt que de procéder par essais successifs, Ziegler et Nichols ont proposé (dès 1941) des méthodes expérimentales (basée sur des essais indiciaux) permettant de déterminer les paramètres d'un correcteur *PID*.

Ces méthodes ont été mises au point à l'aide de simulations du comportement de divers modèles, représentant des systèmes physiques.

6.8.2 Méthode de Ziegler et Nichols en boucle ouverte

Elle consiste, à partir de la réponse indicielle d'un système aperiodique en boucle ouverte, à identifier le système et à ajuster les paramètres du régulateur.

On suppose que le système à réguler, de fonction de transfert $G(p)$, a donné la réponse indicielle (normalisée en amplitude) de la figure 6.15.

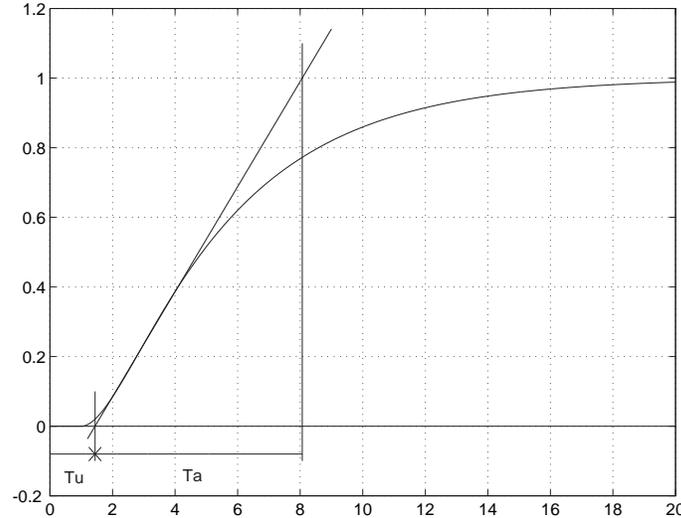


figure 6.15: Réponse Indicielle

On trace tout d'abord la tangente au point d'inflexion de la courbe de réponse indicielle, puis on relève les valeurs de T_u et T_a .

Cette réponse peut être approchée par : $G(p) = \frac{Ae^{-pT_u}}{1+pT_a}$

Les règles de Ziegler et Nichols ont conduit au tableau 6.1 :

Régulateur	K	T_i	T_d
P	$\frac{T_a}{T_u}$	∞	0
PI	$0.9 \frac{T_a}{T_u}$	$\frac{T_u}{0.3}$	0
PID	$1.2 \frac{T_a}{T_u}$	$2 T_u$	$0.5 T_u$

tableau 6.1: Méthode de Ziegler et Nichols (boucle ouverte)

Remarque 6.2. Certains processus (à gain statique élevé) nécessite une adaptation de la partie K (gain proportionnel) du correcteur PID . Une nouvelle version de ce tableau propose de diviser les valeurs de la colonne K par le gain statique A du système. ■

La fonction de transfert du correcteur PID obtenu est donc la suivante :

$$\begin{aligned}
 C(p) &= K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = 1.2 \frac{T_a}{T_u} \left(1 + \frac{1}{2T_u p} + 0.5T_u p \right) \\
 &= \frac{0.6T_a}{p} \left[\frac{2p}{T_u} + \left(\frac{1}{T_u} \right)^2 + p^2 \right]
 \end{aligned}$$

soit :

$$C(p) = \frac{0.6T_a}{p} \left(p + \frac{1}{T_u} \right)^2 \quad (6.33)$$

Ce correcteur possède un zéro double en $-\frac{1}{T_u}$ et un pôle simple à l'origine.

Lorsqu'il n'est pas possible d'ouvrir la boucle de régulation, Ziegler et Nichols proposent un essai en boucle fermée.

6.8.3 Méthode de Ziegler-Nichols en boucle fermée

La méthode de Ziegler et Nichols en boucle fermée consiste à déterminer la **limite de pompage** du système en boucle fermée. Le pompage est défini par l'apparition d'**oscillations entretenues** et en général indésirables.

Pour cela, on associe le système physique à un correcteur P , dans une boucle fermée .

On augmente ensuite la valeur du gain proportionnel K , jusqu'à l'apparition d'oscillations entretenues sur la sortie du système : on est en **limite de stabilité**, le phénomène de pompage est atteint (voir figure 6.16) .

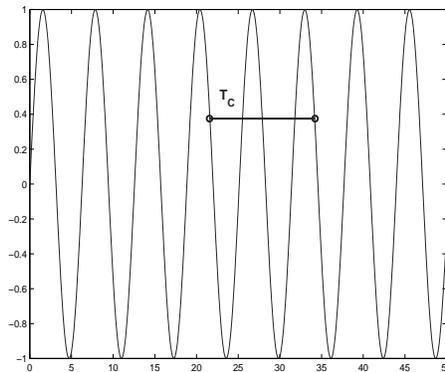


figure 6.16: Ziegler-Nichols en boucle fermée : pompage

On relève dès lors la valeur de K , notée K_c , qui a produit le pompage, ainsi que la valeur de la période T_c des oscillations.

Les valeurs des paramètres du régulateur sont donnés par le tableau 6.2.

Régulateur	K	T_i	T_d
P	$0.5 K_c$		
PI	$0.45 K_c$	$0.83 T_c$	
PD	$0.71 K_c$		$0.15 T_c$
PID	$0.6 K_c$	$0.5 T_c$	$0.125 T_c$

tableau 6.2: Méthode de Ziegler et Nichols (boucle fermée)

Dans ce cas, le correcteur *PID* obtenu a la fonction de transfert suivante :

$$\begin{aligned} C(p) &= K \left(1 + \frac{1}{T_i p + T_d p} \right) = 0.6 K_c \left(1 + \frac{1}{0.5 T_c p} + 0.12 T_c p \right) \\ &= \frac{1.2 K_c}{T_c p} [0.06 T_c^2 p^2 + 0.5 T_c p + 1] \end{aligned}$$

Remarque 6.3. Cette méthode est aussi appelée méthode 4 : 1. Elle est censé donner un réglage pour lequel la sortie présente des dépassements successivement divisés par 4 (exemple : $D_2 = \frac{D_1}{4}$).

- Il s'agit d'une méthode simple et rapide ;
- Un pompage entretenu peut causer des dommages aux actionneurs (exemple : pompe en TP niveau d'eau...);
- Cette méthode peut se révéler inefficace en présence d'un retard ;
- On ne prend en compte qu'un seul critère de réglage (4 : 1) ;
- Cette méthode permet d'effectuer des essais sans ouvrir la boucle de régulation (ce qui n'est pas négligeable en terme de coût économique au niveau industriel!).

