

CONCEPTION ET CALCUL DES ÉLÉMENTS DE MACHINES

J.F. Debongnie

2013

©DEBONGNIE (Jean-François), Liège, Belgium, 2011

Tous droits réservés.

Dépôt légal : D/2013/0480/7

ISBN13 : 978-2-9601305-0-8

Avant-propos

Cet ouvrage est consacré à l'exposé théorique du cours de conception mécanique que nous donnons à l'Université de Liège. Il est inséparable de notre *Mémento de Conception Mécanique* que l'on pourra trouver sur Internet¹, qui contient un résumé des méthodes de calcul et un grand nombre de données utiles pour les applications et auquel il est fait référence dans le présent texte sous le nom de *Mémento*.

1. [http ://hdl.handle.net/2268/141979](http://hdl.handle.net/2268/141979)

Table des matières

Avant-propos	i
1 Efforts dans une transmission	1
1.1 Introduction	1
1.2 Principe	1
1.3 Rhéogramme de la puissance	1
1.3.1 Réducteur à engrenages	2
1.3.2 Distribution de puissance par une courroie	5
1.3.3 Une distribution plus complexe	6
1.3.4 Un cas de faible rendement	7
1.4 Efforts secondaires dans les engrenages	8
1.4.1 Engrenage droit	8
1.4.2 Engrenage à denture hélicoïdale	10
1.4.3 Engrenage conique droit	11
1.5 Transmissions par courroie	12
1.5.1 Courroies plates	12
1.5.1.1 Géométrie de la transmission	12
1.5.1.2 Efforts dans la courroie en service	13
1.5.1.3 Tension centrifuge	13
1.5.1.4 Tensions productives	14
1.5.1.5 Tension de pose	16
1.5.1.6 Efforts transmis aux arbres	17
1.5.2 Courroies trapézoïdales	18
1.6 Transmissions par chaîne	19
2 Avant-projet d'un arbre	23
2.1 Introduction	23
2.2 Exemple illustratif	23
2.2.1 Facteur de service	25
2.3 Notion de moment idéal	27
2.4 Première formule de dimensionnement	29
2.5 Formule des arbres de manège	30
2.5.1 Valeur du radicand	30
2.5.2 Raideur en torsion	30
2.5.3 Condition de résistance	31
2.6 Tourillons d'extrémité	32
2.7 Déformations de flexion	32
2.8 Calcul vibratoire	33

3	Principes généraux de fiabilité	35
3.1	Introduction	35
3.2	Notion de sécurité	36
3.2.1	Analyse du concept de sécurité	36
3.2.2	Démarche d'Odingue	38
3.3	Notion de critère de mise hors service	39
4	Essais mécaniques des matériaux	41
4.1	Essai de traction	41
4.2	Essais de dureté	45
4.2.1	Généralités	45
4.2.2	Dureté Brinell	45
4.2.3	Essai Brinell modifié	48
4.2.4	Dureté Vickers	48
4.2.5	Dureté Rockwell C	50
4.2.6	Une corrélation entre la dureté Rockwell C et la dureté Vickers	51
4.2.7	Corrélation entre la dureté Brinell des aciers et leur contrainte de rupture	52
4.2.8	Quelques valeurs indicatives de la dureté	52
4.3	Ténacité	52
4.4	Résilience	53
4.5	Facteur d'intensité de contrainte	55
4.5.1	Facteur d'intensité de contrainte	55
4.5.2	Propagation des fissures en fatigue	57
4.6	Essais de fatigue	57
5	Détermination des limites de résistance	63
5.1	Contraintes nominales	63
5.2	Détermination des limites de résistance	65
5.2.1	Généralités	65
5.2.2	Indices d'effet	65
5.3	Rupture statique	67
5.3.1	Extension	67
5.3.1.1	Effet d'échelle	67
5.3.1.2	Effet d'entaille	68
5.3.1.3	Effet d'élaboration	69
5.3.2	Autres sollicitations	69
5.4	Fatigue sous sollicitation alternée	69
5.4.1	Effet d'échelle	70
5.4.2	Effet d'entaille	70
5.4.3	Théorie du gradient	70
5.4.4	Entailles non calculables	72
5.4.5	Effet d'élaboration	74
5.5	Fatigue sous sollicitation ondulée	75
5.5.1	Définitions	75
5.5.2	Diagramme d'endurance	76
5.5.3	Mise hors dimension du diagramme d'endurance	77
5.5.4	Diagramme VDI	78
5.6	Sollicitations combinées	78

