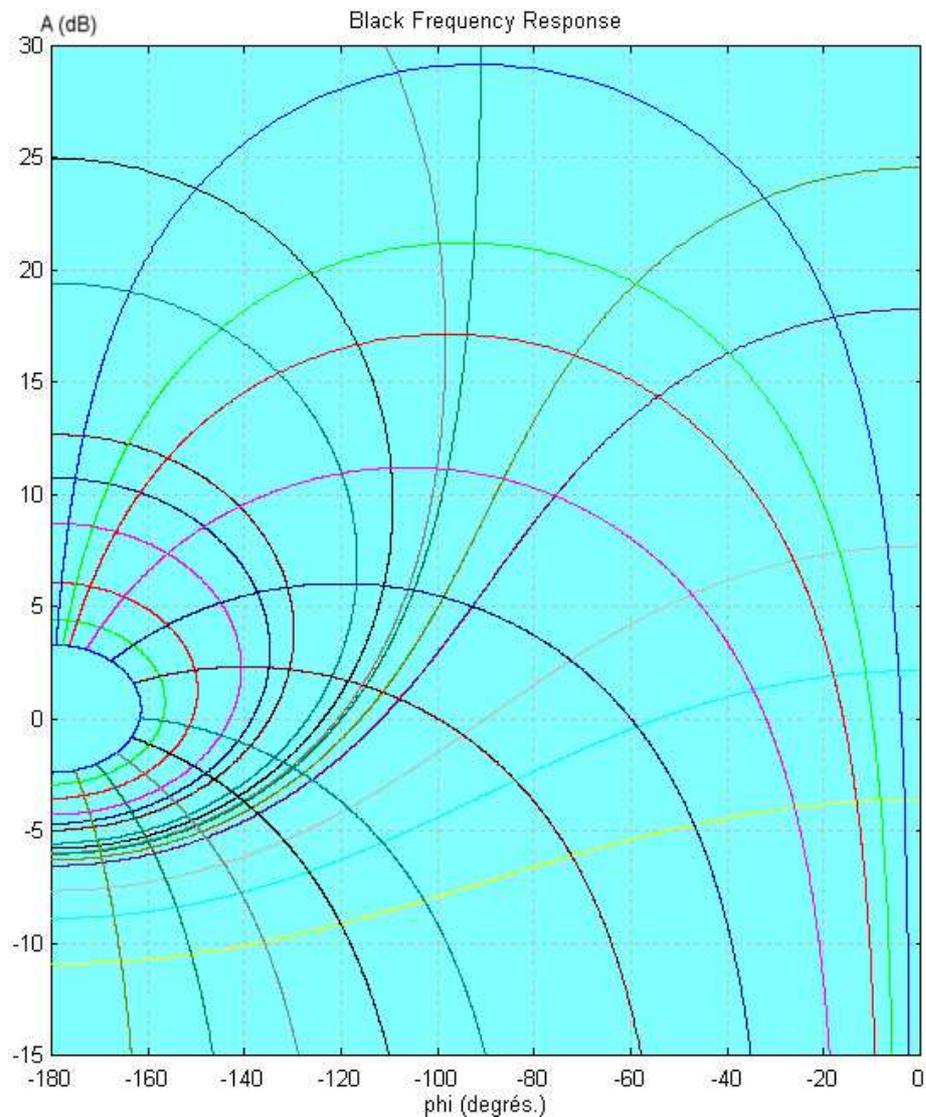


**PREPARATION AUX AGREGATIONS
INTERNES DE MECANIQUE ET GENIE
MECANIQUE**

**ASSERVISSEMENTS
COURS**



**PREPARATION AUX AGREGATIONS
INTERNES DE MECANIQUE ET GENIE
MECANIQUE**

**ASSERVISSEMENTS
COURS**

" C'est alors que notre champ de conscience fut envahi par le "secret des secrets", autrement dit par la notion de "niveaux d'organisation" et la conséquence immédiate qui en découlait, celle que nous avons appelée Servomécanisme."

HENRI LABORIT.

Chapitre 1

SYSTÈMES DE COMMANDE

Sous le vocable de système de commande, on regroupe de nombreuses structures parfois fort différentes, ainsi que l'utilisation de technologies variées. Dans ce chapitre, nous allons préciser certaines définitions afin de bien situer la place des systèmes asservis linéaires - objet de ce cours - au sein des systèmes de commande.

1-1 SYSTÈMES LINÉAIRES ET SYSTÈMES NON-LINÉAIRES.

1-1-1. DÉFINITION.

Un système est dit linéaire si la fonction qui le décrit est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors le principe de superposition : si une fonction F est linéaire, elle vérifie la relation :

$$F(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha F(e_1) + \beta F(e_2)$$

Avec: e_1 et e_2 signaux d'entrée.
 α et β constantes quelconques.

Dans le cas où le comportement du système considéré est décrit par une équation différentielle, celle-ci devra être linéaire pour que le système le soit.

La figure 1-1 ci-dessous illustre la propriété de linéarité.

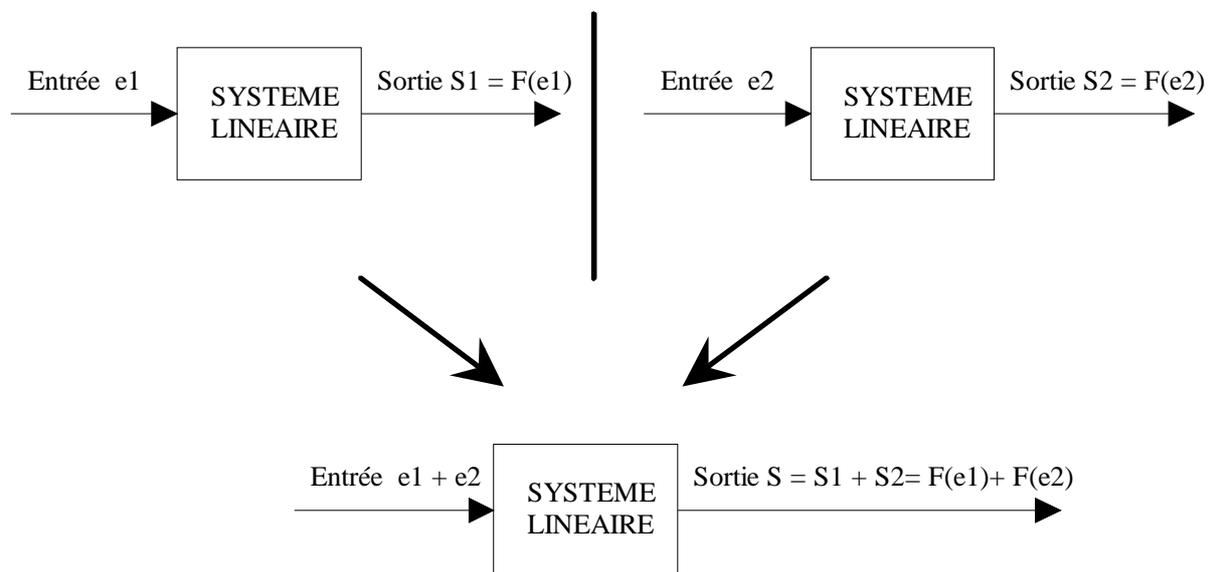


Fig. 1-1 : propriété de linéarité

REMARQUE IMPORTANTE : Les systèmes échantillonnés, très répandus en mécanique (commande numérique, carte d'axe, etc.) peuvent tout à fait être linéaires.

1-1-2. COURBE CARACTÉRISTIQUE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE.

La courbe caractéristique d'un système est la représentation de la loi entrée/sortie EN RÉGIME PERMANENT : on soumet le système à une entrée, on attend un temps suffisant pour que la sortie soit stabilisée et on mesure la valeur de la sortie. C'est donc une courbe obtenue expérimentalement par mesures successives. Lorsque le système est suffisamment simple pour se prêter à la modélisation, on peut établir la caractéristique par le calcul en considérant également le régime permanent.

La courbe caractéristique $S = f(E)$ d'un système linéaire est une droite dans le plan S, E .

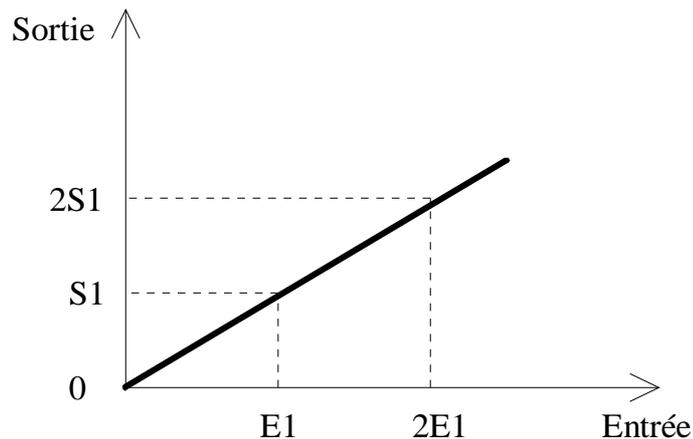


Fig. 1-2 : courbe caractéristique d'un système linéaire.

En général, le fonctionnement d'un système se décrit par une relation entre n variables. L'équation caractéristique est alors obtenue en choisissant une variable-entrée, une variable-sortie et en fixant toutes les autres variables (variables annexes) à une valeur donnée : la courbe caractéristique est la représentation de cette équation dans le plan des deux variables sélectionnées. En fixant successivement les variables annexes à différentes valeurs, on fait apparaître un réseau de courbes appelé famille de caractéristiques. Dans le cas d'un système linéaire, la famille de caractéristiques est un réseau de droites (caractéristique tension/vitesse d'un moteur C.C. par exemple, voir figure 1-6)

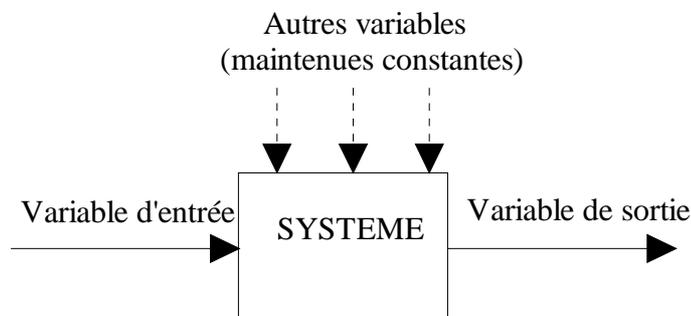


Fig. 1-3 : Système régi par n variables.

La courbe caractéristique est souvent représentée en coordonnées réduites et est appelée caractéristique réduite. Les coordonnées caractéristiques sont obtenues en divisant les deux variables par deux grandeurs de référence de mêmes unités. Les variables caractéristiques sont donc sans dimension. La grandeur de référence peut être, par exemple, la valeur maximale que peut atteindre la variable : c'est le cas pour les vannes de débit dont la grandeur de référence pour le débit sera le débit maxi Q_{max} . La grandeur réduite est alors $Q_r = Q/Q_{max}$ évoluant entre 0 et 1 avec $Q_r = 0$: débit nul et $Q_r = 1$: débit maximum. Les coordonnées réduites permettent de comparer des systèmes similaires mais travaillant à des échelles différentes comme deux vannes de débit de calibres différents.

1-1-3. EXEMPLES DE SYSTÈMES LINÉAIRES.

1-1-3-1. Amplificateur parfait de gain A.

L'ampli soumis à une tension d'entrée $u(t)$ délivre une tension de sortie proportionnelle $U(t) = A.u(t)$. Soumis à une tension d'entrée $2.u(t)$, il délivrerait une tension de sortie $2A.U(t)$.

REMARQUE: la modélisation d'un ampli par un gain pur, suffisante pour les applications mécaniques, n'est plus valable si l'on travaille à fréquence élevée. Il est parfois nécessaire de le modéliser comme un système du premier ordre possédant une bande passante au-delà de laquelle le signal de sortie est très affaibli : c'est le cas de l'ampli de la chaîne stéréo qui ne répond plus à 20 kHz. Ceci ne l'empêche pas d'être linéaire dans la bande de fréquence inférieure.

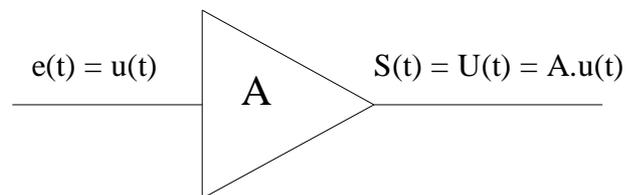


Fig. 1-4 : Amplificateur parfait.

1-1-3-2. Moteur à courant continu.

On peut considérer qu'un moteur à courant continu est un système qui transforme une tension en vitesse.

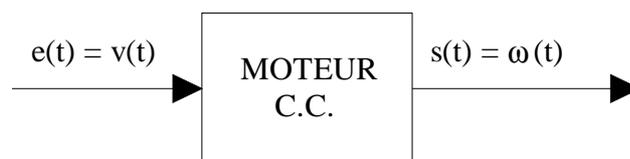


Fig. 1-5 : moteur à courant continu.

On montre que, pour un moteur à courant continu à commande d'induit et à aimants permanents, la relation entre la vitesse de rotation $\omega(t)$ et la tension de commande $v(t)$ est à couple constant : (avec R, f, K_c, K_t, J, L coefficients liés au moteur et au mécanisme).

$$v(t) = \frac{1}{K_T} \left[(R.f + K_c.K_T).\omega(t) + (R.J + L.f) \frac{d\omega(t)}{dt} + L.J \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} \right]$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants de la forme :

$$v(t) = A.\omega(t) + B \frac{d\omega(t)}{dt} + C \frac{d^2\omega(t)}{dt^2}$$

Le régime permanent correspond à une vitesse stabilisée dont les dérivées sont nulles.

$$\omega(t) = C^{te} \Rightarrow \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} = 0$$

La relation en régime permanent se réduit alors à : $v(t) = A.\omega(t)$ qui est une relation linéaire entre la commande en tension et la vitesse obtenue POUR UN COUPLE DONNE.

1-1-4. NON-LINÉARITÉS.

On peut recenser quatre types usuels de non-linéarités : Le seuil, la saturation, l'hystérésis et la courbure. Ces quatre types se rencontrent en commande d'axe, parfois simultanément (voir servovalve)

En pratique, les constituants présentent des non-linéarités dans certaines plages des valeurs d'entrée et sont donc, rigoureusement parlant, non linéaires. Mais on les considère souvent comme linéaires par approximation : c'est la "linéarisation". L'ampli ou le moteur vus ci dessus sont modélisés comme tels, les résultats obtenus ensuite par le calcul étant satisfaisants dans la majorité des cas.

Les non-linéarités ne sont pas toujours négligeables : certains systèmes sont à la limite, ce qui peut entraîner un risque d'instabilité dans les systèmes bouclés. D'autres sont résolument non linéaires

Les non-linéarités sont parfois exploitées : c'est le cas de la saturation qui permet de limiter le courant dans un variateur de vitesse, par exemple.

Quelques cas typiques et usuels de composants non linéaires (mais souvent linéarisés) sont exposés dans les chapitres suivants.

1-1-4-1. Seuil sur un moteur à courant continu.

La famille de caractéristiques est représentée Fig.1-6, pour différentes valeurs du couple, soit C_1, C_2 et C_3 . Dans le cas du moteur à vide (couple résistant C_1), le couple de frottement sec s'oppose à la mise en mouvement du rotor lors du démarrage. Tant que la commande est trop petite pour que le couple moteur soit supérieur au couple de frottement sec, le moteur est immobile (Le couple moteur est proportionnel à l'intensité du courant traversant les bobinages, elle-même limitée lorsque la tension est faible). C'est une zone de non-linéarité. Dès que la commande dépasse le seuil V_{s1} , la caractéristique tension/vitesse du moteur est linéaire comme nous l'avons vu en 1-1-3-2.

Pour une tension de commande identique V_{com} , la vitesse obtenue est différente suivant la valeur du couple, respectivement ω_1 , ω_2 et ω_3 pour C_1 , C_2 et C_3 . On remarque que la caractéristique n'a pas de maximum ; en effet, un moteur C.C. ne possède pas de limitation intrinsèque de vitesse (sauf la destruction mécanique ou thermique !), cette dernière étant réalisée en pratique par le variateur associé au moteur.

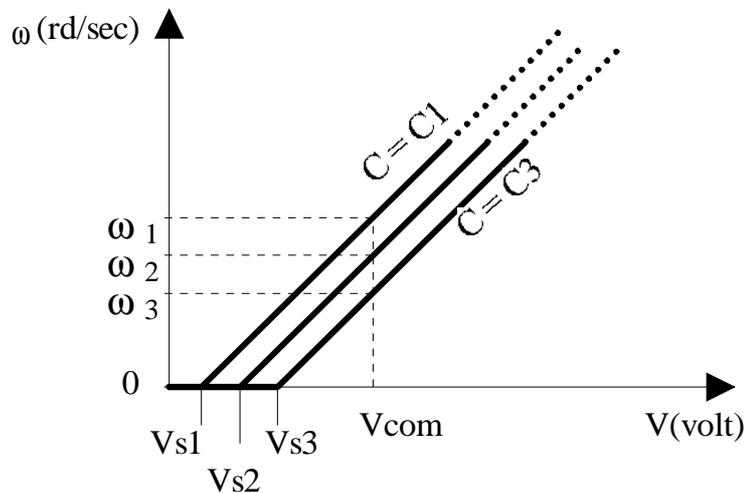


Fig.1-6: Famille de caractéristiques du moteur C.C.

1-1-4-2. Saturation sur un amplificateur.

Pour tout système, il y a une limite de la grandeur d'entrée au-delà de laquelle la grandeur de sortie ne progresse plus : c'est la saturation en courant d'un amplificateur opérationnel par exemple. La fig. 1-7 donne l'allure de la partie positive de la réponse (soumis à une tension négative, l'ampli se comporte de la même manière avec saturation). Bien évidemment, la tension de sortie saturée sera toujours inférieure à la tension d'alimentation de l'amplificateur.

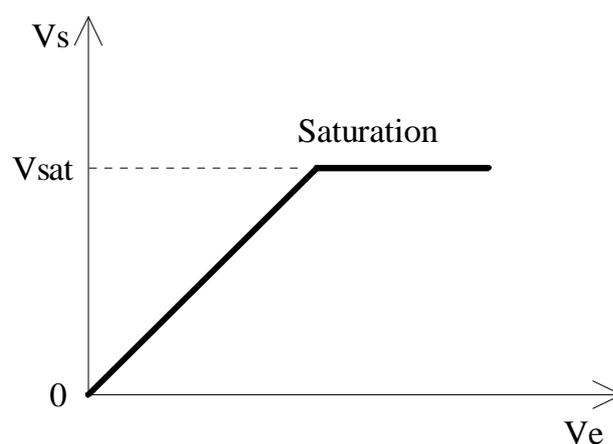


Fig.1-7: caractéristique en tension d'un amplificateur opérationnel.

1-1-4-3. Courbure et hystérésis sur une Servovalve.

Une servovalve est un composant qui fournit un débit hydraulique Q (parfois une pression) proportionnel à un courant d'entrée I . Sur la courbe caractéristique, on observe :

- Un seuil : la servovalve comporte un tiroir soumis à des frottements.
- Une saturation : elle correspond à l'ouverture maximum de la valve.
- Une courbure : la caractéristique n'est pas exactement linéaire.
- Une hystérésis : une commande identique provoque un débit différent suivant qu'elle augmente ou qu'elle diminue.

La courbe est symétrique, car la servovalve autorise le passage du fluide dans les deux sens.

Pour donner un ordre de grandeur, une servovalve "moyenne" fournit un débit maximum $Q_{\max} = 500\text{cm}^3/\text{s}$ pour un courant de commande de 10 mA, sous une pression maxi de 250 bars. La figure suivante montre l'allure de la courbe, avec un seuil compris entre 1% et à 5% et une hystérésis inférieure à 5%.

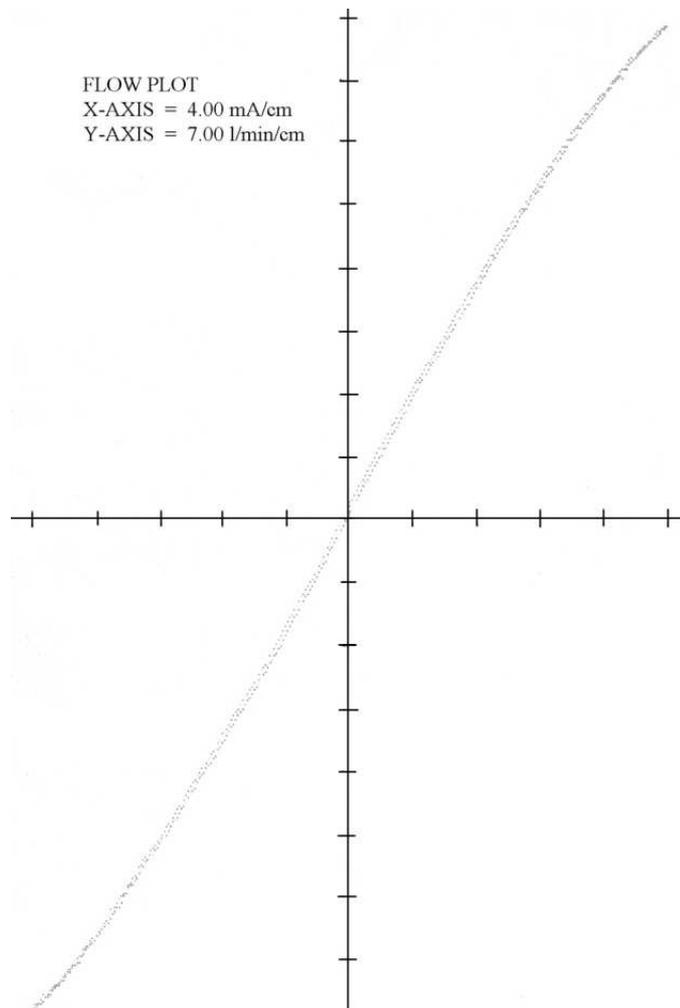


Fig. 1-8 : caractéristique débit-courant d'une servovalve MOOG 0076-104.

1-1-5. SYSTEMES LINÉARISABLES.

Certains processus sont non-linéaires mais réguliers : c'est le cas du mélange en ligne de produits liquides (chimie, pétrole, etc.).

Exemple : processus non linéaire mais linéarisable : mélange en ligne.

On désire obtenir un mélange homogène de deux produits A et B, défini par le pourcentage de produit A dans le mélange. Pour ce faire, on utilise deux vannes proportionnelles V_a et V_b identiques à commande électrique respectivement C_a et C_b . Les vannes possèdent des caractéristiques linéaires et peuvent fournir un débit qui varie entre 0 et Q_{max} . La vanne B détermine un débit de ligne variable, la vanne A devant être actionnée de manière à toujours obtenir le même mélange M .

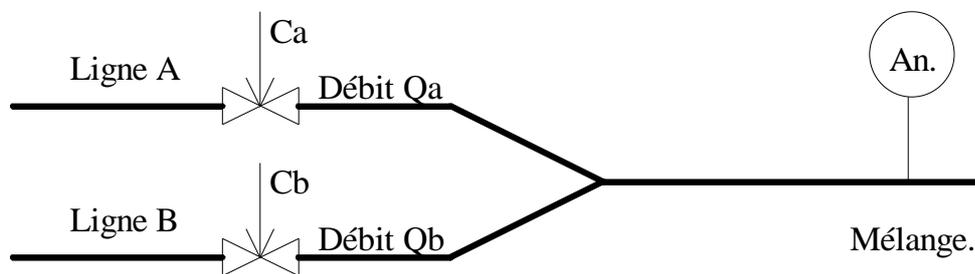


Fig. 1-9 : Mélangeur en ligne.

Les commandes électriques C_a et C_b varient entre 0 et C_{max} et les débits entre 0 et Q_{max} . Toutes les variables seront, par commodité, représentées en variables réduites qui évoluent entre 0 et 1. Ainsi, lorsque la vanne A est commandée par $C_a = 0.5$ (sous-entendu 50% de C_{max}), elle fournit un débit $Q_a = 0.5$ (sous-entendu 50% de Q_{max}).

En régime établi, la Quantité réduite M (mesurée par l'analyseur A_n) de produit A dans le mélange est :

$$M = \frac{Q_a}{Q_a + Q_b} = \frac{C_a}{C_a + C_b} \quad \text{car les vannes sont linéaires.}$$

avec: 0% de produit A dans le mélange : $M = 0$
100% de produit A dans le mélange : $M = 1$

C'est une fonction de la forme $y = \frac{x}{x+a}$. Il n'est pas possible de remplacer cette courbe par une droite sans faire une grossière erreur. Une meilleure idée consiste à choisir un point de fonctionnement privilégié, à linéariser autour de ce point et à appliquer les résultats de la théorie linéaire en sachant qu'ils ne pourront en général pas s'extrapoler à d'autres points de fonctionnement.

La famille de caractéristiques exprimant la quantité M en fonction de Ca pour différentes valeurs de Cb est représentée Fig.1-10.

Choisissons un point de fonctionnement $P = (0.3, 0.6)$ $Ca_0 = 0.3$ pour $Cb = 0.2$ et linéarisons en ce point. (voir outils mathématiques § 1-1)

$$M = F(Ca) = \frac{Ca}{Ca + Cb} \quad \text{forme } \frac{u}{v} \quad \text{dont la dérivée est : } \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$\text{On obtient : } F'(Ca) = \frac{Cb}{(Ca + Cb)^2}$$

$$\text{Au point choisi : } F'(Ca_0) = \frac{Cb}{(Ca_0 + Cb)^2} = \frac{0.2}{(0.2 + 0.3)^2} = 0.8$$

Finalement la relation linéarisée entre M et Ca s'écrit : $\Delta M = 0.8 \Delta Ca$ autour du point P .
Nous verrons bientôt que le coefficient 0.8 s'appelle le gain statique du système.

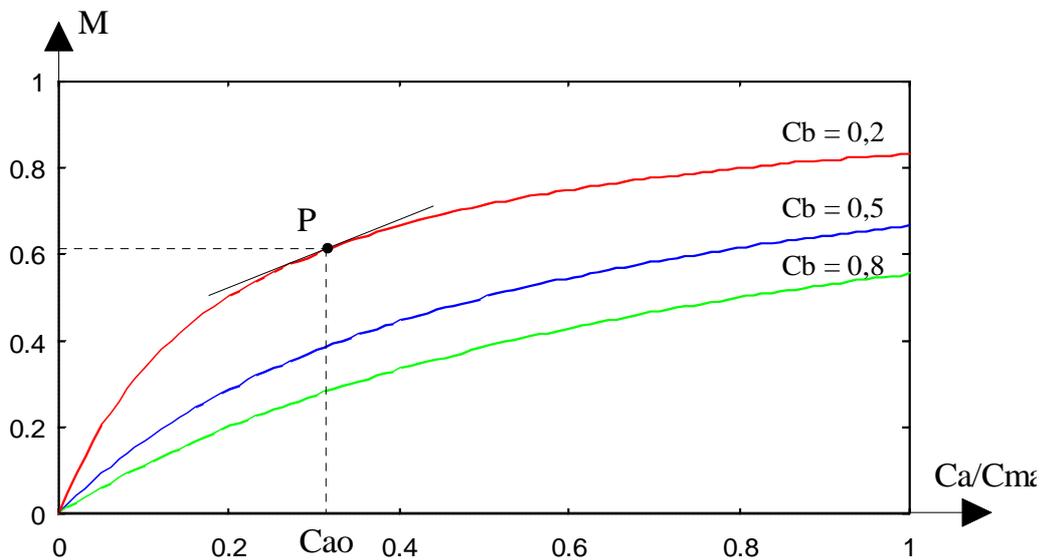


Fig. 1-10 : Caractéristiques du mélangeur en ligne.

Par exemple, pour une entrée $Ca = 0.36$ (point P' sur la FIG.1-12), la relation linéaire donne :

$$\Delta M = K \Delta Ca = 0.8(0.36 - 0.3) = 0.8 \times 0.06 = 0.048$$

donc $M' = M + \Delta M = 0.6 + 0.048 = 0.648$ soit un taux de A = 64.8%

La relation non linéaire donnait : $M' = F(0.36) = 0.6428$ soit un taux de A = 64.28%)

L'erreur commise dans ce cas est inférieure à 1%

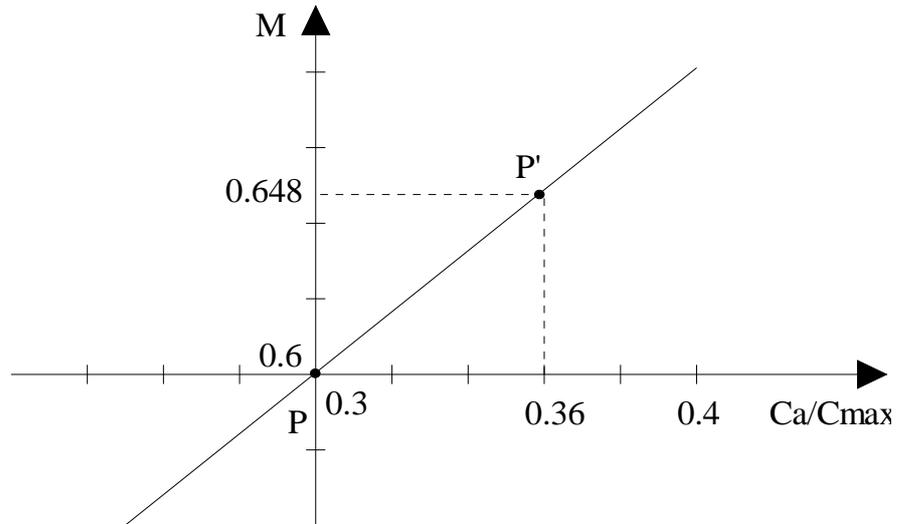


Fig. 1-11 : Caractéristique linéarisée autour de P du mélangeur en ligne.

1-1-5. SYSTEMES NON-LINÉAIRES.

Exemple : relais à deux positions.

Si l'on considère un constituant dont la valeur de la sortie possède une grandeur constante et indépendante de la grandeur de l'entrée au signe près, on obtient par exemple la caractéristique Figure 1-12. C'est un fonctionnement en plus ou moins qui est non-linéaire et NON LINÉARISABLE. Il peut se combiner avec d'autres non-linéarités (seuil, hystérésis, etc.) et entraîne l'obligation d'utiliser des méthodes de calcul sortant du cadre de ce cours.

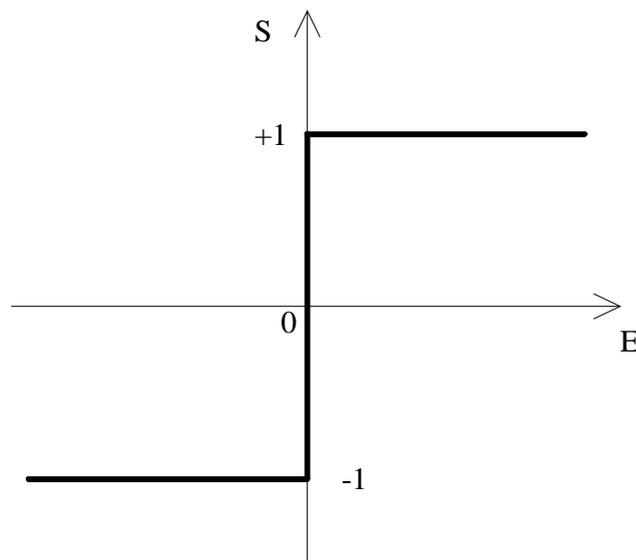


Fig. 1-12 : non-linéarité en plus ou moins.

1-2 SYSTEMES BOUCLES ET SYSTEMES NON BOUCLES.

1-2-1. SYSTEMES NON-BOUCLES.

De très nombreux systèmes mécaniques sont non-bouclés : on dit qu'ils fonctionnent en CHAÎNE DIRECTE. Cette notion se comprend facilement de manière intuitive, un système non bouclé étant un système qui ne contrôle pas la manière dont l'ordre a été exécuté. La structure classique d'une commande en chaîne directe est représentée Fig.1-13.

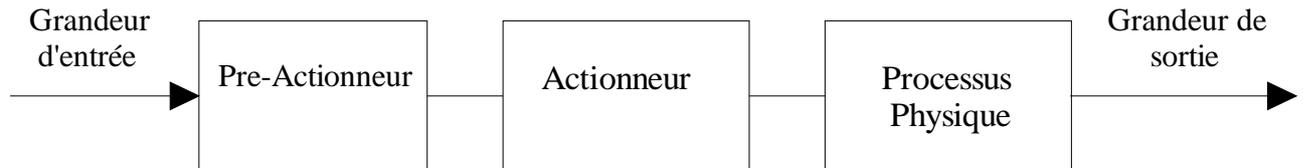


Fig.1-13. Commande en chaîne directe.

Prenons l'exemple d'un système de commande en vitesse à base de moteur à courant continu : on rappelle que ce type d'actionneur est commandé par une tension $v(t)$ et qu'il fournit une vitesse proportionnelle à la tension de commande

Pour une commande $v(t) = v_0$, la vitesse obtenue au bout d'un certain temps c.à.d. en régime permanent est $\omega(t) = \omega_0$ constante en l'absence de perturbation : le moteur tourne à la vitesse désirée.

- Si le couple à fournir varie peu ou si une vitesse précise n'est pas recherchée, un tel système de commande est satisfaisant.

- Par contre, si le couple à fournir varie suffisamment (la charge augmente par exemple) la vitesse va varier (elle diminue dans ce cas : $\omega(t) < \omega_0$) et le moteur ne tournera plus à la vitesse désirée alors que la commande $v(t) = v_0$ est inchangée par ailleurs. Si un contrôle précis de la vitesse est recherché, ce système de commande n'est pas satisfaisant.

Ce problème est identique à celui du conducteur automobile qui aborde une côte :

- S'il ne change pas la position de l'accélérateur (COMMANDE), la voiture va ralentir.

Ce processus correspond au cas ci-dessus : système non-bouclé.

- Si le conducteur désire maintenir sa vitesse constante à une valeur (CONSIGNE) donnée, il va lui falloir :

MESURER que la vitesse a varié (capteur).

COMPARER la vitesse réelle avec la consigne.

MODIFIER la commande de l'accélérateur en fonction de L'ECART entre la vitesse actuelle et la consigne.

Ce processus correspond maintenant à un système bouclé : les performances ont augmenté.

REMARQUE: En réalité, le conducteur va détecter la présence de la côte avant que le véhicule ne s'y engage et va anticiper la commande d'accélérateur. Il va accroître cette dernière avant que la vitesse n'ait diminué, ce qui va permettre la montée de la côte à vitesse constante. Ce processus correspond à une commande avec **CORRECTION PAR ANTICIPATION** : les performances ont encore augmenté.

Propriétés générales des systèmes non-bouclés.

a) Le terme de non-bouclage s'applique à la grandeur commandée. Il existe des systèmes dits non-bouclés mais qui contiennent quand même une boucle de régulation d'une grandeur autre que la grandeur commandée : c'est le cas du positionnement en chaîne directe avec moteur C.C. pour lequel la vitesse et le courant sont souvent asservis par le variateur.

b) Les performances des systèmes non-bouclés sont limitées :

- * Si la valeur visée est dépassée, le système ne peut pas corriger l'erreur.
- * Si une perturbation extérieure déplace le mobile, le système ne peut pas se recalibrer.
- * La dynamique n'est pas maîtrisée. C'est principalement pour cette raison que l'on ajoute une boucle de vitesse et de courant.

c) Les systèmes non-bouclés sont simples à commander et moins onéreux que les systèmes bouclés. Contrairement à ces derniers, ils ne sont jamais instables.

1-2-2. SYSTEMES BOUCLES- SYSTEMES ASSERVIS- SERVOMECHANISMES.

On peut définir un système asservi en trois points :

a) C'est un système à retour : L'évolution de la grandeur de sortie est surveillée au moyen d'un capteur qui la transforme en une grandeur image appelée retour.

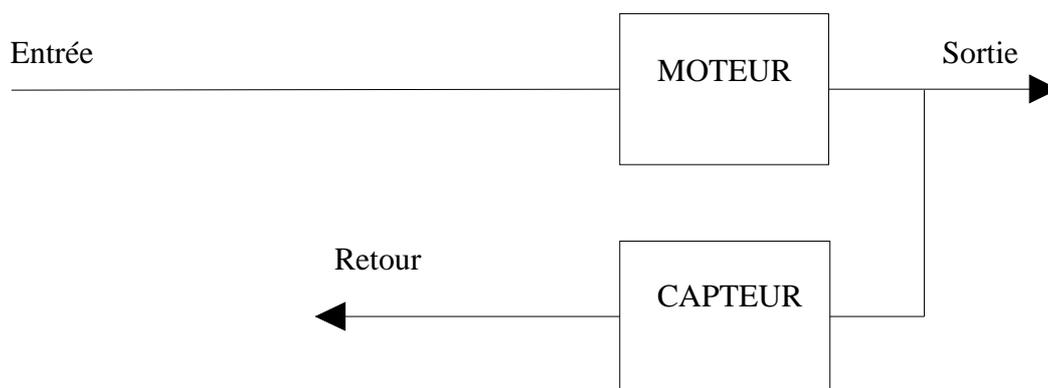


Fig.1-14: système à retour.

b) C'est un système générateur d'écart : La grandeur de retour, image de la sortie, est comparée à la grandeur d'entrée par élaboration de la différence ou écart. Le but de l'asservissement est d'annuler en permanence cet écart, de manière à ce que la sortie suive l'entrée. La sortie est alors asservie à l'entrée.

REMARQUE 1 : La grandeur de retour doit être de même nature que la grandeur d'entrée (une tension par exemple) et à même échelle pour que la comparaison ait un sens.

REMARQUE 2 : L'emploi du terme "écart" est préférable à celui du terme "erreur" qui est abusif car un système asservi, de par son fonctionnement, génère un écart sans pour autant que l'on puisse parler d'erreur.

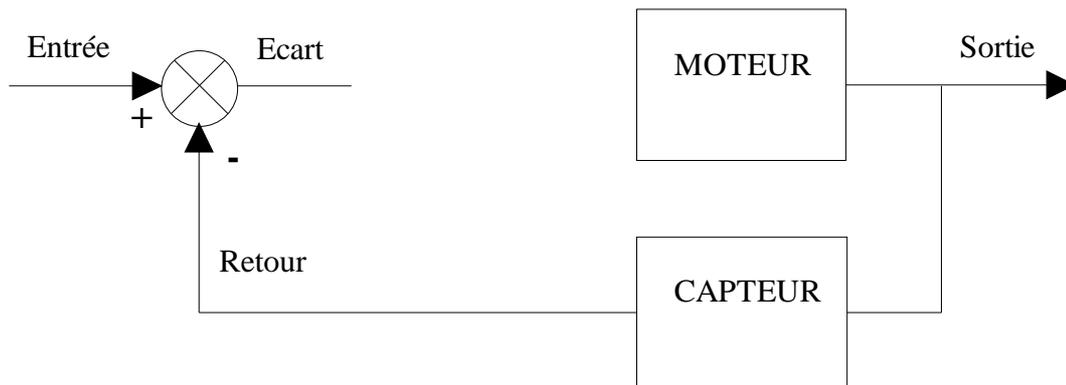


Fig.1-15: système générateur d'écart.

b) C'est un système amplificateur : L'écart est une grandeur faible et lorsqu'on se rapproche du but elle devient insuffisante pour maintenir un signal de puissance en sortie. L'écart est donc amplifié.

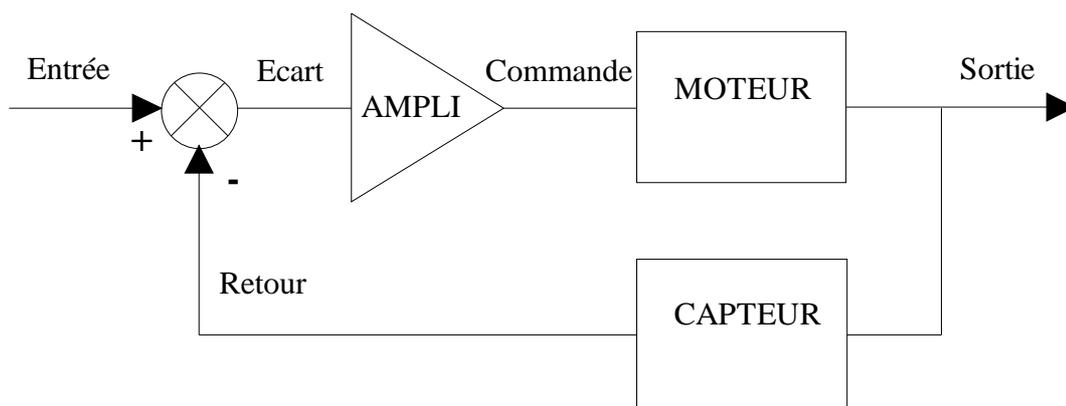


Fig.1-16 : système asservi.

Servomécanisme.

Un système asservi est appelé servomécanisme lorsque la grandeur contrôlée est une grandeur mécanique : Position, Vitesse, Couple, Effort, etc.

Ceci en opposition avec les asservissements de grandeurs non-mécaniques telles que Température, courant, etc.

La machine-outil et la robotique sont les domaines privilégiés d'application des servomécanismes, à un tel point que la dénomination "commande d'axe" s'utilise de plus en plus pour désigner les servomécanismes correspondants.

Ainsi, les termes "asservissement de position" et "servomécanisme de position" sont synonymes.

En tant que mécaniciens, nous nous intéresserons principalement aux servomécanismes. Il n'en reste pas moins que les méthodes développées dans le cours sont de portée générale et s'appliquent à toutes les sortes d'asservissements linéaires et non-échantillonnés.

1-3 EXEMPLES DE SYSTEMES DE POSITIONNEMENT.

1-3-1. POSITIONNEMENT PAR MOTEUR ASYNCHRONE.

Le moteur asynchrone se caractérise surtout par sa simplicité, sa robustesse et son coût modique. Sa vitesse est déterminée par la fréquence du courant d'alimentation et n'est pas réglable simplement : c'est la vitesse nominale pour le couple nominal. Pour la faire varier, il faut utiliser soit un onduleur qui est un variateur de fréquence dont le coût est élevé soit un gradateur dont les performances sont limitées.

Le démarrage d'un moteur asynchrone provoque un appel de courant important sur le secteur : on y remédie en utilisant un câblage approprié (étoile-triangle, statorique, etc..) ou un composant spécialisé (Démarreur)

EXEMPLE: Chaîne de traitements de surface.

Chaque poste de traitement est muni d'un capteur T.O.R. En fonction du cycle, l'automate émet des ordres T.O.R. pour avancer ou reculer. Lorsque la destination visée est atteinte le capteur correspondant est activé et l'automate ordonne l'arrêt du moteur. Un démarreur permet de limiter les à-coups et l'appel de courant lors du démarrage.

Matériel typique : démarreur pour moteur asynchrone TELEMECANIQUE GRADIVAR.

SYSTEME NON ASSERVI.

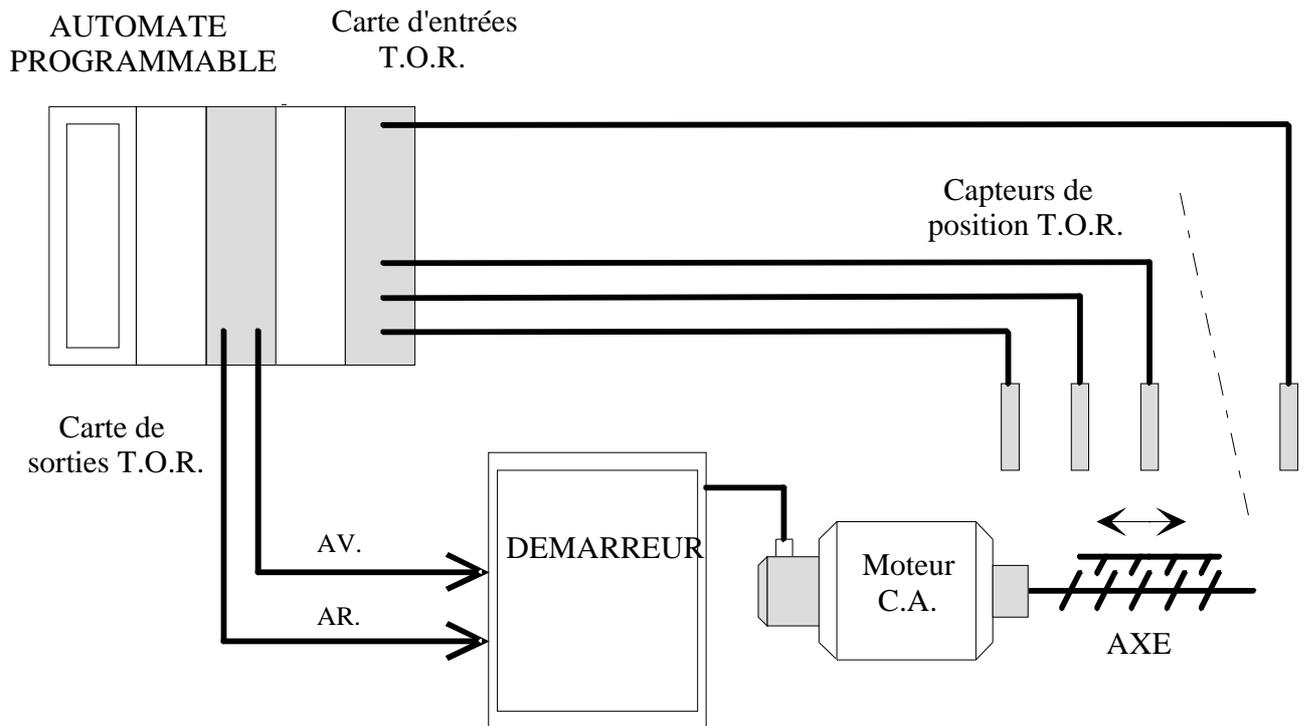


Fig.1-17: positionnement simple par moteur asynchrone.

Plusieurs variantes de ce système sont possibles suivant les cas de figure :

- * Avec moteur à deux vitesses, permettant un arrêt plus précis et plus doux en vitesse lente. Il faut alors un ou deux capteurs supplémentaires par poste ou, mieux, un codeur.
- * Sans démarreur si l'appel de courant est supportable par le réseau.
- * Avec variateur. Le démarreur est alors inutile.
- * En remplaçant les détecteurs T.O.R. par un codeur incrémental ou un système de disque à trous. Il faut alors ajouter une carte de comptage rapide.

1-3-2. POSITIONNEMENT PAR MOTEUR PAS A PAS.

Sommairement, un moteur pas à pas tourne d'un angle proportionnel au nombre d'impulsions qu'on lui fournit. Le contrôle du nombre d'impulsions permet l'obtention d'un déplacement angulaire précis. La fréquence des impulsions détermine la vitesse de rotation. La chaîne de commande comporte au moins trois modules fonctionnels : un indexeur qui gère les déplacements en générant une suite d'impulsions de fréquence donnée, un translateur qui commande le module de puissance qui, lui-même, contrôle le moteur. Ces modules peuvent être séparés ou intégrés ensemble et de nombreuses architectures sont possibles.

EXEMPLE: indexeur programmable.

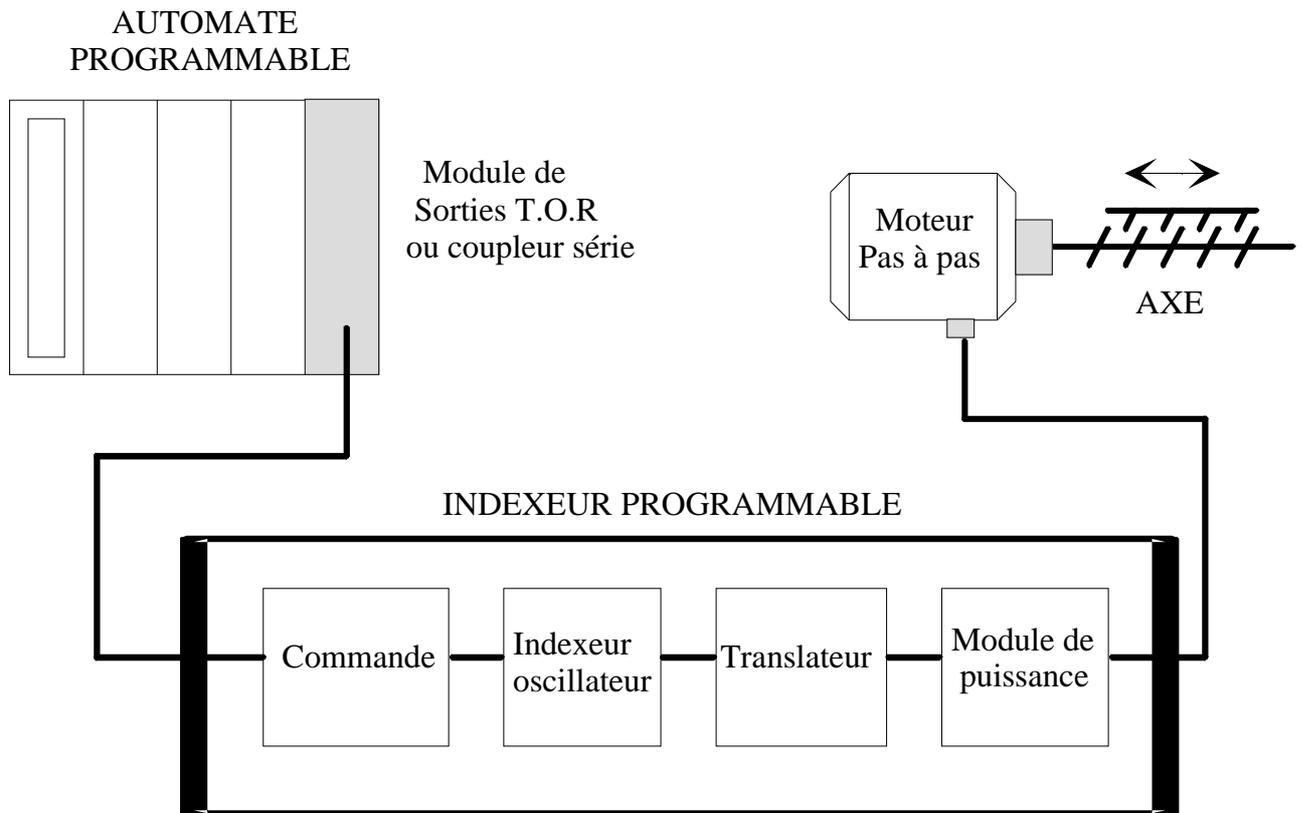


Fig. 1-18 : Positionnement en boucle ouverte avec moteur pas à pas.

L'indexeur programmable est un module entièrement intégré possédant une commande programmable. Cette architecture est la plus simple pour l'utilisateur, le fonctionnement étant complètement transparent. L'indexeur communique avec l'extérieur par liaison série, liaison parallèle, et entrées/sorties T.O.R. programmables.

Matériel typique : Commande numérique pour moteurs pas à pas SIGEAX 316 PP, ensemble indexeur programmable SLO-SYN de chez Superior Electric (qui, au passage, est le constructeur qui a breveté le premier modèle de moteur pas à pas à la fin des années cinquante). Certains fabricants proposent des cartes automate de contrôle de moteur pas à pas : Carte SIEMENS IP 247 qu'il faut associer à un indexeur-translateur.

Fonctionnement: L'indexeur est programmé au moyen d'un terminal spécialisé, d'un micro ordinateur + logiciel ou d'un automate équipé d'un module de communication série. Le programme contient le cycle complet ainsi que les paramètres de déplacement tels que vitesse, accélération, décélération, nombres de pas à effectuer, etc.

L'indexeur programmable est autonome et l'automate se contente d'envoyer des ordres T.O.R. de départ et d'arrêt et de recevoir des comptes-rendus également T.O.R.

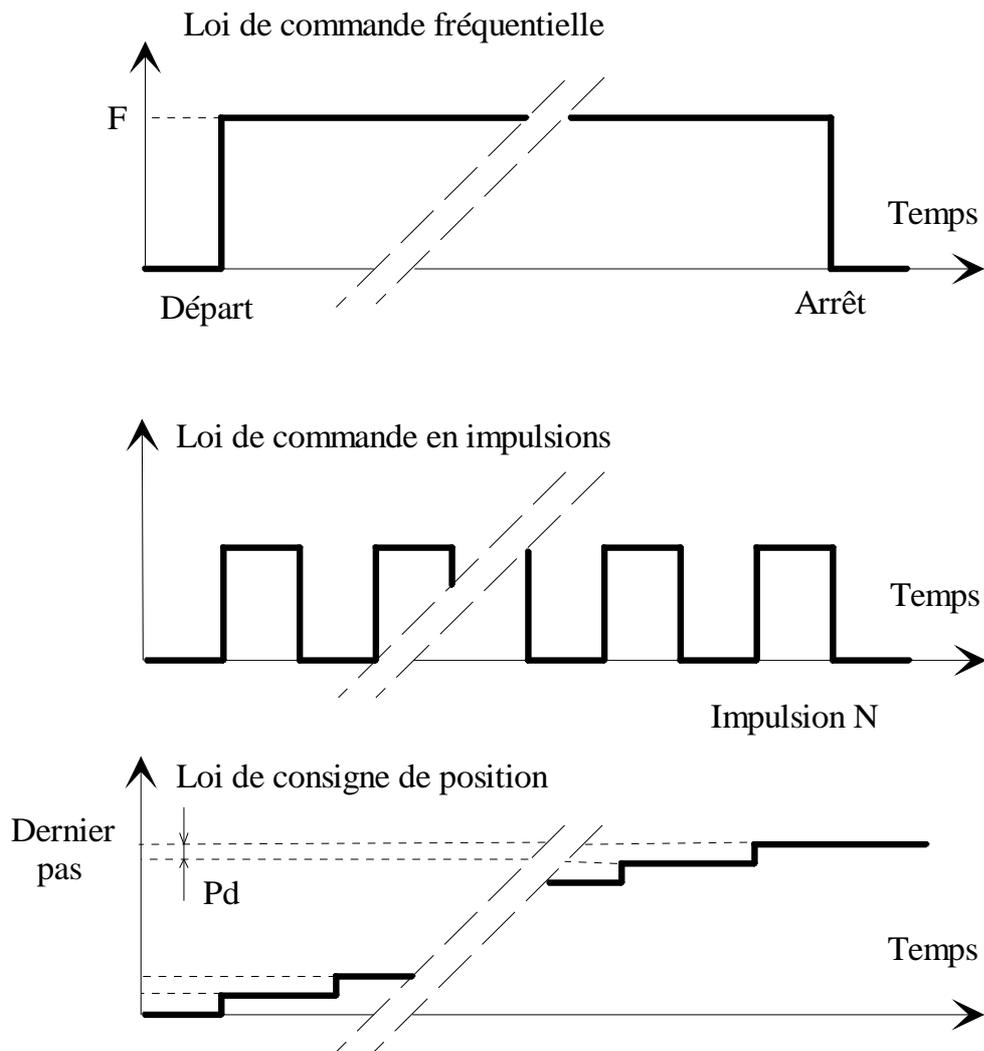


Fig.1-19: Lois de commande pour moteur pas à pas.

La Fig.1-19 décrit le fonctionnement simplifié (à vitesse constante) de l'indexeur :

L'oscillateur génère une loi de commande à fréquence constante F correspondant à une suite d'impulsions. Le translateur, à partir de ces impulsions, génère la commande électrique du moteur. Chaque impulsion provoque un déplacement de un pas P_d . Le contrôle des déplacements s'effectue par comptage des impulsions de l'oscillateur, un déplacement D correspondant à un nombre N de pas qui lui-même correspond à un nombre d'impulsions N . A la N ème impulsion, l'indexeur stoppe le moteur. IL Y A DONC ABSENCE DE CONTROLE DIRECT DU DEPLACEMENT (pas de capteurs sauf, éventuellement, fins de course.) Si le système perd des pas, la compensation est impossible.

SYSTEME NON ASSERVI.

1-3-3. POSITIONNEMENT PAR MOTEUR C.C. ET CARTE PROGRAMMABLE.

Le fonctionnement est le suivant : Le coupleur de positionnement gère de manière autonome les déplacements de l'axe en fonction d'un programme défini par l'utilisateur. Il possède des entrées adaptées à un codeur incrémental (Voies A, B et Z), un compteur haute fréquence et des sorties T.O.R. Le codeur incrémental fournit deux signaux de comptage A et B décalés de 1/4 de période pour discriminer le sens de rotation, le passage du comptage au décomptage s'effectuant automatiquement, et un top zéro qui permet la prise d'origine. Les sorties T.O.R. commutent en fonction du contenu du compteur (position du mobile) et du programme interne. Les constructeurs d'automates programmables proposent tous ce type de carte dans leur catalogue avec, pour certaines, des fonctionnalités spécifiques. Les fréquences de comptage vont de quelques dizaines de kHz à 500 kHz en standard.

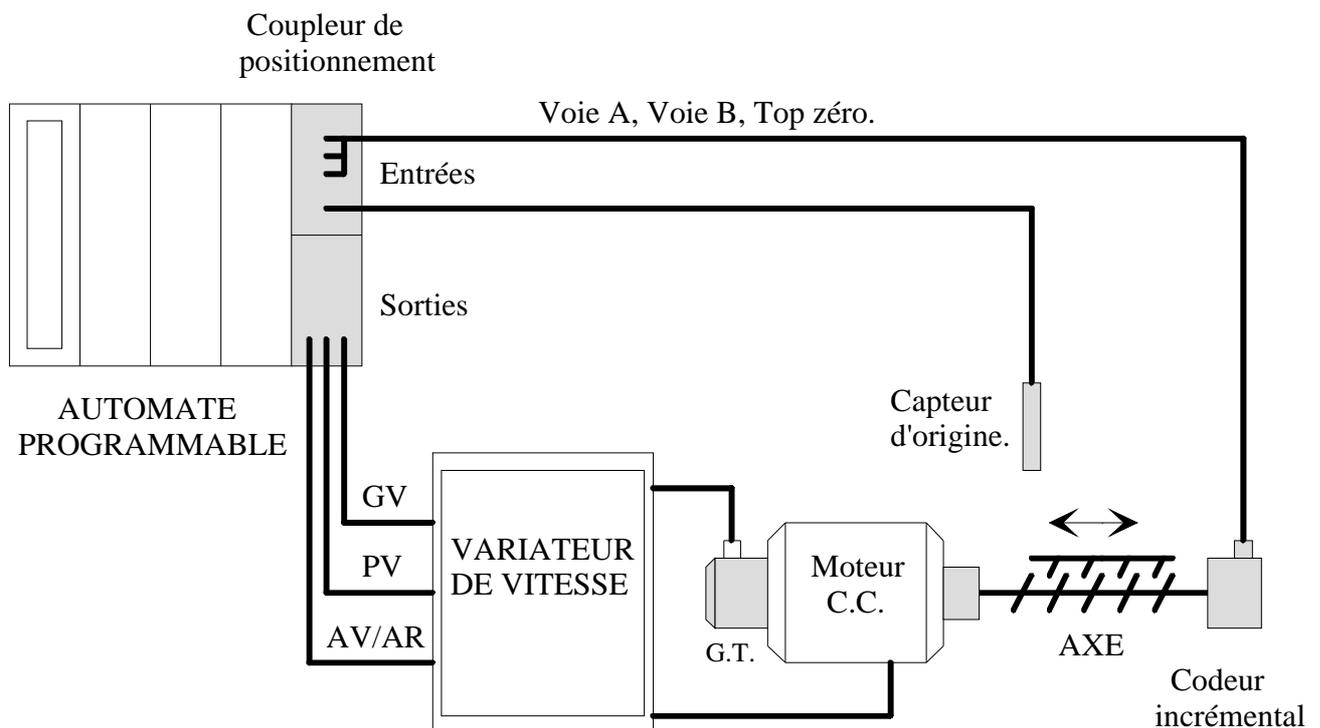
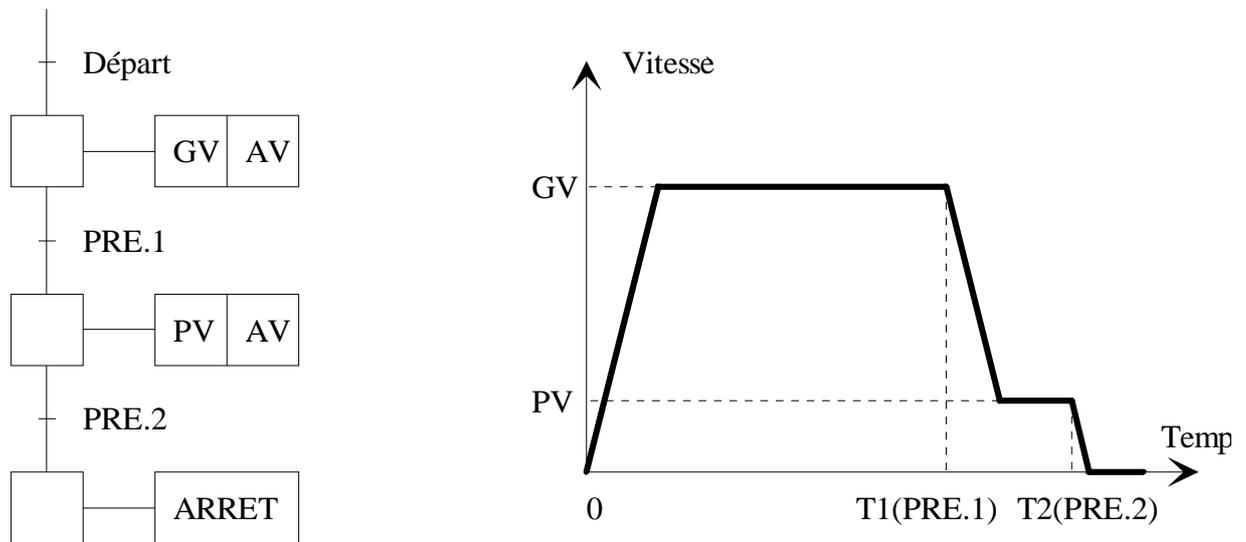


Fig.1-20 : Positionnement en chaîne directe avec moteur C.C.

La loi de commande usuellement associée à cette architecture est une loi simple dite EN TRAPEZE. On y adjoint le plus souvent un palier de ralentissement qui ralentit le cycle mais qui améliore la précision de positionnement. Cette loi est générée par le variateur car le coupleur de positionnement n'émet que des ordres T.O.R. (Voir Fig.1-21)



ORDRES EMIS PAR LE COUPLEUR

LOI DE COMMANDE GENEREE
PAR LE VARIATEUR

Fig.1-21: Loi de commande en vitesse trapézoïdale avec recalage.

SYSTEME NON ASSERVI.

L'évolution réelle de la vitesse obtenue diffère évidemment de la loi de commande spécifiée : temps de réponse, écarts, etc. La vitesse obtenue dépend, entre autres, des caractéristiques mécaniques de l'axe.

Détaillons mieux le cycle :

- Sur ordre du programme automate un cycle de déplacement est lancé : le coupleur émet les ordres GV et AV à destination du variateur.
- Le variateur commande le moteur en émettant une rampe de vitesse jusqu'à ce que la vitesse rapide soit atteinte. La valeur des vitesses (rapide et lente) est pré réglée par l'utilisateur. Certains variateurs permettent le pré réglage de la rampe de démarrage et de la rampe d'arrêt (qui peuvent être différentes) par choix du temps de montée.
- Le coupleur compte les impulsions délivrées par le codeur. Lorsque cette valeur atteint une présélection PRE.1 correspondant au point de ralentissement, il émet les ordres PV et AV.
- Le variateur commande le passage du moteur en vitesse lente. La pente de la vitesse, négative, est limitée comme au démarrage.
- Lorsque la valeur PRE.2 est atteinte par le compteur, le coupleur émet un ordre d'arrêt : le variateur commande l'arrêt du moteur. Le cycle de déplacement s'achève à l'arrêt effectif du mobile.

On conçoit aisément que le mobile ne s'arrête pas immédiatement (il faudrait une accélération infinie !) et que la distance parcourue avant l'arrêt effectif est très dépendante de la charge. Il faut donc ordonner l'arrêt un peu avant que la position désirée ne soit atteinte pour finir le déplacement sur l'inertie du système. La qualité de la réalisation mécanique et l'utilisation éventuelle d'un moteur avec frein améliorent les performances. La phase de vitesse lente doit être la plus courte possible pour limiter l'augmentation de temps de cycle.

Le nombre de points d'arrêt peut être plus important : PRE.3, PRE.4,.....,PRE.n et les cycles multiples (cas d'une chaîne linéaire de traitements de surface par exemple).

REMARQUE: On peut observer une boucle variateur/moteur/génératrice tachymétrique appelée boucle de vitesse dont le but est d'améliorer les performances du système. La vitesse est donc asservie dans cet exemple. De plus, il existe une boucle de courant interne au variateur. Enfin, il existe un retour (codeur) donnant en temps réel la position du mobile. La différence entre système bouclé et système non-bouclé est ici plus difficile à faire que dans les cas précédents, car l'architecture matérielle employée est quasiment la même que celle d'un système bouclé en position (et le prix s'en approche !). Strictement parlant, le contrôle de la position s'effectue en boucle ouverte c.à.d. que la position n'est pas asservie.

1-3-4. ASSERVISSEMENT DE POSITION AVEC MOTEUR C.C.

Le Système possède une structure ressemblant à celle vue en 1-3-3. La ressemblance s'arrête là, car la carte de commande installée sur l'automate est une carte d'axe qui est capable de comparer en permanence la position du mobile à la consigne contenue dans son programme. En fonction de l'écart constaté, la carte élabore un signal analogique continûment variable de commande de la vitesse du moteur (une tension, en général). Le variateur contrôle cette vitesse au moyen de la boucle Génératrice tachymétrique- variateur-moteur.

La carte est configurée en fonction des paramètres de l'axe à asservir : résolution codeur, accélération, décélération, vitesse maxi, etc..

Fonctionnement: Les déplacements successifs à effectuer sont mémorisés par programmation dans la carte d'axe (programmation type commande numérique). A chaque déplacement élémentaire (Δx : aller de x en x') un générateur de consigne génère une loi de consigne en position parabolique telle que la loi théorique de commande en vitesse soit une loi en trapèze sur le parcours indiqué en respectant les paramètres utilisateur tels que l'accélération (a), la décélération (d), la vitesse maximum (V_{max}), etc.

La loi de commande en vitesse est trapézoïdale en standard, certains fabricants proposant des lois de commande plus sophistiquées, comme la loi cubique. Le variateur possède deux boucles asservies : une boucle interne en courant réglée par le constructeur qui permet de contrôler le courant et donc le couple moteur, et une boucle de vitesse utilisant le retour tachymétrique.

L'asservissement complet possède donc trois boucles imbriquées : Vitesse-position-courant.

Matériel typique : Carte de positionnement numérique APRIL AXI 0010, carte d'axe SIEMENS SIMATIC S5 IP 246, carte coupleur TELEMECANIQUE TSX AXM 172.

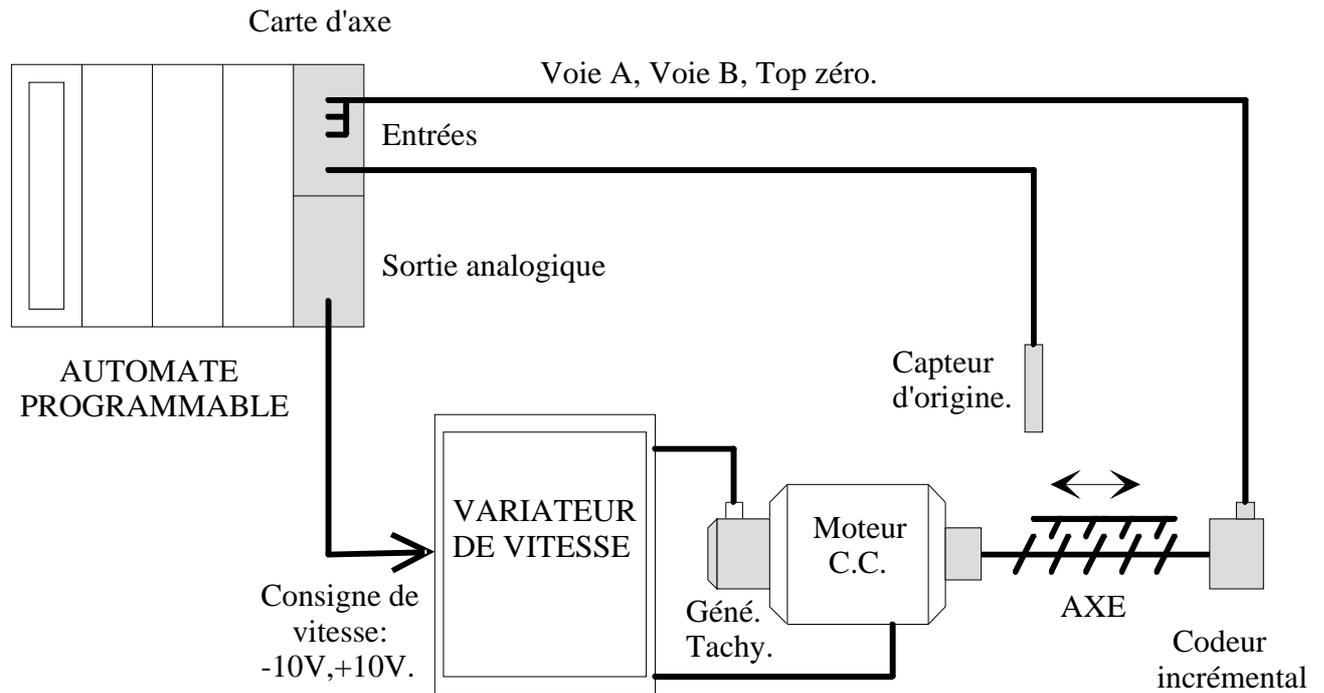


Fig.1-22: asservissement de position par carte d'axe.

SYSTEME ASSERVI.

Comme pour les systèmes en chaîne directe, l'évolution réelle de la grandeur de sortie (position ou vitesse) n'est pas identique à la commande, mais elle la suit de beaucoup plus près. En particulier, le système est capable de compenser plus efficacement les perturbations : si, pour une raison ou pour une autre, la position du mobile est modifiée, le système pilote le variateur pour se recalibrer. De la même manière, si la valeur visée est dépassée, le système provoque le recul pour se recalibrer. Ce recalibrage, s'il est trop fort, peut provoquer un mode de fonctionnement oscillatoire qui est un des inconvénients majeurs des systèmes asservis.

Le schéma Fig.1-23 représente la structure fonctionnelle de la carte d'axe et du variateur de manière simplifiée : en fait, le traitement interne à la carte est entièrement numérique : elle contient donc des éléments non-représentés ici dans un souci de clarté : Convertisseur Numérique-Analogique, compteur, liaison avec l'automate, bus interne, etc..

Certains fabricants proposent maintenant des variateurs numériques : La carte d'axe, dans ce cas, fournit une consigne de vitesse sous forme numérique (mot de n bits)

La description de l'évolution théorique de la vitesse et de la position nécessite des notions sur les systèmes asservis, en particulier la transformation de Laplace, qui sortent du cadre de ce poly.

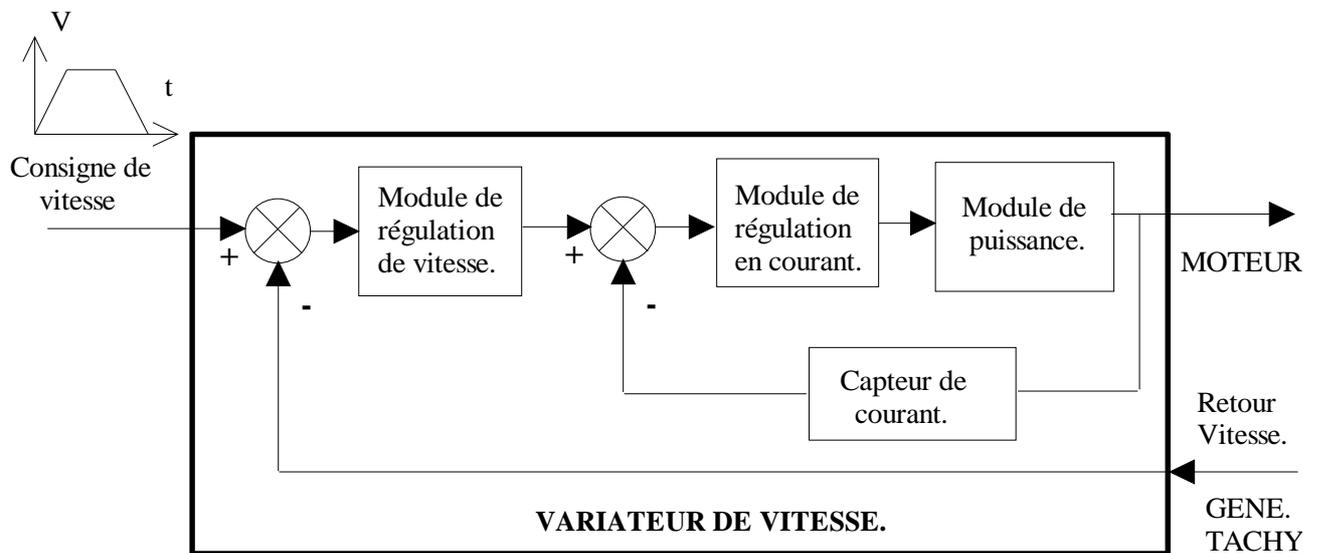
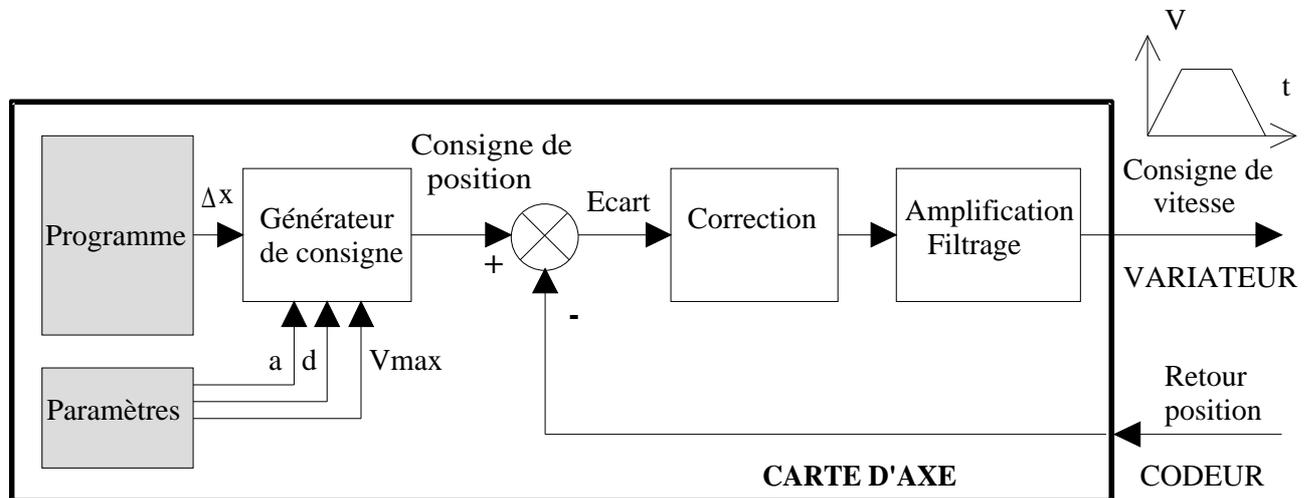


Fig.1-23: Structure de l'asservissement de position.

1-4 CRITERES DE CHOIX ENTRE COMMANDE EN CHAINE DIRECTE ET COMMANDE EN BOUCLE FERMEE.

En règle générale, on peut affirmer que :

* Les systèmes asservis sont indiqués dans le cas où il faut travailler dans des conditions présentant un caractère aléatoire. La consigne peut être aléatoire (ou de forme imprévisible lors de la conception du système) comme dans le cas du copiage ou du suivi de trajectoire et les perturbations peuvent être aléatoires comme dans le cas d'une régulation de température.

* Les systèmes asservis sont indiqués lorsque l'on désire des performances dynamiques élevées.

* Lorsque les conditions d'utilisation ne présentent aucun caractère d'imprévisibilité et que les performances attendues restent limitées, l'utilisation d'un système asservi est déconseillée : trop cher, trop complexe, réglages indispensables.

L'arbre de décision concernant le choix d'une structure de commande est reproduit Fig.1-24, page suivante.

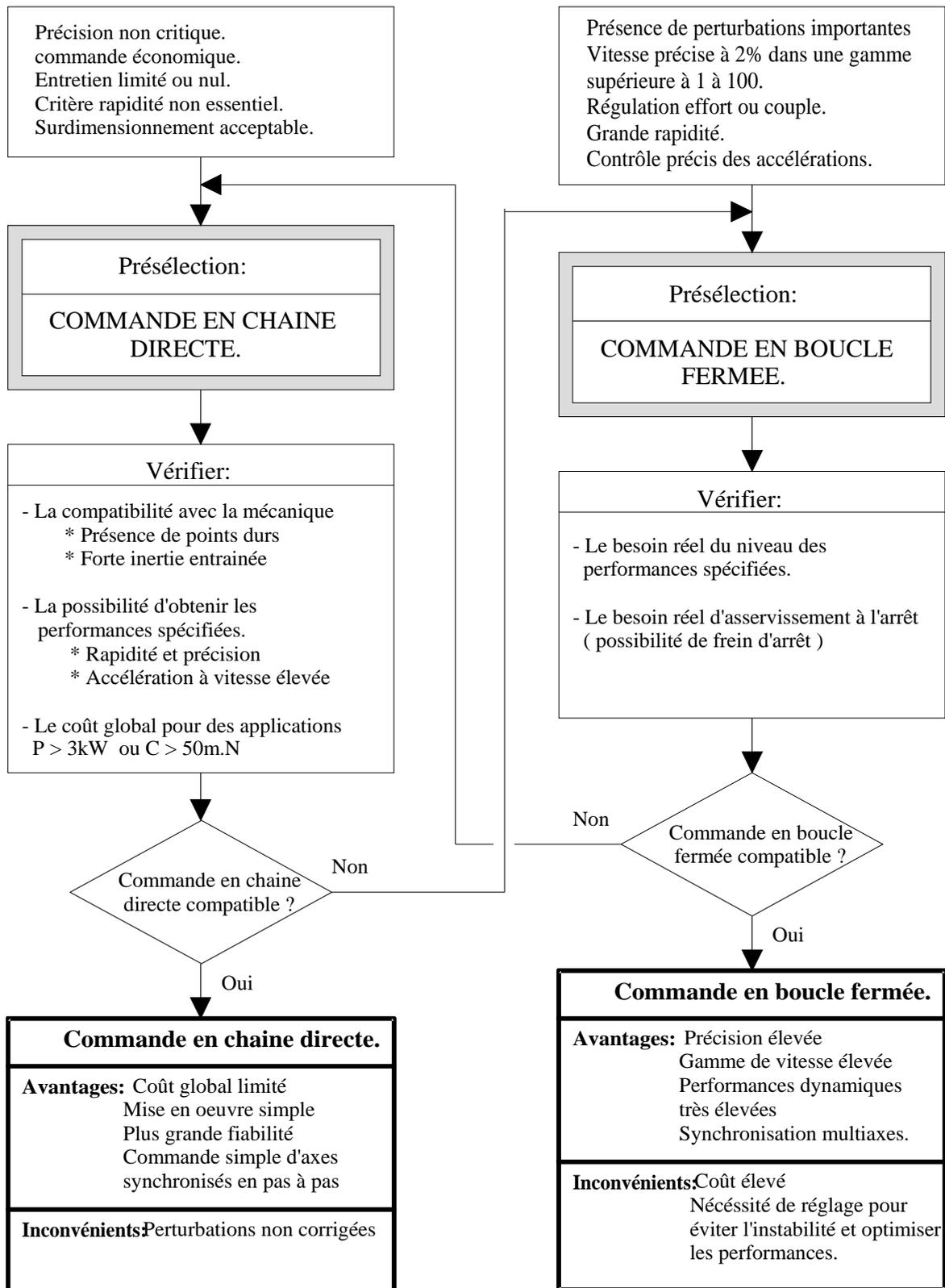


Fig.1-15: Arbre de choix du type de commande (Technoguide E).

Chapitre 2

SYSTÈMES ASSERVIS.

2-1 REPRÉSENTATION EN SCHÉMA-BLOC TEMPOREL.

2-1-1. SCHÉMA BLOC.

Le schéma-bloc est un moyen commode de représenter les structures des systèmes asservis car il correspond bien à la modélisation mathématique. En effet, il est facile de passer de la représentation fonctionnelle et temporelle habituelle à un schéma dans lequel chaque bloc est caractérisé par une fonction appelée fonction de transfert qui décrit son comportement, chaque liaison représentant une grandeur en variable de Laplace.

La représentation temporelle est celle que nous allons utiliser dans ce chapitre en considérant des systèmes en régime permanent ou à gain pur. Elle ne permet pas de déduire des relations entre les grandeurs existantes car la relation entre consigne et sortie est en général une (voire des) équation(s) différentielle(s).

On l'emploie principalement pour décrire la structure d'un système asservi.

EXEMPLES:

a) asservissement de vitesse avec moteur à courant continu.

La structure est définie ci-dessous sur un schéma-bloc ou diagramme fonctionnel :

Les fonctions nécessaires sont réalisées par différents organes :

* UN CAPTEUR : Une génératrice tachymétrique, par exemple, va fournir une tension en retour $r(t)$, qui est une image de la vitesse de rotation $\omega(t)$.

* UN COMPAREUR : Représenté par un cercle croisé, il effectue la soustraction entre l'entrée $v(t)$, généralement appelée « référence de vitesse » et le retour $r(t)$ en générant un signal d'écart $\varepsilon(t)$. Les signes plus ou moins indiquent la nature de la comparaison.

* UN AMPLIFICATEUR : Il va amplifier le signal d'écart $\varepsilon(t)$ pour fournir un signal de commande $c(t)$ suffisamment grand pour piloter le moteur.

* UN ACTIONNEUR : Il va transformer le signal de commande $c(t)$ en énergie mécanique. Ici un moteur à courant continu dont la vitesse varie avec la tension qui lui est appliquée.



Il ne faut pas confondre la consigne (non représentée) et la commande $c(t)$.

* La consigne est le but à atteindre : elle est imposée de l'extérieur du système.

* La commande dépend de la consigne mais aussi de l'état du système.

Il ne faut pas non plus confondre l'entrée $v(t)$ qui est la référence de vitesse avec la consigne. Voir le § 2-2-2 pour plus de précisions.

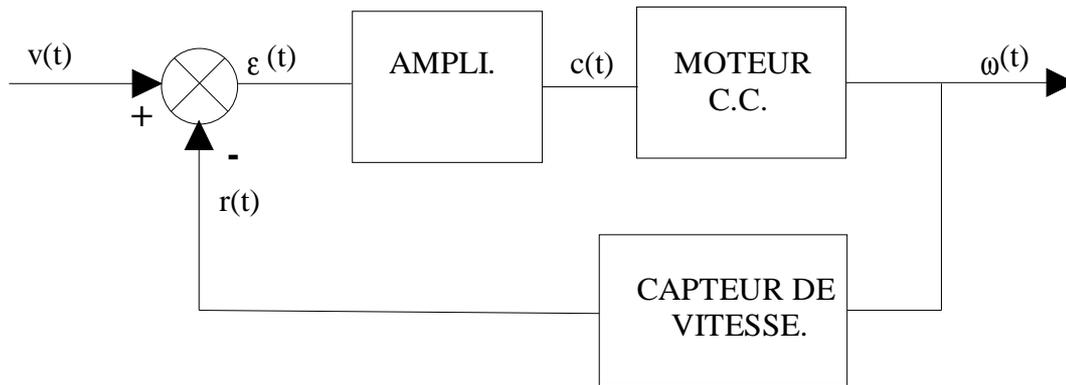


Fig.2-1: Asservissement de vitesse.

REMARQUE 1 : le retour étant une tension, l'entrée est nécessairement une tension afin de permettre la comparaison

REMARQUE 2 : Il peut apparaître d'autres éléments dans la boucle, tels qu'un correcteur, un filtre, etc.

a) Asservissement de position hydraulique.

L'entrée est une tension ; il s'ensuit que le signal de retour fourni par le capteur de position est également une tension pour permettre la comparaison. L'écart obtenu, également une tension, est amplifié et pilote une servovalve qui fournit un débit $Q(t)$ proportionnel au courant de commande $I(t)$.

Ce débit d'huile provoque le déplacement de la tige du vérin, déplacement mesuré par un capteur de position.

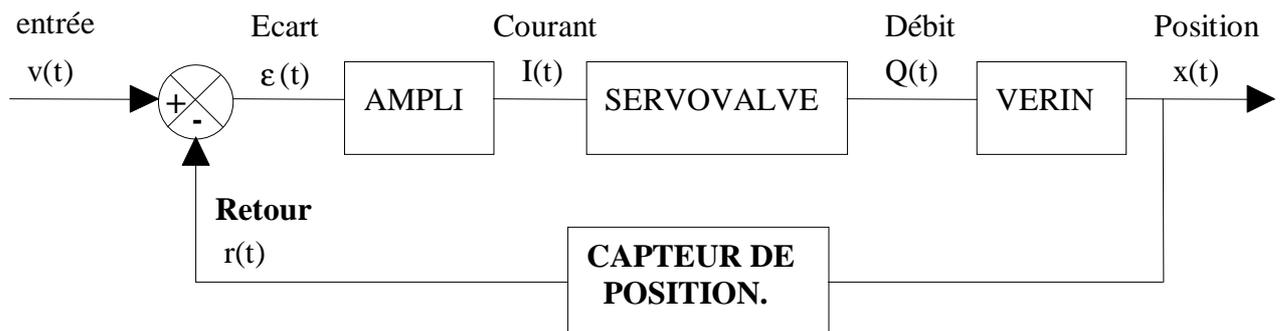


Fig.2-2: structure d'un asservissement de position hydraulique.

Cet asservissement est du type système suiveur : il doit obéir à des variations fréquentes de consigne.

Applications: servocommandes aéronautiques, commande d'axe à forte puissance.

b) Asservissement (ou régulation) de température.

La structure est sensiblement identique, mais il apparaît un bloc "P.I.D." qui signifie Proportionnel-Intégral-Dérivé et que l'on rencontre souvent en régulation de température (mais pas seulement). Ce bloc modifie d'une manière que nous détaillerons plus loin le signal d'écart dans le but d'améliorer les performances.

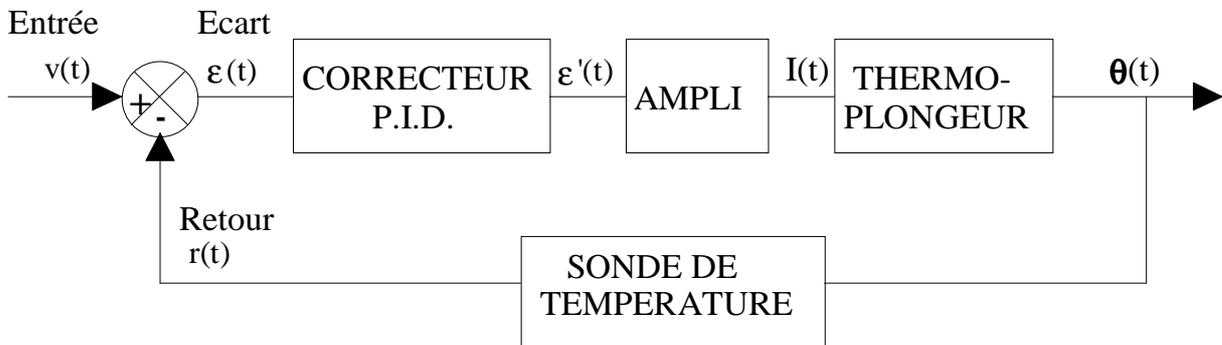


Fig.2-3: structure d'un asservissement de température.

Cet asservissement est du type système régulateur : il doit maintenir une consigne constante de température malgré les perturbations.

Applications: régulation de la température des bacs en traitements de surface, en agroalimentaire, en chimie, régulation de la température des fours ou des étuves en traitements thermiques.

c) Pilote automatique de missile (d'après Decaulne & Pélegrin).

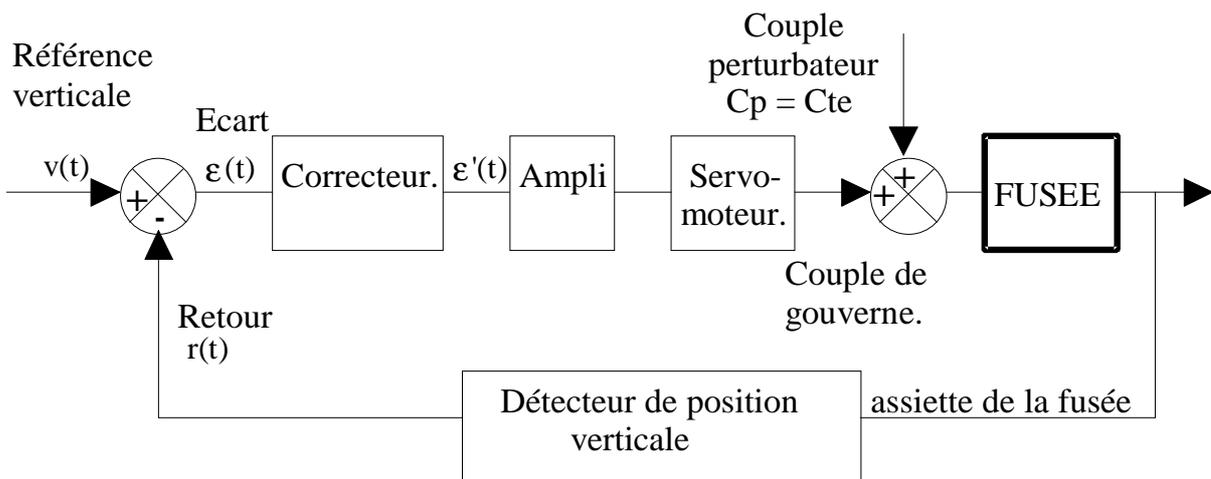


Fig.2-4: Asservissement de la stabilisation d'un missile dans le plan vertical.

Cet asservissement est du type système suiveur : il doit obéir à des variations fréquentes de consigne lorsque le missile suit le relief géographique à basse altitude.

Lors de l'étude, on considère que les variables sont la consigne et la sortie, le couple perturbateur étant considéré constant.

Mais, comme la plupart des systèmes, il est également régulateur : on considérera alors sa capacité à maintenir une assiette constante malgré les perturbations (couples exercés sur la gouverne par les rafales de vent) lorsque le missile est en croisière.

Le schéma-bloc aura alors une topologie différente correspondant au point de vue "système régulé". On remarque que ce schéma est, par ailleurs, identique à celui de la Fig.2-4.

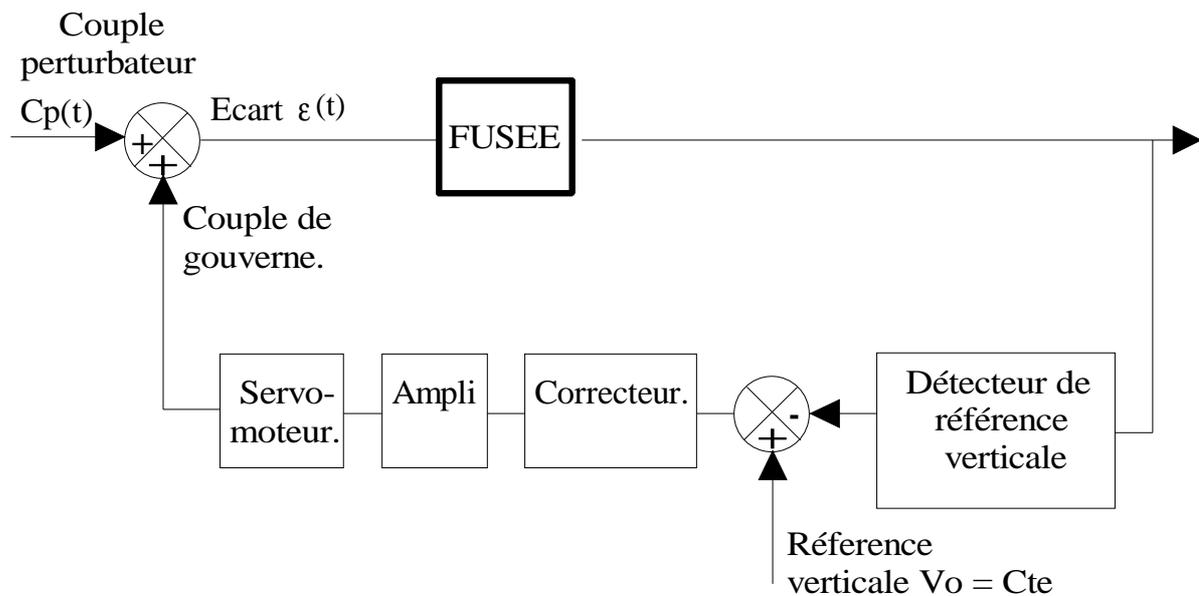


Fig.2-5: Asservissement de la stabilisation d'un missile dans le plan vertical.