■

6.8.4 Méthode de Chien, Hornes et Reswick

Chien, Hornes et Reswick ont également proposé une méthode de synthèse des correcteurs basée sur la même réponse apériodique en boucle ouverte que Ziegler et Nichols (donc en boucle ouverte). Leurs résultats sont résumés par le tableau 6.3. Ces résultats permettent d'obtenir un système en boucle fermée à réponse soit apériodique (régulation), soit avec un premier dépassement de l'ordre de 20% (poursuite).

		Comportement apériodique (+ régulation)	$D_1\% = 20\%$ (en poursuite)
<i>P</i>	<i>K</i>	$0.3 \frac{T_a}{T_u}$	$0.7 \frac{T_a}{T_u}$
<i>PI</i>	<i>K</i>	$0.6 \frac{T_a}{T_u}$	$0.7 \frac{T_a}{T_u}$
	T_i	$4T_u$	$2.3T_u$
<i>PID</i>	<i>K</i>	$0.95 \frac{T_a}{T_u}$	$1.2 \frac{T_a}{T_u}$
	T_i	$2.4T_u$	$2T_u$
	T_d	$0.42T_u$	$0.42T_u$

tableau 6.3: Méthode de Chien, Hornes et Reswick

Bien que ces méthodes aient pour vocation d'être appliquées à partir de relevés expérimentaux des réponses indicielles, on peut aussi les utiliser de manière analytique, comme le montre l'exemple qui suit.

Exemple : Ziegler-Nichols en BF par calcul

Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G(p) = \frac{1}{p(p+2)(p+3)}$$

On cherche à déterminer un correcteur *PID* pour ce système, à l'aide de la deuxième méthode de Ziegler et Nichols. Pour cela, on considère dans un premier temps que l'on associe le système de fonction de transfert $G(p)$ à un correcteur P , dans une boucle fermée à retour unitaire. On détermine ensuite la valeur du gain K_c du correcteur qui produit une limite de stabilité, de la manière suivante :

La fonction de transfert en boucle fermée est : $F(p) = \frac{K}{p^3+5p^2+6p+K}$.

Le critère de Routh appliqué à ce système donne :

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 6 & 0 \\ p^2 & 5 & K & 0 \\ p^1 & \frac{30-K}{5} & 0 & 0 \\ p^0 & K & 0 & 0 \end{array}$$

donc $K_c = 30$.

Afin de déterminer la période des oscillations T_c , on va en calculer la pulsation ω_c , en annulant simplement l'équation caractéristique associée à la fonction de transfert du système en boucle fermée : $(j\omega_c)^3 + 5(j\omega_c)^2 + 6j\omega_c + 30 = 0$ ou bien encore : $(30 - 5\omega_c^2) + j\omega_c(6 - \omega_c^2) = 0$ qui donne : $\omega_c^2 = 6$ et donc $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}$

Le correcteur *PID* proposé par Ziegler et Nichols a pour paramètres :

$$\begin{aligned} K &= 0.6K_c = 1.8 \\ T_i &= 0.5T_c = 1.280 \\ T_d &= 0.12T_c = 0.308 \end{aligned}$$

6.9 Stratégies de Régulations

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré qu'une seule stratégie de régulation : un schéma avec une seule boucle de régulation. Souvent, certains processus réels exigent une autre stratégie (une autre structure de schéma bloc). Parmi ceux-ci, on peut citer :

- La **régulation par anticipation** : elle sert à compenser l'effet d'une variation d'une perturbation avant son arrivée (surtout utilisée en présence de plusieurs signaux de commande). Par exemple, dans un réacteur mélangé, il s'agit de maintenir constant une certaine concentration par modulation du débit d'un réactif délivré par une pompe doseuse proportionnellement au débit de l'eau de remplissage. La boucle fermée standard assure la régulation du débit de sortie ;
- La **régulation de rapport** : c'est une version simplifiée d'une régulation par anticipation. On maintient à une valeur constante préétablie le rapport entre 2 grandeurs (généralement

- 2 débits). Par exemple, on trouve fréquemment les rapports entre le débit d'eau et celui du réactif ajouté, le rapport entre le débit de l'eau usée (épuration) et celui des boues recyclées, le rapport entre le débit d'un combustible et celui de l'air de combustion ;
- La **régulation en cascade** : il s'agit d'un système combiné constitué en général de plusieurs régulateurs. le signal de sortie de chaque régulateur se comporte comme le signal de consigne du suivant. Elle permet de corriger rapidement les fluctuations des signaux d'entrée dès son apparition et avant d'intervenir dans la boucle «classique» de régulation, notamment pour les systèmes lents. Par exemple, on a intérêt à limiter les variations de la température du fluide dont on veut réguler le débit dans une digestion anaérobie ;
 - La **régulation à boucles multiples** (retour tachymétrique) : on asservit plusieurs signaux de manière indépendantes. Par exemple, il est intéressant de réguler séparément le courant de la tension d'un moteur ;
 - La **régulation à modèle interne** et prédicteur de Smith : il s'agit d'un régulateur de type PI complété par un régulateur chargé de compenser le retard. Son nom vient du fait que ce régulateur comporte le modèle du procédé. Le retard est «délocalisé» (extrait de la boucle principale de régulation et peut ainsi être compensé ;
 - La **régulation adaptative** : le régulateur modifie («adapte») ses paramètres en fonction des évolutions passées de la sortie. Souvent utilisée dans les systèmes à composition chimique (régulation de pH) ;
 - La **commande robuste** : permet de garantir un niveau de performances élevé malgré les variations de paramètres et les perturbations sur un système ; malgré
 - etc...

6.10 Limitation et Faiblesse du correcteur PID

Les limitations de la régulation PID à boucle unique sont principalement dues aux retards excessifs, aux variations importantes des paramètres des systèmes, aux non-linéarités, etc...

Les solutions qui permettent de réduire l'effet de ces inconvénients peuvent être arbitrairement classées comme suit :

- choix d'un autre critère de mise au point (exemple : critère IAE, intégrale de l'écart minimal plutôt que décroissance 4 : 1) ;
- adaptation des paramètres de régulation ;
- autre stratégie de régulation (voir §6.9) ;
- modification de l'équipement (capteurs plus performants)
- compensation des retards (prédicteur de Smith)
- compensation des non-linéarités
- etc...

Remarque 6.4. Toutes ces considérations sont relatives au degré de précision et à la marge de tolérance désirée. Par exemple, une variation importante du niveau d'eau dans un bassin de rétention sera moins importante qu'une variation de la température d'un réacteur. ■

Chapitre 7

Identification

Sommaire

7.1	Introduction	80
7.2	Présentation du problème	81
7.3	Quelques méthodes	82

7.1 Introduction

Dans les cours précédents, nous avons supposé que la fonction de transfert du système à réguler (ou à asservir) était *connue*. Le but de ce chapitre est de présenter quelques méthodes temporelles permettant de trouver cette fonction de transfert afin de pouvoir ensuite lui appliquer les techniques de synthèse des correcteurs PID.

Identifier un système, c'est déterminer, à partir des connaissances et des mesures disponibles, la relation de cause à effet qui existe entre ses grandeurs d'entrée et de sortie.