5.7	Contraintes oscillatoires d'amplitude variable	79
5.7.1	Principe du dommage cumulatif	79
5.7.2	Discussion physique	82
5.7.3	Courbes iso-dommage	83
6	Contacts hertziens	85
6.1	Introduction	85
6.2	Considérations géométriques	86
6.3	Contacts ponctuels	89
6.3.1	Pression de Hertz, aire de contact, rapprochement	89
6.3.2	Contraintes dimensionnantes	91
6.3.2.1	Cisaillement de Tresca	91
6.3.2.2	Variation maximale du cisaillement dans le cas d'une charge défilante	91
6.3.2.3	Pression spécifique	92
6.3.3	Limitations de pression pour les aciers à roulements	92
6.4	Contacts linéaires	93
6.4.1	Résultats généraux	93
6.4.2	Contraintes	94
6.4.3	Limitation de pression pour les aciers à roulements	95
6.5	Sollicitations dynamiques	95
7	Roulements	97
7.1	Constitution des roulements	97
7.2	Principaux types de roulements	97
7.2.1	Roulements rigides à billes	97
7.2.2	Roulements à billes à contact oblique	98
7.2.3	Roulements à rouleaux	99
7.2.4	Roulements à rouleaux coniques	99
7.2.5	Roulements à rotule à rouleaux en forme de tonneau	100
7.2.6	Roulements à aiguilles	100
7.2.7	Butées	100
7.3	Fatigue des roulements	101
7.4	Relation entre la charge et la durée de vie	103
7.5	Charge de direction quelconque	104
7.5.1	Direction de référence de la charge	104
7.5.2	Charge dynamique équivalente	106
7.6	Charge dépendant du temps	106
7.6.1	Charge biéquivalente	106
7.6.2	Application au problème posé	107
7.6.3	Problème inverse	108
7.6.4	Cas d'une charge équivalente variant de manière continue lors d'un cycle	108
7.7	Choix de la durée de vie	108
7.8	Calcul statique des roulements	109
7.8.1	Capacité de charge statique	109
7.8.2	Charge statique équivalente	110
7.9	Roulements à contact oblique en opposition	110
7.9.1	Montage en X et montage en O	110
7.9.2	Répartition des charges axiales	111