2-1-2. PRÉCISIONS CONCERNANT L' « ENTRÉE » ET L' « ÉCART ».

Jusqu'à maintenant nous avons appelé « entrée » la grandeur d'entrée des servomécanismes décrits. D'autre part, nous avons appelé « écart » la grandeur issue de la comparaison entre l'entrée et le retour. Nous allons maintenant définir d'une manière rigoureuse les notions d'écart et de consigne.

Considérons un système bouclé à gain pur avec un retour non unitaire:

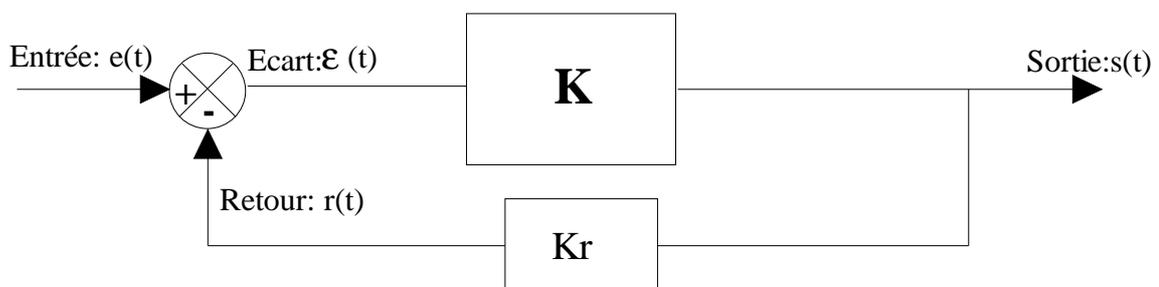


Fig 2-6: Système bouclé à gain pur.

Pour que la comparaison générant l'écart ait un sens, il faut que l'entrée et le retour soient de même grandeur. Le retour n'étant pas de la même grandeur que la sortie (car le gain de la boucle de retour est différent de 1) on en déduit que la sortie et l'entrée ne sont pas de même grandeur.

- On ne peut pas définir l'écart comme étant la différence entre la sortie et l'entrée.
- On ne peut pas définir l'entrée comme étant une consigne.

Si l'on désire faire apparaître la consigne, de même grandeur que la sortie, il faut ajouter un bloc en tête de schéma.

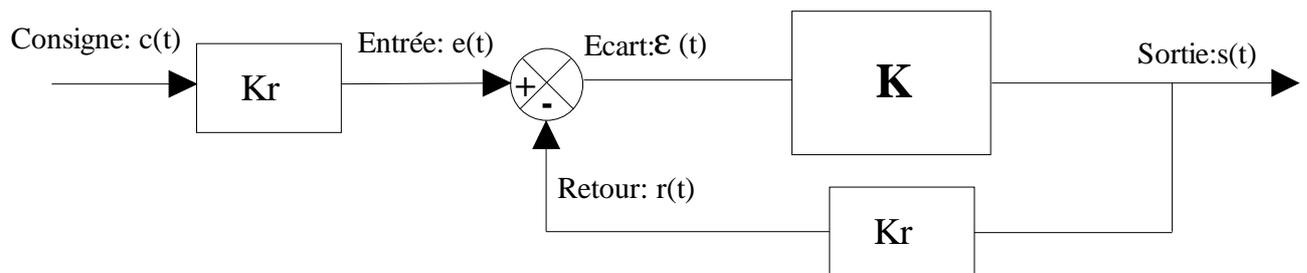


Fig 2-7: Adaptation de la consigne.

La consigne et la sortie sont maintenant de même grandeur et sont donc comparables (même si les unités sont différentes). La consigne est également appelée "valeur visée".

Dans le cas de notre système à gain pur (Fig 2-7), pour une consigne $C(t) = C$, la sortie sera égale à $S(t) = C$ et l'écart est nul. C'est également le cas pour un asservissement de position.

Par contre pour un asservissement de vitesse la sortie S ne sera pas égale à C (mais elle tendra vers C) la valeur de l'écart sera alors $C - S$.

On peut maintenant donner la définition suivante:

L'écart est la différence entre la valeur visée (la consigne) et la valeur atteinte (la sortie).

Ce que l'on peut représenter sur le schéma-bloc suivant.

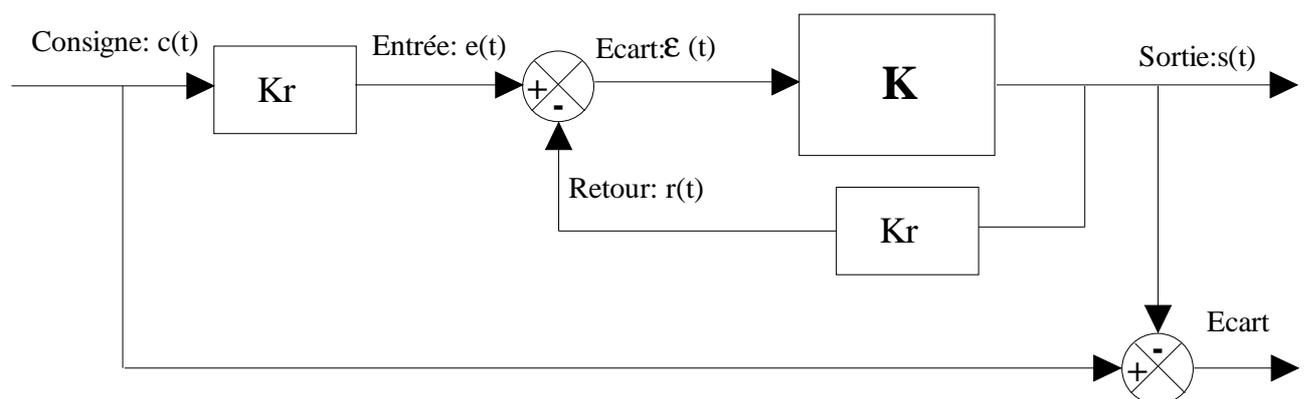


Fig 2-8: Définition de l'écart.

Le problème qui se pose maintenant est le suivant: est-ce que l'écart $\varepsilon(t)$ est bien égal à l'écart que nous venons de définir ? En fait, tout dépend de la manière de l'exprimer :

Si l'écart est exprimé en valeur algébrique (il possède alors une dimension)

$$\varepsilon(t) = e(t) - r(t) = e(t) - K_r \cdot s(t) = K_r (c(t) - s(t)).$$

l'écart tel que l'avons défini est égal à: $c(t) - s(t)$.

Les deux écarts ne sont pas égaux. Toutefois ils sont proportionnels et les considérations qualitatives sur l'évolution de l'écart sont valides: lorsque $\varepsilon(t)$ augmente, diminue ou s'annule, il en est de même pour l'écart tel que nous l'avons défini. On remarque que lorsque le retour est unitaire, $K_r = 1$ et les deux écarts sont égaux. En rendant le système Fig 2-6 à retour unitaire, on obtiendrait le schéma-bloc suivant:

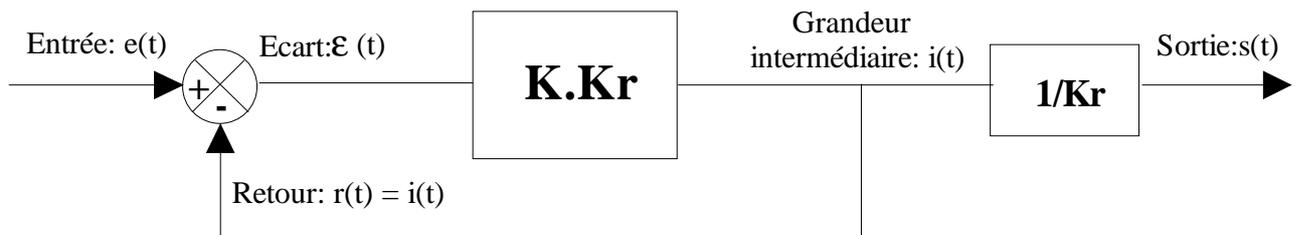


Fig 2-9: Système à retour rendu unitaire.

Dans ce cas, $\varepsilon(t)$ est l'écart entre l'entrée $e(t)$ et la grandeur intermédiaire $i(t)$. On retrouve donc la différence entre $\varepsilon(t)$ et l'écart tel que nous l'avons défini: $\varepsilon(t) = e(t) - i(t) = e(t) - K_r \cdot s(t)$.

Si l'écart est exprimé en valeur normée ou en pourcentage (c'est alors un nombre sans dimension)

$$\varepsilon(t) = \frac{e(t) - r(t)}{e(t)} = \frac{K_r(c(t) - s(t))}{K_r \cdot c(t)} = \frac{c(t) - s(t)}{c(t)}$$

L'écart tel que nous l'avons défini est: $\frac{c(t) - s(t)}{c(t)}$

Les écarts sont égaux: les deux définitions sont donc compatibles et on peut déterminer l'écart d'un système bouclé comme étant égal à $\varepsilon(t)$ si ce dernier est exprimé en pourcentage

En théorie:

Pour un système bouclé à retour unitaire, $\varepsilon(t)$ correspond à l'écart entre la valeur visée et la valeur obtenue quelle que soit la manière d'exprimer les grandeurs.

Pour un système bouclé à retour non-unitaire comme celui représenté Fig 2-6, $\varepsilon(t)$ correspond à l'écart entre la valeur visée et la valeur obtenue si les grandeurs sont exprimées en pourcentage.

En pratique:

D'une manière pragmatique, la définition de l'écart dépendra du point de vue adopté:

Du point de vue du concepteur du système asservi, on pourra considérer soit un écart sans dimension, soit $\varepsilon(t)$.

Du point de vue de l'utilisateur, on définira un écart s'exprimant dans la même unité que la grandeur de sortie (différence entre la valeur visée et la valeur atteinte).

2-2 CARACTÉRISATION DES PERFORMANCES.

De manière générale, on caractérise les performances d'un système asservi par les trois critères suivants :

- Précision.
- Rapidité / bande passante.
- Amortissement / stabilité.

Un système asservi idéal est donc rapide, précis et stable. Nous verrons par la suite que ces critères sont contradictoires pour un système bouclé.

2-2-1. LA PRÉCISION.

Elle est définie principalement par deux grandeurs qui sont soit calculées si le système est modélisé, soit mesurées expérimentalement : l'écart statique et l'écart dynamique. Comme il l'a été dit

au § 1, il s'agit bien d'un écart et non d'une erreur. Les terminologies d'erreur statique et d'erreur de traînage sont malgré tout souvent utilisées.

2-2-1-1. L'écart statique : ϵ_s

Pour caractériser l'écart statique, on soumet le système considéré à une entrée en échelon d'amplitude constante : $e(t) = E_0 \cdot u(t)$ représentée en trait fort. La réponse du système $s(t)$ est représentée en trait fin. En général, la réponse se stabilise au bout d'un certain temps (sinon il est instable, voir alors en 2-2-3.): c'est le régime permanent.

L'écart statique est la différence entre la valeur visée et la valeur atteinte en régime permanent

Les figures 2-10 et 2-11 montrent deux types de réponse à un échelon.

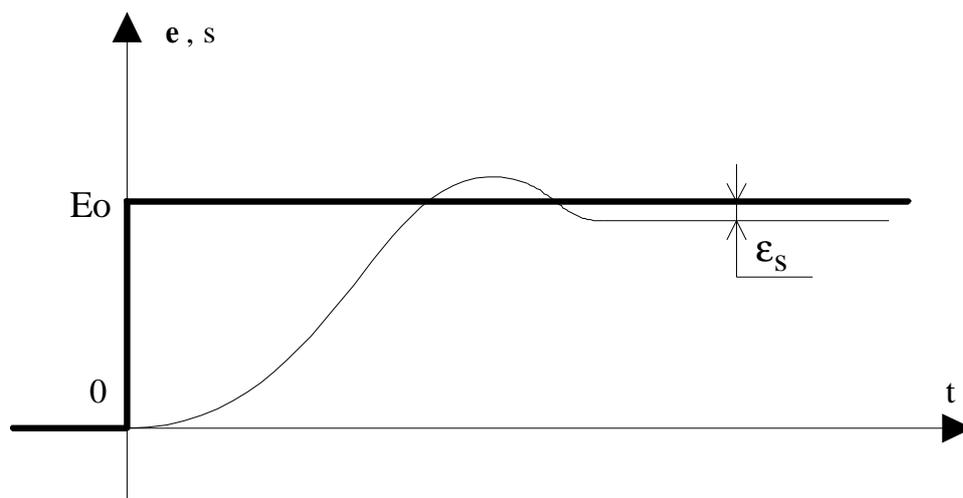


Fig.2-10: système à écart statique non nul.

C'est le cas d'un asservissement de vitesse, par exemple. L'ordre de grandeur de l'écart est de 1% de la vitesse maximum pour une application standard en commande d'axe.

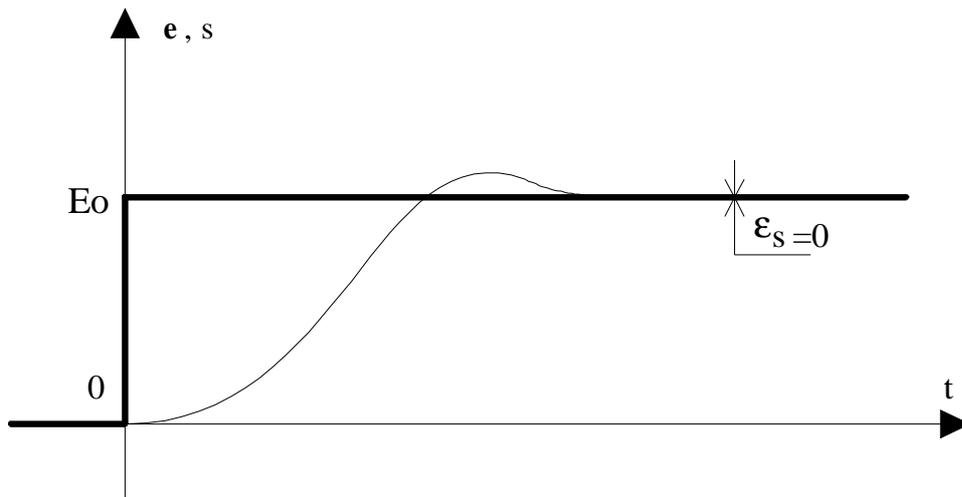


Fig.2-11: système à écart statique nul.

C'est le cas d'un asservissement de position, pour lequel l'écart statique est théoriquement nul.

2-2-1-2. L'écart dynamique : ϵ_v .

Pour caractériser l'écart dynamique, on soumet le système considéré à une entrée rampe de pente a : $e(t) = a.t.u(t)$ représentée en trait fort. De même que précédemment on considère la réponse en régime permanent.

L'écart dynamique est la différence entre la consigne et la réponse en régime permanent. On l'appelle également écart de traînage ou écart de poursuite.

Les figures 2-12, 2-13 et 2-14 montrent trois types de réponse à une rampe.

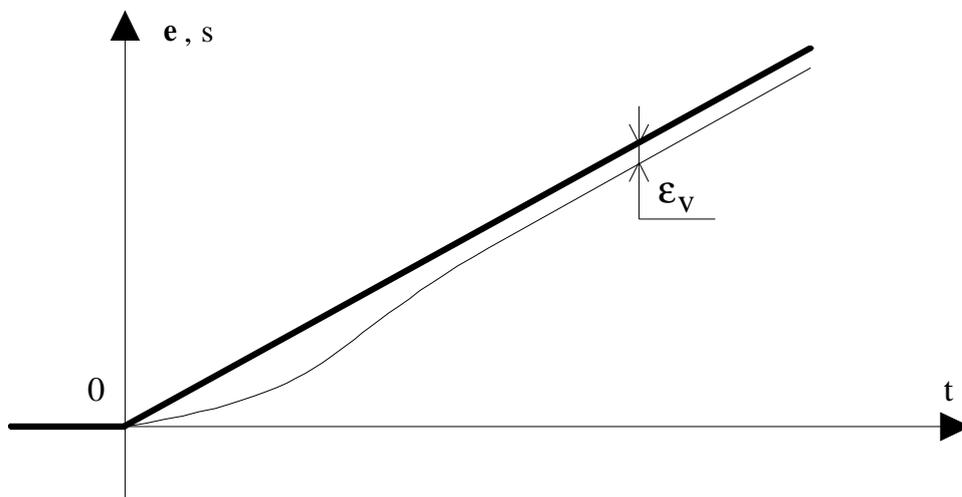


Fig.2-12: système à écart dynamique constant.

C'est le cas d'un asservissement de position pour lequel l'erreur dynamique est proportionnelle à la pente de la rampe (a). L'ordre de grandeur de l'écart de traînage est de 5mm par m/min pour une application standard en commande d'axe.

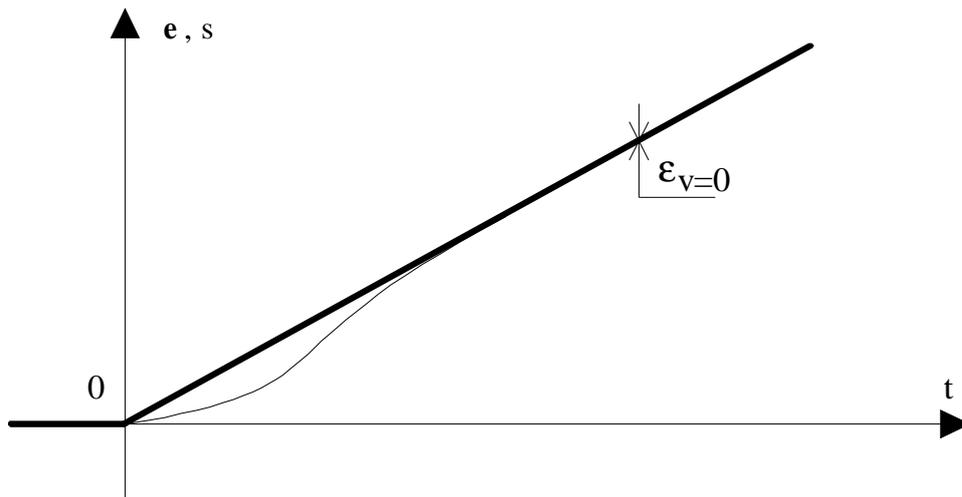


Fig.2-13: système à écart dynamique nul.

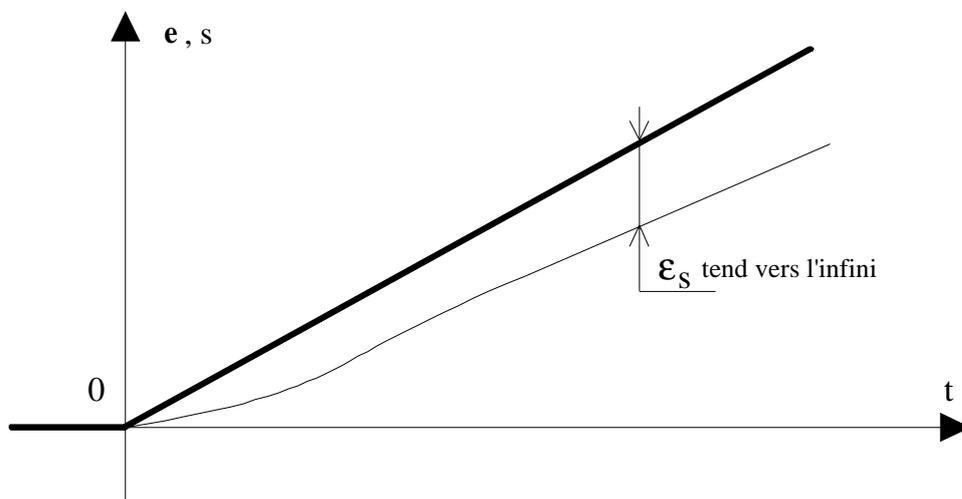


Fig.2-14: système à écart dynamique infini.

C'est le cas pour un asservissement de vitesse dans lequel l'écart de traînage augmente indéfiniment.

REMARQUE: Les mesures d'écart sont effectuées (ou calculées) en l'absence de perturbations.

2-2-1-3. Utilisation.

La connaissance de l'écart statique et de l'écart dynamique permet de caractériser la précision du système lorsqu'il est soumis à des consignes simples. Or, les consignes en commande d'axe sont souvent des signaux simples. Une loi de commande très répandue est la loi en trapèze pour laquelle les valeurs de l'écart statique et de l'écart dynamique permettent de représenter l'allure de la réponse (Comportement typique Fig.2-15). Par contre, elles ne décrivent pas le comportement transitoire lors du démarrage de la pente et lors du passage à l'horizontale.

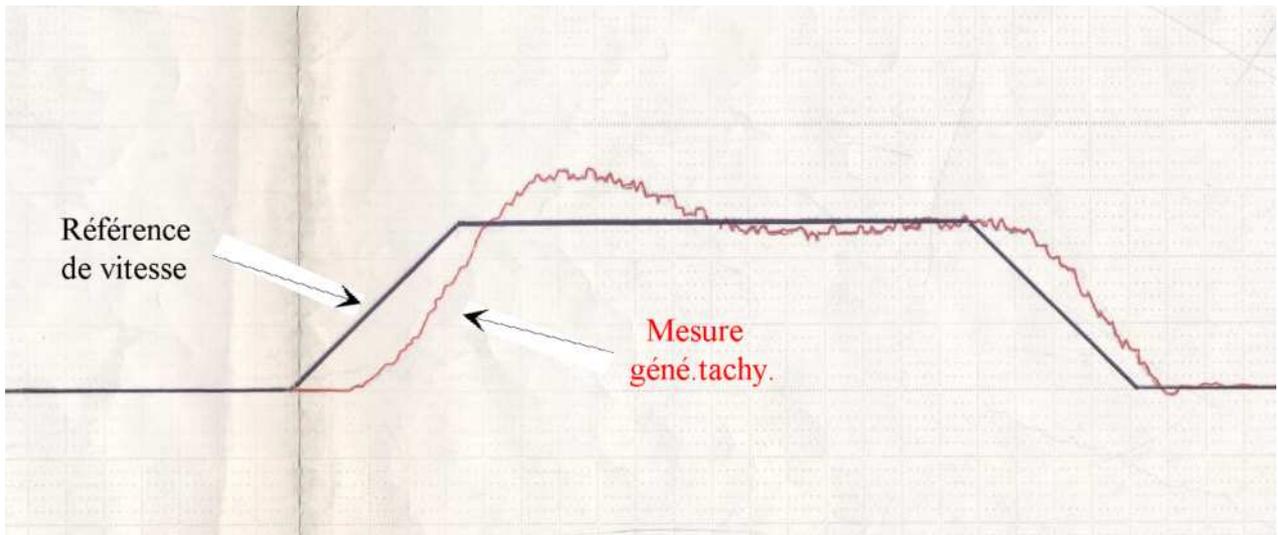


Fig.2-15: Réponse de l'asservissement de vitesse du lanceur de SPACE MOUNTAIN.

2-2-2. LA RAPIDITÉ ET LA BANDE PASSANTE.

2-2-2-1. Le temps de réponse à 5%.

La rapidité est définie par le temps de réponse du système soumis à une entrée en échelon d'amplitude E_0 . En pratique, on mesure (ou on calcule) le temps que met la réponse à rester dans une zone comprise entre plus ou moins 5% de la valeur visée.

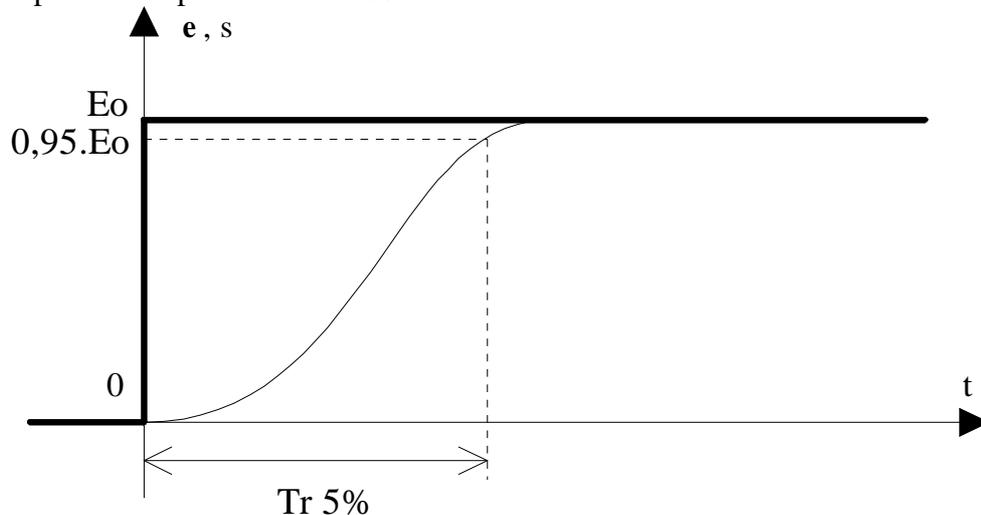


Fig.2-16: Temps de réponse à 5% d'un système non oscillant.

Pour un système oscillant, le temps de réponse n'est pas le temps au bout duquel la réponse atteint 95% de la valeur visée mais le temps au bout duquel la réponse reste définitivement dans la zone $0,95.E_0 / 1,05.E_0$. On peut immédiatement remarquer que plus le système va osciller, plus son temps de réponse va augmenter : $Tr_{5\%}$ traduit le compromis rapidité/stabilité.

REMARQUE : pour un système dont la sortie n'est pas à la même échelle que l'entrée (amplificateur par exemple), on considère $0,95 S_0$ pour la détermination de $Tr_{5\%}$

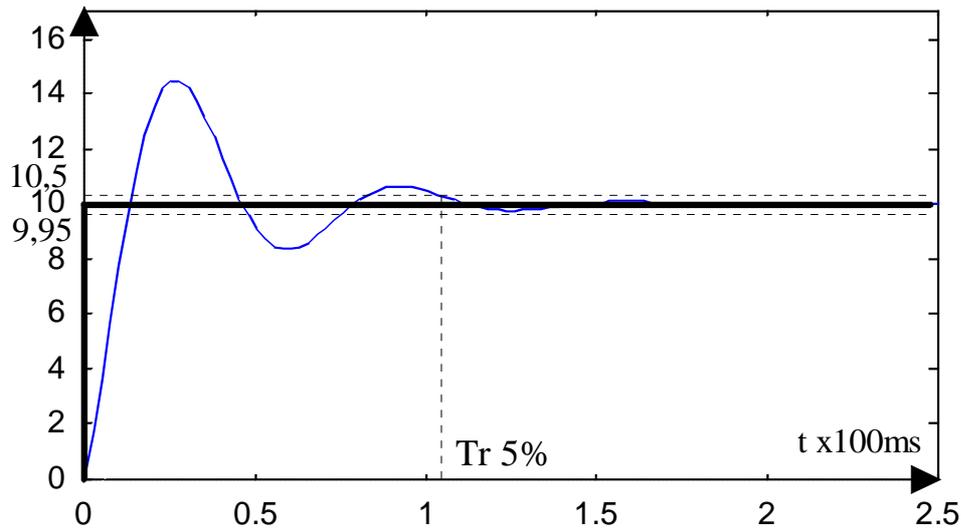


Fig.2-17: Temps de réponse à 5% d'un système oscillant.

2-1-2-2. La bande passante.

Les commandes en boucle fermée des servomécanismes se comportent comme des filtres passe-bas : tant que les variations de la consigne s'effectuent lentement (basse fréquence), la sortie suit avec une faible atténuation. Par contre lorsque la fréquence augmente, c.à.d. que la consigne varie vite, la sortie subit une atténuation croissante. Le servomécanisme ne laisse passer que les basses fréquences.

On peut facilement visualiser le phénomène en imaginant une commande en position d'un axe dont on fait varier de plus en plus vite la consigne : avant, arrière, avant, etc. Les lois de la mécanique (inerties) font que l'axe ne peut mécaniquement pas osciller à grande fréquence.

On caractérise la bande passante d'un système en le soumettant à une entrée sinusoïdale et en observant la sortie, ce pour différentes fréquences. Elle est définie comme la fréquence en deçà de laquelle l'atténuation de la sortie est inférieure à 30%.

Dans l'exemple Fig.2-18, le système est soumis à une entrée $e(t) = E_0 \sin \omega t$ d'amplitude E_0 . La réponse est de la même forme mais atténuée et déphasée : $s(t) = S_0 \sin(\omega t + \phi)$ d'amplitude $S_0 < E_0$

Sur un servomécanisme on observe que, pour une même amplitude mais avec une fréquence supérieure en entrée, l'amplitude du signal de sortie diminue et son déphasage augmente.

Inversement, pour une même amplitude mais avec une fréquence très faible en entrée, l'amplitude du signal de sortie est quasi identique et son déphasage nul.

PLUS LA FRÉQUENCE AUGMENTE EN ENTRÉE, PLUS LA RÉPONSE EST DÉFORMÉE.

La bande passante est liée au temps de réponse : un système de bande passante élevée est un système rapide et inversement.

REMARQUE : Les servomécanismes ne sont pas soumis à des consignes sinusoïdales mais la notion de bande passante est admise en pratique pour sa simplicité d'utilisation et d'interprétation.

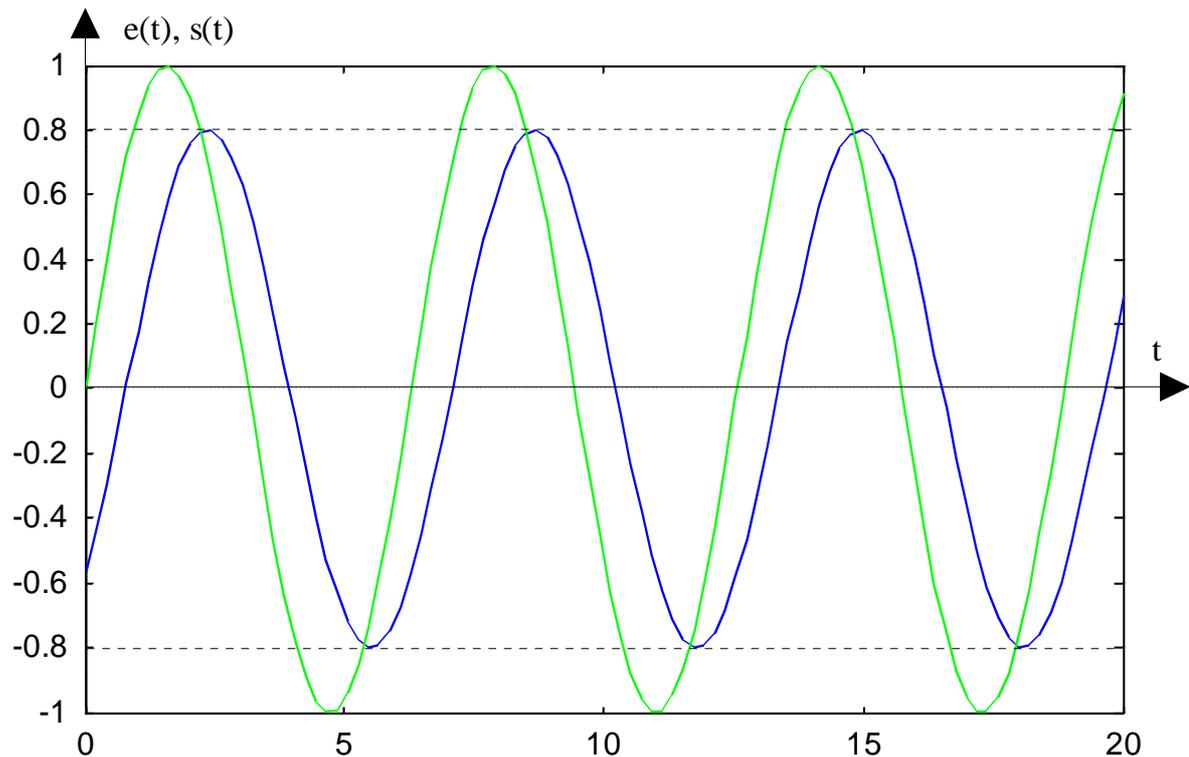


Fig.2-18: Réponse d'un système bouclé à une entrée sinusoïdale.

2-2-3. AMORTISSEMENT / STABILITÉ.

Un bon amortissement est la capacité d'un système oscillant à être suffisamment amorti et à ne pas présenter de dépassement important. Cela signifie deux choses :

* Le premier pic de la réponse ne devra pas dépasser de manière trop importante la valeur visée : on demande alors au dépassement de rester inférieur à X% de la consigne.

* Le nombre d'oscillations avant stabilisation devra être faible : cela permet de ménager la mécanique.

D'un autre côté, on ne veut pas que le système soit excessivement amorti (Fig.2-22) car l'augmentation de l'amortissement provoque une diminution du rendement du système asservi. En effet, l'amortissement correspond physiquement à des pertes d'énergie : frottements en mécanique, courants de Foucault en électricité, pertes de charges en hydraulique, etc. Les performances sont alors diminuées.

Le critère de "bon amortissement" sera défini plus loin. Il correspond à des réponses du type de celles représentées Fig.2-20 et Fig.2-21.

Qualitativement, on peut distinguer quatre cas d'amortissement :

Cas 1 : Réponse insuffisamment amortie :

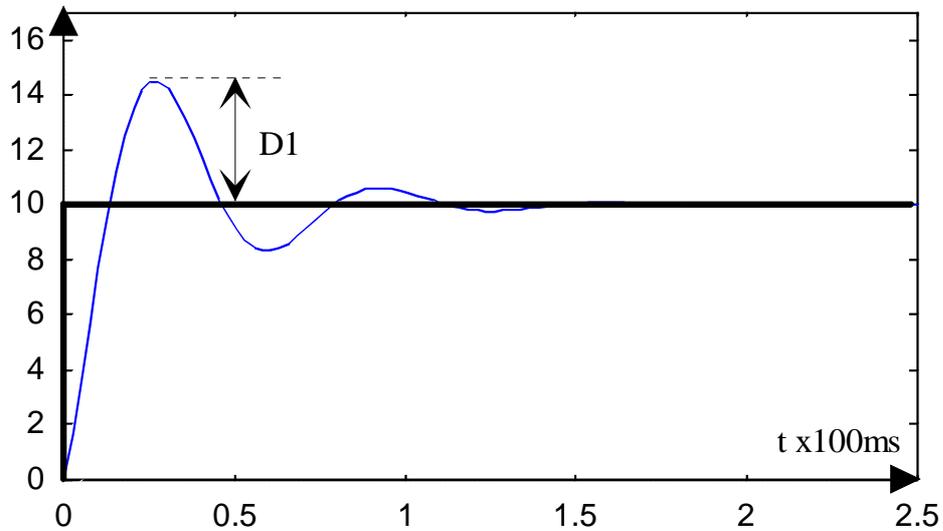


Fig.2-19: réponse insuffisamment amortie.

Conséquences:

- * Dépassement $D1$ trop important.
- * Temps de réponse trop grand.
- * Oscillations mécaniques dangereuses.

Cas 2 : Réponse correctement amortie :

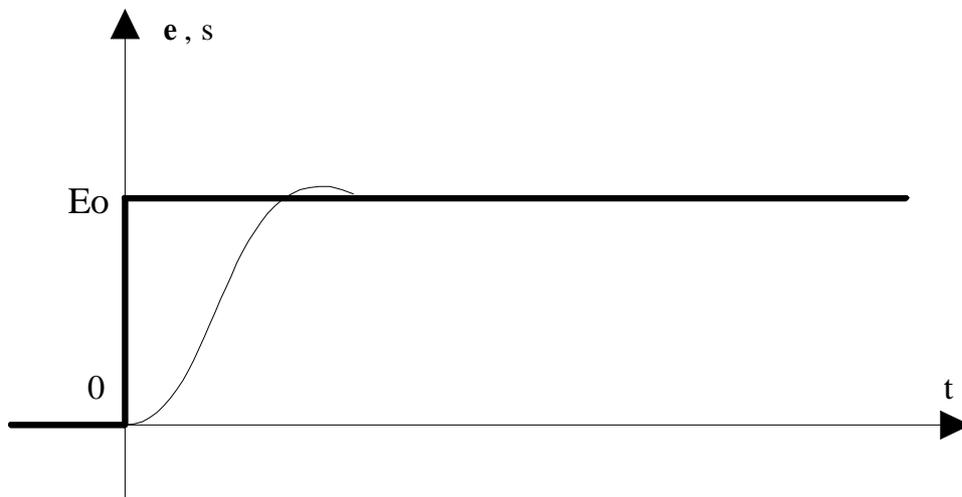


Fig.2-20: réponse correctement amortie.

C'est le meilleur cas de figure :

- * Dépassement $D1$ faible.
- * Temps de réponse petit.
- * Pas d'oscillations.

Cas 3 : Réponse bien amortie sans dépassement :

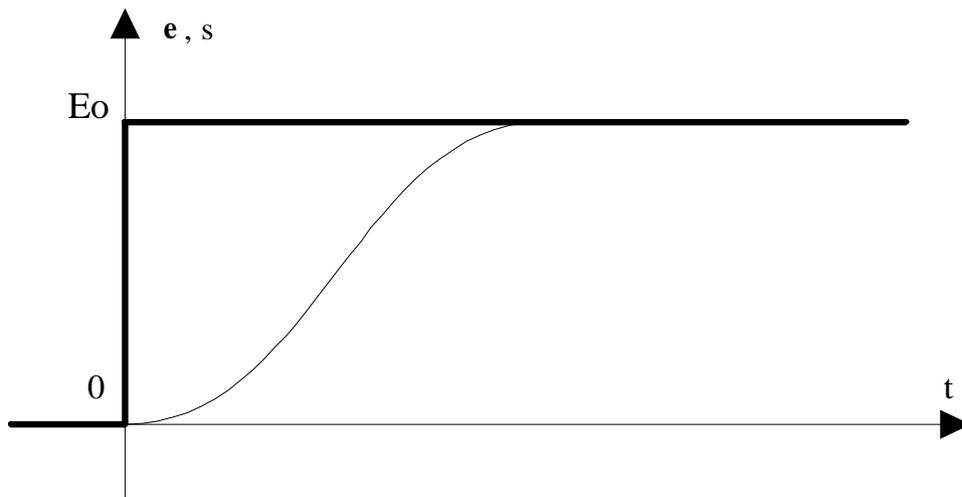


Fig.2-21: réponse bien amortie sans dépassement.

Dans certains cas, comme celui de la commande en position sur une M.O.C.N., on ne tolère aucun dépassement pour l'outil : il doit atteindre la valeur visée sans la dépasser, ce qui serait dangereux lors de l'accostage d'une pièce par exemple. La valeur de l'amortissement est alors un peu plus importante que dans le cas précédent.

Conséquences:

- * Dépassement D1 nul.
- * Temps de réponse un peu plus long, mais acceptable.
- * Pas d'oscillations.

Cas 4 : Réponse trop amortie (ou sur-amortie).

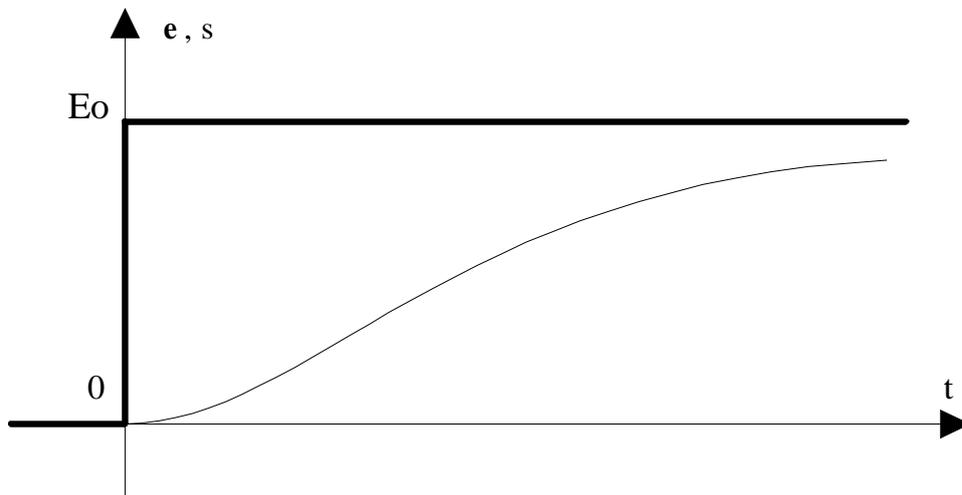


Fig.2-22: réponse trop amortie.

Conséquences:

- * Dépassement D1 nul.
- * Temps de réponse élevé : système lent.
- * Pas d'oscillations.

Chapitre 3

FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME BOUCLÉ

3-1. FONCTION DE TRANSFERT.

3-1-1. DEFINITION.

L'application des lois de la physique et les hypothèses de linéarisation conduisent souvent à une (ou des) équation(s) différentielle(s) décrivant le comportement du système. Considérons un système linéaire continu quelconque : il est caractérisé par l'équation différentielle (3-1), qui est en variable temporelle (voir : Outils mathématiques §4).

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 \cdot e(t) \quad (3-1)$$

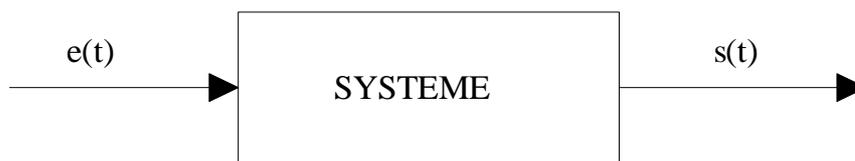


Fig.3-1: Système le plus général.

Nous avons vu dans les chapitres précédents que l'on peut remplacer le terme "Système" par un coefficient appelé gain du système reliant la valeur de l'entrée à celle de la sortie mais **UNIQUEMENT EN REGIME PERMANENT** (ce qui revient à annuler les dérivées successives). Or, la connaissance du régime transitoire est indispensable dans de nombreux cas, en particulier celui des servomécanismes qui fonctionnent fréquemment en régime transitoire.

On pourrait écrire l'équation différentielle dans la case "Système", ce qui n'avancerait à rien, la sortie n'étant pas exprimable en fonction de l'entrée tant que l'on a pas résolu l'équation différentielle.

L'idée consiste à utiliser la transformation de Laplace qui permet d'obtenir une relation algébrique entre la sortie et l'entrée sans résoudre l'équation différentielle. (Voir : Outils mathématiques §5)

Appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (3-1) :

La transformation de Laplace étant linéaire, on transforme séparément chaque terme et on effectue l'addition à la fin. Les transformées de Laplace du signal d'entrée et du signal de sortie seront respectivement notées $E(p)$ et $S(p)$. On fera l'hypothèse que le système part du repos, c.à.d. que les fonctions et leurs dérivées successives sont nulles en $t = 0$.

Le théorème de la dérivation donne la transformation suivante :

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) S(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) E(p)$$

En divisant, il vient :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0)}{(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0)} = H(p)$$

La fonction $H(p)$ est appelée TRANSMITTANCE ou FONCTION DE TRANSFERT du système. Cette fonction est une fraction rationnelle en p . En explicitant les racines complexes et/ou réelles des polynômes numérateur et dénominateur, on peut écrire $H(p)$ sous la forme :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K \left(1 - \frac{p}{z_1}\right) \left(1 - \frac{p}{z_2}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{z_m}\right)}{\left(1 - \frac{p}{p_1}\right) \left(1 - \frac{p}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{p_n}\right)}$$



$H(p)$ peut également s'écrire sous la forme : $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K'(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$

mais le facteur constant K' n'est pas égal au gain statique K

- * Les z_i sont les ZEROS de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- * Les p_i sont les POLES de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- * Le degré de $D(p)$ est appelé ORDRE de la fonction de transfert ou du système.
- * L'équation $D(p) = 0$ est appelée EQUATION CARACTERISTIQUE.
- * Le facteur constant K est appelé GAIN STATIQUE du système.
- * S'il existe une racine nulle d'ordre α de $D(p)$, un terme en p^α apparaît au dénominateur. α est la CLASSE de la fonction de transfert ou du système.

Représentons maintenant le schéma-bloc en variable de Laplace. Le bloc est décrit par sa fonction de transfert qui est une entité mathématique reliant la grandeur de sortie à la grandeur d'entrée EN VARIABLE DE LAPLACE par : $S(p) = E(p) \cdot H(p)$

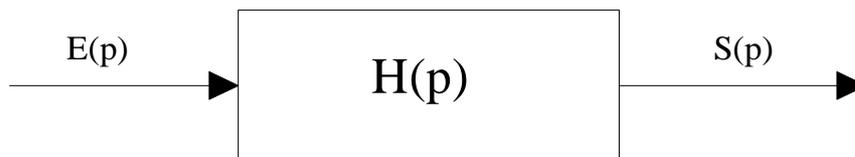


Fig.3-2: fonction de transfert d'un système.

3-1-2. EXEMPLE : MOTEUR A COURANT CONTINU.

Nous avons rencontré en 1-1-3-2 l'équation différentielle exprimant la relation entre la vitesse $\omega(t)$ d'un moteur à courant continu et la tension d'entrée $v(t)$, que nous démontrerons plus loin :

$$v(t) = \frac{1}{K_T} \left[(R.f + K_E \cdot K_T) \cdot \omega(t) + (R.J + L.f) \frac{d\omega(t)}{dt} + L.J \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} \right] \quad (1-1) \quad (3-2)$$

Appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation en supposant les conditions initiales toutes nulles et en posant : $V(p) = L[v(t)]$ et $\Omega(p) = L[\omega(t)]$

$$V(p) = \frac{1}{K_T} \left[(R.f + K_E.K_T) \cdot \Omega(p) + (R.J + L.f)p \cdot \Omega(p) + L.J.p^2 \cdot \Omega(p) \right]$$

$$\Rightarrow V(p) = \frac{1}{K_T} \left[(R.f + K_E.K_T) + (R.J + L.f)p + L.J.p^2 \right] \cdot \Omega(p)$$

$$\Rightarrow \Omega(p) = \frac{K_T}{\left[(R.f + K_E.K_T) + (R.J + L.f)p + L.J.p^2 \right]} \cdot V(p)$$

La fonction de transfert du moteur à courant continu est donc :

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{V(p)} = \frac{K_T}{\left[(R.f + K_E.K_T) + (R.J + L.f)p + L.J.p^2 \right]}$$

que l'on peut écrire :

$$H(p) = \frac{\frac{K_T}{(R.f + K_E.K_T)}}{\left[1 + \frac{(R.J + L.f)}{(R.f + K_E.K_T)}p + \frac{L.J}{(R.f + K_E.K_T)}p^2 \right]} \quad \text{de la forme : } H(p) = \frac{K}{\left[1 + \frac{2z}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2 \right]}$$

Suivant les valeurs de z et de ω_n , le trinôme au dénominateur possède des racines réelles ou complexes. On pourra ensuite écrire $H(p)$ sous sa forme canonique (voir outils mathématiques §3).

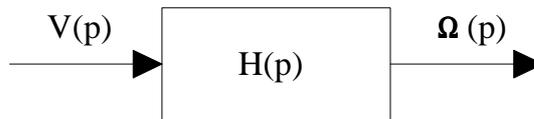


Fig.3-3: fonction de transfert en vitesse d'un moteur C.C.

Finalement:

* Le moteur C.C. en vitesse est un système du second ordre car le dénominateur est d'ordre deux.

* Le gain statique du moteur est $K = \frac{K_T}{(R.f + K_E.K_T)}$

* Le système est de classe zéro, car p n'est pas en facteur au dénominateur.

Nous détaillerons tout ceci lors de l'étude des systèmes du second ordre.

REMARQUE: La fonction de transfert du même moteur mais en position se déduit facilement de la précédente en utilisant une propriété de la transformation de Laplace : La position angulaire de l'arbre moteur étant l'intégrale de sa vitesse, il suffit de multiplier $\Omega(p)$ par $1/p$ pour obtenir $\Theta(p)$.

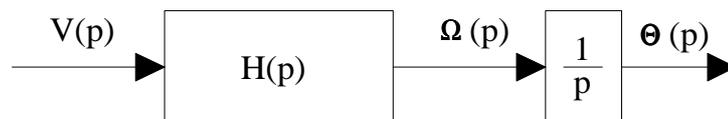


Fig.3-4: fonction de transfert en position d'un moteur C.C.

3-2. FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME BOUCLE.

3-2-1. MISE EN CASCADE DE SYSTEMES.

Considérons le système Fig.3-5 constitué de deux sous-systèmes en série respectivement de fonction de transfert $H(p)$ et $G(p)$. Ce système est équivalent à un seul système de fonction de transfert $F(p) = H(p).G(p)$

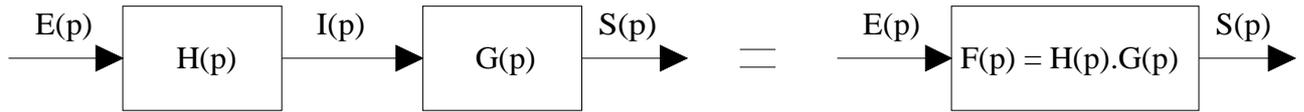


Fig.3-5: Systèmes en cascade.

Pour ce qui nous concerne, les fonctions de transfert ne se présenteront pas sous la forme de matrices (qui sont utilisées en représentation d'état) : la mise en cascade est donc commutative.

$$F(p) = H(p).G(p) = G(p).H(p)$$

Dans le cas du moteur à courant continu en position (Fig.3-4) la mise en cascade donne la fonction de transfert en position $F(p)$ avec $G(p) = 1/p$:

$$F(p) = \frac{\theta(p)}{V(p)} = H(p).G(p) = \frac{K_T}{p[(R.f + K_E.K_T) + (R.J + L.f)p + L.J.p^2]}$$

$$F(p) \text{ est donc de la forme : } F(p) = \frac{K}{p \left[1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right]}$$

* Le moteur C.C. en position est un système du troisième ordre car le dénominateur est d'ordre trois.

* Le gain statique du moteur est $K = \frac{K_T}{(R.f + K_E.K_T)}$

* Le système est de classe un : on dit qu'il possède une intégration.

Nous verrons que cette intégration est la cause des différences de performances en précision entre un asservissement de vitesse et un asservissement de position que nous avons évoquées au chapitre 3.

3-2-2. SYSTEMES BOUCLES.

Considérons un système asservi usuel (schéma-bloc Fig.3-6) : il contient en général un ampli de gain réglable K , le système à asservir de fonction de transfert $G(p)$ et une boucle de retour de fonction de transfert $F(p)$.

Les variables sont : entrée: $E(p)$, retour : $R(p)$, écart : $\varepsilon(p)$, commande : $C(p)$, sortie : $S(p)$.

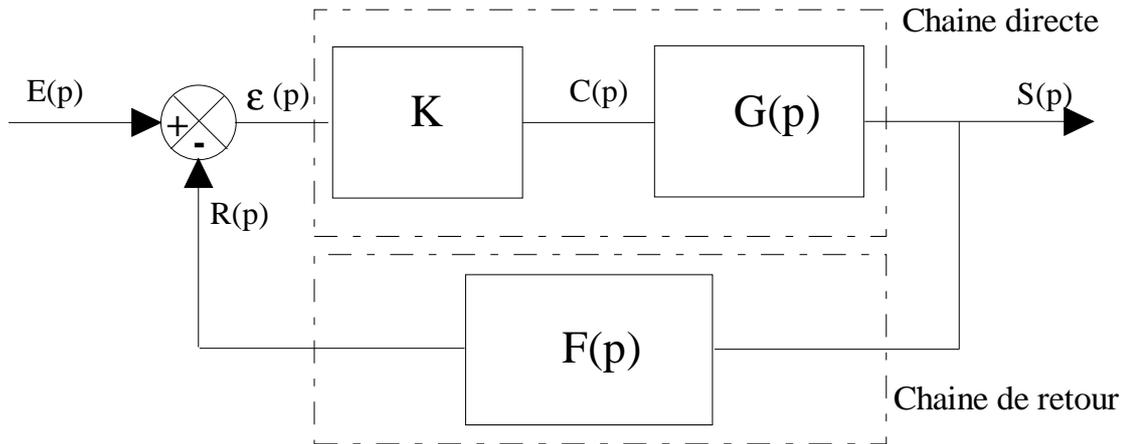


Fig.3-6: Système bouclé.

Cherchons la relation reliant $S(p)$ à $E(p)$:

$$S(p) = C(p).G(p) = \varepsilon(p).K.G(p) \quad (3-3)$$

$$R(p) = S(p).F(p) \quad (3-4)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - R(p) \quad (3-5)$$

$$(3-4) \text{ et } (3-5) \Rightarrow \varepsilon(p) = E(p) - S(p).F(p) \quad (3-6)$$

$$(3-3) \text{ et } (3-6) \Rightarrow S(p) = [E(p) - S(p).F(p)].K.G(p) \quad (3-7)$$

$$\text{de (3-7) il vient :} \quad S(p) = \frac{K.G(p)}{1 + K.G(p)F(p)} E(p) \quad (3-8)$$

La fonction $\frac{K.G(p)}{1 + K.G(p)F(p)}$ est appelée : FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE FERMEE DU SYSTEME (F.T.B.F.)

Le système Fig.3-6 peut maintenant se représenter comme suit :



Fig.3-7: Fonction de transfert en boucle fermée.

La F.T.B.F. décrit le fonctionnement du système en incluant la boucle.

On utilisera souvent (pour simplifier les calculs) une autre fonction de transfert qui s'appelle FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE OUVERTE (F.T.B.O.). C'est la fonction de transfert du système considéré mais avec la boucle ouverte au niveau du comparateur : les trois sous-systèmes sont alors en cascade et on peut écrire : $F.T.B.O.(p) = K.G(p).F(p)$

 **Il ne faut pas confondre la F.T.B.O. avec la fonction de transfert de la chaîne directe qui est $K.G(p)$; ces deux fonctions de transfert sont égales uniquement dans le cas d'un retour unitaire correspondant à $F(p) = 1$**

Cherchons maintenant à exprimer l'écart $\epsilon(p)$.

$$(3-4) \text{ et } (3-5) \Rightarrow \epsilon(p) = E(p) - S(p).F(p) \quad (3-10)$$

$$(3-10) \text{ et } (3-3) \Rightarrow \epsilon(p) = E(p) - \epsilon(p).K.G(p).F(p) \quad (3-11)$$

$$\text{De (3-11) on tire : } \epsilon(p) = \frac{1}{1 + K.G(p).F(p)} E(p) \quad (3-12)$$

En résumé :

Fonction de transfert en boucle fermée :
$$FTBF(p) = \frac{K.G(p)}{1 + K.G(p).F(p)} \quad (3-13)$$

Fonction de transfert en boucle ouverte :
$$FTBO(p) = K.G(p).F(p) \quad (3-14)$$

Fonction de transfert de la chaîne directe :
$$F.T.\text{chaîne directe } (p) = K.G(p)$$

écart:
$$\epsilon(p) = \frac{1}{1 + K.G(p).F(p)} E(p) \quad (3-12)$$

On remarque que le terme : $1+K.G(p).F(p)$ apparaît au dénominateur en (3-12) et en (3-13).
 L'équation : $1+K.G(p).F(p) = 0$ est l'équation caractéristique du système déjà définie en 3-1-1 et qui permet la recherche des pôles de la fonction de transfert.

3-2-3. SYSTEMES BOUCLES A RETOUR UNITAIRE.

Un système à retour unitaire est un système dont la fonction de transfert $F(p)$ de la chaîne de retour est égale à 1. Le schéma-bloc est alors :

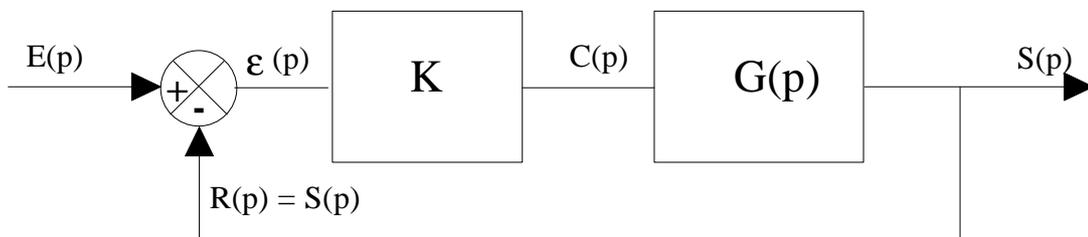


Fig.3-8: Système bouclé à retour unitaire.

Les relations établies au chapitre précédent se simplifient en remplaçant $F(p)$ par 1.

$$\text{Fonction de transfert en boucle ouverte : } \boxed{FTBO(p) = K.G(p)} \quad (3-15)$$

$$\text{Fonction de transfert en boucle fermée : } \boxed{FTBF(p) = \frac{K.G(p)}{1+K.G(p)} = \frac{FTBO(p)}{1+FTBO(p)}} \quad (3-16)$$

$$\text{écart: } \boxed{\varepsilon(p) = \frac{1}{1+K.G(p)} E(p)} \quad (3-17)$$

On obtient le résultat important suivant : La FTBF s'exprime directement en fonction de la FTBO par une relation élémentaire du type : $\frac{u}{1+u}$. Les propriétés de la FTBO et de la FTBF sont donc liées.

Cette relation nous permettra par la suite de travailler sur la FTBO qui est une fonction plus simple, le passage FTBO vers FTBF étant alors effectué en utilisant un abaque.

Transformation d'un système à retour non-unitaire en système à retour unitaire.

Considérons le système à retour non-unitaire Fig.3-6 : on peut le représenter de la manière suivante :

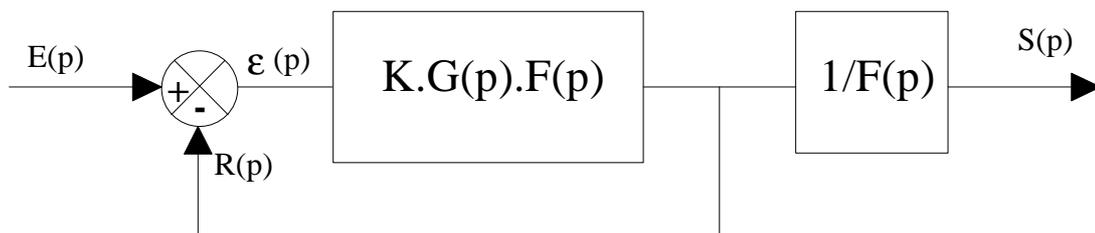


Fig.3-9: Système à retour unitaire, équivalent au système fig : 3-6.

Montrons que les deux schéma-blocs sont équivalents, c.à.d. que la fonction de transfert $S(p)/E(p)$ est la même dans les deux cas :

$$S(p) = \varepsilon(p).K.G(p).F(p).\frac{1}{F(p)} = \varepsilon(p).K.G(p)$$

$$R(p) = \varepsilon(p).K.G(p).F(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - R(p) = E(p) - \varepsilon(p).K.G(p).F(p)$$

d'où on tire :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+K.G(p).F(p)} E(p)$$

$$S(p) = \varepsilon(p).K.G(p) = \frac{K.G(p)}{1+K.G(p).F(p)} E(p)$$

On retrouve (3-8) et (3-12) : le système est bien équivalent au système Fig.3-6.

Les règles élémentaires de transformation des schéma-blocs sont données en fin de chapitre.

3-2-4. EXEMPLE : ASSERVISSEMENT DE POSITION.

Le système représenté Fig.3-10 permet d'asservir la position angulaire θ_s de l'arbre du moteur M à une consigne d'entrée matérialisée par la position angulaire θ_e d'un potentiomètre circulaire. En d'autres termes, il est souhaité que ce dispositif fasse en sorte que la position angulaire de l'arbre moteur soit la copie de celle du potentiomètre d'entrée, et ceci à tout instant.

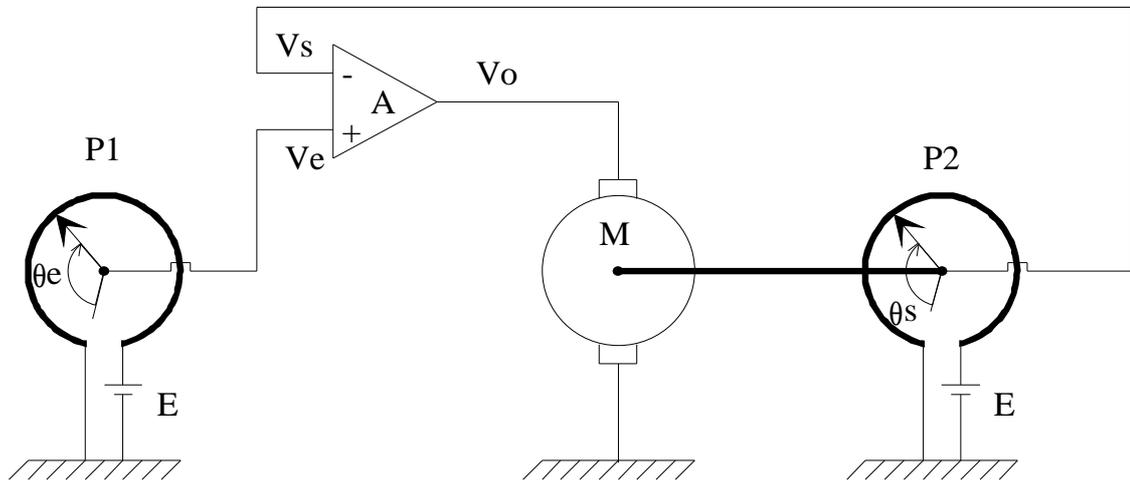


Fig.3-10: Asservissement de position

Découpage fonctionnel : On distingue quatre sous-ensembles distincts (schéma-bloc Fig.3-11).

- * Le potentiomètre d'entrée P1, qui réalise une conversion angle/tension
- * L'amplificateur opérationnel en montage soustracteur, qui réalise la comparaison entre les deux tensions d'entrée et l'amplification du résultat.
- * Le moteur, qui réalise une conversion tension/position.
- * Le potentiomètre de sortie P2, qui réalise une conversion angle/tension.

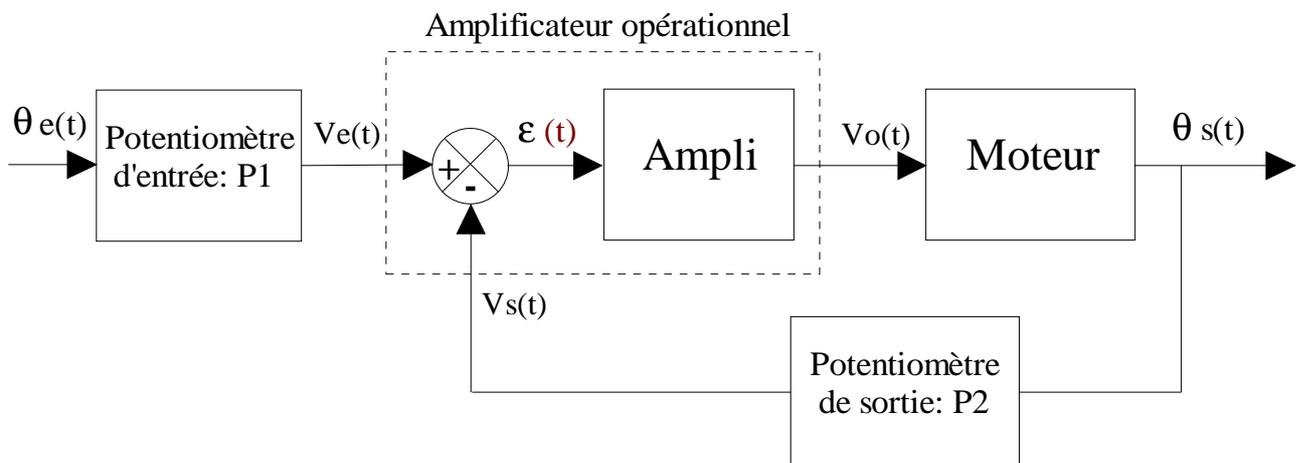


Fig.3-11: Schéma bloc temporel de l'asservissement de position

On remarque que l'ampli-opérationnel réalise deux fonctions : comparaison et amplification.

Passage en variable de Laplace :

Potentiomètre P1 : En faisant l'hypothèse que le potentiomètre P1 possède une caractéristique linéaire de pente $K1$, on obtient une relation entrée/sortie de la forme : $V_e(t) = K1. \theta_e(t)$ avec $0 \leq \theta_e \leq \theta_{\max}$.

si $\theta_e = \theta_{\min} = 0$, alors $V_e = 0$

si $\theta_e = \theta_{\max}$, alors $V_e = E$

On en déduit le gain du potentiomètre : $K1 = \frac{E}{\theta_{\max}}$ et finalement : $V_e(t) = \frac{E. \theta_e(t)}{\theta_{\max}}$

Après transformation de Laplace : $V_e(p) = \frac{E. \theta_e(p)}{\theta_{\max}} = K1. \theta_e(p)$

La fonction de transfert de P1 est : $\frac{V_e(p)}{\theta_e(p)} = \frac{E}{\theta_{\max}} = K1$

Potentiomètre P2 : En faisant l'hypothèse que le potentiomètre P2 est strictement identique à P1, on obtient la relation entrée/sortie : $V_s(t) = K2. \theta_s(t)$ avec $0 \leq \theta_s \leq \theta_{\max}$

si $\theta_s = \theta_{\min} = 0$, alors $V_s = 0$

si $\theta_s = \theta_{\max}$, alors $V_s = E$

Le gain de P2 est le même que celui de P1 (potentiomètres identiques), $K1 = K2$.

finalement: $V_s(t) = \frac{E. \theta_s(t)}{\theta_{\max}}$

Après transformation de Laplace : $V_s(p) = \frac{E. \theta_s(p)}{\theta_{\max}} = K1. \theta_s(p)$

La fonction de transfert de P2 est : $\frac{V_s(p)}{\theta_s(p)} = \frac{E}{\theta_{\max}} = K2 = K1$

Amplificateur: L'amplificateur opérationnel est un ampli parfait de gain A .

La loi entrée/sortie est de la forme : $V_o(t) = A. \varepsilon(t)$

Après transformation de Laplace : $V_o(p) = A. \varepsilon(p)$

La fonction de transfert de L'ampli est : $\frac{V_o(p)}{\varepsilon(p)} = A$

Moteur à courant continu : Les hypothèses permettant la modélisation du moteur et le calcul conduisant à la fonction de transfert $H(p)$ seront développées plus loin.

Nous avons vu au § 3-1-2 que la fonction de transfert $H(p)$ du moteur C.C. en position (qui s'appelait alors $F(p)$) était :

$$H(p) = \frac{\theta_s(p)}{V_o(p)} = \frac{K_t}{p[Ke.Kt + (Jp + f)(Lp + R)]}$$

$H(p)$ est une fonction de transfert du troisième ordre, de classe un et de gain statique K .
ATTENTION, K est différent de K_t .

On peut maintenant représenter le schéma-bloc de l'asservissement de position considéré (fig. 3-12)

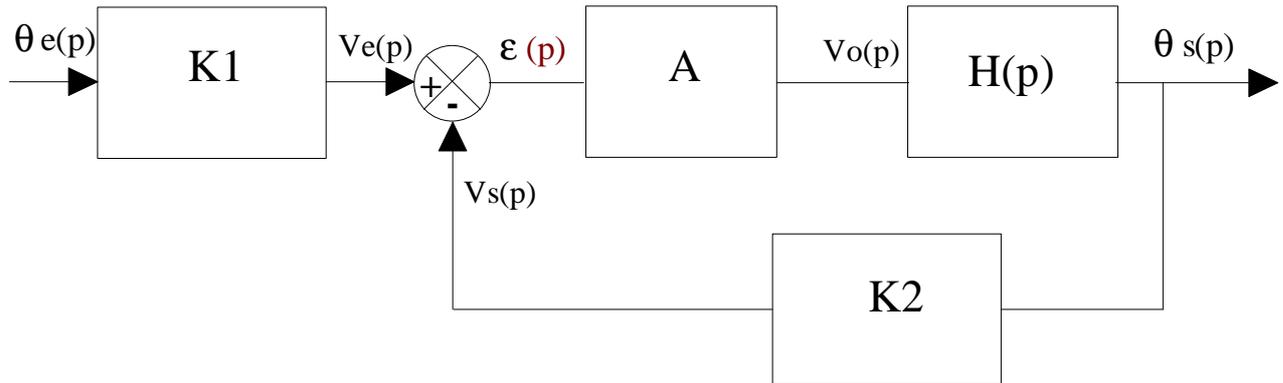


Fig.3-12: Schéma bloc de l'asservissement de position

Il s'agit de deux systèmes en série :

*Un système non bouclé de fonction de transfert = $K1$

*Un système bouclé de fonction de transfert en boucle ouverte : $FTBO(p) = A.H(p).K2$

et de fonction de transfert en boucle fermée : $FTBF(p) = \frac{A.H(p)}{1 + A.H(p).K2}$ voir (3-13)

La fonction de transfert du système complet est finalement le produit des deux F.T.

$$G(p) = \frac{\theta_s(p)}{\theta_e(p)} = K1.FTBF(p) = \frac{A.H(p).K1}{1 + A.H(p).K2}$$

On peut expliciter $G(p)$ en remplaçant $H(p)$:

$$G(p) = \frac{\frac{A.K1.Kt}{p[Ke.Kt + (Jp + f)(Lp + R)]}}{1 + \frac{A.K2.Kt}{p[Ke.Kt + (Jp + f)(Lp + R)]}} = \frac{A.K1.Kt}{p[Ke.Kt + (Jp + f)(Lp + R)] + A.K2.Kt}$$

en développant le dénominateur, on a :

$$G(p) = \frac{A.K1.Kt}{p[Ke.Kt + JLP^2 + (JR + Lf)p + fR] + A.K2.Kt}$$

$$G(p) = \frac{A.K1.Kt}{Ke.Kt.p + JLP^3 + (JR + Lf)p^2 + fR.p + A.K2.Kt}$$

$$G(p) = \frac{A.K1.Kt}{A.K2.Kt + (fR + Ke.Kt)p + (JR + Lf)p^2 + JLP^3}$$

et finalement :

$$G(p) = \frac{K1/K2}{1 + \frac{(fR + Ke.Kt)}{A.K2.Kt}p + \frac{(JR + Lf)}{A.K2.Kt}p^2 + \frac{JL}{A.K2.Kt}p^3}$$

C'est une Fonction de transfert du troisième ordre de classe zéro et de gain K1/K2. Nous savons que K1 = K2 et le gain de la FTBF est unitaire. Elle est de la forme :

$$G(p) = \frac{1}{1 + a.p + b.p^2 + c.p^3} \text{ et qui décrit le comportement global du système bouclé.}$$

La FTBO de la boucle est : $FTBO(p) = \frac{A.K2.Kt}{p[Ke.Kt + (Jp + f)(Lp + R)]}$

et finalement :

$$FTBO(p) = \frac{\frac{A.K2.Kt}{Ke.Kt + Rf}}{p \left[1 + \left(\frac{JR + Lf}{Ke.Kt + Rf} \right) p + \left(\frac{J.L}{Ke.Kt + Rf} \right) p^2 \right]}$$

C'est une fonction de transfert du troisième ordre de classe 1 et de gain non-unitaire.

Il est maintenant possible de représenter plus simplement le système (fig. 3-13).

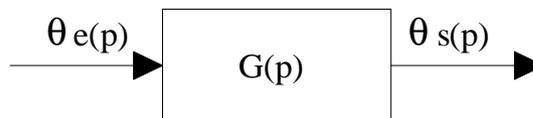


Fig.3-13: F.T.B.F. de l'asservissement de position.

On remarque que le bouclage n'a pas modifié l'ordre de la F.T. mais a modifié la classe et le Gain statique. Nous verrons plus loin quels sont les rapports entre la FTBF et la FTBO et les conséquences précises du bouclage sur les performances du système.

REMARQUE : Cette F.T. est celle d'un système bouclé de topologie plus simple (retour unitaire), obtenu en déplaçant les cases K1 et K2 de la manière suivante :

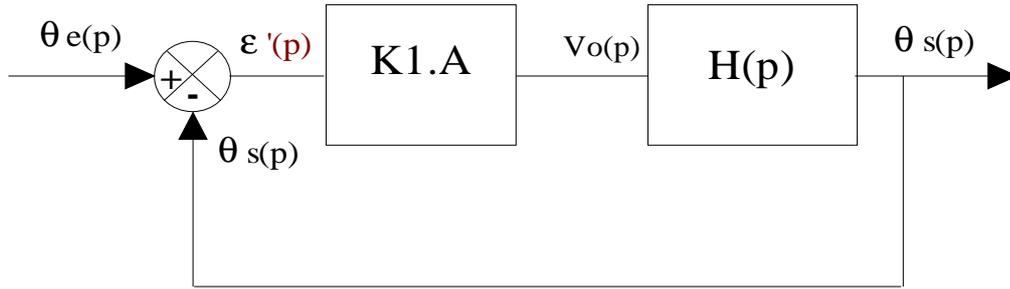


Fig.3-14: Schéma-bloc modifié de l'asservissement de position.

On vérifie facilement que la F.T. de ce système est bien égale à $G(p)$ en utilisant (3-16).

De même, la FTBO de la boucle du système Fig : 3-14 est identique à celle du système bouclé fig : 3-12: $FTBO(p) = K1.A.H(p)$.

On voit ici tout l'intérêt du passage en système à retour unitaire qui permet la description exacte du comportement du système à retour non-unitaire avec une formalisation plus simple. Les FTBO et FTBF se calculent plus rapidement à partir de la figure 3-14 que de la figure 3-12.

Par contre, la figure 3-14 n'a plus de rapport avec la réalité technologique (Le comparateur compare des angles !). C'est un modèle abstrait et affranchi de la technologie, qui pourrait tout aussi bien décrire un asservissement hydraulique ou électrique.

3-2-5. INTRODUCTION DES PERTURBATIONS.

Les perturbations s'introduisent en général au milieu de la chaîne directe. On introduit la variable intermédiaire $X(p)$ en sortie de la chaîne directe amont et la variable $Y(p)$ en sortie du sommateur (voir Fig.3-15). Comme pour le comparateur, il est impératif que la grandeur $X(p)$ soit de même nature que la grandeur $P(p)$, sans quoi la comparaison n'aurait aucun sens. Ceci entraîne parfois une modification du schéma bloc sans perturbation comme dans le cas d'un asservissement de vitesse avec moteur à courant continu. Au lieu de la vitesse, on fera apparaître en sortie du moteur un couple que l'on pourra comparer à un couple perturbateur. Il faudra donc représenter une grandeur intermédiaire "couple" sur le schéma-bloc en représentant le système "moteur" d'une manière plus fine. Nous verrons comment plus loin.



La perturbation $P(p)$ est généralement représentée en contribution négative, c'est à dire qu'elle s'oppose à la commande. Il faut être attentif au fait que ce n'est pas toujours le cas (charge entraînée par exemple) et que $P(p)$ devient alors négatif ce qui génère une contribution positive.

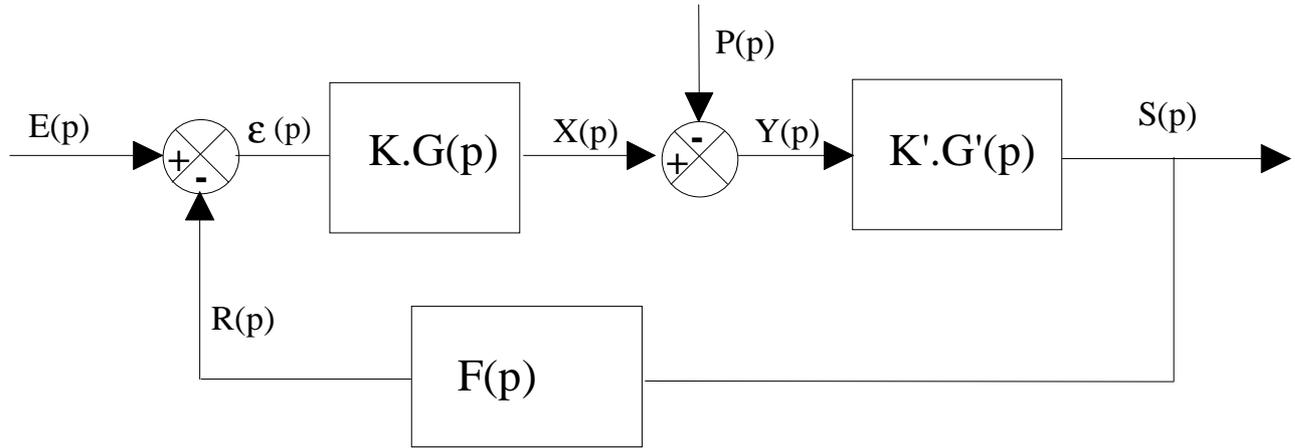


Fig.3-15: Système bouclé avec perturbation.

La sortie $S(p)$ est déterminée en progressant à rebours :

$$S(p) = K'.G'(p).Y(p) = K'.G'(p).(X(p) - P(p))$$

avec: $X(p) = K.G(p).ε(p)$

$$\Rightarrow S(p) = K.G(p).K'.G'(p).ε(p) - K'.G'(p).P(p)$$

avec: $ε(p) = E(p) - F(p).S(p)$

$$\Rightarrow S(p) = K.G(p).K'.G'(p).(E(p) - F(p).S(p)) - K'.G'(p).P(p)$$

On en déduit que :

$$S(p) = \frac{K.G(p).K'.G'(p)}{1 + K.G(p).K'.G'(p).F(p)} E(p) - \frac{K'.G'(p)}{1 + K.G(p).K'.G'(p).F(p)} P(p) \quad (3-18)$$

et que :

$$ε(p) = \frac{1}{1 + K.G(p).K'.G'(p).F(p)} E(p) + \frac{K'.G'(p).F(p)}{1 + K.G(p).K'.G'(p).F(p)} P(p) \quad (3-19)$$

L'écart $ε(p)$ du système (3-19) est composé de deux termes :

- Une contribution liée à la commande qui est la même qu'en (3-17) : un bon système suiveur doit l'annuler ou la minimiser.
- Une contribution liée à la perturbation $P(p)$: un bon système régulateur doit l'annuler ou la minimiser. On remarque que cette contribution met en jeu toutes les fonctions de transfert des divers composants, c.à.d. que l'ensemble de l'asservissement réagit à la perturbation. Un système asservi étant souvent à la fois suiveur et régulateur, les conditions idéales seraient d'annuler ou de minimiser les deux contributions.

3-3. FONCTION DE TRANSFERT COMPLEXE D'UN SYSTEME.

3-3-1. FONCTION DE TRANSFERT COMPLEXE D'UN SYSTEME BOUCLE.

La fonction de transfert complexe d'un système ou fonction de transfert isochrone ou transmittance isochrone est obtenue en remplaçant dans la fonction de transfert isomorphe la variable de Laplace p par un terme complexe $j\omega$, imaginaire pur. $H(p)$ devient donc $H(j\omega)$. Cette nouvelle fonction de transfert possède des propriétés très intéressantes :

Considérons un système de fonction de transfert $H(p)$, soumis à une entrée harmonique d'amplitude E_0 : $e(t) = E_0 \sin \omega t$.

Nous savons que la réponse en régime permanent est de la forme : $s(t) = S_0 \sin(\omega t + \phi)$, caractérisée par son amplitude S_0 et son déphasage par rapport au signal d'entrée ϕ . $s(t)$ peut se mettre sous la forme $s(t) = \underbrace{E_0 K_s A(\omega)}_{S_0} \sin[\omega t + \phi(\omega)]$

On démontre que :

$$H(j\omega) = \frac{S_0}{E_0} e^{j\phi} \quad (3-20)$$

$H(j\omega)$ est donc un nombre complexe de module $\frac{S_0}{E_0}$ et d'argument ϕ .

En remplaçant p par $j\omega$ dans la fonction de transfert d'un système, on obtient une fonction complexe $H(j\omega)$ dont le module est le rapport d'amplitude $\frac{S_0}{E_0}$ et dont l'argument est le déphasage ϕ .

$H(j\omega)$ est appelée réponse en fréquence du système et elle le caractérise complètement.

Il n'y a plus besoin de résoudre l'équation différentielle entrée/sortie du système pour connaître sa réponse à une entrée harmonique.

JUSTIFICATION: Lors de la résolution d'une équation différentielle du second ordre, par exemple, on est parfois amené à employer une méthode introduisant des nombres complexes (Voir outils mathématiques § 4-3-3).

L'équation différentielle du second ordre décrivant le système étant :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) = K \cdot E_0 \sin \omega t$$

On fait apparaître l'égalité suivante :

$$S_0 e^{j\phi} = \frac{K.E_0}{\left(1 + \frac{2zj\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

équation complexe dont on déduit le rapport d'amplitude $\frac{S_0}{E_0}$ et le déphasage ϕ .

Passons maintenant en variable de Laplace : on obtient dans le cas général (entrée $e(t)$) :

$$\frac{1}{\omega_n^2} p^2 S(p) + \frac{2z}{\omega_n} p S(p) + S(p) = K.E(p) = \left(\frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2z}{\omega_n} p + 1\right) S(p)$$

$$\text{La fonction de transfert du système est : } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2\right)}$$

En remplaçant p par $j\omega$ dans $H(p)$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 + \frac{2zj\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

On remarque tout de suite la ressemblance avec (4-28) qui nous permet d'écrire :

$$\frac{S_0}{E_0} e^{j\phi} = H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 + \frac{2zj\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

Ceci correspond bien à (3-20) dans le cas du second ordre.

3-3-2. LES LIEUX DE TRANSFERT.

La fonction $H(j\omega)$ est une fonction complexe de la variable ω . Les méthodes de calcul des asservissements linéaires utilisent la représentation de cette fonction complexe. Cette représentation appelée réponse en fréquence peut se faire sur différents diagrammes, qui prennent tous en compte le fait qu'une fonction complexe comprend deux termes : Amplitude en fonction de ω et phase en fonction de ω . Nous allons brièvement décrire les diagrammes de BODE, NYQUIST et BLACK. Une étude plus détaillée correspondant aux cas usuels sera effectuée dans les chapitres suivants.

REMARQUE: pour ce qui concerne les Agrégations internes de génie mécanique et de mécanique, l'utilisation du diagramme de NYQUIST et de l'abaque de Hall, qui est au programme, n'est en pratique pas demandée.

Le diagramme de BODE doit être connu.

Le diagramme de BLACK qui, utilisé avec l'abaque de BLACK, permet (entre autres) le réglage du gain d'un système bouclé doit également être connu.

3-3-2-1 Diagramme de BODE.

La représentation dans le plan de BODE de la réponse en fréquences consiste à effectuer deux tracés, l'un d'amplitude (ou module) et l'autre de phase (ou argument) :

* La première représente l'amplitude $A(\omega)$ de $H(j\omega)$ en décibels, définie par

$A_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$ en fonction de $\text{Log}_{10}(\omega)$. C'est donc une représentation en coordonnées semi-logarithmiques (voir outils mathématiques § 1-3-3) nécessitant l'emploi de papier gradué de cette manière. ATTENTION: 0dB = correspond à $|H(j\omega)| = 1$.

* La seconde représente la phase (ou déphasage) également en fonction de $\text{Log}_{10}(\omega)$.

Le diagramme de Bode se présentera comme indiqué Fig.3-16.

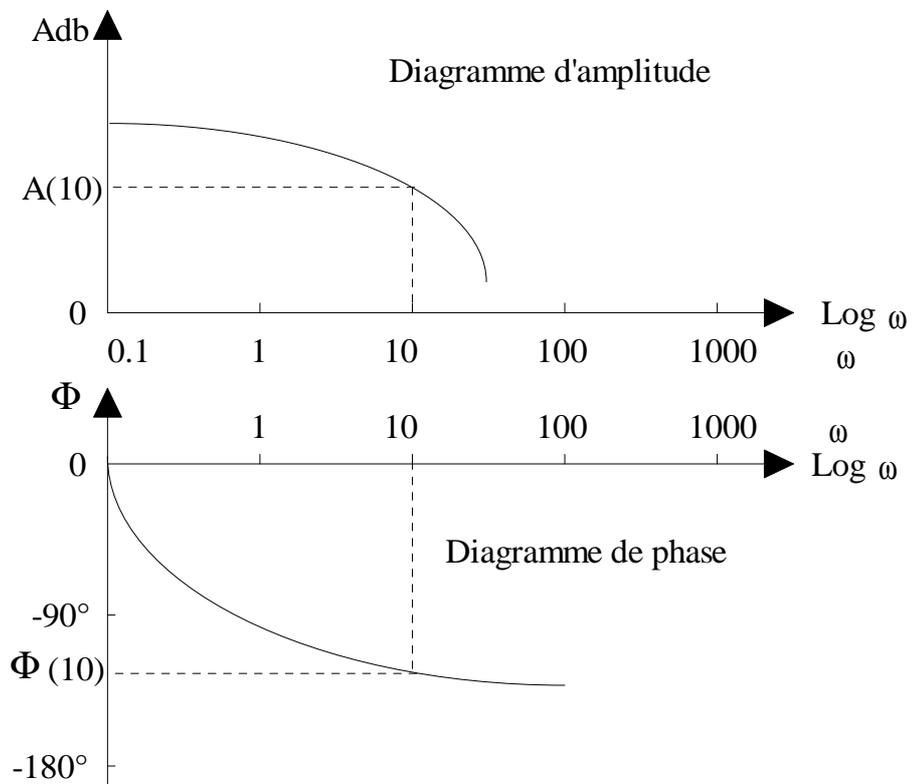


Fig.3-16: Diagramme de BODE.

Pour une valeur donnée de la pulsation (10rad/s ici), on lit l'amplitude et le déphasage correspondants sur chacun des diagrammes. Le déphasage est en général négatif (réponse en retard) et les amplitudes tendent vers zéro lorsque les pulsations augmentent (ceci est dû au caractère fondamentalement passe-bas des servomécanismes).

La représentation de BODE, contrairement aux suivantes, ne permet pas le passage de FTBO vers FTBF.

3-3-2-2 Diagramme de NYQUIST.

Ce diagramme est le plus naturel car il est tout simplement la représentation de $H(j\omega)$ dans le plan complexe. C'est en fait la représentation des points de module $A(\omega) = |H(j\omega)|$ (attention, le module n'est pas en décibels) et d'argument $\phi(\omega) = \text{Arg}[H(j\omega)]$.

La courbe obtenue est graduée en ω et est appelée lieu de réponse en fréquence du système dans le plan de NYQUIST, ou lieu de transfert dans le plan de NYQUIST ou encore, lieu de NYQUIST (voir fig. 3-17).

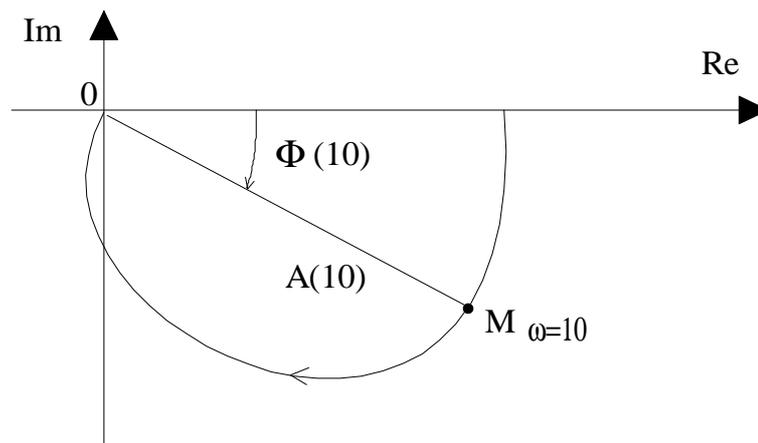


Fig.3-17: Diagramme de NYQUIST.

Pour une pulsation de 10rad/s, on lit l'amplitude $A(10)$ en mesurant le segment OM et le déphasage $\phi(10)$ en mesurant l'angle polaire ϕ : c'est une représentation en coordonnées polaires. La flèche sur le tracé indique le sens croissant des pulsations, le point O étant atteint lorsque $\omega = \infty$. Le déphasage est en général négatif.

Il existe un abaque, appelé abaque de HALL, qui permet d'établir directement le passage FTBO vers FTBF. Ceci permet alors de travailler sur la FTBO qui, comme nous l'avons vu, est une fonction plus simple. En pratique, on utilise plutôt l'abaque de BLACK (voir § 8-2).

3-3-2-3 Diagramme de BLACK-NICHOLS.

La réponse en fréquences dans le plan de BLACK ou lieu de BLACK est la représentation de l'amplitude $A(\omega)$ de $H(j\omega)$ en décibels, définie par $A_{dB}(\omega) = 20\log_{10}|H(j\omega)|$ en fonction de la phase $\phi(\omega)$ en degrés. Comme dans le diagramme de NYQUIST, la courbe obtenue est graduée en ω . L'amplitude et le déphasage correspondant à la pulsation considérée (10rad/s) sont lus respectivement en ordonnée et en abscisse.

La flèche sur le tracé indique le sens croissant des pulsations, l'amplitude AdB tendant vers zéro lorsque ω tend vers l'infini.

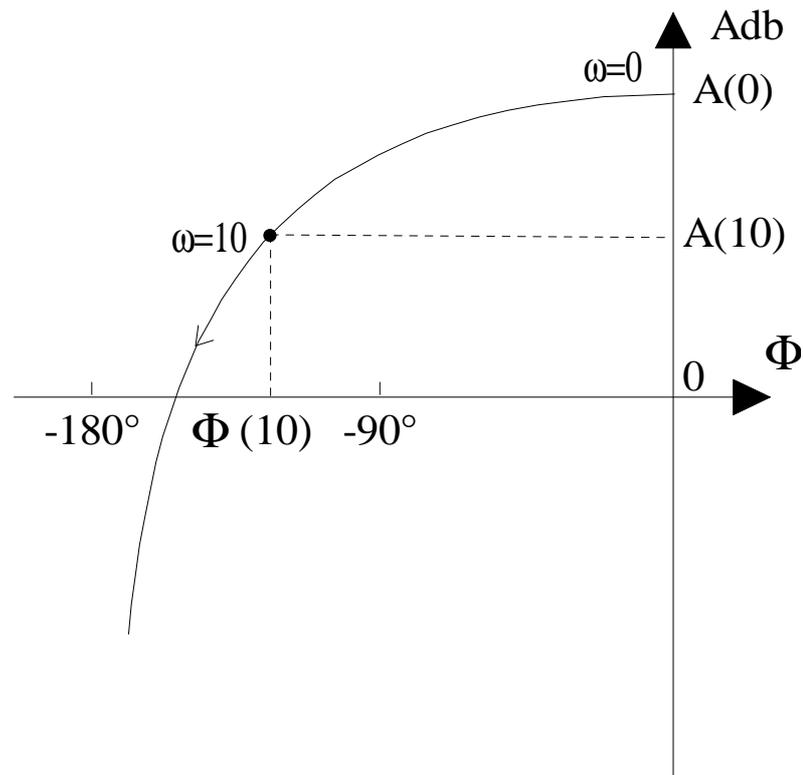
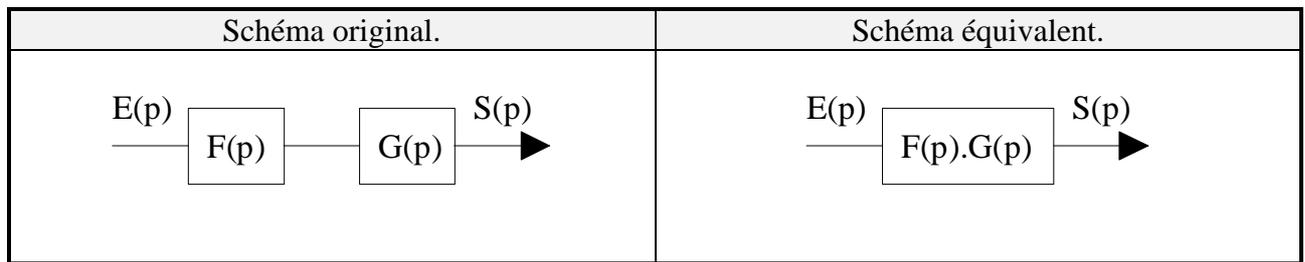


Fig.3-18: Diagramme de BLACK.