Les objectifs de cette identification sont multiples :

- permettre la prédiction du comportement du système, pour toute situation dans laquelle il pourra se trouver (ceci peut être réalisé à l'aide de simulations).
- déterminer des lois de commande (en calculant un correcteur).
- surveiller le comportement du système (diagnostic).

La détermination du modèle ou de la relation qui lie les entrées aux sorties peut se faire de deux manières :

- théoriquement : à partir d'une connaissance a priori du système (connaissance phénoménologique du processus). Le modèle obtenu est dit **modèle de connaissance**.
- expérimentalement : on considère alors le système à identifier comme une *boite noire* et, en observant ses signaux d'entrée et de sortie, on cherche à établir le modèle mathématique qui décrit au mieux le comportement du système. Le modèle obtenu est dit **modèle de représentation**.

On est amené très souvent à combiner les deux méthodes précédentes.

L'identification des systèmes a pour objectif la détermination des paramètres du modèle, à partir de la connaissance expérimentale des entrées et des sorties.

7.2 Présentation du problème

On cherche donc à donner une représentation mathématique à un processus réel (appelé objet). Ce processus est accessible au travers de ses manifestations extérieures (entrées-sorties). Identifier un système réel c'est déterminer un autre système : le modèle. Dans tous cas, le modèle sera une image approximative du système réel.

7.2.1 Procédure générale d'identification

On peut distinguer plusieurs étapes dans l'élaboration d'un modèle. La procédure générale d'une identification est présentée par le schéma de la figure 7.1 : en fonction des objectifs de l'identification et à partir des connaissances a priori et de mesures, on obtient un modèle du système, qu'il convient de valider (en comparant par exemple, les réponses du système et du modèle).

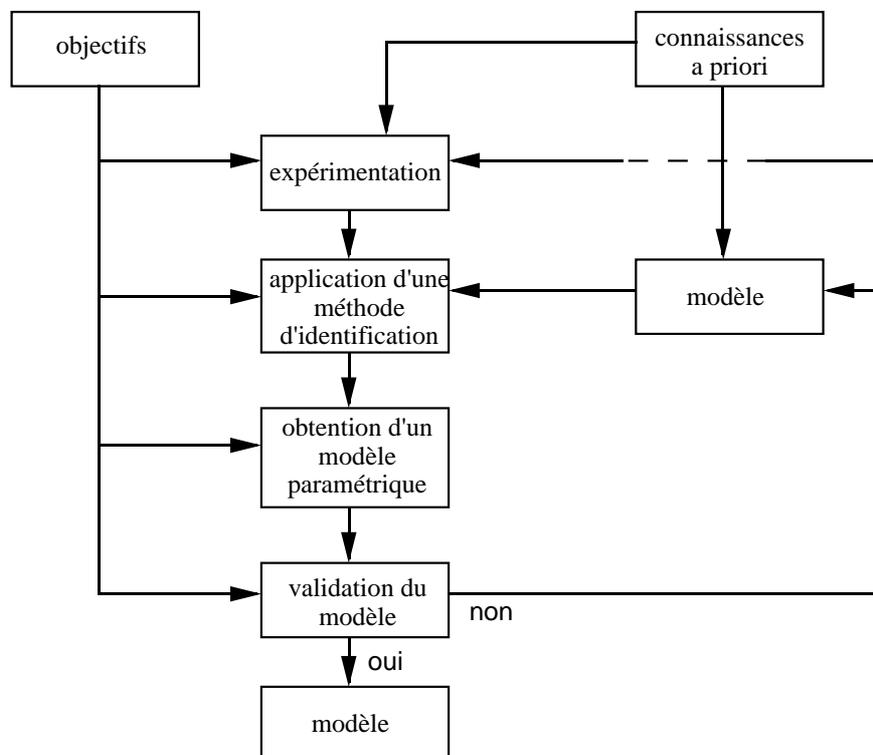


figure 7.1: Procédure générale d'identification

7.2.2 Différents types de représentation

Il existe deux représentations des systèmes linéaires invariants :

- **Représentation non paramétrique** : il s'agit de la représentation du comportement d'un système à l'aide d'un diagramme fréquentiel (Bode, Nyquist, Black) ou d'une réponse temporelle (indicielle, ...).
- **Représentation paramétrique** : il s'agit d'une représentation mathématique, définie par un nombre fini de coefficients (fonction de transfert, équation différentielle, ...).

7.3 Quelques méthodes

Ces méthodes sont basées sur l'interprétation de réponses temporelles du système à identifier.

7.3.1 Systèmes du premier ordre

7.3.1.1 Systèmes de fonction de transfert $G(p) = \frac{K}{1+\tau p}$

La réponse indicielle (échelon unitaire) d'un tel système est donnée par l'équation 7.1, et représentée par la figure 7.2.

$$y(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (7.1)$$

- Le gain statique K est déterminé par le régime permanent, c'est à dire par l'asymptote à la courbe de réponse indicielle en l'infini.
- La constante de temps τ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine, avec l'asymptote horizontale. C'est aussi l'abscisse du point d'ordonnée $0.632K$.

Ces résultats sont démontrés dans le chapitre consacré aux systèmes du premier ordre.

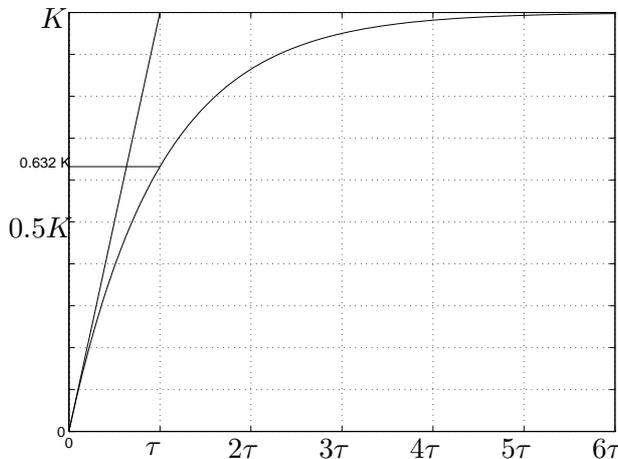


figure 7.2: Réponse indicielle d'un système de fonction de transfert : $G(s) = \frac{K}{1+\tau p}$

7.3.1.2 Systèmes de fonction de transfert $G(p) = \frac{Kp}{1+\tau p}$

La réponse indicielle (échelon unitaire) d'un tel système est donnée par l'équation 7.2, et représentée par la figure 7.3.

$$y(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.2)$$

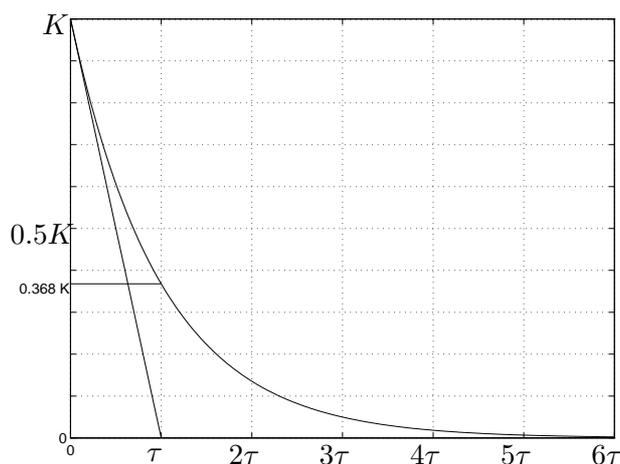


figure 7.3: Réponse indicielle d'un système de fonction de transfert : $G(p) = \frac{Kp}{1+\tau p}$

- Le gain statique K est déterminé par l'abscisse à l'origine.
- La constante de temps τ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine, avec l'axe des temps. C'est aussi l'abscisse du point d'ordonnée $0.368K$.