7.9.2.1	Exposé du problème	111
7.9.2.2	Méthode du maître et de l'esclave	113
7.9.2.3	Cohérence de la méthode	113
7.9.3	Identification des angles de contact	114
7.9.4	Serrage initial	114
7.10	Ajustement des roulements	115
7.10.1	Roulage	115
7.10.2	Roulement fixe et roulement libre	116
7.11	Usure des roulements	116
7.11.1	Généralités	116
7.11.2	Données expérimentales	116
8	Tolérances dimensionnelles	119
8.1	Raison d'être des tolérances	119
8.2	Cote nominale, écarts, intervalle de tolérance	120
8.2.1	Définitions	120
8.2.2	Remarque importante	120
8.3	Cotes d'arbre et cotes d'alésage	121
8.4	Système ISO de tolérances	121
8.4.1	Unité de tolérance	121
8.4.2	Degré de tolérance	121
8.5	Écarts et types	122
8.6	Écarts fondamentaux des arbres	124
8.7	Écarts fondamentaux des alésages	124
8.8	Choix des ajustements	125
9	Vis et écrous	127
9.1	Introduction	127
9.2	Filetages	127
9.2.1	Généralités	128
9.2.2	Filetage ISO	130
9.2.3	Filetage trapézoïdal et filetage carré	131
9.2.4	Autres filetages	132
9.3	Visserie d'assemblage	132
9.3.1	Désignation	132
9.3.2	Dispositifs de sécurité	132
9.3.3	Qualité mécanique des vis	132
9.3.4	Fabrication des vis	138
9.4	Frottement de la vis sur l'écrou	138
9.4.1	Système à coins	138
9.4.2	Système vis-écrou	142
9.4.3	Couple de serrage de l'écrou dans un assemblage	142
9.5	Précontrainte	143
9.6	Calcul des raideurs	144
9.6.1	Raideur de la vis	144
9.6.2	Raideur des pièces serrées	145
9.7	Fonctionnement sous une charge axiale	146
9.8	Serrage initial	148
9.8.1	Étanchéité pour un liquide sous une pression p	148
9.8.2	Effort transversal Q à reprendre par frottement	148

9.8.3	Serrage résiduel sous force axiale	150
9.8.4	Effet du tassement des interfaces	150
9.8.5	Effet des dilatations thermiques différentielles	150
9.9	Sécurité par rapport à la déformation permanente des vis	150
9.10	Résistance des vis à la fatigue	151
9.11	Risque d'écrasement des pièces serrées	152
9.12	Risque d'arrachement des filets	152
9.13	Incertitude de la valeur du serrage initial	152
9.14	Calcul des assemblages vissés précontraints	154
9.14.1	Dimensionnement initial	154
9.14.2	Vérification	154
9.14.3	Exemple	154
9.15	Vis sollicitées à l'effort tranchant	157
9.16	Flexion parasite	157
10	Assemblages arbre-moyeu	159
10.1	Généralités	159
10.2	Dimensionnement du moyeu	159
10.3	Assemblages par effet d'obstacle	160
10.3.1	Clavettes parallèles	160
10.3.1.1	Dimensions courantes (en mm) des clavettes parallèles et de leurs rainures	163
10.3.2	Clavettes-disques	163
10.3.3	Cannelures	164
10.3.4	Goupilles	165
10.3.5	Profils polygonaux	167
10.3.5.1	Table des profils polygonaux	170
10.4	Assemblages par effet d'adhérence	171
10.4.1	Généralités	171
10.4.2	Frettage	172
10.4.2.1	Généralités	172
10.4.2.2	Relations élastiques fondamentales	172
10.4.2.3	Interférence conduisant à une pression donnée	173
10.4.2.4	Principe du calcul de l'assemblage	173
10.4.2.5	Calcul du serrage nécessaire à assurer l'adhérence	174
10.4.2.6	Calcul de l'interférence maximale	174
10.4.2.7	Choix de l'ajustement	177
10.4.2.8	Montage à la presse	178
10.4.2.9	Montage par différence de température	178
10.4.2.10	Diminution du serrage avec la vitesse de rotation	179
10.4.2.11	Exemple	180
10.4.3	Emmanchements sur cônes	181
10.4.4	Pinçage	183
10.4.4.1	Exemple	185
10.4.5	Pinçage d'un moyeu fendu	185
10.4.6	Anneaux élastiques RINGFEDER ANOBLOC	186
10.4.6.1	Description	186
10.4.6.2	Équations générales	186
10.4.6.3	Les deux étapes du serrage	188
10.4.6.4	Première étape : approche	188