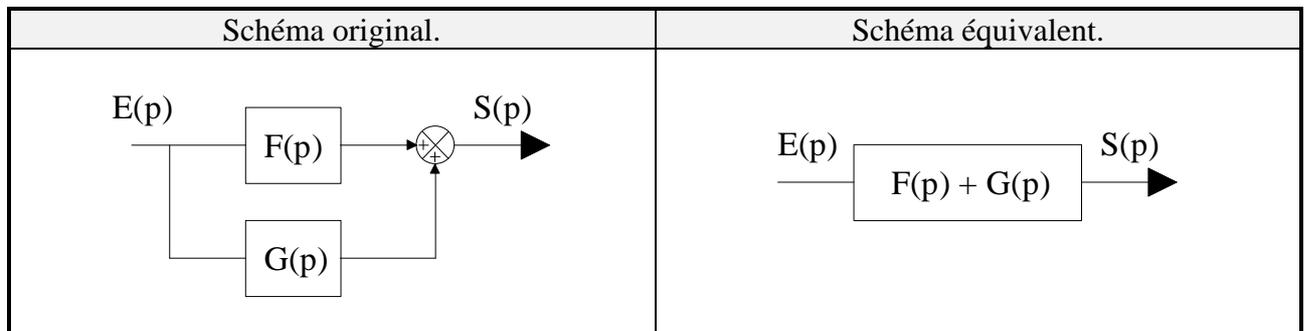
3-4 TRANSFORMATIONS DES SCHÉMAS FONCTIONNELS.

Il est souvent utile de pouvoir modifier la topologie d'un schéma bloc pour faciliter la lecture ou pour mettre en évidence une structure particulière. Les transformations élémentaires sont décrites ci-dessous, sachant que les transformations plus complexes s'en déduisent.

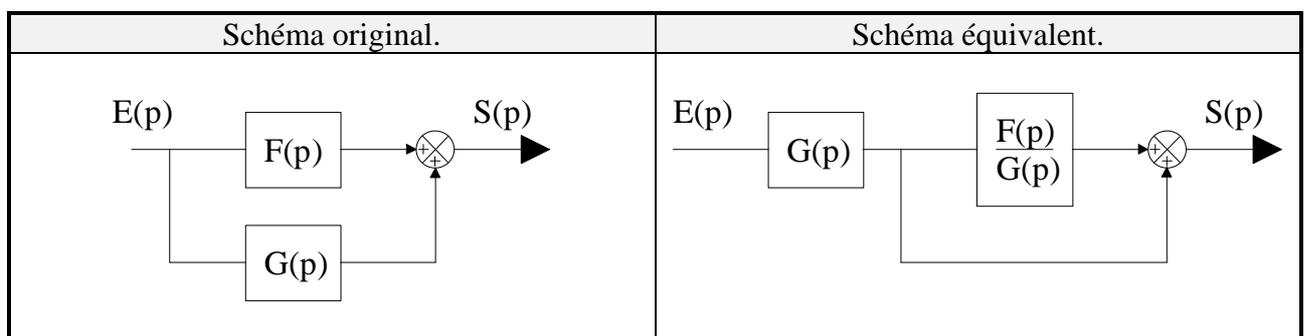
- **Mise en cascade d'éléments.** Fonction de transfert : $\frac{S(p)}{E(p)} = F(p).G(p)$



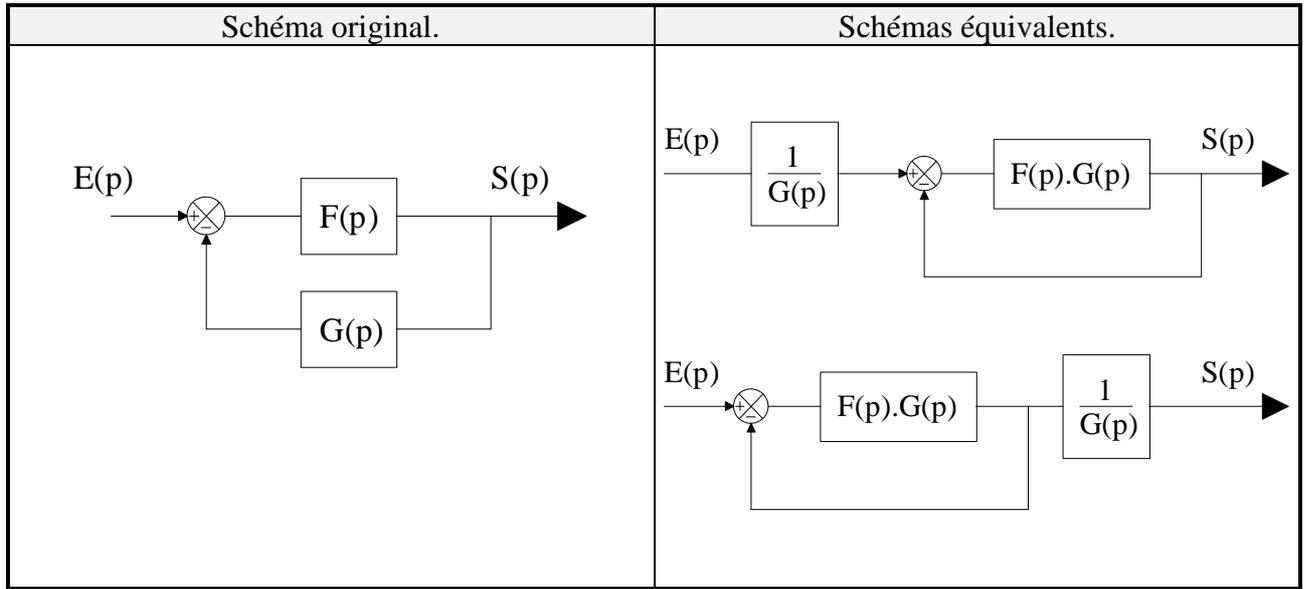
- **Mise en parallèle d'éléments.** Fonction de transfert : $\frac{S(p)}{E(p)} = F(p) + G(p)$



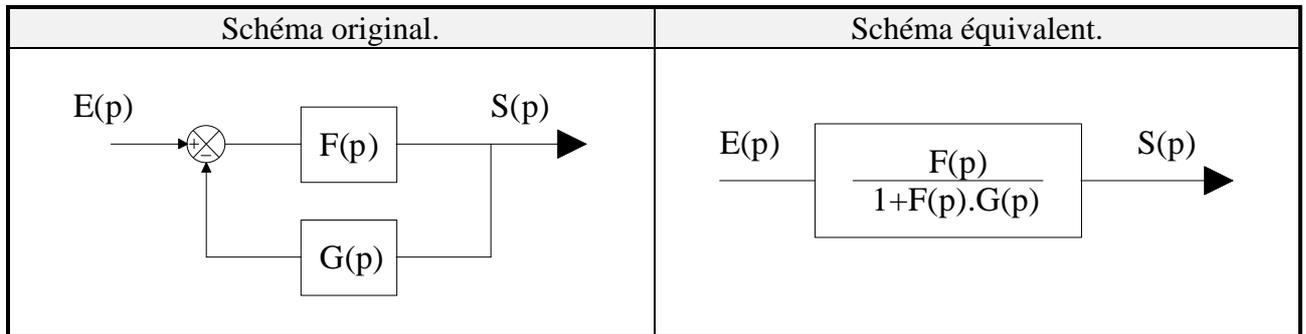
- **Mise en boucle unitaire.** Fonction de transfert : $\frac{S(p)}{E(p)} = F(p) + G(p)$



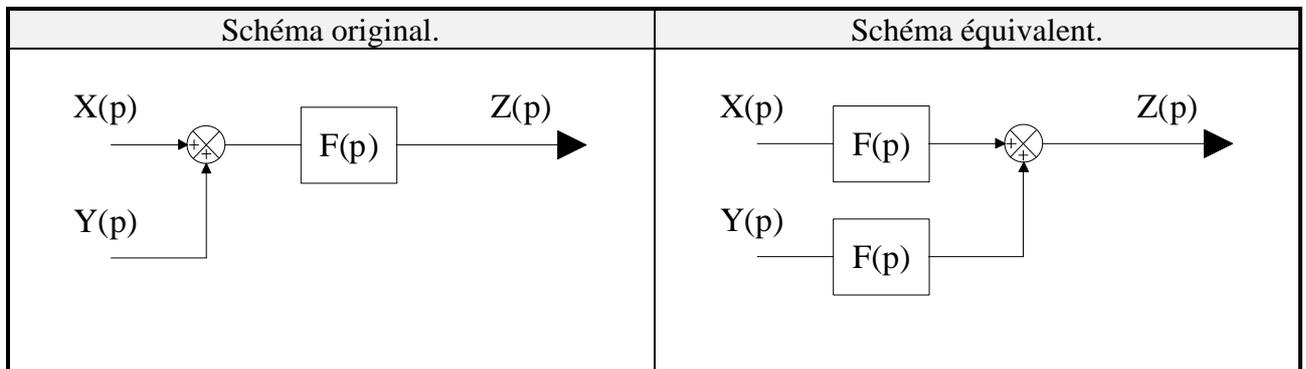
- **Mise en retour unitaire.** Fonction de transfert : $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p).G(p)}$



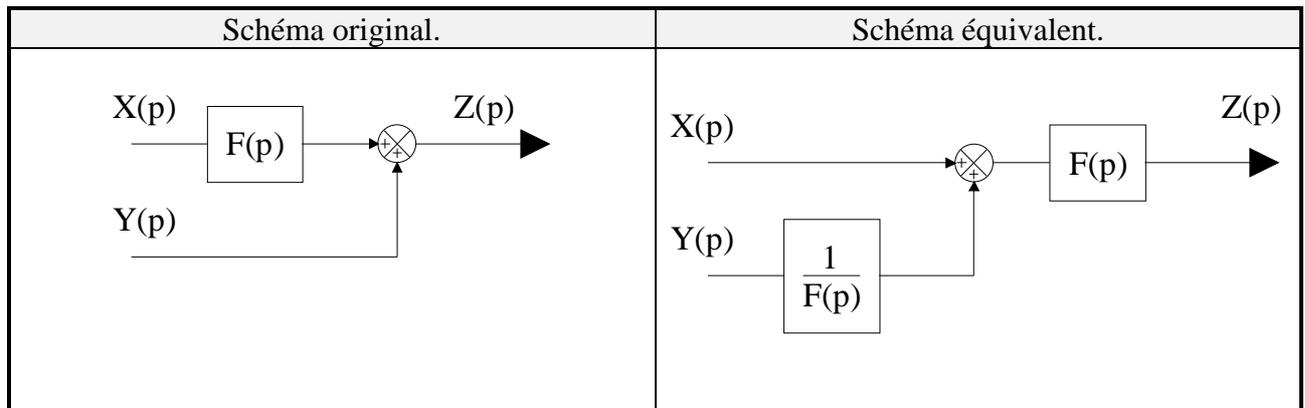
- **Elimination d'une boucle de retour.** $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p).G(p)}$



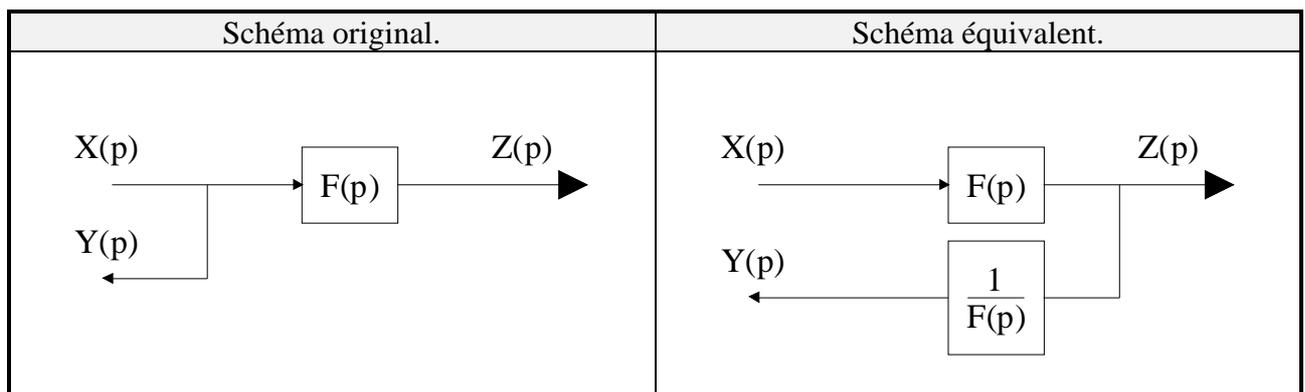
- **Déplacement avant d'un comparateur.** $Z(p) = F(p)[X(p) + Y(p)]$



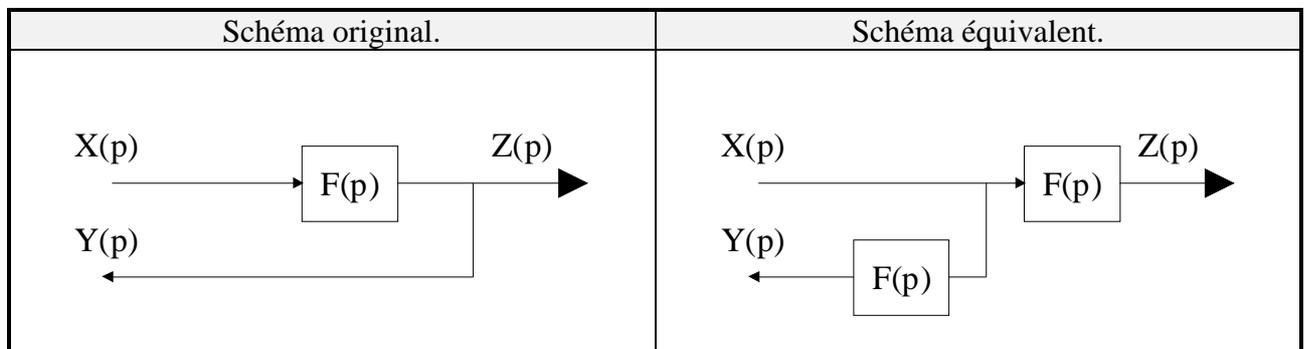
- **Déplacement arrière d'un comparateur.** $Z(p) = [F(p) \cdot X(p)] + Y(p)$



- **Déplacement avant d'un point de dérivation.**



- **Déplacement arrière d'un point de dérivation.**



Chapitre 4

SYSTÈMES DU PREMIER ORDRE.

REMARQUE : L'étude des systèmes du premier (ou du second) ordre effectuée ici concerne les systèmes linéaires au sens large, qu'ils soient bouclés ou non. Nous allons donc oublier ce qu'est un système asservi pendant quelques chapitres, pour mieux y revenir ensuite.

4-1. GENERALITES.

4-1-1. DEFINITION.

On appelle système du premier ordre, tout système dont le fonctionnement est régi, dans le cadre de certaines hypothèses (linéarisation par exemple), par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre :

$$\boxed{T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)} \quad K > 0 \quad ; \quad T > 0 \quad (4-1)$$

La fonction de transfert d'un système du premier ordre s'écrit en faisant subir la transformation de Laplace aux deux membres de (4-1) :

$$s(t) \xrightarrow{L} S(p) \quad \text{et} \quad e(t) \xrightarrow{L} E(p)$$

Pour un système partant du repos, le théorème de la dérivation nous donne :

$$\frac{ds(t)}{dt} \xrightarrow{L} p \cdot S(p)$$

(4-1) devient :

$$T \cdot p \cdot S(p) + S(p) = K \cdot E(p) = S(p)(1 + Tp)$$

On en déduit la fonction de transfert d'un système du premier ordre :

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + Tp}} \quad (4-2)$$

Le schéma-bloc d'un système du premier ordre sera toujours de la forme suivante :

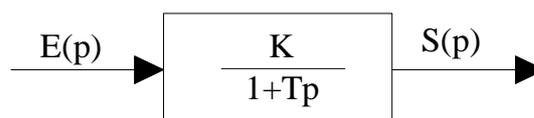


fig. 4-1. Système du premier ordre.

4-1-2. EXEMPLE.

Considérons le système électrique représenté Fig.4-2 :

Ce quadripôle étant soumis à une tension $V_e(t)$ en entrée, quelle tension $V_s(t)$ délivre-t-il en sortie ?

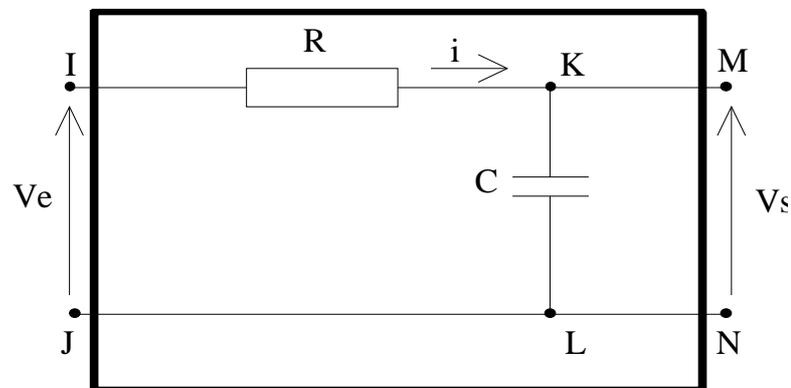


Fig : 4-2. Circuit R.C.

On utilise les lois de Kirchoff.

$$\text{Maille IJMN : } V_e(t) = R.i(t) + V_s(t) \quad (4-3)$$

$$\text{Maille KLMN : } V_s(t) = \frac{1}{C} \int i(t).dt \quad (4-4)$$

En appliquant la transformation de Laplace et en supposant que le système part du repos :

$$V_e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_e(p)$$

$$V_s(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_s(p)$$

$$i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} I(p) \Rightarrow \int i(t).dt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{I(p)}{p}$$

(4-3) et (4-4) deviennent :

$$V_e(p) = R.I(p) + V_s(p) \quad (4-5)$$

$$V_s(p) = \frac{I(p)}{C.p} \quad (4-6)$$

En éliminant $I(p)$ dans (4-5), on a

$$V_e(p) = R.C.p.V_s(p) + V_s(p) = V_s(p)(1 + R.C.p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1 + R.C.p} \quad (4-7)$$

(4-7) est bien de la forme (4-2) avec le gain statique $K = 1$ et la constante de temps $T = R.C$.

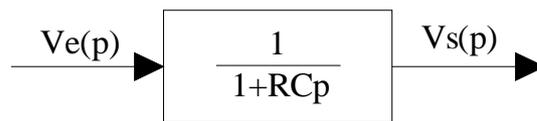


Fig.4-3: Quadripôle R.C.

4-2. REPONSE D'UN SYSTEME DU PREMIER ORDRE AUX ENTREES TYPIQUES.

4-2-1. REPONSE A UN ECHELON.

Soumettons le système à un échelon d'amplitude E_o : $e(t) = E_o.u(t)$

L'équation différentielle (4-1) s'écrit maintenant :

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = KE_o.u(t) \quad (4-8)$$

Pour déterminer la réponse $s(t)$ du système, il faut résoudre par la méthode temporelle classique ou dans le plan de Laplace.

Les démonstrations détaillées sont effectuées aux § 4-2-2-1 et § 5-4-1-1 de "outils mathématiques".

En appliquant la transformation de Laplace, toujours pour un système partant du repos, et en

sachant que : $u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{p}$

$$T.p.S(p) + S(p) = \frac{K.E_o}{p} \Rightarrow S(p) = \frac{K.E_o}{p(1+Tp)}$$

La réponse $s(t)$ est la transformée inverse de $S(p)$ que l'on détermine après décomposition de la fraction rationnelle $S(p)$ en éléments simples.

On obtient finalement :

$$s(t) = K.E_o \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} \right]$$

Allure de la réponse temporelle : L'étude détaillée de cette courbe est effectuée au § 1-4-4 de "outils mathématiques" ou l'on considère un système du premier ordre de Gain statique $K = 10$ et de constante de temps $T = 0.01$ s, soumis à un échelon unitaire $E_o = 1V$. On montre que :

- La pente à l'origine est : K/T
- La pente à l'infini est : 0
- Pour $t = 0$, la réponse est $s(0) = 0$
- Pour t tendant vers l'infini, la réponse $s(t)$ tend vers $K.E_o$
- Au bout d'un temps T , la réponse a atteint 63% de sa valeur permanente $K.E_o$
- Au bout d'un temps $3T$, la réponse a atteint 95% de sa valeur permanente $K.E_o$

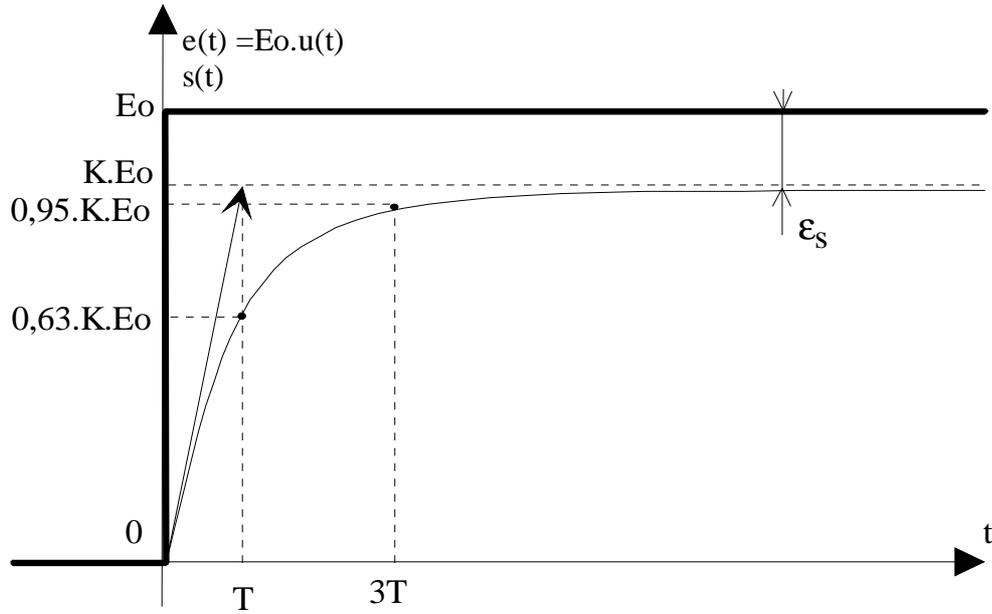


Fig.4-4: Allure de la réponse temporelle à un échelon ($K < 1$).

Détermination de l'erreur de position : nous avons défini au § 2-2-1-1 l'écart statique ε_s comme étant la différence entre la consigne et la réponse en régime permanent. On peut donc écrire :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t) - s(t)]$$

en utilisant le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{E_0}{p} - H(p)E(p) \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{E_0}{p} - \frac{K.E_0}{p(1+Tp)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} E_0 \left[1 - \frac{K}{1+Tp} \right]$$

finalement : $\varepsilon_s = E_0(1-K)$. On remarque que $\varepsilon_s = 0$ si et seulement si $K = 1$ (c'est le cas du quadripôle)

Un système du premier ordre ne possède pas d'erreur de position si son gain statique = 1

REMARQUE: La notion d'écart ou d'erreur statique pour un système du premier ordre (ou d'un ordre supérieur) est ambiguë : ainsi, un ampli de gain $A = 10$ soumis à un échelon unitaire $E_0.u(t)$ avec $E_0 = 1$ Volt fournira en régime permanent un signal de sortie égal à 10 Volts. L'erreur est donc égale à - 9 V alors que le système fonctionne parfaitement ! Il faut donc impérativement garder la terminologie d'écart statique pour les systèmes bouclés (et certains systèmes de mesure) : l'écart statique est l'écart entre la valeur visée (qui est éventuellement différente de la consigne) et la valeur obtenue, et il est précisément égal à ε , écart défini sur le schéma-bloc dans le cas d'un système bouclé à retour unitaire. Nous y reviendrons § 7-2.

Temps de réponse :

La réponse met un temps $3T$ pour atteindre 95% de sa valeur permanente : le temps de réponse à 5% (défini § 2-2-2-1) est égal à $3T$. (300 ms dans le cas du quadripôle)

TR 5% = 3T pour un système du premier ordre

Exemple:

Reprenons le quadripôle vu en 4-1-2 avec : $R = 1K\Omega$ et $C = 10\mu F$ (Il possède donc une constante de temps $T = R.C = 0.01s$) et soumettons le à un échelon d'amplitude $E_0 = 1 V$.

La réponse est représentée Fig.4-5.

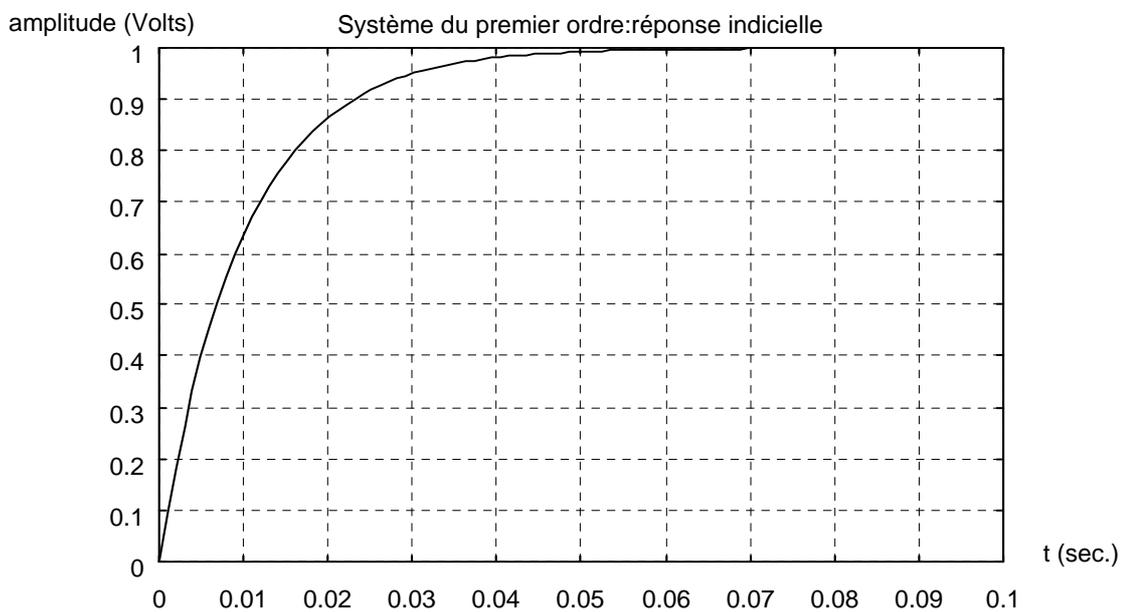


Fig.4-5: Réponse temporelle à un échelon du circuit RC.

4-2-2. REPONSE A UNE RAMPE.

Soumettons le système à une rampe de pente a : $e(t) = a.t.u(t)$

L'équation différentielle (4-1) s'écrit maintenant :

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.a.t.u(t) \quad (4-8)$$

Pour déterminer la réponse $s(t)$ du système, il faut résoudre par la méthode temporelle classique ou dans le plan de Laplace.

Les démonstrations détaillées sont effectuées aux § 4-2-2-2 et § 5-4-1-2 de "outils mathématiques".

En appliquant la transformation de Laplace, toujours pour un système partant du repos, et en sachant que : $t.u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{p^2}$

$$T.p.S(p) + S(p) = \frac{K.a}{p^2} \Rightarrow S(p) = \frac{K.a}{p^2(1+Tp)}$$

La réponse $s(t)$ est la transformée inverse de $S(p)$ que l'on détermine après décomposition de la fraction rationnelle $S(p)$ en éléments simples.

On obtient finalement :

$$s(t) = K.a \left[t - T + T e^{-\frac{t}{T}} \right]$$

Allure de la réponse temporelle pour $K = 1$.

$s(t) = 0$ pour $t = 0$

$s(t)$ tend vers $a(t-T)$, droite parallèle à $e(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

$s'(t) = 0$ pour $t = 0$

L'écart de traînage ϵ_v est égal à $a.T$. On dit que la sortie "suit" l'entrée avec un retard T (ne pas confondre le retard et l'écart de traînage)

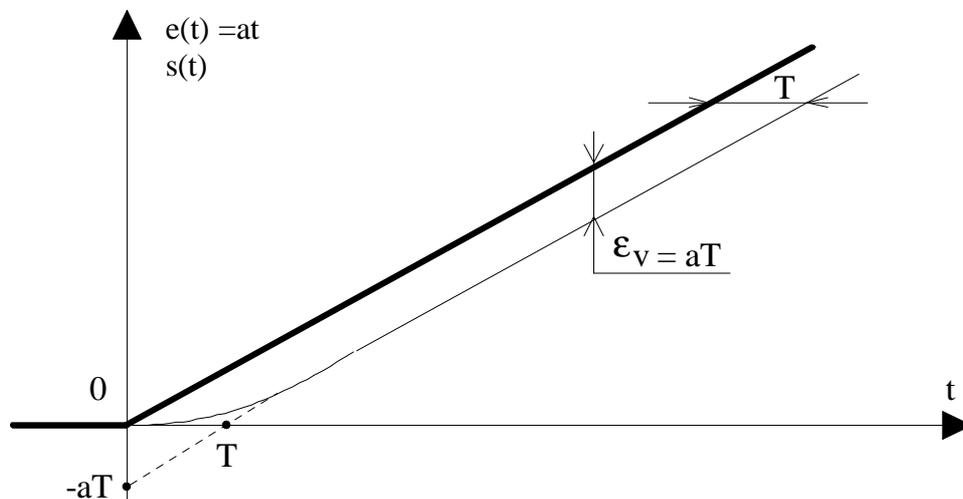


Fig.4-6: Allure de la réponse temporelle à une rampe de pente a pour $K = 1$.

Exemple 1 : Circuit RC avec : $R = 1K\Omega$ et $C = 10\mu F$ (constante de temps $T = R.C = 0.01s$) soumis à une rampe de pente $a = 1$ V/S. La réponse est représentée Fig.4-7.

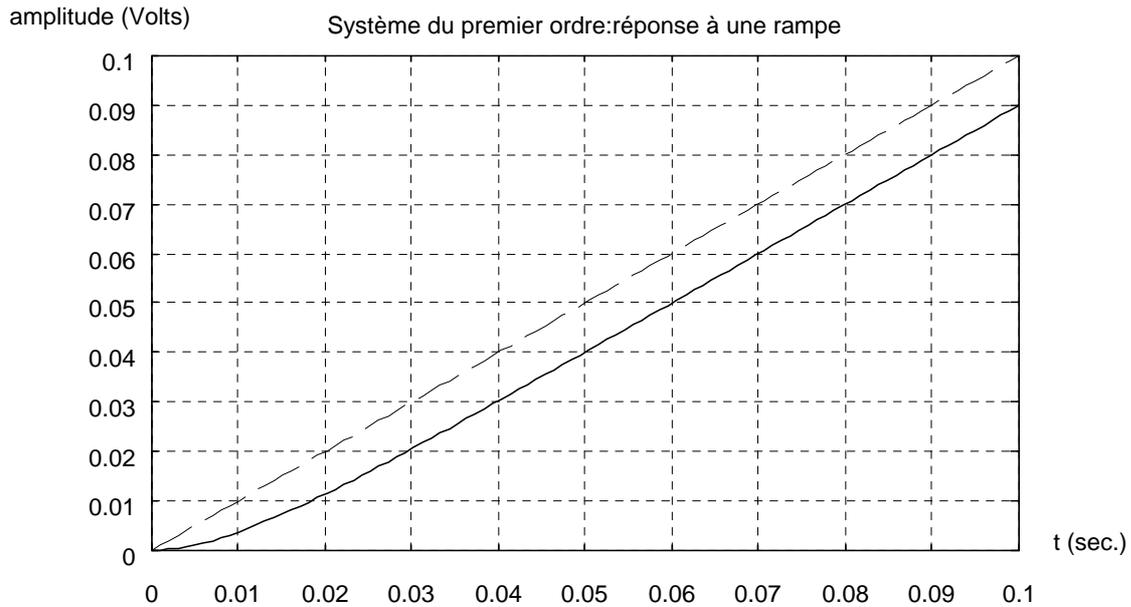


Fig.4-7: Réponse temporelle du circuit RC à une rampe de pente $a = 1$ V/S.

Exemple 2 : Système de gain $K < 1$: La réponse tend vers une droite d'équation $y = K.a(t-T)$ de pente plus faible que la rampe. L'écart de traînage augmente en permanence et tend vers l'infini : $\varepsilon_V = \infty$

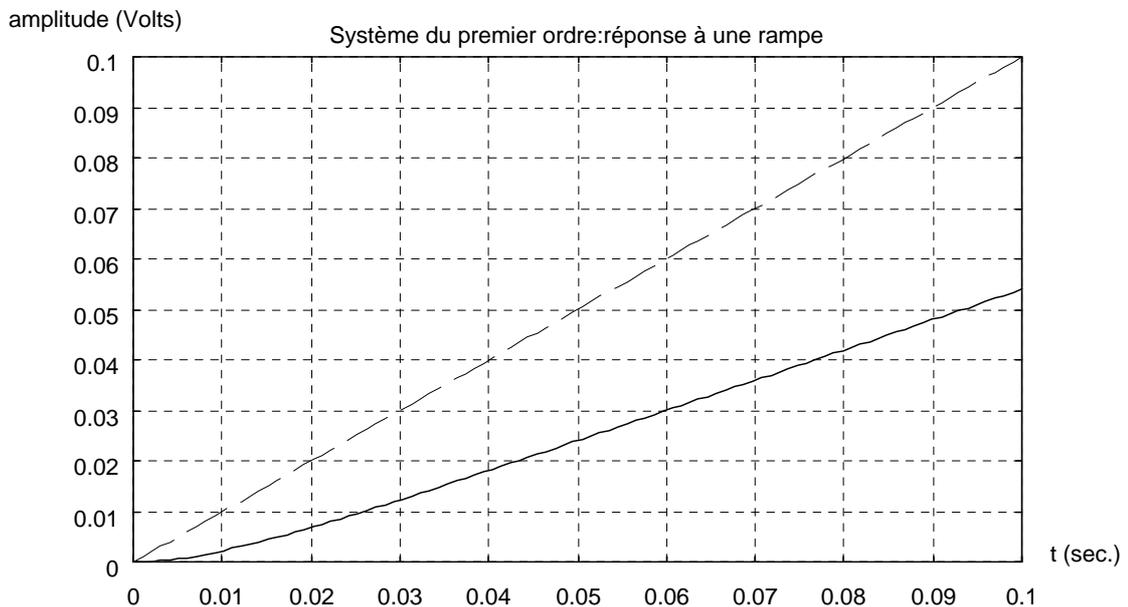


Fig.4-8: Réponse temporelle à une rampe de pente unitaire pour $K < 1$ ($K=0.6$).

Exemple 3 : Système de gain $K > 1$: La réponse tend vers une droite d'équation $y = K.a(t-T)$ de pente plus forte que la rampe. L'écart de traînage augmente en permanence : $\varepsilon_V = \infty$

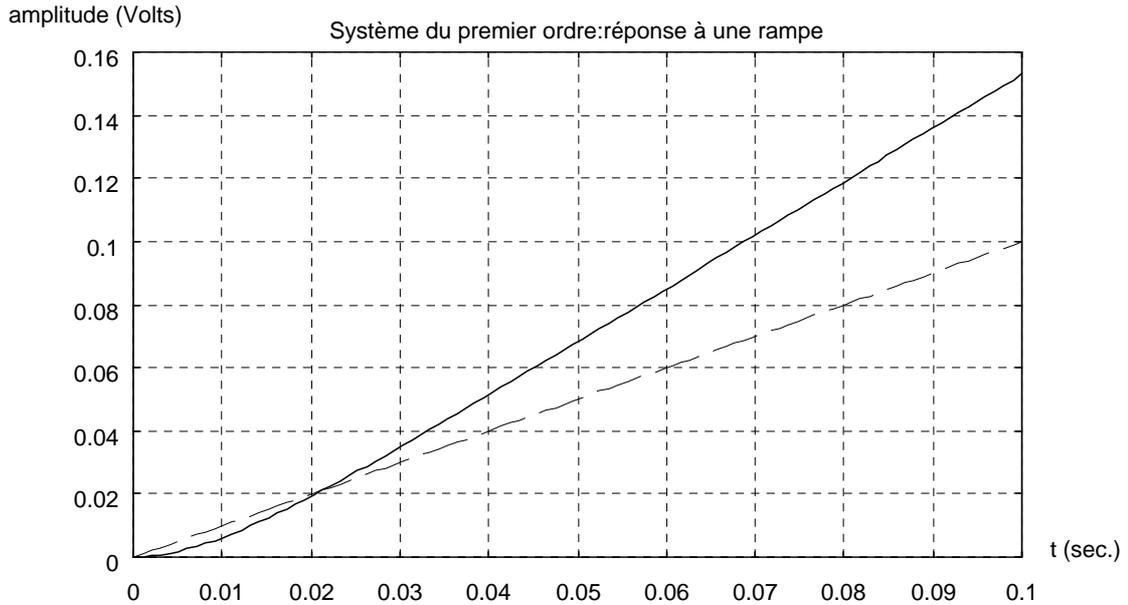


Fig.4-9: Réponse temporelle à une rampe de pente unitaire pour $K > 1$ ($K=1.7$).

4-3. REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE LA REPOSE HARMONIQUE.

4-3-1. DIAGRAMME DE BODE.

Nous savons (voir §3) que le diagramme de bode est la représentation de $H(j\omega)$ obtenue en remplaçant la variable de Laplace p par le nombre complexe $j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert. Pour un système du premier ordre de fonction de transfert $H(p)$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega}$$

Diagramme de gain : il s'agit de représenter l'amplitude de $H(j\omega)$ exprimée en décibels en fonction de la pulsation ω .

$$\text{Amplitude en dB : } A_{db} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

$$\Rightarrow A_{db} = 20 \log \left| \frac{K}{1 + jT\omega} \right| = 20 \log K - 20 \log |1 + jT\omega| = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + T^2 \omega^2}$$

$$\Rightarrow A_{db} = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \right)$$

lorsque ω tend vers 0,

$$T^2 \omega^2 \ll 1 \Rightarrow Adb = 20 \log K = C^{te}$$

lorsque ω tend vers l'infini,

$$T^2 \omega^2 \gg 1 \Rightarrow Adb = 20 \log K - 20 \log \omega T = 20 \log K - 20 \log T - 20 \log \omega = \underbrace{20 \log \frac{K}{T}}_{C^{te}} - \underbrace{20 \log \omega}_{droite}$$

AdB tend asymptotiquement vers une droite de pente négative (la représentation d'une fonction log en coordonnées semi-logarithmiques est une droite : voir outils mathématiques § 1-3-3). La pente est exprimée par décade, une unité de l'axe des pulsations correspondant à une puissance de dix de ces mêmes pulsations : -20dB/décade

L'intersection des deux droites s'effectue en un point de fréquence ω_0 tel que :

$$20 \log K = 20 \log K - 20 \log T - 20 \log \omega_0$$

$$\Rightarrow 20 \log T = 20 \log \omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{T}$$

La pulsation correspondante est ω_0 avec :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{T}}$$

Elle est appelée pulsation de cassure.

La représentation de ces droites s'appelle diagramme asymptotique de gain.

$$\text{Pour } \omega = \omega_0 = \frac{1}{T}, H(jT\omega_0) = \frac{K}{1 + j\frac{T}{T}} = \frac{K}{1 + j} \Rightarrow |H(j\omega_0)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow Adb = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{2}} \right) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log K - 10 \log 2 = 20 \log K - 3db$$

La courbe réelle est située 3dB sous la droite asymptotique en ce point.

De la même manière, on trouve :

$$\omega = 2\omega_0 = \frac{2}{T} \Rightarrow Adb = 20 \log K - 7db$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{2} = \frac{1}{2T} \Rightarrow Adb = 20 \log K - 1db$$

Ce diagramme donne une bonne idée de la courbe de réponse en fréquence (voir Fig. 4-10)

- * pour les fréquences faibles : droite $20 \log K$
- * pour les fréquences autour de $1/T$: points indiqués à -1, -3 et -1 dB.
- * pour les fréquences plus élevées : droite de pente -20dB/décade.

L'interprétation physique sera effectuée à la fin de ce chapitre.

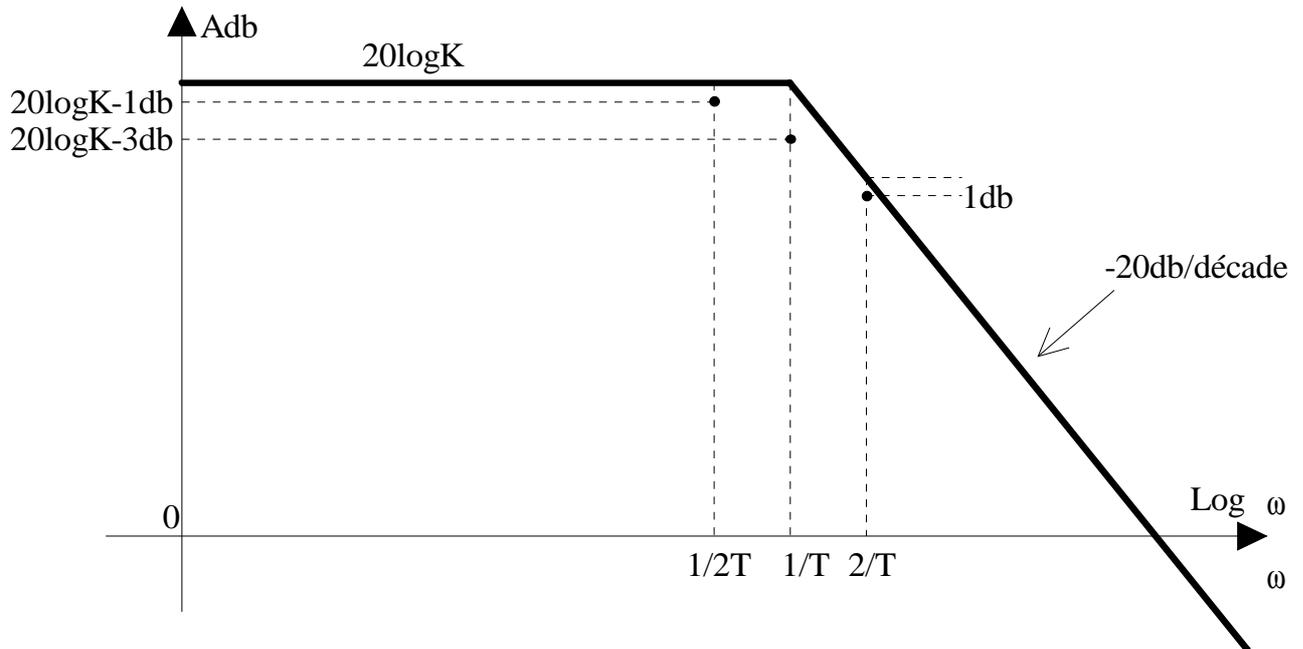


Fig.4-10: Diagramme asymptotique de gain.

Pour un système du premier ordre, la pulsation de cassure est égale à 1/T

Diagramme de phase : La phase est donnée par l'argument de $H(j\omega)$.

$$\phi = \text{Arg}[H(j\omega)] = \text{Arg}\left[\frac{K}{1+jT\omega}\right] = \text{Arg}\left[\frac{K(1-jT\omega)}{1+T^2\omega^2}\right] = \text{Arg}(1-jT\omega) = \text{Arctg}(-T\omega)$$

Finalement:

$$\boxed{\phi = \text{Arctg}(-T\omega)}$$

Pour le tracé d'une courbe du type $\text{Arctg}(x)$, voir "outils mathématiques" § 1-3-2.

pour $\omega = 0$: $\phi(\omega) = \text{Arctg}(0) = 0$

pour ω tendant vers l'infini : $\phi(\omega) \rightarrow \text{Arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$

pour $\omega = \omega_0 = 1/T$: $\phi(\omega_0) = \text{Arctg}\left(\frac{-T}{T}\right) = \text{Arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$

pour $\omega = \omega_0/2 = 1/2T$: $\phi\left(\frac{\omega_0}{2}\right) = \text{Arctg}\left(\frac{-T}{2T}\right) = \text{Arctg}\left(\frac{-1}{2}\right) = -26,56^\circ$

pour $\omega = 2\omega_0 = 2/T$: $\phi(2\omega_0) = \text{Arctg}\left(\frac{-2T}{T}\right) = \text{Arctg}(-2) = -63,43^\circ$

Le diagramme asymptotique à la forme d'une marche d'escalier avec un saut de déphasage à la pulsation de cassure :

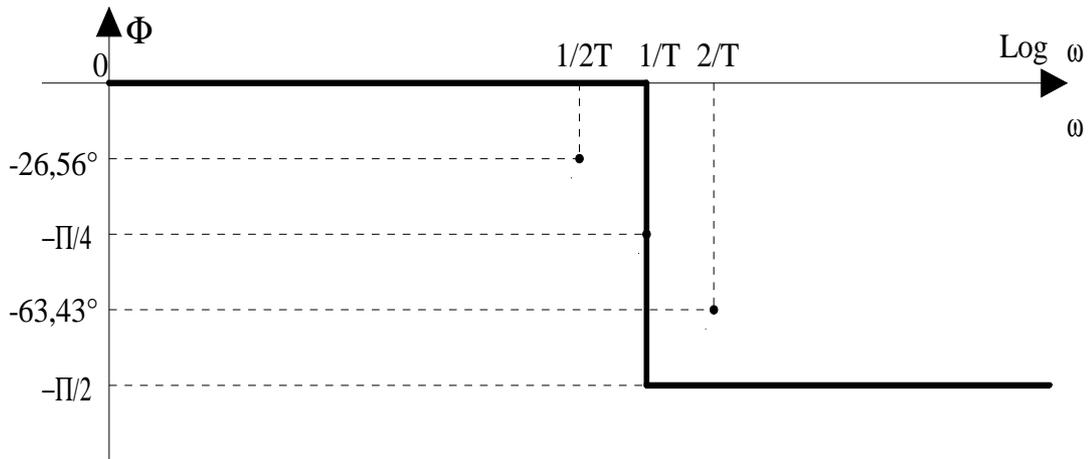


Fig.4-11: Diagramme asymptotique de phase.

Exemple 1 : Reprenons le quadripôle vu en 4-1-2 avec : $R = 1K\Omega$ et $C = 10\mu F$ de constante de temps $T = R.C = 0.01s$. C'est un système à gain unitaire de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{1+0.01p}$$

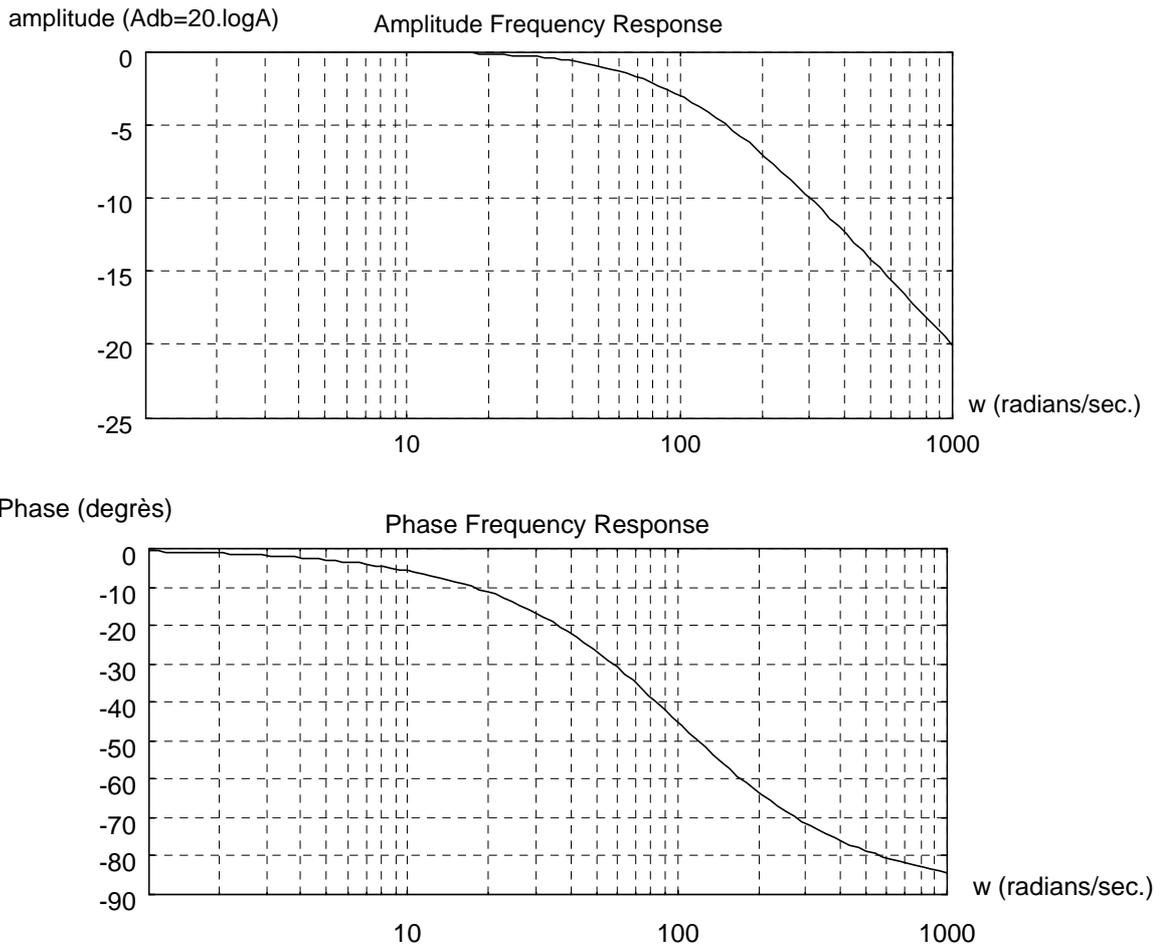


Fig.4-12: Diagramme de bode du circuit RC.

Le gain à basse fréquence est $A_{dB} = 20\log K = 20\log 1 = 0\text{dB}$.

La pulsation de cassure est $\omega_0 = 1/T = 1/0.01 = 100\text{ rad/s}$.

Exemple 2 : système de gain statique non-unitaire de fonction de transfert : $G(p) = \frac{10}{1+0.1p}$

L'échelle de fréquences a été volontairement conservée pour faciliter la comparaison avec le système précédent.

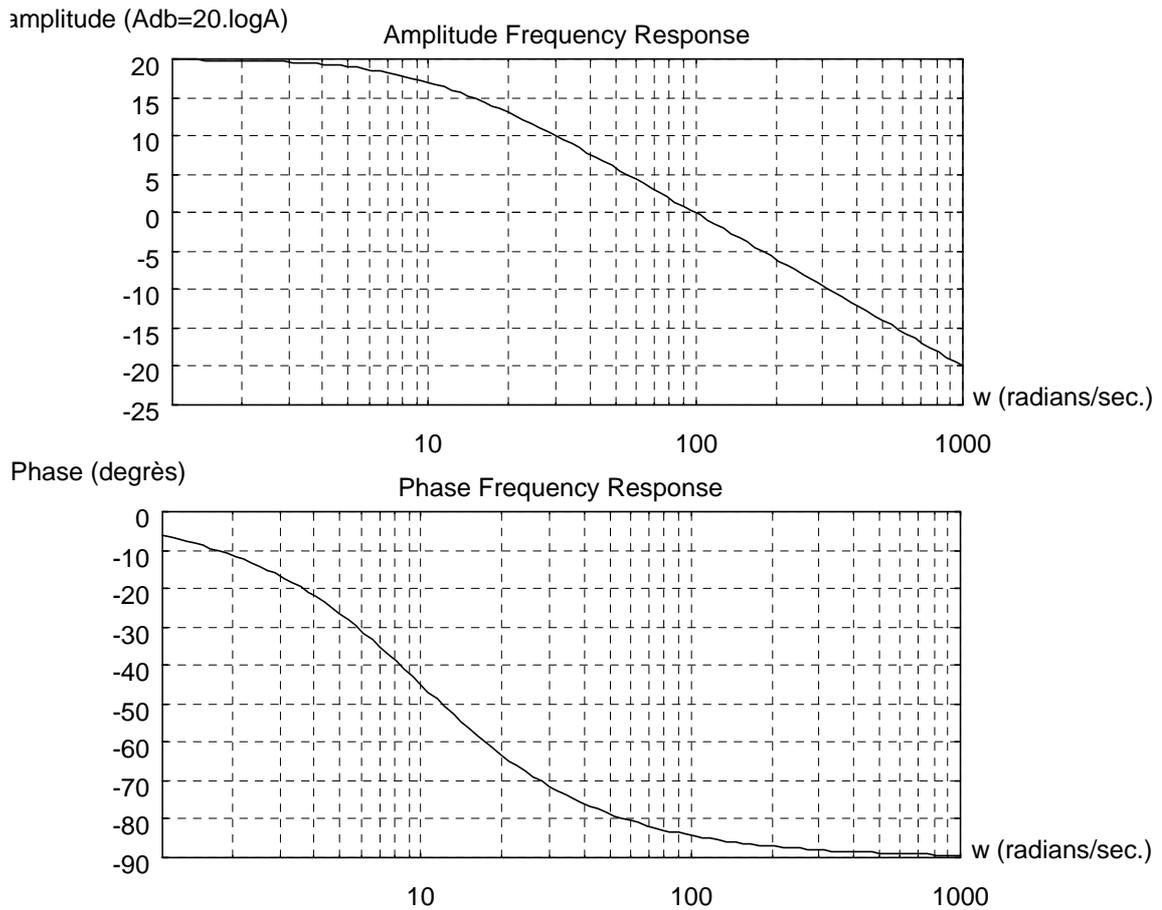


Fig.4-13: Diagramme de bode de $G(p)$.

On vérifie que la pulsation de cassure est $\omega_0 = 1/T = 1/0.1 = 10\text{rad/s}$ et que le gain à basse fréquence est $A_{dB} = 20\log K = 20\log 10 = 20\text{dB}$.

Comme on le voit, Le diagramme de bode d'un système du premier ordre possède toujours la même allure. De plus, la pulsation de cassure joue un rôle important. Le diagramme de Bode est donc parfois gradué en pulsations réduites $u = \omega/\omega_0 = \omega T$: Ce seul diagramme décrit alors tous les systèmes du premier ordre de gain unitaire, le point de cassure étant le point d'abscisse $u = T/T = 1$ dans tous les cas.

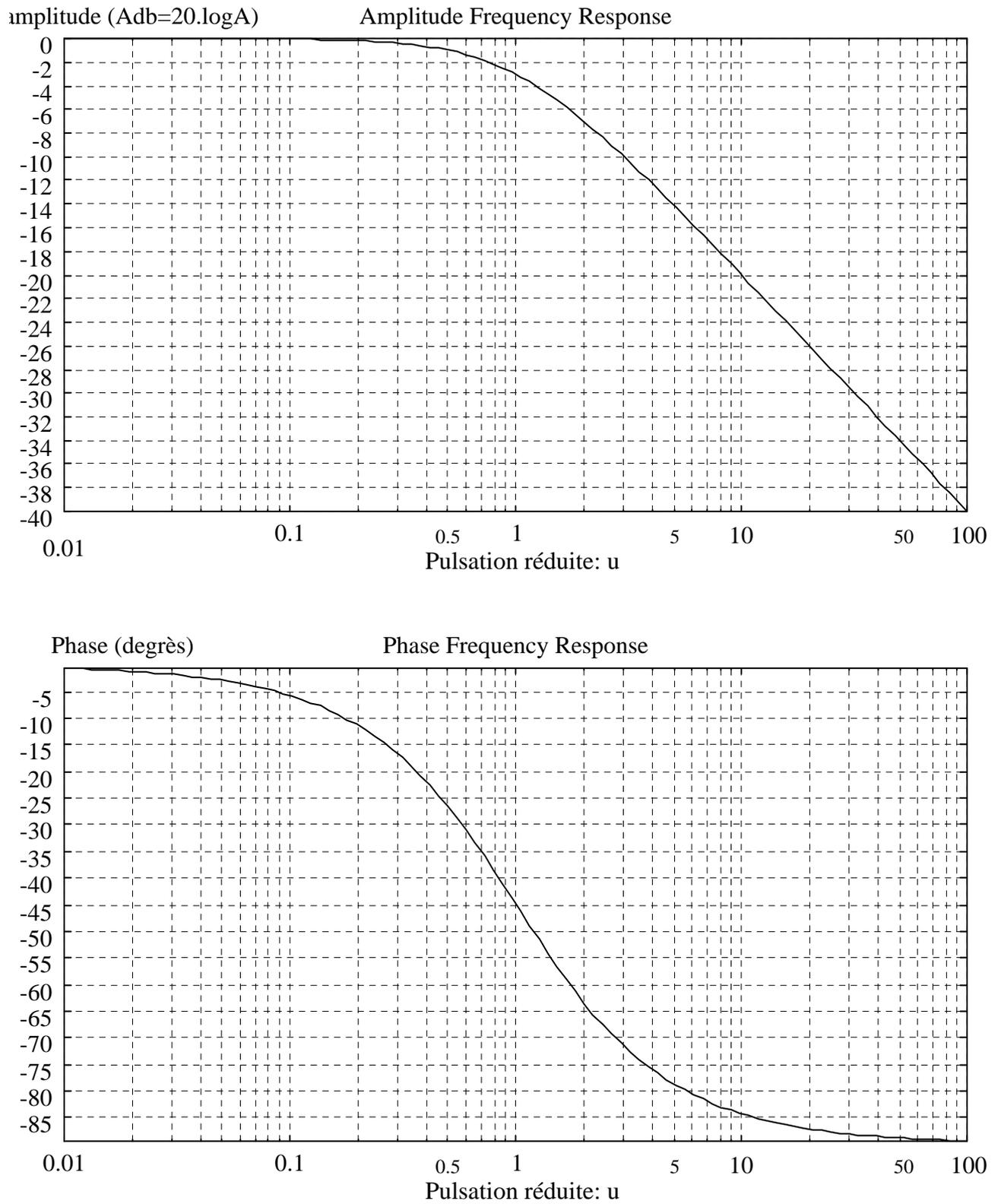


Fig. 4-14 : Système du premier ordre : diagramme de BODE en pulsation réduite.

4-3-2. DIAGRAMME DE BLACK-NICHOLS.

Le diagramme de black est la représentation dans le plan (ω, ϕ) de $H(j\omega)$.

nous venons de voir que : $A_{db} = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \right)$

et que : $\phi = \text{Arctg}(-T\omega)$

La courbe peut se tracer point par point en utilisant les valeurs particulières trouvées précédemment, à savoir :

Pulsation ω	Amplitude AdB	Phase ϕ
$\omega = 0$	$20 \log K$	0
$\omega = \frac{1}{2T}$	$20 \log K - 1db$	$-26,56^\circ$
$\omega = \frac{1}{T}$	$20 \log K - 3db$	$-45^\circ; \left(-\frac{\pi}{4}\right)$
$\omega \rightarrow \infty$	$-\infty$	$-90^\circ; \left(-\frac{\pi}{2}\right)$

On obtient :

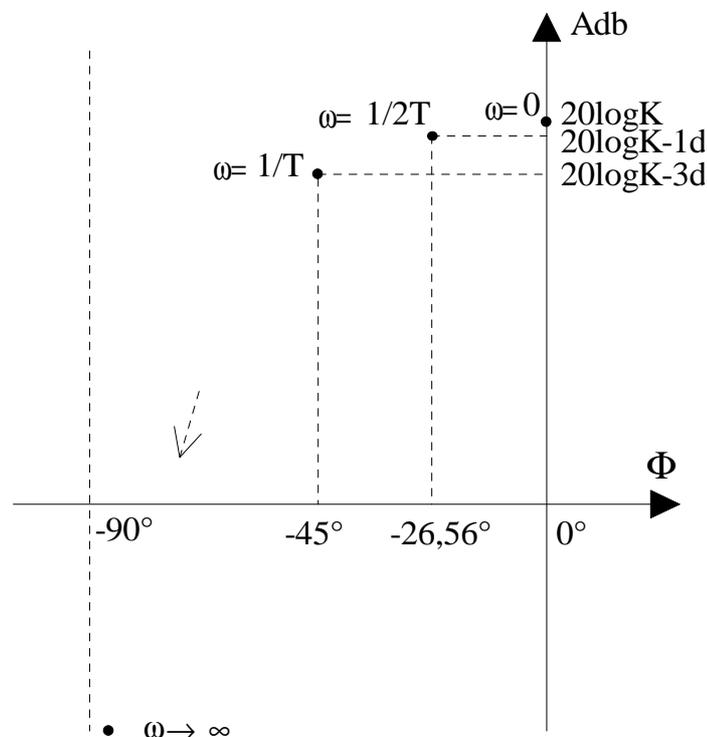


Fig.4-15: Construction du diagramme de Black.

On retrouve évidemment des particularités (intrinsèques aux systèmes du premier ordre) identiques à celles du diagramme de bode : à fréquence croissante, le déphasage varie entre 0 et $\pi/2$ et le gain varie entre $20 \log K$ et 0dB.

Cette courbe est graduée en pulsations, la flèche indiquant leur sens croissant.

Exemple 1 : Quadripôle RC avec : $R = 1K\Omega$ et $C = 10\mu F$ de constante de temps $T = R.C = 0.01s$.

$$H(p) = \frac{1}{1+0.01p}$$

On retrouve un gain à basse fréquence $A_{dB} = 20\log K = 20\log 1 = 0dB$.

Par contre, la pulsation de cassure $\omega_0 = 1/T = 1/0.01 = 100 \text{ rad/s}$. est moins visible : il faut tirer une verticale en $\phi = -45^\circ$.

Amplitude (Adb=20.logA)

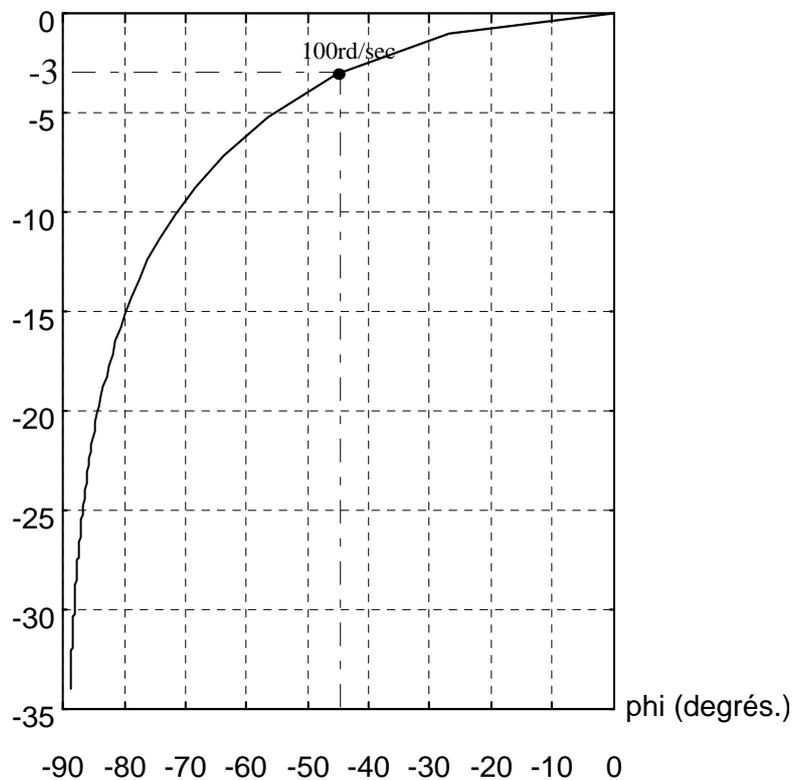


Fig.4-16: Diagramme de Black du circuit RC.

L'avantage de cette représentation réside dans le fait qu'une modification du gain statique K du système (quel que soit l'ordre) se traduit par une simple translation verticale de la courbe de réponse en fréquence (on peut, par exemple, comparer les figures 4-16 et 4-17).

Le diagramme de Black est très utilisé pour déterminer le réglage ou la correction d'un système asservi. Il est gradué d'une manière particulière (permettant le passage FTBO vers FTBF) et s'appelle alors abaque de Black, que nous étudierons au § 8.

Exemple 2 : Système de gain non-unitaire, de fonction de transfert : $G(p) = \frac{10}{1+0.1p}$.

Gain à basse fréquence AdB = $20\log K = 20\log 1 = 20\text{dB}$.

Pulsation de cassure $\omega = 1/T = 1/0.1 = 10 \text{ rad/s}$.

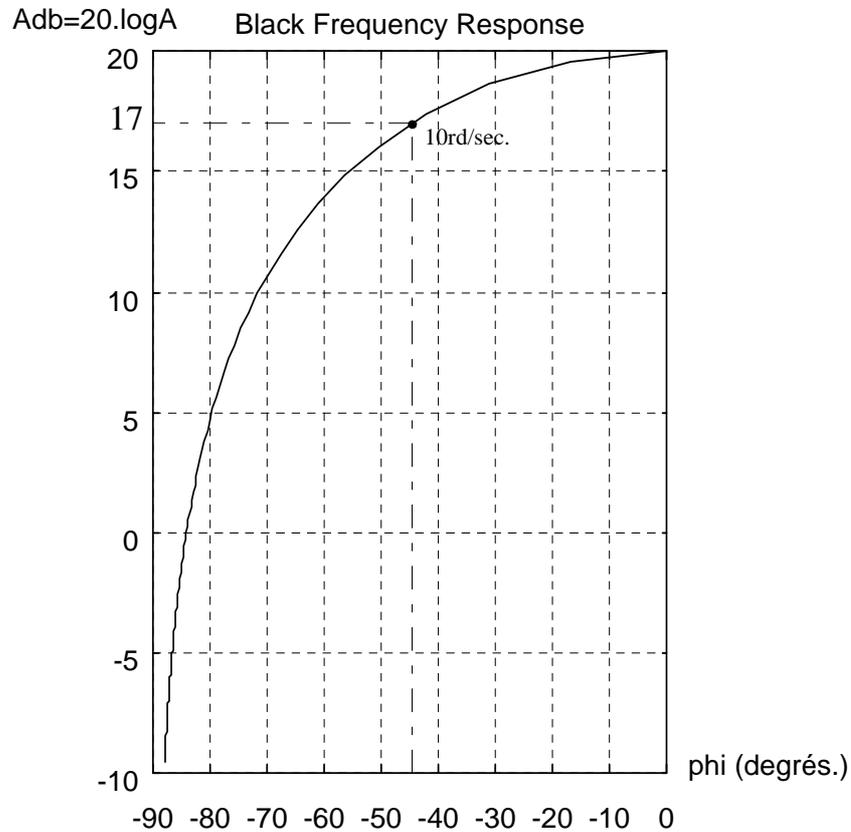


Fig.4-17: Diagramme de Black de $G(p)$.

On remarque que la variation de gain se traduit par une translation verticale. Par contre, la variation de la constante de temps ne provoque pas de modification visible sur cette courbe : c'est la graduation en pulsations qui est changée.

4-3-3. DIAGRAMME DE NYQUIST.

Le diagramme de black est la représentation de $H(j\omega)$ dans le plan complexe.

Le tracé du diagramme de Nyquist pour un système du premier ordre est détaillé dans "outils mathématiques" § 2-6.

C'est la représentation de la fonction complexe :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1+jT\omega} = \frac{K(1-jT\omega)}{(1+T^2\omega^2)} = \frac{K}{(1+T^2\omega^2)} + j \frac{-KT\omega}{(1+T^2\omega^2)} \quad (\text{forme } a + jb)$$

On obtient un demi-cercle de rayon $K/2$. Pour un point M de la courbe, la phase est l'angle polaire Φ et l'amplitude est le module OM.

De même que pour le diagramme de Black, cette courbe doit être graduée en pulsations, la flèche indiquant le sens croissant.

* à fréquence très faible, le déphasage est nul et l'amplitude est K.

* La pulsation de cassure $\omega_0 = 1/T$ est un peu mieux visible que sur le diagramme de Black : elle correspond au point d'abscisse $K/2$ et d'ordonnée $K/2$ (point de rebroussement du demi-cercle). A cet endroit, on retrouve une phase (angle polaire) = $-\pi/4$.

* A haute fréquence, le gain tend vers 0 : point (0,0) sur le diagramme (ce point n'est jamais atteint puisqu'il correspond à une pulsation infinie). La phase tend vers $-\pi/2$

* Une variation du gain est moins parlante que sur le Diagramme de black : elle se traduit par une dilatation ou une contraction du demi-cercle (comparer les figures 4-19 et 4-20).

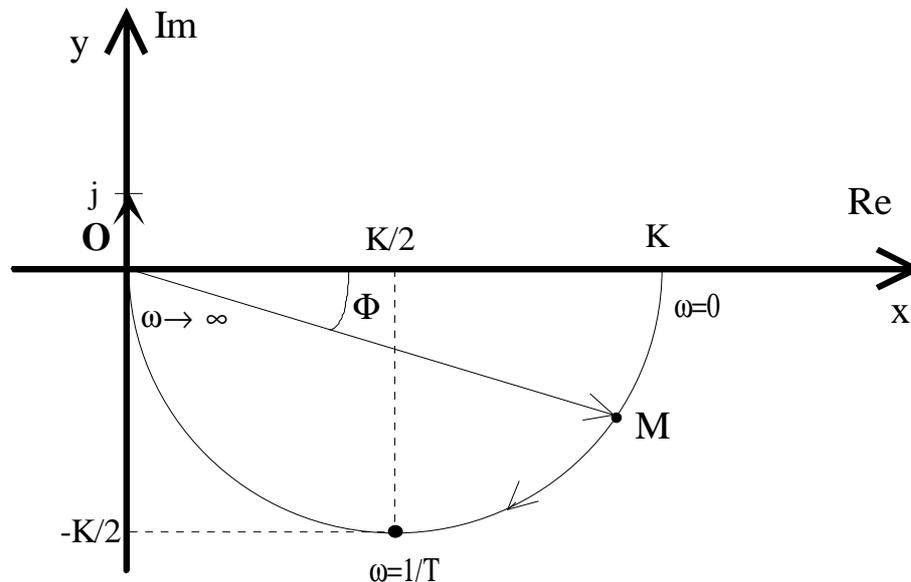


Fig.4-18: Allure du diagramme de Nyquist de $H(p)$.

ATTENTION: le gain n'est pas exprimé en décibels.

Exemple 1 : Quadripôle RC avec : $R = 1K\Omega$ et $C = 10\mu F$ de constante de temps $T = R.C = 0.01s$.

Gain à basse fréquence $K = 1$: point (1,0) sur le diagramme.

Pulsation de cassure $\omega_0 = 1/T = 1/0.01 = 100$ rad/s. Elle correspond au point d'abscisse 1/2.

A haute fréquence, le gain tend vers 0 : point (0,0) sur le diagramme.

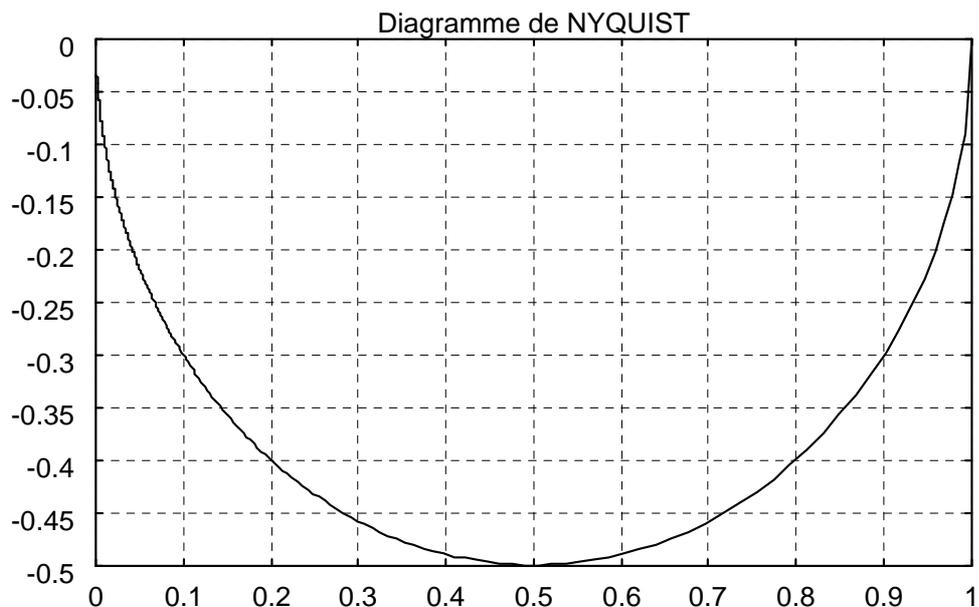


Fig.4-19: Diagramme de Nyquist du circuit RC avec $H(p) = \frac{1}{1+0.01p}$

Exemple 2 : Système de gain non-unitaire, de fonction de transfert : $G(p) = \frac{10}{1+0.1p}$.

Gain à basse fréquence $K = 10$: point (10,0) sur le diagramme.

Pulsation de cassure $\omega_0 = 1/T = 1/0.1 = 10$ rad/s en $K/2 = 5$.

Comme dans les cas des diagrammes de Bode et de Black, l'allure de la courbe de réponse en fréquence est identique, quels que soient les paramètres K et T du système.

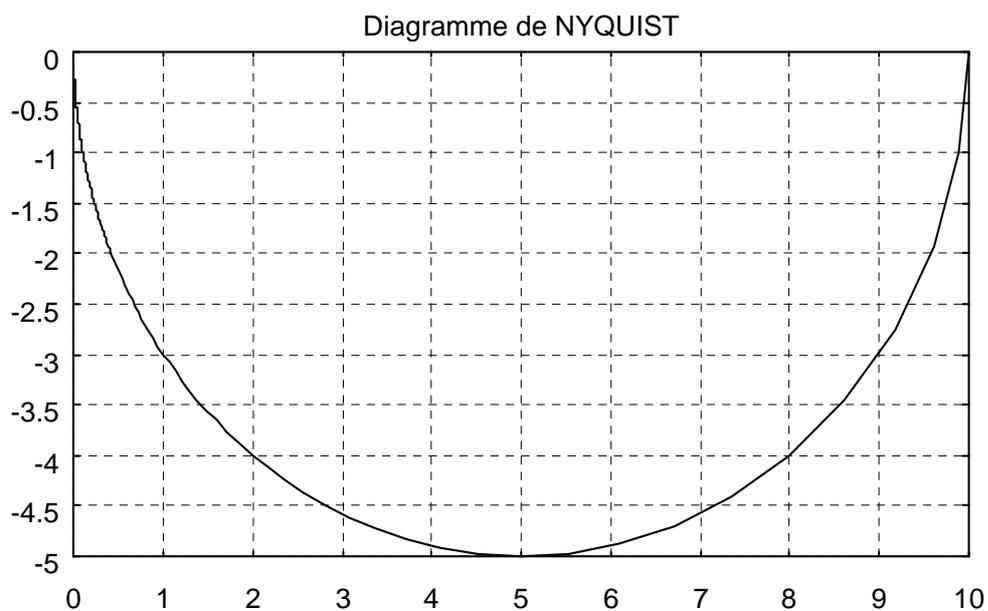


Fig.4-20: Diagramme de Nyquist de $G(p) = \frac{10}{1+0.1p}$

4-3-4. INTERPRETATION PHYSIQUE DES COURBES DE REPONSES FREQUENTIELLES.

La lecture des diagrammes de Bode, Black ou Nyquist n'est pas immédiate pour des mécaniciens. Nous allons l'effectuer sur l'exemple du circuit RC avec les mêmes valeurs que précédemment, soit

$$: R = 1K\Omega \text{ et } C = 10\mu\text{F}. \quad H(p) = \frac{1}{1+0.01p}.$$

La manipulation qui va suivre est très facile à mettre en œuvre en réalisant ce petit circuit, en l'alimentant avec un générateur de basses fréquences et en observant le signal en sortie au moyen d'un oscilloscope. (Voir "outils mathématiques" § 1-3-1 pour les sinusoides).

Première mesure : alimentons le circuit avec une tension sinusoïdale d'amplitude unitaire (1 Volt) et de pulsation 10rad/s : $e1(t) = Eo \sin(\omega.t) = \sin(10.t)$. Observons la sortie et représentons les deux signaux sur le même diagramme temporel. On obtient :

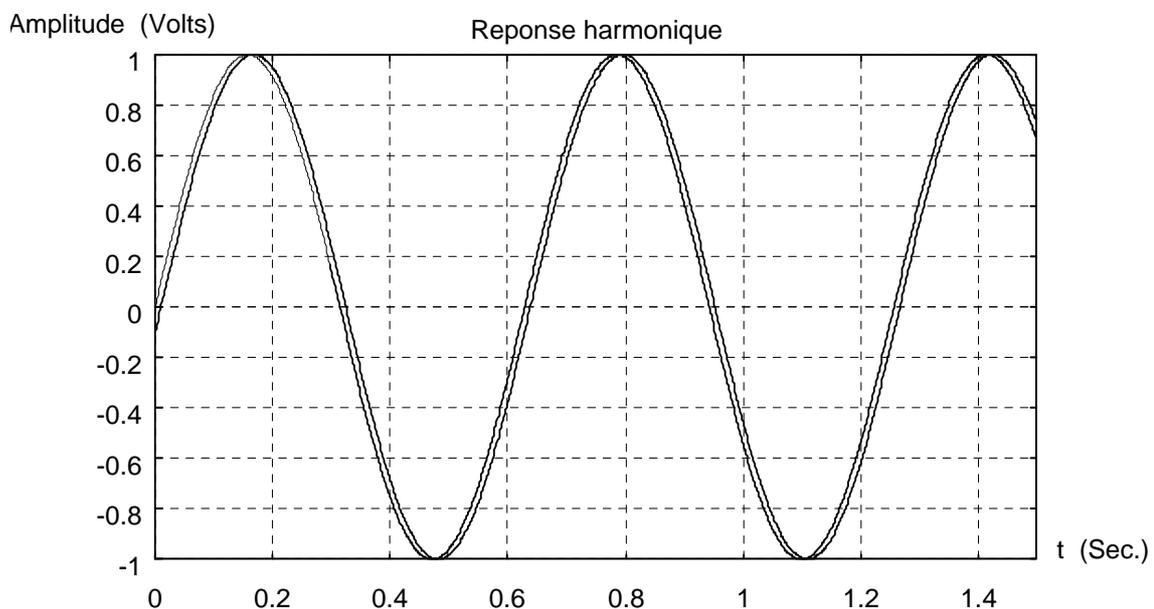


Fig.4-21: Réponse temporelle à un signal sinusoïdal $e1(t) = \sin(10.t)$

Effectuons des relevés sur la courbe :

Le signal de sortie est très peu différent du signal d'entrée. On peut relever un léger retard $R1 = 1\text{ms}$, la différence d'amplitude n'est pas mesurable.

On calcule le rapport d'amplitude en décibels : $A_{dB} = 20 \log A1 = 20 \log (1) = 0 \text{ dB}$ et on calcule le déphasage $\phi = -R1.\omega = -0,001.10 = -0,099 \text{ rad} = -5,71^\circ$.

Seconde mesure : alimentons le circuit avec une tension sinusoïdale de même amplitude mais de pulsation 100rad/s : $e2(t) = Eo \sin(\omega.t) = \sin(100.t)$. En représentant les deux signaux sur le même diagramme temporel, on obtient :

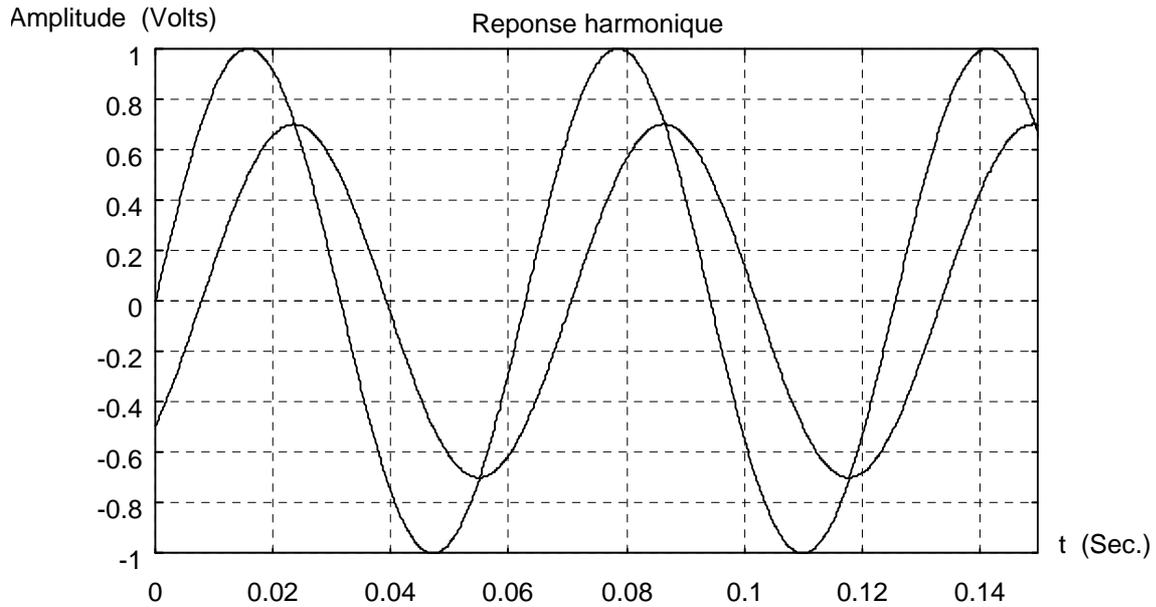


Fig.4-22: Réponse temporelle à un signal sinusoïdal $e_2(t) = \sin(100.t)$

Le signal de sortie est déjà plus affaibli (amplitude $A_2 < A_0$) et retardé (retard R_2) : les mesures donnent : amplitude $E_2 = 0.7$ Volts et retard $R_2 = 7,8$ ms.

On calcule le rapport d'amplitude en décibels : $A_{dB} = 20 \log A = 20 \log (0,7) = -3,09 \text{ dB}$ et on calcule le déphasage $\phi = -R_2 \cdot \omega = -0,0078 \cdot 100 = -0,78 \text{ rad} = -45^\circ$.

Troisième mesure : alimentons maintenant le circuit avec une tension sinusoïdale toujours de même amplitude mais de pulsation double de la précédente : $e_3(t) = E_0 \sin(\omega.t) = \sin(200.t)$. On obtient :

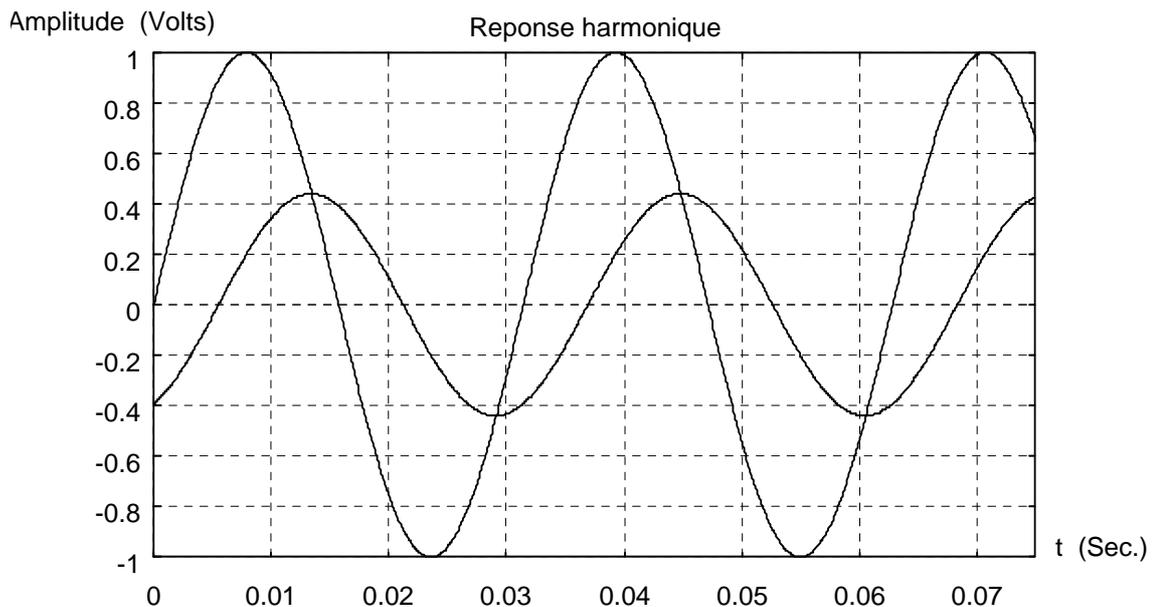


Fig.4-23: Réponse temporelle à un signal sinusoïdal $e_3(t) = \sin(200.t)$

Le signal de sortie est encore plus affaibli (amplitude $A_3 < A_2 < A_0$) et retardé (retard R_3) : les mesures donnent : amplitude $E_3 = 0.44$ Volts et retard $R_3 = 5,5$ ms.

On calcule l'amplitude en décibels : $A_{dB} = 20 \log A = 20 \log (0,44) = -7,1$ dB et on calcule le déphasage $\phi = -R_3 \cdot \omega = -0,0055 \cdot 200 = -1,1$ rad = -63° .

Quatrième mesure : alimentons enfin le circuit avec une tension sinusoïdale encore de même amplitude mais de pulsation plus élevée : $e_4(t) = E_0 \sin(\omega \cdot t) = \sin(1000 \cdot t)$. On obtient :

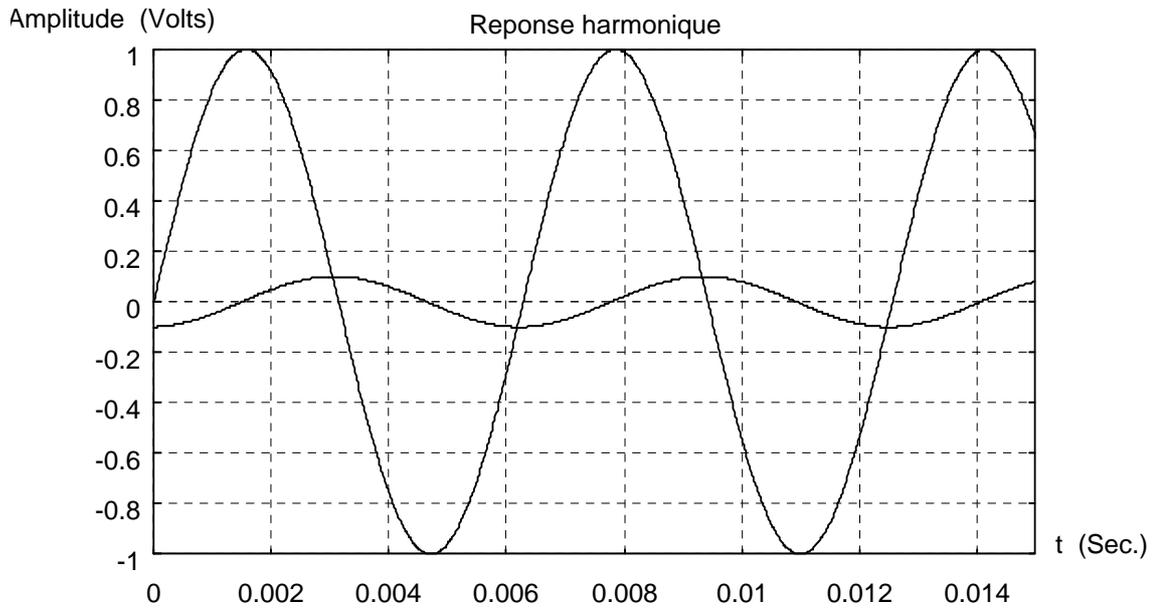


Fig.4-24: Réponse temporelle à un signal sinusoïdal $e_4(t) = \sin(1000 \cdot t)$

Le signal de sortie est très affaibli (amplitude $A_4 < A_3 < A_2 < A_0$) et très retardé (retard R_4) : les mesures donnent : amplitude $E_4 = 0.1$ Volts et retard $R_4 = 1,5$ ms.

On calcule le rapport d'amplitude en décibels : $A_{dB} = 20 \log A = 20 \log (0,1) = -20$ dB et on calcule le déphasage $\phi = -R_4 \cdot \omega = -0,0015 \cdot 1000 = -1,5$ rad = $-84,28^\circ$.

On pourrait multiplier les mesures à différentes fréquences.

Regroupons maintenant les résultats dans un tableau :

ω (rad/s)	A (V)	AdB	ϕ (deg)	ϕ (rad)
10	1	0	-5.71	-0.099
100	0.7	-3.09	-45	-0.78
200	0.45	-7.1	-63	-1.1
1000	0.1	-20	-84.28	-1.5

Reprenons le diagramme de bode du circuit RC considéré :

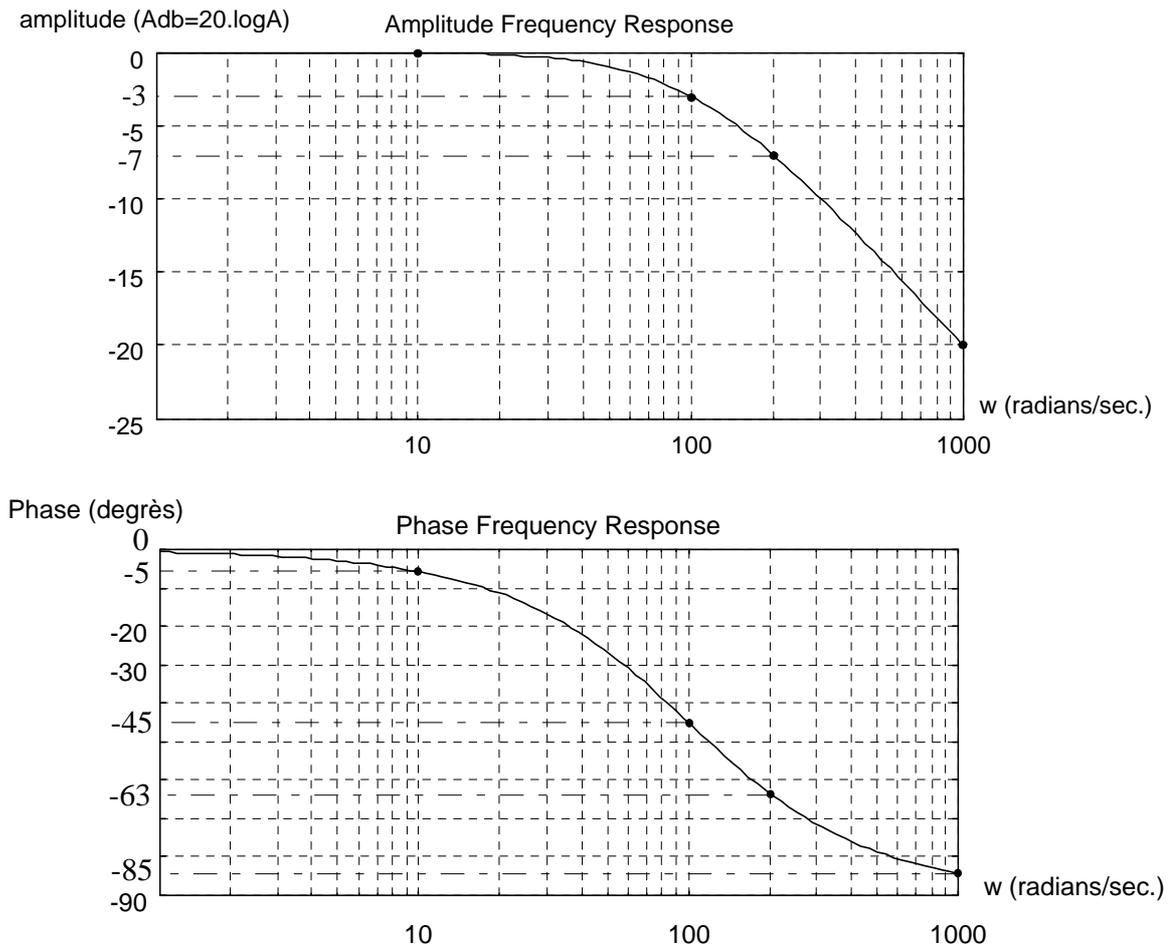


Fig.4-25: Réponse fréquentielle du circuit RC : diagramme de Bode.

Considérons les fréquences des cas 1 à 4.

Pour la pulsation $\omega = 10\text{rad/s}$ (basse fréquence), on lit $\text{AdB} = 0\text{ dB}$ et $\phi = -5^\circ$

Pour la pulsation $\omega = 100\text{rad/s}$ (c'est la pulsation de cassure), on lit $\text{AdB} = -3\text{ dB}$ et $\phi = -45^\circ$

Pour la pulsation $\omega = 200\text{rad/s}$, on lit $\text{AdB} = -7\text{dB}$ et $\phi = -63^\circ$

Pour la pulsation $\omega = 1000\text{rad/s}$ (haute fréquence), on lit $\text{AdB} = -20\text{dB}$ et $\phi = -85^\circ$

On retrouve bien sur le diagramme de bode, les résultats mesurés expérimentalement.

On peut tracer le diagramme de Bode point par point à partir d'un nombre suffisant de mesures, ce qui est très intéressant dans le cas d'un système que l'on ne connaît pas a priori. Si l'on retrouve, par exemple, un diagramme possédant les caractéristiques de la réponse d'un système du premier ordre, on le considérera comme tel par la suite (et sans avoir eu besoin d'effectuer de modélisation mathématique). Il en est de même pour les systèmes d'ordre supérieur.