7.3.1.3 Systèmes du premier ordre retardé

Il s'agit des systèmes dont la fonction de transfert est : $G(p) = \frac{Ke^{-\frac{t}{T}}}{1+Tp}$.

La réponse indicielle d'un tel système est donnée par l'équation 7.3 et représentée par la figure 7.4.

$$y(t) = K \left[1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}} \right] \quad (7.3)$$

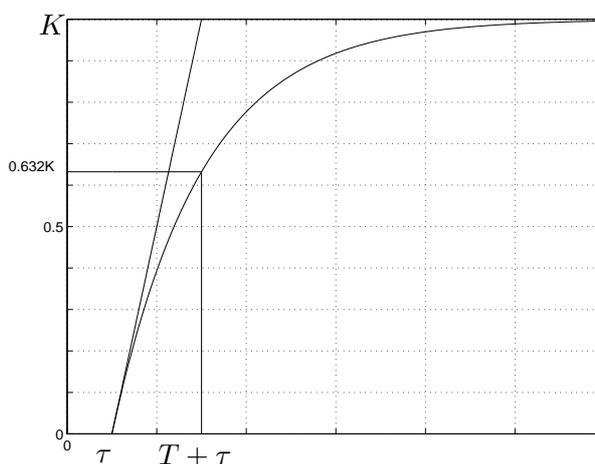


figure 7.4: Réponse indicielle d'un système retardé

7.3.2 Systèmes du deuxième ordre

7.3.2.1 Systèmes pseudo-périodiques

Dans le cas des systèmes du deuxième ordre pseudo-périodiques, les paramètres à identifier sont :

- le facteur d'amortissement ζ

- la pulsation propre non amortie ω_0
- le gain statique K

La réponse à un échelon unité est représenté par la figure 7.5, où :

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \tag{7.4}$$

$$D_1\% = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{7.5}$$

Le gain K est déterminé par le régime permanent. La connaissance de t_1 et $D_1\%$ permet de calculer ζ et ω_0 .

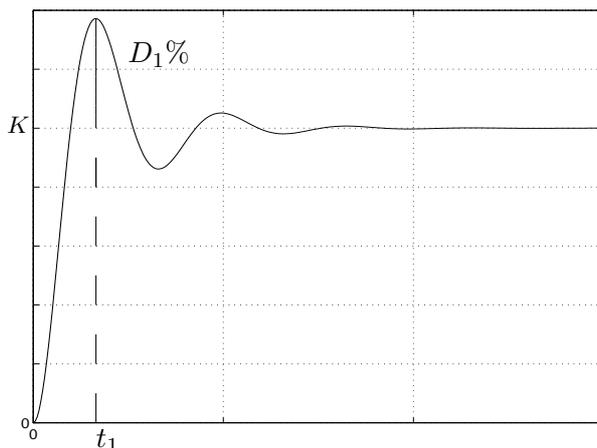


figure 7.5: Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre

Les équations 7.4 et 7.5 permettent d'écrire :

$$\frac{\ln(D_1)}{\pi} = \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \gamma$$

soit :

$$\gamma^2 = \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}$$

ou bien encore :

$$\zeta^2 = \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2}$$

soit :

$$\boxed{\zeta = \frac{|\gamma|}{\sqrt{1+\gamma^2}}} \tag{7.6}$$

et :

$$\omega_0 = \frac{\pi}{t_1 \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{t_1 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2}}}$$

soit :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{\pi \sqrt{1+\gamma^2}}{t_1}} \tag{7.7}$$

7.3.2.2 Systèmes apériodiques

Méthode du point d'inflexion Cette méthode est valable quelles que soient les valeurs des constantes de temps τ_1 et τ_2 . Son utilisation est donc plus générale que la précédente, mais elle est souvent moins précise.

Pour la simplicité de la présentation, prenons le cas d'un système de gain $K = 1$, dont la réponse indicielle est donnée par la figure 7.6.

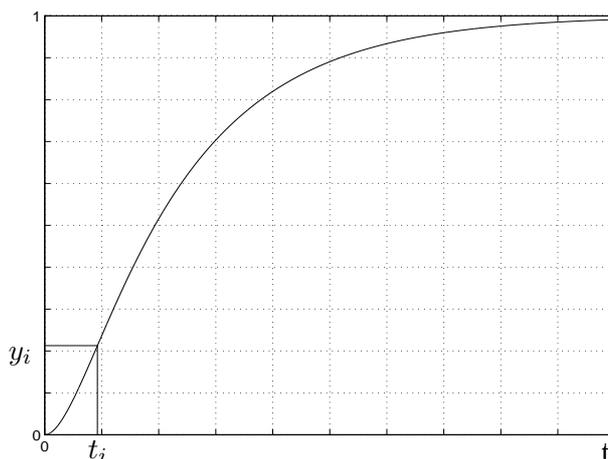


figure 7.6: Méthode du point d'inflexion

La réponse indicielle est donnée par :

$$y(t) = K \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \quad (7.8)$$

On cherche à déterminer τ_1 et τ_2 à partir des coordonnées du point d'inflexion.

On a : $\frac{dy}{dt} = \frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\tau_1 - \tau_2} - \frac{e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1 - \tau_2}$ et donc : $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\tau_1(\tau_1 - \tau_2)} + \frac{e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2(\tau_1 - \tau_2)}$.

L'inflexion se produit quand $\frac{d^2y}{dt^2}$ s'annule, c'est à dire pour :

$$t_i = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \ln \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right) \quad (7.9)$$

En posant $x = \frac{\tau_2}{\tau_1}$, et en remplaçant t_I dans $y(t)$, on obtient :

$$y_i = 1 - x^{\frac{x}{1-x}} (1+x) \quad (7.10)$$

y_i est relevé sur la courbe de réponse indicielle. Pour déterminer x , on utilise le tracé de $f(x) = 1 - x^{\frac{x}{1-x}} (1+x) = y_i$ (voir figure 7.7). Une fois x connu, on peut déterminer τ_1 , en mesurant la pente de la tangente au point d'inflexion sur la réponse indicielle, puisque cette pente est donnée par :

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)_{t_I} = \frac{1}{\tau_1} x^{\frac{x}{1-x}} \quad (7.11)$$

La détermination de τ_2 se fait en écrivant : $\tau_2 = x\tau_1$.