10.4.6.5	Deuxième étape : serrage	189
10.4.6.6	Cas de plusieurs paires d'anneaux en série	190
10.4.6.7	Efforts transmissibles	190
10.4.6.8	Limitation des pressions	191
10.4.6.9	Tableau des anneaux élastiques RINGFEDER ANOBLOC	191
10.4.6.10	Calcul d'un assemblage à anneaux élastiques RING- FEDER ANOBLOC	191
10.4.7	Ensemble de serrage RINGFEDER DYNABLOC	192
10.4.7.1	Tableau des ensembles de serrage RINGFEDER DYNABLOC	194
10.4.8	Clavette inclinée creuse	194
10.5	Assemblages par obstacle précontraint	196
10.5.1	Clavettes inclinées	197
10.5.2	Clavetage double tangentiel	198
11	Paliers lisses	201
11.1	Introduction	201
11.2	Principe de la lubrification	202
11.2.1	Introduction	202
11.2.2	Le coin d'huile	202
11.2.3	Formation pratique des coins d'huile	203
11.3	Pertes dans les paliers. Courbe de Stribeck	203
11.4	Principales qualités des lubrifiants	204
11.4.1	Viscosité	205
11.4.1.1	Variation de la viscosité avec la température	206
11.4.1.2	Classification S.A.E des huiles	207
11.4.1.3	Variation avec la pression	208
11.4.2	Masse volumique	208
11.5	Dissipation en régime hydrodynamique	208
11.5.1	Description fonctionnelle du palier	208
11.5.2	Loi de Petroff et nombre de Sommerfeld	212
11.5.3	Comportement aux faibles nombres de Sommerfeld	214
11.5.4	Lois de Hanocq-Leloup	214
11.5.5	Lois de Vogelpohl	215
11.6	Détermination du point critique	215
11.7	Loi d'échauffement	215
11.7.1	Relations de base	215
11.8	Avant-projet de palier	217
11.8.1	Choix de l'élancement	217
11.8.2	Choix du jeu radial	217
11.8.3	Choix de la viscosité en service	219
11.8.4	Calcul de la température	219
11.8.5	Choix du lubrifiant	219
11.8.6	Cas d'une température trop élevée	219
11.9	Débit de fuite	220

12 Soudures	225
12.1 Généralités	225
12.2 Procédés de soudage	226
12.3 Soudabilité	226
12.4 Calcul statique des soudures de pièces d'acier	227
12.4.1 Section du cordon	227
12.4.2 Définition conventionnelle des contraintes	228
12.4.3 Vérification de la soudure	228
12.4.4 Formule enveloppe	229
12.5 Calcul statique des soudures de pièces d'alliages d'aluminium	229
12.6 Résistance des soudures à la fatigue	230
12.6.1 Généralités	230
12.6.2 Lois de durée de vie	230
12.6.3 Variations de charges d'amplitude variable	233
12.6.4 Comptage des cycles	234
12.6.5 Combinaison d'extension et de cisaillement	234
13 Rivures	235
13.1 Généralités	235
13.2 Pratique de la rivure	235
13.2.1 Types de rivets, et leur pose	235
13.2.2 Gamme des opérations d'exécution d'une rivure	238
13.3 Calcul des rivures	239
13.3.1 Section du rivet	239
13.3.2 Résistance des pièces assemblées	239
13.3.2.1 Section nette et coefficient d'utilisation de la tôle	239
13.3.2.2 Contrainte nominale de la tôle	241
13.3.2.3 Pince longitudinale et pince transversale	242
13.4 Vérification des rivets	243
13.4.1 Calcul à l'adhérence	243
13.4.2 Calcul au cisaillement et à la pression de contact	244
13.5 Rivets sollicités en traction	246

Chapitre 1

Recensement des efforts dans une transmission

1.1 Introduction

Le premier problème qui se pose dans le dimensionnement d'une transmission est le *recensement des efforts*. L'étude de cette question nous permettra du reste d'envisager le fonctionnement d'un certain nombre d'éléments courants de transmission.