Dans l'autre sens, la connaissance à priori du modèle du système réel permet de prévoir son comportement fréquentiel.

De manière générale :

Un système du premier ordre est un filtre passe-bas jusqu'à sa fréquence de cassure.

On considère souvent que la fréquence de coupure d'un système est celle à partir de laquelle le signal de sortie perd trois décibels (ce qui correspond à 30% de diminution), fréquence correspondant précisément à la fréquence de cassure pour un système du premier ordre. La Fig. 4-25 montre la réponse d'un filtre passe-bas parfait de fréquence de coupure $F_c = 1/2\pi T$ (en gras) et celle d'un système du premier ordre de gain unitaire de fréquence de cassure identique.

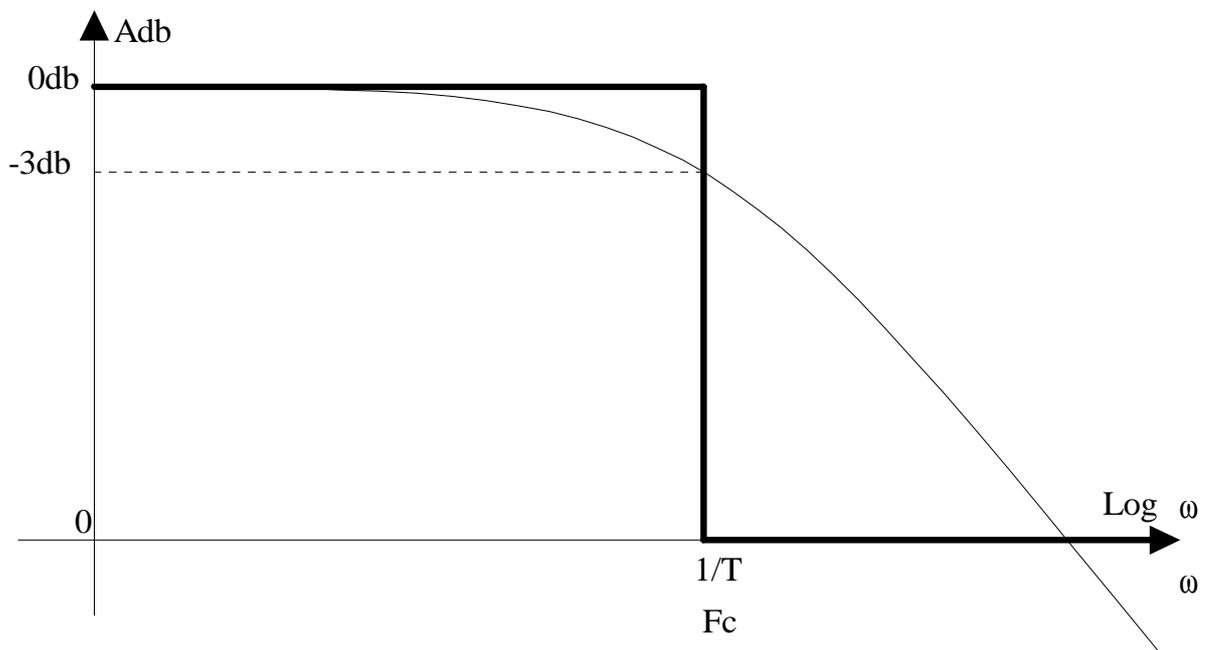


Fig.4-26: Caractère passe-bas d'un système du premier ordre.

Le système est alors considéré comme un filtre ne laissant passer que certaines fréquences. Cette zone est appelée bande passante et sa largeur est exprimée en Hertz : Pour le filtre passe-bas, $BP = F_c$

On montre mathématiquement (au moyen des développements en série de Fourier) qu'un signal peut se décomposer en une somme de signaux sinusoïdaux de différentes fréquences (harmoniques) et, en particulier, qu'un signal qui varie rapidement possède des harmoniques de fréquence élevée.

On comprend intuitivement que si le système filtre les fréquences élevées, sa réponse à un échelon (qui est un signal possédant des harmoniques de fréquence élevée) sera lente puisqu'il filtrera justement ces fréquences.

On peut aller plus loin en remarquant que plus sa fréquence de coupure sera basse (petite bande passante), moins il sera prompt à réagir à ce signal.

Un système du premier ordre possédant une bande passante élevée est rapide.

Cette relation fondamentale (et toujours valable) entre la bande passante d'un système et sa rapidité est facile à démontrer dans le cas d'un système du premier ordre.

* La rapidité est définie par le temps de réponse à 5% qui est $Tr_{5\%} = 3T$

* La bande passante à 3dB est $BP = 1/2\pi T$ Hz .

Elles sont donc inversement proportionnelles : pour augmenter la rapidité, il faut diminuer le temps de réponse et donc diminuer la constante de temps. Si l'on diminue la constante de temps, on augmente la fréquence de coupure et donc la bande passante. Inversement, si l'on diminue la bande passante, on augmente la constante de temps T et donc le temps de réponse à 5%.

En pratique, les servomécanismes ne sont pas sollicités par des consignes sinusoïdales, mais les résultats obtenus à partir de la réponse harmonique sont, comme on vient de le voir, valides et utilisables.

Chapitre 5

SYSTÈMES DU SECOND ORDRE.

5-1. GENERALITES.

5-1-1. DEFINITION.

On appelle système du second ordre, tout système dont le fonctionnement est régi, dans le cadre de certaines hypothèses (linéarisation par exemple), par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)} \quad \omega_n, z \text{ et } K > 0 \quad (5-1)$$

La fonction de transfert d'un système du second ordre s'écrit en faisant subir la transformation de Laplace aux deux membres de (5-1) :

$$s(t) \xrightarrow{L} = S(p) \quad \text{et} \quad e(t) \xrightarrow{L} = E(p)$$

Pour un système partant du repos, le théorème de la dérivation nous donne :

$$\frac{ds(t)}{dt} \xrightarrow{L} = p.S(p) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \xrightarrow{L} = p^2.S(p)$$

(5-1) devient :

$$\frac{1}{\omega_n^2} p^2.S(p) + \frac{2z}{\omega_n} p.S(p) + S(p) = K.E(p) = S(p) \left(\frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2z}{\omega_n} p + 1 \right)$$

On en déduit la fonction de transfert d'un système du second ordre :

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)}} \quad (5-2)$$

Le dénominateur peut ou non se décomposer en éléments simples du premier ordre suivant la valeur du coefficient z (voir dans "outils mathématiques" l'exemple du § 3-1-2).

Si $z > 1$, La fonction de transfert possède deux pôles réels distincts et peut apparaître sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

Si $z = 1$, la fonction de transfert possède un pôle réel double et peut apparaître sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + T_p)^2}$$

Si $z < 1$, La fonction de transfert possède deux pôles complexes : le polynôme dénominateur ne peut plus se décomposer dans les Réels.

On laisse la fonction de transfert sous la forme usuelle : $H(p) = \frac{K}{\left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2\right)}$

Le schéma-bloc d'un système du second ordre sera toujours de la forme suivante :

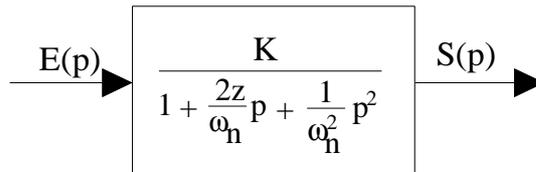


Fig. 5-1 : Système du second ordre.

K est le gain statique, z le coefficient d'amortissement réduit et ω_n la pulsation propre non amortie.

5-1-2. EXEMPLE.

Considérons le système électrique représenté Fig.5-2 : Ce quadripôle étant soumis à une tension $V_e(t)$ en entrée, quelle tension $V_s(t)$ délivre-t-il en sortie ?

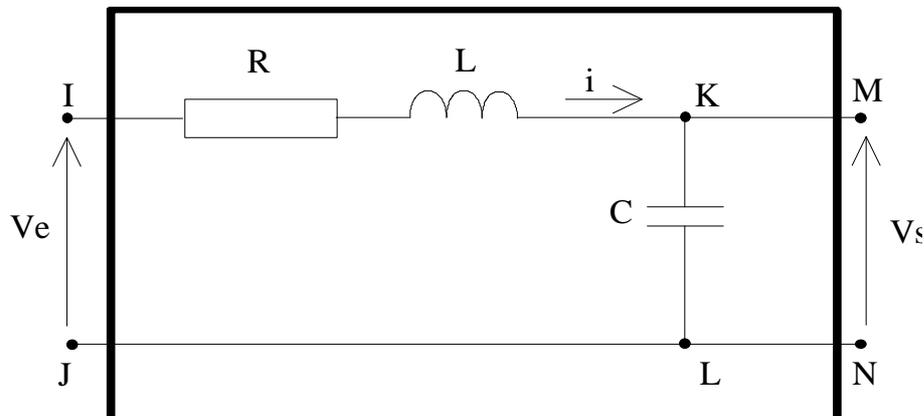


Fig. 5-2 : Circuit R.L.C.

On utilise les lois de Kirchoff.

$$\text{Maille IJKL : } V_e(t) = R.i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (5-3)$$

$$\text{Maille KLMN : } V_s(t) = \frac{1}{C} \int i(t).dt \quad (5-4)$$

En appliquant la transformation de Laplace et en supposant que le système part du repos :

$$Ve(t) \xrightarrow{L} Ve(p)$$

$$Vs(t) \xrightarrow{L} Vs(p)$$

$$i(t) \xrightarrow{L} I(p) \Rightarrow \int i(t) dt \xrightarrow{L} \frac{I(p)}{p} \quad \text{et} \quad \frac{di(t)}{dt} \xrightarrow{L} p.I(p)$$

(5-3) et (5-4) deviennent :

$$Ve(p) = R.I(p) + L.p.I(p) + \frac{1}{Cp} I(p) \quad (5-5)$$

$$Vs(p) = \frac{I(p)}{C.p} \quad (5-6)$$

En éliminant I(p) dans (5-5), on a

$$Ve(p) = R.C.p.Vs(p) + L.C.p^2 Vs(p) + Vs(p) = Vs(p)(1 + R.C.p + L.C.p^2)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{Vs(p)}{Ve(p)} = \frac{1}{1 + R.C.p + L.C.p^2} \quad (5-7)$$

(5-7) est bien de la forme (5-2) avec $K = 1$ Gain statique, $z = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ coefficient d'amortissement et

$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{L.C}}$ pulsation propre non amortie.

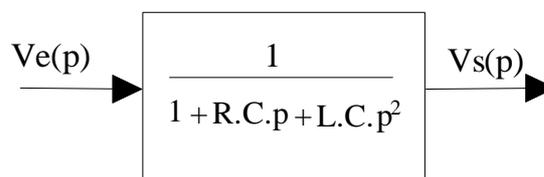


Fig.5-3: Quadripôle R.L.C.

5-2. REPONSE D'UN SYSTEME DU SECOND ORDRE AUX ENTREES TYPQUES.

5-2-1. REPONSE A UN ECHELON.

Soumettons le système à un échelon d'amplitude E_0 : $e(t) = E_0.u(t)$

L'équation différentielle (5-1) s'écrit maintenant :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.E_0.u(t) \quad (5-8)$$

Pour déterminer la réponse $s(t)$ du système, il faut résoudre classiquement ou utiliser la transformée de Laplace. Les démonstrations détaillées sont effectuées aux § 4-3-3-1 et § 5-4-2-1 de "outils mathématiques".

En appliquant la transformation de Laplace, toujours pour un système partant du repos, et en sachant que $u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{p}$, on peut écrire :

$$\frac{1}{\omega_n^2} p^2 \cdot S(p) + \frac{2z}{\omega_n} p \cdot S(p) + S(p) = \frac{K \cdot E_0}{p} \Rightarrow S(p) = \frac{K \cdot E_0}{p} H(p) = \frac{K \cdot E_0}{p \left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)}$$

La réponse $s(t)$ est la transformée inverse de $S(p)$ que l'on détermine après décomposition de la fraction rationnelle $S(p)$ en éléments simples.

Suivant la nature des racines du polynôme au dénominateur, la décomposition en éléments simples sera différente et donc la réponse. Il existe trois cas :

5-2-1-1: réponse indicielle en régime aperiodique ($z > 1$)

La réponse est de la forme :
$$S(p) = \frac{K \cdot E_0}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

Après transformation inverse, il vient :

$$s(t) = K \cdot E_0 + \frac{K \cdot E_0}{T_2 - T_1} \left[T_1 e^{\frac{-t}{T_1}} - T_2 e^{\frac{-t}{T_2}} \right] \quad (5-9)$$

Avec:
$$T_1 = \frac{1}{\omega_n (z - \sqrt{z^2 - 1})} \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{1}{\omega_n (z + \sqrt{z^2 - 1})}$$

Allure de la réponse temporelle (voir fig. 5-4) :

Elle ressemble à celle d'un système du premier ordre avec, pour différence notable, la tangente horizontale à l'origine (dérivée nulle en $t = 0$).

La valeur de la réponse tend vers $K \cdot E_0$ au bout d'un temps infini.

L'écart statique est défini de la même manière que pour le premier ordre et l'on retrouve le résultat suivant : l'écart statique est nul si $K = 1$ et constant et non nul = $E_0 \cdot (1 - K)$ dans les autres cas.

Nous nous intéresserons au temps de réponse à 5% un peu plus tard, son expression étant beaucoup plus complexe que dans le cas du premier ordre. On mesure $T_r = 0,8$ s sur la fig. 5-4.

REMARQUE: Lorsque l'une des constantes de temps est très petite devant l'autre ($T_1 \ll T_2$, par exemple), on assimile souvent la réponse indicielle à celle d'un système du premier ordre de constante de temps T_2 , retardée d'un temps T_1 et on néglige ce petit retard : on obtient alors une réponse du premier ordre de constante de temps T_2 . Voir le cas du moteur à courant continu (volume 3).

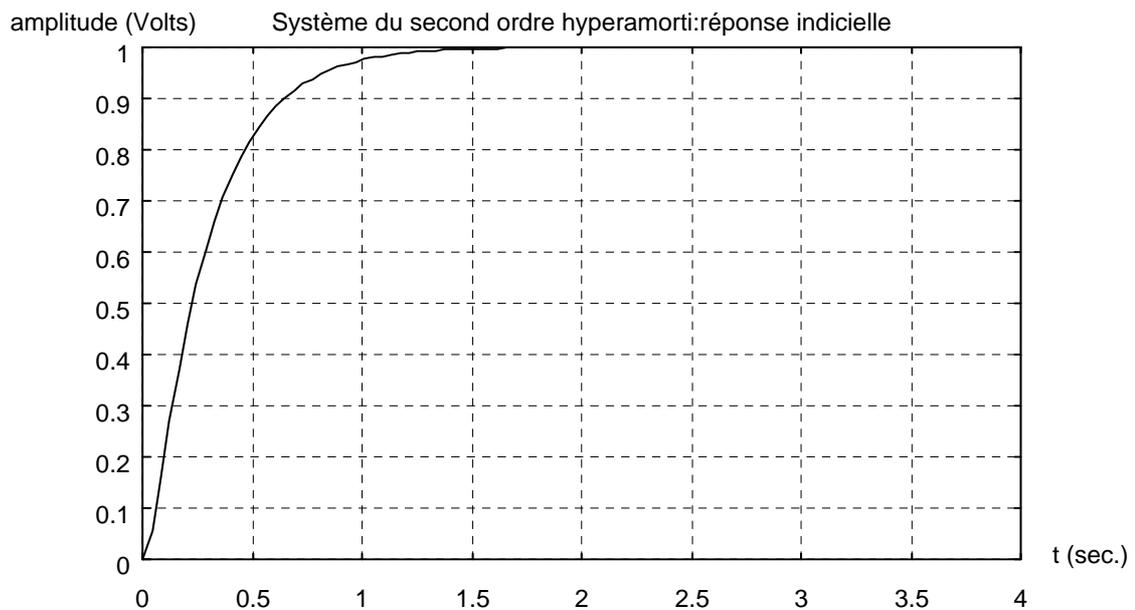


Fig. 5-4 : réponse indicielle d'un système du second ordre avec : $K = 1$; $z = 1,5$ et $\omega_n = 10\text{rad/s}$

5-2-1-2: réponse indicielle en régime apériodique critique ($z = 1$)

La réponse est de la forme : $S(p) = \frac{K.E_0}{p(1+Tp)^2}$

Après transformation inverse, il vient :

$$s(t) = K.E_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right] \quad \text{Avec: } T = -\frac{1}{\omega_n} \quad (5-10)$$

Le régime apériodique critique est un cas particulier du régime apériodique avec une racine double : L'allure de la réponse temporelle est donc identique (voir fig. 5-5) :

La pente à l'origine est nulle.

La valeur de la réponse en régime permanente est KE_0 .

L'écart statique est nul si $K = 1$. Dans le cas contraire l'écart est constant et égal à $E_0.(1-K)$.

On remarque que le système est plus rapide que dans le cas précédent. En mesurant sur la courbe Fig. 5-5, on trouve $T_r = 0,4$ s. Ceci rejoint la remarque du § 2-2-3 : L'amortissement correspondant physiquement à des pertes d'énergie, une diminution de l'amortissement provoque une augmentation du rendement.

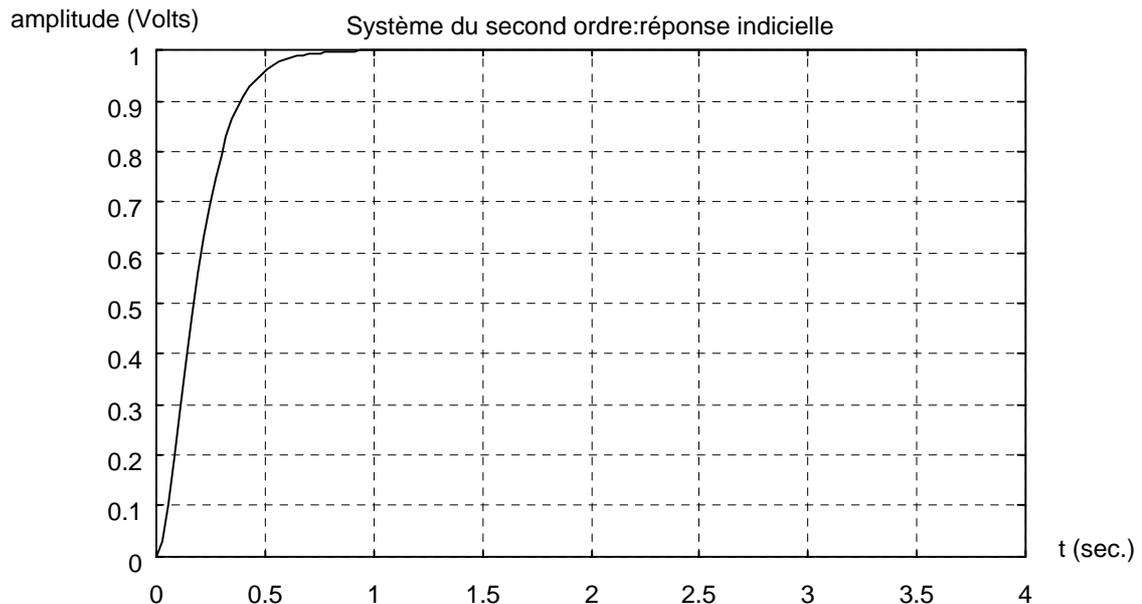


Fig. 5-5 : réponse indicielle d'un système du second ordre avec : $K = 1$; $z = 1$ et $\omega_n = 10\text{rad/s}$

5-2-1-3: réponse indicielle en régime oscillatoire ($z < 1$)

La réponse est de la forme : $S(p) = \frac{K.E_o.\omega_n^2}{p(\omega_n^2 + 2z\omega_n p + p^2)}$

Après transformation inverse, il vient :

$$s(t) = K.E_o \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-z^2} . t + \varphi) \right] \quad (5-11)$$

Avec: $\varphi = \text{arctg} \left(\frac{-\sqrt{1-z^2}}{-z} \right)$

L'étude détaillée de cette courbe est effectuée au § 1-4-5 de "outils mathématiques" ou l'on considère un système du second ordre de Gain statique $K = 10$ de coefficient d'amortissement $z = 0,2$ et de pulsation propre non amortie $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ soumis à un échelon unitaire $E_o = 1V$. On rappelle que φ est un angle situé dans le troisième quadrant, voire remarque afférente.

L'allure de la réponse dépend surtout de la valeur de z :

Pour $z > 0.7$ les oscillations sont imperceptibles.

Pour $z < 0.7$ le système est franchement oscillant : c'est le cas de la fig. 5-6 avec $z = 0,2$.

La pente à l'origine est toujours nulle et la réponse permanente tend vers $K.E_o$

La valeur de l'écart statique est donc nulle si $K = 1$ et égale à $E_o.(1-K)$ sinon.

La période de la sinusoïde est : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-z^2}}$ et sa pulsation propre est : $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-z^2}$

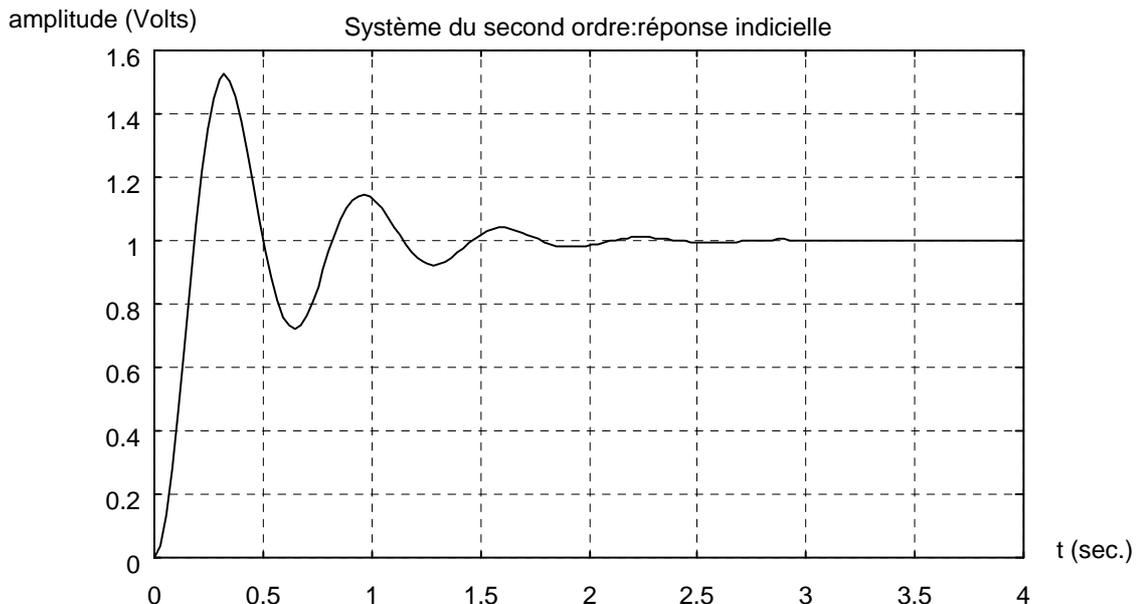


Fig. 5-6 : réponse indicielle d'un système du second ordre avec : $K = 1$; $z = 0,2$ et $\omega_n = 10\text{rad/s}$

T_p est appelée période propre et ω_p pulsation propre du système amorti. $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-z^2}$

Dans le cas d'un système à amortissement nul (mécaniquement impossible), on retrouve la pulsation propre non amortie. Le temps de réponse à 5% est supérieur à 1,5 s.

5-2-1-4: Influence de z et de ω sur l'allure de la réponse indicielle.

Influence de z : Elle correspond à ce que l'on vient de voir :

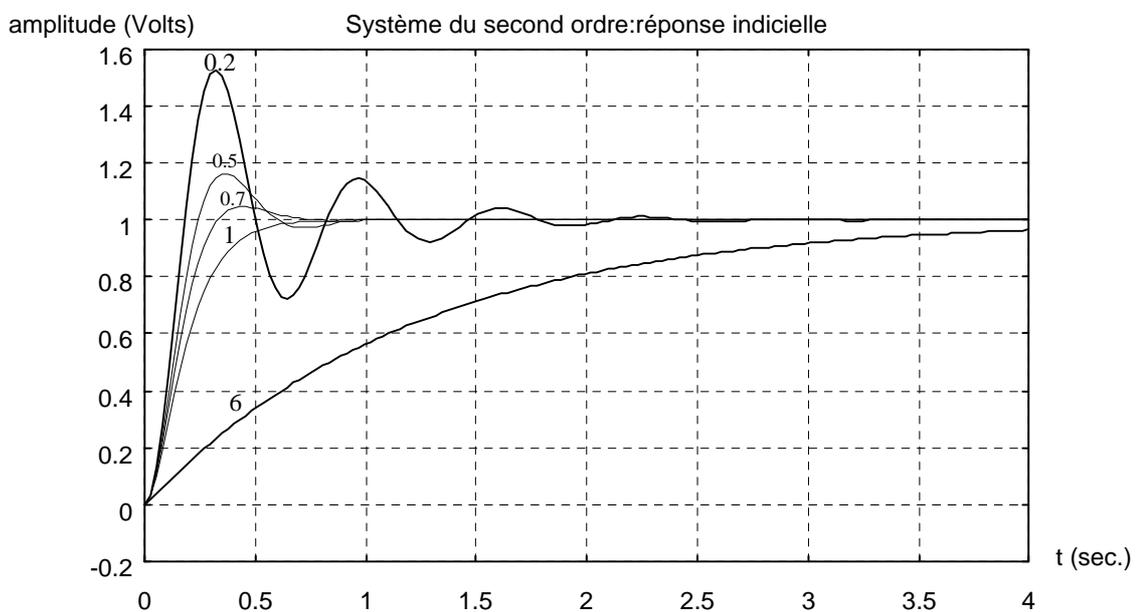


Fig. 5-7 : réponse indicielle avec : $K = 1$; $\omega_n = 10\text{rad/s}$ et $z = 0.2 \quad 0.5 \quad 0.707 \quad 1 \quad 6$

Si l'amortissement est trop grand ($z = 6$), le système devient excessivement lent (courbe inférieure). Pour $z = 1$, il n'y a pas de dépassement ni d'oscillations.

Pour $z = 0.7$ le système est oscillant, l'oscillation n'étant plus perceptible après une demi période. Avec $z = 0.5$, le système oscille sur une période. Si l'amortissement est trop faible ($z = 0.2$), le système devient excessivement oscillatoire.

Influence de la pulsation propre non amortie.

Cas d'un système peu amorti : La Figure 5-8 représente la réponse pour trois valeurs de la pulsation, à savoir : 5, 10 et 20rad/s.

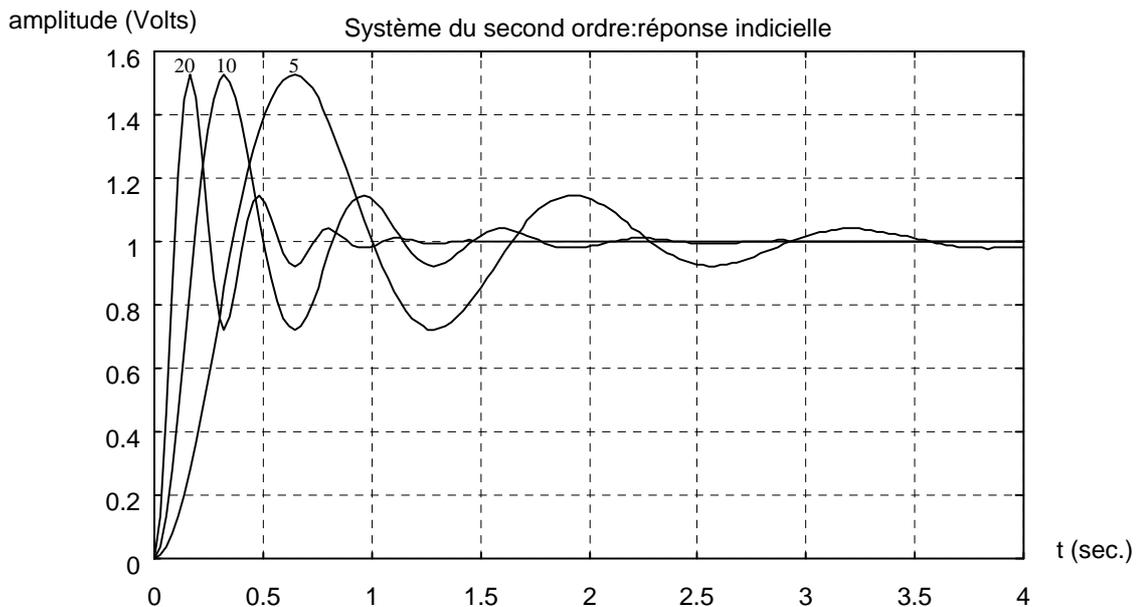


Fig. 5-8 : réponse indicielle avec : $K = 1$; $z = 0.2$ et $\omega_n = 5 \quad 10 \quad 20$ rad/s.

A amortissement constant, plus la valeur de la pulsation est élevée, plus la réponse monte rapidement.

Au bout de deux secondes, la réponse correspondant à la pulsation de 5rad/s est encore très oscillante alors que celle correspondant à 20rad/s est en régime permanent.

On remarque que l'amplitude de la première ondulation est identique dans les trois cas. Il en va de même pour les ondulations suivantes. Ceci est dû au fait que l'amortissement entre deux vibrations consécutives, mesuré par le décrément logarithmique δ , est indépendant de la pulsation propre non amortie (Voir "outils mathématiques" § 1-3-5) :

$$\delta = e^{\frac{-2\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Il est alors évident que, la réponse diminuant d'une valeur donnée à chaque vibration, un système qui vibre plus vite est plus rapide. Insistons sur le fait que ceci n'est vrai qu'à amortissement constant.

Tout ceci se retrouve dans le cas d'un système plus amorti (voir fig. 5-9) et reste valable même dans le cas d'une réponse non oscillante (voir Fig.5-10).

Nota: la courbe 5-8 est représentée avec une échelle différente de 5-9 et 5-10 sur l'axe temporel.

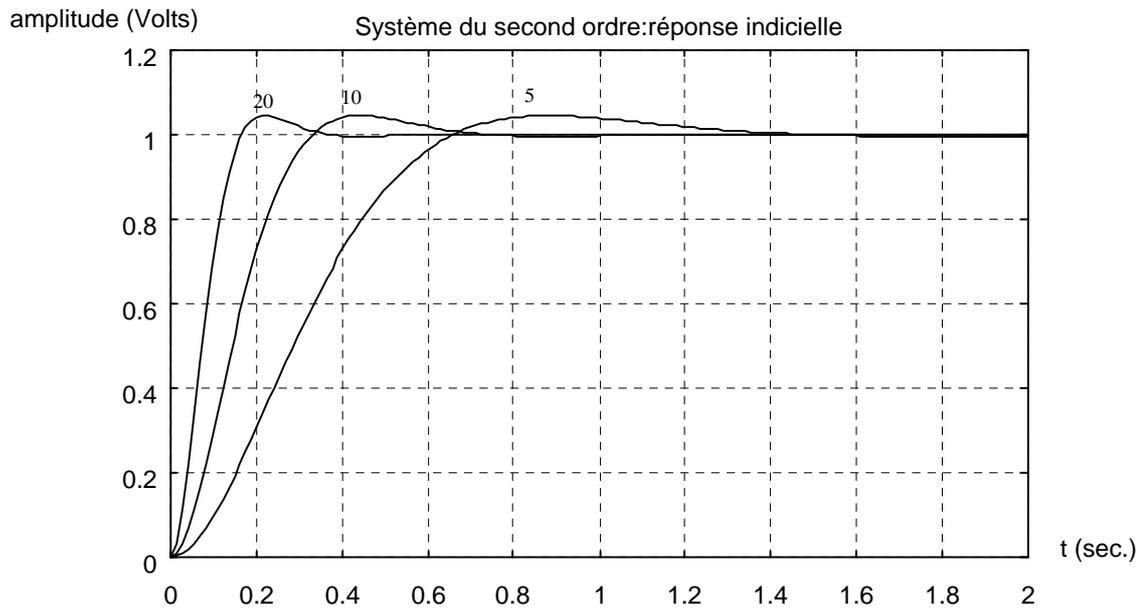


Fig. 5-9 : réponse indicielle avec : $K = 1$; $z = 0.7$ et $\omega_n = 5 \ 10 \ 20$ rad/s.

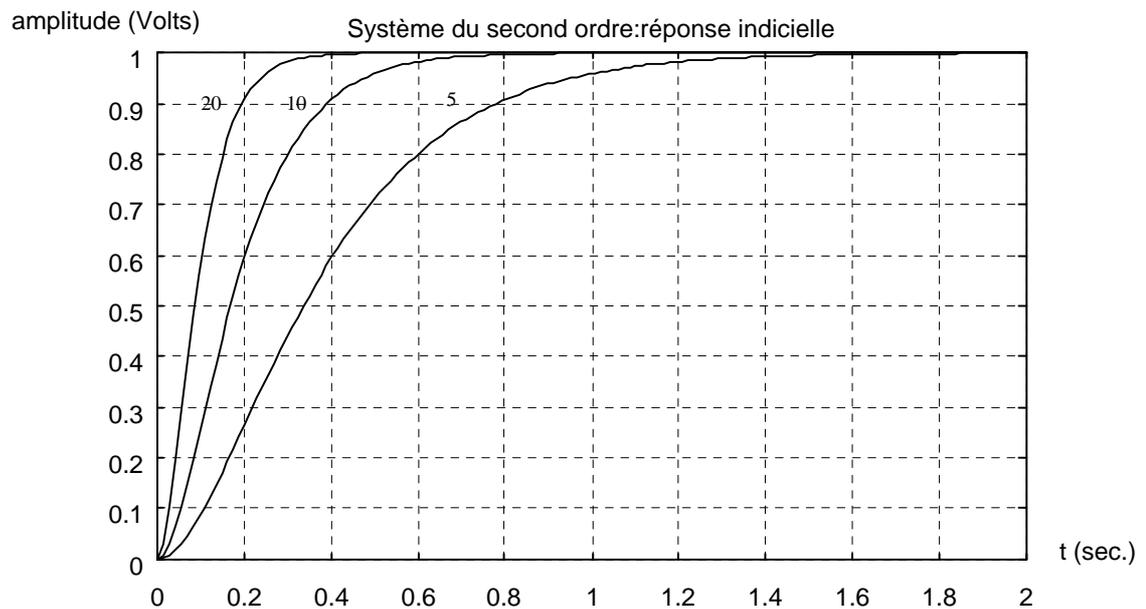


Fig. 5-10 : réponse indicielle avec : $K = 1$; $z = 1$ et $\omega_n = 5 \ 10 \ 20$ rad/s.

La valeur de la pulsation propre non amortie influe sur le temps de réponse du système même en régime apériodique.

5-2-2. REPONSE A UNE RAMPE.

Soumettons le système à une rampe de pente a : $e(t) = a.t.u(t)$

L'équation différentielle (5-1) s'écrit maintenant :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.a.t.u(t) \quad (5-12)$$

Pour déterminer la réponse $s(t)$ du système, il faut résoudre classiquement ou par Laplace.

Les démonstrations détaillées sont effectuées aux § 4-3-3-2 et § 5-4-2-2 de "outils mathématiques".

En appliquant la transformation de Laplace, toujours pour un système partant du repos, et en sachant que $u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{p}$, on peut écrire :

$$\frac{1}{\omega_n^2} p^2 .S(p) + \frac{2z}{\omega_n} p.S(p) + S(p) = \frac{K.a}{p^2} \Rightarrow S(p) = \frac{K.a}{p^2} H(p) = \frac{K.a}{p^2 \left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)}$$

La réponse $s(t)$ est la transformée inverse de $S(p)$ que l'on détermine après décomposition de la fraction rationnelle $S(p)$ en éléments simples.

Suivant la nature des racines du polynôme au dénominateur, la décomposition en éléments simples sera différente et donc la réponse. Il existe trois cas :

5-2-2-1: réponse à une rampe en régime aperiodique ($z > 1$)

La réponse est de la forme : $S(p) = \frac{K.E_0}{p^2 (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$

Après transformation inverse, il vient :

$$s(t) = K.a \left[t - T_1 - T_2 - \frac{1}{T_2 - T_1} \left[T_1^2 e^{\frac{-t}{T_1}} - T_2^2 e^{\frac{-t}{T_2}} \right] \right] \quad (5-13)$$

Avec: $T_1 = \frac{1}{\omega_n (z - \sqrt{z^2 - 1})}$ et $T_2 = \frac{1}{\omega_n (z + \sqrt{z^2 - 1})}$

5-2-2-2: réponse à une rampe en régime aperiodique critique (z=1)

La réponse est de la forme : $S(p) = \frac{K.a}{p^2(1+Tp)^2}$

Après transformation inverse, il vient :

$$s(t) = K.a \left[t - 2T + (t + 2T)e^{-\frac{t}{T}} \right] \quad \text{Avec: } T = -\frac{1}{\omega_n} \quad (5-14)$$

Le régime aperiodique critique est un cas particulier du régime aperiodique avec une racine double :

5-2-2-3: réponse à une rampe en régime oscillatoire (z < 1)

La réponse est de la forme : $S(p) = \frac{K.a.\omega_n^2}{p^2(\omega_n^2 + 2z\omega_n p + p^2)}$

Après transformation inverse, il vient :

$$s(t) = K.a \left[t - \frac{2z}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-z^2} . t + \varphi) \right] \quad (5-15)$$

$$\text{Avec: } \varphi = -\arctg\left(\frac{2z\sqrt{1-z^2}}{1-2z^2}\right)$$

Allure de la réponse temporelle : elle ressemble à celle du premier ordre en régime permanent avec :

Une réponse qui tend asymptotiquement vers une droite d'équation $K.a \left(t - \frac{2z}{\omega_n} \right)$

* Erreur de traînage finie $\varepsilon_s = \frac{2z.a}{\omega_n}$ pour K=1. On remarque que le terme $\frac{2z}{\omega_n}$ joue un rôle analogue à celui du terme T pour un système du premier ordre. L'écart de traînage augmente proportionnellement à l'amortissement et inversement proportionnellement à la pulsation non amortie.

* Ecart tendant vers l'infini lorsque K est différent de 1 : le système ne suit pas.

Le régime transitoire est oscillant ou non suivant la valeur de z

Un système de gain unitaire soumis à une rampe unitaire réagit comme représenté sur la figure 5-11 pour des valeurs d'amortissement de 0.2 , 1 et 5.

La rampe est représentée en tirets et les asymptotes vers lesquelles tendent les réponses en pointillés.

Les écarts de traînage sont : 0.04 Volts dans le premier cas, 0.2 Volts dans le second cas et 1 Volt dans le dernier cas.

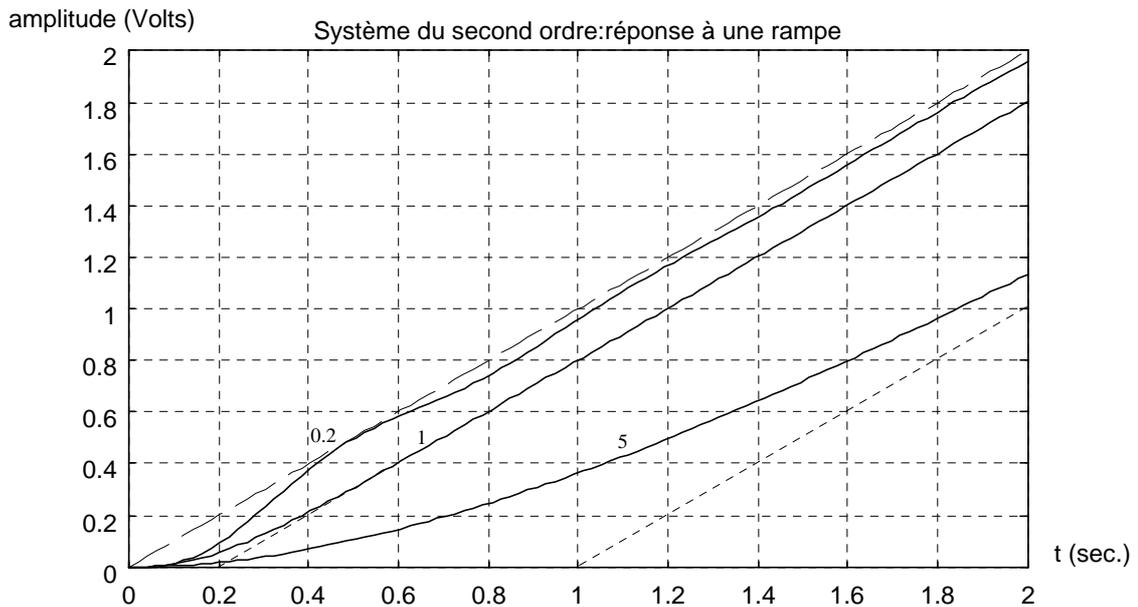


Fig. 5-11 : réponse à une rampe unitaire pour : $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ et $z = 0.2 ; 1 ; 5$.

5-3. PERFORMANCES TEMPORELLES D'UN SYSTEME DU SECOND ORDRE.

5-3-1. ERREUR DE POSITION.

L'écart statique ε_s étant la différence entre la consigne et la réponse en régime permanent (voir § 2-2-1-1), on peut écrire : $\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t) - s(t)]$

en utilisant le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{E_o}{p} - H(p)E(p) \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{E_o}{p} - \frac{K.E_o}{p \left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} E_o \left[1 - \frac{K}{\left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)} \right]$$

et finalement $\varepsilon_s = E_o(1-K)$.

On a $\varepsilon_s = 0$ si et seulement si $K = 1$ (c'est le cas du quadripôle)

Un système du second ordre possède une erreur statique nulle si son gain statique est égal à 1.

La même remarque qu'en § 4-2-1 est valable.

5-3-2. ERREUR DE TRAINAGE.

L'écart de traînage est la différence entre la consigne et la réponse en régime permanent :

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t) - s(t)]$$

en utilisant le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{a}{p^2} - H(p)E(p) \right] = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{a}{p^2} - \frac{K.a}{p^2 \left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p} \left[1 - \frac{K}{\left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)} \right]$$

En réduisant au même dénominateur, il vient :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p} \left[\frac{1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 - K}{\left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} a \left[\frac{\frac{1-K}{p} + \frac{2z}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n^2} p}{\left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)} \right]$$

et finalement $\varepsilon_v = a \left[\frac{1-K}{p} + \frac{2z}{\omega_n} \right]$

Un système du second ordre possède une erreur de traînage finie $\varepsilon_v = \frac{2z.a}{\omega_n}$ si son gain statique est égal à 1, et infinie dans le cas contraire.

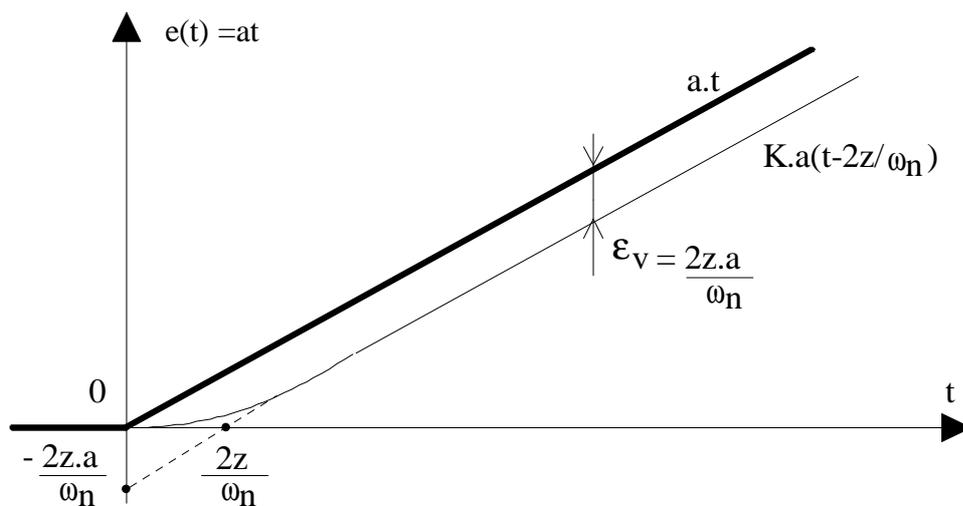


Fig. 5-12 : Ecart de traînage pour $K = 1$.

5-3-3. TEMPS DE REPONSE A 5%.

Contrairement aux systèmes du premier ordre, on ne sait pas exprimer d'une manière générale la valeur du temps de réponse par une expression analytique. On procède donc à un calcul numérique (voir dans « outils mathématiques ») et on obtient la courbe représentée fig. 5-13 qui donne la valeur du temps de réponse réduit $T_{rr} = Tr \cdot \omega_n$ en fonction de z .

La meilleure performance pour une valeur donnée de la pulsation est obtenue pour une valeur de z environ égale à 0,7. En reportant les valeurs de z utilisées en 5-2-1, on retrouve les temps de réponse mesurés (avec $\omega_n = 10$ rad/s et $Tr = T_{rr}/\omega_n = T_{rr}/10$).

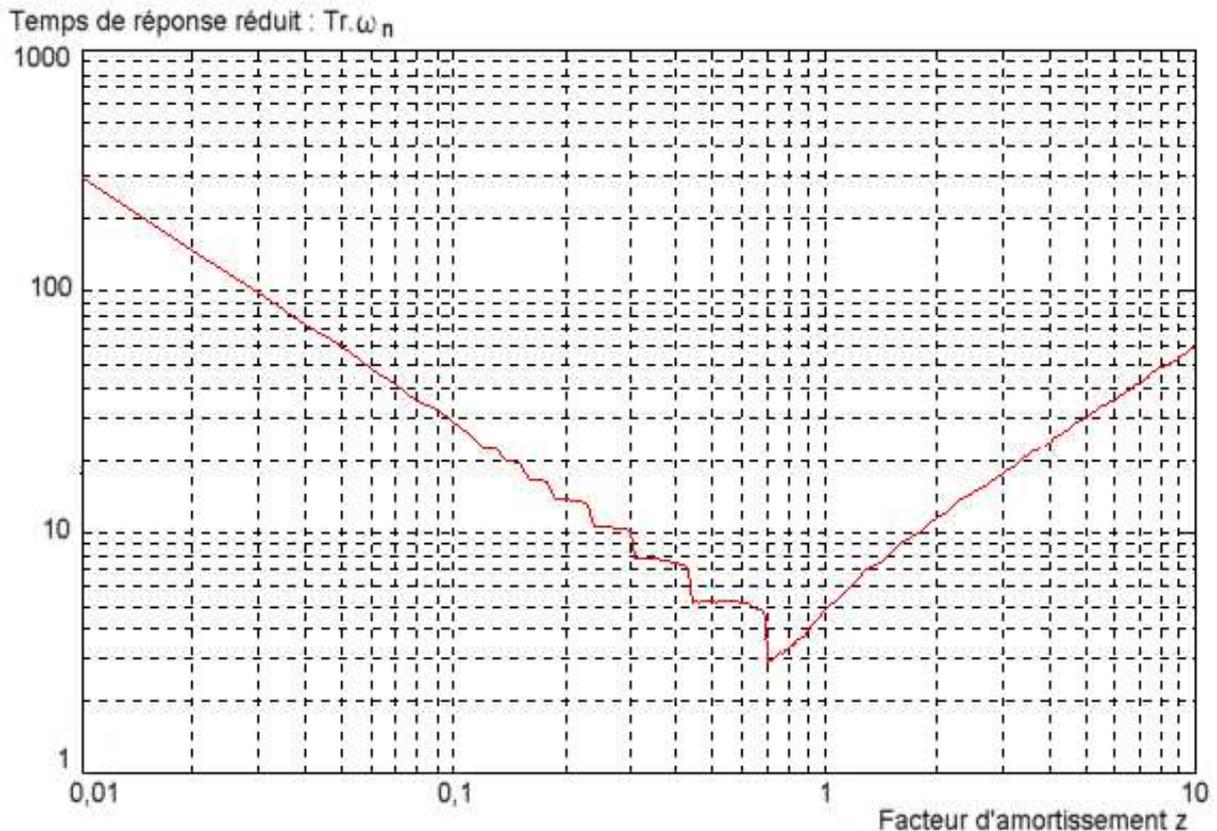


Fig.5-13: Temps de réponse à 5% d'un système du second ordre.

Pour un système du second ordre, la rapidité maximale est obtenue pour $z = 0.7$

5-3-4. DEPASSEMENTS EN REGIME TRANSITOIRE.

Lorsque le coefficient d'amortissement z est supérieur ou égal à un, la réponse n'est pas oscillante et il n'y a pas de dépassement de la valeur visée. Lorsque le coefficient d'amortissement z est inférieur à un, la réponse est oscillante avec un (ou plusieurs) dépassement(s) de la valeur visée. Plus z est faible, plus l'amplitude des oscillations est grande et plus le nombre et l'importance des dépassements sont grands. Les dépassements sont notés D_1, D_2, \dots, D_n et correspondent à ce qui est indiqué fig. 5-14. On peut déterminer analytiquement leur valeur en remarquant que le dépassement D_1 a lieu à la première demi-période, le dépassement D_2 à la seconde demi-période et le dépassement D_n à la nième demi-période (voir calcul détaillé dans "outils mathématiques" § 1-4-5). La fig. 5-15 représente en coordonnées log-log la valeur absolue des 6 premiers dépassements en fonction de z . On vérifie bien que pour $z = 0.2$ $D_1 = 50\%$, $D_2 = 30\%$, etc.

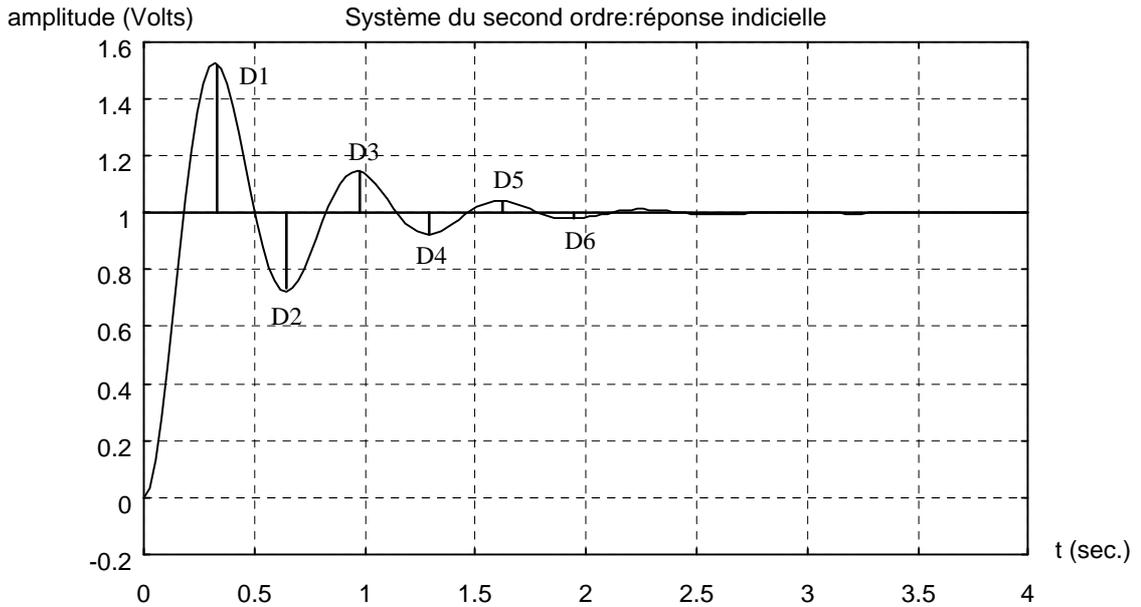


Fig.5-14: Dépassements sur la réponse indicielle avec $z = 0.2$ et $\omega_n = 10\text{rad/s}$.

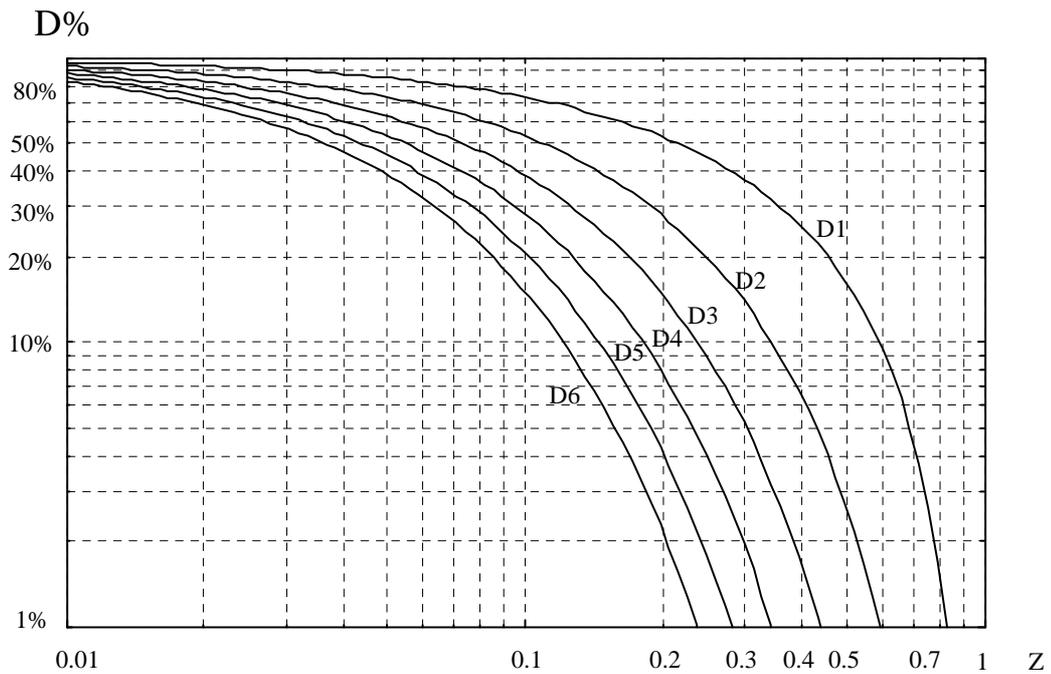


Fig.5-15: Dépassements successifs de la réponse indicielle.

On remarque un fait important : pour $z > 0.7$, il n'y a qu'un seul dépassement et il est faible ($< 5\%$). En pratique, on considérera qu'un système d'amortissement supérieur à 0.7 est non oscillant car les oscillations ne sont pas visibles (alors que d'un point de vue mathématique, il faut au moins $z = 1$ pour affirmer ceci).

5-4. REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE LA REPONSE HARMONIQUE.

5-4-1. ETUDE PREALABLE.

Remplaçons la variable de Laplace p par le nombre complexe $j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert. Pour un système du second ordre de fonction de transfert $H(p)$, on obtient la fonction complexe :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_n} j\omega - \frac{1}{\omega_n^2} \omega^2}$$

En mettant le dénominateur sous la forme $a + jb$, on a :

$$H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j \frac{2z\omega}{\omega_n}}$$

Amplitude.

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{K}{\left| \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j \frac{2z\omega}{\omega_n} \right|} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4z^2\omega^2}{\omega_n^2}}} \quad \text{rappel: } \left| \frac{1}{a + jb} \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{En posant : } u = \frac{\omega}{\omega_n} \text{ pulsation réduite : } A(u) = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2zu)^2}}$$

Après étude de $A(u)$, on obtient les résultats suivants (voir "Outils Mathématiques" § 1-3-2 et 2-6) :

Pour z inférieur à 0.7, la valeur de l'amplitude $A(\omega)$ admet un maximum (sa dérivée s'annule) appelé RESONANCE. La pulsation correspondante est appelée pulsation de résonance et est notée ω_r ,

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2z^2}$$

$$\text{L'amplitude maximum est alors : } A(\omega_r) = \frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}$$

On voit que plus z est petit, plus l'amplitude de résonance est grande. Ceci est caractérisé par une grandeur Q appelée facteur de surtension ou facteur de résonance qui est le rapport entre l'amplitude de résonance et l'amplitude en régime statique :

$$Q = \frac{|H(j\omega_r)|}{H(0)} = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}$$

Plus Q est grand, moins le transitoire du système est amorti.
La relation graphique entre Q et z est donnée fig. 5-16.

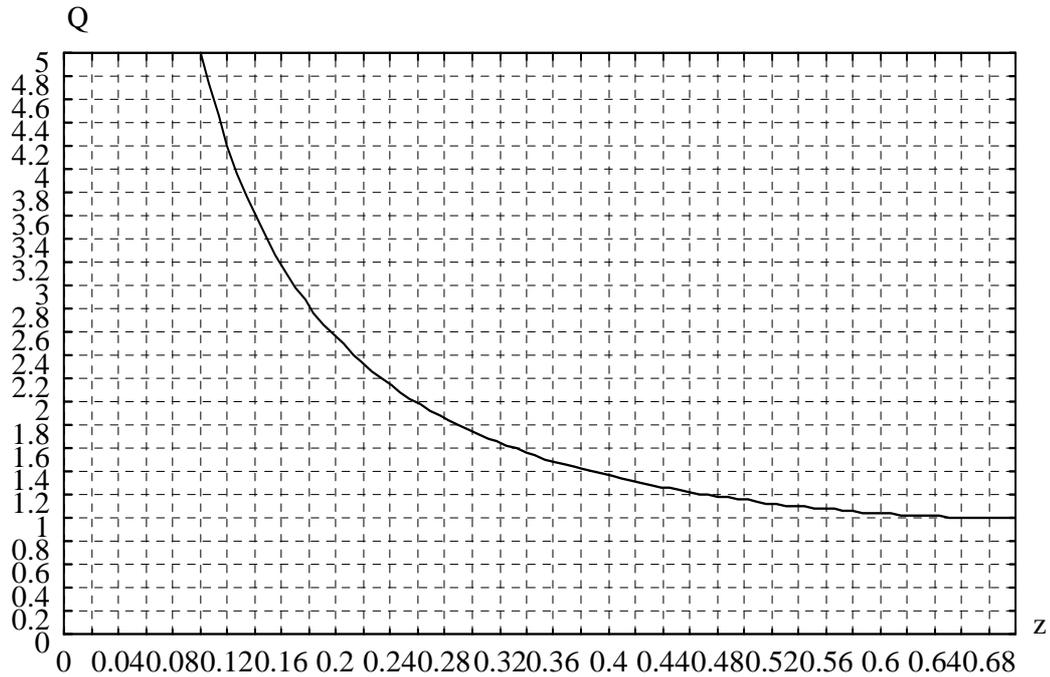


Fig.5-16: Facteur de surtension en fonction du facteur d'amortissement.

Pour $z = 0.7$, le facteur de surtension est égal à 1 : il n'y a pas de résonance.
Dès que z est inférieur à 0.1 (système peu amorti), le facteur de surtension prend des valeurs importantes.

Phase.

$$\phi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\arctg\left(\frac{2z\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2}\right) \quad \text{rappel: } \arg\left(\frac{1}{a + jb}\right) = -\arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

En posant : $u = \frac{\omega}{\omega_n}$ pulsation réduite : $\phi(\omega) = -\arctg\left(\frac{2zu}{1-u^2}\right)$

L'étude détaillée est effectuée dans "outils mathématiques" § 1-4-2. Dans notre cas ($b > 0$), l'angle ϕ est négatif, situé dans le troisième quadrant pour $\omega > \omega_n$ et dans le quatrième quadrant pour $\omega < \omega_n$.

5-4-2. DIAGRAMME DE BODE.

5-4-2-1: Diagramme de gain :

Amplitude en dB : $A_{db} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$

$$\Rightarrow A_{db} = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2zu)^2}} \right) = 20 \log K - 10 \log \left[(1-u^2)^2 + (2zu)^2 \right]$$

* lorsque ω tend vers 0, u tend vers 0 et :

$$Adb = 20 \log K = C^{te}$$

Rappel: $\log(1) = 0$

AdB tend vers une droite horizontale.

* lorsque ω tend vers l'infini, u tend vers l'infini et $\left[(1-u^2)^2 + (2zu)^2 \right] \rightarrow u^4$

$$Adb = 20 \log K - 40 \log u$$

AdB tend asymptotiquement vers une droite de pente négative (la représentation d'une fonction log en coordonnées semi-logarithmiques est une droite : voir outils mathématiques § 1-3-3). La pente est exprimée par décade, une unité de l'axe des pulsations correspondant à une puissance de dix de ces mêmes pulsations : -40dB/décade

L'intersection des deux droites s'effectue en un point tel que : $20 \log K = 20 \log K - 40 \log u$

$$\Rightarrow u = 1 \Rightarrow \omega = \omega_n$$

La pulsation correspondante est ω avec :

$$\boxed{\omega = \omega_n}$$

Diagramme asymptotique de gain : Ce diagramme donne une bonne idée de la courbe de réponse en fréquence (voir Fig : 5-17)

* pour les fréquences faibles : droite $20 \log K$

* pour les fréquences autour de ω_n : la valeur de l'amplitude dépend de z (résonance ou non).

* pour les fréquences plus élevées : droite de pente -40dB/décade.

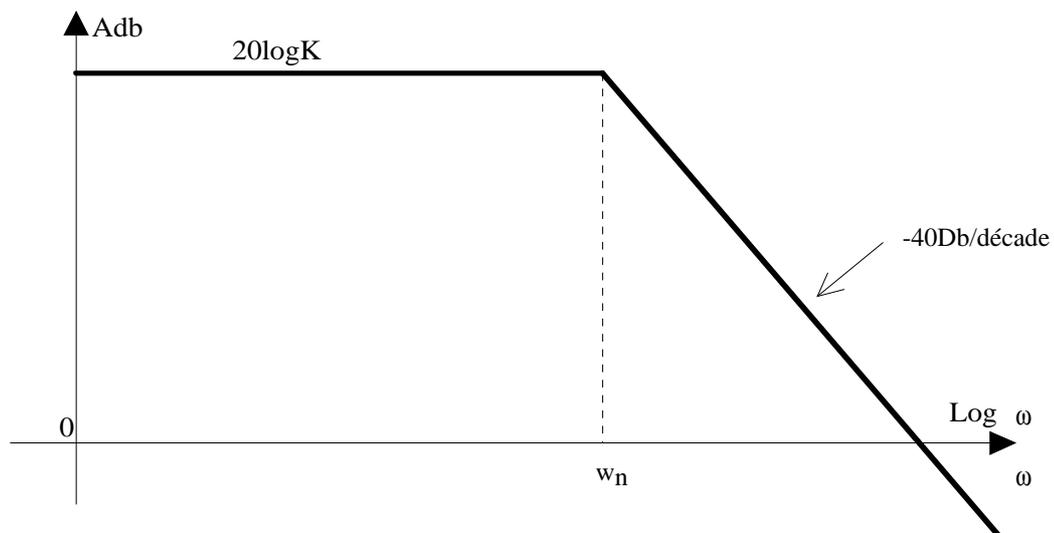


Fig.5-17: Diagramme asymptotique de gain.

Diagramme de phase : La phase est donnée par l'argument de $H(j\omega)$.

Pour $\omega = 0$: $\phi(\omega) = \text{Arctg}(0) = 0$

Pour ω tendant vers l'infini : $\phi(\omega) \rightarrow -\text{Arctg}(0^-) = -\pi$

Autour de $\omega = \omega_n$: $\phi(\omega_n^-) = -\text{Arctg}(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$ et $\phi(\omega_n^+) = -\text{Arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

Le diagramme asymptotique à la forme d'une marche d'escalier avec un saut de déphasage à la pulsation propre non amortie :

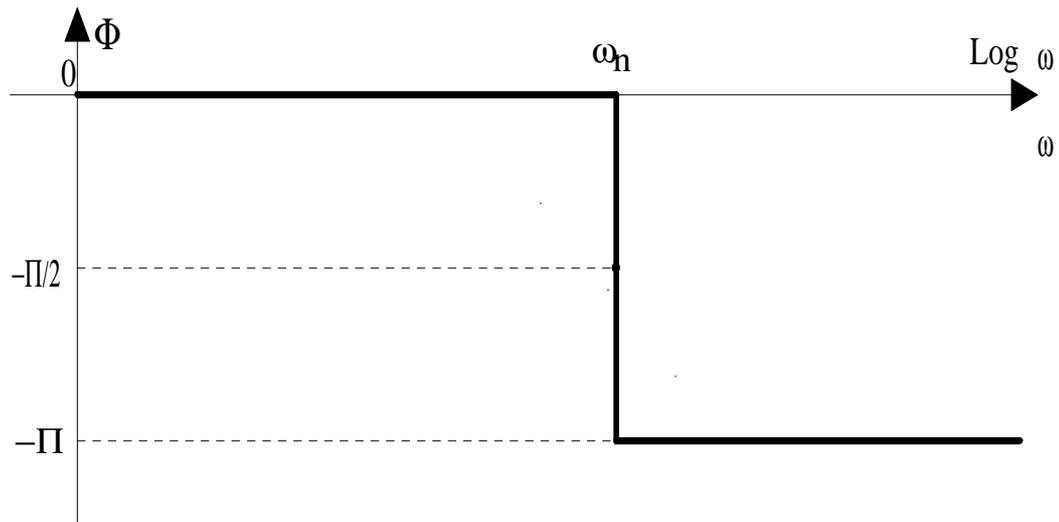


Fig.5-18: Diagramme asymptotique de phase.

Le diagramme de Bode est parfois gradué en pulsations réduites $u = \omega/\omega_n$. Il est alors utilisable pour un système de pulsation propre quelconque.

Exemple 1 : systèmes de gains statiques unitaires de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{1 + 0.2zp + 0.01p^2}$$

La pulsation propre non amortie est égale à 10rad/s.

On considérera cinq systèmes d'amortissements différents :

$$z = 0.01 \quad z = 0.2 \quad z = 0.7 \quad z = 1 \quad z = 5$$

La pulsation de cassure est $\omega_0 = \omega_n = 10\text{rad/s}$ et le gain à basse fréquence est $\text{AdB} = 20\log K = 20\log 1 = 0\text{dB}$ dans tous les cas.

On remarque que :

* pour les amortissements de valeur 0.7 ou 1, l'allure des courbes est identique à celle des systèmes du premier ordre (Mais attention, la pente est de -40dB/décade pour l'amplitude et le déphasage maximum est de -180° pour la phase).

- pour les amortissements de valeur plus importante ($z = 5$), il apparaît une perte de signal importante même à basse fréquence (-3dB et -45° pour 1rad/s).

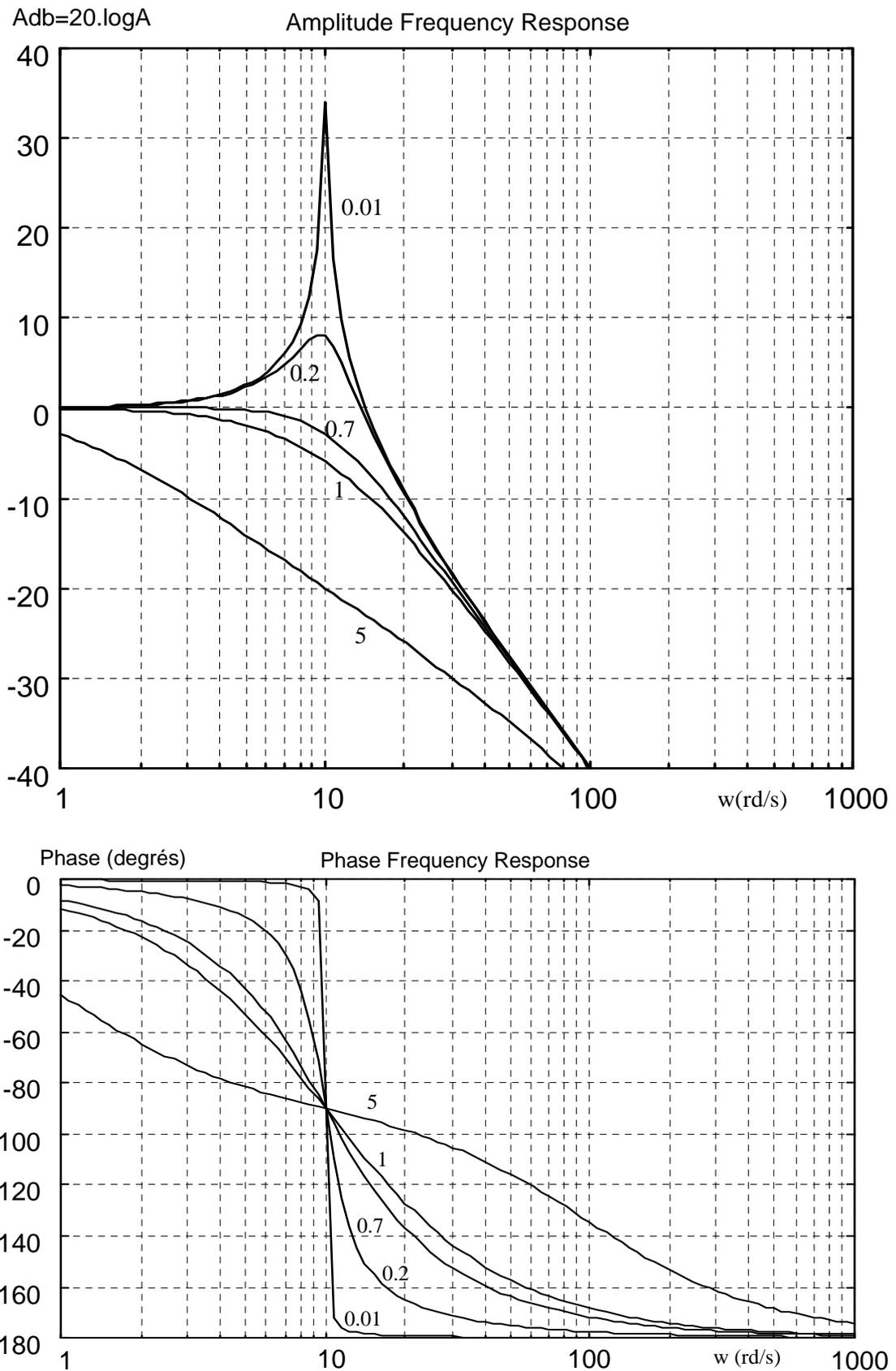


Fig.5-19: Diagramme de Bode de $G(p) = \frac{1}{1+0.2zp+0.01p^2}$ pour $z = 0.01 \quad 0.2 \quad 0.7 \quad 1 \quad 5$

* pour les amortissements plus faibles ($z = 0.2$ et 0.01) apparaît le phénomène de résonance, c'est à dire une augmentation de l'amplitude du signal de sortie aux abords de la pulsation propre non amortie. En effet, nous avons vu en 5-4-1 que $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2z^2}$. La valeur de la pulsation de résonance est donc proche de celle de la pulsation propre non amortie pour les valeurs faibles de z .

Le phénomène de résonance est parfois recherché lorsque l'on désire, en électronique, capter une station radio par exemple : On utilise un circuit résonnant du second ordre de coefficient d'amortissement très faible (< 0.05) donc de coefficient de surtension supérieur à 10 et on fait travailler ce circuit autour de la fréquence que l'on désire capter.

Mais attention, la résonance ne correspond pas à un rendement du système supérieur à 1 qui est physiquement impossible. Le fait de dire que "l'amplitude du signal de sortie est plus grande que celle du signal d'entrée" impose d'abord que les grandeurs physiques soient identiques, ce qui n'est pas le cas général, et surtout ne permet pas d'affirmer que le bilan énergétique est supérieur à 1 (d'ailleurs la première affirmation est vraie pour tout système de gain statique supérieur à 1 même en l'absence de résonance, le gain d'énergie provenant alors d'une source extérieure au système).

Le phénomène de résonance est particulièrement redouté en génie civil : les ouvrages comme un pont par exemple, peuvent entrer en résonance à certaines fréquences et sont alors sollicités mécaniquement d'une manière importante. C'est également le cas des vieilles voitures qui vibrent de manière inquiétante au voisinage d'une certaine vitesse et dont les vibrations cessent dès que cette vitesse critique est dépassée. Ceci est vrai pour toutes les structures, même complexes, la résonance apparaissant pour les systèmes linéaires d'ordre supérieur à deux.

En commande d'axe on cherchera à limiter la résonance qui est liée à un régime oscillatoire et à un dépassement important nocifs pour la mécanique (Rappel : le facteur de surtension qui caractérise l'importance de la résonance augmente lorsque z diminue). Un réglage courant en avant projet consiste à choisir $Q = 1.3$ correspondant à un facteur d'amortissement $z = 0.43$.

Exemple 2 : Système de fonction de transfert : $G(p) = \frac{10}{1+0.086p+0.01p^2}$.

Le gain statique est non-unitaire

La pulsation propre non amortie est : $n = 10\text{rad/s}$.

Le coefficient d'amortissement est $z = 0.43$

Gain à basse fréquence $\text{AdB} = 20\log K = 20\log 10 = 20\text{dB}$.

déphasage de -90° pour $n = 10\text{rad/s}$.

$z < 0.7$: système possédant une résonance en $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2z^2} = 10\sqrt{1-2(0.43)^2} = 7.9\text{rd/sec}$

Amplitude à la résonance : $A(\omega_r) = \frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}} = \frac{10}{0.86\sqrt{1-(0.43)^2}} = 12.87 \Rightarrow \text{AdB} = 22.19\text{dB}$

déphasage à la résonance : $\phi(\omega_r) = -\arctg\left(\frac{2z\sqrt{1-2z^2}}{1-(1-2z^2)}\right) = -\arctg\left(\frac{\sqrt{1-2z^2}}{z}\right) = -61.55^\circ$

coefficient de surtension : $Q = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{0.86\sqrt{1-(0.43)^2}} = 1.28$

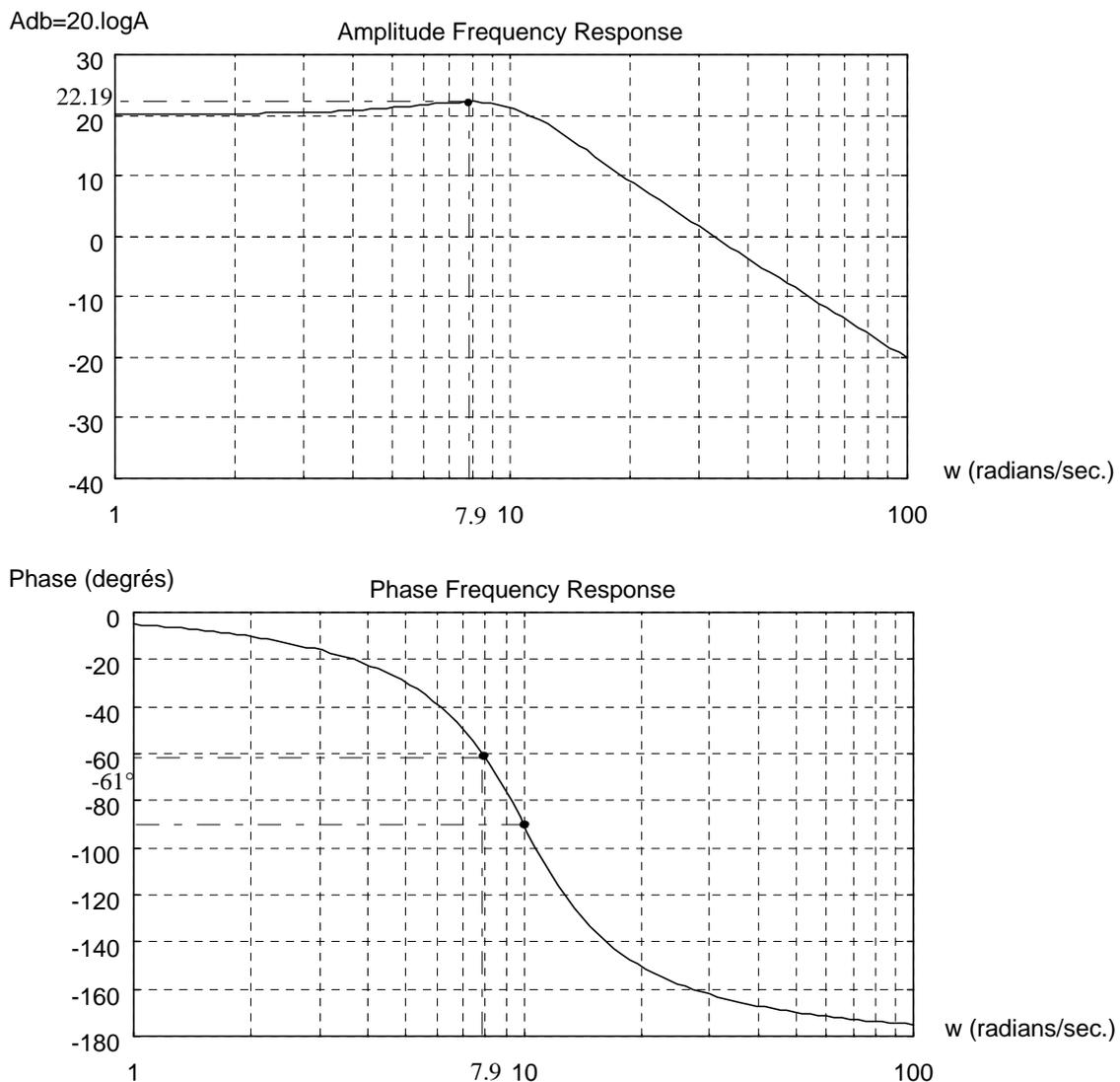


Fig.5-20: Diagramme de Bode de $G(p) = \frac{10}{1+0.086p+0.01p^2}$.

5-4-3. DIAGRAMME DE BLACK-NICHOLS.

Le diagramme de black est la représentation dans le plan (ω, ϕ) de $H(j\omega)$.

Nous savons que :
$$Adb = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2zu)^2}} \right)$$

et que :
$$\phi(\omega) = -\arctg \left(\frac{2zu}{1-u^2} \right)$$

De même que pour le diagramme de Bode, il existe autant de réponses que de valeurs du facteur d'amortissement z .

Les valeurs remarquables sont :

Pulsation ω	Amplitude AdB	Phase ϕ
$\omega = 0$	$20 \log K$	0
$\omega = \omega_r$	$20 \log \left(\frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}} \right)$	Dépend de z
$\omega = \omega_n$	$20 \log \left(\frac{K}{2z} \right)$	$-90^\circ; \left(-\frac{\pi}{2} \right)$
$\omega \rightarrow \infty$	$-\infty$	$-180^\circ; (-\pi)$

Exemple 1 : Systèmes de fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{1+0.2zp+0.01p^2}$ pour $z = 0.03$ à 1

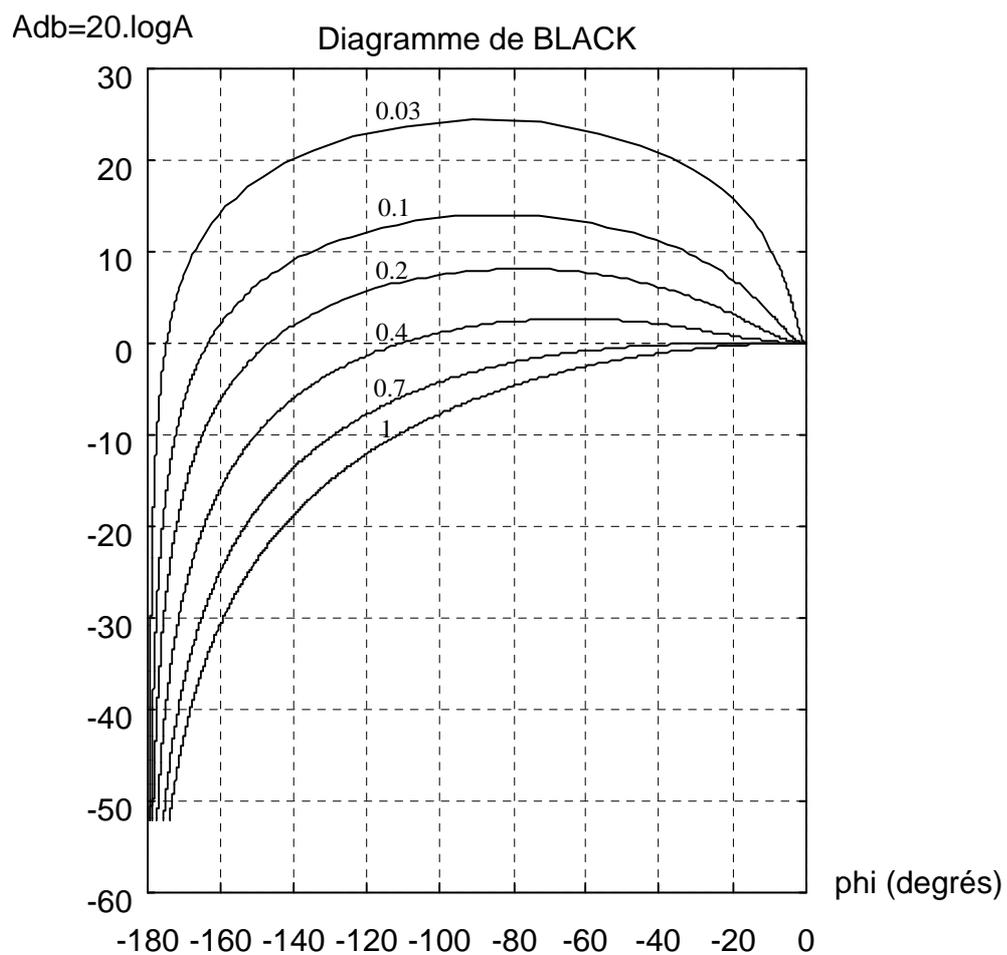


Fig.5-21: Diagramme de Black de $G(p) = \frac{1}{1+0.2zp+0.01p^2}$ pour $z = 0.03 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.7 \quad 1$

Exemple 2 : Reprenons le système de fonction de transfert : $G(p) = \frac{10}{1+0.086p+0.01p^2}$.

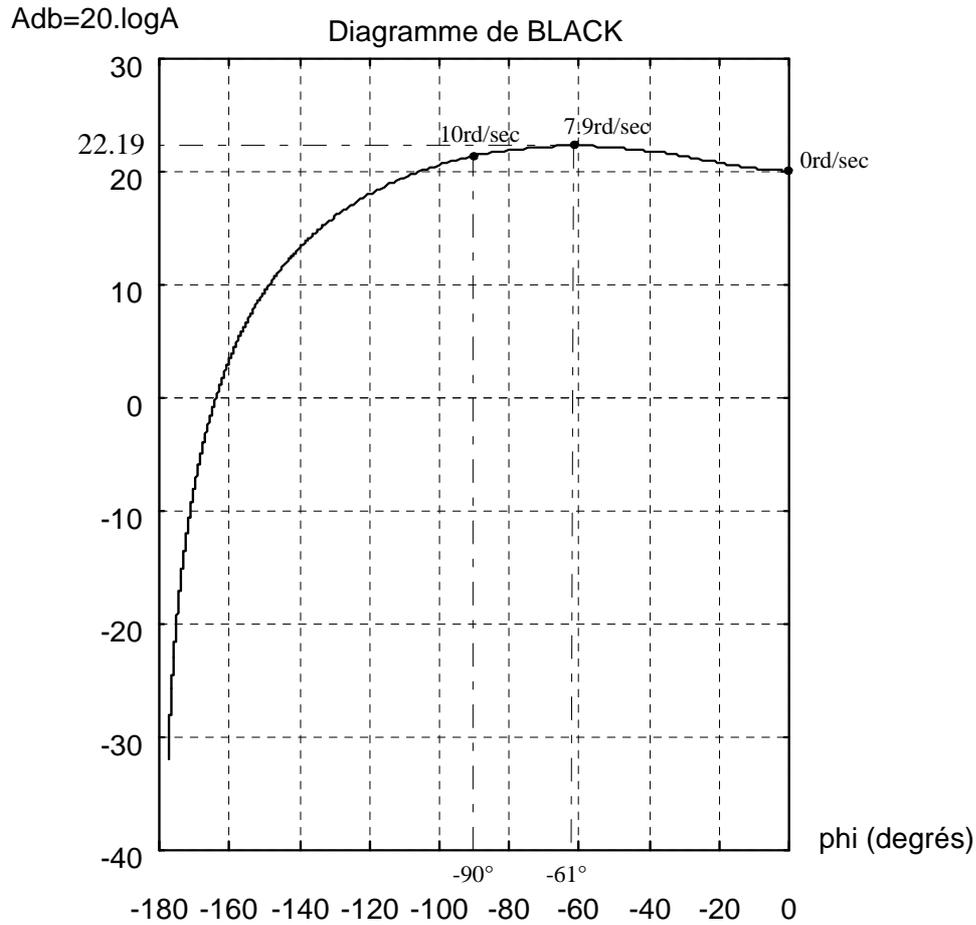


Fig.5-22: Diagramme de Black de $G(p) = \frac{10}{1+0.086p+0.01p^2}$.

5-4-4. DIAGRAMME DE NYQUIST.

C'est la représentation de la fonction complexe :

$$H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\frac{2z\omega}{\omega_n}} = \frac{K}{(1-u^2) + j(2zu)}$$

Le lieu de $H(j\omega)$ dans le plan complexe est le lieu du point M de coordonnées polaires (forme trigonométrique) :

$$r(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2zu)^2}} \quad \text{et} \quad \phi(\omega) = -\arctg\left(\frac{2zu}{1-u^2}\right)$$

points remarquables :

* pour $\omega = 0$, $H(j\omega) = K$ réel pur ($r = K$ et $\phi = 0$) : A fréquence très faible, le déphasage est nul et l'amplitude est K .

* pour $\omega = \omega_n$, $H(j\omega) = K/2zj = -jK/2z$ imaginaire pur ($\phi = -90^\circ$) : La pulsation de cassure ω_n est située à l'intersection de la courbe de réponse avec l'axe des imaginaires.

* pour $\omega = \omega_r$ (cas où $z < 0.7$), on obtiendra le module maximum, c.a.d. la plus grande valeur de OM. (voir "Outils mathématiques" § 2-6)

* pour ω tendant vers l'infini, $H(j\omega)$ tend vers zéro par valeurs négatives : A haute fréquence, le gain tend vers 0 : point (0,0) sur le diagramme (ce point n'est jamais atteint puisqu'il correspond à une pulsation infinie). La phase tend vers $-\pi$

Exemple 1 : Systèmes de fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{1+0.2zp+0.01p^2}$ pour $z = 0.03$ à 1

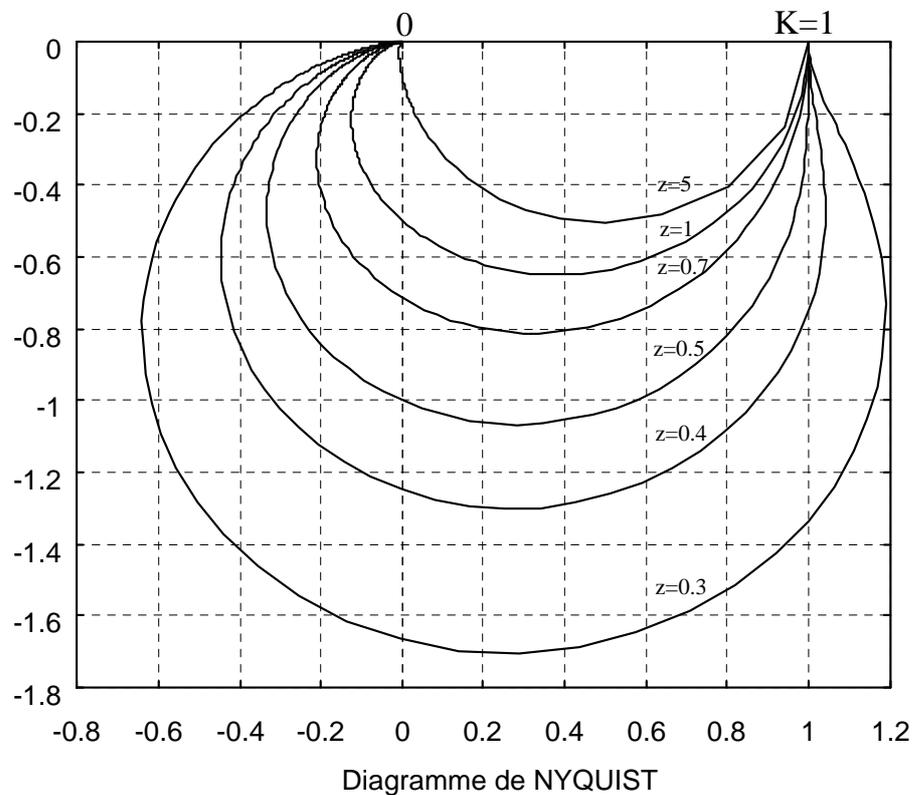


Fig.5-23: Diagramme de Nyquist de $G(p) = \frac{1}{1+0.2zp+0.01p^2}$ pour $z = 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0.7 \quad 1 \quad 5$

Exemple 2 : Reprenons le système de fonction de transfert : $G(p) = \frac{10}{1+0.086p+0.01p^2}$.

avec $K = 10$, $\omega_n = 10$ rad/s et $z = 0.43$.

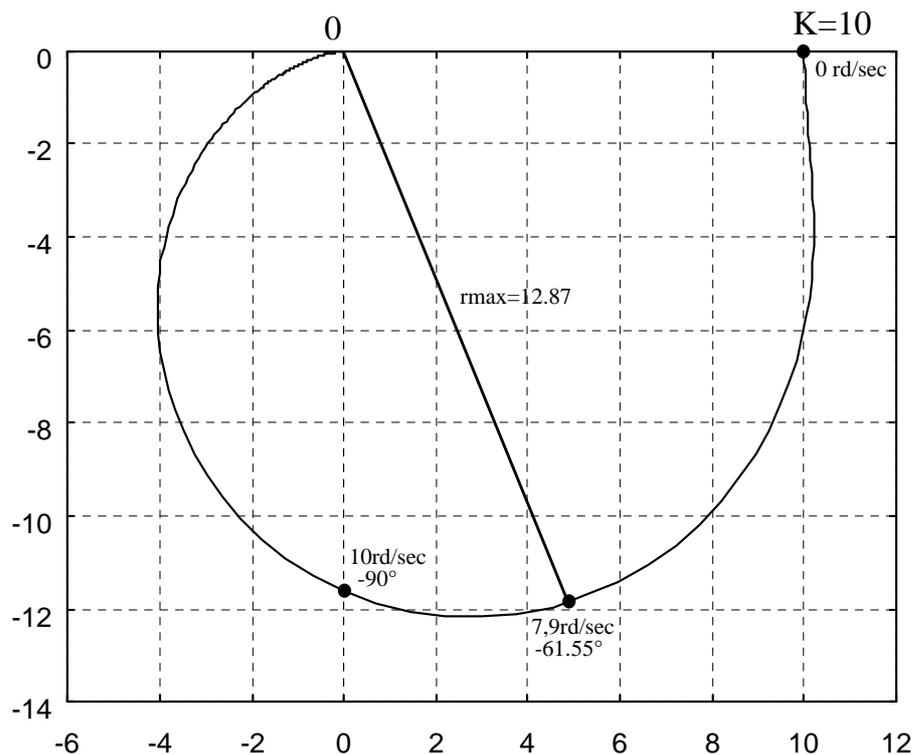


Fig.5-24: Diagramme de Nyquist de $G(p) = \frac{10}{1+0.086p+0.01p^2}$.

5-4-5. FREQUENCES REMARQUABLES.

Les systèmes du second ordre possèdent plusieurs fréquences remarquables qui ne sont pas toujours notées de la même manière par les différents auteurs. Il s'agit donc de bien les différencier pour pouvoir les reconnaître.

ω_n : pulsation (ou fréquence) propre non amortie. C'est la fréquence à laquelle le système oscillerait si le coefficient d'amortissement z était nul (système non amorti). C'est également la fréquence de cassure sur le diagramme asymptotique de Bode, fréquence pour laquelle le déphasage est de -90° .

ω_p : pulsation (ou fréquence) propre. C'est la fréquence des oscillations transitoires de la réponse indicielle. Elle dépend de z : $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-z^2}$

ω_r : pulsation (ou fréquence) de résonance. C'est la fréquence pour laquelle le module de la fonction de transfert harmonique est maximal. Elle dépend aussi de z et n'existe que si $z < 0.7$.
 $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2z^2}$

ω_c : Pulsation (ou fréquence) de coupure à 3 dB. C'est la fréquence pour laquelle la réponse harmonique du système est atténuée de 3dB. Une atténuation de 3dB correspond à une atténuation du signal de sortie de 30%. On rencontre aussi la fréquence de coupure à 6dB (atténuation de 50%).

On montre (voir "Outils mathématiques" § 3-1-2) que la fréquence de coupure à 3dB dépend également de z et est égale à :

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{1 - 2z^2 + \sqrt{1 + (1 - 2z^2)^2}}$$

On aboutit à la même conclusion que pour les systèmes du premier ordre :

Un système du second ordre est un filtre passe-bas.