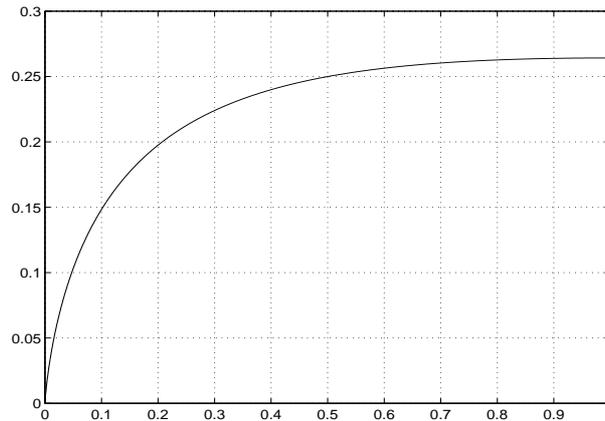


figure 7.7: Evolution de y_I (axe vertical) en fonction de x

7.3.3 Systèmes d'ordre supérieur à deux

7.3.3.1 Méthode de Strejc

Cette méthode, mise au point par Strejc dans les années 1960, a pour but de mettre à la disposition de l'automaticien, une méthode pratique d'identification. Cette méthode, facile à mettre en oeuvre, donne des résultats corrects, de précision valable pour les applications industrielles.

Le domaine d'application de cette méthode est limité aux systèmes apériodiques d'ordre supérieur à deux.

Le modèle paramétrique considéré est de la forme :

$$G(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{(1 + Tp)^n} \quad (7.12)$$

Cette forme de modèle peut être justifiée par le fait que les systèmes apériodiques d'ordre supérieur à deux sont caractérisés, en régime transitoire, par leurs plus grandes constantes de temps. Par exemple, la fonction de transfert d'un système du troisième ordre $G_1(p) = \frac{K}{(1+p)(1+3p)(1+0.01p)}$ peut être approximée par $G_2(p) = \frac{K e^{-0.01p}}{(1+p)(1+3p)}$. Il suffit pour s'en convaincre de tracer les réponses indicielles de $G_1(p)$ et de $G_2(p)$.

L'identification consiste à déterminer les paramètres K , T , n et τ (τ n'est pas toujours nul). Ces paramètres peuvent être déterminés à partir de la réponse indicielle du système.

Strejc propose de relever sur la réponse indicielle du système, l'ordonnée du point d'inflexion y_i , ainsi que les grandeurs τ , T_u et T_a , comme le montre la figure 7.8. Ces deux dernières grandeurs sont déterminées grâce à la tangente au point d'inflexion de la courbe de réponse indicielle du système.

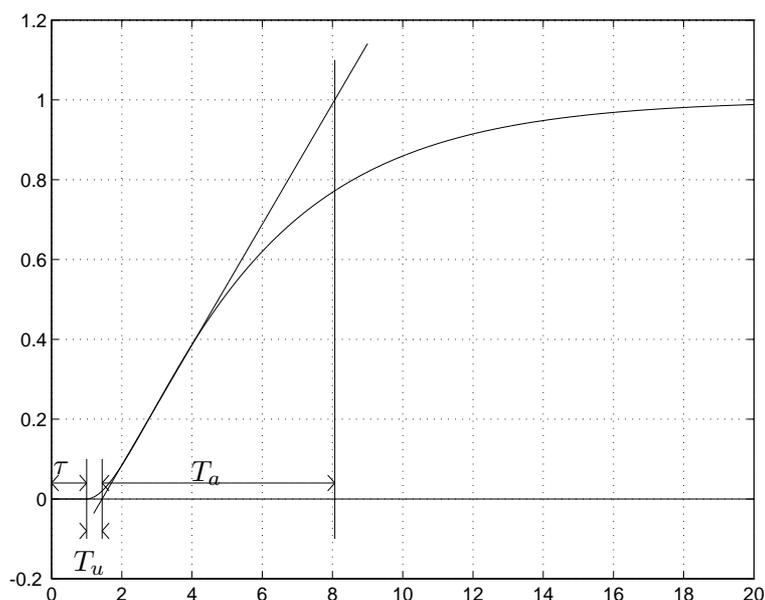


figure 7.8: Méthode de Strejc

Le tableau 7.1 permet de déterminer les constantes caractéristiques du modèle de Strejc.

n	$\frac{T_u}{T_a}$	y_i	$\frac{T_a}{T}$	$\frac{T_u}{T}$
1	0	0	1	0
2	0.104	0.264	2.72	0.28
3	0.218	0.323	3.70	0.80
4	0.319	0.353	4.46	1.42
5	0.410	0.371	5.12	2.10
6	0.493	0.383	5.70	2.81
7	0.570	0.392	6.23	3.55
8	0.642	0.400	6.71	4.31
9	0.709	0.407	7.16	5.08
10	0.773	0.413	7.59	5.87

tableau 7.1: Méthode de Strejc

Le rapport $\frac{T_u}{T_a}$ ou l'ordonnée du point d'inflexion y_i permettent de déterminer l'ordre n du modèle de Strejc. On prendra la valeur de n correspondant à la valeur immédiatement inférieure au rapport $\frac{T_u}{T_a}$. Sur la même ligne du tableau on déterminera T grâce la colonne $\frac{T_a}{T}$; en effet, la valeur de T_u et donc de $\frac{T_u}{T}$ est moins précise du fait de la difficulté à déterminer précisément τ sur la réponse indicielle.

Lorsque le rapport $\frac{T_u}{T_a}$ calculé à partir des mesures prises sur la réponse indicielle, ne correspond pas exactement à une valeur du tableau, nous sommes amenés à corriger la valeur du retard pur τ mesurée. Voyons cela sur un exemple chiffré.

Exemple : Supposons les mesures suivantes réalisées sur une réponse indicielle :

$$\begin{aligned} K &= 1.5 \\ \tau &= 1 \text{ s} \\ T_u &= 2.5 \text{ s} \\ T_a &= 10 \text{ s} \end{aligned}$$

On calcule $\frac{T_u}{T_a} = 0.25$. Cette valeur ne figure pas dans le tableau 7.1. La valeur immédiatement inférieure est $r = 0.218$, ce qui correspond à $n = 3$ et $\frac{T_u}{T} = 3.70$, par conséquent $T = 2.7 \text{ s}$.

La mesure de T_a n'est pas affectée par une erreur sur la détermination de τ . Par contre celle de T_u l'est. Si τ est mal estimé, alors le paramètre T_u mesuré comporte une part de retard pur : on n'a pas mesuré T_u , mais $T_u + \tau_c$.