1.2 Principe

La démarche fondamentale consiste à déterminer le *chemin de la puissance*. On en déduit aisément les *efforts actifs*, c'est-à-dire ceux qui travaillent. Mais la plupart des transmissions ne peuvent exister que moyennant des *efforts secondaires* destinés à maintenir les liaisons. Contrairement à ce que pourrait faire penser l'adjectif *secondaire*, ces efforts ne sont pas nécessairement plus petits que les efforts actifs. Ils induisent de la flexion et parfois de l'extension et jouent souvent un rôle fondamental dans la résistance des arbres et de leurs supports. La détermination des efforts secondaires fait l'objet d'une deuxième étape de calcul, où interviennent les efforts actifs et le type de transmission considéré.

1.3 Rhéogramme de la puissance

La puissance fournie par le ou les moteurs est amenée aux récepteurs par la transmission, ce qui occasionne d'ailleurs certaines pertes. On a donc en général la relation

$$\sum \mathcal{P}_{\text{mot}} = \sum \mathcal{P}_{\text{réc}} + \sum \mathcal{P}_{\text{pertes}} \quad (1.1)$$

Dans le plus grand nombre de transmissions mécaniques, les pertes sont faibles devant la puissance à transmettre, c'est-à-dire que le rendement

$$\eta = \frac{\sum \mathcal{P}_{\text{réc}}}{\sum \mathcal{P}_{\text{mot}}} \quad (1.2)$$

est voisin de l'unité. C'est pourquoi, en dehors de cas très particuliers, il est d'usage, au moins dans une première analyse, de négliger les pertes (ce qui équivaut à poser $\eta = 1$). Dans ces conditions, la puissance des moteurs passe aux récepteurs sans perte ni profit, à la manière d'un fluide incompressible. On peut alors remonter de chaque récepteur vers son générateur pour établir le chemin que prend sa puissance. L'ensemble des chemins de tous les récepteurs forme dans le cas général un circuit maillé, que nous appellerons *rhéogramme de la puissance* ($\beta\varepsilon\omega$ = couler, le rhéogramme est un diagramme de l'écoulement de la puissance).

À partir du rhéogramme, il est aisé de déterminer les efforts moteurs, car la puissance $\mathcal{P}$ est toujours de la forme

$$\mathcal{P} = Qv \quad (1.3)$$

où v est une vitesse généralisée et Q , l'effort actif associé. En pratique, on rencontre des vitesses de translation pour lesquelles la formule (1.3) s'applique sans modification, et des vitesses de rotation, pour lesquelles cette formule doit s'entendre comme

$$\mathcal{P} = M_t\omega = M_t \cdot 2\pi N \quad (1.4)$$

où M_t est le moment de torsion, ω , la vitesse angulaire (nombre de radians par unité de temps) et N , la fréquence de rotation (nombre de tours par unité de temps). Nous allons illustrer cette manière de faire par quelques exemples.

1.3.1 Réducteur à engrenages

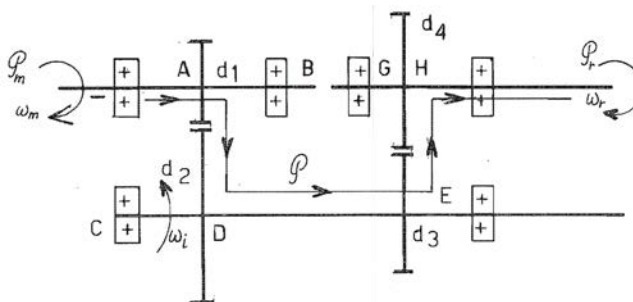


FIGURE 1.1 – Réducteur à engrenages à deux étages.