Il ne faut pas confondre la fréquence de cassure et la fréquence de coupure à 3dB.

* Systèmes du premier ordre : fréquence de cassure et fréquence de coupure à 3dB identiques :

$$\omega_c = 1/T$$

* Systèmes du second ordre : fréquence de cassure ω_n et fréquence de coupure à 3dB : ω_c .

La figure 5-25 met graphiquement en évidence le fait que, pour les valeurs faibles de l'amortissement z, les pulsations ω_p et ω_r sont proches l'une de l'autre. Pour $z = 0.43$, $\omega_p = 0.9\omega_n$ et $\omega_r = 0.8\omega_n$.

Pour $z = 0.2$, $\omega_p = 0.98\omega_n$ et $\omega_r = 0.96\omega_n$. Pour $z = 0$, $\omega_p = \omega_n = \omega_r$. On retrouve bien la propriété suivante : pour $z > 0.7$, il n'existe pas de résonance et ω_r n'a pas de valeur.

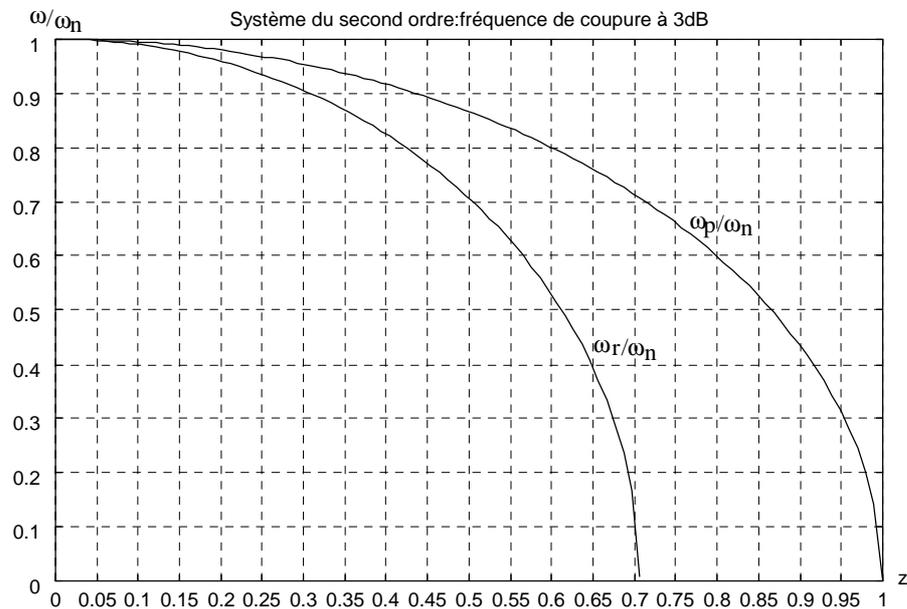


Fig.5-25: Systèmes du second ordre : fréquences remarquables.

La figure 5-26 décrit graphiquement l'évolution de ω_c/ω_n en fonction de z. Pour une valeur donnée de la pulsation propre non amortie, la pulsation de coupure diminue lorsque z augmente, ce qui signifie que la bande passante diminue lorsque z augmente.

Nous avons montré que pour les systèmes du premier ordre, la bande passante et la rapidité étaient liées. Il en est de même pour les systèmes du second ordre, mais d'une manière plus subtile : pour un amortissement z constant, nous savons que le système est d'autant plus rapide que sa fréquence propre est grande (propriété que nous avons caractérisée § 5-3-3). D'autre part, la figure 5-26 montre que pour un amortissement z constant, la fréquence de coupure (et donc la bande passante) est d'autant plus grande que la fréquence propre est grande. Finalement:

La rapidité et la bande passante évoluent dans le même sens.

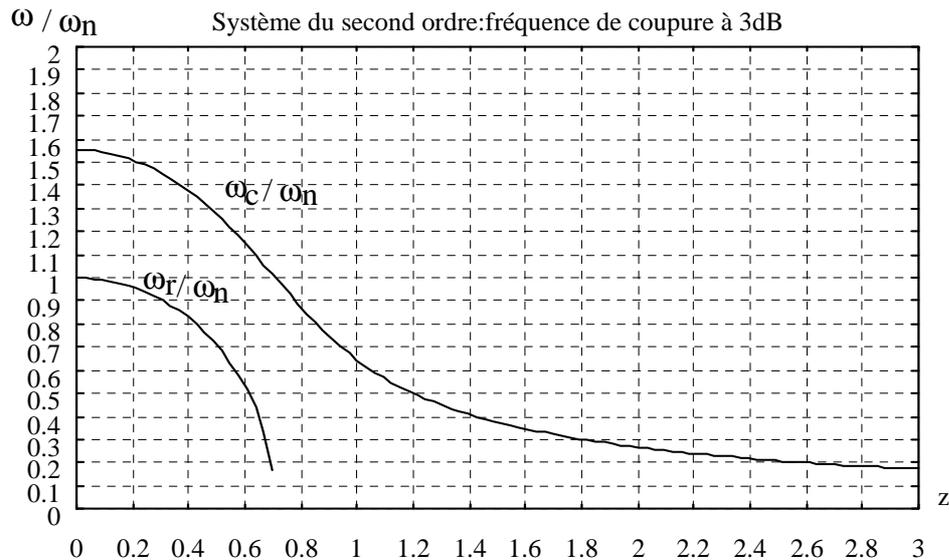


Fig.5-26: Systèmes du second ordre : fréquence de coupure à 3dB.

Les deux courbes fig. 5-26 montrent que la fréquence de coupure à 3dB évolue sensiblement comme la fréquence de résonance (pour les systèmes à résonance $z < 0.707$). On considèrera en avant projet que la fréquence de résonance donne une bonne idée de la bande passante d'un système. Nous venons de voir que cette dernière est liée à la rapidité et on en conclut que :

La rapidité et la fréquence de résonance évoluent dans le même sens.

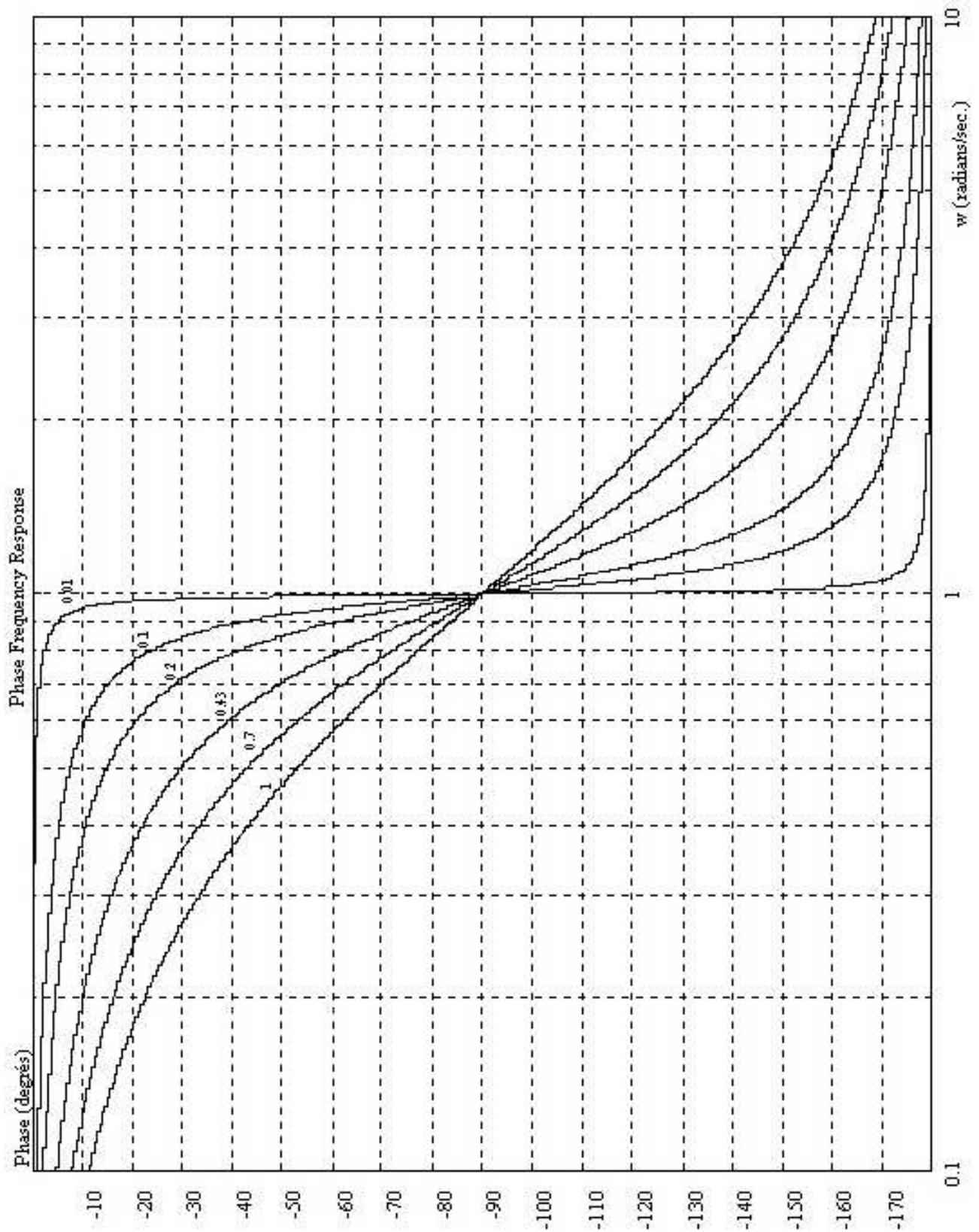


DIAGRAMME DE PHASE DE BODE : SYSTÈME DU SECOND ORDRE.

Courbes $z = 0.01, 0.1, 0.2, 0.43, 0.7, 1$ (pulsations réduites)

Chapitre 6

AUTRES SYSTEMES.

6-1. SYSTEMES A RETARD.

6-1-1. DEFINITION.

On appelle retard pur, tout système dont la loi entrée/sortie est un simple retard : $s(t) = e(t-T)$

La fonction de transfert du système s'écrit en faisant subir la transformation de Laplace aux deux membres de la loi entrée/sortie.

$$s(t) \xrightarrow{L} S(p) = e^{-Tp} \quad \text{et} \quad e(t) \xrightarrow{L} E(p)$$

D'où on déduit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = e^{-Tp}$$

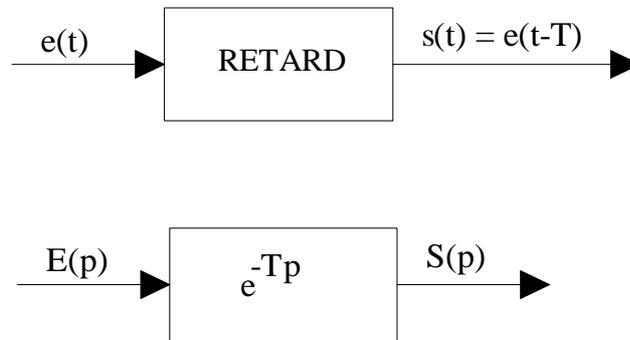


Fig. 6-1. Système à retard pur.

Par exemple, lorsque la prise d'information ne s'effectue pas à l'endroit précis où l'on désire contrôler une grandeur asservie et que cette grandeur met un certain temps à se propager, il apparaît un retard. C'est cas en régulation de température, dans lequel le capteur mesure la température d'un point situé à une certaine distance de l'élément chauffant ou de la pièce à traiter. C'est le cas également dans les lignes de mélange de fluides : si une grandeur évolue en amont de la ligne (température, pH, etc.), on retrouvera cette même grandeur retardée en aval.

La fonction de transfert d'un système à retard (qui, nouveauté, n'est pas une fraction rationnelle en p mais une fonction transcendante) peut se développer en série entière de la manière suivante :

$$e^{-Tp} = 1 - Tp + \frac{1}{2} T^2 p^2 - \dots \quad (\text{Voir "Outils mathématiques" §1-3})$$

Or, le développement en série de Taylor d'une fonction de transfert du premier ordre donne :

$$\frac{1}{1+Tp} = 1 - Tp + T^2 p^2 - \dots$$

Si T est petit, on peut négliger les termes du second ordre et les deux développements sont identiques. On peut d'ores et déjà prévoir des comportements similaires pour T faible.

6-1-2. REPONSE AUX ENTREES TYPIQUES.

6-1-2-1: Réponse à un échelon.

Soumettons le système à un échelon d'amplitude E_0 : $e(t) = E_0.u(t)$

Il n'est pas utile d'effectuer des calculs pour déterminer la forme de la réponse, cette dernière étant triviale.

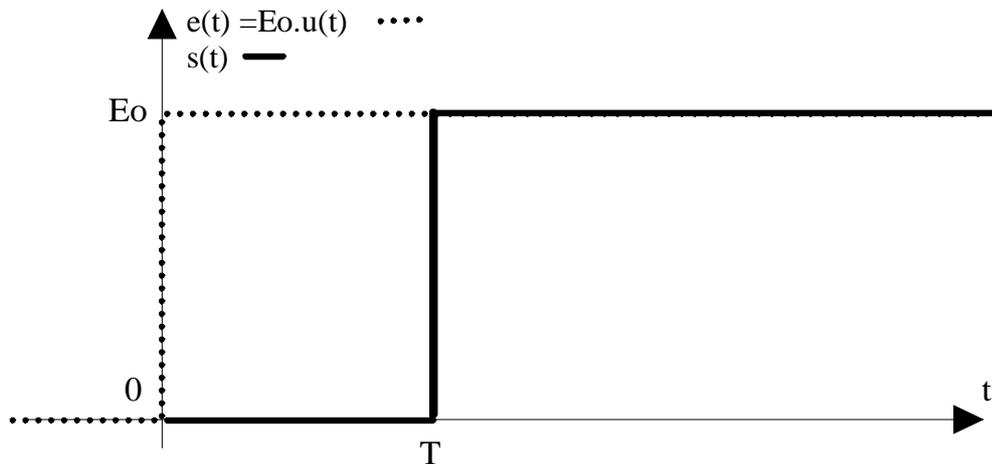


Fig. 6-2 : Système à retard : réponse indicielle.

6-1-2-2: Réponse à une rampe.

Soumettons le système à une rampe de pente a : $e(t) = a.t.u(t)$

La réponse est la même droite décalée temporellement d'un temps T .

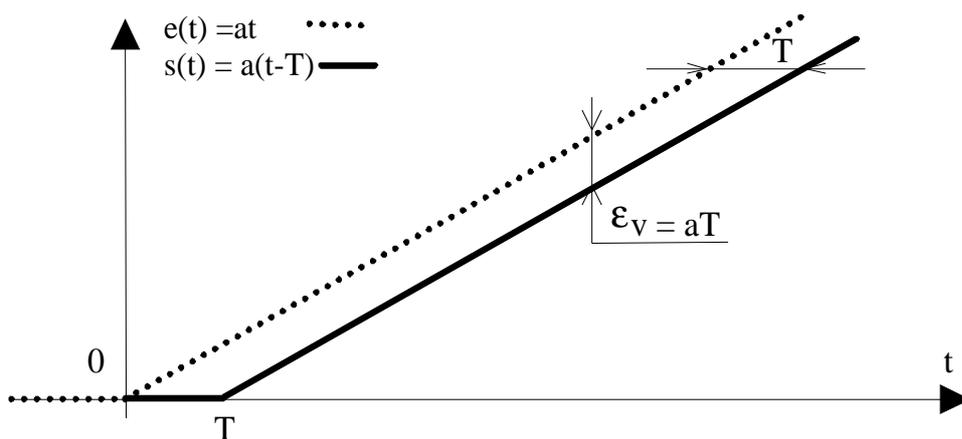


Fig. 6-3 : Système à retard : réponse à une rampe de pente a .

On remarque la grande ressemblance de cette réponse avec celle d'un système du premier ordre en régime permanent. En particulier, l'écart de traînage est identique.

En régime transitoire, on peut effectuer la même remarque si T est suffisamment petit. (Pendant le régime transitoire qui dure un temps T , la réponse du système à retard est nulle).

6-1-3. REPONSE HARMONIQUE.

Remplaçons la variable de Laplace p par le nombre complexe $j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert. On obtient la fonction complexe : $H(j\omega) = e^{-j\omega T}$

Cette fonction possède un module égal à 1 (ou 0dB) pour tout ω et une phase égale à $-T\omega$.
(Voir "outils mathématiques" §2-4).

On retrouve ce résultat en remarquant que la réponse à une entrée harmonique $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$ est $s(t) = E_0 \sin(\omega(t - T)) = E_0 \sin(\omega t - T\omega)$.

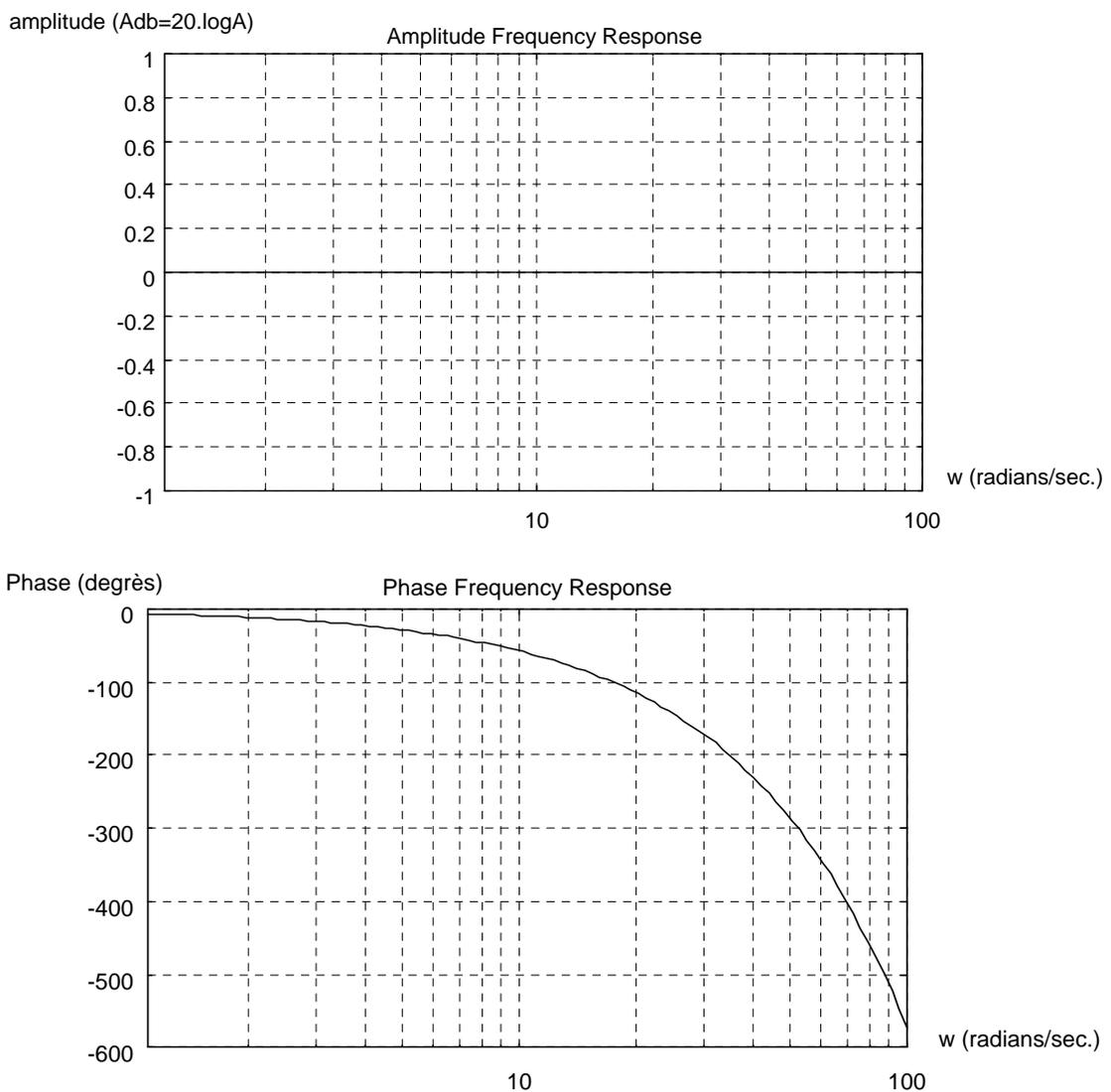


Fig. 6-4 : Système à retard : diagramme de Bode de $H(p) = e^{-0.1p}$.

REMARQUE: la bande passante d'un système à retard pur est théoriquement infinie !

6-1-4. CONCLUSION.

* Un système à retard possède des caractéristiques temporelles similaires à celles d'un système du premier ordre lorsque T est faible.

* Un système à retard possède des caractéristiques fréquentielles similaires à celles d'un système du premier ordre lorsque $\omega T \ll 1$, c'est à dire à basse fréquence.

Sous ces conditions, on peut approcher un retard par une constante de temps et inversement.

Le système à retard se rencontre rarement seul : il apparaît en produit avec une de fonction de transfert d'ordre quelconque, signifiant que le processus décrit par ladite fonction de transfert est retardé. Examinons le cas d'un système du premier ordre retardé.

6-2. SYSTEMES DU PREMIER ORDRE RETARDE.

Ces systèmes se rencontrent en régulation de température par exemple. On les utilise également lorsque l'on désire approcher le comportement d'un système réel que l'on ne sait pas modéliser par une fonction de transfert simple : c'est ce que l'on appelle l'identification. L'identification d'un système inconnu par un modèle du premier ordre retardé s'appelle modèle de BROIDA. Il existe bien évidemment d'autres modèles d'identification, retardés ou non.

La fonction de transfert d'un système du premier ordre retardé est :

$$H(p) = \frac{Ke^{-\tau p}}{1+Tp}$$

On peut décomposer $H(p)$ en un produit de deux fonctions de transfert : $H1(p)$ retard pur et $H2(p)$ premier ordre.

$$H(p) = e^{-\tau p} \frac{K}{1+Tp} = H1(p).H2(p)$$

6-2-1. REPONSE A UN ECHELON.

Considérons le système du premier ordre retardé avec :

- * Gain statique unitaire : $K = 1$
- * Constante de temps : $T = 0.5\text{sec.}$
- * Retard : $\tau = 1\text{sec.}$

Sa fonction de transfert s'écrit : $H(p) = \frac{e^{-p}}{(1+0.5p)}$ ATTENTION: ne pas confondre T et τ !

La réponse indicielle est simplement celle d'un système du premier ordre retardée de 1 sec ou, plus précisément, la réponse d'un système du premier ordre à un échelon retardé de τ : $e(t) = u(t-\tau)$

Le temps de réponse à 5% est : $Tr = \tau + 3T = 1 + 1.5 = 2.5$ s

En régime permanent, on retrouve les caractéristiques d'un système du premier ordre : erreur statique nulle si $K = 1$, etc.

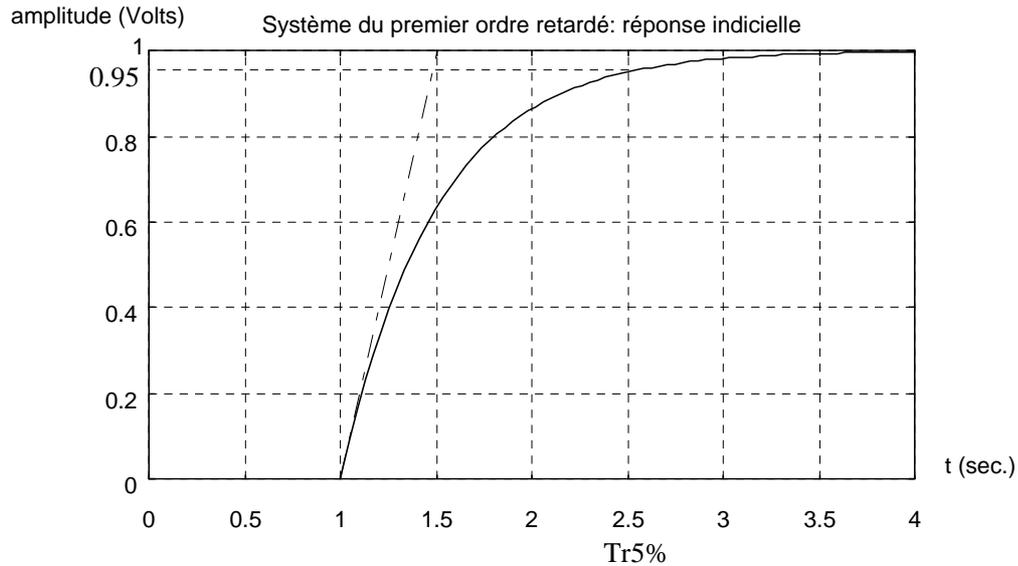


Fig. 6-5 : Réponse indicielle du système du premier ordre retardé : $H(p) = \frac{e^{-p}}{(1+0.5p)}$

De la même manière, la réponse de $H(p)$ à une rampe est celle d'un système du premier ordre $H_2(p)$ à une rampe retardée de τ : $e(t) = a.(t-\tau).u(t-\tau)$.

L'écart dynamique est : $\varepsilon v = a.(T+\tau)$

6-2-2. REPONSE HARMONIQUE.

La fonction de transfert complexe est : $H(j\omega) = \frac{e^{-j\omega\tau}}{1+j\omega T}$

Pour une valeur donnée de la pulsation, l'amplitude AdB totale de $H(p)$ est la somme des amplitudes

de $H_1(p)$ et de $H_2(p)$ (car les décibels s'additionnent) et la phase totale la somme des phases.

Le tableau ci-dessous regroupe les valeurs remarquables de la pulsation avec :

A1: Rapport d'amplitude en dB du système intégrateur pur $H_1(p)$.

A2: Rapport d'amplitude en dB du système du premier ordre $H_2(p)$.

ϕ_1 : Déphasage en degrés du système intégrateur pur $H_1(p)$.

ϕ_2 : Déphasage en degrés du système du premier ordre $H_2(p)$.

A: Rapport d'amplitude en dB du système produit $H(p)$: $A = A_1 + A_2$

ϕ : Déphasage en degrés du système produit $H(p)$: $\phi = \phi_1 + \phi_2$

L'amplitude de $H(j\omega)$ est identique à celle d'un système du premier ordre car $A_1(\omega) = 0\text{dB} \forall \omega$.

La phase est la somme des phases soit : $\phi = -\arctg(T\omega) - \tau\omega$.

ω (rad/s)	$A_1(\omega)\text{dB}$	$A_2(\omega)\text{dB}$	$\Phi_1(\omega)^\circ$	$\Phi_2(\omega)^\circ$	$A(\omega)\text{dB}$	$\Phi(\omega)^\circ$
0	0	0	0	0	0	0
2	0	-3	-114.6	-45	-3	-159.6
∞	0	$-\infty$	$-\infty$	-90	$-\infty$	$-\infty$

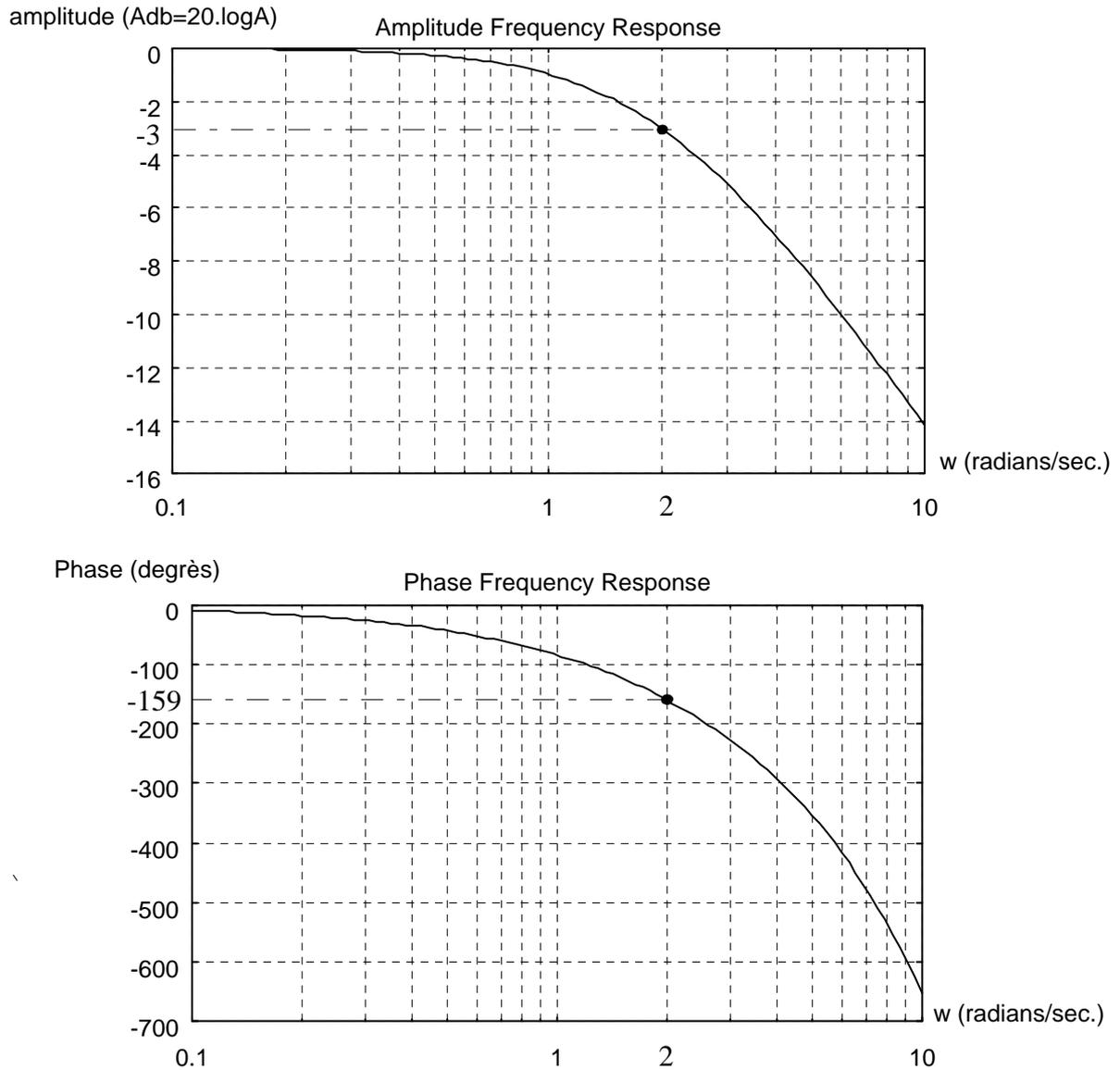


Fig. 6-6 : Diagramme de Bode d'un système du premier ordre retardé : $H(p) = \frac{e^{-p}}{(1+0.5p)}$

6-3. SYSTEMES INTEGRATEURS.

6-3-1. DEFINITION.

Les systèmes intégrateurs purs sont nombreux. D'une manière générale, tous les processus accumulateurs (l'image mentale équivalente est le sablier) sont concernés :

- * Le volume de liquide contenu dans un réservoir est l'intégrale du débit rentrant.
- * La charge d'un condensateur est l'intégrale du courant de charge.
- * La vitesse d'un mobile est l'intégrale de son accélération.

L'exemple le plus courant en commande d'axe est l'intégration naturelle vitesse-position.

On a : $x(t) = \int v(t)dt$, ce qui donne après transformation de Laplace : $X(p) = \frac{V(p)}{p}$

La fonction de transfert d'un intégrateur pur est donc $H(p) = \frac{1}{p}$

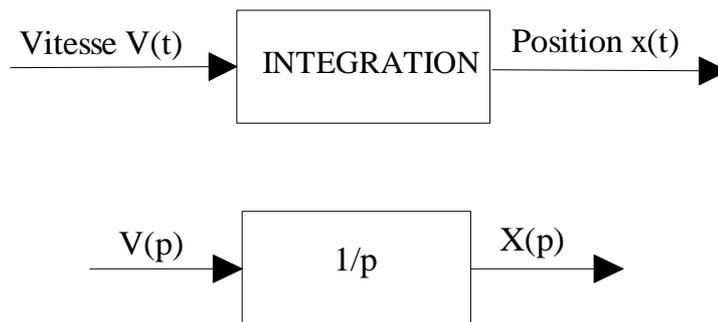


Fig. 6-7 : Intégration naturelle vitesse-position.

Lorsque la grandeur d'entrée d'un système intégrateur pur est constante, sa sortie évolue linéairement avec le temps. Lorsque la grandeur d'entrée est nulle, la sortie reste constante (pas forcément nulle).

De la même manière que les retards purs, les intégrations sont toujours associées à une autre fonction de transfert (voir § 6-4 par exemple).

6-3-2. REPONSE A UN ECHELON.

Soumettons le système à un échelon d'amplitude E_0 : $e(t) = E_0.u(t)$

Les calculs ne sont pas nécessaires car nous savons que l'intégrale d'une entrée constante est une fonction linéaire du temps.

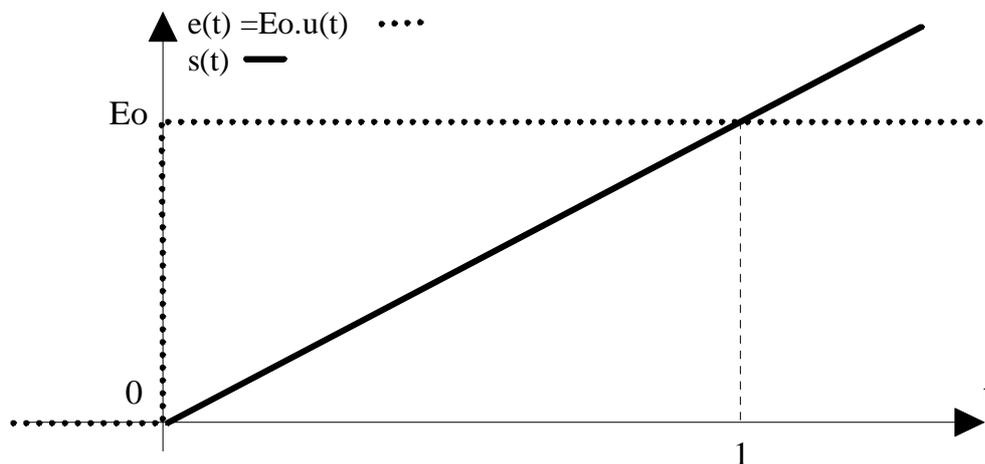


Fig. 6-8 : Système intégrateur pur : réponse indicielle.

En pratique, la grandeur de sortie ne peut pas augmenter indéfiniment : une vitesse est limitée par les forces centrifuges et une position par les butées de fin de course par exemple. Pour éviter les dommages mécaniques, on fait préventivement saturer la chaîne de commande. C'est le cas de la saturation en courant (pour limiter l'accélération) et de la saturation en tension (pour limiter la vitesse) sur un axe asservi avec moteur C.C.

6-3-3. REPONSE HARMONIQUE.

Remplaçons la variable de Laplace p par le nombre complexe $j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert. On obtient la fonction complexe $H(j\omega)$ qui est un imaginaire pur de module égal à $1/\omega$ et d'argument constant égal à -90° (voir "outils mathématiques" §2-4).

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{-j}{\omega}$$

Diagramme d'amplitude : $A_{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{\omega}\right) = 20 \log 1 - 20 \log(\omega) = -20 \log(\omega)$: droite de pente négative -20dB/décade .

Diagramme de phase : $\phi = \frac{-\pi}{4} = -90^\circ$ constante (l'intégrale d'une sinusoïde est une sinusoïde déphasée de 1/4 de période). On obtient une droite horizontale.

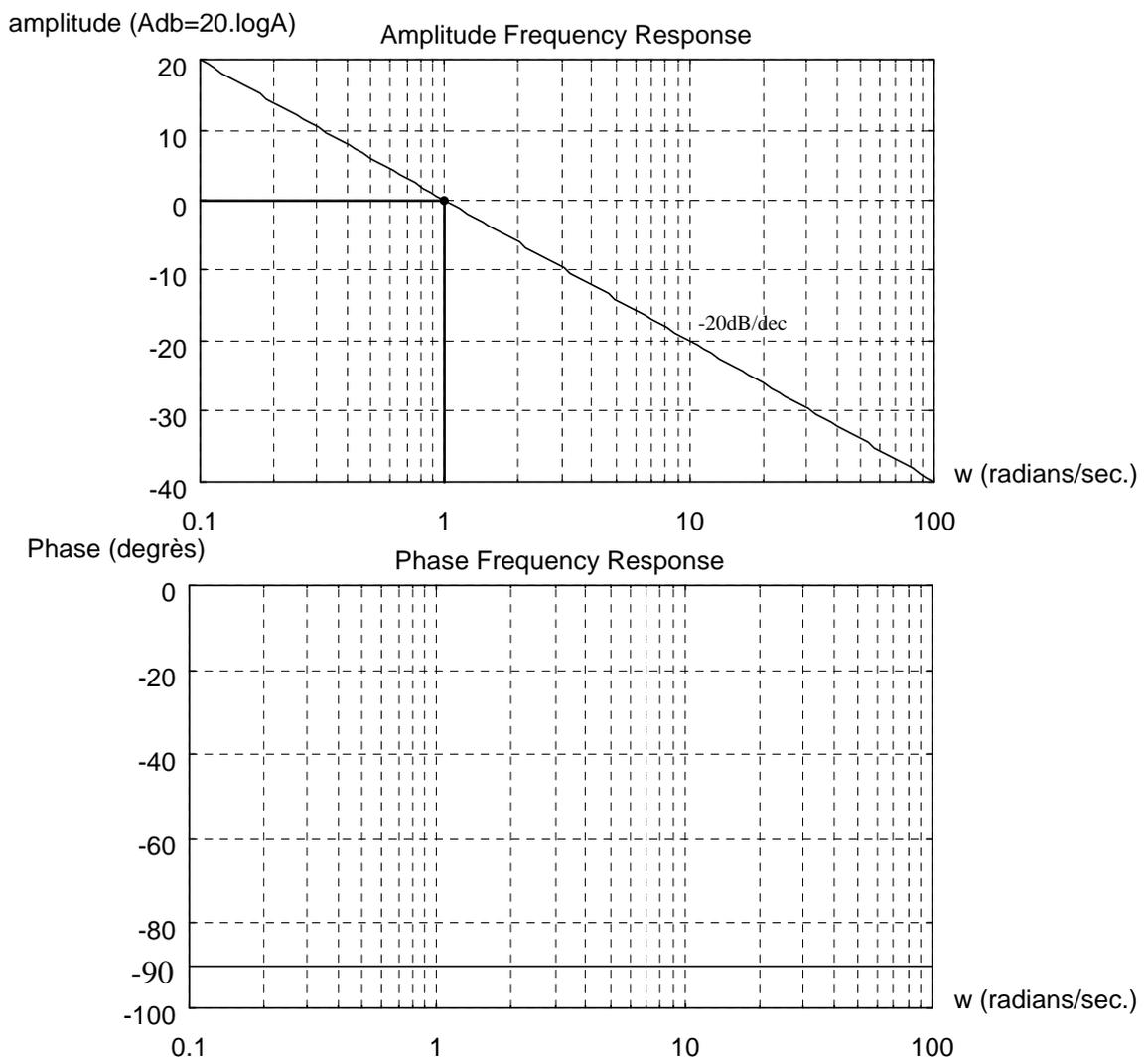


Fig. 6-9 : Système intégrateur pur : Diagramme de Bode.

On remarque que, pour les fréquences élevées, un intégrateur pur se comporte comme un premier ordre : amplitude -20dB/dec et phase $= -90^\circ$.

On remarque également que l'amplitude de la réponse tend vers l'infini lorsque la pulsation tend vers zéro ; ce phénomène mérite explication.

Considérons une entrée de la forme $\sin(t)$. Le système intégrateur fournira une sortie de la forme :
 $s(t) = \int e(t)dt = \int \sin(t)dt = -\cos(t) + C^{te}$.

La constante est déterminée par les conditions initiales. Considérons que pour $t = 0$, la sortie est nulle. $s(0) = 0 \Rightarrow -\cos(0) + C^{te} = -1 + C^{te} = 0 \Rightarrow C^{te} = 1$

Et finalement : $s(t) = 1 - \cos(t)$.

La sortie est bien un signal déphasé de -90° par rapport à l'entrée.

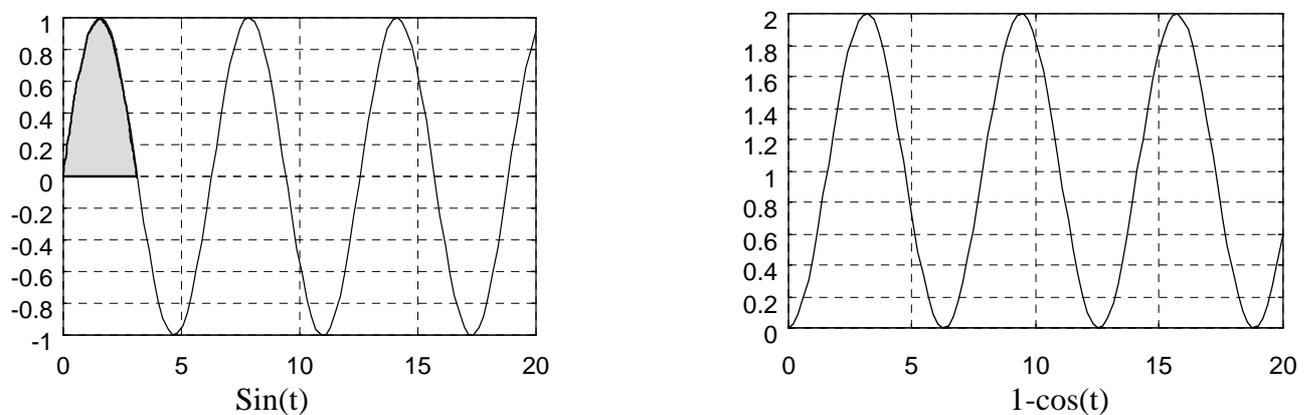


Fig:6-10 : signal harmonique et signal intégré.

Considérons maintenant une entrée harmonique de la forme $\sin(\omega t)$. Le système intégrateur fournira une sortie $s(t) = \int e(t)dt = \int \sin(\omega t)dt = \frac{-\cos(\omega t)}{\omega} + C^{te}$

La constante est déterminée comme précédemment.

$$s(0) = 0 \Rightarrow \frac{-\cos(0)}{\omega} + C^{te} = 0 \Rightarrow C^{te} = \frac{1}{\omega}$$

Et finalement : $s(t) = \frac{-\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega} = \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega}$ (On retrouve le cas précédent en faisant $\omega = 1$)

La valeur de $s(t)$ dépend de ω . En particulier, si ω tend vers zéro, alors la sortie $s(t)$ tend vers une valeur infinie. Ceci peut se comprendre en remarquant que une intégrale représente une surface et que la surface de la première demi-période de $\sin(\omega t)$ augmente lorsque ω diminue, ce que l'on voit bien en comparant les surfaces grisées des figures 6-10 et 6-11. Lorsque ω est infiniment petit, la période de la sinusoïde est infiniment grande ($T = \frac{2\pi}{\omega}$), la surface générée également et donc la valeur de l'intégrale.

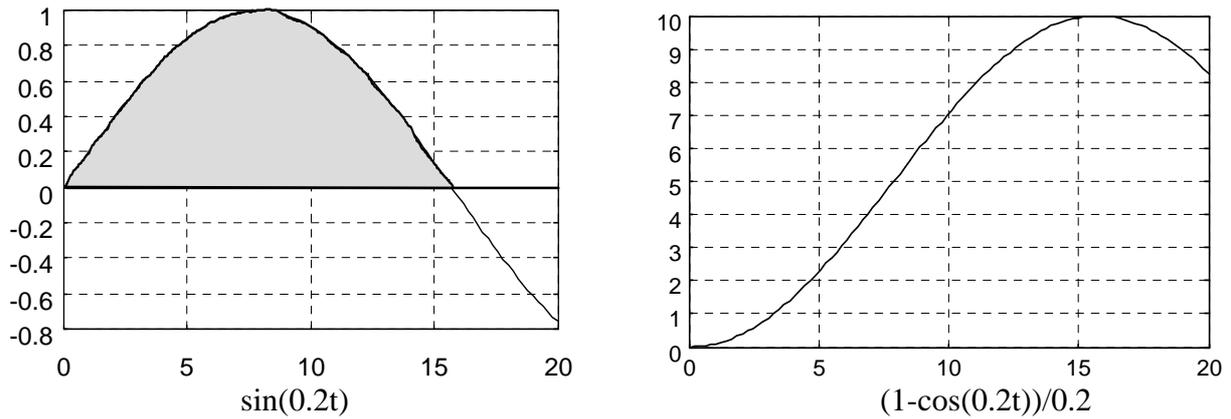


Fig. 6-11 : signal harmonique et signal intégré.

6-4. SYSTEMES DU SECOND ORDRE POSSEDANT UNE INTEGRATION.

6-4-1. Présentation

Ces systèmes sont aussi appelés systèmes de classe 1 et sont très courants en commande d'axe. Ils correspondent par exemple à un asservissement de position. Nous étudierons le comportement des systèmes de classe 1 d'une manière plus générale au chapitre suivant.

La relation entrée/sortie d'un tel système est de la forme :

$$\frac{ds(t)}{dt} + T \frac{d^2s(t)}{dt^2} = K.e(t)$$

Après transformation de Laplace, on obtient la fonction de transfert.

$$H(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$$

Exemple: commande en position utilisant un moteur modélisé comme un système du premier ordre. La commande du moteur est $E(p)$. ATTENTION: ce système n'est pas asservi (pas de bouclage).

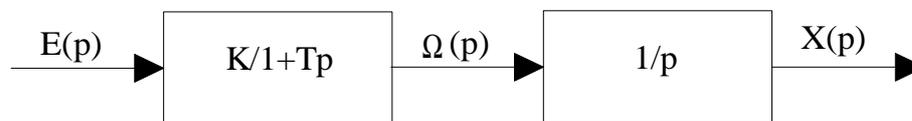


Fig. 6-12 : Système du second ordre avec intégration.

Ce système est du second ordre et de classe 1. Il est différent d'un système du second ordre de classe zéro étudié au §5 car il possède une intégration. On peut considérer $H(p)$ comme le produit d'un système intégrateur pur $H1(p)$ par un système du premier ordre $H2(p)$:

$$H(p) = H1(p).H2(p) = \frac{1}{p} \frac{K}{1+Tp}$$

6-4-2. REPONSE A UN ECHELON.

Considérons le système de fonction de transfert : $H(p) = \frac{1}{p(1+0.1p)}$.

Soumettons le système à un échelon d'amplitude unitaire : $e(t) = u(t)$.

Après transformation de Laplace on obtient :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{1}{p(1+Tp)} \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2(1+Tp)}$$

La réponse indicielle est la transformée inverse de $S(p)$: $s(t) = L^{-1}[S(p)] = t - T + Te^{-\frac{t}{T}}$

(voir "outils mathématiques" §5-3-4, tableau 2)

C'est exactement la réponse à une rampe de pente unitaire d'un système du premier ordre. Ceci se justifie facilement, $S(p)$ étant identique dans les deux cas.

On peut aussi écrire les relations temporelles et remarquer que la seconde est la dérivée de la première, d'où une identité de comportement :

Premier ordre soumis à une rampe de pente E_0 : $s(t) + T \frac{ds(t)}{dt} = E_0 \cdot t \cdot u(t)$

Second ordre avec intégration soumis à un échelon d'amplitude pente E_0 :

$$\frac{ds(t)}{dt} + T \frac{d^2s(t)}{dt^2} = E_0 \cdot u(t)$$



On ne peut pas parler de temps de réponse à 5% pour un tel système, la sortie ne tendant pas vers une valeur limite finie.

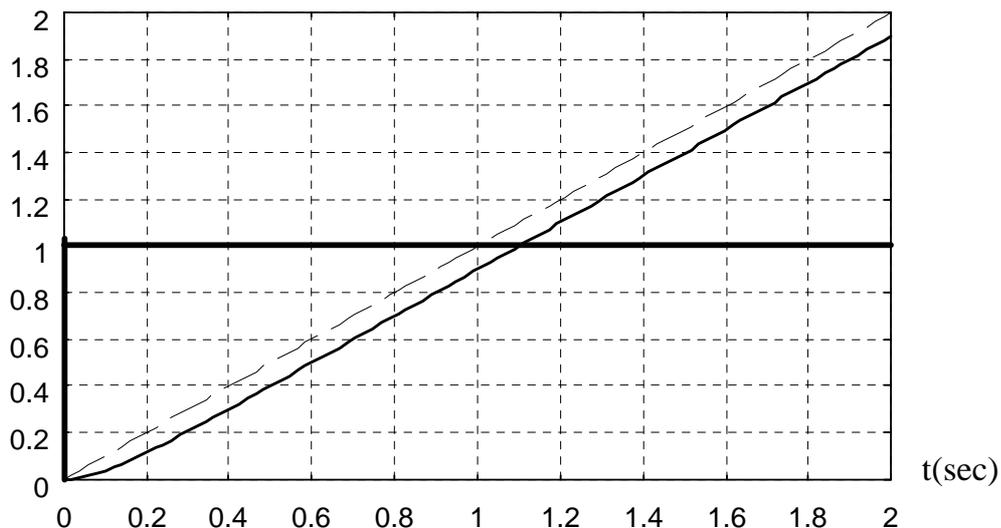


Fig. 6-13 : Réponse indicielle de $H(p) = \frac{1}{p(1+0.1p)}$

6-4-3. REPONSE HARMONIQUE.

Pour une valeur donnée de la pulsation, l'amplitude AdB totale de H(p) est la somme des amplitudes de H1(p) et de H2(p) (car les décibels s'additionnent) et la phase totale la somme des phases. Le tableau ci-dessous regroupe les valeurs remarquables de la pulsation avec :

- A1: Rapport d'amplitude en dB du système intégrateur pur H1(p).
 A2: Rapport d'amplitude en dB du système du premier ordre H2(p).
 ϕ_1 : Déphasage en degrés du système intégrateur pur H1(p).
 ϕ_2 : Déphasage en degrés du système du premier ordre H2(p).

A: Rapport d'amplitude en dB du système produit H(p) : $A = A1 + A2$
 ϕ : Déphasage en degrés du système produit H(p) : $\phi = \phi_1 + \phi_2$

ω (rad/s)	A1(ω)dB	A2(ω)dB	$\Phi_1(\omega)^\circ$	$\Phi_2(\omega)^\circ$	A(ω)dB	$\Phi(\omega)^\circ$
0	∞	0	-90	0	∞	-90
10	-20	-3	-90	-45	-23	-135
∞	$-\infty$	$-\infty$	-90	-90	$-\infty$	-180

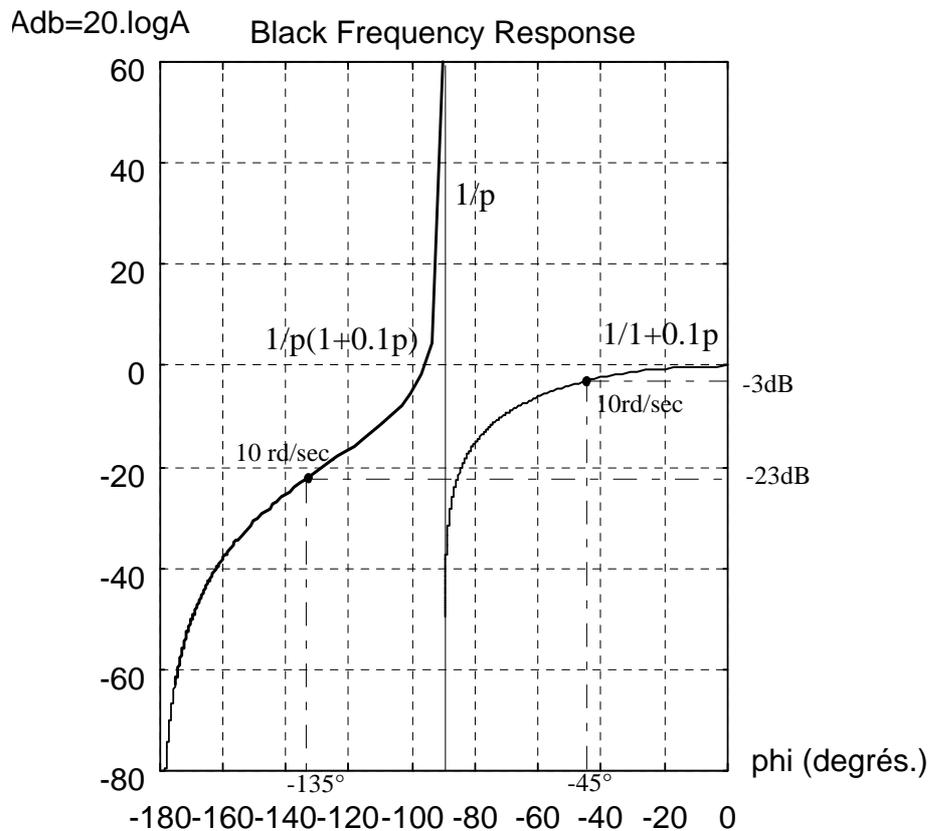


Fig. 6-14 : Diagrammes de Black de $H(p) = \frac{1}{p(1+0.1p)}$ $H_2(p) = \frac{1}{(1+0.1p)}$ $H_1(p) = \frac{1}{p}$

6-5. SYSTEMES DU TROISIEME ORDRE POSSEDANT UNE INTEGRATION.

Ces systèmes sont également de classe 1.

Exemple: commande en position utilisant un moteur modélisé comme un système du second ordre. La commande du moteur est $E(p)$. Ce système n'est pas asservi.

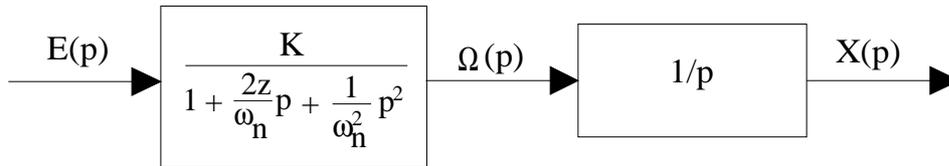


Fig. 6-15 : Système du troisième ordre avec intégration.

La relation entrée/sortie d'un tel système est de la forme : $\frac{ds(t)}{dt} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^3s(t)}{dt^3} = K \cdot e(t)$

Après transformation de Laplace, on obtient la fonction de transfert.

$$H(p) = \frac{K}{p \left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)}$$

Ce système est du troisième ordre et de classe 1. On peut considérer $H(p)$ comme le produit d'un système intégrateur pur $H1(p)$ par un système du second ordre $H2(p)$:

$$H(p) = H1(p) \cdot H2(p) = \frac{1}{p} \frac{K}{\left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)}$$

6-5-1. REPONSE A UN ECHELON.

Soumettons le système à un échelon d'amplitude unitaire : $e(t) = u(t)$. La réponse est :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{1}{p \left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)} \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2 \left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)}$$

La réponse indicielle est la transformée inverse de $S(p)$:

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = t - \frac{2z}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-z^2} t + \varphi) \quad \text{avec: } \varphi = 2 \arctg \left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \right)$$

(voir "outils mathématiques" §5-3-4, tableau 2). On obtient exactement la réponse d'un système du second ordre à une rampe de pente unitaire car $S(p)$ est identique dans les deux cas. On retrouve d'ailleurs l'expression 5-15 du §5. Pour $K=1$, $z=0.2$ et $\omega_n = 10\text{rad/sec}$, on obtient :

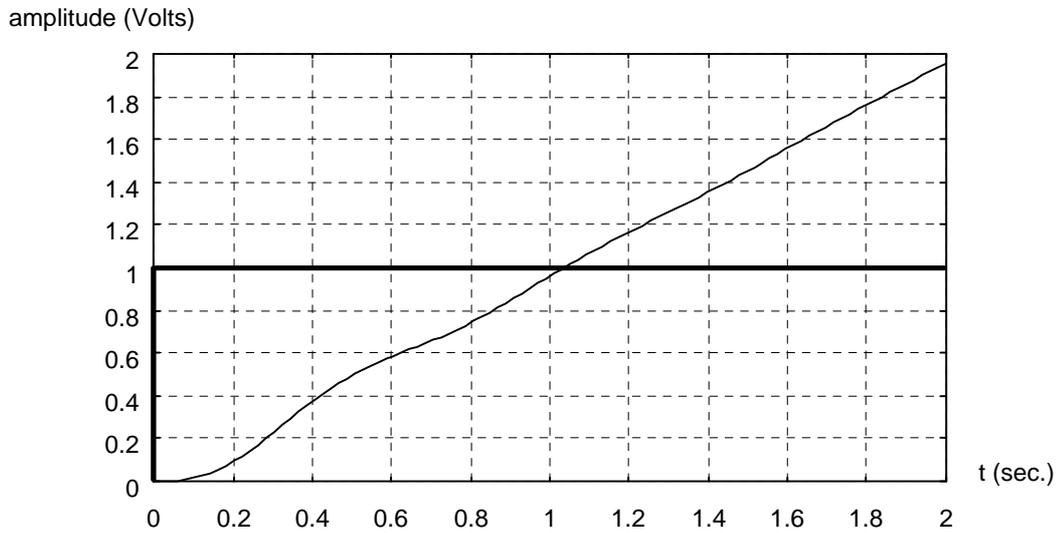


Fig. 6-16 : Réponse indicielle de $H(p) = \frac{1}{p(1+0.04p+0.01p^2)}$

6-5-2. REPONSE HARMONIQUE.

Pour une valeur donnée de la pulsation, l'amplitude A_{dB} totale de $H(p)$ est la somme des amplitudes

de $H_1(p)$ et de $H_2(p)$ et la phase totale la somme des phases. Le tableau ci-dessous regroupe les valeurs remarquables de la pulsation avec :

A_1 : Rapport d'amplitude en dB et ϕ_1 : Déphasage en degrés du système intégrateur pur $H_1(p)$.

A_2 : Rapport d'amplitude en dB et ϕ_2 : Déphasage en degrés du système du second ordre $H_2(p)$.

A : Rapport d'amplitude en dB du système produit $H(p)$: $A = A_1 + A_2$

ϕ : Déphasage en degrés du système produit $H(p)$: $\phi = \phi_1 + \phi_2$

Pour $K=1$, $z=0.43$ et $\omega_n = 10\text{rad/sec}$, on obtient les valeurs suivantes :

ω (rad/s)	$A_1(\omega)\text{dB}$	$A_2(\omega)\text{dB}$	$\Phi_1(\omega)^\circ$	$\Phi_2(\omega)^\circ$	$A(\omega)\text{dB}$	$\Phi(\omega)^\circ$
0	∞	0	-90	0	∞	-90
7.9	-17.95	2.19	-90	-61.55	-15.76	-151.55
10	-20	1.31	-90	-90	-18.69	-180
∞	$-\infty$	$-\infty$	-90	-180	$-\infty$	-270

On remarque l'absence de résonance (alors que le second ordre $H_2(p)$ en possède une).

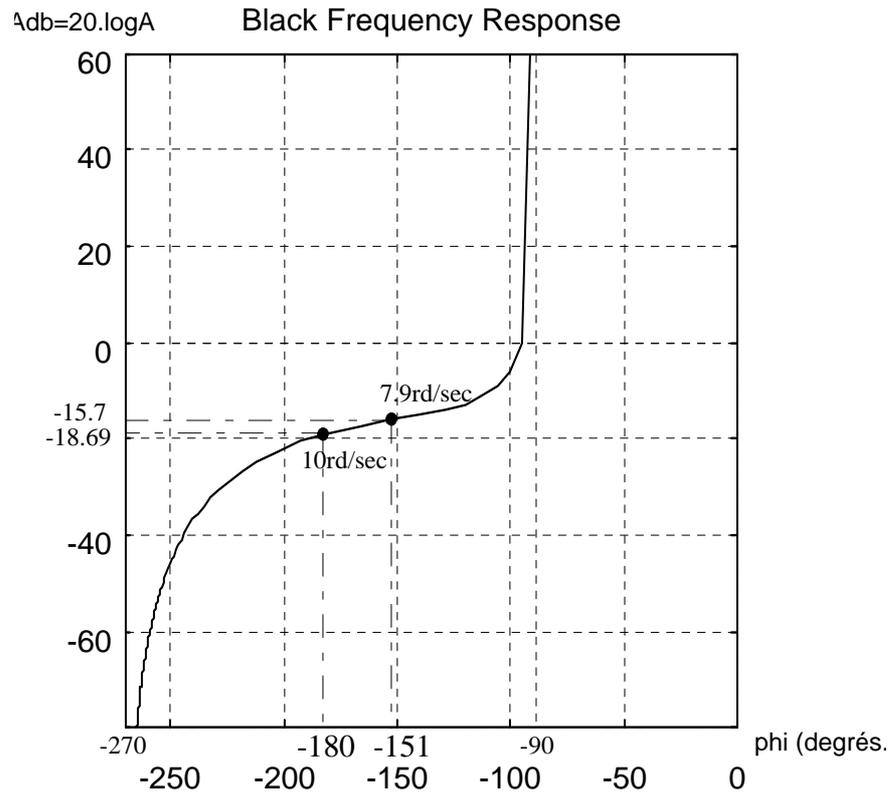


Fig. 6-17 : Diagramme de Black de $H(p) = \frac{K}{p(1+0.086p+0.01p^2)}$

6-6. REPONSE HARMONIQUE DES SYSTEMES D'ORDRE SUPERIEUR.

Lorsque l'on rencontre un système qui est le produit de plusieurs systèmes simples (premier ordre, second ordre, intégration et retard principalement), on peut déterminer la forme de la réponse fréquentielle par différentes méthodes dont les trois suivantes :

Méthode 1 : on dispose d'un logiciel adapté qui calcule les réponses temporelles et qui trace les diagrammes de Bode, Black et Nyquist. Méthode simple, pratique et de plus en plus répandue avec le développement de nombreux logiciels dédiés ou l'utilisation de logiciels de calcul.

Méthode 2 : On détermine simplement la réponse harmonique sur un diagramme de bode en additionnant les amplitudes (en dB) et en additionnant les phases des sous-systèmes. En première analyse, on peut travailler sur les diagrammes asymptotiques.

Méthode 3 : On calcule, pour un nombre suffisant de valeurs de la pulsation, les amplitudes et les phases des sous-systèmes. On les additionne et on les reporte dans un tableau du type de celui obtenu au § 6-5-2. On trace point par point la réponse dans le plan de Black.

Exemple: $H(p) = H1(p).H2(p) = \frac{2}{1+0.1p} \frac{5}{1+0.3p+0.25p^2}$

$H(p)$ est du troisième ordre et est le produit d'un premier ordre $H1(p)$ par un second ordre $H2(p)$.
 $H(p)$ est de classe zéro (pas d'intégration)

6-6-1. UTILISATION D'UN LOGICIEL.

Il n'est pas nécessaire de posséder un logiciel dédié (comme SISSY, GENESIS, SIMULINK avec MATLAB, etc.) pour tracer les réponses fréquentielles ou temporelles des systèmes linéaires ; un logiciel de calcul capable de manipuler des nombres complexes est suffisant. Le logiciel employé dans ce cas précis est GNUPLOT, disponible en freeware sur le réseau. Par contre, dès que l'on aborde les systèmes bouclés, il est préférable d'utiliser un logiciel de simulation.

Pour le diagramme de Black, la méthode est la suivante :

- Ecrire la fonction de transfert complexe : $H(j\omega) = \frac{2}{1+0.1j\omega} \frac{5}{1+0.3j\omega-0.25\omega^2}$
- Calculer son module et son argument (calcul direct par les fonctions "abs" et "arg")
- Tracer en mode paramétrique l'un en fonction de l'autre.
- Tracer par dessus les points correspondant aux pulsations voulues.

Le programme relatif au cas étudié est donné en annexe.

Le tracé obtenu peut être modifié dans un logiciel de dessin.

Le diagramme de Black de $H(p)$ est donné Fig : 6-18.

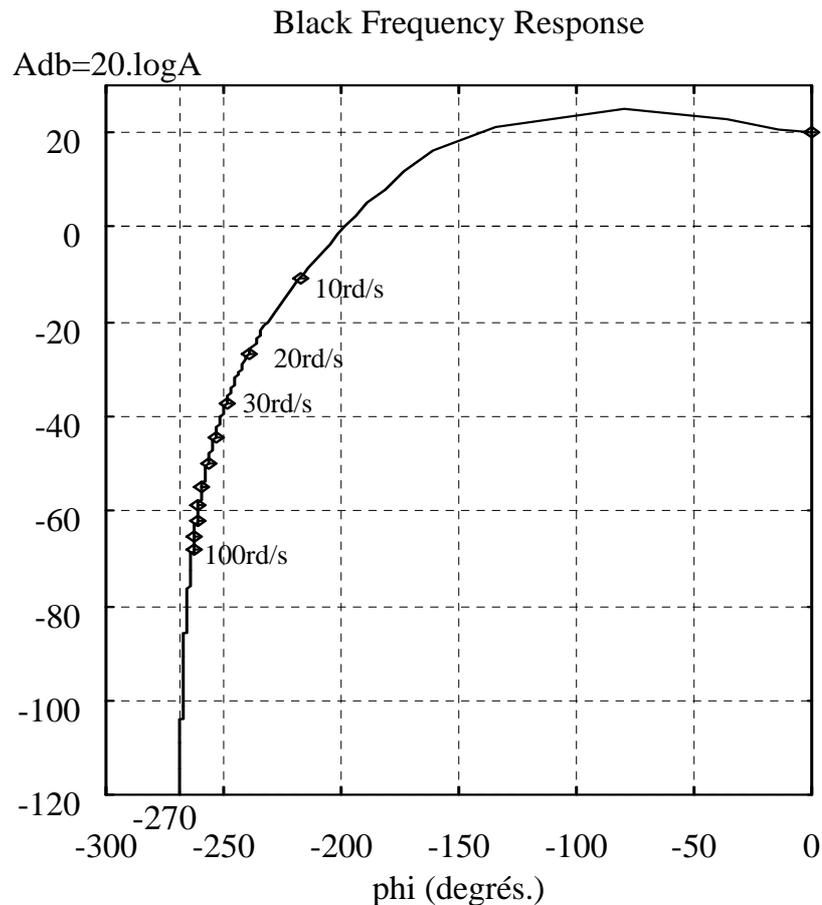


Fig. 6-18 : Diagramme de Black de $H(p) = \frac{2}{1+0.1p} \frac{5}{1+0.3p+0.25p^2}$

6-6-2. TRACE DU DIAGRAMME ASYMPTOTIQUE DE BODE.

Fonction de transfert.	Diagramme d'amplitude	Diagramme de phase
$H(p) = \frac{1}{p}$		
$H(p) = \frac{1}{1+Tp}$		
$H(p) = \frac{1}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$		
$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$		
$H(p) = 1+Tp$		

La méthode consiste à décomposer la fonction de transfert à tracer en fonctions élémentaires de gain unitaire dont on connaît l'allure (voir tableau précédent), à les superposer, puis enfin à effectuer une translation globale de la valeur du gain.

$$\mathbf{6-6-2-1. Exemple 1 : } H(p) = H1(p).H2(p) = \frac{2}{1+0.1p} \frac{5}{1+0.3p+0.25p^2}$$

a) Considérer $H1(p)$ et rendre provisoirement son gain statique unitaire : $H1(p) = \frac{1}{1+0.1p}$

Sa pulsation de cassure est $\omega_c = 1/T = 10\text{rad/sec}$. Le déphasage correspondant est $\phi = -45^\circ$.

Sur le diagramme asymptotique (qui est une approximation), le gain est $\text{AdB} = 0\text{dB}$ pour $\omega < 10\text{rad/sec}$ et $\text{AdB} = -20\text{dB/décade}$ pour $\omega > 10\text{rad/sec}$.

b) Considérer $H2(p)$ et rendre provisoirement son gain statique unitaire : $H2(p) = \frac{1}{1+0.3p+0.25p^2}$

Sa pulsation de cassure est $\omega_c = \omega_n = 2\text{rad/sec}$. Le déphasage correspondant est $\phi = -90^\circ$.

Sur le diagramme asymptotique, le gain est $\text{AdB} = 0\text{dB}$ pour $\omega < 2\text{rad/sec}$ et $\text{AdB} = -40\text{dB/décade}$ pour $\omega > 2\text{rad/sec}$.

c) Considérer enfin $H(p)=H1(p)H2(p)$ avec un gain statique unitaire.

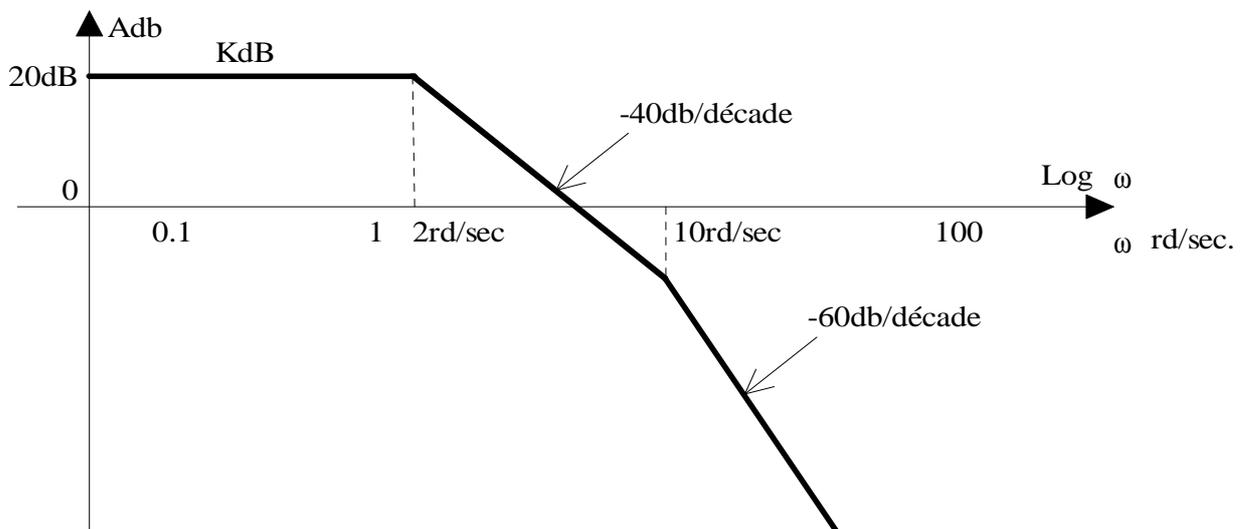
Entre 0 et 2rad/sec , gain $\text{AdB} = 0\text{dB} + 0\text{dB} = 0\text{dB}$ et phase $\phi = 0^\circ + 0^\circ = 0^\circ$

Entre 2 et 10rad/sec , gain $\text{AdB} = 0\text{dB} - 40\text{dB/décade} = -40\text{dB/décade}$ et phase $\phi = 0^\circ - 180^\circ = -180^\circ$.

Au-delà de 10rad/sec , gain $\text{AdB} = -20\text{dB/décade} - 40\text{dB/décade} = -60\text{dB/décade}$ et phase $\phi = -90^\circ - 180^\circ = -270^\circ$.

Il ne reste plus qu'à tracer le diagramme asymptotique puis à lui faire subir une translation verticale correspondant au gain statique $K = K1.K2$. La translation sera de $\text{KdB} = 20\log(K1.K2) = 20\text{dB}$ vers le haut, KdB étant positif.

Remarque: la translation s'effectuerait vers le bas si KdB était négatif.



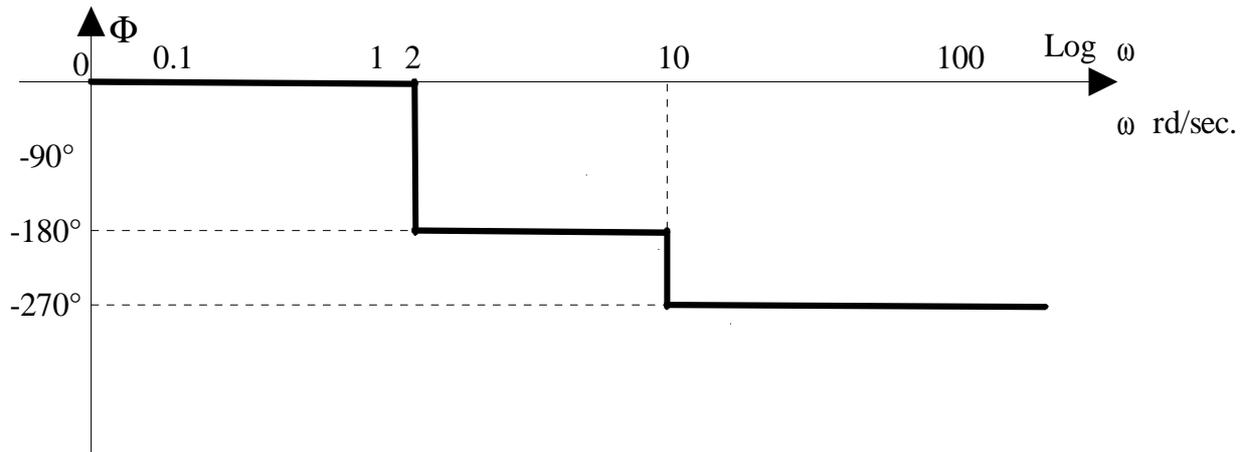


Fig. 6-19 : Diagramme asymptotique de Bode de $H(p) = \frac{2}{1+0.1p} \frac{5}{1+0.3p+0.25p^2}$

6-6-2-2. Exemple 2 : $H(p) = \frac{12(1+0.2p)}{(1+p)(1+0.01p)(1+0.2p+0.01p^2)}$

On décompose $H(p)$ en 5 fonctions de transfert élémentaires :

$$H(p) = H1(p).H2(p).H3(p).H4(p).H5(p)$$

avec:

$$H1(p) = 12 : \text{gain pur } 20\log(12) = 21.6\text{dB}$$

$$H2(p) = (1+0.2p) \text{ ordre 1 de pulsation de cassure : } \omega_{c2} = 5\text{rad/s}$$

$$H3(p) = \frac{1}{(1+p)} \text{ ordre 1 de pulsation de cassure : } \omega_{c3} = 1\text{rad/s}$$

$$H4(p) = \frac{1}{(1+0.01p)} \text{ ordre 1 de pulsation de cassure : } \omega_{c4} = 100\text{rad/s}$$

$$H5(p) = \frac{1}{(1+0.2p+0.01p^2)} \text{ ordre 2 de pulsation de cassure (pulsation propre) : } \omega_{n5} = 10\text{rad/s}$$

On classe les pulsations de cassure par ordre croissant et on réalise les tableaux suivant :

Pour l'amplitude :

Pulsations (rad/s)	1	5	10	100	
H1(p)	+21.6dB	+21.6dB	+21.6dB	+21.6dB	+21.6dB
H2(p)	0dB	0	+20dB/dec	+20dB/dec	+20dB/dec
H3(p)	0dB	-20dB/dec	-20dB/dec	-20dB/dec	-20dB/dec
H4(p)	0dB	0dB	0dB	0dB	-20dB/dec
H5(p)	0dB	0dB	0dB	-40dB/dec	-40dB/dec
H(p)	+21.6dB	-20dB/dec	-	-40dB/dec	-60dB/dec

Pour la phase :

Pulsations (rad/s)	1	5	10	100
H1(p)	0°	0°	0°	0°
H2(p)	0°	0°	+90°	+90°
H3(p)	0°	-90°	-90°	-90°
H4(p)	0°	0°	0°	-90°
H5(p)	0°	0°	0°	-180°
H(p)	0°	-90°	0°	-180°

Ce qui nous donne le diagramme asymptotique suivant :

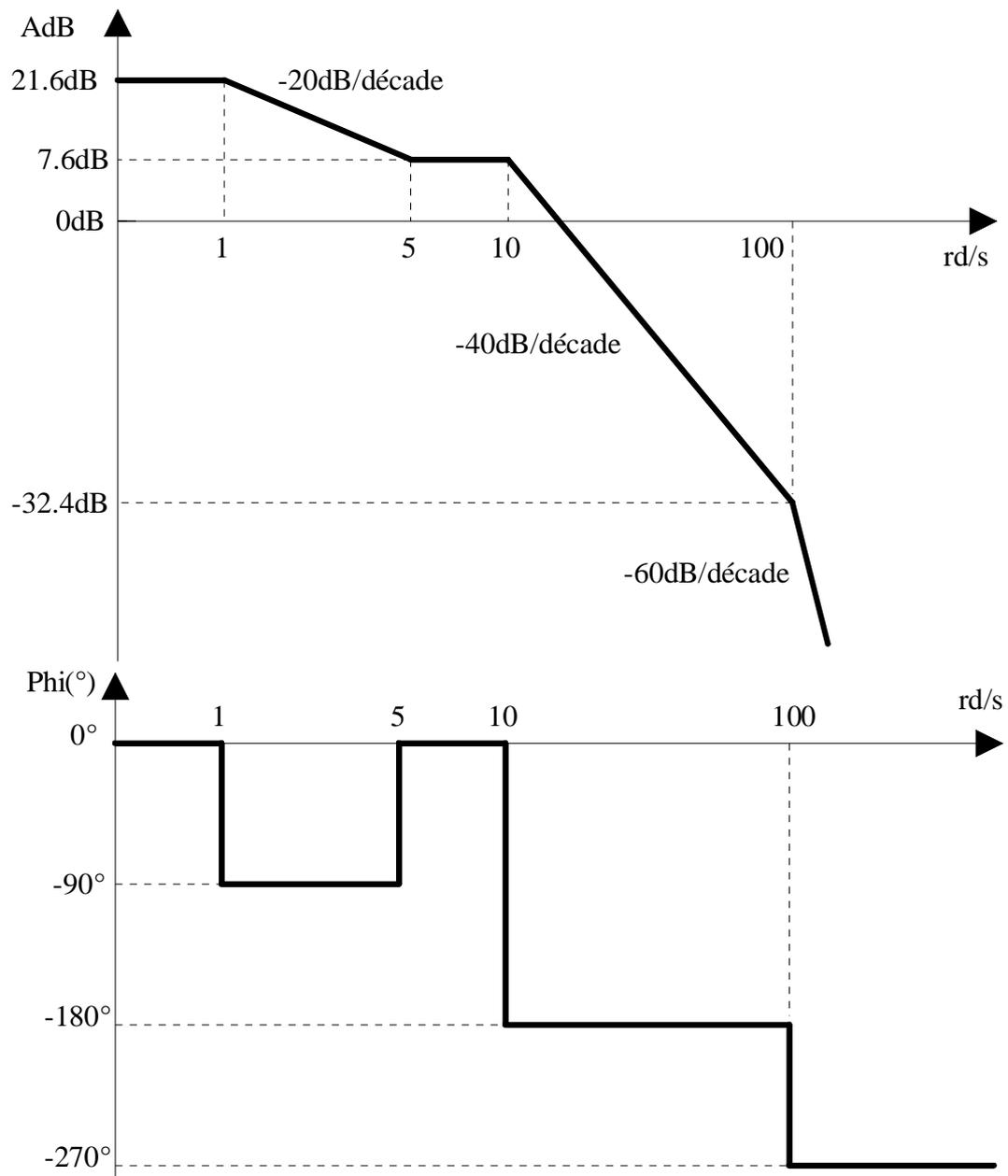


Diagramme asymptotique de $H(p) = \frac{12(1+0.2p)}{(1+p)(1+0.01p)(1+0.2p+0.01p^2)}$

REMARQUE: les valeurs de l'amplitude aux points de cassure sont déterminées comme suit :

Premier point : $A_{dB} = 21.6\text{dB}$

Second point : on perd 20dB par décade entre 1rad/s et 5rad/s, ce qui correspond à $\log(5) = 0.7$ décade

La perte est donc de $20 \times 0.7 = 14\text{dB}$ et l'amplitude pour 5rad/s est de $21.6 - 14 = 7.6\text{dB}$.

Troisième point : même amplitude que le second.

Quatrième point : on perd 40dB par décade entre 10rad/s et 100rad/s ce qui correspond à une décade. L'amplitude est donc $7.6 - 40 = -32.6\text{dB}$

6-6-3. TRACE POINT PAR POINT DU DIAGRAMME DE BLACK.

On effectue les calculs à la main pour différentes valeurs de ω , les résultats étant regroupés dans un tableau. La courbe est ensuite tracée point par point.

ω (rad/s)	$A1(\omega)\text{dB}$	$A2(\omega)\text{dB}$	$\Phi 1(\omega)^\circ$	$\Phi 2(\omega)^\circ$	$A(\omega)\text{dB}$	$\Phi(\omega)^\circ$
0	6.02	13.97	0	0	20	0
1	5.97	15.83	-5.71	-21.8	21.81	-27.5
2	5.85	18.41	-11.3	-90	24.26	-101.3
3	5.64	10.22	-16.7	-144.2	15.87	-160.94
4	5.37	3.79	-21.8	158.2	9.16	-180
5	5.05	-0.76	-26.5	-164	4.28	-190.6
7	4.28	-7.19	-35	-169.4	-2.9	-204.4
8	3.87	-9.65	-38.6	-170.9	-5.78	-209.5
10	3.01	-13.69	-45	-172	-10.68	-217.8
15	0.9	-20.89	-56.3	-175	-20	-231.6
20	-0.9	-25.94	-63.4	-176	-26.9	-239.9
30	-3.97	-33.03	-71.5	-177.7	-37	-249.26

Avantages: on peut concentrer le calcul autour des points sensibles (résonance, fréquences particulières, etc.).

Inconvénients: méthode assez lourde et risque d'erreurs de calcul.

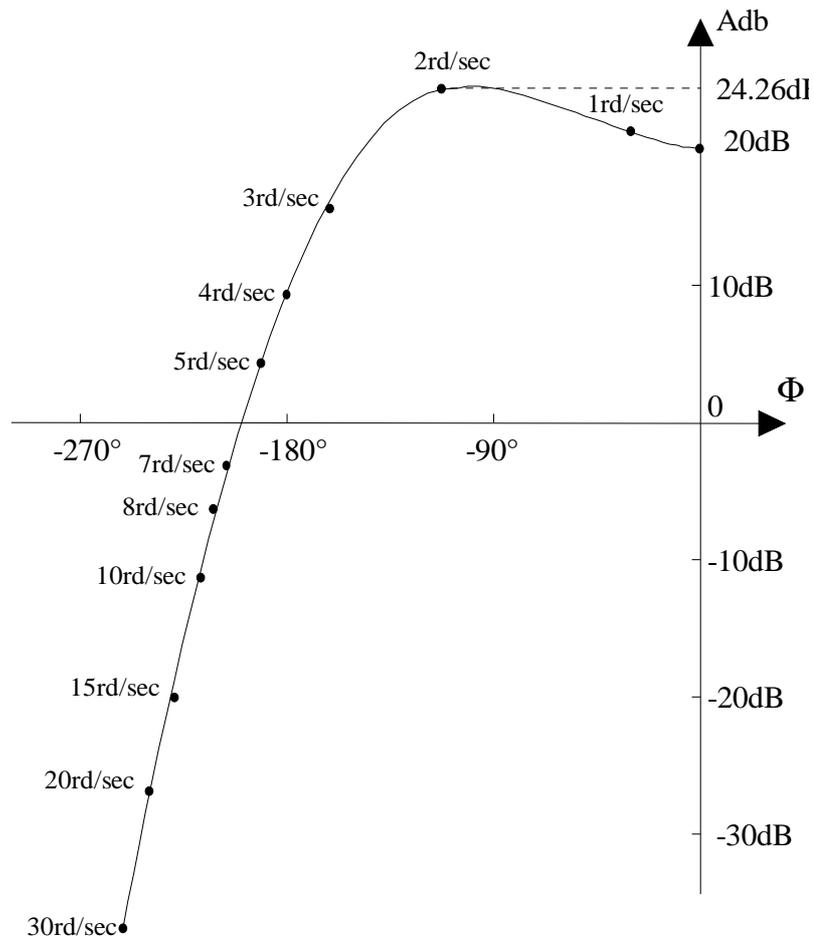


Fig. 6-20 : Diagramme de Black de $H(p) = \frac{2}{1+0.1p} \frac{5}{1+0.3p+0.25p^2}$

Chapitre 7

PERFORMANCES DES SYSTÈMES BOUCLÉS.

7-1. INFLUENCE DU BOUCLAGE SUR LES CARACTÉRISTIQUES D'UN SYSTÈME.

7-1-1. ASSERVISSEMENT DE VITESSE.

Considérons un moteur modélisé comme un premier ordre de F.T. en vitesse $H(p) = \frac{K_m}{(1+T_m.p)}$

K_m étant le gain statique en vitesse et T_m étant la constante de temps mécanique. En boucle ouverte (Fig:7-1), nous connaissons le comportement de ce système.

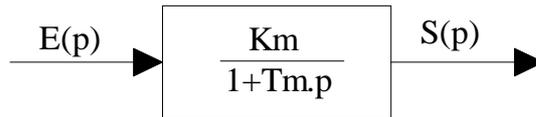


Fig 7-1: Système du premier ordre.

Bouclons maintenant le système par un retour unitaire (par souci de simplification, car les phénomènes sont identiques avec un retour non unitaire comme nous le verrons plus loin).

Un amplificateur de gain K_a est inséré avant le moteur pour permettre le réglage du gain de la chaîne directe (Le gain K_m du moteur est une donnée du constructeur et n'est pas réglable).

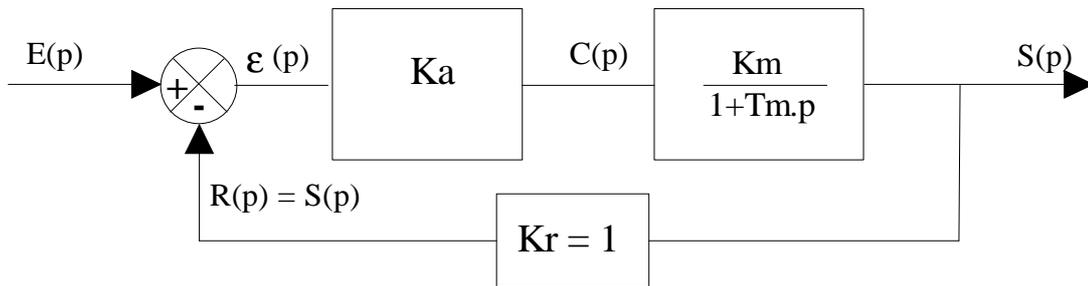


Fig 7-2: Système du premier ordre bouclé.

Ce système est équivalent au système représenté Fig:7-3 avec $K = K_a.K_m$ (on a fusionné l'ampli et le moteur, ce qui est mathématiquement possible).

La FTBO de ce système est: $FTBO(p) = \frac{K}{(1+T_m.p)}$

REMARQUE La sortie est exprimée dans l'unité de vitesse choisie: rad/sec, tr/mn, etc. Par cohérence, le gain du moteur devra donc être exprimé en "unité de vitesse choisie"/Volt, (rad/s/V par exemple) ce qui signifie bien que nous considérons le moteur comme un système qui transforme une tension en vitesse. Par contre K_a est sans unité car l'ampli considéré ici transforme des Volts en Volts. D'autre part, on peut se demander si la comparaison entre $r(t) = s(t)$ et $e(t)$ a un sens car $e(t)$ est une tension et $s(t)$ une vitesse: la réponse est oui car, dans ce cas, la boucle de retour possède un gain unitaire, $K_r = 1$ volt/"unité de vitesse choisie" et les deux grandeurs sont algébriquement comparables.

Sur le schéma-bloc, toutes les grandeurs sont exprimées en variable de Laplace. Dans ce qui suit nous ne précisons pas les unités de K_a , de K_m , de $e(t)$ et de $s(t)$.

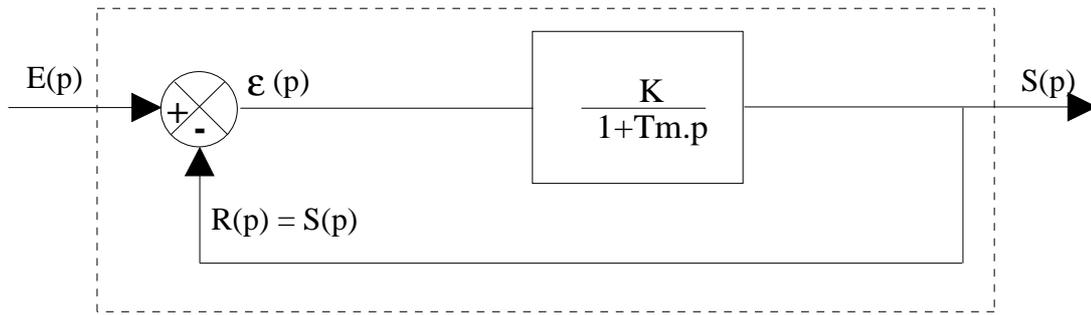


Fig 7-3: Système équivalent au système Fig:7-2.

Le comportement du système bouclé est décrit par la FTBF. Pour un système à retour unitaire, nous savons que:

$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{\frac{K}{1 + Tm.p}}{1 + \frac{K}{1 + Tm.p}} = \frac{K}{1 + K + Tm.p} = \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{Tm}{1 + K}p} = \frac{K'}{1 + T'p}$$

FTBF(p) est une fonction de transfert du premier ordre. Le système peut maintenant se représenter sous la forme suivante:

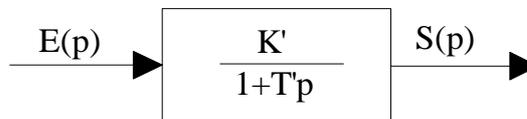


Fig 7-4: Fonction de transfert en boucle fermée du système.

On en déduit que:

1) LE BOUCLAGE N'A PAS MODIFIE L'ORDRE DU SYSTEMÈME

Par contre, il a modifié les paramètres:

En bouclant un système du premier ordre de gain K , on obtient un système du premier ordre de gain $K' = K/1+K$. $1+K$ étant toujours supérieur à 1, le gain a diminué. En régime permanent, le système bouclé fournit une sortie plus faible qu'en chaîne directe à consigne équivalente: il faut adapter l'entrée.

2) LE BOUCLAGE A MODIFIÉ LE GAIN DU SYSTEMÈME

En bouclant un système du premier ordre de constante de temps T_m , on obtient un système du premier ordre de constante de temps $T' = T_m/1+K$. $1+K$ étant toujours supérieur à 1, la constante de temps a diminué. Le temps de réponse à 5% étant proportionnel à la constante de temps: $Tr_{5\%} = 3T'$

3) LE SYSTÈME BOUCLÉ EST PLUS RAPIDE QUE LE SYSTÈME EN BOUCLE OUVERTE. ON AMÉLIORE SA RAPIDITÉ EN AUGMENTANT LE GAIN DE BOUCLE K.

Qu'en est-il de la précision? Pour ce système, on conçoit intuitivement que la précision est l'écart entre la consigne et la sortie en régime permanent (ce qui n'est pas vrai pour un système à retour non unitaire). La précision, dont nous donnerons une définition rigoureuse en 7-2, est, dans ce cas, la valeur de $\varepsilon(t)$ lorsque t tend vers l'infini en réponse indicielle.

Si le système était parfaitement précis, il fournirait une sortie algébriquement égale à la consigne. La FTBF posséderait alors un gain unitaire et pour une consigne de 1 Volt le système fournirait une sortie égale à 1 unité de vitesse. C'est pourquoi, dans les courbes qui suivent, on pourra comparer directement les valeurs de la consigne de la sortie et de l'écart entre elles.

Observons maintenant l'évolution des différentes grandeurs de notre système soumis à une entrée échelon unitaire $e(t) = 1$ Volt. On a pris $T_m = 0.01$ sec et K_a tel que $K_a K_m = K = 1$ ce qui nous donne:

$$FTBO(p) = \frac{1}{1+0.01p} \quad \text{et} \quad FTBF(p) = \frac{0.5}{1+0.005p}$$

La valeur de la sortie en régime permanent est 0.5, ce qui donne un écart statique $\varepsilon_s = 0.5$. Le système n'est pas précis.