Notons e l'écart entre le rapport $\frac{T_u}{T_a}$ calculé et la valeur de r lue dans le tableau. On trouve :

$$e = \frac{T_u}{T_a} - r = 0.032$$

Cet écart est dû à τ_c : $e = \frac{\tau_c}{T_a} = 0.032$. Par conséquent $\tau_c = 0.32 \text{ s}$.

Ce système sera donc modélisé par la fonction de transfert : $G(p) = \frac{1.5e^{-1.32 p}}{(1+2.7 p)^3}$

Méthode de Strejc à ordre fractionnaire Pour s'affranchir de l'introduction du retard pur, G.Davoust a proposé un nomogramme, fondé sur la méthode de Strejc, mais qui aboutit à des puissances n non entières. Le modèle obtenu est de la forme :

$$G(p) = \frac{K}{(1 + Tp)^n} \tag{7.13}$$

Sur la réponse indicielle apériodique, on trace la tangente au point d'inflexion, et on relève les valeurs de T_u et de T_a , comme indiqué sur la figure 7.9.

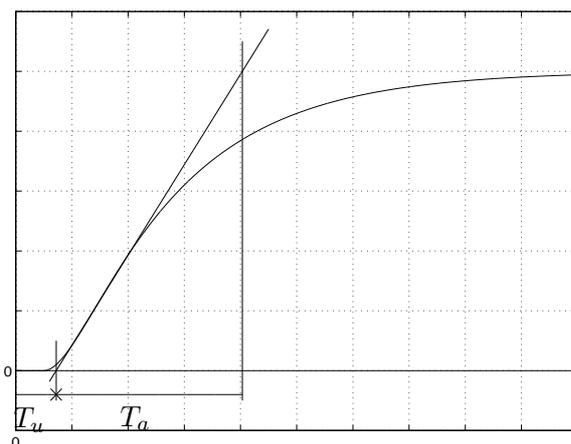


figure 7.9: Méthode de Strejc à ordre fractionnaire

On utilise alors l'abaque de la figure 7.11 (abaque de Davoust), pour déterminer la constante de temps et l'ordre du système.

L'utilisation de l'abaque de Davoust est précisée par la figure 7.10.

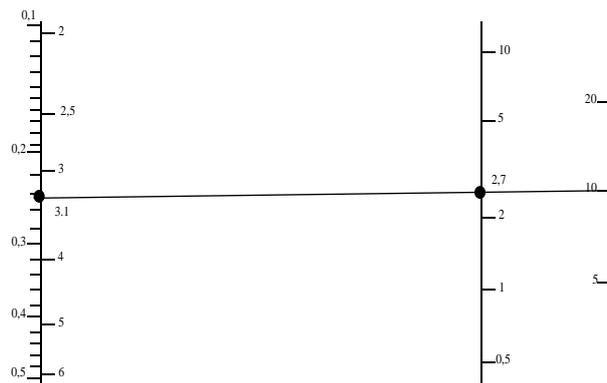


figure 7.10: Utilisation du nomogramme de Davoust

La fonction de transfert obtenue est alors : $G(p) = \frac{1,5}{(1+2,7p)^{3,1}}$

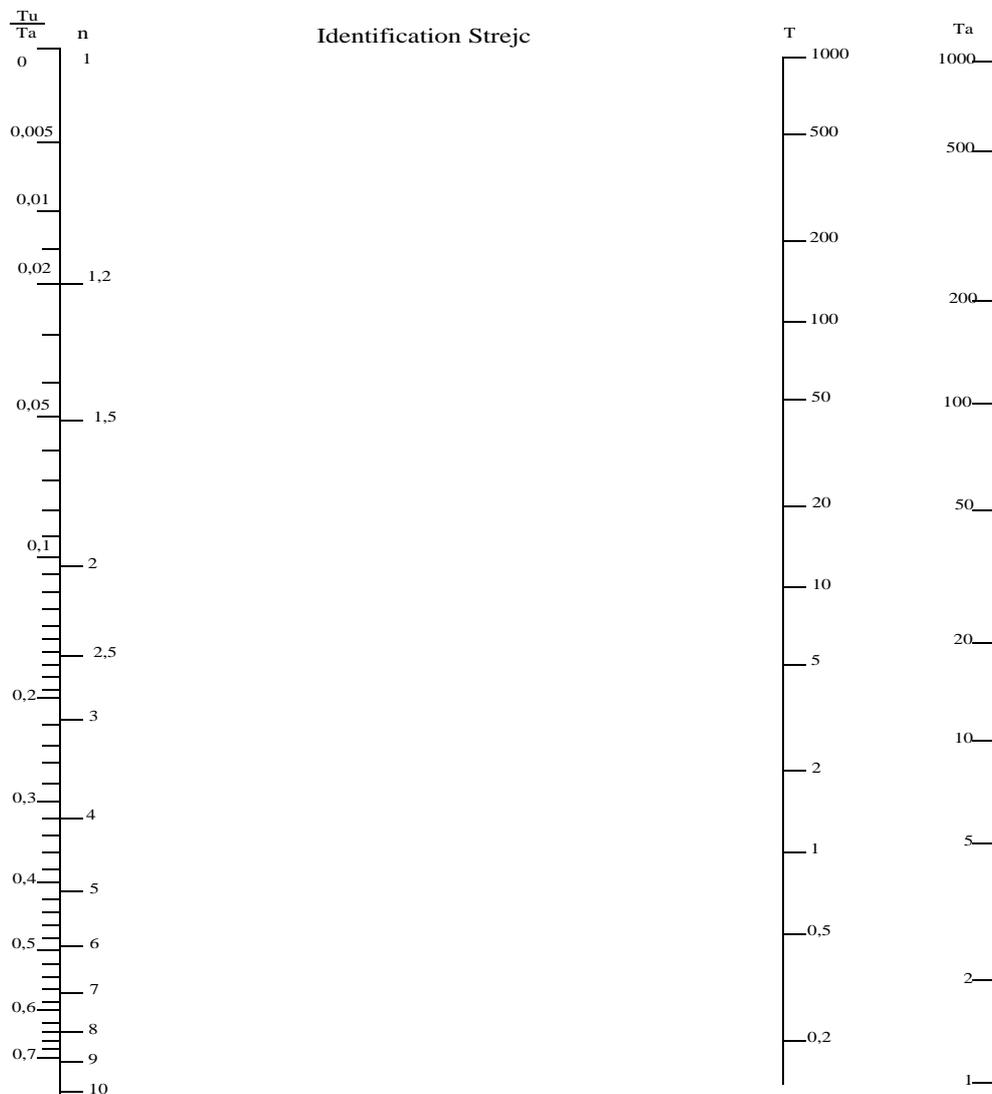


figure 7.11: Abaque pour la méthode de Strejc

7.3.3.2 Méthode de Strejc-Naslin

La structure du modèle reste celle proposée par Strejc : $G(p) = \frac{Ke^{-\tau p}}{(1+Tp)^n}$.