Un réducteur est destiné à transformer une puissance à grande vitesse de rotation ω_m en une puissance à faible vitesse de rotation ω_r . Le réducteur à engrenages de la figure 1.1 possède deux étages de réduction. Le rendement des engrenages est élevé (pertes de l'ordre du pourcent), ce qui permet de négliger les pertes en première approximation. On a donc immédiatement

$$M_{tm} = \frac{\mathcal{P}}{\omega_m} \quad \text{et} \quad M_{tr} = \frac{\mathcal{P}}{\omega_r} \quad (1.5)$$

c'est-à-dire que le couple récepteur est beaucoup plus important que le couple moteur. Remarquons que cela signifie que ces deux couples ne sont pas en équilibre et que, dès lors, si l'on fait le bilan d'équilibre du réducteur complet, on

constate qu'il faut bien que la différence

$$\Delta M_t = M_{tr} - M_{tm}$$

passe quelque part. Ce *quelque part*, c'est la liaison entre le réducteur et la fondation. Il est donc essentiel d'*attacher* le réducteur à la fondation !

Examinons à présent le chemin de la puissance. Elle passe de l'entrée au point A par l'arbre moteur. Elle passe alors par les roues dentées sur l'arbre intermédiaire, où elle fait le chemin DE . De là, elle passe par le second engrenage à l'arbre récepteur, où elle fait le chemin du point H à la sortie. Ceci nous permet d'obtenir directement le moment de torsion dans toutes les portions d'arbres :

Portion d'arbre	Moment de torsion
Entrée – A	$\mathcal{P}/\omega_m$
$A - B$	0
$C - D$	0
$D - E$	$\mathcal{P}/\omega_i$
$E - F$	0
$G - H$	0
$H -$ Sortie	$\mathcal{P}/\omega_r$

On peut tout aussi aisément déduire les efforts actifs dans les engrenages. Nous traiterons le premier engrenage pour fixer les idées (fig. 1.2). Grâce à la présence des dents, deux circonférences (une sur chaque roue) roulent sans glisser l'une sur l'autre. C'est ce que l'on appelle les circonférences *primitives*. Si d_1 et d_2 sont leurs diamètres respectifs, elles ont en leur point de contact I une vitesse commune v donnée par

$$v = \omega_m \frac{d_1}{2} = \omega_i \frac{d_2}{2} \quad (1.6)$$

ce qui implique évidemment

$$\frac{\omega_m}{\omega_i} = \frac{d_2}{d_1} \quad (1.7)$$

Pratiquement, pour que les deux roues puissent engrener, il faut qu'elles aient le même *pas* p . Ce pas est donné par

$$p = \frac{\pi d}{Z} \quad (1.8)$$

où Z est le nombre de dents de la roue considérée. Cependant, le pas est une grandeur désagréable, car le diamètre est normalement un nombre rationnel, de même évidemment que le nombre entier de dents. Il en résulte que le pas est un nombre irrationnel. Du reste, sur les plans, on ne voit pas la circonférence, mais le diamètre. C'est pourquoi on ne parle jamais du pas, mais bien du *module*

$$m = \frac{p}{\pi} = \frac{d}{Z} \quad (1.9)$$

qui est un nombre rationnel. Ce sont les modules qui sont normalisés (voir *Mémento*). Les deux roues, ayant le même pas, ont donc le même module. Il en découle également que

$$\frac{\omega_m}{\omega_i} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{mZ_2}{mZ_1} = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (1.10)$$