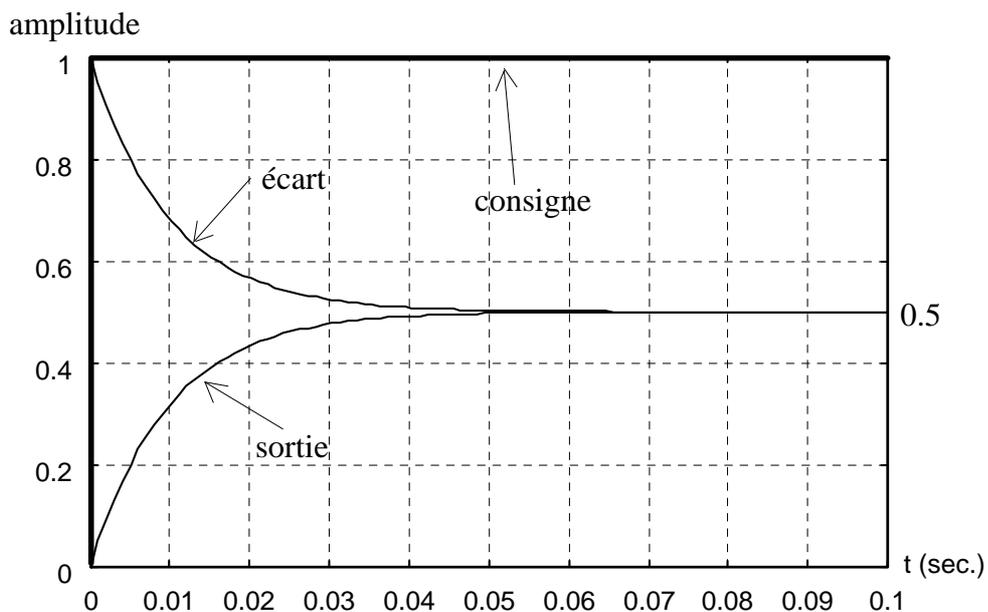


Fig 7-5: Réponse indicielle d'un premier ordre bouclé de gain faible.

Augmentons le gain K_a de l'amplificateur de telle manière que le gain $K_a K_m = K = 10$. On obtient:

$$FTBO(p) = \frac{10}{1+0.01p} \quad \text{et} \quad FTBF(p) = \frac{0.9}{1+0.0009p}$$

On remarque que le gain en boucle fermée (0,9) n'augmente pas aussi vite que le gain en boucle ouverte (10)

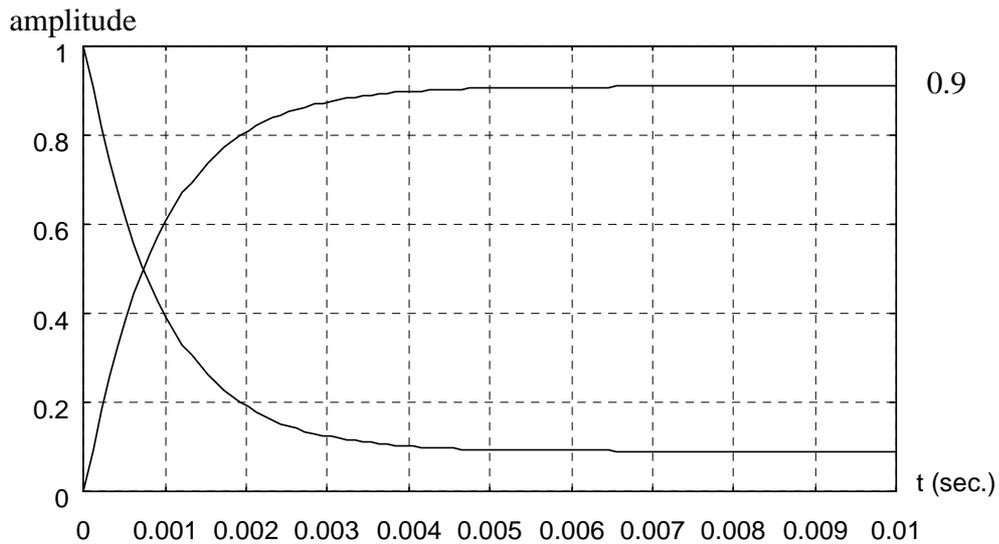


Fig 7-6: Réponse indicielle d'un premier ordre bouclé de gain moyen.

Augmentons encore le gain K_a de l'amplificateur de telle manière que le gain $K_a K_m = K = 50$.

On obtient: $FTBO(p) = \frac{50}{1+0.01p}$ et $FTBF(p) = \frac{0.98}{1+0.00019.p}$

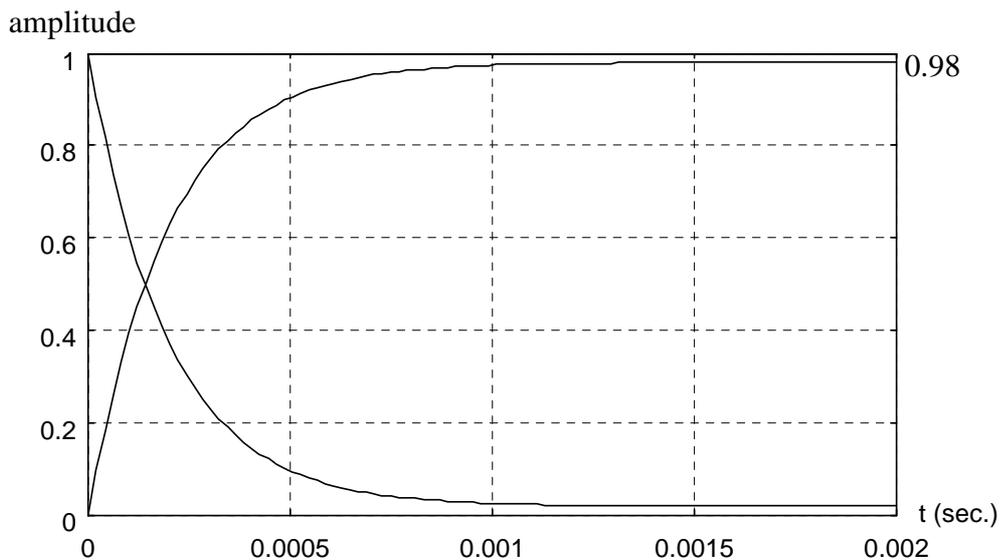


Fig 7-7: Réponse indicielle d'un premier ordre bouclé de gain fort.

La valeur de la sortie en régime permanent est supérieure à 0.98, ce qui donne un écart statique ε_s inférieur à $= 0.02$. Le système est encore plus précis. On pourrait continuer à augmenter le gain en boucle ouverte pour améliorer la précision mais sans jamais la rendre absolue (en d'autres termes, une erreur statique nulle implique un gain infini). Cette augmentation de gain se heurterait d'ailleurs rapidement à des limites technologiques.

4) LE SYSTÈME BOUCLÉ EST FONDAMENTALEMENT IMPRÉCIS. ON AMÉLIORE LA PRÉCISION EN AUGMENTANT LE GAIN DE BOUCLE K.

Conclusion. Les affirmations 1, 2 et 3 sont toujours vraies, y compris pour d'autres systèmes. Par contre l'affirmation 4 n'est pas vraie pour tous les systèmes, comme nous allons le vérifier dans le cas des asservissements de position.



L'affirmation 1 doit être affinée: En effet, la FT en chaîne directe est de même ordre que la FTBF uniquement dans le cas où le retour est un gain pur (ce qui est le cas ici). Lorsque le retour est d'ordre n, L'ordre de la FT en chaîne directe est différent de celui de la FTBF. Finalement et dans tous les cas de figure, "la FTBF et la FTBO sont de même ordre".

7-1-2. ASSERVISSEMENT DE POSITION.

Considérons le même moteur modélisé comme un premier ordre de F.T. $H(p) = \frac{K_m}{(1 + T_m.p)}$

K_m étant le gain statique et T_m étant la constante de temps mécanique. La sortie du système est maintenant une position. La position s'obtenant par intégration de la vitesse, il va apparaître un terme en $1/p$ dans le schéma-bloc (voir Fig:7-8).

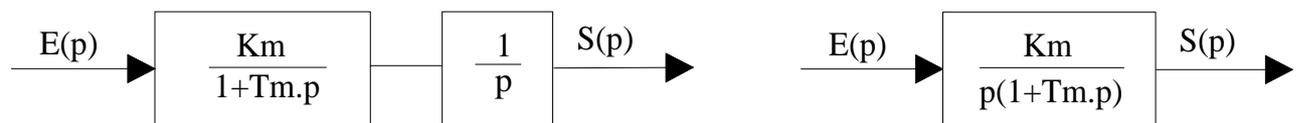


Fig 7-8 et 7-9: Système du premier ordre avec intégration.

En boucle ouverte (Fig:7-8), nous connaissons le comportement de ce système. Bouclons maintenant le système par un retour unitaire et insérons un amplificateur de gain K_a avant le moteur pour permettre le réglage du gain de la chaîne directe.

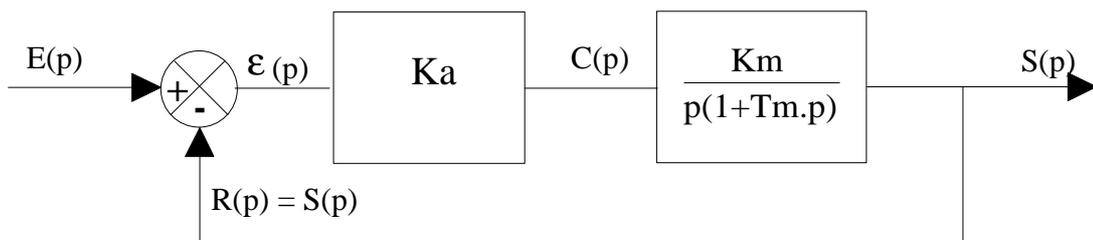


Fig 7-10: Système du premier ordre avec intégration bouclé.

La FTBO de ce système est: $FTBO(p) = \frac{K}{p(1 + T_m.p)}$ avec $K = K_a.K_m$

Le comportement du système bouclé est décrit par la FTBF.

$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{\frac{K}{p(1 + T_m.p)}}{1 + \frac{K}{p(1 + T_m.p)}} = \frac{K}{K + p + T_m.p^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K}p + \frac{T_m}{K}p^2}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est du **second ordre sans intégration avec gain unitaire**.

$$FTBF(p) = \frac{K'}{1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2} \quad \text{avec: } K' = 1, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{Tm}} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{2\sqrt{K.Tm}}$$

1) LE BOUCLAGE N'A PAS MODIFIÉ L'ORDRE MAIS A MODIFIÉ LA CLASSE.

En particulier, suivant les valeurs de K et de Tm, le système bouclé peut être oscillant (alors que le système en boucle ouverte ne peut pas l'être).

Le gain K' est différent de K.

2) LE BOUCLAGE A MODIFIÉ LE GAIN DU SYSTÈME .

On ne peut pas comparer la rapidité du système bouclé à celle du système non-bouclé, car ce dernier est un système intégrateur dont la réponse indicielle augmente indéfiniment avec le temps: le temps de réponse n'a aucun sens dans ce cas.

Calculons les temps de réponse à 5% du système bouclé dans les trois cas de figure déjà examinés: (Tm = 0.01)

a) On calcule z et ω_n par: $z = \frac{1}{2\sqrt{K.Tm}}$ et $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{Tm}}$ avec Tm = 0.01 dans les trois cas.

b) On détermine le temps de réponse réduit Tr. ω_n au moyen de la courbe Fig:5-13, § 5-3.

c) On en déduit le temps de réponse à 5%.

K	z	ω_n	Tr. ω_n	Tr 5%
1	5	10	30	3
10	1.58	31.6	7	0.22
50	0.707	70.7	3	0.04

3) ON AMÉLIORE LA RAPIDITÉ EN AUGMENTANT LE GAIN DE BOUCLE K.

On remarque que le bouclage rend le gain unitaire quelles que soient les valeurs de K et de Tm. Sachant qu'un système du second ordre de gain unitaire possède une erreur statique nulle:

4) LE BOUCLAGE A RENDU LE SYSTÈME PRÉCIS (quelle que soit la valeur initiale du gain en chaîne ouverte).

Conclusion. Nous retrouvons les mêmes affirmations 1, 2 et 3 qui sont toujours vraies.

Par contre l'affirmation 4 est différente: ce système est précis. Ceci est dû à la présence d'une intégration dans la boucle ouverte qui rend le gain du système bouclé unitaire comme nous le montrerons dans le cas général au chapitre 7-3.

7-2. RAPPELS CONCERNANT LA DÉFINITION DE L'ÉCART (voir §2).

En général, on ne peut pas définir l'écart comme étant la différence entre la sortie et l'entrée

L'écart est la différence entre la valeur visée (la consigne) et la valeur atteinte (la sortie).

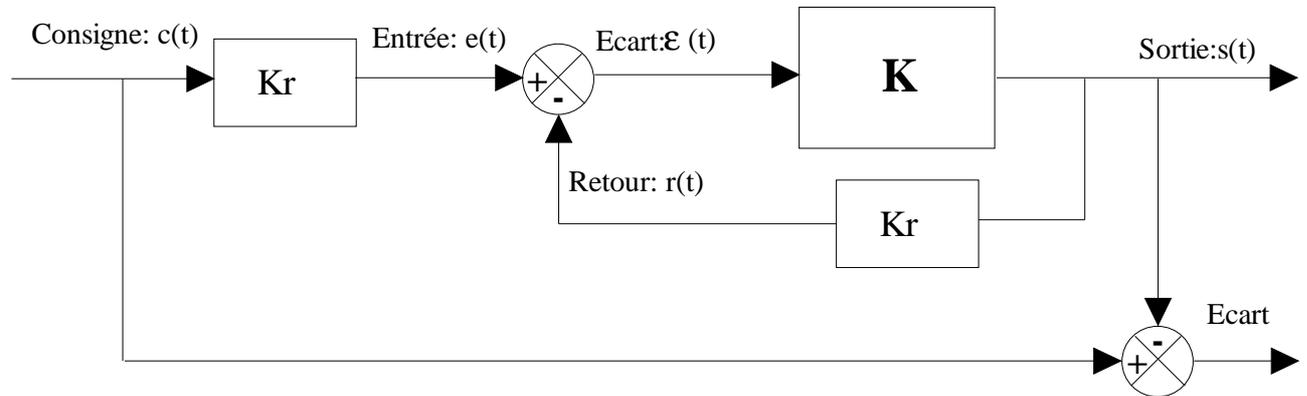


Fig 7-11: Définition de l'écart (rappel).

7-3. PERFORMANCES D'UN SERVOMÉCANISME.

7-3-1. PRÉCISION EN RÉGIME PERMANENT.

Considérons un système à retour unitaire (toujours pour des raisons de simplification) de fonction de transfert en boucle ouverte: $FTBO(p) = K.G(p) = \frac{K.N(p)}{p^\alpha.D(p)}$

Gain K , classe α , $N(p)$ et $D(p)$ polynômes en p , ordre: $\alpha + \deg(D(p))$

La FTBF d'un tel système est : $FTBF(p) = H(p) = \frac{K.G(p)}{1+K.G(p)} = \frac{K.N(p)}{p^\alpha.D(p) + K.N(p)}$

Si ce système est soumis à une entrée $E(p)$, alors l'écart est:

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+KG(p)} E(p) = \frac{p^\alpha.D(p)}{p^\alpha.D(p) + K.N(p)} E(p)$$

Soumettons ce système aux entrées typiques en considérant trois cas:

$\alpha = 0$: système sans intégration de classe zéro

$\alpha = 1$: système avec une intégration de classe 1

$\alpha > 1$: système à plusieurs intégrations de classe α

7-3-1-1: Erreur de position ou écart statique ε_s .

Le système est soumis à un échelon unitaire: $e(t) = u(t)$

La transformée de Laplace de l'échelon est: $E(p) = 1/p$

$$\text{L'écart s'écrit: } \varepsilon(p) = \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \frac{1}{p} = \frac{p^{\alpha-1} \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)}$$

La valeur de l'écart statique est obtenue en appliquant le théorème de la valeur finale.

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot \varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \right]$$

$$* \text{ si } \alpha = 0 \Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot \varepsilon(p)] = \frac{D(0)}{D(0) + K \cdot N(0)} = \frac{1}{1 + K} \quad \text{avec } D(0) = N(0) = 1$$

$$* \text{ si } \alpha = 1 \Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot \varepsilon(p)] = \frac{p \cdot D(0)}{p \cdot D(0) + K \cdot N(0)} = 0 \quad \text{avec } D(0) = N(0) = 1$$

$$* \text{ si } \alpha > 1 \Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot \varepsilon(p)] = \frac{p^\alpha \cdot D(0)}{p^\alpha \cdot D(0) + K \cdot N(0)} = 0$$

7-3-1-2: Erreur de traînage ou écart dynamique ε_v .

Le système est soumis à une rampe unitaire: $e(t) = t \cdot u(t)$

La transformée de Laplace de la rampe est: $E(p) = \frac{1}{p^2}$

$$\text{L'écart s'écrit: } \varepsilon(p) = \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \frac{1}{p^2} = \frac{p^{\alpha-2} \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)}$$

En appliquant le théorème de la valeur finale:

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot \varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p^{\alpha-1} \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \right]$$

$$* \text{ si } \alpha = 0 \Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot \varepsilon(p)] = \frac{D(0)}{p(D(0) + K \cdot N(0))} = \infty \quad \text{avec } D(0) = N(0) = 1$$

$$* \text{ si } \alpha = 1 \Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot \varepsilon(p)] = \frac{D(0)}{p \cdot D(0) + K \cdot N(0)} = \frac{1}{K}$$

$$* \text{ si } \alpha > 1 \Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot \varepsilon(p)] = \frac{p^{\alpha-1} \cdot D(0)}{p^\alpha \cdot D(0) + K \cdot N(0)} = 0$$

7-3-1-3: Conclusions sur la précision en régime permanent.

On peut les résumer dans le tableau suivant: (Valable pour des entrées unitaires)

$e(t)$	$E(p)$	ECART	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	ϵ_s	$\frac{1}{1+K}$	0	0
$t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	ϵ_v	∞	$\frac{1}{K}$	0
$\frac{t^2}{2}u(t)$	$\frac{1}{p^3}$	ϵ_a^*	∞	∞	$\frac{1}{K}$

* ϵ_a est l'écart en accélération que l'on calcule par la même méthode que ϵ_s et ϵ_v . Il est moins utilisé.

Un système ayant au moins une intégration dans la boucle ouverte possède un écart statique nul. Dans le cas contraire, l'écart statique diminue lorsque le gain en boucle ouverte croît.

On retrouve les caractéristiques des deux types d'asservissement vus au § 7-1

- Asservissement de vitesse (classe 0):

$\epsilon_s = \frac{1}{1+K}$. La vitesse obtenue est différente de la vitesse commandée: l'asservissement de vitesse est imprécis en l'absence de dispositions complémentaires comme un correcteur intégral par exemple.

- Asservissement de position (classe 1):

$\epsilon_s = 0$. Il est intrinsèquement précis.

$\epsilon_v = \frac{1}{K}$ non nul: la sortie suit la consigne avec un retard.

7-3-1-4: Cas des systèmes avec perturbation constante.

Considérons le système suivant:

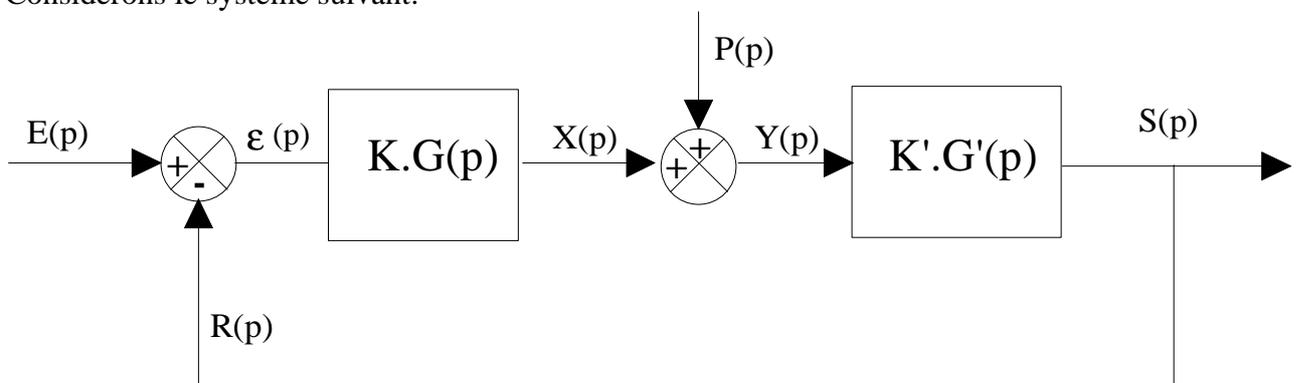


Fig 7-12: Système bouclé avec perturbation.

On peut écrire les relations suivantes:

$$S(p) = K'G'(p)P(p) + K'G'(p)KG(p)\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$$

D'où on tire:

$$\varepsilon(p) = E(p) - K'G'(p)P(p) - K'G'(p)KG(p)\varepsilon(p)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(p)[1 + K'G'(p)KG(p)] = E(p) - K'G'(p)P(p)$$

et finalement:

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + KG(p)K'G'(p)} E(p) - \frac{K'G'(p)}{1 + KG(p)K'G'(p)} P(p) = \varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p)$$

Equation qui avait été établie dans le cas général (retour non unitaire) en (3-29) au § 3-2-5.

L'écart est la somme de deux contributions: une contribution due à l'entrée $E(p)$ et une contribution due à la perturbation $P(p)$. Ceci est dû au fait que le système est linéaire. En annulant la perturbation ($P(p) = 0$), on retrouve bien la valeur de l'écart calculée en 7-3-1.

Considérons la contribution due à la perturbation:

$$\varepsilon_2(p) = \frac{K'G'(p)}{1 + KG(p)K'G'(p)} P(p) = \frac{1}{KG(p) \left[1 + \frac{1}{KG(p)K'G'(p)} \right]} P(p)$$

En posant : $K.G(p) = \frac{K.N(p)}{p^\alpha.D(p)}$ et $K'.G'(p) = \frac{K'.N'(p)}{p^\beta.D'(p)}$

avec: Gain K , classe α , $N(p)$ et $D(p)$ polynômes en p , ordre: $\alpha + \deg(D(p))$ pour $K.G(p)$

Gain K' , classe β , $N'(p)$ et $D'(p)$ polynômes en p , ordre: $\beta + \deg(D'(p))$ pour $K'.G'(p)$

il vient:

$$\varepsilon_2(p) = \frac{1}{\frac{KN(p)}{p^\alpha D(p)} \left[1 + \frac{p^{(\alpha+\beta)} D(p) D'(p)}{KN(p) K' N'(p)} \right]}$$

Cherchons la valeur de l'écart statique dans le cas où la perturbation est constante: $p(t) = P_0$

La transformée de Laplace est: $P(p) = \frac{P_0}{p}$

La valeur de l'écart est obtenue en appliquant le théorème de la valeur finale.

$$\varepsilon_2s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0} [p.\varepsilon_2(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{P_0}{\frac{KN(p)}{p^\alpha D(p)} \left[1 + \frac{p^{(\alpha+\beta)} D(p) D'(p)}{KN(p) K' N'(p)} \right]} \right]$$

$D(p)$, $D'(p)$, $N(p)$ et $N'(p)$ tendent vers 1 lorsque p tend vers 0:

la valeur de l'écart tend donc vers:
$$\lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{P_0}{\frac{K}{p^\alpha} \left[1 + \frac{p^{(\alpha+\beta)}}{KK'} \right]} \right]$$

Si la partie de l'asservissement située en amont de la perturbation ne possède pas d'intégration, alors:

$$\alpha = 0 \text{ et } \varepsilon_2 = \frac{P_0}{K \left[1 + \frac{p^\beta}{KK'} \right]}$$

L'écart tend vers une valeur constante quelle que soit la valeur de β .

Si la partie de l'asservissement située en amont de la perturbation possède au moins une intégration, alors:

$\alpha \geq 1$ et $\varepsilon_2 = 0$ quelle que soit la valeur de β .

La précision ne dépend que de $G(p)$: L'écart dû à la perturbation sera nul si $G(p)$ possède une intégration.

Une perturbation ne provoque pas d'écart statique dans un système bouclé s'il existe une intégration dans la boucle ouverte en amont de cette perturbation.

7-3-2. RAPIDITÉ - BANDE PASSANTE.

Nous avons déjà signalé lors de l'étude des systèmes du premier et du second ordre que ces deux notions sont liées et qu'elles varient ensemble. Ceci se généralise aux systèmes d'ordre supérieur.

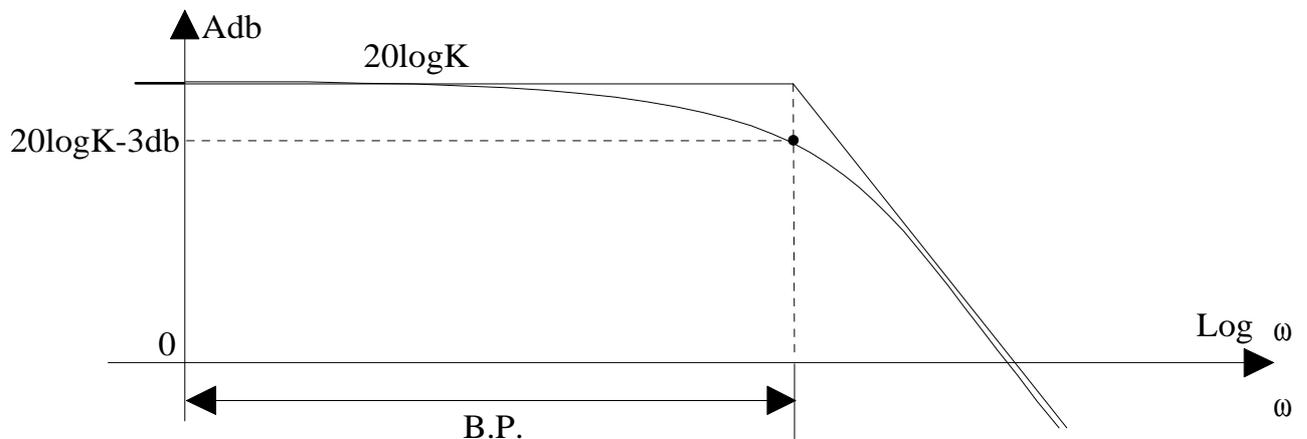


Fig 7-13 : Bande passante à 3dB d'un système bouclé (FTBF).

⚠ ATTENTION: nous parlons ici de systèmes bouclés pour la détermination de la bande passante desquels il faut considérer la réponse en amplitude de la FTBF qui est la fonction de transfert décrivant le comportement du système bouclé (et non celle de la FTBO).

Sur les deux exemples du § 7-1, nous avons constaté que la rapidité augmentait avec le gain de boucle K (on dit que la "raideur" du système augmente). Ceci se généralise aussi aux systèmes d'ordre supérieur.

**La rapidité augmente avec la bande passante.
 La rapidité augmente avec le gain k en boucle ouverte.**

7-3-3. STABILITÉ D'UN SYSTÈME BOUCLÉ.

La notion de stabilité appelle certaines précisions. Nous savons qu'un système du second ordre peut posséder un caractère oscillatoire marqué si son amortissement est très faible. Mais hormis le cas où $z = 0$ (totalement exclu en mécanique!), les oscillations vont diminuer progressivement et la réponse va finir par se stabiliser. En dépit du fait que ce type de réponse soit techniquement inadmissible (la mécanique est malmenée), le système est intrinsèquement stable.

UN SYSTÈME OSCILLANT N'EST PAS NÉCESSAIREMENT INSTABLE.

L'instabilité est un tout autre phénomène causé par le bouclage dans le cas des asservissements, et qui se caractérise par une tendance du système à osciller à amplitude et à fréquence constante quel que soit le signal d'entrée. C'est le POMPAGE appelé ainsi car observé sur des asservissements de débit de réservoir provoquant des oscillations de niveau de forte amplitude.

UN SYSTÈME MÉCANIQUE NON-BOUCLÉ NE PEUT PAS ÊTRE SUJET AU POMPAGE.

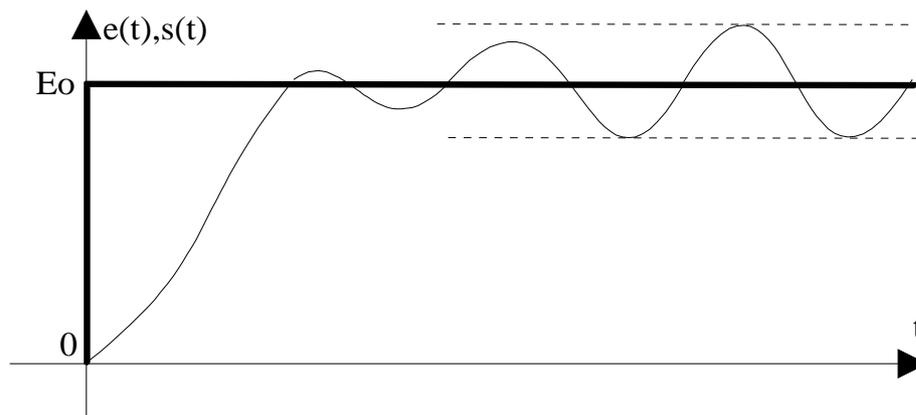


Fig 7-14: Pompage d'un système bouclé soumis à un échelon $e(t) = E_o.u(t)$.

L'instabilité est une propriété intrinsèque au système et indépendante du type d'entrée qui lui est appliquée. On peut faire un parallèle avec un personnage instable-caractériel qui, quel que soit le sujet de la conversation, finira invariablement par se mettre en colère.

L'instabilité est due:

- * à la présence d'une boucle de retour.
- * à des retards dans la chaîne directe.
- * à un gain de boucle élevé.

On peut illustrer le phénomène de pompage en considérant un système en boucle ouverte de gain K_a soumis à un signal rectangulaire d'amplitude E_o et de période P entraînant un retard T de une demi période: $T = P/2$.

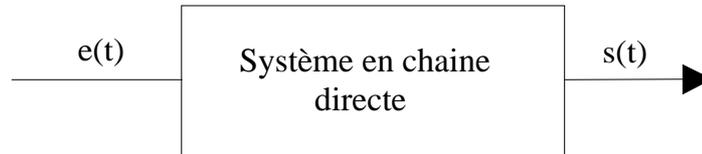


Fig 7-15: Système soumis à une entrée rectangulaire d'amplitude E_o .

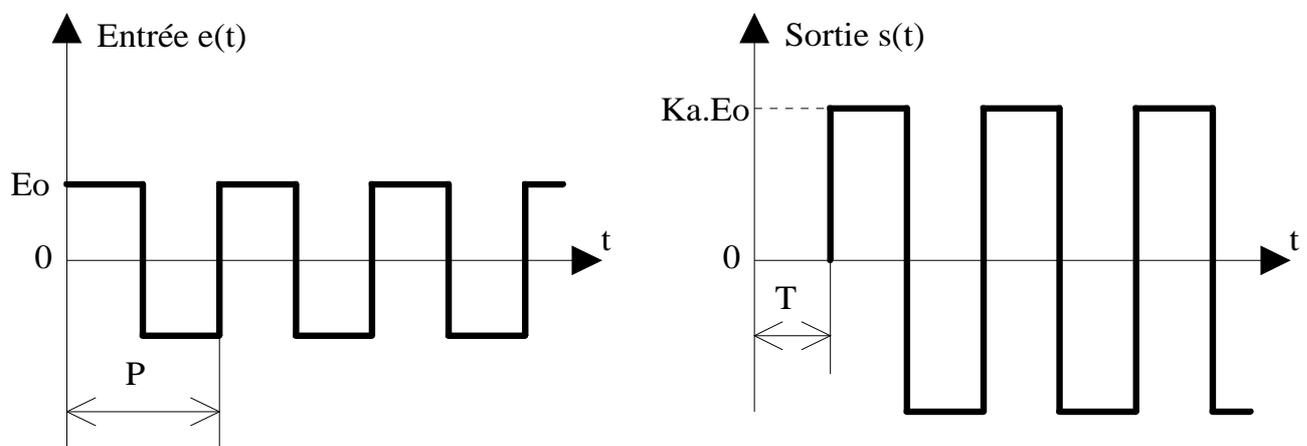


Fig 7-16: Système soumis à une entrée rectangulaire d'amplitude E_o .

La réponse de ce système est stable: il n'y a pas de pompage.

Bouclons ce système par un retour unitaire et soumettons le au même signal rectangulaire $e(t)$.

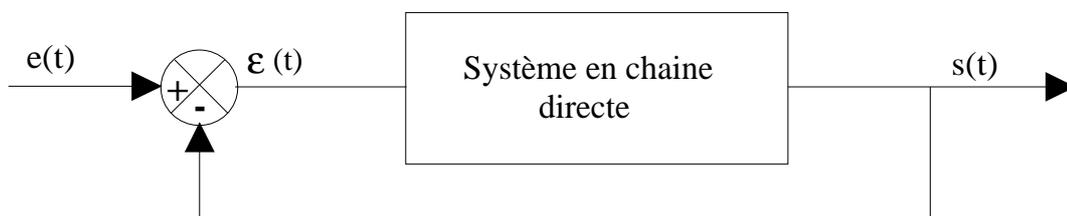


Fig 7-17: Système bouclé soumis à une entrée rectangulaire d'amplitude E_o .

Le système en chaîne directe est maintenant soumis à une entrée $\varepsilon(t)$ qui est la différence entre deux signaux périodiques déphasés de $1/2$ période: $\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$.

Observons l'évolution des différentes grandeurs alternance par alternance.

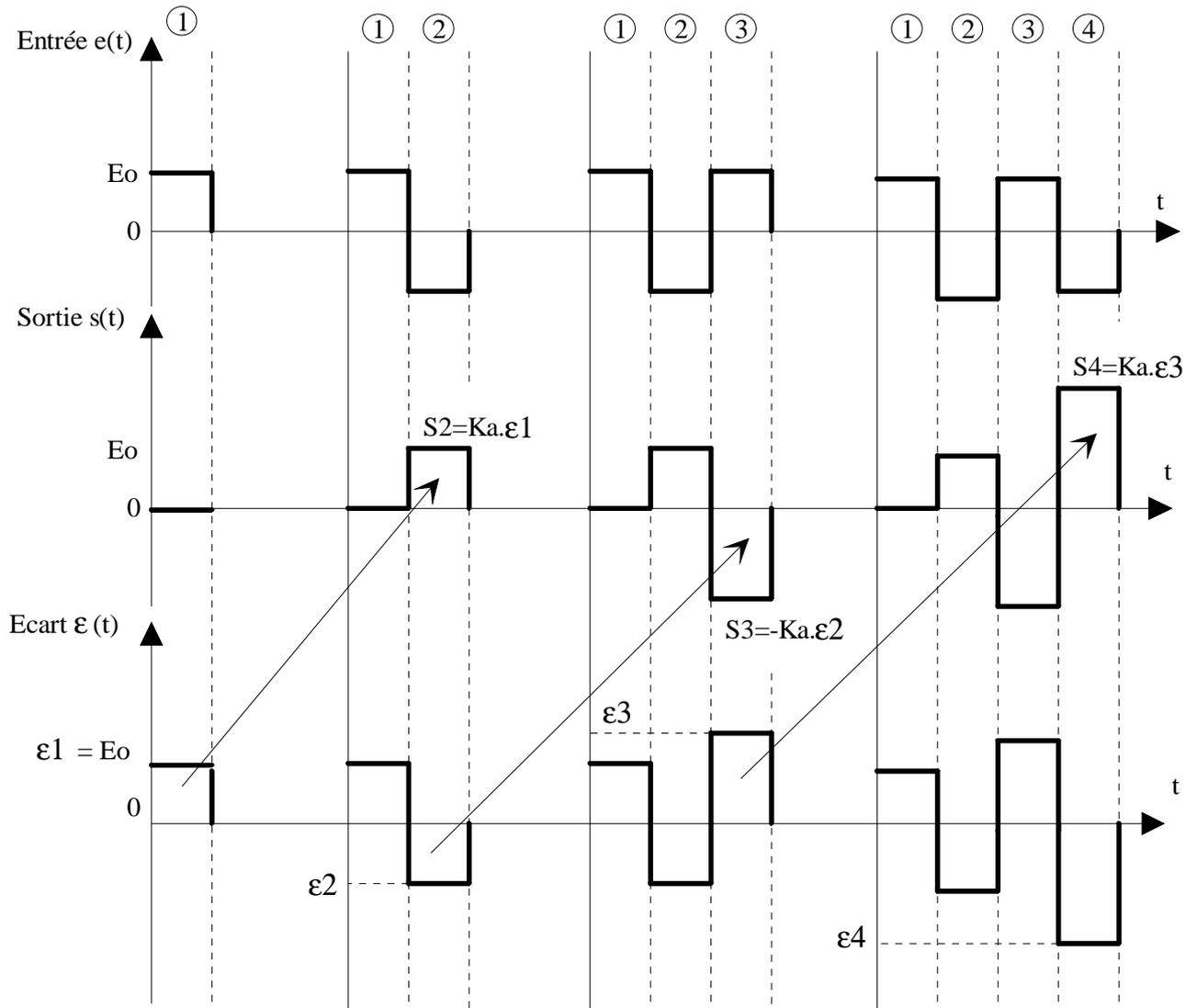


Fig 7-18: Pompage d'un système bouclé soumis à une entrée rectangulaire d'amplitude E_o .

Phase 1: $\varepsilon_1 = E_0$

phase 2: $\varepsilon_2 = -E_0 - S_2 = -E_0 - K_a \cdot \varepsilon_1 = -E_0 - K_a \cdot E_0 = -E_0(1 + K_a)$

phase 3: $\varepsilon_3 = E_0 - S_3 = E_0 + K_a \cdot \varepsilon_2 = E_0 + E_0(1 + K_a) \cdot K_a = E_0(1 + K_a + K_a^2)$

phase 4: $\varepsilon_4 = -E_0 - S_4 = -E_0 - K_a \cdot \varepsilon_3 = -E_0 - E_0(1 + K_a + K_a^2) \cdot K_a = -E_0(1 + K_a + K_a^2 + K_a^3)$

On constate que l'écart tend en valeur absolue vers: $E_o(1 + K_a + K_a^2 + K_a^3 + \dots + K_a^n)$

Cette suite est de la forme $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ qui est convergente ou divergente suivant les

valeurs de x . * si $|x| < 1$ la suite tend vers $\frac{1}{1-x}$

* si $|x| \geq 1$ la suite tend vers ∞

Dans notre cas:

- * Si $|Ka| < 1$, l'amplitude de l'écart tend vers une valeur constante.
- * Si $|Ka| \geq 1$, l'amplitude de l'écart augmente indéfiniment. La sortie suivant l'écart, l'amplitude du signal de sortie va également augmenter indéfiniment. En pratique, les saturations des divers constituants vont limiter l'amplitude en sortie, ce qui explique la forme de la courbe Fig 7-16. Ceci n'empêche pas que le pompage soit inadmissible car la valeur saturée de la sortie (qui change de signe à chaque 1/2 période) est technologiquement insupportable.

On comprend maintenant que le pompage est dû au cumul de trois conditions que l'on peut énoncer dans le cas général:

- * Le système est bouclé.
- * La boucle introduit, à partir d'une certaine fréquence f_0 , un retard de 1/2 période correspondant à un déphasage de -180° (nous savons que le déphasage varie avec la fréquence; voir Bode ou Black).
- * A cette fréquence f_0 , le gain en boucle ouverte est supérieur à 1 (nous savons que le gain en B.O. varie également avec la fréquence).

La règle de stabilité (règle simplifiée quasiment toujours valable) d'un système bouclé s'énonce alors de la manière suivante: Un servomécanisme est stable si le gain en boucle ouverte est inférieur à 1 lorsque le déphasage atteint -180° .

Une première conclusion vient rapidement à l'esprit: Un système doit provoquer un déphasage supérieur à 180° pour être éventuellement instable. Les systèmes déphasant de moins de 180° sur l'étendue du spectre de fréquences ne peuvent pas être instables. C'est le cas des systèmes du premier ordre qui déphasent de -90° au maximum, et des systèmes du second ordre qui déphasent de -180° au maximum, cette valeur de déphasage n'étant obtenue que pour une fréquence infinie!

Les systèmes du premier et du second ordre sont intrinsèquement stables.

REMARQUE: Ceci n'est vrai qu'en théorie pour les systèmes du second ordre. En effet, lors de la modélisation et pour alléger les calculs, on néglige souvent des retards, même faibles: le système réel est alors d'un ordre supérieur à deux et sa stabilité n'est pas garantie.

Une seconde conclusion apparaît également: si l'on augmente suffisamment le gain d'un système déphasant de plus de 180° (cas général pour les servomécanismes réels), on provoque l'instabilité.

Pour un servomécanisme, une augmentation trop importante du gain provoque l'instabilité.

On voit que l'augmentation du gain de boucle d'un système qui est recherchée pour améliorer la précision et la rapidité sera limitée par l'apparition de l'instabilité. Ainsi, le réglage du gain sera une affaire de compromis, comme d'habitude en technologie !

La condition de stabilité est très simple à visualiser sur un diagramme de Bode. On trace la réponse fréquentielle en boucle ouverte, on détermine ensuite la pulsation ω_c de coupure à 0dB et on regarde la valeur du déphasage pour cette pulsation (La pulsation de coupure à 0dB est la pulsation pour laquelle le gain du système est égal à 1; le gain en dB est alors $20\log(1) = 0$). Si le déphasage est inférieur à 180° , le système est stable en boucle fermée, si le déphasage est supérieur à 180° le système est instable en boucle fermée.



Il ne faut pas confondre la pulsation de coupure en boucle ouverte utilisée pour déterminer la stabilité absolue avec la fréquence de coupure à 3dB en boucle fermée qui caractérise la bande passante du système.

Les deux figures suivantes illustrent, sur un diagramme de Bode, le cas d'un système stable (Fig7-19) et le cas d'un système instable (Fig 7-20)

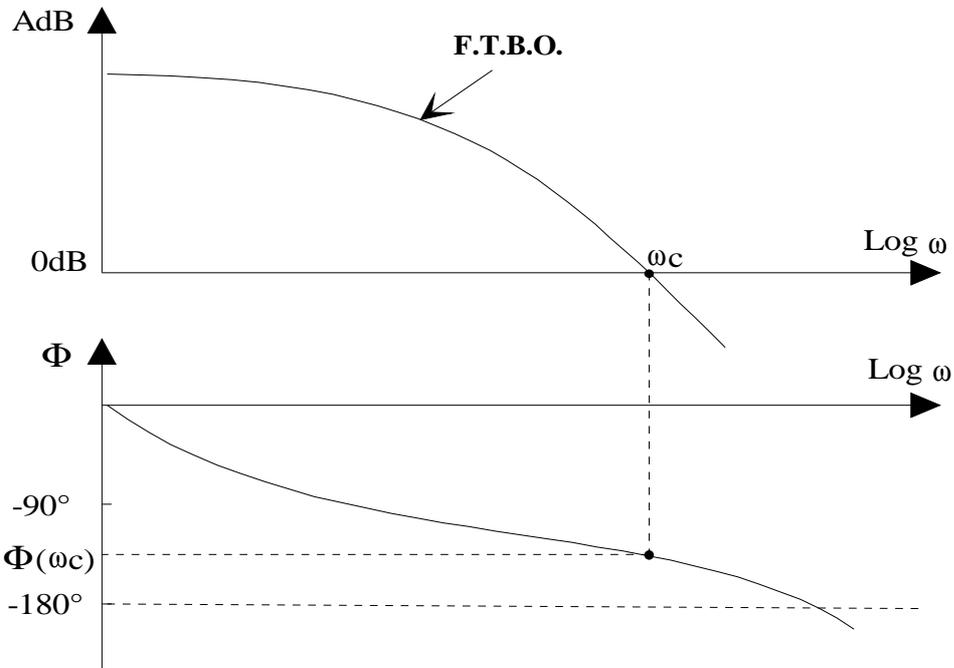


Fig 7-19: Système stable en boucle fermée.

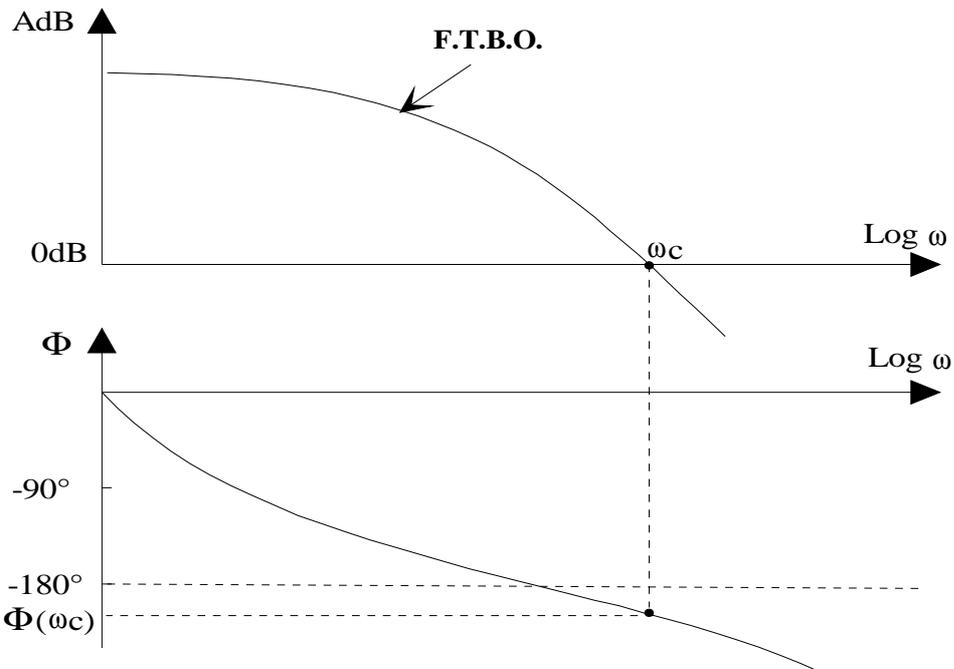


Fig 7-20: Système instable en boucle fermée.

Exemples sur le diagramme de Black.

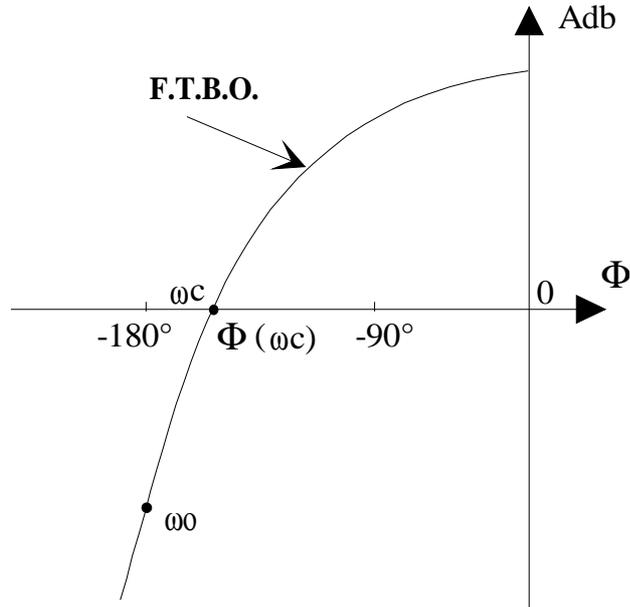


Fig 7-21: Système stable en boucle fermée.

On remarque, pour ce système stable, qu'une augmentation du gain de boucle (qui provoque une translation verticale de la courbe vers le haut) va amener le point de pulsation ω_c sur l'axe horizontal. On aura alors un gain égal à 1 pour un déphasage de -180° : le système est devenu instable.

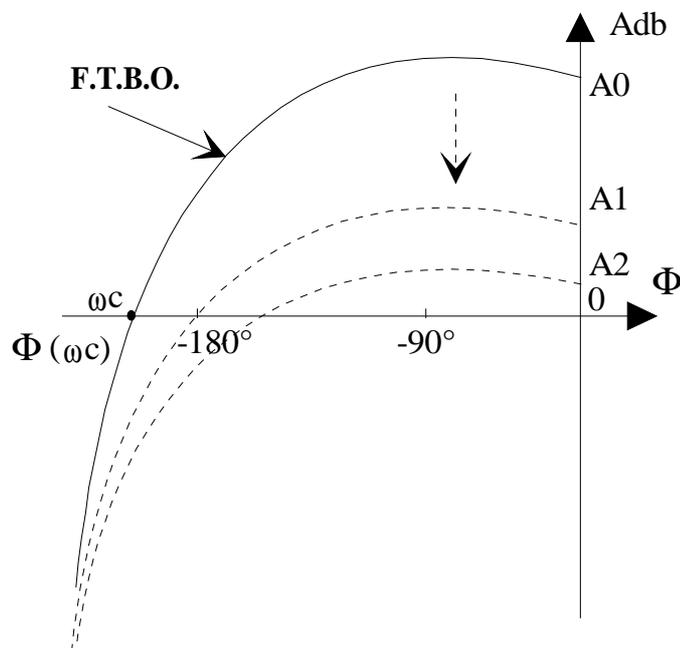


Fig 7-22: Système instable en boucle fermée.

On peut formuler la remarque inverse: en diminuant le gain de ce système instable (translation verticale de la courbe vers le bas: gain $A_2 < A_1 < A_0$), le point de fréquence ω_c va se déplacer sur l'axe horizontal (courbes en pointillés) et passer à droite du point de déphasage -180° : Pour un gain A_1 , le système est "limite" et pour un gain A_2 , le système est stable.

Cas d'un système soumis à une perturbation.

On peut également observer le pompage dans un cas très intéressant qui est celui d'un système soumis à une perturbation. Considérons un système simplifié provoquant un retard $P/2$ dans la première partie de la chaîne directe:

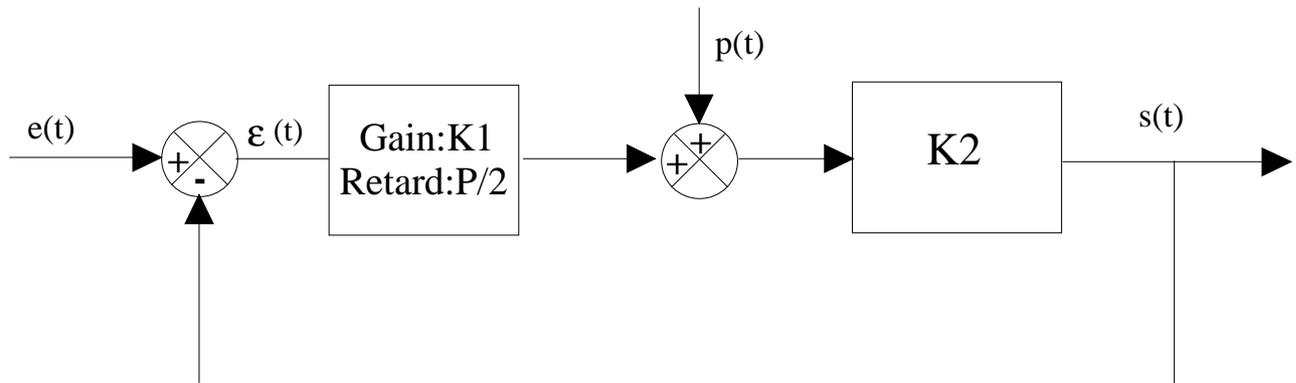


Fig 7-23: Système avec perturbation.

Plaçons nous dans le cas où le système est au repos ($s(t) = 0$ et $e(t) = 0$) et soumettons-le à une perturbation d'amplitude P_0 et de durée $P/2$ (signal que l'on peut considérer comme périodique de période P).

L'évolution des grandeurs est représentée demi-période par demi-période sur la figure 7-26.

Phase 0: système au repos: toutes les grandeurs sont nulles.

Phase 1: apparition de la perturbation $p(t) = P_0$. Le bloc de gain K_2 n'induit pas de retard, en conséquence de quoi la sortie $s(t)$ recopie immédiatement la perturbation avec un gain K_2 :
 $S_1 = K_2.P_0$. Dans le même temps, le retour (unitaire et de retard nul) génère un écart
 $\epsilon_1 = -S_1 = -K_2.P_0$

phase 2: L'écart est retardé de $P/2$ par le bloc de gain K_1 : on a $S_2 = K_1.\epsilon_1 = -K_1K_2^2 P_0$ et
 $\epsilon_2 = -S_2 = -K_1K_2^2 P_0$

phase 3: on a $S_3 = K_1.\epsilon_2 = -K_1^2 K_2^3 P_0$ et $\epsilon_3 = -S_3 = -K_1^2 K_2^3 P_0$

On constate que l'écart tend en valeur absolue vers: $K_1^n K_2^{n+1} P_0 = K_2(K_1K_2)^n P_0 = K_2K^n P_0$
avec K : gain de boucle ouverte = K_1K_2

La conclusion est la même que précédemment: si le gain de boucle K est supérieur à 1, l'écart tend théoriquement vers l'infini (et pratiquement vers l'amplitude de pompage). Dans le cas contraire, l'écart tend vers zéro d'autant plus vite que le gain est faible.

UNE PERTURBATION, MEME D'AMPLITUDE MINIME ET DE DUREE FAIBLE, PEUT PROVOQUER LA MISE EN INSTABILITE D'UN SYSTEME ASSERVI.

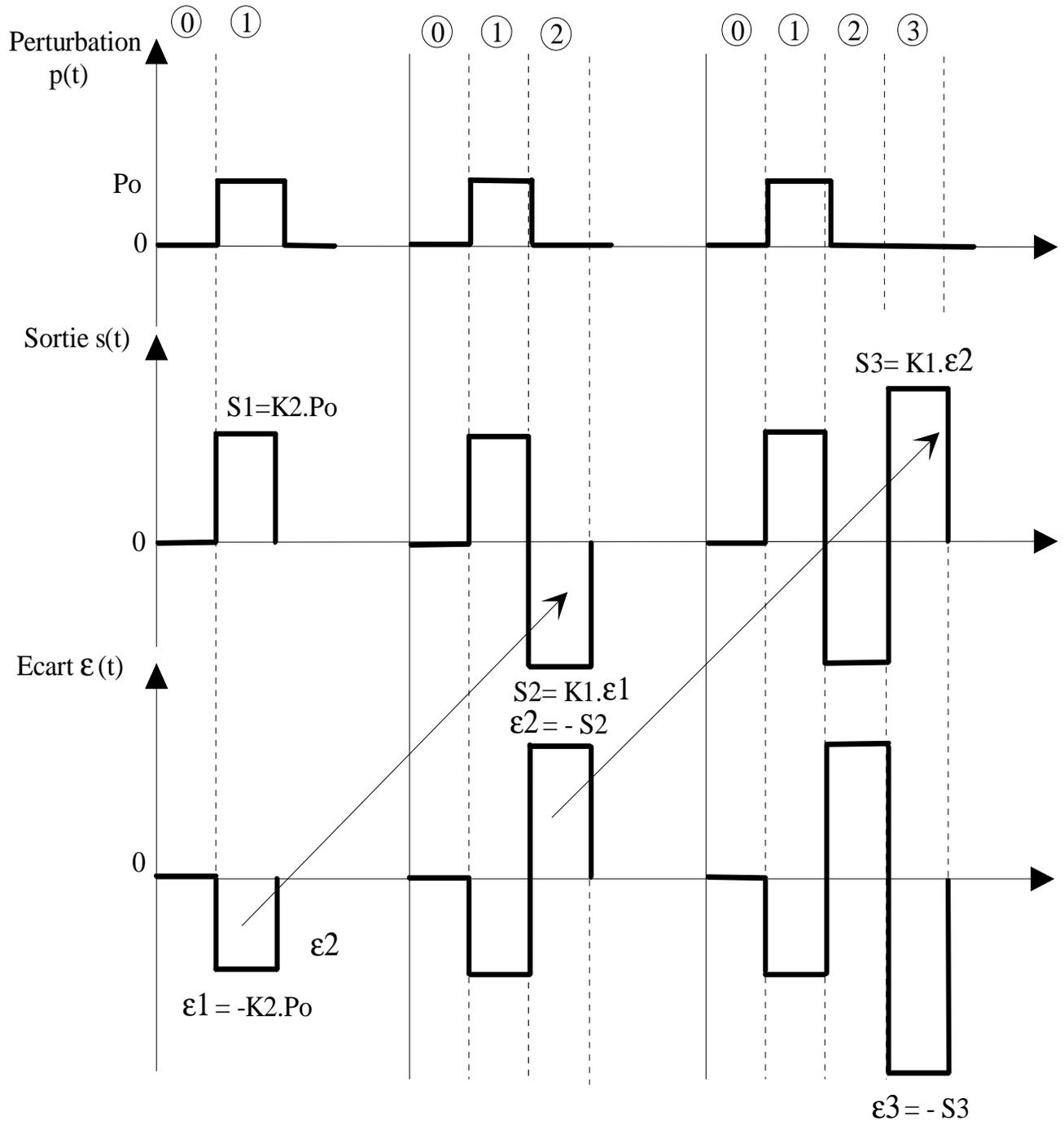


Fig 7-24: Pompage d'un système avec perturbation.

La perturbation peut se présenter, en pratique, sous diverses formes suivant le type d'asservissement.

Pour un asservissement de position, la perturbation peut être un déplacement du solide asservi provoqué par une cause externe. Pour un asservissement de vitesse, la perturbation peut être une variation brutale du couple ou de l'effort à fournir.

7-3-4. CRITÈRES DE STABILITÉ D'UN SYSTÈME BOUCLÉ.

7-3-4-1 Définition.

Un système est stable si, écarté de sa position d'origine, il tend à y revenir.

Dans le cas inverse, il est instable. On peut interpréter "écarté de sa position d'origine" comme une perturbation. On considère parfois une autre définition: un système est stable si, à une entrée bornée, il répond par une sortie bornée. Il est dit stable BIBO (Bounded Input Bouded Output). Cette dernière définition est mal adaptée aux servomécanismes dont la sortie est bornée lorsqu'ils pompent, car ils passent en régime non linéaire (saturation entre autres) et la théorie linéaire est à ce moment mise en défaut. Pratiquement, on utilisera les deux critères suivants:

7-3-4-2 Critère algébrique (règle de Routh).

La condition mathématique de stabilité est la suivante :

Un système linéaire de fonction de transfert $G(p)$ est stable si les pôles de $G(p)$ possèdent tous une partie réelle négative.

Le critère de Routh, appliqué à l'équation caractéristique de la fonction de transfert, permet de déterminer si les racines de cette équation (qui sont les pôles de la F.T.) ont leur partie réelle négative sans avoir à résoudre l'équation. Pour la mise en oeuvre du critère de Routh, se reporter au chapitre suivant.

7-3-4-3 Critère graphique.

Critère simplifié de stabilité : Une commande linéaire en boucle fermée est stable si le gain de la FTBO est inférieur à 1 (0dB) lorsque la phase vaut -180° . On définit la pulsation critique ω_0 telle que $\phi(\omega) = -180^\circ$. La condition de stabilité s'écrit alors : $A(\omega) \leq 1$.

A partir de cette propriété, nous déduisons que les systèmes d'ordre inférieur à 3 sont toujours stables car leur déphasage maximum n'atteint jamais -180° . Ceci n'est qu'une propriété théorique : en réalité, des retards ont été négligés lors de la modélisation (retards que l'on peut assimiler à des constantes de temps s'ils sont faibles) et le système réel est d'ordre supérieur donc susceptible de devenir instable.

Le système est stable en boucle fermée si, en parcourant le lieu de Black de la FTBO dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique à sa droite.



ATTENTION: pour le critère graphique, on considère la FTBO et non la FTBF.

7-3-5. TABLEAU DE SYNTHÈSE.

Le tableau page suivante présente une synthèse des propriétés des systèmes du premier, du second et du troisième ordre couramment rencontrés. On s'est placé dans le cas d'un retour unitaire.

Modèle en boucle ouverte	Premier ordre	Second ordre	Second ordre avec intégration	Troisième ordre avec intégration
Type d'asservissement	Vitesse	Vitesse	Position	Position
F.T.B.O. : $K.G(p)$	$\frac{K}{1+T'p}$	$\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n^2}p^2}$	$\frac{K}{p(1+T'p)}$	$\frac{K}{p\left(1+\frac{2z}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n^2}p^2\right)}$
F.T.B.F. : $\frac{K.G(p)}{1+K.G(p)}$ (retour unitaire)	$\frac{K'}{1+T'p}$	$\frac{K'}{1+\frac{2z'}{\omega_n'}p+\frac{1}{\omega_n'^2}p^2}$	$\frac{1}{1+\frac{2z}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n^2}p^2}$	$\frac{1}{1+\frac{1}{K}p+\frac{2z}{K\omega_n}p^2+\frac{1}{K\omega_n^2}p^3}$
Ecart statique ε_s	$\frac{1}{1+K}$	$\frac{1}{1+K}$	0	0
Ecart dynamique ε_v	∞	∞	$\frac{1}{K}$	$\frac{1}{K}$
Stabilité	Stable	Stable	Stable	Stable si: $K < 2z\omega_n$
Gain statique K' en B.F.	$\frac{K'}{1+K}$	$\frac{K'}{1+K}$	1	1
Pulsation de coupure à 3 dB	$\frac{1}{T} = \frac{1+K}{T}$	$\omega_n' \sqrt{1-2z'^2} + \sqrt{1+(1-2z'^2)}$	$\omega_n \sqrt{1-2z^2} + \sqrt{1+(1-2z^2)}$	Augmente avec K
Résonance	Non	Oui: $\omega_r = \omega_n' \sqrt{1-2z'^2}$	Oui: $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2z^2}$	Oui

Chapitre 8

REGLAGE DU GAIN DES SYSTEMES ASSERVIS.

Nous avons vu au chapitre précédent qu'il fallait :

- augmenter le gain pour accroître la rapidité et la précision.
- ne pas dépasser une certaine valeur du gain pour éviter l'instabilité (systèmes d'ordre >2).

Le réglage d'un servomécanisme va consister à chercher le meilleur compromis entre les performances : c'est le dilemme stabilité-précision. D'autre part, la modélisation des systèmes n'étant jamais parfaite, il sera nécessaire de prendre une marge de sécurité ; en d'autres termes, on ne réglera pas un système à la limite de la stabilité théorique, la stabilité pratique n'étant alors plus garantie si l'on a négligé dans le modèle théorique (ce qui est toujours le cas !) un facteur déstabilisant comme un retard, par exemple.

8-1. CRITERES PRATIQUES DE STABILITE.

8-1-1. Critère de Routh.

Le critère de Routh vérifie si la définition fondamentale de la stabilité (voir chapitre précédent) est vraie :

Un système linéaire de fonction de transfert $G(p)$ est stable si les pôles de $G(p)$ sont à partie réelle négative.

* Seul le dénominateur (polynôme caractéristique) est concerné, les pôles de la fonction de transfert étant ses zéros.

* Dans le cas d'un système bouclé, on considérera la FTBF. Le polynôme caractéristique est alors $D(p) = 1 + FTBO(p)$

Cette définition s'interprète facilement : la fonction de transfert peut s'écrire : $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ fraction rationnelle en p . La réponse de ce système à un échelon unitaire s'obtient en effectuant la décomposition en éléments simples de $\frac{G(p)}{p} = \frac{N(p)}{p \cdot D(p)}$. Cette décomposition donne des termes correspondant à une racine réelle comme $\frac{1}{1+Tp}$ et/ou des termes correspondant à deux racines complexes conjuguées comme $\frac{1}{(p+a)^2 + \omega^2}$ (voir outils mathématiques § 5)

La réponse, obtenue par transformation inverse de Laplace, est de la forme $\frac{1}{T} e^{\frac{-t}{T}}$ dans le premier cas et de la forme $e^{-at} \cos \omega t$ dans le second cas. Ces termes sont convergents si $(-1/T)$ racine réelle et $(-a)$ partie réelle de la racine complexe sont négatives. Dans le cas contraire les exponentielles divergent et la réponse du système à une entrée en échelon (donc bornée) tend vers l'infini : le système est instable.

La méthode de Routh permet de déterminer si les racines d'un polynôme sont positives. Appliquée à l'équation caractéristique d'une fonction de transfert, elle permet la vérification de la stabilité théorique

Considérons un polynôme $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$

On forme le tableau suivant à $(n+1)$ lignes (cas où n est pair) : La colonne encadrée est dite colonne des pivots.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_2	a_0
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_1	
p^{n-2}	b_1	b_2	b_3		
p^{n-3}	c_1	c_2			
....				
....				
$p^1 = p$					
$p^0 = 1$					

avec: $b_1 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$ $b_2 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$ $c_1 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ etc.

Critère de Routh :

- 1) Le système est stable si tous les termes de la colonne des pivots sont positifs
- 2) Il y a autant de racines à partie réelle positive que de changements de signe dans la colonne des pivots.
- 3) Une ligne de zéros indique l'existence de racines conjuguées imaginaires pures

Exemple 1 : $G(p) = \frac{K}{(p^3 + 6p^2 + 11p + 6)}$

On va considérer le polynôme $D(p) = p^3 + 6p^2 + 11p + 6$ pour construire le tableau de Routh.

p^3	1	11
p^2	6	6
p	10	0
1	6	0

$b_1 = \frac{-1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = -\frac{(6-66)}{6} = 10$ $c_1 = \frac{-1}{10} \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{(0-60)}{10} = 6$

Les termes de la colonne des pivots sont tous positifs : le système est stable.

On peut vérifier que $D(p) = p^3 + 6p^2 + 11p + 6 = (p+3)(p+2)(p+1)$ dont les racines sont réelles et toutes négatives : -3, -2 et -1

Exemple 2 : $G(p) = \frac{K}{(p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 6p + 4)}$

On va considérer le polynôme $D(p) = p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 6p + 4$ pour construire le tableau de Routh.

p^4	1	4	4
p^3	3	6	0
p^2	2	4	
p	0	0	
1	2	0	
	4		

$$b_1 = \frac{-1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \quad b_2 = \frac{-1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad c_1 = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad c_2 = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

On obtient une ligne de zéros correspondant à des racines complexes imaginaires pures, ce qui interdit la poursuite du tableau. Il faut remplacer la ligne de zéros par une ligne contenant les coefficients obtenus à partir du polynôme dérivé de la ligne précédente et continuer normalement le remplissage du tableau :

Ligne précédente : $p^2 + 4$
 polynôme dérivé : $2p$
 ligne de remplacement : $2 \quad 0$

$$d_1 = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{Les termes de la colonne des pivots sont tous positifs et le système est stable.}$$

On vérifie que $D(p)$ possède deux racines réelles négatives -1 et -2 et deux racines complexes conjuguées imaginaires pures (parties réelles nulles) $j\sqrt{2}$ et $-j\sqrt{2}$

$$D(p) = p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 6p + 4 = (p^2 + 2)(p+1)(p+2) = (p + j\sqrt{2})(p - j\sqrt{2})(p+1)(p+2)$$

Exemple 3 : $G(p) = \frac{K}{(p^4 + p^3 + 2p^2 + 3p + 1)}$

On va considérer le polynôme $D(p) = p^4 + p^3 + 2p^2 + 3p + 1$ pour construire le tableau de Routh.

p^4	1	2	1
p^3	1	3	0
p^2	-1	1	
p	4	0	
1	1		

$$b_1 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \quad b_2 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad c_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad c_2 = \frac{-1}{4} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Il y a deux changements de signe dans la colonne des pivots ce qui correspond à deux racines à partie réelle positive : le système est instable.

Cet exemple montre que la condition "tous les coefficients du polynôme sont positifs" est nécessaire mais non suffisante pour affirmer que le système est stable. Cette condition n'est suffisante que dans le cas des systèmes du premier et du second ordre.

Exemple 4 : Système paramétré. On considère un système de FTBO $H(p) = \frac{K}{p \left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)}$

dont on veut étudier la stabilité dans le cas général. La FTBF s'écrit (retour unitaire)

$$G(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{K} p + \frac{2z}{K\omega_n} p^2 + \frac{1}{K\omega_n^2} p^3 \right)}$$

Le tableau de Routh est le suivant :

p^3	$\frac{1}{K\omega_n^2}$	$\frac{1}{K}$
p^2	$\frac{2z}{K\omega_n}$	1
p	$\frac{2z\omega_n - K}{2zK^2\omega_n^2}$	0
1	1	0

$$b_1 = \frac{-K\omega_n}{2z} \begin{vmatrix} \frac{1}{K\omega_n^2} & \frac{1}{K} \\ \frac{2z}{K\omega_n} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2z}{K\omega_n} \left[\frac{1}{K\omega_n^2} - \frac{2z}{K\omega_n} \right] = \frac{2z\omega_n - K}{2zK^2\omega_n^2} \quad c_1 = -\frac{2zK^2\omega_n^2}{2z\omega_n - K} \begin{vmatrix} \frac{2z}{K\omega_n} & 1 \\ \frac{2z\omega_n - K}{2zK^2\omega_n^2} & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Pour que le système soit stable, il faut et il suffit que tous les termes de la colonne des pivots soient positifs (les coefficients K, z, ω_n sont positifs ou nuls). Les termes des lignes 1, 2 et 4 sont inconditionnellement positifs. Le terme de la ligne 3 sera positif si $2z\omega_n - K > 0$.

On retrouve bien la condition de stabilité absolue : $K < 2z\omega_n$ pour un système du troisième ordre avec intégration (voir tableau de synthèse, chapitre précédent)

EN CONCLUSION SUR LE CRITERE DE ROUTH :

- avantages: * Ce critère permet de discuter de la stabilité d'un système en fonction de la variation de ses paramètres.
- Inconvénients : * Les calculs deviennent vite complexes dès que l'ordre de la fonction de transfert est important.
 * Il est nécessaire de connaître explicitement la fonction de transfert du système.
 * Ce critère ne permet pas le réglage (stabilité absolue théorique).

8-1-2. Critères graphiques.

Critère simplifié de stabilité : Une commande linéaire en boucle fermée est stable si le gain de la FTBO est inférieur à 1 (0dB) lorsque la phase vaut -180° . On définit la pulsation critique ω telle que $\phi(\omega) = -180^\circ$. La condition de stabilité s'écrit alors : $A(\omega) \leq 1$.

A partir de cette propriété, nous avons vu au chapitre précédent que les systèmes d'ordre inférieur à 3 sont toujours stables car leur déphasage maximum n'atteint jamais -180° . Ceci n'est qu'une propriété théorique : en réalité, des retards ont été négligés lors de la modélisation (retards que l'on peut assimiler à des constantes de temps s'ils sont faibles) et le système réel est d'ordre supérieur donc susceptible de devenir instable (voir § 6-1).

8-1-2-1. Marge de gain.

Comme nous venons de le dire, et pour tenir compte de variations imprévues dans le comportement du système, il faudra rester suffisamment à l'écart de la limite de stabilité. On définit alors la marge de gain comme étant la valeur du gain, prise en valeur absolue, pour la pulsation critique. Cette marge est comprise, suivant les applications, entre 6 et 15 dB (valeur courante : 10dB).

La figure 8-1 montre un exemple de réglage du gain avec une marge de 6dB sur un diagramme de Bode. La FTBO de gain statique A_{lim} est à la limite de l'instabilité. En translatant de 6dB vers le bas cette FTBO sur le diagramme de gain, on obtient une nouvelle valeur du gain statique $A_0 < A_{lim}$.

$A_0 = A_{lim} - 6dB$. Le système sera réglé de telle manière que son gain statique en boucle ouverte soit égal à A_0dB . Le gain de boucle pourra maintenant varier de 6dB (c'est à dire 100%) sans que l'on risque l'instabilité.

remarque: la translation de la FTBO sur le diagramme de gain n'affecte pas la courbe de phase car le déphasage dépend uniquement de la pulsation.

8-1-2-2. Marge de phase.

On peut également définir une marge de phase qui, de la même manière que la marge de gain, éloigne la courbe du point critique. La marge de phase est la différence entre 180° et la valeur du déphasage pour la pulsation critique. Cette marge est comprise entre 45° et 50° dans les applications courantes. La figure 8-2 montre un exemple de réglage avec marge de phase de 45° . Pour un système régulier du troisième ordre par exemple, l'emploi de la marge de gain ou de la marge de phase donne dans les deux cas des valeurs proches de la valeur de réglage du gain statique (A_0dB dans notre cas).

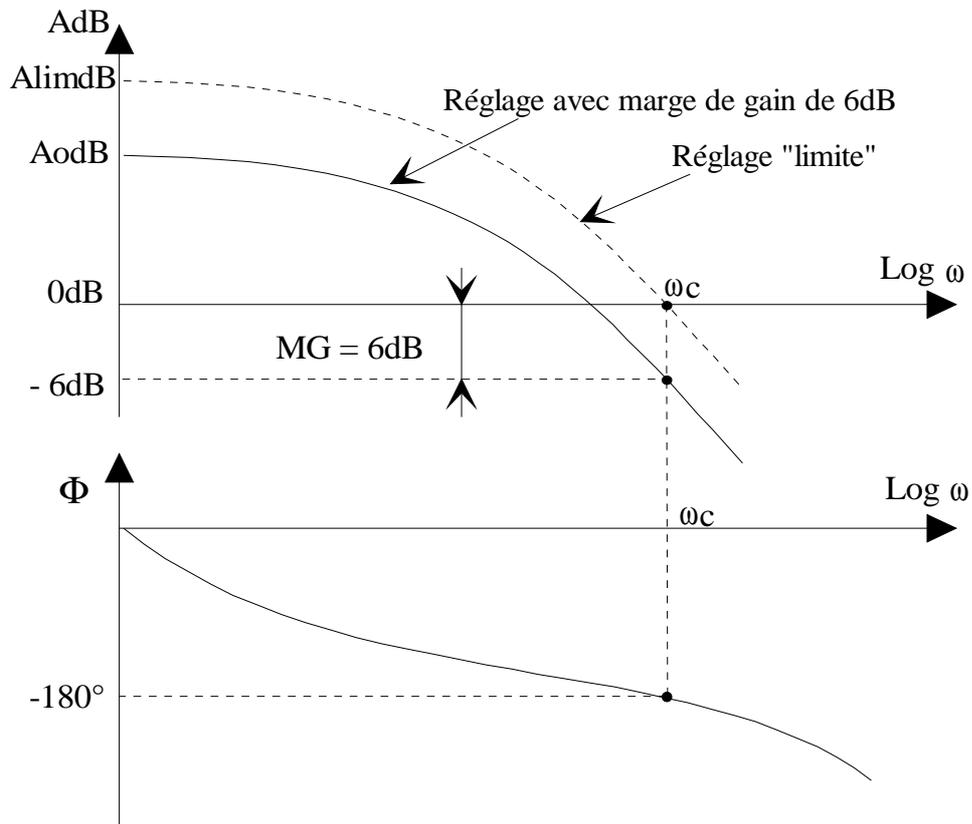


Fig. 8-1 : Marge de gain de 6dB.

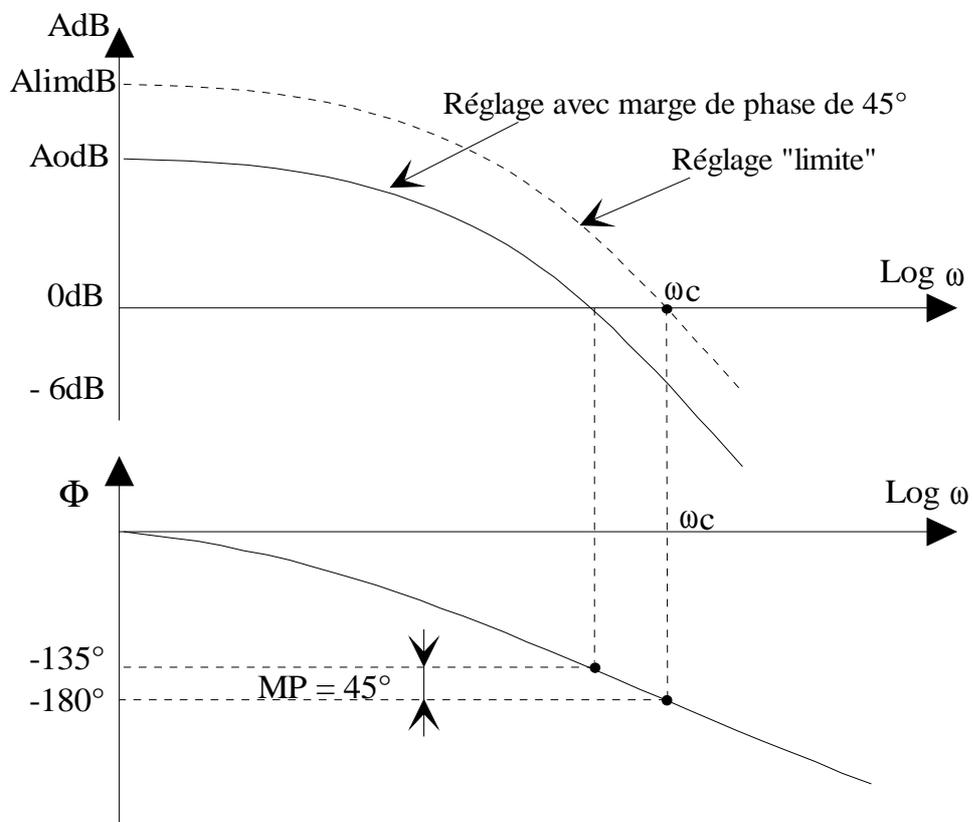


Fig. 8-2 : Marge de phase de 45°.

8-1-3. Réglage d'un système asservi.

Trois cas peuvent se présenter :

Cas 1 : le système est stable mais lent et peu précis. On augmente le gain jusqu'à l'obtention de la marge de phase ou de la marge de gain désirée : les performances augmentent et deviennent satisfaisantes.

Cas 2 : le système est rapide et précis mais instable. On diminue le gain jusqu'à l'obtention de la marge de phase ou de la marge de gain désirée : malgré leur diminution, les performances restent satisfaisantes.

Cas 3 : Après réglage du gain permettant l'obtention de la stabilité, les performances sont insuffisantes, soit qu'elles n'aient pas assez augmenté en partant du cas 1, soit qu'elles aient trop diminué en partant du cas 2. Il faudra prendre des dispositions complémentaires (ajouter un correcteur, modifier la structure de l'asservissement, etc.) que nous étudierons plus loin.

8-2. REGLAGE DU GAIN DANS LE PLAN DE BLACK.

8-2-1. Mode opératoire.

Cette méthode est très répandue (en particulier dans les sujets de concours...) et elle doit être bien maîtrisée, d'autant plus qu'elle est simple à mettre en œuvre. Elle nécessite l'utilisation d'un abaque appelé abaque de Black qui réalise graphiquement la transformation FTBO vers FTBF.

Considérons un système à retour unitaire :

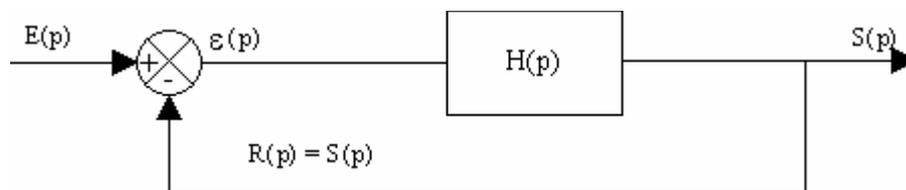


Fig. 8-3 : Système à retour unitaire.

La FTBO de ce système est $H(p)$.

Sa FTBF est : $G(p) = \frac{H(p)}{1+H(p)}$

Dans le cas d'un système à retour unitaire, le passage FTBO vers FTBF est donc une transformation du type : $u \rightarrow \frac{u}{1+u}$

L'abaque de Black (voir Fig. 8-4) réalise graphiquement cette transformation. Pour chaque point M de la FTBO tracée sur cet abaque (point donnant un gain et un déphasage pour une pulsation donnée), on pourra lire le gain et le déphasage correspondants de la FTBF sur les réseaux de courbes (voir exemple Fig. 8-5).

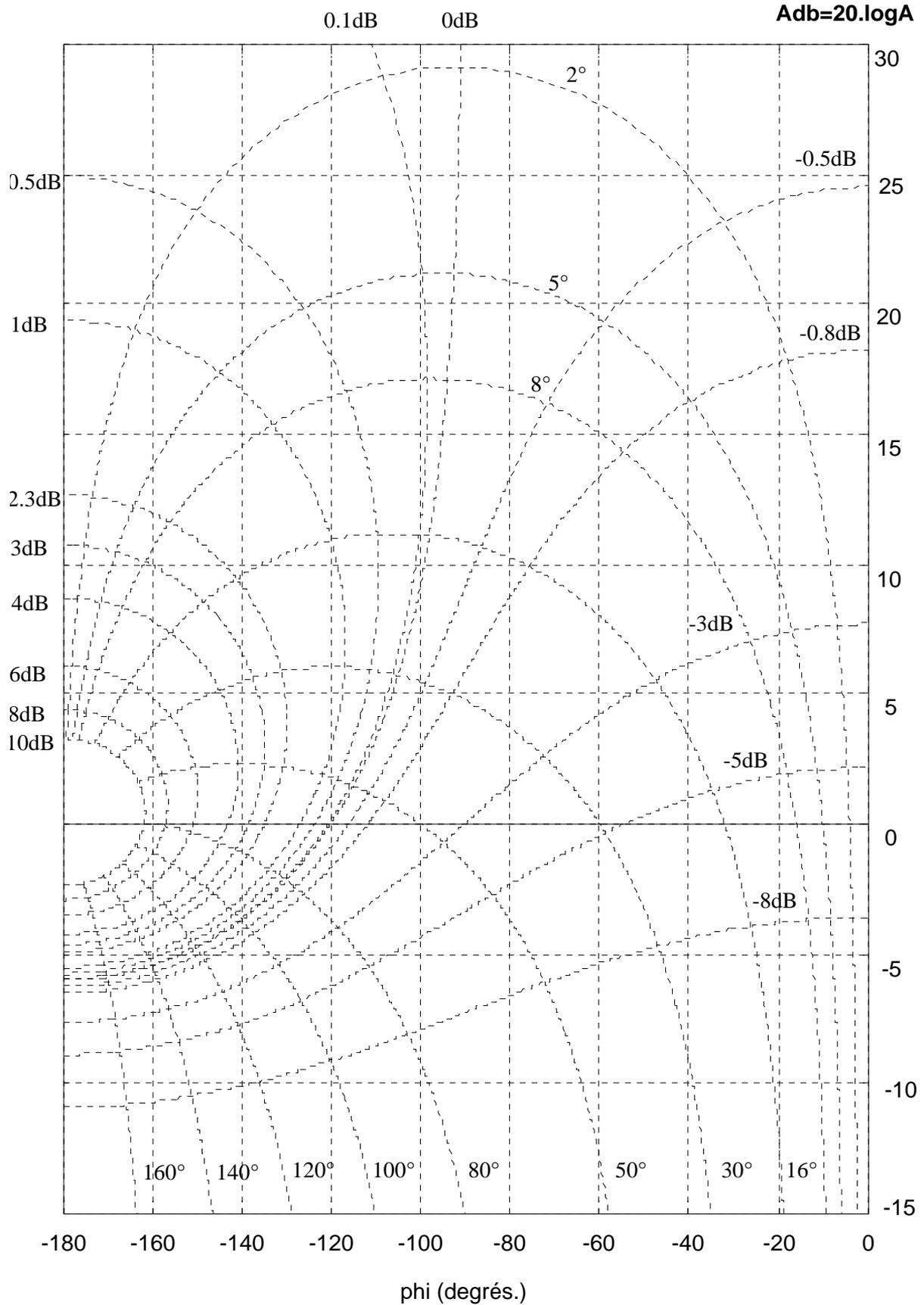


Fig. 8-4 : Abaque de Black.

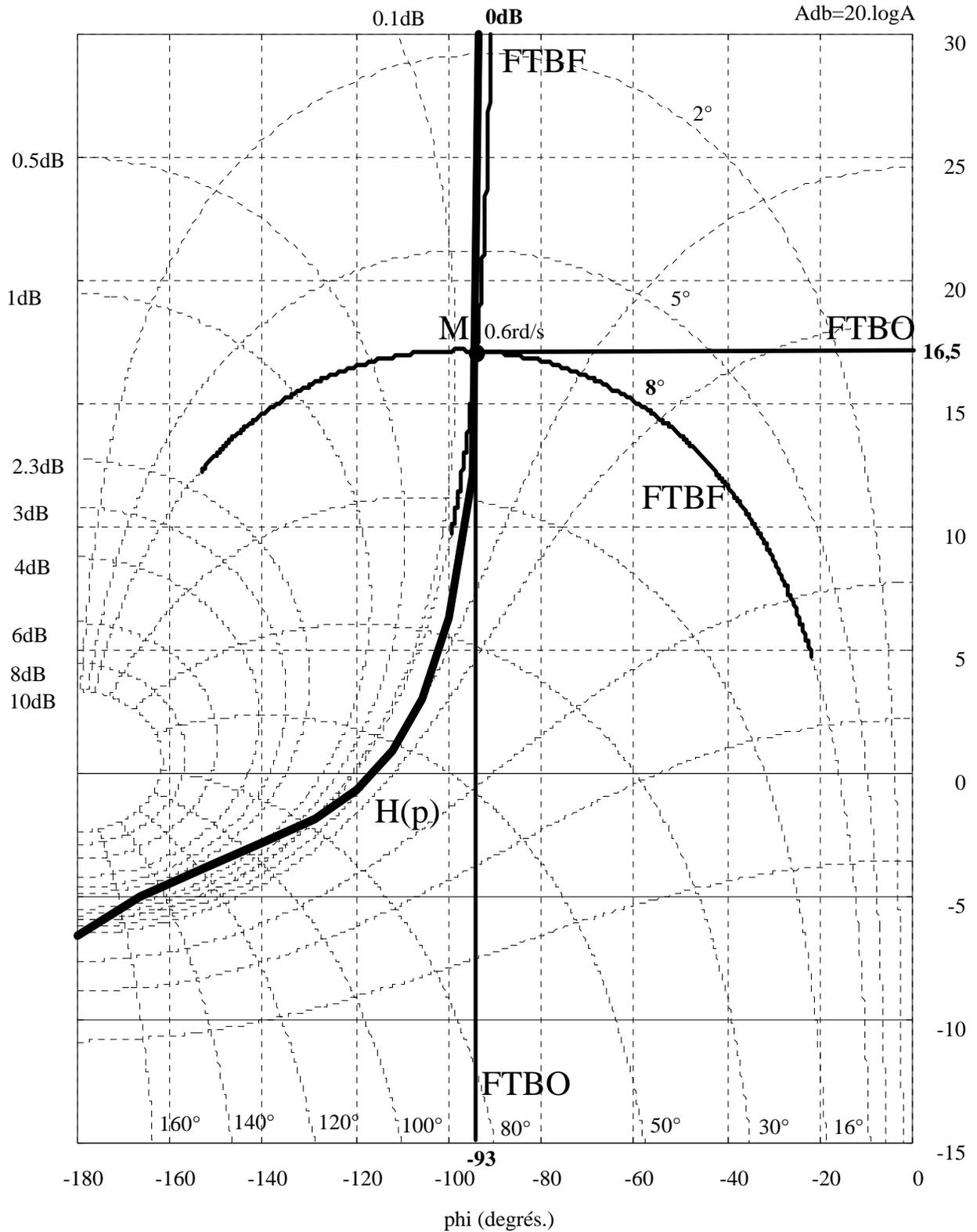


Fig. 8-5 : Passage de $FTBO(p) = \frac{2}{p(1+0.1p)(p+0.2p)}$ vers FTBF(p) sur l'abaque de Black.

Exemple: pour le point M de pulsation 0.6rad/s, on lit : 16.5 dB et -93° en Boucle ouverte H(p)
0dB et -8° en Boucle fermée G(p).

On se donne le critère de stabilité suivant : En considérant qu'un système d'ordre quelconque se comporte, en première analyse, comme un système du second ordre, on appliquera alors un critère de performances satisfaisant pour un second ordre. Nous avons déjà noté en 5-4-2 qu'un réglage courant en avant projet consistait à choisir un coefficient d'amortissement $z = 0.43$ correspondant à un coefficient de surtension $Q = 1.3$. Le coefficient de surtension est le rapport entre l'amplitude de sortie maximum (résonance) et l'amplitude de sortie en régime statique. $Q = \frac{|G(j\omega_r)|}{G(0)}$

Pour un système à retour unitaire, l'amplitude de sortie en régime statique est égale à 1 **si la FTBO possède une intégration** et $Q = |G(j\omega_r)|$ On va donc rechercher le réglage tel que l'amplitude de résonance de la FTBF soit égale au maximum à 1,3 (ce qui correspond à 2,3 dB) : $Q = |G(j\omega_r)| = 1.3 = 2.3\text{dB}$. Si l'on regarde maintenant l'abaque de Black, on remarque d'une part que l'amplitude 2.3dB pour la FTBF correspond à un contour du point critique (Rappel : point de coordonnées (0dB, -180°)) et d'autre part que l'amplitude de la FTBF augmente si l'on pénètre à l'intérieur de ce contour. Le réglage optimum pour le critère 2,3dB sera atteint lorsque la courbe de la FTBO sera tangente à l'extérieur du contour (que l'on appelle en général λ) 2,3dB. On remarque que ce réglage consiste à rester à l'écart du point critique, point pour lequel le système est instable, en conservant une certaine marge de sécurité.

Méthode pratique :

- 1) On ramène éventuellement le système étudié à un système à retour unitaire.
- 2) On trace la FTBO sur un diagramme de Black en rendant son gain unitaire.
- 3) On translate verticalement la FTBO pour venir tangenter le contour à 2,3dB.
- 4) On lit le gain de boucle ouverte correspondant à la nouvelle position de la FTBO sur le diagramme de Black.
- 5) On en déduit la valeur du gain de correction global à appliquer au système non réglé pour qu'il soit correctement réglé.

Pour appliquer cette méthode, on peut utiliser un calque sur lequel est représenté l'abaque de Black, calque que l'on fera glisser sur le diagramme de Black de la FTBO que l'on cherche à régler en boucle fermée. La valeur de la translation donnera directement la valeur de la correction à appliquer au système non réglé. Il est bien évident que le diagramme de Black sur lequel est tracée la FTBO doit posséder les mêmes échelles que l'abaque de Black utilisé.

On peut également tracer la FTBO sur un diagramme de Black sur lequel on aura préalablement ajouté le contour à 2,3dB (voir Fig.8-6). C'est cette méthode que nous allons appliquer dans l'exemple suivant. Le contour à 2,3dB est suffisant pour effectuer le réglage du gain dans tous les cas où la FTBO possède une intégration.



Dans le cas où la FTBO ne possède pas d'intégration, L'amplitude en régime statique

n'est plus unitaire : $G(0) = \frac{K}{K+1}$ et $Q = \frac{|G(j\omega_r)|}{G(0)} = \frac{|G(j\omega_r)|(K+1)}{K}$ avec : K gain de boucle

ouverte. On conserve le critère $Q=1,3$ ce qui nous donne alors un contour $\lambda = 20\log\left(1,3\frac{K}{K+1}\right)$

exprimée en dB

REMARQUE: Bien que le critère à 2,3dB soit très répandu, on peut rencontrer d'autres valeurs lorsque l'on cherche à obtenir un amortissement équivalent plus grand ou plus faible. Dans ce cas, il suffit d'appliquer la même méthode en utilisant le contour désiré (voir sujet de l'Agrégation Interne B3 de 1992).

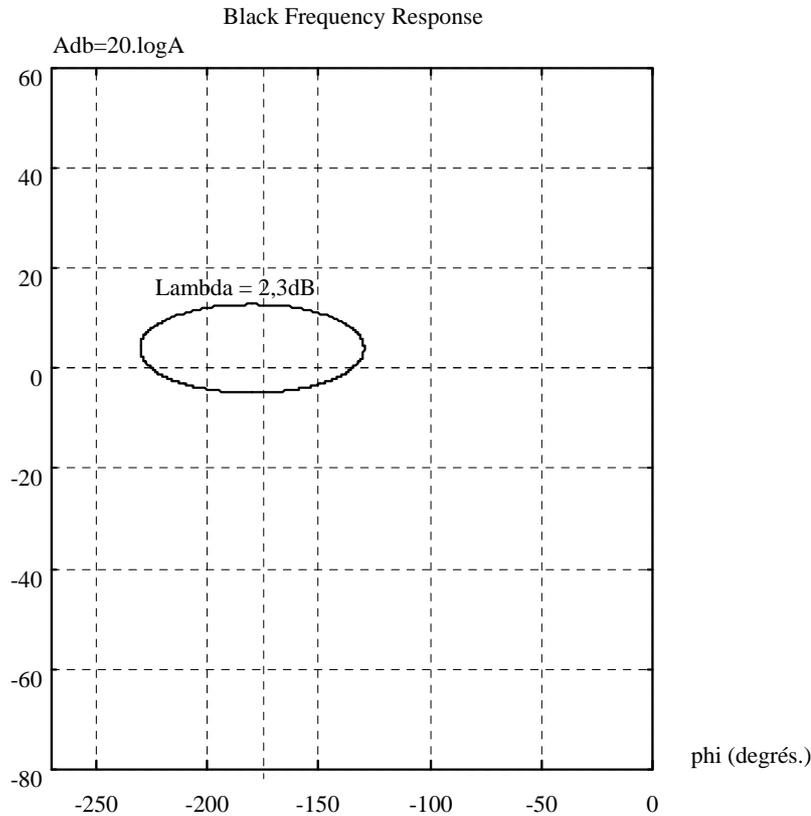


Fig. 8-6 : Contour à 2,3dB.