Pour s'affranchir de la détermination du point d'inflexion, P. Naslin a proposé une méthode qui consiste à relever les grandeurs suivantes sur la réponse indicielle d'un système apériodique à identifier, comme le montre la figure 7.12.

- t_1 est l'abscisse du point dont l'ordonnée est égale à 5 % du régime permanent.
- t_2 est l'abscisse du point dont l'ordonnée est égale à 95 % du régime permanent.
- h_1 est l'ordonnée du point d'abscisse $t_1 + 0.2\Delta t$, avec $\Delta t = t_2 - t_1$.
- h_2 est l'ordonnée du point d'abscisse $t_1 + 0.4\Delta t$.

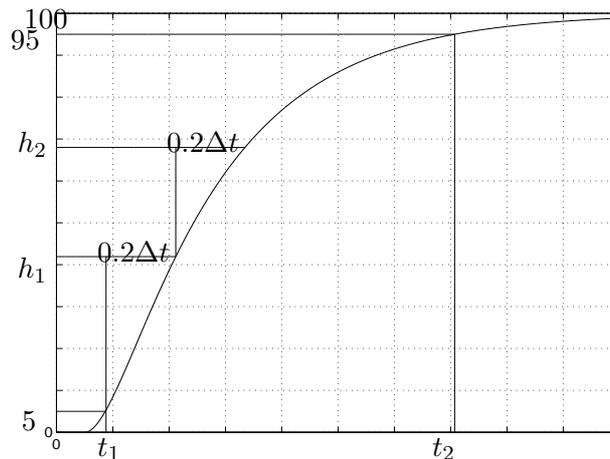


figure 7.12: Méthode de Naslin

Connaissant h_1 et h_2 , on utilise le nomogramme de Naslin présenté à la figure 7.13, puis les formules suivantes :

$$T = T_N \left(\frac{t_2 - t_1}{10} \right) \quad (7.14)$$

$$\tau = t_1 - t_0 \left(\frac{t_2 - t_1}{10} \right) \quad (7.15)$$

Le nomogramme de Naslin s'utilise de la façon suivante :

- projeter la valeur de h_1 sur la courbe fonction de h_1 , puis projeter le point obtenu sur l'axe horizontal pour déterminer une première valeur de n notée n_1 .
- projeter la valeur de h_2 sur la courbe fonction de h_2 , puis projeter le point obtenu sur l'axe horizontal pour déterminer une deuxième valeur de n notée n_2 .
- retenir pour valeur de n , la moyenne arithmétique de n_1 et n_2 : $n = \frac{n_1 + n_2}{2}$.
- projeter la valeur de n sur la courbe fonction de T_N , puis projeter le point obtenu sur l'axe vertical, pour obtenir la valeur de T_N .
- projeter la valeur de n sur la courbe fonction de t_0 , puis projeter le point obtenu sur l'axe vertical, pour obtenir la valeur de t_0 .
- utiliser les équations 7.14 et 7.15 pour déterminer le retard τ et la constante de temps T du modèle.

Remarque : L'ordre des modèles obtenus par la méthode de Strejc-Naslin (c'est à dire la valeur de n) est généralement non entier ; il convient par conséquent d'utiliser un développement limité du dénominateur de la fonction de transfert, si on souhaite rendre l'ordre entier.

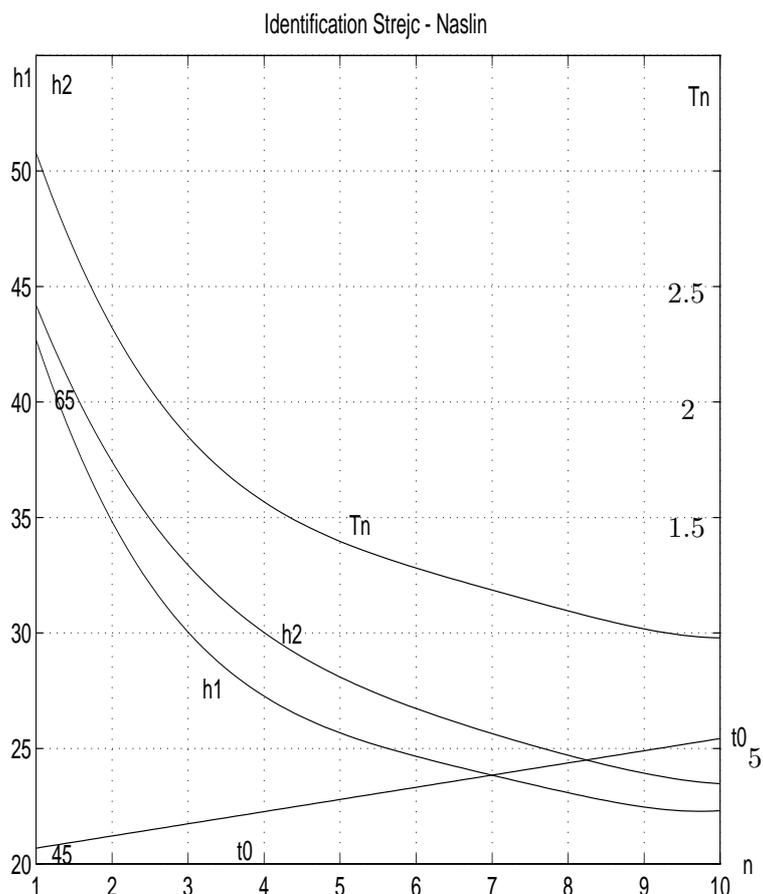


figure 7.13: Méthode de Naslin : abaque

Exemple : Supposons que l'on ait déterminé, à partir de la réponse indicielle d'un système : $K = 1$, $t_1 = 1.8s$, $t_2 = 5.0s$, $h_1 = 0.29$ et $h_2 = 0.56$. L'utilisation du nomogramme de Naslin permet dans ce cas, d'obtenir les résultats suivants : $n \simeq 3.4$, $T_N \simeq 1.7$ et $t_0 \simeq 2.2$, et donc :

$$T = T_N \left(\frac{t_2 - t_1}{10} \right) = 1.7 \left(\frac{5.0 - 1.8}{10} \right) = 2.02$$

$$\tau = t_1 - t_0 \left(\frac{t_2 - t_1}{10} \right) = 1.8 - 2.2 \left(\frac{5.0 - 1.8}{10} \right) = 1.096$$