8-2-2. Exemple 1 : Système à retour unitaire de FTBO : $H(p) = \frac{10}{p(1+0.1p)(1+0.2p)}$

Ce système est d'ordre supérieur à 2 et doit être réglé. $H(p)$ possédant une intégration, on considérera le contour à 2,3dB.

1) On trace la fonction de transfert de gain unitaire $H_1(p) = \frac{1}{p(1+0.1p)(1+0.2p)}$ (Fig. 8.7)

2) On translate la courbe pour la rendre tangente au contour à 2,3dB. La translation s'effectuant vers le haut dans ce cas, le gain sera positif. On mesure sur la courbe la valeur de la translation : +10dB qui correspond à un gain de boucle : $K_r = 10^{\left(\frac{10}{20}\right)} = 3,16$. La fonction de transfert correctement

réglée est : $H_2(p) = \frac{3,16}{p(1+0.1p)(1+0.2p)}$

3) La correction à faire subir à $H(p)$ est : $K_c = \frac{3,16}{10} = 0,316$

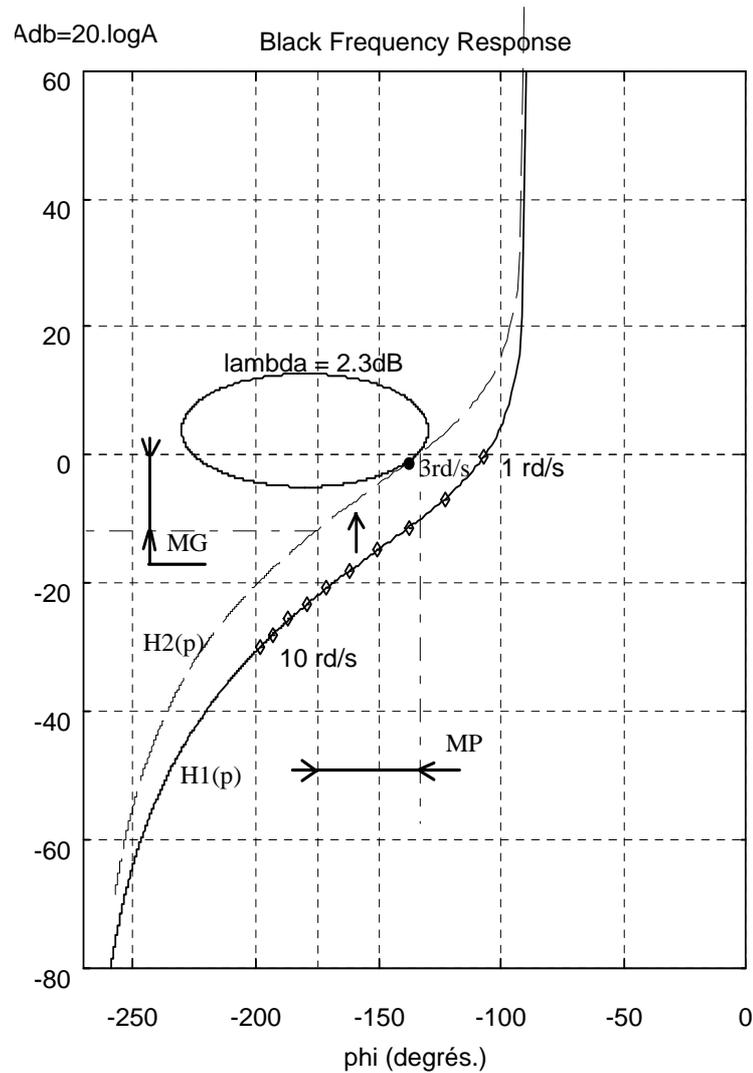


Fig. 8-7 : Réglage du gain de $H_1(p) = \frac{1}{p(1+0.1p)(1+0.2p)}$

On remarque sur la courbe après réglage, que le critère "FTBO tangente au contour $\lambda = 2,3\text{dB}$ " correspond, pour ce système, à une marge de phase d'environ 45° et à une marge de gain d'environ 12dB ce qui nous ramène aux réglages moyens cités en 8-1-2. Le point de tangence correspond à une pulsation d'environ 3rad/s. Cette pulsation est bien celle pour laquelle l'amplitude du système en boucle fermée est maximale : pulsation de résonance en BF.

Cette méthode consiste en fait à rendre tous les gains de la chaîne directe unitaires, à déterminer le gain global correspondant à un réglage satisfaisant et à déduire la valeur du coefficient d'amplification à appliquer.

On peut également effectuer le réglage en traçant directement la fonction de transfert $H(p)$ (voir Fig. 8-8).

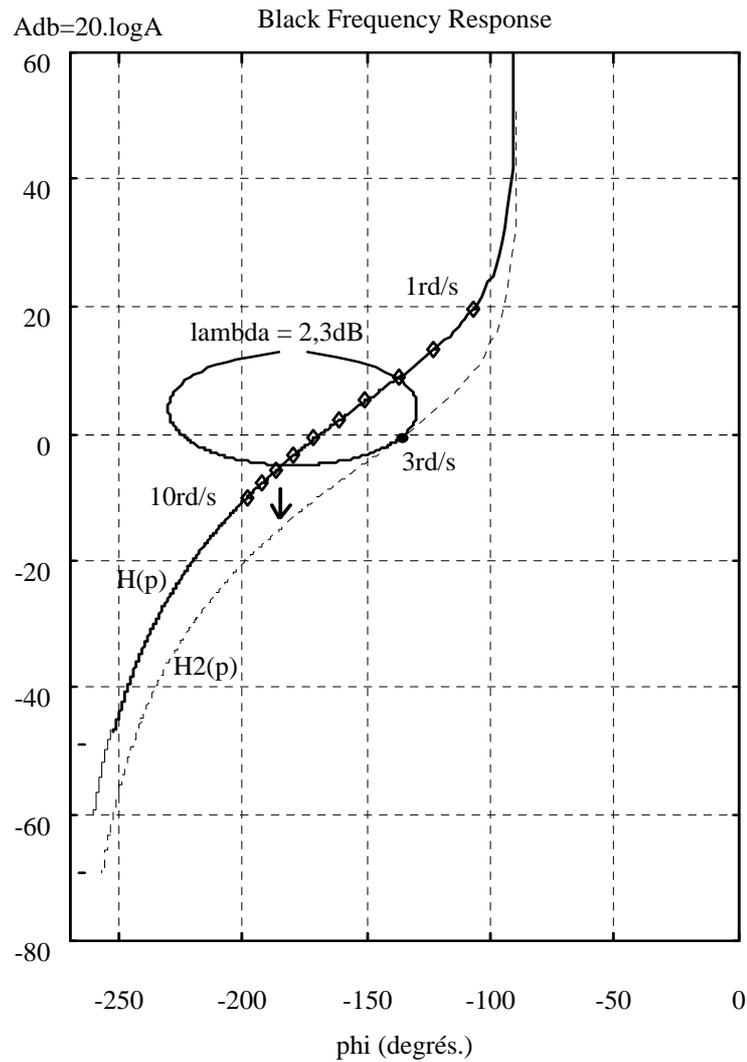


Fig. 8-8 : Réglage du gain de $H(p) = \frac{10}{p(1+0.1p)(1+0.2p)}$

Sur cette courbe, il apparaît que $H(p)$ est théoriquement stable mais qu'elle possède une marge de gain et une marge de phase trop faibles. Il va donc falloir diminuer le gain de boucle en translatant $H(p)$ vers le bas. La valeur de la translation est -10dB, correspondant à un gain de correction

$$K_c = 10^{\left(\frac{-10}{20}\right)} = 0,316$$

Finalemment:

- * Le système est stable.
- * Il est précis : ceci est dû à la présence de l'intégration dans la boucle ouverte, la variation du gain n'y changeant rien.
- * L'écart de poursuite a augmenté : il est passé de $1/K = 0,1$ à $1/Kr = 0,3$
- * La rapidité, qui évolue avec K , a diminué.

Le système réglé possède la structure suivante :

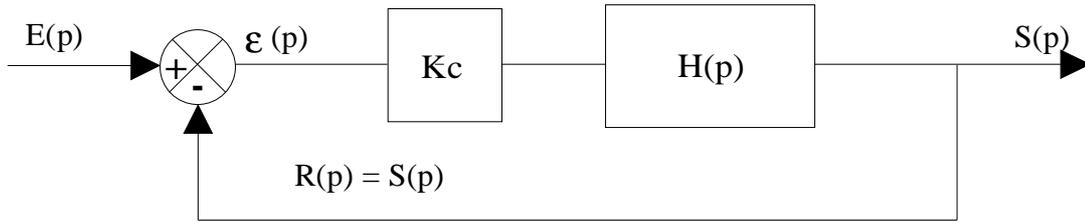


Fig. 8-9 : Système réglé avec $K_c = 0.316$

Si ce réglage est satisfaisant par rapport au cahier des charges de l'asservissement, il suffira de régler le gain de l'ampli (qui devient alors un correcteur proportionnel) à la valeur $K_c = 0.316$. Si ce réglage ne permet pas d'obtenir les performances recherchées, l'asservissement étant devenu trop lent par exemple, il faut envisager une compensation (voir chapitre suivant).

REMARQUE 1 : Les valeurs numériques de la FTBO $H(p)$ du système non réglé confirment la stabilité théorique (déphasage inférieur à -180° pour un gain de 0dB) mais aussi l'insuffisance de marge de gain ou de phase.

phi(t)	AdB(t)	(rad/s)	
-1.0702e+02	1.9786e+01	1	
-1.2311e+02	1.3164e+01	2	
-1.3766e+02	8.7479e+00	3	
-1.5046e+02	5.1658e+00	4	
-1.6157e+02	2.0412e+00	5	
-1.6812e+02	1.3625e-01	5.5	marge de phase d'environ 12° insuffisante.
-1.6915e+02	-1.6966e-01	5.6	
-1.7116e+02	-7.7231e-01	6	
-1.7945e+02	-3.3467e+00	7	marge de gain d'environ 3,35 dB insuffisante.
-1.8665e+02	-5.7247e+00	8	
-1.9293e+02	-7.9353e+00	9	
-1.9843e+02	-1.0000e+01	10	

REMARQUE 2 : Le critère de stabilité absolu pour un système du troisième ordre avec intégration s'écrit : $K < 2z\omega_n$

En réécrivant $H(p)$ sous la forme d'un produit de second ordre avec une intégration, on obtient :

$$H(p) = \frac{10}{p(1+0.1p)(1+0.2p)} = \frac{K}{p \left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)} = \frac{10}{p(1+0,3p+0.02p^2)}$$

$$\text{d'où on tire : } \omega_n = \frac{1}{\sqrt{0.02}} = 7,07 \quad \text{et} \quad z = \frac{0,3 \cdot \omega_n}{2} = 1,06$$

Le critère impose $K < 2z\omega_n = 2 \times 1,06 \times 7,07 \approx 15$ ce qui confirme la stabilité théorique du système car $K = 10 < 15$.

REMARQUE 3 : Le système possède une résonance en boucle fermée alors qu'il n'en possède pas en boucle ouverte dans ce cas précis (ce que l'on voit bien sur le diagramme de Black Fig 8-8) Nous avons vu que la valeur de la pulsation de résonance en BF est d'environ 3 rad/s pour un coefficient de surtension de 1,3.

REMARQUE 4 : On peut vérifier la validité du réglage en étudiant la FTBF réglée :

$$G_2(p) = \frac{H_2(p)}{1+H_2(p)} = \frac{3.16}{3.16 + p(1+0.1p)(1+0.2p)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3.16}p + \frac{0.3}{3.16}p^2 + \frac{0.02}{3.16}p^3}$$

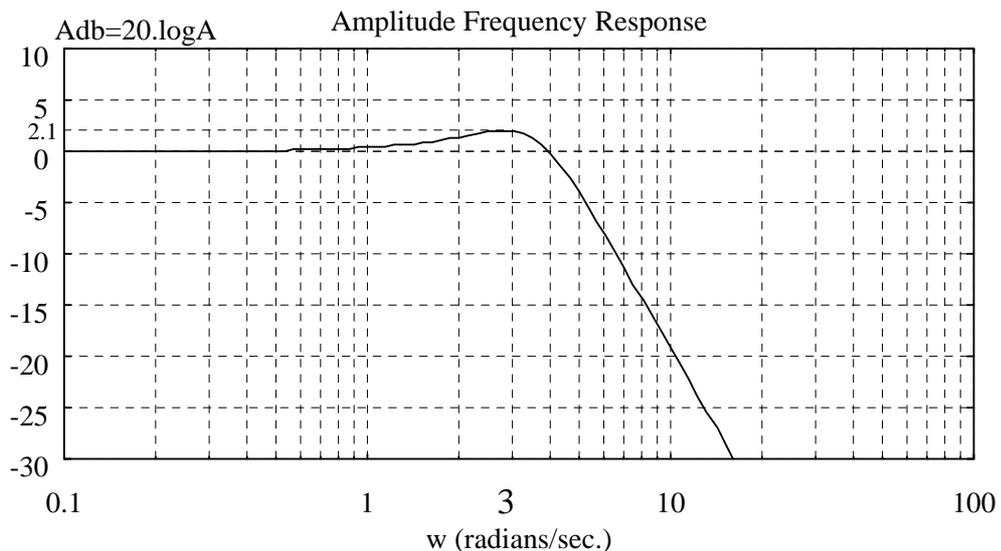


Fig. 8-10 : Diagramme d'amplitude de $G_2(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3.16}p + \frac{0.3}{3.16}p^2 + \frac{0.02}{3.16}p^3}$

On trouve bien un maximum d'amplitude (résonance) pour une pulsation d'environ 3rad/s. La valeur de ce maximum est de 2.1dB. L'amplitude en régime statique est égale à 0dB (1), ce qui nous donne un coefficient de surtension $Q = \frac{|G(j\omega_r)|}{G(0)} = |G(j\omega_r)| = 2.1\text{dB}$. La différence avec la valeur souhaitée de 2.3dB est due à l'imprécision de la méthode graphique : on constate en effet, sur la Figure 8-4, que le réseau des contours est très serré dans cette zone. Ceci ne pose pas de problème car on travaille sur une marge.

8-2-3. Exemple 2 : Système à retour unitaire de FTBO :

$$H(p) = \frac{10}{(1+0.01p)(1+7.10^{-3}p+10^{-5}p^2)} = \frac{K}{(1+T_1p)\left(1+\frac{2z}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n^2}p^2\right)}$$

avec: $K = 10$ $T_1 = 0,01s$ $z = 0,35$ $\omega_n = 100rd / s$

Contrairement à l'exemple précédent, ce système possède une résonance en boucle ouverte (21.4dB pour une pulsation de 79rad/s).

Ce système est d'ordre supérieur à 2 et doit être réglé : $H(p)$ ne possédant pas d'intégration, le contour à 2,3dB ne donnera pas le bon réglage, ce que nous allons vérifier.

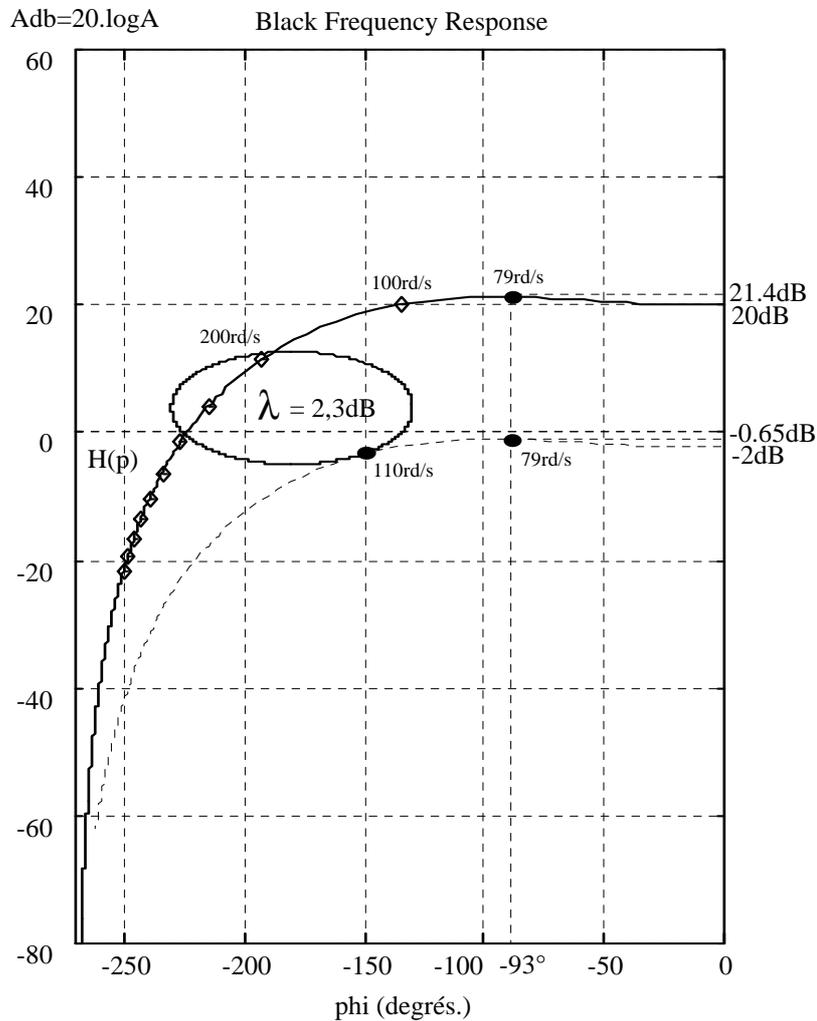


Fig. 8-11 : réglage de $H(p) = \frac{10}{(1+0.01p)(1+7.10^{-3}p+10^{-5}p^2)}$

On opère un décalage vers le bas de $H(p)$ pour la rendre tangente au contour 2,3dB. La valeur du décalage est d'environ 22dB. La courbe obtenue possède un gain statique de -2dB correspondant à :

$$K_r = 10^{\left(\frac{-2}{20}\right)} = 0.79 \text{ en boucle ouverte.}$$

Traçons le diagramme d'amplitude de Bode de la FTBF $G(p)$ obtenue en considérant

$$H(p) = \frac{K_r}{(1+0.01p)(1+7.10^{-3}p+10^{-5}p^2)} = \frac{0,79}{(1+0.01p)(1+7.10^{-3}p+10^{-5}p^2)} \quad (\text{voir Fig. 8-13})$$

L'amplitude à la résonance est bien égale à 2,3dB (1,3) pour une fréquence d'environ 110rad/s.

L'amplitude en régime statique est de -7.1dB (0,44) On sait qu'elle dépend du gain en boucle

ouverte et qu'elle est égale à $\frac{K_r}{1+K_r} = \frac{0,79}{1,79} = 0,44$.

On calcule alors le coefficient de surtension $Q = \frac{|G(jw_r)|}{G(0)} = \frac{1.3}{0.44} = 2,95$

Cette valeur est trop élevée et ne correspond pas au critère que nous nous sommes fixé : ceci confirme que le critère du contour à 2,3dB n'est pas pertinent dans le cas des systèmes sans intégration dans la boucle ouverte.

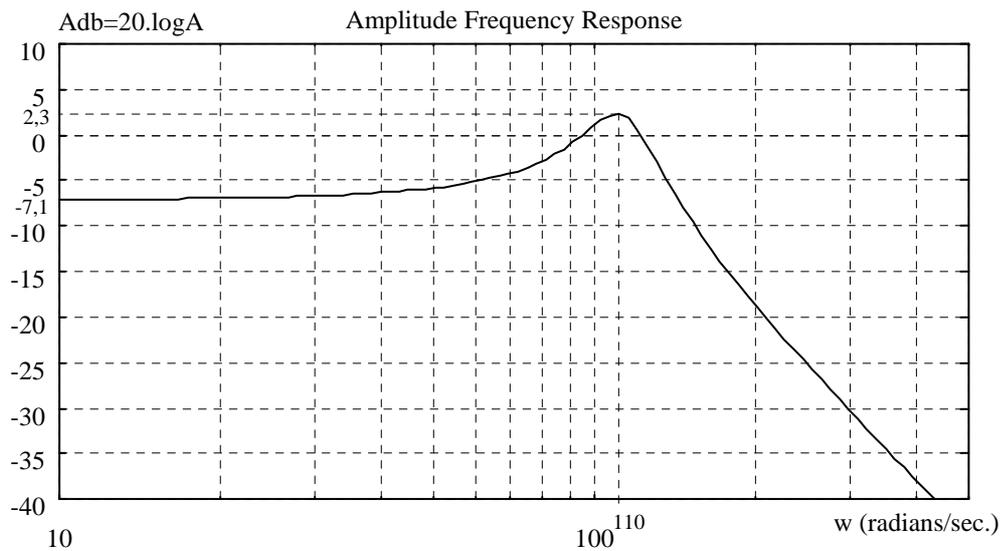


Fig. 8-12 : $G(p) = \frac{H(p)}{1+H(p)} = \frac{0.79}{0.79 + (1+0.01p)(1+7.10^{-3}p+10^{-5}p^2)}$

Il faut procéder par approches successives, en diminuant le gain dans le cas qui nous intéresse et en calculant les valeurs en BF.

Gain en BO : -10dB (0,31) Amplitude statique en BF : 0.23 (-12.5dB)
 amplitude de résonance en BF : -8,2dB (0,39) et $Q = 0.39/0.23 = 1,7$

Gain en BO : -15dB (0,18) Amplitude statique en BF : 0.15 (-16,4dB)
 amplitude de résonance en BF : -13,2dB (0,218) et $Q = 0.218/0,15 = 1,45$

Gain en BO : -20dB (0,1) Amplitude statique en BF : 0.09 (-20,09dB)
 amplitude de résonance en BF : -18,5dB (0,118) et $Q = 0.118/0.09 = 1,32$

Il faut diminuer de manière très importante (d'un facteur 100 ici !) le gain de boucle ouverte pour obtenir un coefficient de surtension $Q = 1,3$. Ceci est dû au fait que l'amortissement (caractérisé par z) en boucle ouverte est assez faible. La conséquence en est une diminution importante de la rapidité et de la précision. Dans une application réelle, on serait certainement amené à envisager d'autres dispositions (correcteur par exemple) pour conserver des performances suffisantes tout en garantissant la stabilité.

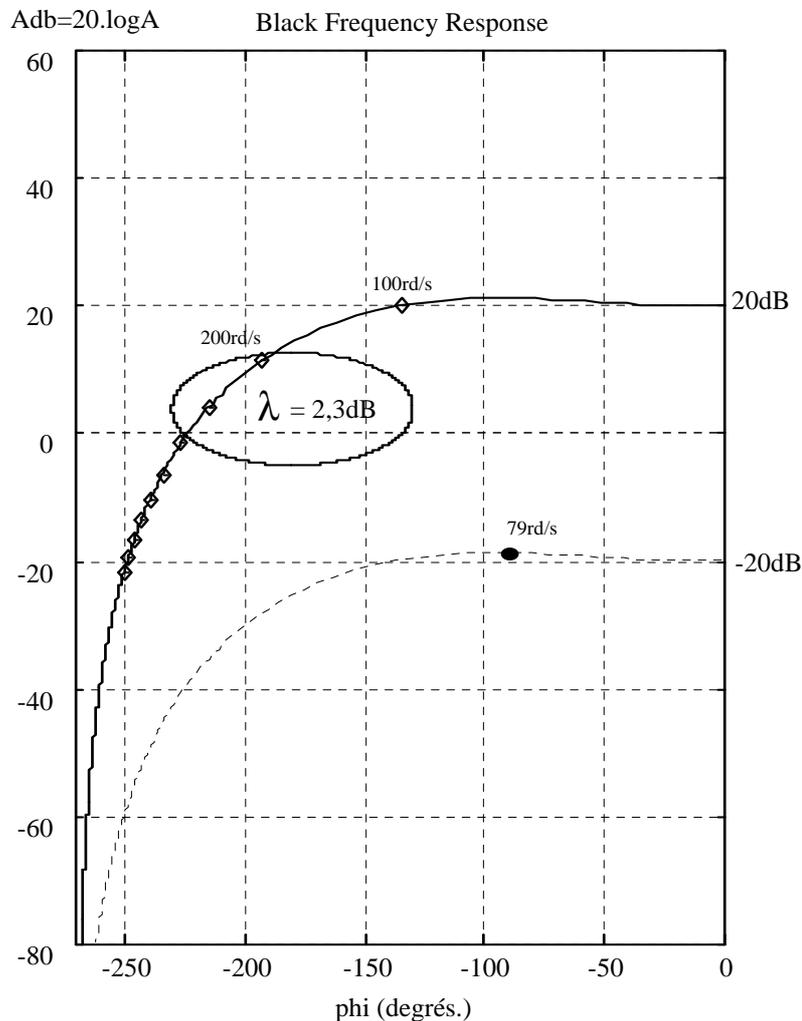


Fig. 8-13 : réglage de $H(p)$.

REMARQUE: La résonance en boucle ouverte se produit pour une pulsation de 79 rad/s et ce, quelle que soit la valeur du gain statique. On peut lire sur le diagramme de Black fig. 8-11 que la résonance en boucle fermée aura lieu au point de tangence du lieu de la FTBO avec le contour à 2,3dB pour une pulsation de 110 rad/s (résultat que l'on retrouve sur le diagramme de Bode de la FTBF fig. 8-12). La résonance a donc lieu à une fréquence plus élevée en boucle fermée qu'en boucle ouverte. Nous savons par ailleurs que :

- 1) pour un système du second ordre, le temps de réponse diminue lorsque la pulsation propre non amortie augmente (voir § 5-3-3).
- 2) toujours pour un système du second ordre, la pulsation de résonance est proportionnelle à la pulsation propre non amortie : $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2z^2}$

La rapidité d'un système du second ordre augmente donc avec sa fréquence de résonance.

En considérant qu'un système d'ordre supérieur se comporte globalement comme un système d'ordre 2 et en utilisant la remarque que nous venons d'effectuer sur le diagramme de Black fig. 8-11, nous retrouvons une propriété des systèmes bouclés : Le bouclage augmente la rapidité.

8-3. REGLAGE D'UN SYSTEME DU SECOND ORDRE.

En pratique, on rencontre souvent des systèmes du second ordre en boucle fermée. Ces systèmes sont théoriquement stables, car ils n'atteignent pas les -180° de déphasage, mais ils peuvent être oscillants si leur facteur d'amortissement est trop faible. Comme nous allons le voir, le facteur d'amortissement en BF dépend du gain de boucle en BO et nous serons amenés à régler ce gain de telle manière que le facteur d'amortissement en BF soit satisfaisant.

Considérons l'asservissement suivant :

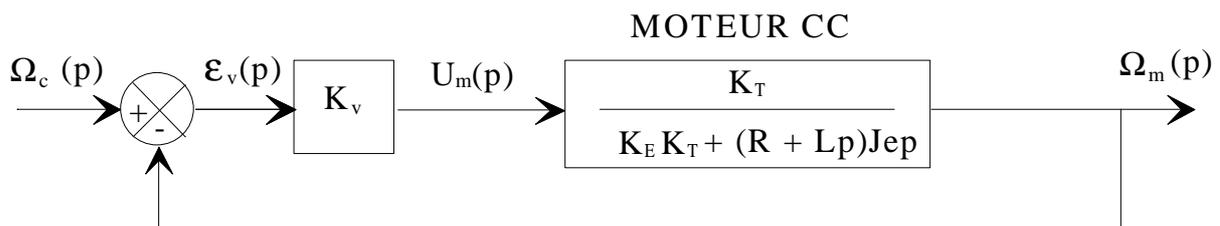


Fig. 8-14 : Asservissement de vitesse.

Il s'agit d'un système asservi en vitesse avec moteur à courant continu et retour unitaire.

Les données sont les suivantes :

- Résistance d'induit : $R = 2.4\Omega$
- Inductance : $L = 2.56 \cdot 10^{-3} \text{ H}$
- Constante de couple : $K_t = 0.634 \text{ Nm/A}$
- Constante de f_{cem} : $K_e = 0.634 \text{ V/rad/s}$
- J_e : inertie ramenée de la charge entraînée : $J_e = 6.74 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$

REMARQUE : il s'agit d'un moteur à courant continu, dont les constantes de couple et de f_{cm} sont égales, exprimées en unités SI.

On désire que le système possède un facteur d'amortissement proche de 0.7 en boucle fermée, de manière à obtenir la rapidité maximale.

La fonction de transfert en vitesse du moteur est classique : $H_m(p) = \frac{K_t}{(R + Lp)J_e p + K_t K_e}$

Sous forme canonique, on obtient : $H_m(p) = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{RJ_e}{K_t K_e} p + \frac{LJ_e}{K_t K_e} p^2} = \frac{K_m}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{nm}} p + \frac{1}{\omega_{nm}^2} p^2}$

On calcule ensuite les valeurs des paramètres de la boucle ouverte:

$$z_m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2 J_e}{L K_t K_e}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2,4)^2 \times 6,7410^{-4}}{2,5610^{-3} \times 0,634 \times 0,634}} = 0,98$$

$$\omega_{nm} = \sqrt{\frac{K_t K_e}{L J_e}} = \sqrt{\frac{0,634 \times 0,634}{2,5610^{-3} \times 6,7410^{-4}}} = 482,56 \text{ rad/s}$$

$$K_m = \frac{1}{K_e} = \frac{1}{0,634} = 1,577 \text{ rad/s/V} \quad (\text{gain du moteur seul})$$

- Le facteur d'amortissement est à la limite du non-dépassement, et il va encore diminuer lors du bouclage en vitesse. Ceci ne posera pas de problème en asservissement de vitesse ou l'on recherche un z égal à 0.7 en général.
- Le gain n'appelle aucun commentaire puisqu'il s'agit d'un gain en chaîne directe qui ne permet donc pas de prévoir les performances de la boucle fermée.
- La pulsation propre non amortie ω_n est égale à 482rad/s. En considérant, en première approximation, qu'elle correspond à la bande passante à 3dB, on obtient une bande passante $BP \approx \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{482}{2\pi} = 76\text{Hz}$ Elevée (plus précisément, pour $z \approx 1$, $BP \approx 0,6 \frac{\omega_n}{2\pi} = 0,6 \frac{482}{2\pi} = 46\text{Hz}$).

La performance en vitesse du système est liée à la bande passante en boucle fermée. Cette dernière sera d'autant plus importante que la bande passante des composants de la boucle (et donc du moteur) sera grande, le composant le plus lent « filtrant » les fréquences élevées.

Détermination de la FTBO : $FTBO_v(p) = \frac{K_m K_v}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{nm}} p + \frac{1}{\omega_{nm}^2} p^2}$

La FTBF se calcule par :

$$FTBF_v(p) = H_v(p) = \frac{\frac{K_m K_v}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{nm}} p + \frac{1}{\omega_{nm}^2} p^2}}{1 + \frac{K_m K_v}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{nm}} p + \frac{1}{\omega_{nm}^2} p^2}} = \frac{K_m K_v}{K_m K_v + 1 + \frac{2z_m}{\omega_{nm}} p + \frac{1}{\omega_{nm}^2} p^2}$$

Mise sous forme canonique :

$$H_v(p) = \frac{\frac{K_m K_v}{(1 + K_m K_v)}}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{nm}(1 + K_m K_v)} p + \frac{1}{\omega_{nm}^2(1 + K_m K_v)} p^2} = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2z_v}{\omega_{nv}} p + \frac{1}{\omega_{nv}^2} p^2}$$

On obtient une FTBF du second ordre.

On déduit de l'expression précédente que : $z_v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2 J_e}{LK_t(K_e + K_v)}}$

$$K_v = \left[\frac{1}{4z_v^2} \frac{R^2 J_e}{LK_t} - K_e \right]$$

Pour un système du second ordre, la rapidité maximale est obtenue pour $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$ et finalement on détermine le gain K_v correspondant :

$$K_v = \left[\frac{1}{2} \frac{R^2 J_e}{LK_t} - K_e \right] = \left[\frac{2.4^2 \times 6.7410^{-4}}{2 \times 2.5610^{-3} \times 0.634} - 0.634 \right] = 0.562 \text{ V/rad/s}$$

REMARQUE : La pulsation en BF est plus grande que celle en BO : $\omega_{nv} = \omega_{nm} \sqrt{1 + K_m K_v} = 482 \sqrt{1 + 1.577 \times 0.562} = 662 \text{ rad/s}$. Le bouclage a provoqué une augmentation notable de la pulsation propre non amortie et donc de la bande passante (BP = $662/2\pi = 105 \text{ Hz}$ en BF contre 76 Hz en BO) ainsi que de la rapidité. On retrouve une propriété classique, à savoir que l'accroissement du gain de la boucle (par augmentation de la valeur du gain K_p du correcteur proportionnel) provoque une amélioration de la rapidité. Parallèlement, l'amortissement a diminué puisque $z_v = \frac{z_m}{\sqrt{1 + K_m K_v}}$ et que les gains sont positifs.

Chapitre 9

COMPENSATION DES SYSTEMES ASSERVIS.

9-1. PRESENTATION.

Lorsque le réglage du gain ne permet pas l'obtention des performances désirées (rapidité et/ou précision) sans que le système ne devienne instable, on est amené à prendre d'autres dispositions :

- * soit ajouter un correcteur ou compensateur dans la boucle d'asservissement. Ce correcteur peut être installé en divers endroits de la boucle pour intervenir sur tel ou tel signal : signal de retour, signal d'écart, signal de consigne, signal de perturbation, etc. (de manière générale, un correcteur agit sur un signal basse puissance).

- * soit modifier la structure de l'asservissement, en particulier en ajoutant une boucle secondaire. La solution la plus rencontrée en commande d'axe consiste à retourner la grandeur dérivée de la grandeur commandée : ajouter une boucle de retour en vitesse (retour tachymétrique) dans une boucle d'asservissement en position et/ou une boucle de retour en accélération dans une boucle d'asservissement en vitesse.

Les principaux types de correcteurs que l'on peut actuellement rencontrer sont :

- * correcteur proportionnel P (revient à un réglage du gain et ne permet pas la résolution du dilemme stabilité/précision : voir chapitre précédent)
- * correcteur dérivé D (associé au précédent : PD)
- * correcteur intégral I (même remarque : PI)
- * correcteur PID (association des trois précédents très employée)
- * correcteur obtenu par une autre association des précédents : PD^2 par exemple.
- * prédictif de Smith PIR
- * régulateur à modèle interne IMC
- * régulateur prédictif DMC, GPC
- * régulateur flou.

Nous nous intéresserons aux cas les plus classiques : correcteurs Dérivé, Intégral et PID agissant sur le signal d'écart et donc implantés après le comparateur. La structure correspondante de la boucle est représentée ci-dessous dans le cas d'un asservissement de position.

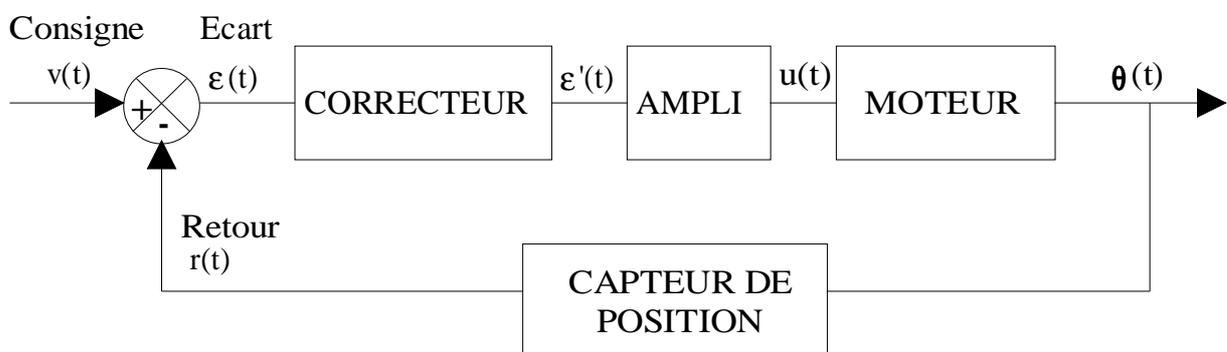


Fig. 9-1 : Boucle d'asservissement avec correcteur agissant sur le signal d'écart.

9-2. CORRECTEUR DERIVE OU A AVANCE DE PHASE.

9-2-1. Approche intuitive de la correction dérivée :

Dans une boucle classique d'asservissement, la commande de l'actionneur est proportionnelle à l'écart $Sc(t) = Kp \cdot \varepsilon(t)$. En valeur absolue, la commande sera d'autant plus importante que l'écart sera grand et pour un écart donné, la commande sera toujours la même. Or, la manière dont l'écart évolue est un paramètre important qui n'est pas pris en compte.

Illustrons ceci par un exemple : soit une régulation de température dans une étuve. La consigne est réglée sur 60° et la température mesurée est de 40° , ce qui génère un écart de 20° . Envisageons trois cas (voir Fig. 9-2a et 9-2.b) : Au moment t_0 ,

- La température augmente très rapidement (l'écart diminue).
- La température est sensiblement constante (l'écart est constant)
- La température diminue très rapidement (l'écart augmente).

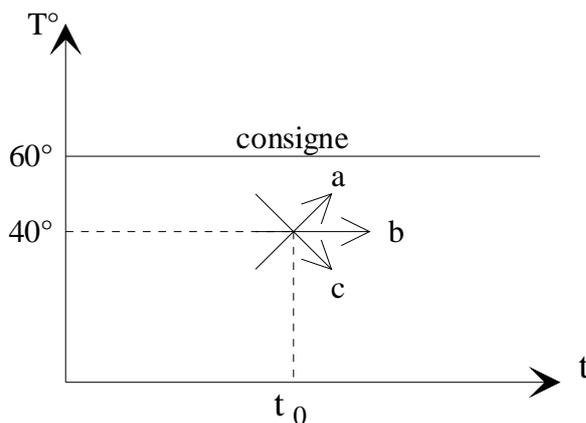


Fig. 9-2.a : évolution de la température.

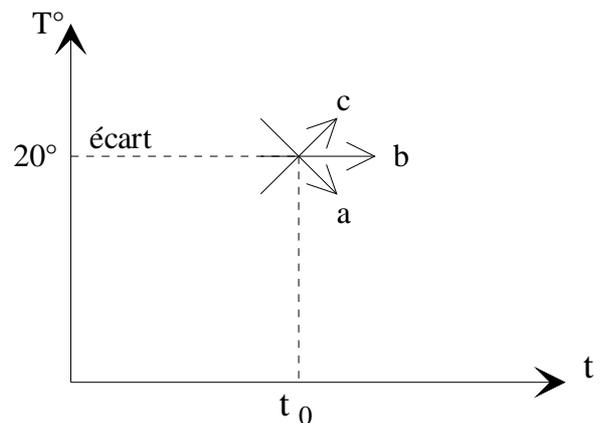


Fig. 9-2.b : évolution de l'écart.

On conçoit aisément que, pour ce même écart de 20° , la commande devrait être différente dans les trois cas : il faudrait chauffer moins fort dans le premier cas, "normalement" dans le second et plus fort dans le troisième. En termes de régulation, ceci reviendrait à ajouter à la commande une contribution négative dans le premier cas, nulle dans le second et positive dans le troisième. Il existe une manière simple de réaliser cette amélioration, consistant à utiliser la dérivée de l'écart qui est négative dans le premier cas, nulle dans le second et positive dans le troisième. Cette dérivée sera mesurée puis multipliée par un facteur réglable K_d puis additionnée au signal d'écart (lui-même multiplié par un gain K_p appelé gain proportionnel) pour donner le signal d'écart corrigé :

$$\varepsilon'(t) = Kp \cdot \varepsilon(t) + K_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon_p(t) + \varepsilon_d(t) \quad (9-1)$$

Ce signal est la somme d'une contribution proportionnelle ε_p et d'une contribution dérivée ε_d . La structure de la boucle avec correcteur dérivé est donnée Fig. 9-3.

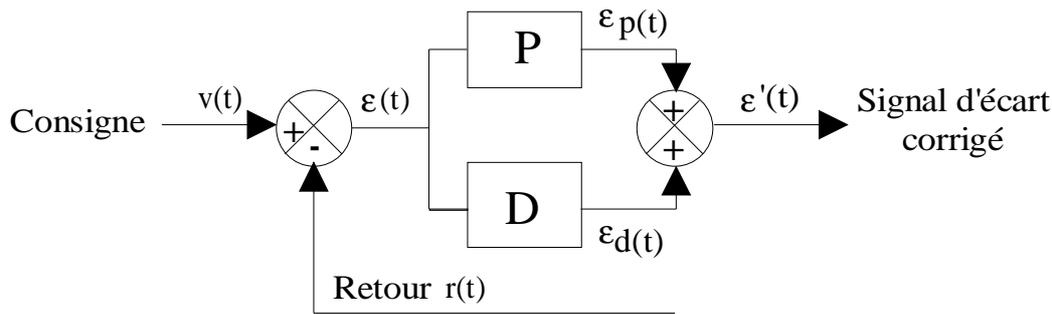


Fig. 9-3 : Structure de la boucle avec correcteur dérivé.

On peut prévoir empiriquement les conséquences de cette modification :

- * Dans le cas c, on chauffera plus fort donc on atteindra la consigne plus vite : la rapidité a augmenté.
- * Lorsque l'on approche rapidement de la valeur visée, le terme dérivé va diminuer la commande et ainsi réaliser une sorte d'amortissement : la stabilité a augmenté.
- * Lorsque la consigne est atteinte et la température stabilisée, l'influence dérivée est nulle : La correction dérivée est sans effet sur la précision.

REMARQUE 1 : A l'approche de la valeur visée, et si la contribution dérivée est suffisante, le système cessera de chauffer AVANT d'avoir atteint la consigne qui le sera par inertie : c'est en ce sens que l'on parle de correction par anticipation (ce qu'il ne faut pas confondre avec un régulateur prédictif)

REMARQUE 2 : Le terme dérivé ne peut être utilisé seul : en effet, lorsque l'écart est constant le terme dérivé est nul ce qui conduirait à une commande nulle dans le cas b par exemple.

REMARQUE 3 : Lorsque l'on soumet le système à la consigne qui est un échelon en général, l'écart varie brutalement : sa dérivée devient infinie ainsi que la contribution dérivée ϵ_d . En pratique, on utilisera une commande différente de (9-1) qui filtrera le signal et limitera la contribution dérivée. (Voir § 9-2-2)

Beaucoup de situations de la vie courante font appel à une "correction dérivée" :

* L'automobiliste qui désire se maintenir à distance de sécurité avec le véhicule précédent sur la route doit réaliser une régulation de sa vitesse. Il évalue l'écart entre les véhicules et la variation de cet écart : S'il rattrape le véhicule précédent, le conducteur avisé tiendra compte de la vitesse à laquelle il se rapproche (variation de l'écart) afin de ralentir avant d'avoir atteint la distance de sécurité. Le nombre important de garages "tôlerie-peinture" montre toutefois que ce type de régulation (celle du conducteur) laisse souvent à désirer, ce qui nous éloigne de notre propos.

- Le pilote d'un gros bateau à moteur qui accoste un quai doit évaluer en permanence l'écart de position entre l'avant du bateau et le quai ainsi que la vitesse à laquelle évolue cet écart. Ceci va l'amener à couper les gaz, voire à faire marche arrière AVANT d'atteindre le quai. Ce type de régulation étant très délicate (état de la mer, vent, courant, oscillations du bateau), on utilise des "défenses" souvent constituées de pneus servant à amortir les chocs éventuels lors de l'abordage. Cette solution se retrouve en technologie mécanique (amortisseurs réglables ou non en fin de course d'un mobile).

9-2-2. Approche formelle de la correction par avance de phase :

L'idée est la suivante : la diminution de gain nécessaire à l'obtention de la stabilité est par ailleurs nuisible aux performances. Cette diminution de gain correspond à la translation de la FTBO sur l'abaque de Black l'amenant au contact du contour à 2.3dB. Il faut donc rendre la FTBO tangente au contour à 2.3dB *sans diminuer le gain*. Ceci peut s'effectuer de deux manières :

a) Par translation horizontale de la FTBO .

Prenons l'exemple suivant : système de FTBO $H(p) = \frac{10}{p(1+0,015p+0,00016p^2)}$ représentée sur le diagramme de Black Fig. 9-4 et faisons l'hypothèse que le réglage du gain, tel que nous l'avons étudié au chapitre précédent, provoque une diminution des performances incompatibles avec le cahier des charges. Pour rendre $H(p)$ tangente au contour à 2.3dB (et donc stable) sans diminuer le gain, on peut essayer la méthode consistant à ajouter une phase constante en tout point de la FTBO $H(p)$ sans modifier son gain (voit Fig. 9-4).

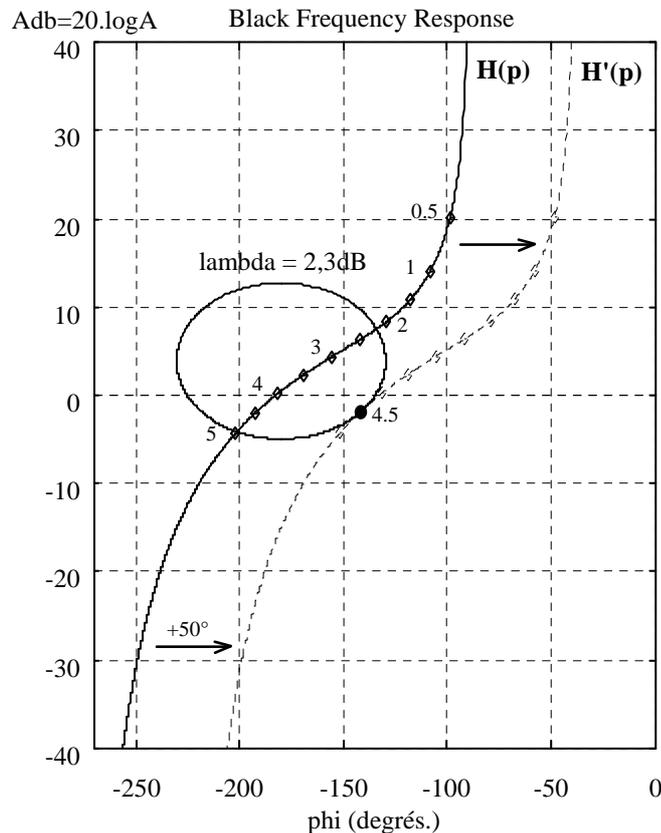


Fig. 9-4 : déphasage de $+50^\circ$ de $H(p) = \frac{10}{p(1+0,015p+0,00016p^2)}$ ($\omega_n = 80\text{rad/s}$ et $z = 0.6$)

Ceci revient à chercher un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ telle que le produit $C(p).H(p)$ soit égal à $H'(p)$, FTBO corrigée. $C(p)$ est une fonction de transfert ne modifiant pas le gain et ajoutant une phase positive constante : son diagramme de Bode est représenté Fig. 9-5.



Fig. 9-5 : Correcteur à avance de phase idéal pour H(p).

Le réseau permettant d'obtenir ce résultat n'existe pas. On peut trouver un réseau de gain constant comme un gain pur $C(p) = K$ (Fig. 9-6) ou un réseau déphaseur pur $C(p) = K \frac{1 - T_p}{1 + T_p}$ (Fig. 9-7).

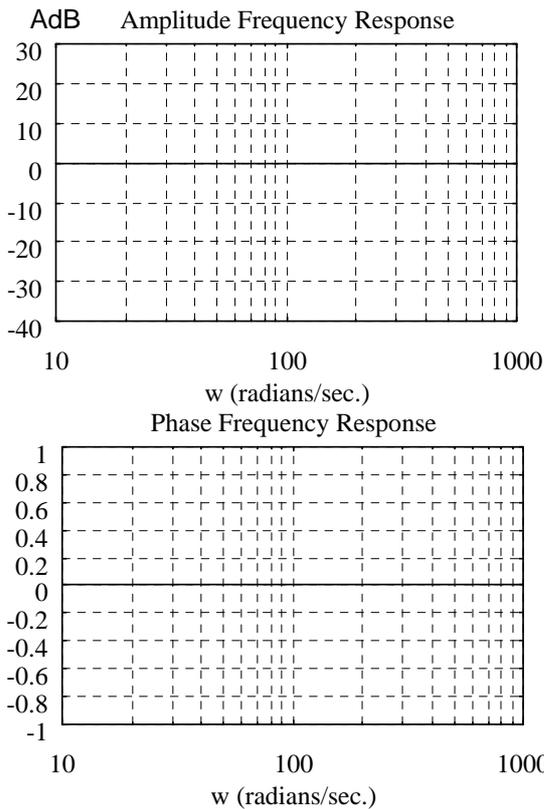


Fig. 9-6 : Gain pur K = 1

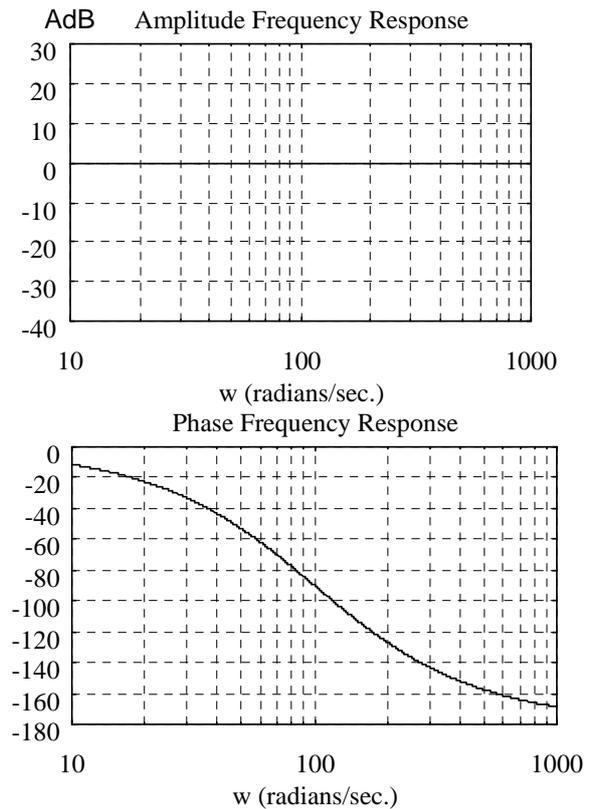


Fig. 9-7 : Réseau déphaseur pur K= 1

Ces deux réseaux ne conviennent pas car le premier crée un déphasage nul et le second un déphasage négatif alors que nous recherchons un déphasage positif.

On peut aussi proposer un réseau dérivateur pur $C(p) = T_p$ (Fig. 9-8) ou $C(p) = 1 + T_p$ (Fig. 9-9)

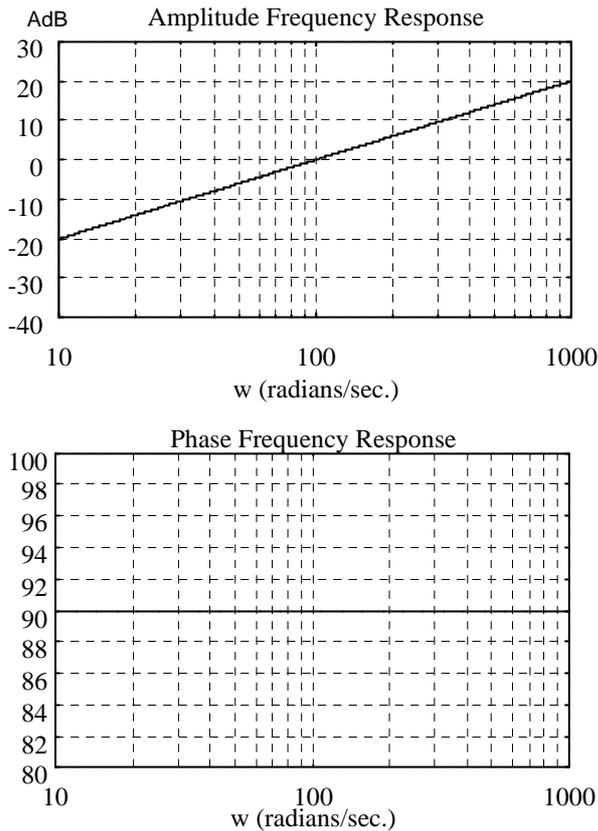


Fig. 9-8 : Dérivateur pur $C(p) = T_p$

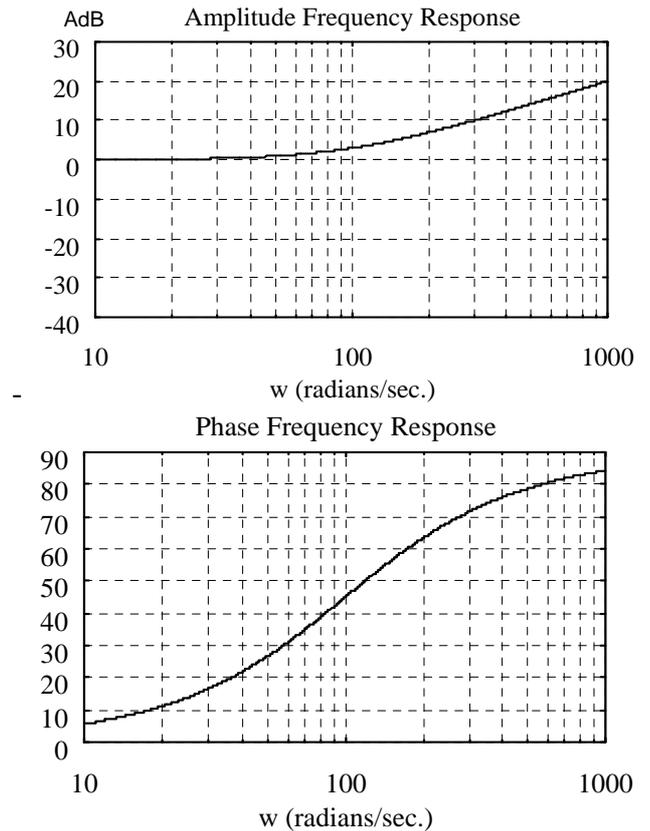


Fig. 9-9 : Dérivateur $C(p) = 1 + T_p$

Le premier réseau permet l'ajout d'une phase constante de $+90^\circ$ sur tout le spectre de fréquences mais présente un inconvénient majeur : à haute fréquence son amplitude tend vers l'infini. Cette fonction de transfert n'est donc pas réalisable en pratique. La même remarque vaut pour le second. D'autre part, la réponse temporelle de ces deux réseaux à un échelon présente un pic (impulsion de Dirac) d'amplitude théoriquement infinie (voir Fig. 9-10 et 9-11).

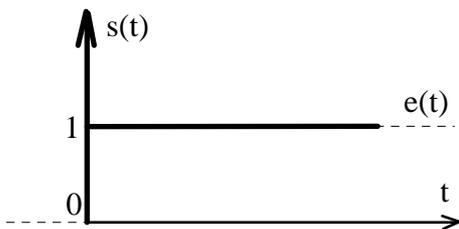


Fig. 9-10 : Réponse indicielle de $C(t) = 1 + T_p$

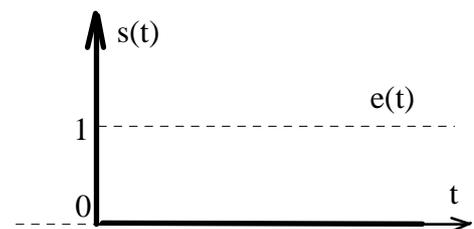


Fig. 9-11 : Réponse indicielle de $C(t) = T_p$

La manipulation représentée Fig. 9-4 semble donc impossible : il faut chercher une autre méthode.

b) Par déformation de la FTBO dans la zone de contact.

Au lieu de translater toute la FTBO horizontalement, nous allons maintenant la déformer localement dans la zone du futur contact avec le contour, comme représenté Fig. 9-12. La manipulation revient en fait à ajouter une phase positive variable dans la zone située à proximité du contour à 2.3dB. Cette zone est celle de la résonance en boucle fermée (point ω_r sur la courbe H').

Pour ce faire, il faut chercher un correcteur ne modifiant pas le gain, ne modifiant pas la phase dans les zones de basses et de hautes fréquences, et générant une phase positive (ou avance de phase) dans la zone de résonance en BF.

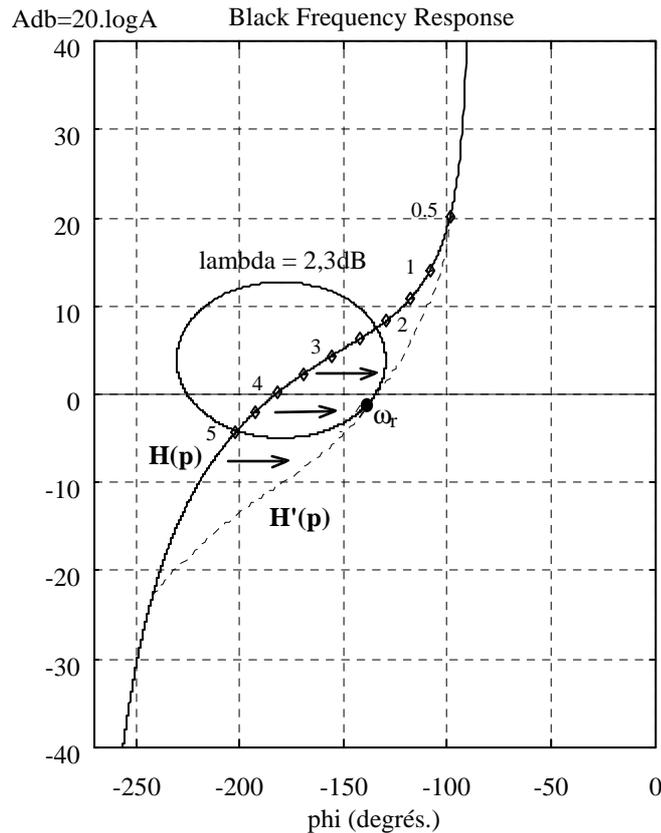


Fig. 9-12 : déformation locale de $H(p) = \frac{10}{p(1+0,015p+0,00016p^2)}$

On utilise alors le réseau dérivateur Fig. 9-9 que l'on va filtrer par une constante de temps, c'est à dire multiplier par une fonction de transfert du premier ordre (on se souvient qu'un système du premier ordre est un filtre passe-bas. cf § 4-3-4). On obtient le réseau $C(p) = \frac{1+T_1p}{1+T_2p}$ avec : T_1 et

$$T_2 > 0$$

La fonction de Transfert du correcteur à avance de phase est traditionnellement notée avec un paramètre a, qui est le rapport entre les deux constantes de temps T_1 et T_2 : $C(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp}$ $a > 1$

On rencontre également la notation suivante: $C(p) = \frac{1+T_d p}{1+\frac{T_d}{N} p}$ avec N: constante de filtrage

La réponse harmonique du filtre à avance de phase s'étudie en le décomposant en un produit d'un dérivateur pur par un premier ordre. On obtient le diagramme asymptotique de Bode par la méthode indiquée § 6-6-2:

Pour l'amplitude en dB:

Pulsation:	$\frac{1}{aT}$	$\frac{1}{T}$	∞
$1+aTp$	0	+20dB/dec	+20dB/dec
$\frac{1}{1+Tp}$	0	0	-20dB/dec
$\frac{1+aTp}{1+Tp}$	0	+20dB/dec	0

Pour la phase en degrés:

Pulsation:	$\frac{1}{aT}$	$\frac{1}{T}$	∞
$1+aTp$	0°	+ 90°	+ 90°
$\frac{1}{1+Tp}$	0°	0°	- 90°
$\frac{1+aTp}{1+Tp}$	0°	+ 90°	0°

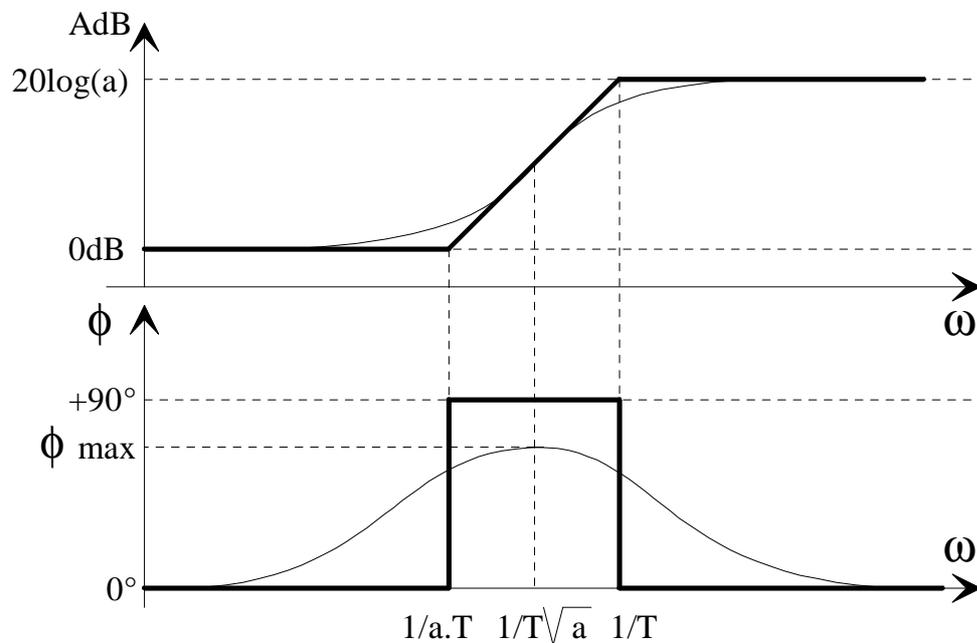


Fig. 9-13: diagramme asymptotique de $C(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp}$

Ce réseau fournit une avance de phase toujours positive, dont le maximum se situe entre les pulsations $\frac{1}{aT}$ et $\frac{1}{T}$ et dépend de la valeur du paramètre a , ce qui n'apparaît pas sur le diagramme asymptotique. Les réponses harmoniques de ce réseau pour plusieurs valeurs de a comprises entre 1 et 10 (valeur que l'on dépasse rarement) sont représentées Fig. 9-14.

$$\text{Amplitude: } A_{dB} = 20 \log |C(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{1 + jaT\omega}{1 + jT\omega} \right| = 20 \log \left[\frac{\sqrt{1 + a^2 T^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \right]$$

$$\text{Phase : } \phi = \text{Arg}[C(j\omega)] = \text{Arg} \left[\frac{1 + jaT\omega}{1 + jT\omega} \right] = \text{Arctg}[aT\omega] - \text{Arctg}[T\omega]$$

La courbe de phase passe par un maximum lorsque la valeur de la pulsation égale à $\frac{1}{T\sqrt{a}}$, pulsation pour laquelle la dérivée de $\phi(\omega)$ s'annule et change de signe. Ce maximum est égal à $\Phi_{max} = \text{arctg}\sqrt{a} - \text{arctg}\frac{1}{\sqrt{a}} = \text{arcsin}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)$

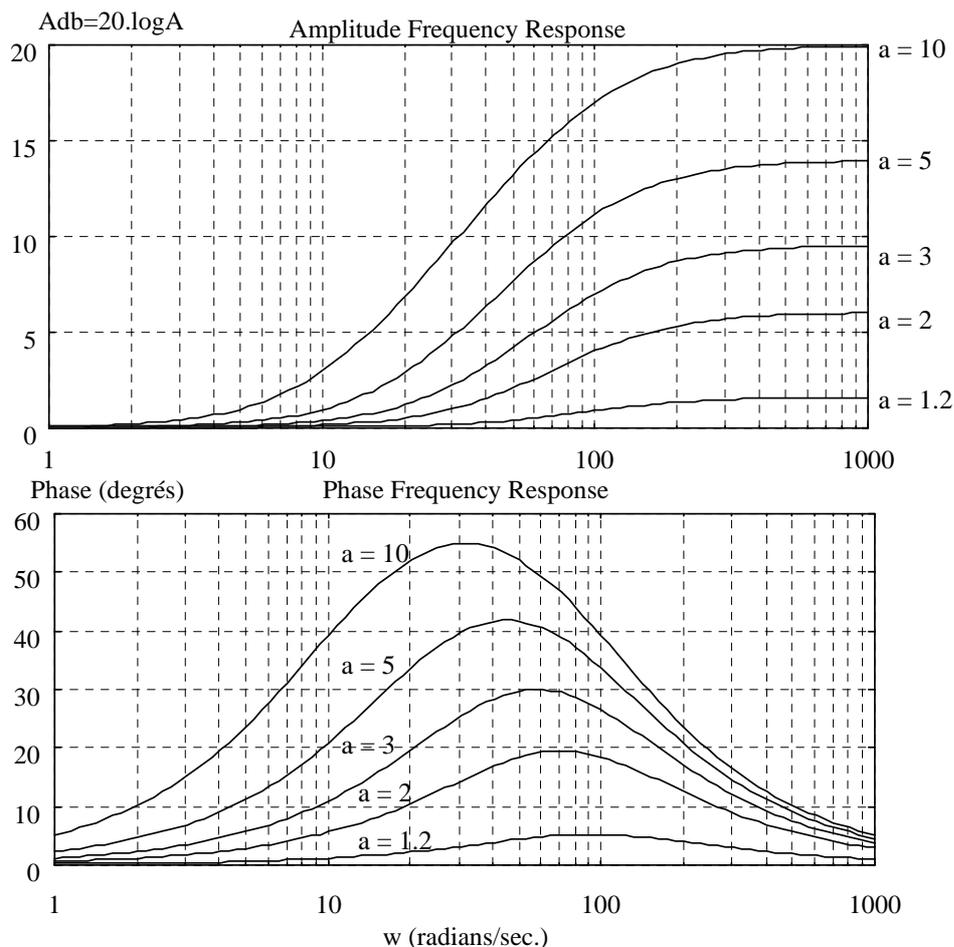


Fig. 9-14: diagramme de Bode de $C(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp}$ pour $a = 1.2, 2, 3, 5, 10$.

La réponse indicielle d'un tel réseau se calcule en utilisant la transformée de Laplace:

$$e(t) = u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$$

$$S(p) = E(p)C(p) = \frac{1}{p} \left[\frac{1+aTp}{1+Tp} \right] = \frac{1}{p} + \frac{T(a-1)}{1+Tp}$$

Après transformation inverse, on trouve finalement: $S(t) = 1 + (a-1)e^{\left(\frac{-t}{T}\right)}$

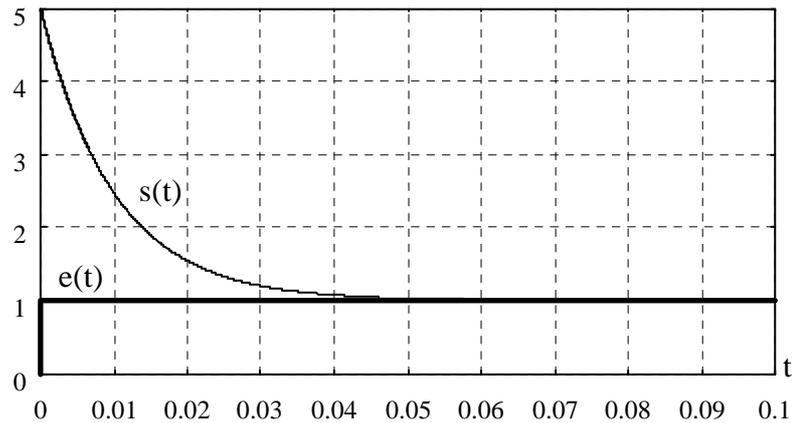


Fig. 9-15: Réponse indicielle de $C(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp}$ pour $a = 5$ et $T = 0,01$

Contrairement aux réseaux non filtrés qui présentent un pic infini en réponse indicielle (Voir Fig. 9-10 et 9-11), le réseau à avance de phase présente un pic d'amplitude limitée à la valeur a .

9-2-3. Réalisation d'un réseau correcteur à avance de phase.

a) Réalisation à partir de composants passifs:

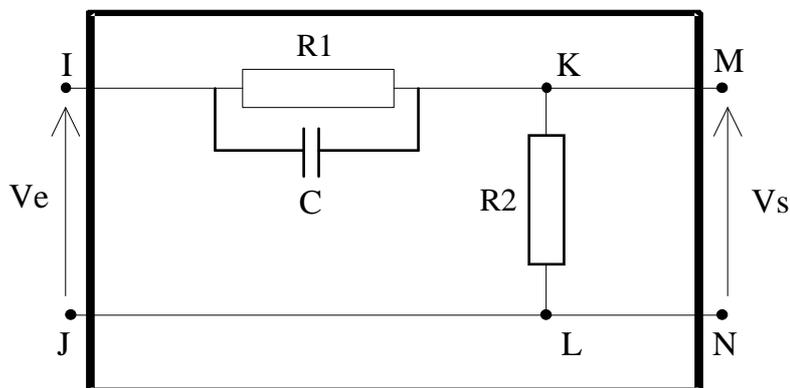


Fig. 9-16 : Réseau correcteur passif à avance de phase.

La fonction de transfert du réseau se détermine en appliquant les lois de Kirchoff:

Maille IJMN: détermination de l'impédance complexe Z du circuit R1C:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow Z = \frac{R1}{1 + j\omega R1C}$$

La tension aux bornes I et K de ce circuit est: $u(t) = V_e(t) - V_s(t)$

$$\text{En passant en variable de Laplace: } Z(p) = \frac{R1}{1 + R1Cp} = \frac{U(p)}{I(p)} = \frac{V_e(p) - V_s(p)}{I(p)}$$

$$\text{Maille KLMN: } V_s(t) = R2i(t) \Rightarrow i(t) = \frac{V_s(t)}{R2}$$

$$\text{En passant en variable de Laplace: } I(p) = \frac{V_s(p)}{R2}$$

En remplaçant $I(p)$ dans la première équation, il vient:

$$V_e(p) = V_s(p) \left[1 + \frac{R1}{R2 + CR1R2p} \right]$$

$$\Rightarrow C(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{\left[1 + \frac{R1}{R2 + CR1R2p} \right]} = \frac{R2}{R1 + R2} \left[\frac{1 + CR1p}{1 + \left(\frac{CR1R2}{R1 + R2} \right)p} \right]$$

La fonction de transfert de ce réseau est de la forme: $C(p) = \frac{1}{a} \left[\frac{1 + aTp}{1 + Tp} \right]$

$$\text{avec: } a = 1 + \frac{R1}{R2} \quad (a > 1) \quad \text{et: } T = \frac{CR1R2}{R1 + R2} \quad (T > 0)$$

Ce réseau introduit une diminution de gain $1/a$ dont il faudra tenir compte.

b) Réalisation à partir de composants actifs : il s'agit d'un montage à base d'amplificateur opérationnel qui réalise une fonction de transfert du même type que la précédente ou une dérivation quasi pure.

c) Réalisation logicielle : le signal analogique est converti en signal numérique par un CAN puis ce signal est dérivé par un algorithme et enfin le signal corrigé est converti en signal analogique par un CNA. La chute du coût ainsi que l'augmentation de la puissance de calcul des processeurs embarqués font que cette solution se rencontre de plus en plus souvent. Il suffit à l'utilisateur de choisir un composant standard (souvent un régulateur PID dont on annule l'action intégrale) et de régler les paramètres pour son application.

d) réalisation matérielle : on peut réaliser une avance de phase mécanique, pneumatique, etc.

9-2-4. Adaptation d'un réseau correcteur à avance de phase.

L'adaptation d'un réseau à avance de phase consiste à choisir les valeurs de a et de T en vue d'obtenir une correction satisfaisante. Si l'on se reporte à la Fig. 9-10, on constate que, pour être efficace, l'avance de phase doit se produire dans la zone du contour à 2.3dB de telle manière que le

lieu $H(p)$ de la FTBO à corriger s'éloigne du point critique. Cette zone est celle de la résonance en boucle fermée.

Détermination de a : L'avance de phase nécessaire pour $H(p)$ au voisinage de la résonance est d'environ 50° sur notre exemple (voir Fig. 9-12). On lit sur les courbes Fig. 9-12 que cela correspond à une valeur de a légèrement inférieure à 10. Dans le cas où l'on ne possède pas les réponses fréquentielles d'un réseau à avance de phase, on utilise la formule suivante: $\phi_{\max} = \arcsin\left[\frac{a-1}{a+1}\right]$ qui donne, pour $a = 10$ $\phi_{\max} = \arcsin\left[\frac{9}{11}\right] = 55^\circ$ et, pour $a = 8$ $\phi_{\max} = \arcsin\left[\frac{7}{9}\right] = 51^\circ$

Détermination de T : Le maximum d'avance de phase de ce réseau se produit pour une pulsation $\omega = \frac{1}{T\sqrt{a}}$. On va choisir T de telle manière que ce maximum d'avance de phase ait lieu aux alentours de la fréquence de résonance en boucle fermée du système corrigé : on prend $\omega = \omega_r$. et on en déduit : $T = \frac{1}{\omega_r\sqrt{a}}$. Comme on ne connaît pas cette fréquence à l'avance, il faudra procéder par approches successives en majorant la fréquence de résonance de la FTBF non corrigée (que l'on connaît) de 20% à 100%. Cette majoration est due au fait que, après correction, le système possédera une fréquence de résonance plus élevée comme nous allons le vérifier.

Exemple: Considérons le système de FTBO $H(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0,2p)}$ dont nous avons étudié le réglage du gain au § 8-2-2.

On se donne les objectifs suivants :

- * Erreur statique nulle
- * Erreur de vitesse inférieure à : 0.15 (*)
- * Bande passante en BF $> 7\text{rad/s}$ (ou $\text{Tr}5\% < 1\text{s}$)
- * Système stable !

nous avons vu que $H(p)$ est instable et qu'il faut diminuer son gain pour la stabiliser.

Le réglage du gain aboutit à une FTBO réglée : $H'(p) = \frac{3.16}{p(1+0,1p)(1+0,2p)}$

- L'erreur statique est nulle car le système possède une intégration.
- La valeur de la pulsation de résonance en BF est : $\omega_r = 3\text{rad/s}$

EVALUATION DES PERFORMANCES DU SYSTEME : On considère souvent que le système en boucle fermée se comporte en première analyse comme un second ordre. Il est alors possible, en se servant des résultats démontrés lors de l'étude des systèmes du second ordre, de définir un gain équivalent K , un amortissement équivalent z et une pulsation propre équivalente. Ces valeurs permettent de chiffrer approximativement les performances fréquentielles et temporelles du système en Boucle fermée : précision statique, précision dynamique, rapidité, bande passante, nombre et valeur des dépassements, etc.

(*) ε_v est exprimé en $U/U/s$ avec U : unité de la grandeur de sortie (position en mm par exemple).

- L'erreur en vitesse est $\varepsilon v = \frac{1}{K} = 0.316$ (voir tableau de synthèse §7-3-5) : objectif non satisfait.
 - L'amortissement équivalent est déterminé en utilisant la relation $Q = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}$ ou en utilisant la courbe Fig. 5-16 § 5-4-1. Le gain du système étant réglé, $Q=1.3$ et on trouve $z = 0.43$.
 - La pulsation de résonance en BF est déterminée par la pulsation du point tangent au contour 2.3dB. C'est la "vraie" pulsation de résonance en BF. $\omega_r = 3\text{rad/s}$
 - Le temps de réponse à 5% équivalent est déterminé à partir de z et de ω_r : Pour $z = 0.43$, le rapport $\frac{\omega_r}{\omega_n}$ est égal à 0.8 (en utilisant la relation $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2z^2}$ ou en utilisant la courbe Fig. 5-25 §5-4-5) d'où on déduit : $\omega_n = \frac{\omega_r}{0.8} = \frac{3}{0.8} = 3,7\text{rad/s}$. En utilisant ensuite la courbe des temps de réponse à 5% d'un système du second ordre (Fig5-13 §5-3-3), on trouve $Tr\omega_n \approx 5.5$ et finalement $Tr5\% = \frac{5.5}{\omega_n} \approx 1.5$ exprimé dans l'unité de temps employée pour T1 et T2 (seconde dans notre cas).
- Il n'est donc pas possible, par un simple réglage du gain, d'obtenir les performances désirées tout en conservant la stabilité. Nous allons maintenant mettre en œuvre une correction par avance de phase.

Détermination de a : L'avance de phase nécessaire pour $H(p)$ au voisinage de la résonance est d'environ 42° sur notre exemple (voir Fig. 9-17 : la courbe en traits pointillés est la FTBO $H'(p)$ obtenue après réglage du gain). On lit sur les courbes Fig. 9-14 que cela correspond à une valeur de a égale à 5.

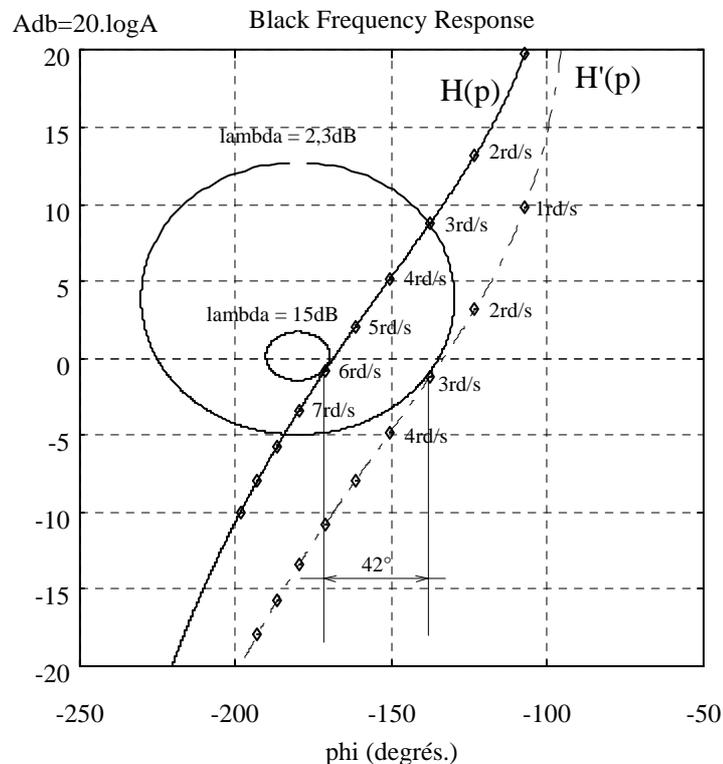


Fig. 9-17 : Détermination de l'avance de phase pour la correction de $H(p) = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0,2p)}$

Détermination de T : Le maximum d'avance de phase de ce réseau doit se produire pour $\omega_m = \omega_r = 6 \text{ rad/s}$. Cette pulsation de résonance est celle du système non corrigé (Fig. 9-17 courbe H(p)) et correspond à $Q = 15 \text{ dB}$. Comme nous ne connaissons pas à l'avance la pulsation de résonance du système corrigé, il faut procéder par approches successives. Nous allons effectuer le calcul de $T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}}$ pour plusieurs valeurs de ω_m et regrouper les résultats dans le tableau Fig. 9-

20.

Sachant que la fréquence de résonance du système corrigé est supérieure à celle du système non corrigé, on partira de 6 rad/s en augmentant les valeurs.

Pour chaque valeur de, la marche à suivre est identique.

$$\omega_m = 6 \text{ rad/s} \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} = \frac{1}{6\sqrt{5}} = 0.075 \text{ s}$$

La FTBO corrigée est :

$$G(p) = H(p).C(p) = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0,2p)} \frac{1+aTp}{1+Tp} = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0,2p)} \frac{1+0,375p}{1+0,075p}$$

Elle est représentée Fig. 9-18. Cette courbe passe encore dans le contour à $2,3 \text{ dB}$ et l'on doit diminuer son gain de 6 dB ($0,5$) pour la rendre tangente au contour (courbe $G'(p)$).

$$\text{La FTBO du système corrigé et réglé est alors } G'(p) = \frac{5}{p(1+0,1p)(1+0,2p)} \frac{1+0,375p}{1+0,075p}$$

* La résonance en BF à lieu pour $\omega_r = 7,3 \text{ rad/s}$

* Le gain statique est $K' = 10 \times 0,5 = 5$ ($K'_{\text{dB}} = 14 \text{ dB}$).

* L'écart statique est nul (une intégration en BO)

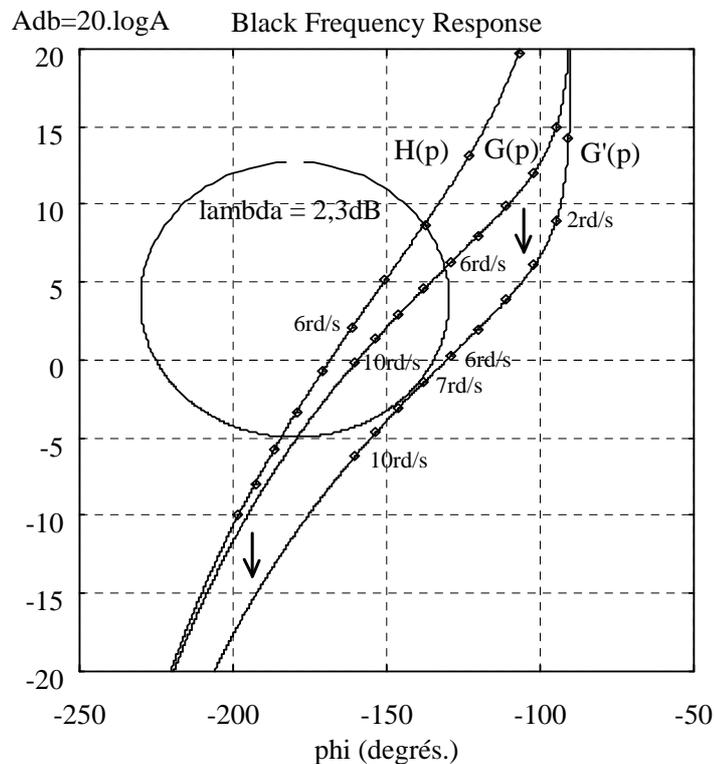


Fig. 9-18 : correction de H(p) par avance de phase avec $a=5$ et $\omega_m=6 \text{ rad/s}$

Les paramètres du second ordre équivalent sont :

* Ecart de poursuite pour une rampe unitaire $\varepsilon_v = \frac{1}{K'} = \frac{1}{5} = 0.2$ (exprimé en u / u/s avec u : unité de la grandeur de sortie)

* Temps de réponse à 5% : $Tr_{5\%} = \frac{5.5}{\omega_n} = \frac{5.5 \times 0.8}{\omega_r} = 0.6s$

On procédera de même pour diverses valeurs de ω (voir résultats dans le tableau Fig. 9-20).

La Fig. 9-19 représente les fonctions $G(p)$ obtenues pour plusieurs valeurs de la pulsation d'avance maximum du correcteur (la fonction $H(p)$ non corrigée est en pointillés). On remarque que pour $\omega_m = 4\text{rad/s}$ et $\omega_m = 6\text{rad/s}$, la déformation de $H(p)$ a lieu dans la zone supérieure du diagramme ; en d'autres termes, l'avance de phase se produit à trop basse fréquence. Inversement pour $\omega_m = 24\text{rad/s}$, la déformation de $H(p)$ a lieu dans la zone inférieure du diagramme et l'avance de phase se produit à trop haute fréquence. L'avance de phase est maximale dans la zone qui nous intéresse (environ 30° d'avance de phase) pour $\omega_m = 12\text{rad/s}$.

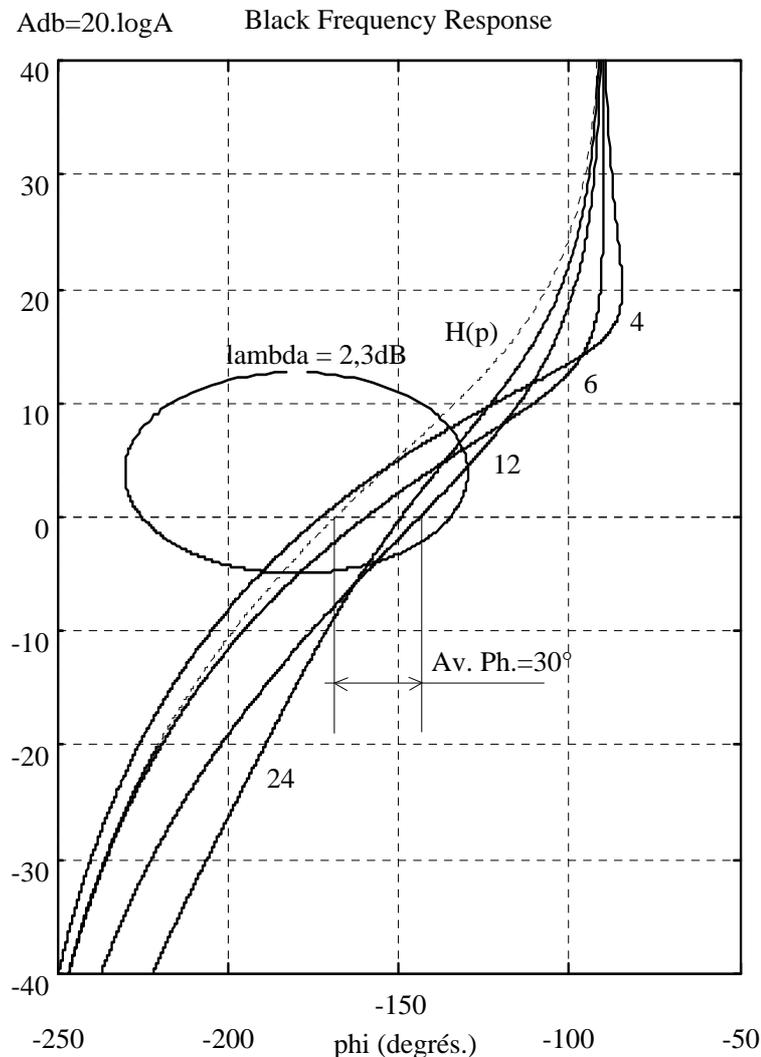


Fig. 9-19 : Courbes $G(p)$ pour $a = 5$ et $\omega_m = 4\text{rad/s}$, 6rad/s , 12rad/s et 24rad/s

	T(s)	K'	ω_r (rad/s)	ϵ_v	Tr5%(s)
4	0.11	3.76	7.2	0.26	0.61
5	0.09	4.46	7.4	0.22	0.59
6	0.075	5	7.3	0.2	0.6
9	0.05	6.68	7	0.15	0.63
10	0.044	7.08	6.7	0.14	0.65
12	0.037	7.08	5.95	0.14	0.74
14	0.032	7	5.5	0.143	0.8
18	0.0248	6.3	4.55	0.16	0.96
24	0.0186	5	3.8	0.2	1.15
60	0.00074	4	3.3	0.25	1.33

Fig. 9-20-a : Tableau de résultats pour a = 5.

Les performances n'atteignent pas leur maximum pour une même valeur de ω_m . c'est en général le cas lorsque l'on désire déterminer T.

* La précision dynamique, qui évolue avec le gain, est la meilleure pour $\omega_m = 10$ ou 12rad/s.

* La rapidité, qui évolue avec la bande passante, est la meilleure pour $\omega_m = 5$ rad/s.

Pour satisfaire les critères que nous nous sommes donnés, on peut choisir $\omega_m = 10$ rad/s correspondant à T = 0.044. Le correcteur choisi possède une fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{1+0.22p}{1+0.044p}$$

La FTBO corrigée et réglée est finalement :
$$G'(p) = \frac{7.08}{p(1+0.1p)(1+0.2p)} \frac{1+0.22p}{1+0.044p}$$

Si les performances obtenues après correction avaient été légèrement inférieures aux performances désirées (Bande passante requise > 8rad/s, par exemple), il aurait été possible de choisir une avance de phase plus importante en prenant a = 7 par exemple. En appliquant la même méthode que précédemment, on obtient le tableau suivant :

ω_m (rad/s)	T(s)	K'	ω_r (rad/s)	ϵ_v	Tr5%(s)
4	0.095	3.35	7.8	0.3	0.56
5	0.075	4.21	8.2	0.23	0.536
6	0.063	5	8.3	0.2	0.53
9	0.042	7.08	8.3	0.14	0.53
10	0.037	7.5	7.9	0.133	0.55
12	0.031	7.94	7.2	0.126	0.61
14	0.027	7.94	6.5	0.126	0.67
18	0.021	7.5	5.5	0.133	0.8
24	0.015	5.95	4.4	0.168	1
60	0.0006	4	3.3	0.25	1.33

Fig. 9-20-b : Tableau de résultats pour a = 7.

Pour une précision dynamique équivalente, la bande passante (et donc la rapidité) ont augmenté. Il serait tentant de choisir une valeur élevée du paramètre a , pour obtenir les meilleures performances. En réalité, la valeur de a est limitée environ à 10 car une augmentation trop importante de l'action dérivée amplifierait de manière insupportable les bruits de fond (Voir § 9-2-5). Pour cette raison, on conservera la valeur $a = 5$ dans notre exemple, la valeur de $a = 7$ conduisant à une augmentation inutile de la bande passante (qui favorise également les bruits de fond). Une synthèse des résultats est fournie dans le tableau suivant :

Etat	FTBO	ω_r (rad/s)	ε_v	Tr5% (s)	Commentaires
Avant réglage du gain.	$\frac{10}{p(1+0,1p)(1+0.2p)}$	6	/	/	Pas assez stable.
Après réglage du gain.	$\frac{3.16}{p(1+0,1p)(1+0.2p)}$	3	0.316	1.5	Pas assez rapide. Pas assez précis
Après correction et réglage du gain. ($a = 5$)	$\frac{7.08}{p(1+0,1p)(1+0.2p)} \frac{1+0.22p}{1+0.044p}$	6.7	0.14	0.65	Satisfaisant.
Après correction et réglage du gain. ($a = 7$)	$\frac{7.08}{p(1+0,1p)(1+0.2p)} \frac{1+0.29p}{1+0.042p}$	8.3	0.14	0.53	Excès de bande passante inutile.

Fig. 9-21 : Bilan de la correction par avance de phase de $H(p) = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0.2p)}$

Cas particulier : Lorsque la fonction de transfert à compenser possède une constante de temps dominante : $H(p) = G(p) \frac{K}{1+T_1p}$ on choisit a et T de telle manière que $a.T = T_1$. La constante de temps dominante sera divisée par a .

Par exemple, pour un système du premier ordre de FTBO $H(p) = \frac{K}{1+T_1p}$, on prend $a.T = T_1$ et donc $T = T_1/a$.

La FTBO corrigée est $H'(p) = C(p)H(p) = \frac{K(1+T_1p)}{(1+T_1p)\left(1+\frac{T_1}{a}p\right)} = \frac{K}{1+\frac{T_1}{a}p}$

La FTBO corrigée est toujours un premier ordre mais la constante de temps a été divisée par a : le temps de réponse et la bande passante ont augmenté du même facteur.

REMARQUE: Dans ce cas, le système non compensé (FTBO du premier ordre) est intrinsèquement stable : il n'est pas nécessaire de provoquer une avance de phase dans la zone critique car la FTBO déphase au maximum de -90° . L'action du correcteur dérivé est néanmoins sensible sur la rapidité.

9-2-5. Influence de la correction par avance de phase sur les performances :

Avantages:

- * Le réseau à avance de phase provoque une augmentation notable de la bande passante du système en BF qui se traduit par une augmentation de la rapidité.
- * Le déphasage positif dans la zone critique augmente la marge de phase : l'avance de phase améliore la stabilité.

Inconvénients:

- * provoque un pic important lors des changements brutaux de consigne si a est grand.
- * La différentiation d'un signal augmente le bruit de fond.

On peut s'en convaincre en comparant un signal bruité et le signal dérivé Fig. 9-22. Cette augmentation des bruits de fond est la principale limitation de la correction dérivée.

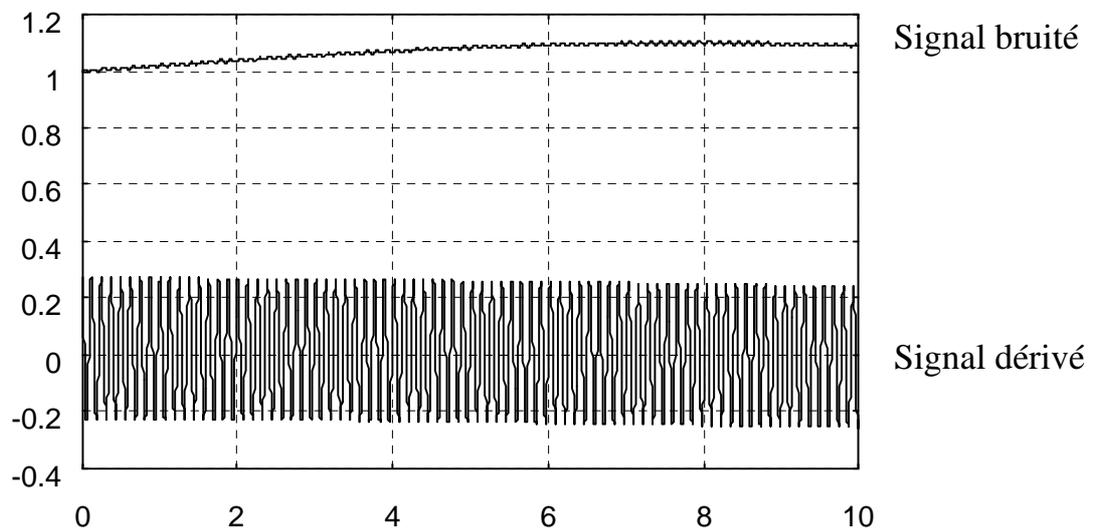


Fig. 9-22 Augmentation des bruits de fond par dérivation.