En remarquant que $(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$, le système peut être modélisé par la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{e^{-1.096p}}{(1 + 2.02p)^{3.4}} = \frac{e^{-1.096p}}{(1 + 2.02p)^3 (1 + 2.02p)^{0.4}}$$

$$\simeq \frac{e^{-1.096p}}{(1 + 2.02p)^3 (1 + 0.4(2.02p))}$$

$$\simeq \frac{e^{-1.096p}}{(1 + 2.02p)^3 (1 + 0.808s)}$$

Liste des figures

1.1	Notion de système	3
1.2	Types d'entrées d'un système	3
1.3	Un système : un moteur à courant continu	4
1.4	Système de chauffage d'une pièce	4
1.5	Système en BO	5
1.6	Système en BF	6
1.7	Système en boucle fermée : chauffage d'une pièce	6
1.8	Circuit RC	13
1.9	Système Masse - Ressort	14
1.10	Un comparateur : Signal d'erreur = Consigne - Mesure	15
1.11	comparateur à plusieurs entrées : $e=a+b-c$	15
1.12	Schéma-blocs d'un système en boucle fermée	16
1.13	Schéma-blocs en série	16
1.14	Schéma-blocs en parallèle	17
1.15	Boucle fermée	17
1.16	Déplacement d'un lien arrière	17
1.17	Déplacement d'un lien avant	18
1.18	Schéma-blocs à simplifier	18
1.19	Première étape de simplification	18
1.20	Deuxième étape de simplification	19
2.1	Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre	22
2.2	Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre en fonction de τ	22
2.3	Réponse indicielle d'un système du premier ordre	24
2.4	Réponse indicielle d'un système du premier ordre en fonction de τ	24
2.5	Réponse indicielle d'un système du premier ordre en fonction de K	25
2.6	Réponse d'un système du premier ordre à une rampe quand $K=1$	26
2.7	Réponse indicielle d'un système du premier ordre retardé	27
3.1	Réponse impulsionnelle en fonction de ζ pour ω_0 fixé	31
3.2	Réponse indicielle en fonction de ζ	33
3.3	Caractéristiques Transitoires	34
3.4	Réponse indicielle en fonction de ω_0 pour $\zeta = 1$	35
3.5	Réponse indicielle en fonction de ω_0 pour $\zeta < 1$	35
3.6	Temps de réponse réduit ($t_r\omega_0$) en fonction de ζ	36
3.7	Réponse du système à une rampe pour $\zeta \in \{0.1, 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 5\}$	37
3.8	Réponse indicielles et pôles dominants	38
3.9	Erreurs sur les réponses indicielles et pôles dominants	38

4.1	Stabilité : exemple de la balle qui roule	41
4.2	Un système instable : un reservoir à débit de sortie constant	42
4.3	Position des pôles et stabilité	42
4.4	Stabilité : contexte général (sur réponse indicielle)	46
4.5	Stabilité : premier ordre (sur réponse impulsionnelle)	47
4.6	Stabilité : deuxième ordre (sur réponse impulsionnelle)	47
4.7	Allure des réponses impulsionnelles et stabilité versus lieu des pôles	47
5.1	Représentation classique d'un asservissement	48
5.2	Visualisation des erreurs en régime permanent	49
5.3	Allure des erreurs en fonction de la classe du système	52
5.4	Schéma-blocs d'un système perturbé	53
5.5	Système perturbé : perturbation seule	53
5.6	$G_1(p)$ de classe 1 et $G_2(p)$ de classe 0 avec perturbation de classe 1 (échelon)	54
5.7	$G_1(p)$ de classe 0 et $G_2(p)$ de classe 1 avec perturbation de classe 1 (échelon)	54
5.8	$G_1(p)$ de classe 1 et $G_2(p)$ de classe 0 avec perturbation de classe 2 (rampe)	55
5.9	$G_1(p)$ de classe 0 et $G_2(p)$ de classe 1 avec perturbation de classe 2 (rampe)	55
5.10	Système lent et rapide	56
5.11	Rapidité et situation des pôles	56
5.12	Temps de réponse et situation des pôles	57
5.13	Rapidité avec des pôles complexes	57
5.14	Précision / amortissement et situation des pôles	58
5.15	Compromis Rapidité / Précision / Stabilité dans le plan complexe	58
6.1	Correction proportionnelle	62
6.2	Système de classe zéro et correcteur P	62
6.3	Système de classe un et correcteur P	63
6.4	Schéma fonctionnel d'un correcteur PI	65
6.5	Correction proportionnelle-intégrale	65
6.6	Correcteur PI et système d'ordre 1 & classe 0	66
6.7	Réponse du système 6.6 pour $\alpha = 1$ et K variable	67
6.8	Réponse du système 6.6 pour $\alpha < 1$ et $K = 1$	68
6.9	Réponse du système 6.6 pour $\alpha = 2$ et K variable	68
6.10	Correcteur PI et système de classe 1	68
6.11	Schéma fonctionnel d'un correcteur PD	70
6.12	Correcteur PD et système de classe un	70
6.13	Correction proportionnelle-intégrale-dérivée	72
6.14	Réglages successifs des PID	74
6.15	Réponse Indicielle	75
6.16	Ziegler-Nichols en boucle fermée : pompage	76
7.1	Procédure générale d'identification	81
7.2	Réponse indicielle d'un système de fonction de transfert : $G(s) = \frac{K}{1+\tau p}$	82
7.3	Réponse indicielle d'un système de fonction de transfert : $G(p) = \frac{Kp}{1+\tau p}$	83
7.4	Réponse indicielle d'un système retardé	83
7.5	Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre	84
7.6	Méthode du point d'inflexion	85
7.7	Evolution de y_I (axe vertical) en fonction de x	86
7.8	Méthode de Strejc	87

7.9	Méthode de Strejc à ordre fractionnaire	88
7.10	Utilisation du nomogramme de Davoust	89
7.11	Abaque pour la méthode de Strejc	89
7.12	Méthode de Naslin	90
7.13	Méthode de Naslin : abaque	91

Liste des tableaux

6.1	Méthode de Ziegler et Nichols (boucle ouverte)	75
6.2	Méthode de Ziegler et Nichols (boucle fermée)	76
6.3	Méthode de Chien, Hornes et Reswick	77
7.1	Méthode de Strejc	87

Bibliographie

- [BDR93] Borne P., Dauphin-Tanguy J. P., Richard J. P., Rotella F. et I. Zambettakis. «*Analyse et Régulation des Processus Industriels*». Technip, 1993.
- [DeL93] De Larminat P. «*Automatique, Commande des Systèmes Linéaires*». Hermès, 1993.
- [GDP90] Gille J. Ch., Decaulne P., et P. Pelegrin. «*Théorie et Calcul des Asservissements Linéaires*». Dunod, 1990.
- [FPE87] Franklin g. F., Powell J. D. et A. Emami-Naeini. «*Feedback Control of Dynamic Systems*». Addison-Wesley Publishing Company, 1987.
- [RiF95] Rivoire M. et J. L. Ferrier. «*Cours d'Automatique Tome 2*». Eyrolles, 1995.
- [BSA94] Bsata A. «*Instrumentation et automation dans le contrôle des procédés, Deuxième édition*». Le Griffon d'argile, 1994.