Particularités:

- * Aucun effet sur la précision.
- * Toujours couplé à un correcteur proportionnel car le signal dérivé est nul en régime permanent à mesure constante.
- * nécessité de filtrage dans certains cas (correcteur numérique).
- * Ne peut pas stabiliser un système très instable comme un système à deux intégrations car l'avance de phase maximum est d'environ 55° pour $a = 10$.
- * Ne peut pas compenser les retards importants comme $H(p) = \frac{e^{-\tau p}}{1 + T_1 p}$ avec $\tau > 0.5T_1$. Ce type de fonction de transfert que nous avons étudié § 6-2 (modèle de Broïda) se rencontre en régulation.

9-3. CORRECTEUR INTEGRAL OU A RETARD DE PHASE.

9-3-1. Approche intuitive de la correction intégrale :

Intéressons-nous cette fois-ci à un asservissement de vitesse : nous avons montré § 7-1-1 que cet asservissement était intrinsèquement imprécis. Il est possible de diminuer l'écart statique en augmentant le gain de l'ampli mais on est limité par l'apparition de l'instabilité. Nous savons d'autre part qu'il est nécessaire de conserver un écart $\varepsilon(t)$ non nul en régime permanent pour assurer la commande $S_c(t)$ du moteur (cf § 2-3-1).

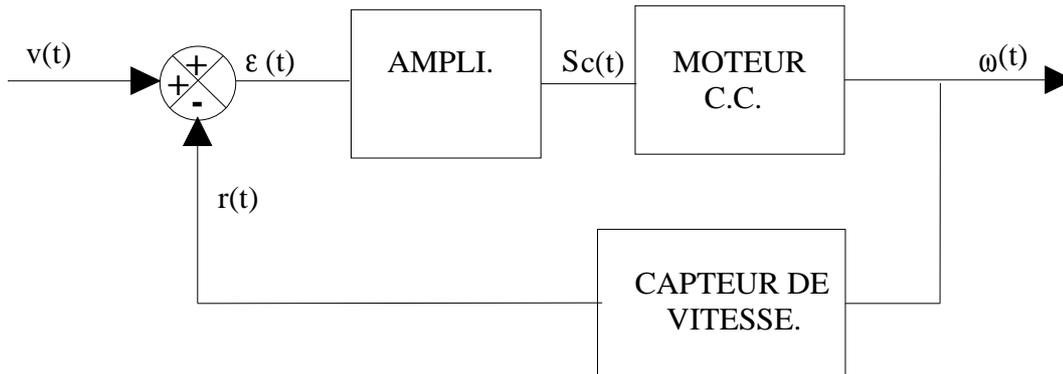


Fig. 9-23 Asservissement de vitesse.

Une première idée consiste à ajouter une contribution de valeur constante à l'écart, contribution qui permettrait d'entretenir la rotation du moteur alors même que la vitesse visée est atteinte et que l'écart est nul. L'inconvénient de cette solution réside dans le fait qu'il faut modifier la valeur de cette contribution à chaque fois que l'on change la consigne : en effet, l'écart en régime permanent dépend de la vitesse visée et n'est donc pas constant a priori. Malgré tout, cette solution est souvent utilisée (parfois en complément à d'autres types de corrections) dans le cadre de régulations : la contribution constante est réglable et s'appelle "offset", "intégrale manuelle" ou "centrage de bande".

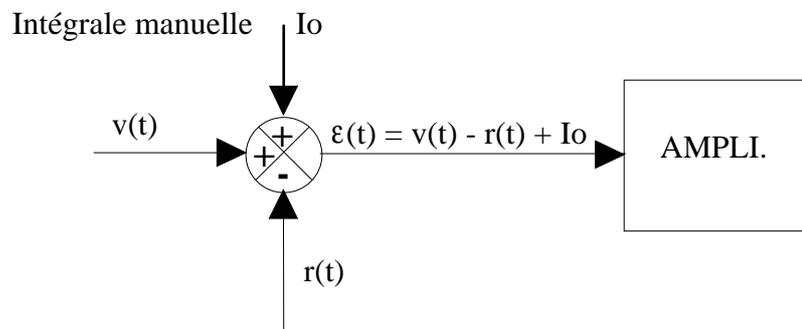


Fig. 9-24 Régulation avec intégrale manuelle.

Une seconde idée consiste à ajouter une contribution correspondant à l'intégrale de l'écart : en régime permanent, l'écart est à peu près constant et son intégrale augmente linéairement avec le temps. Cette contribution, très progressive, permet une augmentation de l'écart corrigé, qui va provoquer une augmentation de la commande jusqu'à ce que l'écart soit nul (consigne atteinte). Dès que l'écart est nul, la contribution reste constante car elle intègre un signal nul.

$$\text{L'écart corrigé est : } \varepsilon'(t) = K_p \varepsilon(t) + \frac{1}{K_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt = \varepsilon_p(t) + \varepsilon_i(t) \quad (9-2)$$

Ce signal est la somme d'une contribution proportionnelle ε_p et d'une contribution intégrale ε_i . Le coefficient K_i d'action intégrale, apparaît au dénominateur.

La structure correspondante est la suivante :

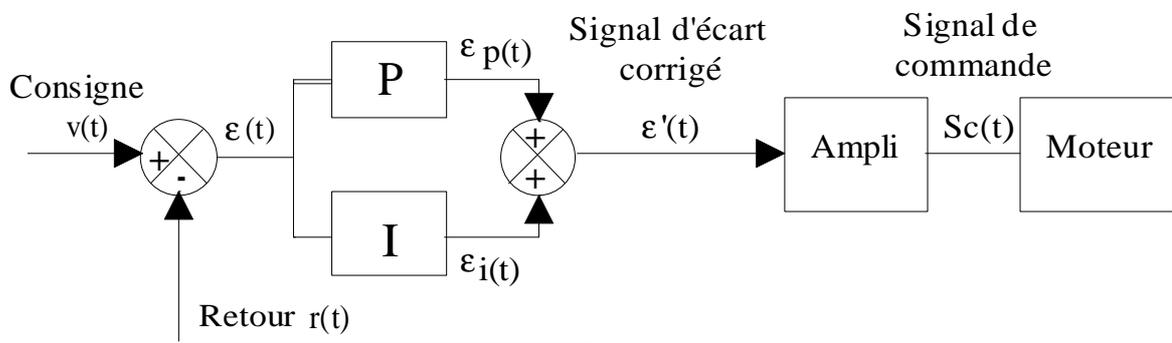


Fig. 9-25 : Structure de la boucle avec correcteur intégral.

On peut prévoir empiriquement les effets de cette modification (Voir Fig. 9-26) :

Plaçons-nous en régime permanent, correcteur intégral désactivé. La consigne de vitesse étant Ω_c , il existe un écart $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ constant permettant la commande du moteur à la vitesse $\Omega_m(t)$. Dès la mise en action du correcteur intégral, ce dernier va accumuler l'écart par intégration. Le signal de commande $Sc(t)$ va progressivement augmenter, la vitesse du moteur également, l'écart diminuant (on se rapproche de la vitesse visée). Le correcteur proportionnel fournit un signal $\varepsilon_p(t)$ de plus en plus faible alors que la contribution du correcteur intégral $\varepsilon_i(t)$ augmente progressivement. Au bout d'un certain temps, la vitesse $\Omega_m(t)$ atteinte par le moteur est égale à la consigne Ω_c et l'écart $\varepsilon(t)$ s'annule avec les conséquences suivantes :

- * La contribution proportionnelle $\varepsilon_p(t)$ est nulle.
- * La contribution intégrale $\varepsilon_i(t)$ est constante (elle a "mémorisé" la valeur atteinte et accumule maintenant une valeur nulle : elle n'augmente plus).

L'intégrateur a fourni au système le signal de commande permanent nécessaire à l'entretien de la vitesse du moteur lorsque la consigne est atteinte (écart nul).

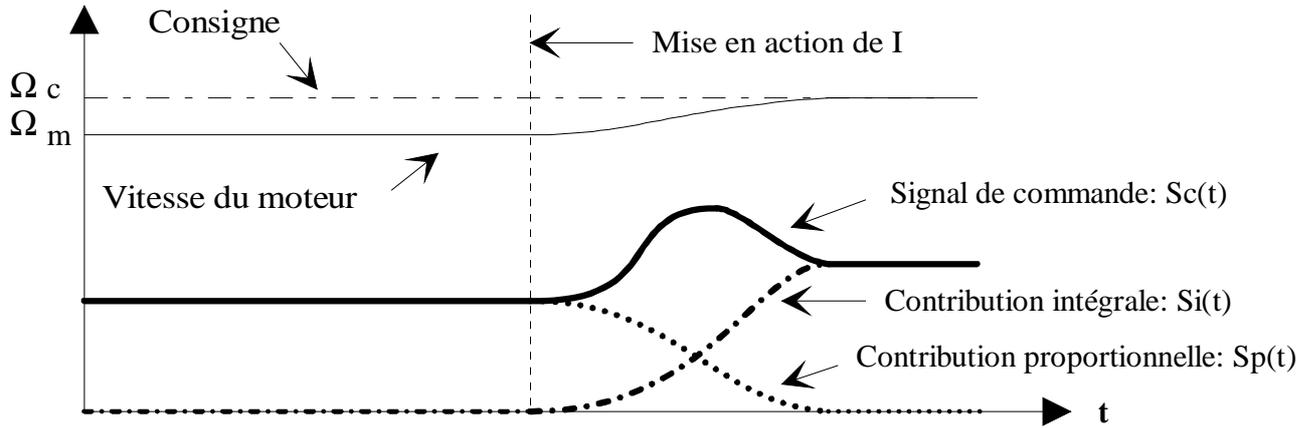


Fig. 9-26 : Effets de la correction intégrale.

Les performances que l'on peut prévoir sont les suivantes :

- * La précision est augmentée.
- * Le processus d'intégration, lent, sera sensible en régime permanent. Par contre, en régime transitoire le correcteur n'aura pas le temps d'agir : il n'y aura probablement pas d'amélioration de la rapidité.

9-3-2. Approche formelle de la correction intégrale :

a) Par ajout d'une intégration en BO.

Nous avons montré § 7-3-1 qu'un système bouclé était précis s'il y avait une intégration dans la boucle (la FTBO est de classe 1). Il suffit donc d'ajouter, dans la boucle, un correcteur possédant une intégration pour que la FTBO compensée, qui est le produit de la FTBO par la FT du correcteur, en possède une également. La fonction de transfert du correcteur est du type :

$$C(p) = \frac{1}{T_p p}$$

Prenons le cas d'une FTBO sans intégration :
$$H(p) = \frac{0.8}{(1+0.01p)(1+0.3p+0.25p^2)}$$

L'erreur statique est égale à $\frac{1}{1+K}$ avec $K = -1.96\text{dB}$ (0.8). On a donc $\varepsilon_s = \frac{1}{1+0.8} = 0.55$

En la multipliant par $C(p)$, on obtient une FTBO compensée possédant une intégration et dont

l'erreur statique est nulle :
$$H'(p) = \frac{0.8}{p(1+0.01p)(1+0.3p+0.25p^2)}$$

On constate sur la Fig. 9-27 que la marge de stabilité de la FTBO compensée est trop faible. Il suffirait de diminuer le gain ce qui ne pose pas de problème car $H'(p)$ possède une intégration. Le système est précis quel que soit le gain de BO.

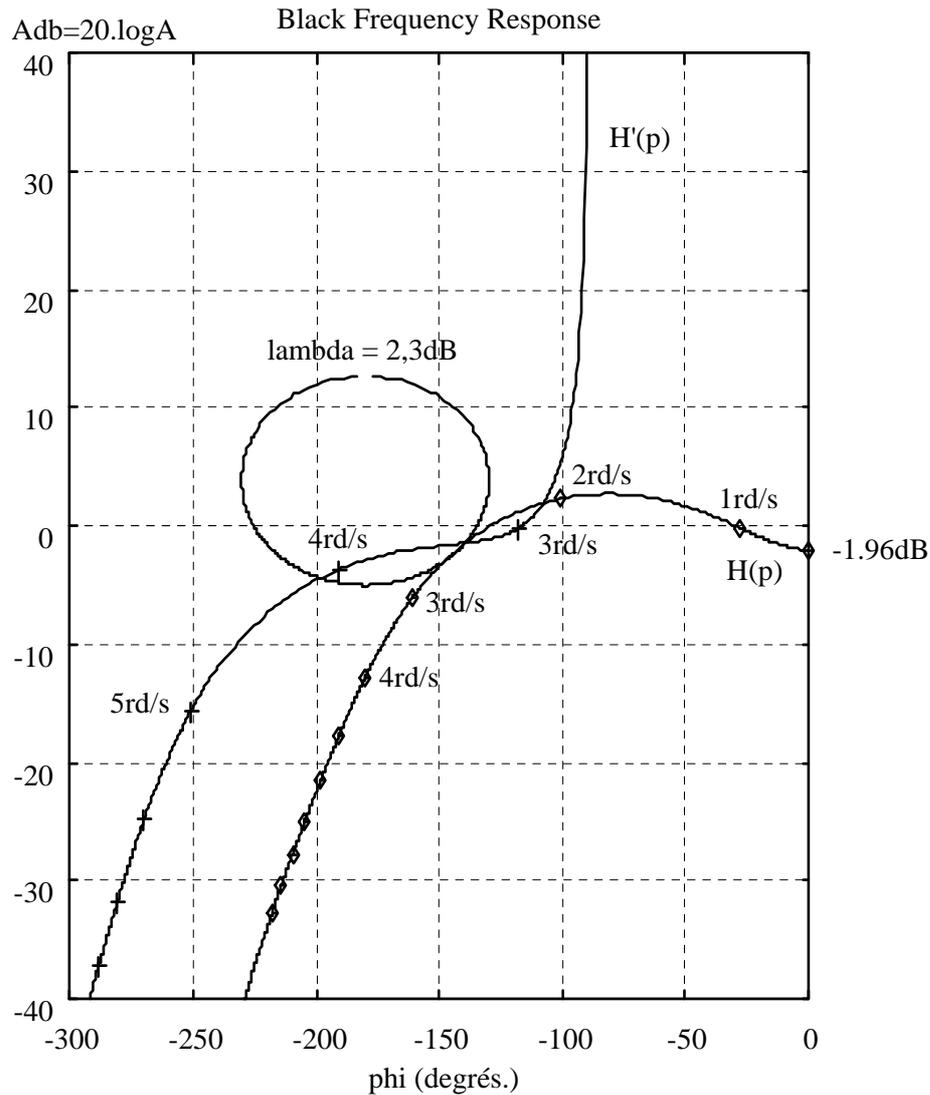


Fig. 9-27 : $H(p) = \frac{0.8}{(1+0.01p)(1+0.3p+0.25p^2)}$ et $H'(p) = \frac{0.8}{p(1+0.01p)(1+0.3p+0.25p^2)}$

L'effet intégrateur est obtenu par un réseau $C(p) = \frac{1}{Tp}$ (Fig. 9-28) ou par un réseau $C(p) = 1 + \frac{1}{Tp}$ (Fig. 9-29). Ces deux réseaux possèdent les mêmes inconvénients

* à basse fréquence leur amplitude est infinie ce qui pose le problème de la réalisation matérielle : impossible en circuits passifs, possible en circuit actif avec ampli-opérationnel et usuel en implantation numérique.

* Leur déphasage est constant et égal à -90° . Si l'on applique l'un de ces correcteurs à un système il est probable que ce déphasage va le rendre instable par décalage à gauche de la FTBO au voisinage de la zone critique. Cet inconvénient majeur conduit à rechercher une autre solution.

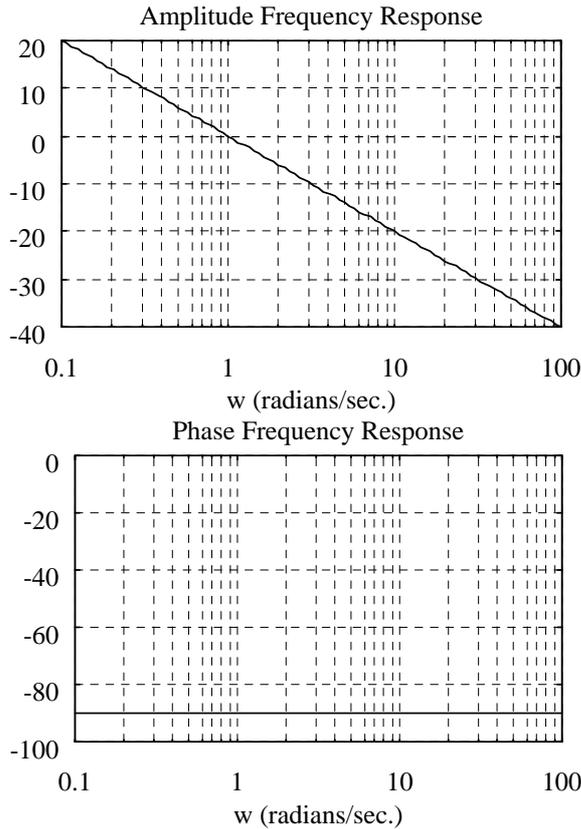


Fig. 9-28 : $C(p) = \frac{1}{p}$

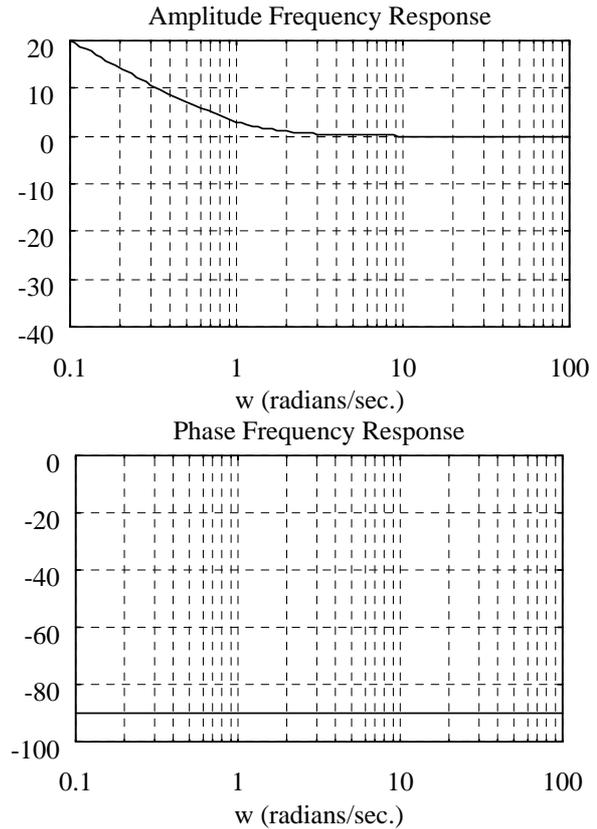


Fig. 9-29 : $C(p) = 1 + \frac{1}{p}$

b) Par déformation locale de la FTBO.

Comme dans le cas de la correction par avance de phase, on va déformer la FTBO mais à un endroit différent : en déplaçant vers le haut la zone de basse fréquence de la FTBO, on augmente le gain statique (et les performances afférentes) sans rendre le système instable : la FTBO est toujours tangente au contour à 2.3dB. Le correcteur permettant cette déformation possède la réponse théorique suivante :

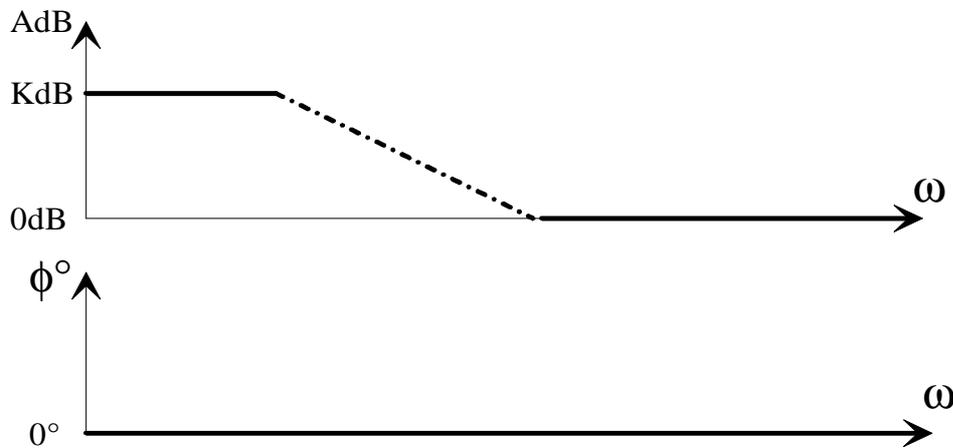


Fig. 9-30.

En déformant $H(p) = \frac{0.8}{(1+0.01p)(1+0.3p+0.25p^2)}$ dans sa zone de basses fréquences, on peut remonter le point de gain statique (-1.96dB) vers le point +8.04dB (2.52) par exemple. Dans ce cas, la précision statique qui était de 0.55 passerait à $\frac{1}{1+2.52} = 0.28$ sans mettre en péril la stabilité du système.

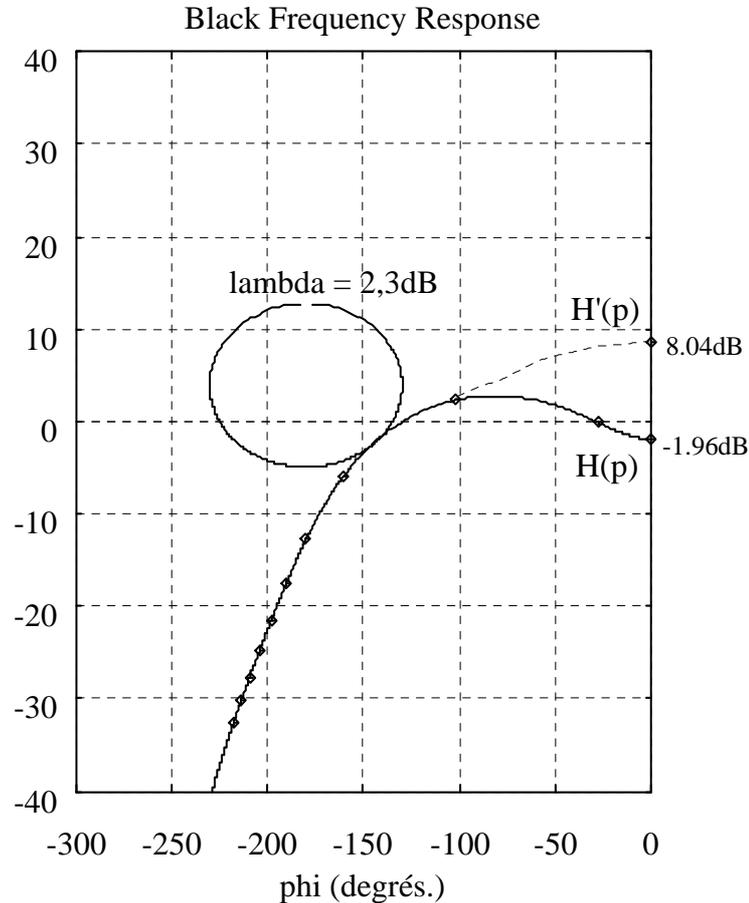


fig. 9-31 : Déformation locale de $H(p) = \frac{0.8}{(1+0.01p)(1+0.3p+0.25p^2)}$

Pour les mêmes raisons qui interdisaient la réalisation d'un réseau déphaseur théorique, ce réseau n'est pas réalisable (il n'existe pas de fonction de transfert correspondant à cette réponse harmonique). On peut l'approcher en réalisant un réseau à retard de phase de fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{1+T_1p}{1+T_2p} \quad \text{avec: } T_1 \text{ et } T_2 > 0 \quad \text{et} \quad T_2 > T_1$$

La notation usuelle est $C(p) = \frac{1+Tp}{1+bTp}$ avec: $b > 0$ et $T_1 = T$

On remarque la symétrie avec le réseau à avance de phase.

La réponse harmonique du filtre à retard de phase s'étudie de la même manière que celle du réseau à avance de phase. On obtient le diagramme asymptotique de Bode par la méthode indiquée § 6-6-2 :
Pour l'amplitude en dB :

Pulsation:	$\frac{1}{bT}$	$\frac{1}{T}$	∞
$1+Tp$	0dB	0dB	+20dB/dec
$\frac{1}{1+bTp}$	0dB	-20dB/dec	-20dB/dec
$\frac{1+Tp}{1+bTp}$	0dB	-20dB/dec	0dB

Pour la phase en degrés :

Pulsation:	$\frac{1}{bT}$	$\frac{1}{T}$	∞
$1+Tp$	0°	0°	+ 90°
$\frac{1}{1+bTp}$	0°	-90°	- 90°
$\frac{1+Tp}{1+bTp}$	0°	- 90°	0°

Ce qui donne, pour le diagramme asymptotique :

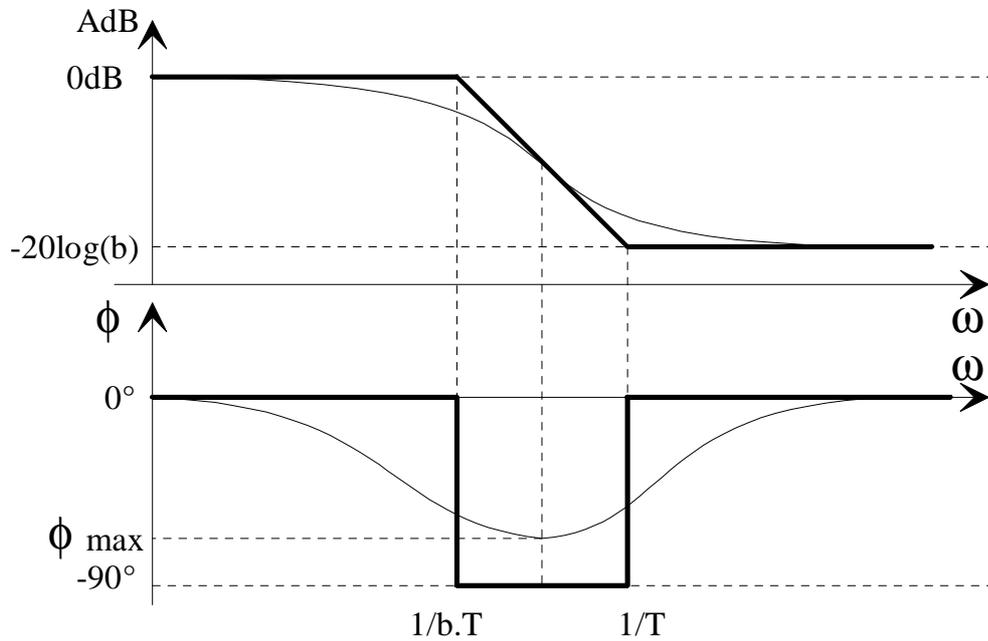


Fig. 9-32 : diagramme asymptotique de $C(p) = \frac{1+Tp}{1+bTp}$

Ce réseau fournit un retard de phase toujours négatif dans la zone de fréquences comprise entre $\frac{1}{bT}$ et $\frac{1}{T}$. Il sera possible de minimiser cet inconvénient en choisissant T de telle manière que la fréquence $\frac{1}{T}$ soit suffisamment faible par rapport à la fréquence de résonance en BF. Ainsi, le déphasage nuisible restera faible (mais non nul) dans la zone critique. Les réponses harmoniques de ce réseau pour plusieurs valeurs de a comprises entre 1.2 et 10 sont représentées Fig. 9-33.

$$\text{Amplitude: } \text{AdB} = 20 \log |C(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{1 + jT\omega}{1 + jbT\omega} \right| = 20 \log \left[\frac{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}{\sqrt{1 + b^2T^2\omega^2}} \right]$$

$$\text{Phase : } \phi = \text{Arg}[C(j\omega)] = \text{Arg} \left[\frac{1 + jT\omega}{1 + jbT\omega} \right] = \text{Arctg}[T\omega] - \text{Arctg}[bT\omega]$$

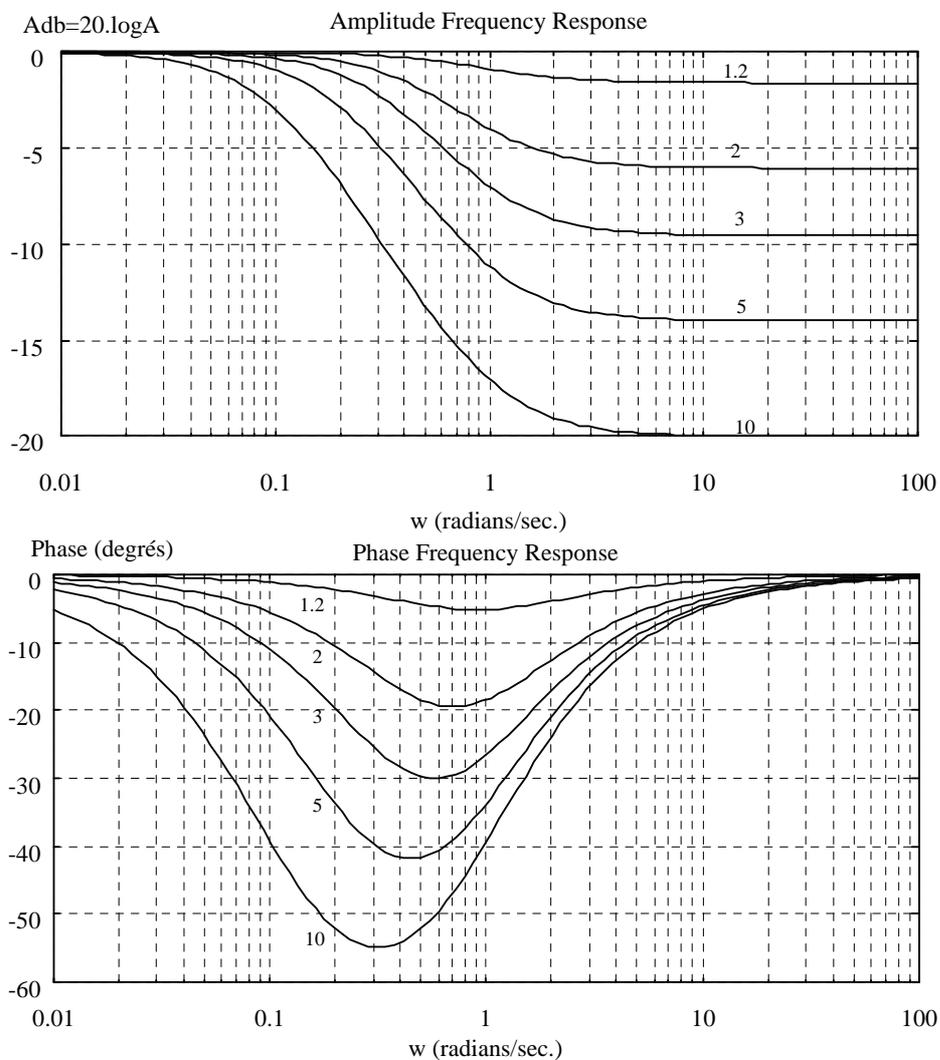


Fig. 9-33 Diagramme de bode de $C(p) = \frac{1+Tp}{1+bTp}$ pour $T = 1$ et $b = 1.2, 2, 3, 5, 10$.

9-3-3. Réalisation d'un réseau à retard de phase :

a) réalisation à partir de composants passifs.

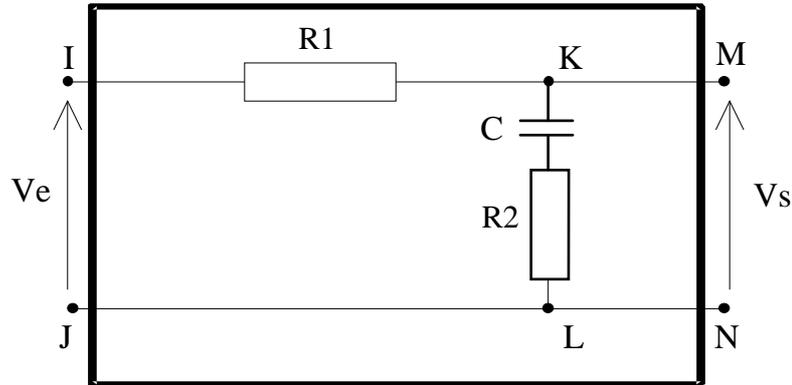


Fig. 9-34 : Réseau correcteur passif à retard de phase.

La fonction de transfert du réseau se détermine de la même manière que celle appliquée en 9-2-3.

Lois de Kirchoff :

$$\text{Maille ABEF : } V_e(t) = R_1 i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt + R_2 i(t)$$

$$\text{En passant en variable de Laplace : } V_e(p) = R_1 I(p) + \frac{I(p)}{p} + R_2 I(p) = I(p) \left[R_1 + R_2 + \frac{1}{Cp} \right]$$

$$\text{Maille KLMN : } V_s(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt + R_2 i(t)$$

$$\text{En passant en variable de Laplace : } V_s(p) = R_2 I(p) + \frac{I(p)}{p} = I(p) \left[R_2 + \frac{1}{Cp} \right]$$

$$\text{Finalement: } C(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cp}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cp}} = \frac{1 + R_2 Cp}{1 + (R_1 + R_2) Cp}$$

$$\text{La fonction de transfert de ce réseau est de la forme : } C(p) = \left[\frac{1 + Tp}{1 + bTp} \right]$$

$$\text{avec: } b = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad (b > 1) \quad \text{et : } T = R_2 C \quad (T > 0)$$

Ce réseau, contrairement au réseau d'avance de phase, n'introduit pas de diminution de gain.

b) Réalisation à partir de composants actifs : il s'agit d'un montage à base d'amplificateur opérationnel qui réalise soit une fonction de transfert du même type que la précédente soit une intégration pure. (contrairement au dérivateur pur qui ne peut être réalisé par ce procédé.

c) Réalisation logicielle : même principe que pour la correction dérivée. Il faut prévoir un mécanisme anti saturation lorsque l'on réalise un algorithme intégrateur pur. En effet, lorsque l'actionneur ou le

préactionneur est en saturation (saturation d'un variateur, arrivée en butée d'un mobile etc.), l'intégrateur continue à intégrer l'écart et à augmenter inutilement la commande.

d) réalisation matérielle : on peut réaliser un retard de phase par accumulation de fluide par exemple (pneumatique, hydraulique).

9-3-4. Adaptation d'un réseau correcteur à retard de phase.

L'adaptation d'un réseau à retard de phase consiste à choisir la valeur de T de telle manière que l'influence nocive du correcteur sur la phase soit reléguée à une fréquence suffisamment lointaine de la fréquence de résonance.

Détermination de T : On se donne un déphasage maximum Φ_m tolérable dans la zone de résonance ω_r et on applique : $T > \frac{1}{\omega_r \Phi_m}$. On peut également, sans calcul, prendre une marge d'un ordre de grandeur entre ω_r et $\frac{1}{T}$

Détermination de b : On prendra a égal à l'accroissement désiré de précision. Ceci peut se justifier en observant sur le diagramme de Bode Fig. 9-31 que le correcteur réalise un rapport d'amplitude de valeur b entre basses et hautes fréquences. Ayant diminué le gain au voisinage de la résonance (que l'on assimile aux hautes fréquences) d'un facteur b, on le remontera d'autant lors du réglage du gain. Le gain statique sera augmenté d'autant et l'écart statique diminué de $\frac{1}{1+K} = \frac{1}{1+b}$ que l'on assimile à 1/b. La précision a bien augmenté d'environ un facteur b.

Exemple: Reprenons le système de FTBO $H(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0,2p)}$ pour laquelle nous avons étudié l'adaptation d'un réseau à avance de phase au § 9-2-4.

On se donne ici des objectifs différents :

- * Erreur statique nulle.
- * Erreur de vitesse inférieure à : 0.05
- * Bande passante en BF $> 2\text{rad/s}$ (ou $\text{Tr}5\% < 3\text{s}$)
- * Système stable !

Le réglage du gain aboutit à une FTBO réglée : $H'(p) = \frac{3.16}{p(1+0,1p)(1+0,2p)}$

- L'erreur statique est nulle car le système possède une intégration.
- La valeur de la pulsation de résonance en BF est : $\omega_r = 3\text{rad/s}$
- L'erreur dynamique du second ordre équivalent est $\varepsilon_v = 0.316$.

Les objectifs ne sont pas satisfaits.

Ce cas est particulier car, la FTBO possédant une intégration, le système est précis sans correction. Toutefois, on désire un accroissement substantiel (d'un facteur 7 environ) des performances en poursuite (ε_v requis < 0.05). Nous avons vu § 9-2-4 que la correction dérivée ne provoquait pas d'accroissement assez important de la précision dynamique. La correction intégrale est indiquée.

Détermination de b : Il faut améliorer la précision dynamique d'un facteur 7 : on prend en première approximation $b = 7$

Détermination de T : La fréquence de résonance est $\omega_r = 6 \text{ rad/s}$. En choisissant un facteur 10 entre $\frac{1}{T}$ et ω_r , on trouve $T = \frac{10}{\omega_r} = 16.6 \text{ s}$

La FTBO corrigée est :

$$G(p) = H(p).C(p) = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0,2p)} \frac{1+Tp}{1+bTp} = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0,2p)} \frac{1+16.6p}{1+116.6p}$$

On remarque que la constante de temps du correcteur est élevée. En fait, et comme on peut le constater sur les courbes Fig. 9-35, à partir d'une certaine valeur de T l'amélioration des performances n'est plus significative : l'augmentation possible de gain pour venir tangenter le contour à 2.3dB lors du réglage est quasi identique pour $T = 5$, $T = 10$ et $T = 20$. Pour les valeurs faibles de T, il apparaît comme on pouvait le prévoir, un déphasage nocif qui implique une diminution très importante du gain pour conserver la stabilité (courbe $T = 1$). Finalement, $T = 5$ semble être un bon choix.

$$G(p) = H(p).C(p) = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0,2p)} \frac{1+Tp}{1+bTp} = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0,2p)} \frac{1+5p}{1+35p}$$

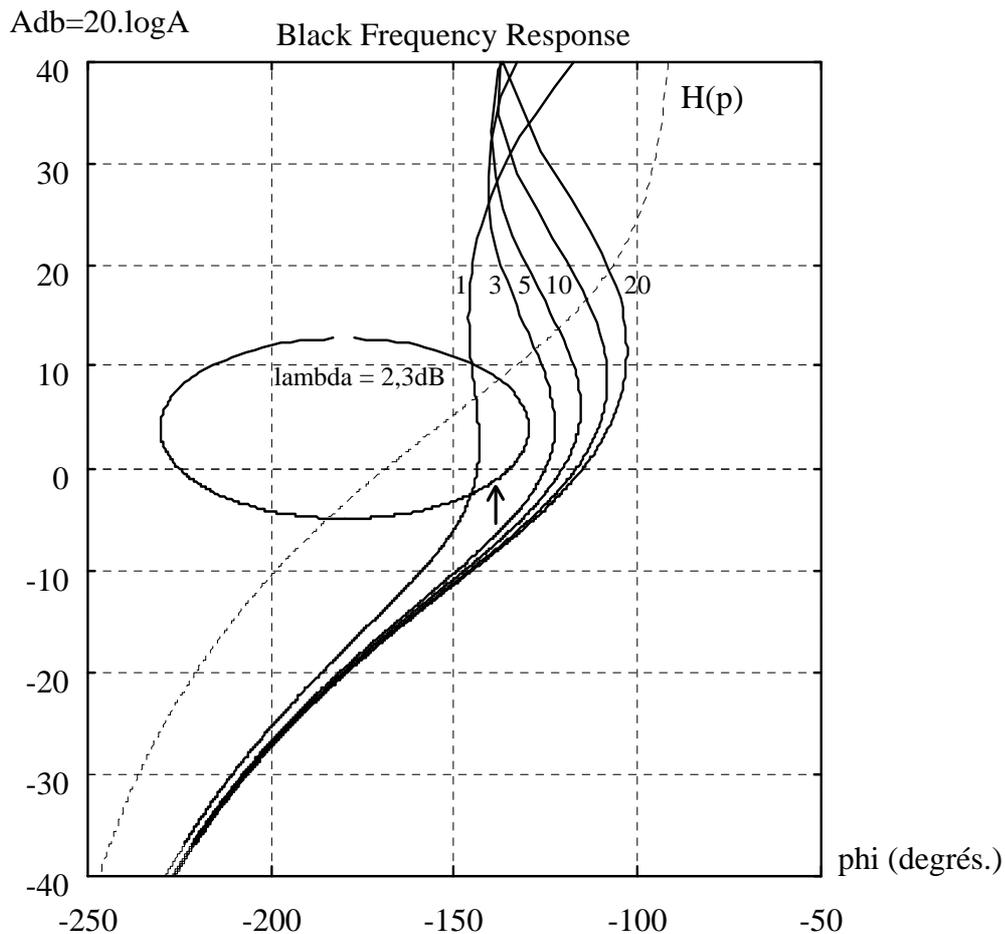


Fig. 9-35 : courbes $G(p)$ pour $b = 7$ et $T = 1$, $T = 3$, $T = 5$, $T = 10$, $T = 20$

Il faut ensuite effectuer le réglage du gain de $G(p)$ qui nous conduit à une translation de +6dB :

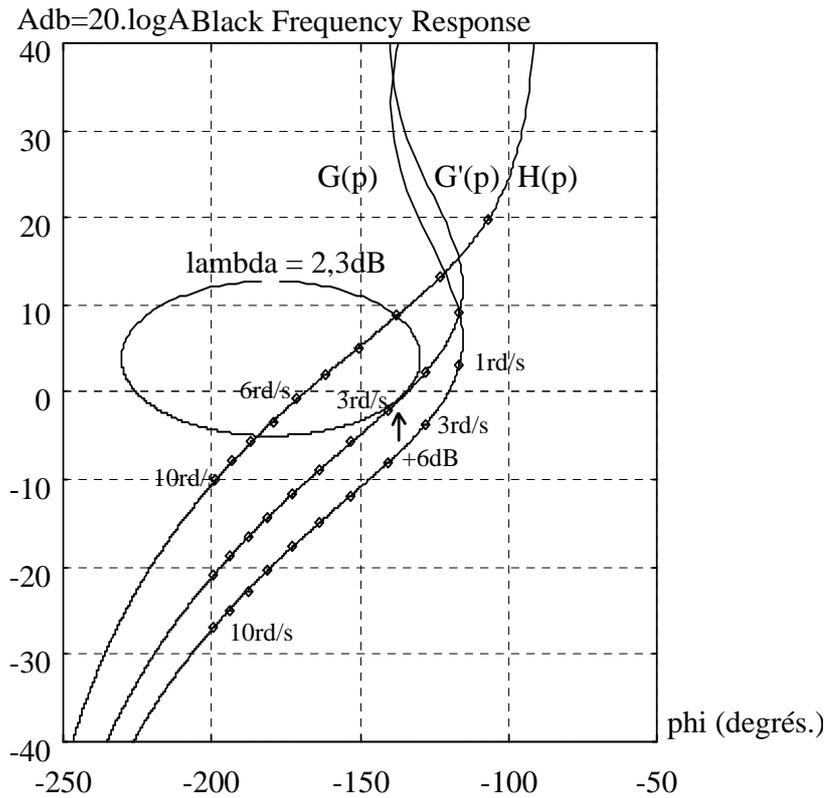


Fig. 9-36 : réglage du gain de $G(p) = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0,2p)} \frac{1+5p}{1+35p}$

La translation de +6dB correspond à un accroissement de gain de $10^{\left(\frac{6}{20}\right)} \approx 2$

La FTBO du système corrigé et réglé est alors $G'(p) = \frac{20}{p(1+0,1p)(1+0,2p)} \frac{1+5p}{1+35p}$

* La résonance en BF à lieu pour $\omega_r = 2,6 \text{ rad/s}$

* Le gain statique est $K' = 10 \times 2 = 20$ ($K'_{dB} = 26 \text{ dB}$).

* L'écart statique est nul (une intégration en BO)

* L'écart dynamique est $\varepsilon_v = \frac{1}{K'} = \frac{1}{20} = 0,05$

Les objectifs sont satisfaits sauf éventuellement pour la précision dynamique qui est à la limite des spécifications. La rapidité a diminué avec la résonance. Dans le cas où l'on désirerait améliorer la précision dynamique pour garder un peu de marge par rapport aux objectifs, il suffirait d'augmenter légèrement la valeur du coefficient b. (b = 7.5 ou 8). pour b = 8, la translation est de +7dB

correspondant à un accroissement du gain de $10^{\left(\frac{7}{20}\right)} = 2,24$. Le gain statique de $G'(p)$ est $K' = 22,4$ et l'écart dynamique est $\varepsilon_v = \frac{1}{K'} = \frac{1}{22,4} = 0,044$. Par contre, la rapidité a encore diminué :

résonance $\omega_r = 2,5 \text{ rad/s}$

L'influence de b sur la précision est très nette comme le montre le réseau de courbes Fig. 9-37.

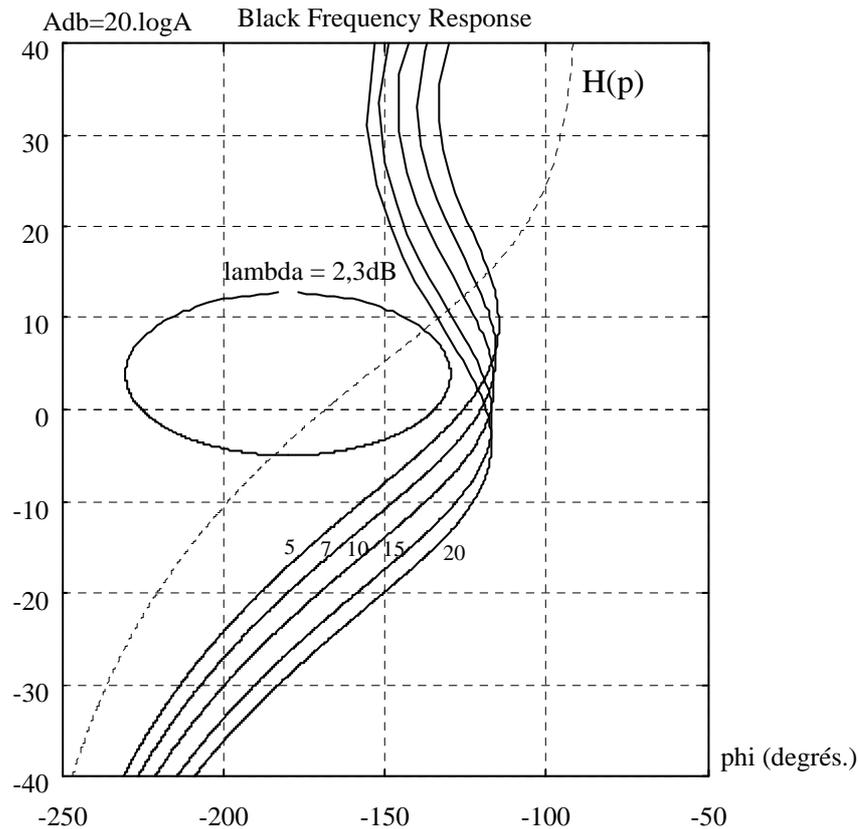


Fig. 9-37 : Tracé de $G(p) = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0.2p)} \frac{1+5p}{1+5bp}$ pour $b = 5, 7, 10, 15, 20$

Une synthèse des résultats est fournie dans le tableau suivant :

Etat	FTBO	ω_r (rad/s)	ϵ_v	Tr5% (s)	Commentaires
Avant réglage du gain.	$\frac{10}{p(1+0,1p)(1+0.2p)}$	6	/	/	Pas assez stable.
Après réglage du gain.	$\frac{3.16}{p(1+0,1p)(1+0.2p)}$	3	0.316	1.46	Pas assez précis
Après correction et réglage du gain. ($b = 7$)	$\frac{20}{p(1+0,1p)(1+0.2p)} \frac{1+5p}{1+35p}$	2.6	0.05	1.69	Satisfaisant.
Après correction et réglage du gain. ($b = 8$)	$\frac{22.4}{p(1+0,1p)(1+0.2p)} \frac{1+5p}{1+40p}$	2.5	0.044	1.76	Marge de précision éventuelle.

Fig. 9-38 : Bilan de la correction par retard de phase de $H(p) = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0.2p)}$

9-3-5. Influence de la correction par retard de phase sur les performances.

Avantages:

- * le réseau à retard de phase améliore de manière importante la précision statique mais aussi la précision dynamique.
- * Il a tendance, de manière opposée au correcteur à avance de phase, à diminuer les bruits de fond.

Inconvénients:

- * la correction intégrale provoque une diminution de la bande passante et donc une baisse de la rapidité.
- * Elle a tendance à déstabiliser le système par le déphasage nocif qu'elle induit dans la zone critique.

Particularités:

- * Le retard de phase ne peut pas s'appliquer à un système très instable ou oscillant.
- * La correction intégrale d'un système à très grande constante de temps dominante (on atteint plusieurs heures en régulation industrielle) ne peut se faire que par une réalisation numérique : algorithme intégrateur.
- * Le correcteur intégral (comme le dérivé) est toujours couplé à un correcteur proportionnel car ses réactions sont trop lentes en régime transitoire.
- * Le problème de l'adaptation d'un réseau à retard de phase n'est pas sans rappeler celui du réseau à avance de phase : on est conduit à limiter la valeur des coefficients (et donc de l'amélioration des performances) au strict nécessaire : dans l'un des cas, pour éviter une trop grande augmentation des bruits de fond et dans l'autre, pour éviter les trop grandes constantes de temps difficiles à réaliser par réseaux électriques.

9-4. COMBINAISON D'AVANCE DE PHASE ET DE RETARD DE PHASE.

Contrairement à ce qu'indiquent leur nom respectif, l'avance de phase et le retard de phase ne sont pas des processus opposés. En effet, les paramètres d'un correcteur à avance de phase sont choisis afin qu'il intervienne autour de la fréquence de résonance alors que ceux d'un correcteur à retard de phase le sont pour qu'il agisse à basse fréquence. L'idée consiste à mettre ces deux correcteurs en série.

9-4-1 Exemple : On reprend $H(p) = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0,2p)}$ et on la corrige en mettant en série les deux correcteurs déterminés en 9-2 et en 9-3 en gardant les mêmes coefficients. La FTBO compensée est $G(p) = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0,2p)} \frac{1+0,22p}{1+0,044p} \frac{1+5p}{1+35p}$

Le tracé de $G(p)$ et le réglage de son gain sont représentés Fig. 9-39.

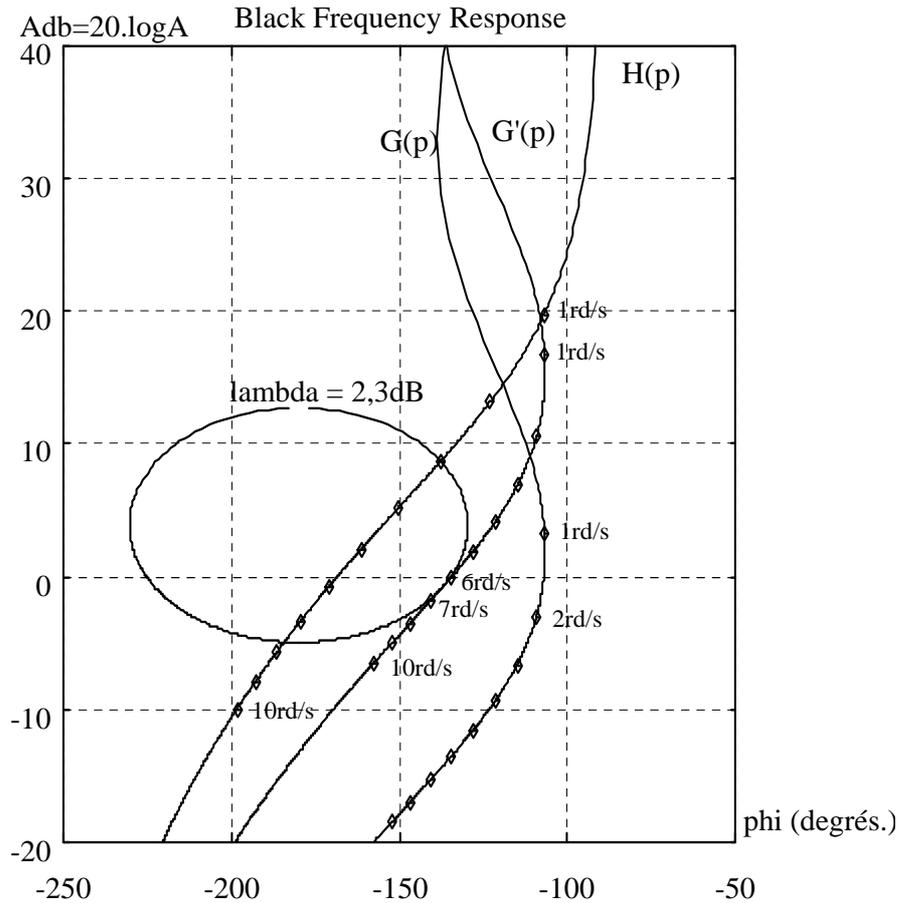


Fig. 9-39 : correction avance/retard de phase de $H(p) = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0,2p)}$

La translation est de +13.5dB (4.731) pour tangenter le contour à 2.3dB : le gain en boucle ouverte du système corrigé et réglé est $10 \times 4.731 = 47.31$

La FTBO corrigée et réglée s'écrit : $G'(p) = \frac{47.31}{p(1+0,1p)(1+0,2p)} \frac{1+5p}{1+35p} \frac{1+0,22p}{1+0,044p}$

La résonance en BF à lieu pour $\omega_r = 6.4 \text{ rad/s}$.

Le temps de réponse $Tr_{5\%}$ du second ordre équivalent est : $\frac{5.5 \times 0.8}{6.4} = 0.68 \text{ s}$

La précision dynamique est $\varepsilon_v = \frac{1}{K'} = \frac{1}{47.31} = 0.021$

On peut remarquer que, par rapport à la correction par avance de phase, la rapidité (pulsation de résonance) a légèrement diminué : ceci est dû à l'influence nocive du retard de phase sur la rapidité. Au contraire, par rapport à la correction par retard de phase, la précision est encore améliorée : ceci est dû à l'avance de phase bénéfique dans la zone critique qui permet une augmentation du gain statique lors du réglage.

Par rapport au système non corrigé et réglé, on a gagné un facteur 2.14 sur la rapidité et un facteur 15 sur la précision. Une synthèse des résultats est fournie dans le tableau Fig. 9-40. On pourrait modifier les valeurs des paramètres des correcteurs pour obtenir une répartition différente des performances : plus de rapidité et moins de précision par exemple.

Etat	FTBO	ω_r rad/s	ϵ_v	Tr5% (s)	Commentaires
Avant réglage du gain.	$\frac{10}{p(1+0,1p)(1+0.2p)}$	6	/	/	insuffisamment stable.
Après réglage du gain.	$\frac{3.16}{p(1+0,1p)(1+0.2p)}$	3	0.316	1.5	insuffisamment précis et rapide
Après correction par avance de phase et réglage du gain.	$\frac{7.08}{p(1+0,1p)(1+0.2p)} \frac{1+0.22p}{1+0.044p}$	6.7	0.14	0.65	Rapide
Après correction par retard de phase et réglage du gain.	$\frac{22.4}{p(1+0,1p)(1+0.2p)} \frac{1+5p}{1+40p}$	2.5	0.044	1.76	Précis
Après correction par avance-retard de phase et réglage du gain.	$\frac{47.31}{p(1+0,1p)(1+0.2p)} \frac{1+0.22p}{1+0.044p} \frac{1+5p}{1+35p}$	6.4	0.021	0.68	Rapide et précis

Fig. 9-40 : bilan de la correction par avance/retard de phase de $H(p) = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+0.2p)}$

Finalement la structure du système corrigé par avance/retard de phase est la suivante :

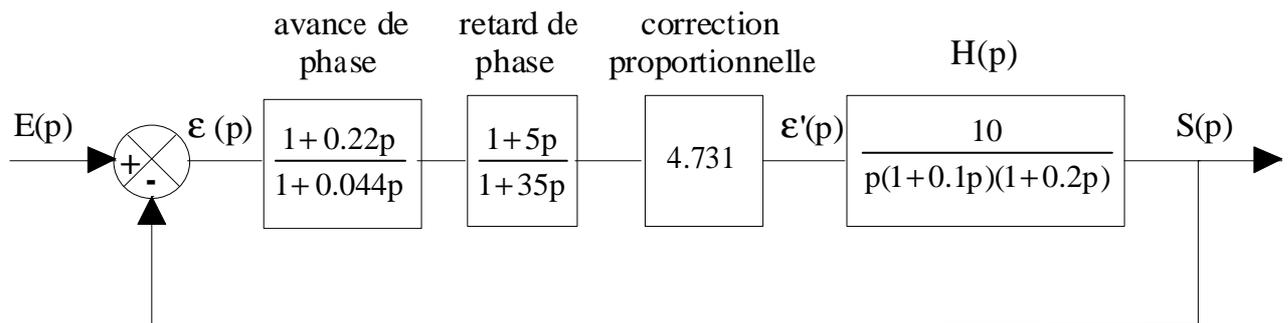


Fig. 9-41 : Système corrigé de FTBO : $G'(p) = \frac{47.31}{p(1+0,1p)(1+0.2p)} \frac{1+0.22p}{1+0.044p} \frac{1+5p}{1+35p}$

REMARQUE: Le composant "correcteur PID" existe en différentes versions. En général, sa fonction de transfert est différente d'une avance/retard de phase telle que nous venons de l'étudier. Toutefois les effets mis en évidence sont identiques. Pour plus de détails, voir le tome 3.

9-4-2 Systèmes suiveurs et systèmes régulateurs.

On peut se poser la question de savoir quelle terminologie employer entre "correcteur" et "régulateur". En fait, il semblerait que le terme de correcteur s'applique plutôt à un système asservi (système suiveur) et que celui de régulateur s'applique plutôt à un système régulé (système régulateur) tous deux définis § 1-2-2. Cette question en amène une autre : les performances que nous avons mis en évidence en asservissement en considérant le transfert entre la consigne et la sortie sont-elles les mêmes en régulation, ou l'on considère le transfert entre la perturbation et la sortie ? La réponse sort du cadre de cet ouvrage, toutefois il est facile de remarquer que la correction par avance et/ou retard de phase a introduit des zéros dans la FTBF. Ceux ci ne sont pas sans influence sur la réponse temporelle du système et peuvent, le cas échéant, provoquer un dépassement de consigne non désiré.

Reprenons l'exemple traité et introduisons une perturbation $P(p)$ dans la boucle. On fera l'hypothèse que le retour est unitaire et que le transfert situé en aval de la perturbation est également unitaire. On obtient la structure représentée Fig. 9-42.

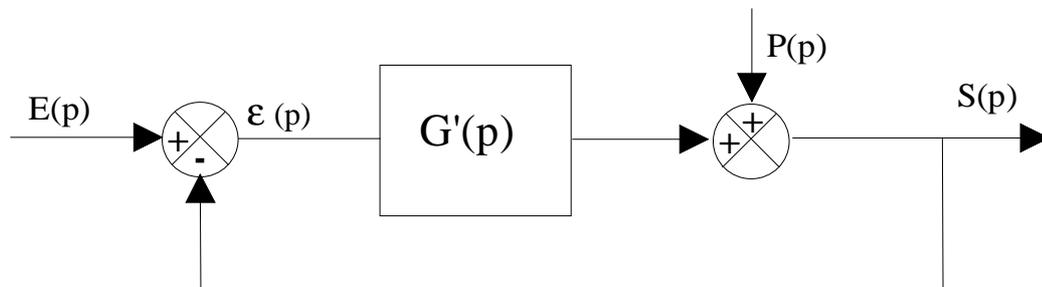


Fig. 9-42 : Système corrigé avec perturbation.

La fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$ du système non perturbé ($P(p) = 0$) est : (voir § 3-2-5 pour le calcul du transfert d'un système perturbé, mais attention : notation inversée pour G')

$$F_1(p) = \frac{G'(p)}{1+G'(p)} = \frac{47.31(1+5p)(1+0.22p)}{p(1+0,1p)(1+0.2p)(1+35p)(1+0.044p)+47.31(1+5p)(1+0.22p)}$$

$$\Rightarrow F_1(p) = \frac{(1+5p)(1+0.22p)}{(1+5.24p+0.757p^2+0.222p^3+0.0148p^4+6.34 \times 10^{-4}p^5)}$$

Le transfert correspondant à une perturbation ($E(p) = 0$) est :

$$F_2(p) = \frac{1}{1+G'(p)} = \frac{47.31(1+0,1p)(1+0.2p)(1+5p)(1+0.22p)}{p(1+0,1p)(1+0.2p)(1+35p)(1+0.044p)+47.31(1+5p)(1+0.22p)}$$

$$\Rightarrow F_2(p) = \frac{(1+0,1p)(1+0.2p)(1+5p)(1+0.22p)}{(1+5.24p+0.757p^2+0.222p^3+0.0148p^4+6.34 \times 10^{-4}p^5)}$$

$F_1(p)$ possède deux zéros, alors que $F_2(p)$ en possède quatre, ce qui entraînera probablement des réponses temporelles différentes. La réaction à une variation de consigne sera différente de celle provoquée par une variation de perturbation.

9-4-3 Conclusion.

La correction par avance et/ou retard de phase d'un système bouclé permet un accroissement notable de ses performances, tout en utilisant des réseaux simples à réaliser. De plus, la manière dont ces réseaux agissent est d'une compréhension aisée : le réglage est d'autant plus simple.

Toutefois, les développements récents de l'électronique numérique ont provoqué l'apparition de composants standard à prix modique (la version numérique du célèbre régulateur PID coûte de quelques centaines à quelques milliers de francs pour les plus performantes). Ces composants s'insèrent dans une chaîne de commande analogique et se règlent sur site par des méthodes assez simples à mettre en œuvre. Bien que les algorithmes implantés sur ces composants ne soient pas exactement une avance de phase et un retard de phase, les influences et effets que nous venons de mettre en évidence sont les mêmes. Le fait que les grandeurs traitées soient numériques (après et avant conversion analogique) ne change pas fondamentalement les choses tant que la fréquence d'échantillonnage du composant est élevée devant les constantes de temps du système : on raisonne alors comme s'il était continu en appliquant les méthodes développées tout au long de cet ouvrage.

La tendance actuelle de la technologie va dans le sens d'une numérisation accrue : en commande numérique, la partie échantillonnée s'arrête au variateur, la consigne de vitesse et le retour tachymétrique étant analogiques. On voit apparaître actuellement des variateurs à consigne numérique, l'image de la vitesse étant obtenue au moyen du traitement des informations provenant d'un codeur de position, lui aussi numérique. L'étude de ces systèmes et des correcteurs associés fait appel à la théorie des systèmes échantillonnés qui sort du cadre de l'Agrégation interne.

9-5. COMPENSATION PAR RETOUR DERIVE (OU TACHYMÉTRIQUE).

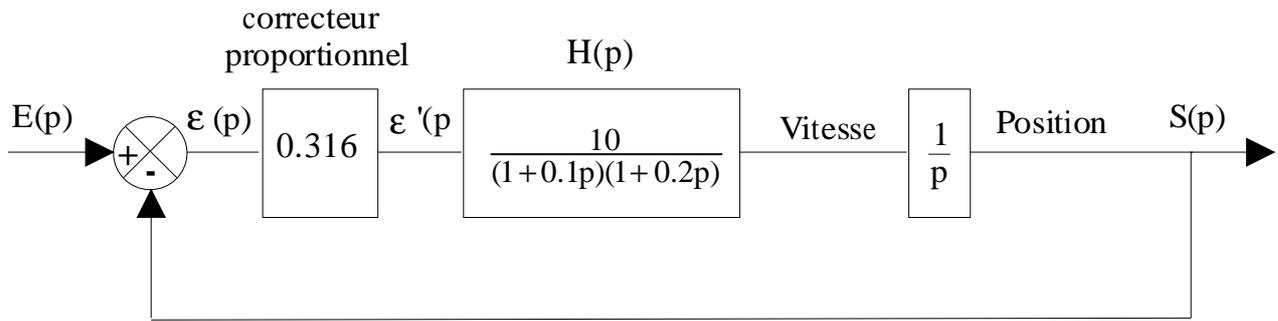
Lorsque le correcteur travaille sur le signal d'écart, l'influence dérivée devient très grande lors de changements brusques de consigne : il faut filtrer le signal. Une autre idée consiste à faire intervenir la dérivée de l'image de la sortie car ce signal ne présente pas de discontinuités. Il faut alors placer un correcteur dérivé sur la branche de retour. Dans le cas de certains asservissements la dérivée du retour est un signal facile à générer. Un cas très classique est celui des servomécanismes de position : la dérivée du signal de retour (position) est tout simplement la vitesse.

Considérons une fois de plus le système de FTBO $H'(p) = \frac{3.16}{p(1+0.1p)(1+0.2p)}$ (après réglage du gain) et admettons que c'est un asservissement de position dont on peut représenter la structure comme indiqué Fig. 9-43.

$$\text{Sa FTBF est : } FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{3.16}{3.16 + p(1+0.1p)(1+0.2p)} = \frac{1}{1 + 0.316p + 0.095p^2 + 0.00633p^3}$$

Fonction de transfert du troisième ordre sans intégration. On avait assimilé, en première analyse, cette fonction de transfert à un second ordre équivalent avec : $z = 0.43$ et $\omega_n = 2.4$ rad/s

$$\frac{1}{1 + 4.95p + 0.1736p^2}$$

Fig. 9-43 : Asservissement de position réglé pour $Q = 2.3\text{dB}$.

L'implantation d'un correcteur dérivé dans la boucle de retour conduit à la structure Fig. 9-44. La FTBO du système a changé et le gain des correcteurs proportionnels devra être réglé pour que le système soit stable.

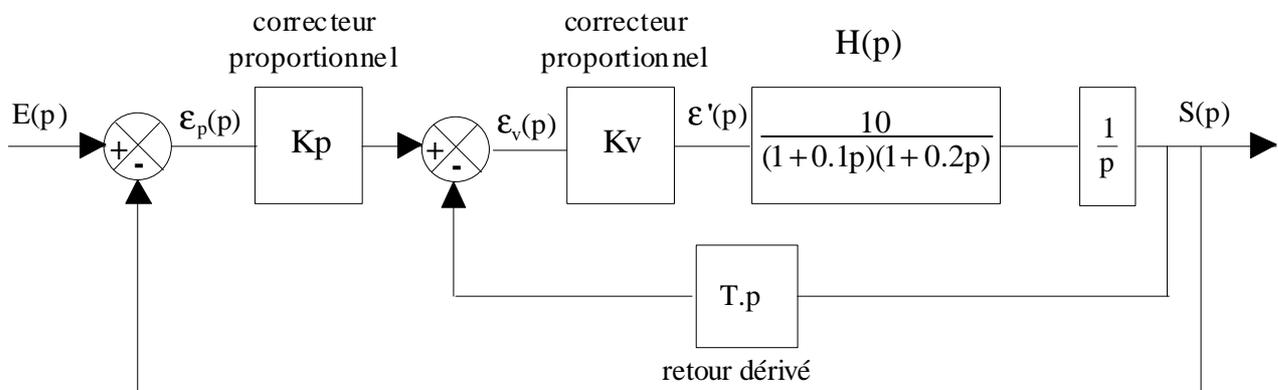


Fig. 9-44 : Asservissement de position avec correction dérivée sur la mesure.

La structure précédente est équivalente à celle représentée Fig. 9-44 (strictement si $K_r = T$). En effet, la dérivée de la position étant la vitesse, il est possible d'obtenir le signal dérivé directement en mesurant la vitesse : c'est un retour tachymétrique dont l'emploi est quasi systématique en asservissement de position. Dans le cas d'un servomécanisme de position à moteur CC, ce retour est intégré dans le variateur (une entrée analogique est prévue pour le signal provenant de la génératrice tachymétrique) et les paramètres sont pré réglés par le constructeur. La structure standard a déjà été décrite § 1-3-4. Les divers paramètres et grandeurs sont :

$C_p(p)$: consigne de position.

$C_v(p)$: consigne de vitesse.

$S(p)$: sortie position

$V(p)$: vitesse

$\varepsilon_p(p)$: écart de position (qui est, dans la plupart des cas, traité par un correcteur non représenté ici)

$\varepsilon_v(p)$: écart de vitesse (traité par un correcteur autre que proportionnel lui aussi)

K_p : réglage du gain de la boucle de vitesse

K_v : réglage du gain de la boucle de position

K_r : Gain (non réglable) de la génératrice tachymétrique.

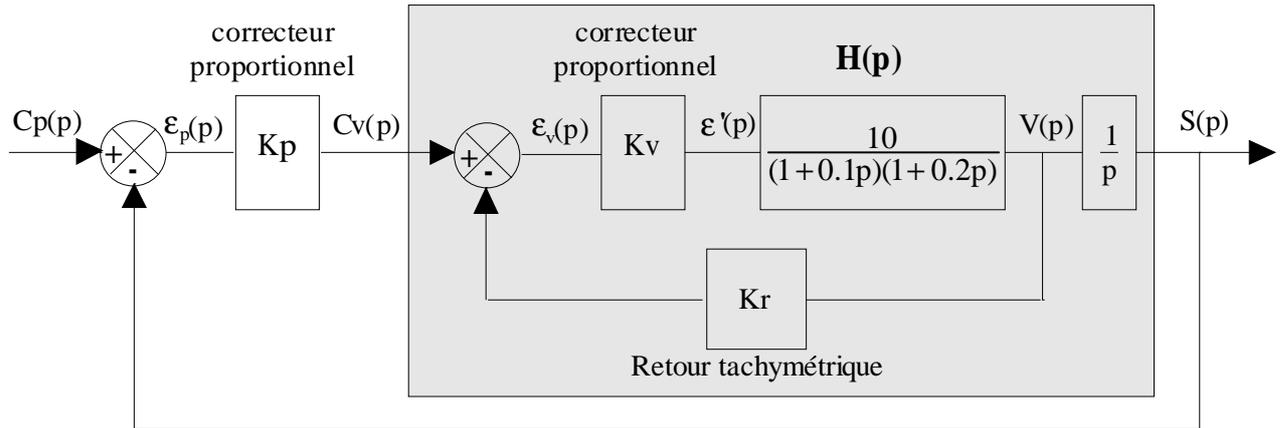


Fig. 9-45 : Asservissement de position avec retour tachymétrique.

Nous allons comparer les performances du système non corrigé et réglé représenté Fig. 9-43 avec celles du système à retour tachymétrique Fig. 9-45, réglé et sans correcteurs autres que les proportionnels nécessaires pour le réglage du gain, ceci afin que la comparaison soit parlante.

Calculons la FTBO de la boucle interne, dite boucle de vitesse :

$$FTBO_v(p) = \frac{10 \cdot K_v \cdot K_r}{(1+0.1p)(1+0.2p)}$$

La FTBF correspondante est de la forme : (retour K_r)

$$FTBF_v(p) = \frac{V(p)}{C_v(p)} = \frac{K_v H(p)}{1 + K_v K_r H(p)} = \left[\frac{\frac{10 \cdot K_v}{(1+0.1p)(1+0.2p)}}{1 + \frac{10 \cdot K_v \cdot K_r}{(1+0.1p)(1+0.2p)}} \right] = \frac{10 \cdot K_v}{[(1+0.1p)(1+0.2p) + 10 \cdot K_v \cdot K_r]}$$

$$\Rightarrow \frac{V(p)}{C_v(p)} = \frac{10 \cdot K_v}{[(1+10 \cdot K_v \cdot K_r) + 0.3p + 0.02p^2]} = \frac{10}{\left[1 + \frac{0.3}{1+10 \cdot K_v \cdot K_r} p + \frac{0.02}{1+10 \cdot K_v \cdot K_r} p^2 \right]}$$

C'est une fonction de transfert du second ordre : le système est inconditionnellement stable.

$$FTBF_v(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

Nous savons que, pour que la rapidité soit maximale, il faut choisir un amortissement $z = 0.707$. On en déduit par identification que :

$$\frac{0.3}{1+10K_vK_r} = \frac{2z}{\omega_n} \quad \text{et} \quad \frac{0.02}{1+10K_vK_r} = \frac{1}{\omega_n^2}$$

En mettant la première expression au carré : $\frac{0.09}{(1+10K_vK_r)^2} = \frac{4z^2}{\omega_n^2}$

En injectant la deuxième expression dans le second terme :

$$\begin{aligned} \frac{0.09}{(1+10K_vK_r)^2} &= \frac{4z^2(0.2)^2}{(1+10K_vK_r)} \\ \Rightarrow \frac{0.09}{(1+10K_vK_r)} &= 0.04 \\ \Rightarrow 1+10K_vK_r &= \frac{0.09}{0.04} \\ \Rightarrow K_vK_r &= \frac{1}{10} \left[\frac{0.09}{0.04} - 1 \right] = 0.125 \end{aligned}$$

En prenant $K_r = 0.1$, on aura $K_v = 1.25$

Finalement la FTBF de la boucle de vitesse s'écrit : $FTBF_v(p) = \frac{V(p)}{C_v(p)} = \frac{4.44}{1+0.13p+0.008p^2}$

Second ordre avec : $\omega_n = 10.6 \text{ rad/s}$ et $z = 0.707$

Calculons maintenant la Fonction de transfert comprenant la boucle interne plus l'intégration (en gris sur le schéma).

$$FTBF_1(p) = \frac{S(p)}{C_v(p)} = \frac{1}{p} FTBF_v(p) = \frac{4.44}{p(1+0.13p+0.008p^2)}$$

Cette fonction de transfert est la FTBO du système complet (au gain K_p près) car ce dernier est à retour unitaire. La boucle interne étant réglée, la structure peut se représenter comme suit, la zone ombrée correspondant à celle de la Fig. 9-45 :

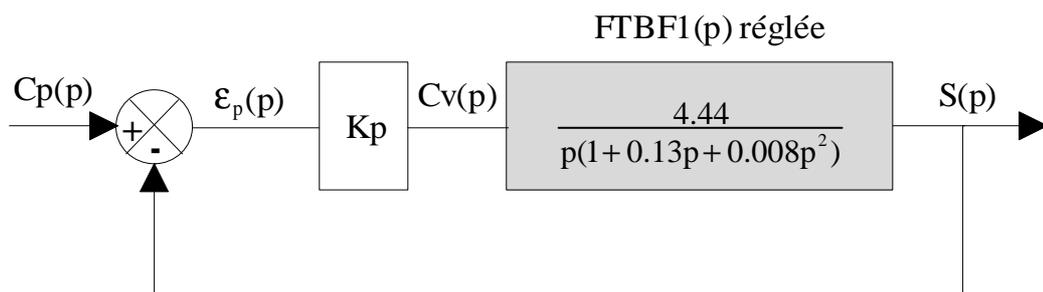


Fig. 9-46 : Asservissement de position : structure condensée.

On est maintenant ramené à un simple réglage du gain. La réponse harmonique de $FTBF_1(p)$ est donnée fig. 9-47.

La translation est de + 1.5dB (1.19) pour tangenter le contour à 2.3dB.

Ceci impose $K_p = 1.19$

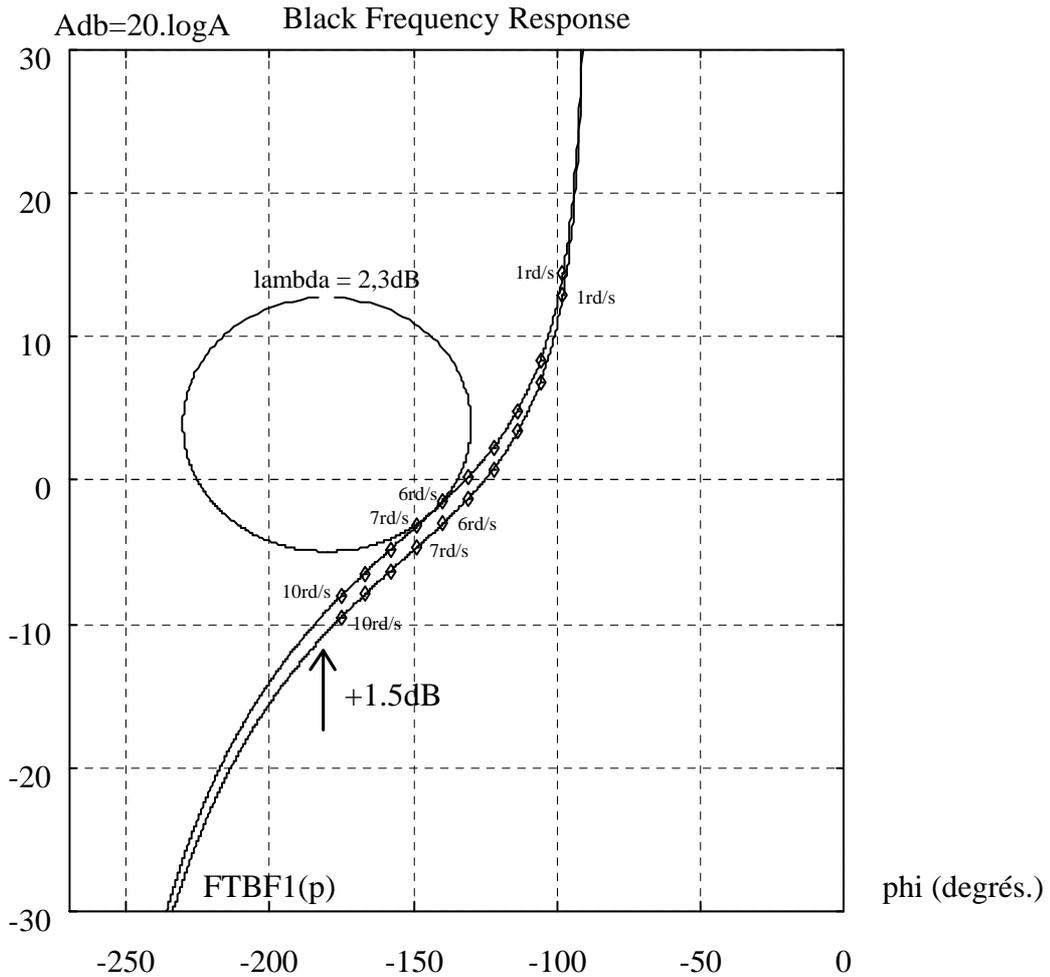


Fig. 9-47 : réglage du gain de $FTBF1(p) = \frac{4.44}{p(1+0.13p+0.008p^2)}$

La fonction réglée est : $FTBO(p) = \frac{S(p)}{\epsilon_p(p)} = \frac{5.28}{p[1+0.13p+0.008p^2]}$

La résonance en BF a lieu pour $\omega_r = 6.45\text{rad/s}$.

Les performances de ce système sont évaluées à partir du second ordre équivalent :

* une intégration en BO donc précis.

* pulsation de résonance à 6.45rad/s : temps de réponse $Tr_{5\%} = \frac{5.5}{\omega_n} = \frac{5.5 \times 0.8}{\omega_r} = 0.68\text{s}$

* écart de poursuite : $\epsilon_v = \frac{1}{K} = \frac{1}{5.28} = 0.19$

L'effet est bien celui d'une correction dérivée : en particulier, la rapidité a augmenté de manière notable. Le tableau suivant montre la similitude des effets entre correction dérivée et retour tachymétrique.

Etat	FTBO	ω_r (rad/s)	ε_v	Tr5% (s)	Commentaires
Avant réglage du gain.	$\frac{10}{p(1+0,1p)(1+0.2p)}$	6	/	/	insuffisamment stable.
Après réglage du gain.	$\frac{3.16}{p(1+0,1p)(1+0.2p)}$	3	0.316	1.5	insuffisamment précis et rapide
Après correction par avance de phase et réglage du gain.	$\frac{7.08}{p(1+0,1p)(1+0.2p)} \frac{1+0.22p}{1+0.044p}$	6.7	0.14	0.65	Rapide
Avec retour tachymétrique et réglage du gain.	$\frac{5.28}{p(1+0.13p+0.008p^2)}$	6.45	0.19	0.68	Rapide

Fig. 9-48 : Bilan de l'ajout d'un retour tachymétrique.

REMARQUE 1 : comme nous l'avons déjà fait remarquer, il est souvent nécessaire pour un asservissement de position de ne pas provoquer de dépassement lors d'une consigne en échelon. Le réglage devra être différent, $Q=2.3\text{dB}$ correspondant à un amortissement $z = 0.43$ insuffisant dans ce cas. Par exemple, pour $z = 1$ $Q = 1$ et $Q\text{dB} = 0\text{dB}$

REMARQUE 2 : Les coefficients et fonctions de transfert utilisées ici sont très généraux et ne correspondent pas, sauf improbable coïncidence, à une application réelle. Voir tome 3 pour les applications.

REMARQUE 3 : On pourrait corriger le système avec retour tachymétrique par un correcteur à avance de phase au niveau du correcteur proportionnel de gain K_p pour encore augmenter les performances en vitesse.

En prenant le même correcteur qu'en 9-2-4 (pulsations de résonance identiques dans les deux cas) :

$$C(p) = \frac{1+0.22p}{1+0.044p}$$

$$\text{La FT corrigée est : } \frac{S(p)}{\varepsilon_v(p)} = \frac{5.46}{p(1+0.13p+0.008p^2)} \frac{1+0.22p}{1+0.044p}$$

La réponse harmonique est donnée Fig. 9-48.

Une translation de 0.3dB est nécessaire pour tangenter le contour à 2.3dB (FT réglée non représentée pour garder la lisibilité).

Second ordre équivalent :

$$* \text{ pulsation de résonance en BF pour } \omega_r = 11.65\text{rad/s} : \text{ temps de réponse } Tr_{5\%} = \frac{5.5 \times 0.8}{\omega_r} = 0.37\text{s}$$

- écart de poursuite : $\varepsilon_v = \frac{1}{K} = \frac{1}{5.46} = 0.18$

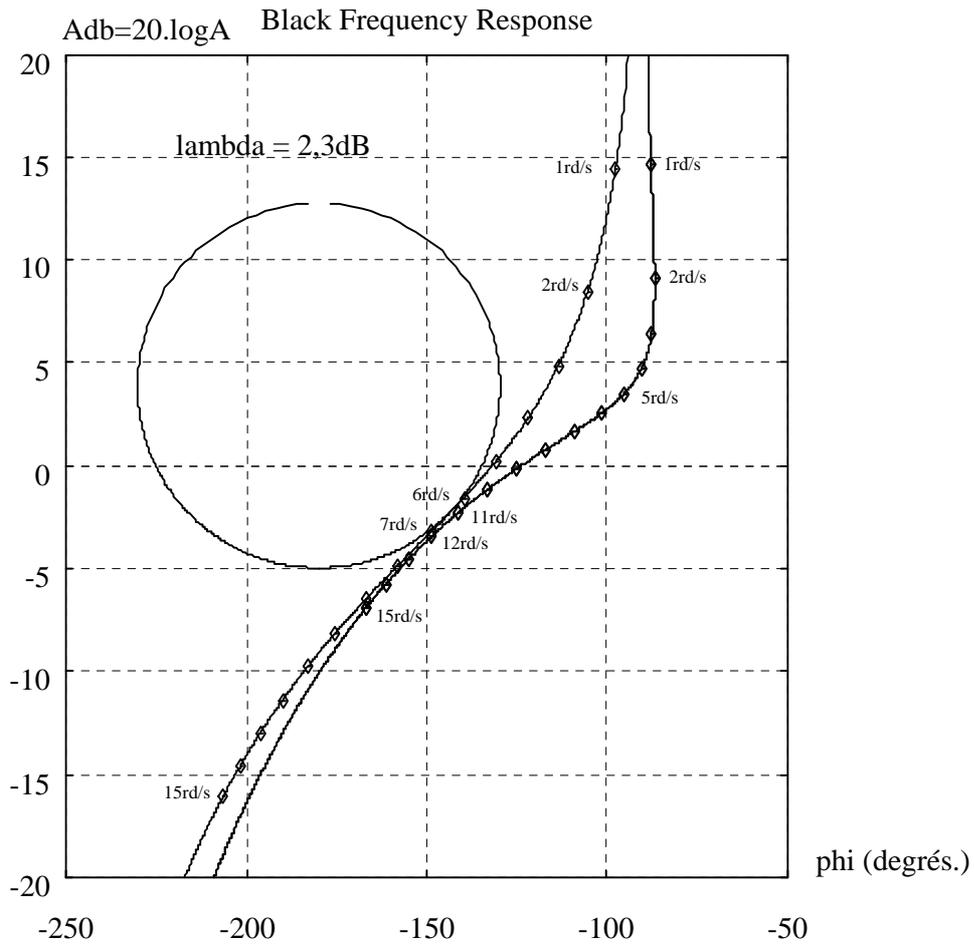


Fig. 9-49 : correction par avance de phase de $\frac{S(p)}{Cp(p)} = \frac{5.28}{p(1+0.13p+0.008p^2)}$

Les performances en vitesse sont encore améliorées (on a gagné un facteur quatre sur la rapidité par rapport au système non corrigé). Toutefois les limitations que nous avons fixées pour la correction dérivée sont toujours de mise, à savoir qu'une trop grande bande passante va favoriser les bruits de fond. De plus, les boucles internes et les composants constitutifs du système devront posséder une bande passante au moins équivalente. Enfin, il faut vérifier que le dépassement est raisonnable lors d'une réponse indicielle.

TABLE DES MATIERES.

CHAPITRE 1 : LES SYSTEMES DE COMMANDE.

1-1 SYSTEMES LINEAIRES ET SYSTEMES NON-LINEAIRES.

- 1-1-1 Définitions
- 1-1-2 Courbe caractéristique
- 1-1-3 Exemples
- 1-1-4 Non-linéarités

1-2 SYSTEMES BOUCLES ET SYSTEMES NON BOUCLES.

- 1-2-1 Systèmes non bouclés
- 1-2-2 Systèmes bouclés - systèmes asservis - servomécanismes

1-3 EXEMPLES DE SYSTEMES DE POSITIONNEMENT.

- 1-3-1 Positionnement par moteur asynchrone
- 1-3-2 Positionnement par moteur pas à pas
- 1-3-3 Positionnement par moteur C.C. et carte programmable
- 1-3-4 Asservissement de position avec moteur C.C.

1-4 CRITERES DE CHOIX ENTRE COMMANDE EN CHAINE DIRECTE ET COMMANDE EN BOUCLE FERMEE.

CHAPITRE 2 : SYSTEMES ASSERVIS.

2-1 REPRESENTATION EN SCHÉMA-BLOC TEMPOREL.

2-2 CARACTERISATION DES PERFORMANCES.

- 2-2-1 La précision
- 2-2-2 La rapidité et la bande passante
- 2-2-3 Amortissement / stabilité

2-3 INFLUENCE DU BOUCLAGE SUR LES PERFORMANCES

- 2-3-1 L'asservissement de vitesse
- 2-3-2 L'asservissement de position

CHAPITRE 3 : FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME.

3-1 FONCTION DE TRANSFERT.

3-1-1 Définition

3-1-2 Exemple : moteur à courant continu

3-2 FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME BOUCLE.

3-2-1 Mise en cascade de systèmes

3-2-2 Systèmes bouclés

3-2-3 Systèmes bouclés à retour unitaire

3-2-4 Exemple : asservissement de position

3-2-5 Introduction des perturbations

63

3-3 FONCTION DE TRANSFERT COMPLEXE D'UN SYSTEME.

3-3-1 Fonction de transfert complexe d'un système bouclé

3-3-2 Les lieux de transfert

CHAPITRE 4 : SYSTEMES DU PREMIER ORDRE.

4-1 GENERALITES

4-1-1 Définition

4-1-2 Exemple

4-2 REPONSE D'UN SYSTEME DU PREMIER ORDRE AUX ENTrees TYPIQUES.

4-2-1 Réponse à un échelon

4-2-2 Réponse à une rampe

4-3 REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE LA REPONSE HARMONIQUE.

4-3-1 Diagramme de Bode

4-3-2 Diagramme de Black-Nichols

4-3-3 Diagramme de Nyquist

4-3-4 Interprétation physique des courbes de réponse fréquentielle

CHAPITRE 5 : SYSTEMES DU SECOND ORDRE.

5-1 GENERALITES

4-1-1 Définition

4-1-2 Exemple

5-2 REPONSE D'UN SYSTEME DU SECOND ORDRE AUX ENTREES TYPIQUES.

5-2-1 Réponse à un échelon

5-2-2 Réponse à une rampe

5-3 PERFORMANCES TEMPORELLES D'UN SYSTEME DU SECOND ORDRE.

5-3-1 Erreur de position

5-3-2 Erreur de traînage

5-3-3 Temps de réponse à 5%

5-3-4 Dépassements en régime transitoire

5-4 REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE LA REPONSE HARMONIQUE.

5-4-1 Etude préalable

5-4-2 Diagramme de Bode

5-4-3 Diagramme de Black-Nichols

5-4-4 Diagramme de Nyquist

5-4-5 Fréquences remarquables

CHAPITRE 6 : AUTRES SYSTEMES.

6-1 SYSTEMES A RETARD

6-1-1 Définition

6-1-2 Réponse aux entrées typiques

6-1-3 Réponse harmonique

6-1-4 Conclusion

6-2 SYSTEMES DU PREMIER ORDRE RETARDES.

6-2-1 Réponse à un échelon

6-2-2 Réponse harmonique

6-3 SYSTEMES INTEGRATEURS.

- 6-3-1 Définition
- 6-3-2 Réponse à un échelon
- 6-3-3 Réponse harmonique

6-4 SYSTEMES DU SECOND ORDRE AVEC INTEGRATION.

- 6-4-1 Présentation
- 6-4-2 Réponse à un échelon
- 6-4-3 Réponse harmonique

6-5 SYSTEMES DU TROISIEME ORDRE AVEC INTEGRATION.

- 6-5-1 Réponse à un échelon
- 6-5-2 Réponse harmonique

6-6 REPONSE HARMONIQUE DES SYSTEMES D'ORDRE SUPERIEUR.

- 6-6-1 Utilisation d'un logiciel
- 6-6-2 Tracé du diagramme asymptotique de Bode
- 6-6-3 Tracé point par point du diagramme de Black

CHAPITRE 7 : PERFORMANCES DES SYSTEMES BOUCLES.

7-1 INFLUENCE DU BOUCLAGE

- 7-1-1 Asservissement de vitesse
- 7-1-2 Asservissement de position

7-2 DEFINITION DE L'ECART

7-3 PERFORMANCES D'UN SERVOMECHANISME.

- 7-3-1 Précision en régime permanent.
- 7-3-2 Rapidité / bande passante
- 7-3-3 Stabilité d'un système bouclé
- 7-3-4 Critères de stabilité d'un système bouclé
- 7-3-5 Tableau de synthèse

CHAPITRE 8 : REGLAGE DU GAIN DES SYSTEMES ASSERVIS.

8-1 CRITERES PRATIQUES DE STABILITE

- 8-1-1 Critère de Routh
- 8-1-2 Critères graphiques
- 8-1-3 Réglage du gain d'un système asservi

8-2 REGLAGE DU GAIN DANS LE PLAN DE BLACK

- 8-2-1 Mode opératoire
- 8-2-2 Exemple 1
- 8-2-3 Exemple 2

8-3 REGLAGE D'UN SYSTEME DU SECOND ORDRE

CHAPITRE 9 : COMPENSATION DES SYSTEMES ASSERVIS.

9-1 PRESENTATION

9-2 CORRECTEUR DERIVE OU A AVANCE DE PHASE

- 9-2-1 Approche intuitive de la correction dérivée
- 9-2-2 Approche formelle de la correction par avance de phase
- 9-2-3 Réalisation d'un réseau correcteur à avance de phase
- 9-2-4 Adaptation d'un réseau correcteur à avance de phase
- 9-2-5 Influence de la correction par avance de phase sur les performances

9-3 CORRECTEUR INTEGRAL OU A RETARD DE PHASE

- 9-3-1 Approche intuitive de la correction intégrale
- 9-3-2 Approche formelle de la correction par retard de phase
- 9-3-3 Réalisation d'un réseau correcteur à retard de phase
- 9-3-4 Adaptation d'un réseau correcteur à retard de phase
- 9-3-5 Influence de la correction par retard de phase sur les performances

9-4 COMBINAISON D'AVANCE DE PHASE ET DE RETARD DE PHASE.

- 9-4-1 Exemple
- 9-4-2 Systèmes suiveurs et systèmes régulateurs
- 9-4-3 Conclusion

9-5 COMPENSATION PAR RETOUR DERIVE (OU TACHYMETRIQUE).

- 9-4-1 Exemple
- 9-4-2 Systèmes suiveurs et systèmes régulateurs
- 9-4-3 Conclusion