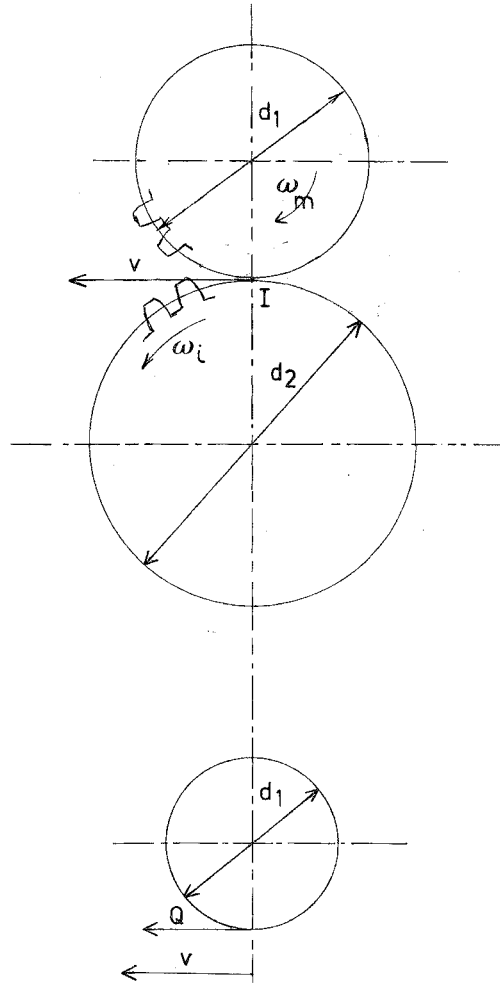


FIGURE 1.2 – Effort actif dans le premier engrenage.

c'est-à-dire que les vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux nombres de dents.

Ceci étant, la roue motrice fournit une puissance

$$\mathcal{P} = Qv \quad (1.11)$$

Q étant la composant tangentielle de l'effort d'interaction entre les deux roues, ce qui donne

$$Q = \frac{\mathcal{P}}{v} \quad (1.12)$$

C'est l'effort actif. Nous verrons plus loin quels sont les efforts secondaires qui l'accompagnent.

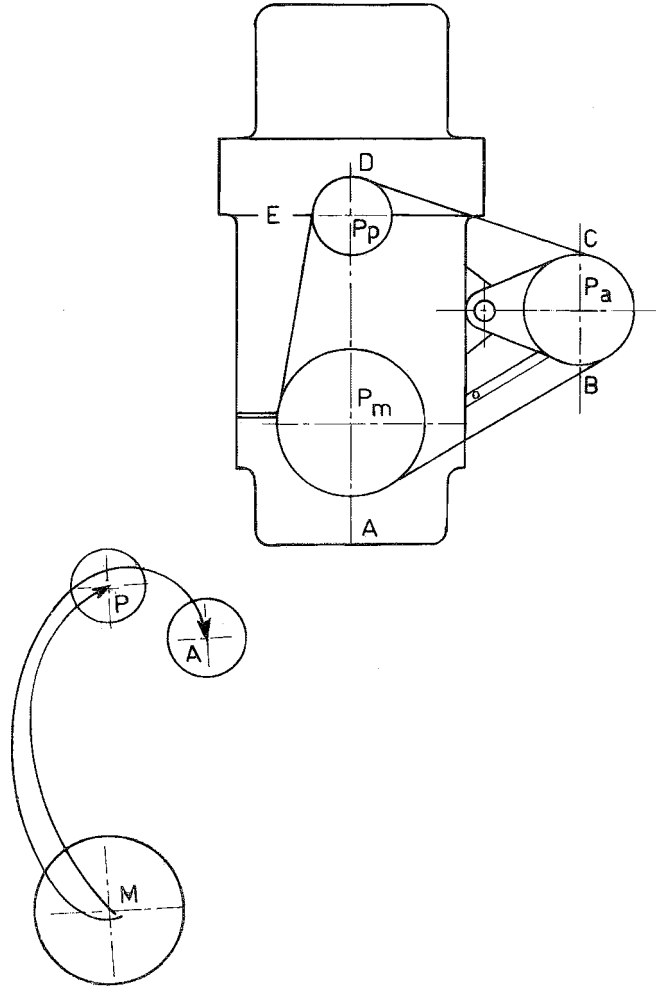


FIGURE 1.3 – Entraînement des auxiliaires d'un moteur à explosion.

1.3.2 Distribution de puissance par une courroie

Considérons la distribution de puissance aux auxiliaires d'un moteur à explosion, pompe à eau et ventilateur d'une part, alternateur d'autre part (fig1.3). On utilise une courroie trapézoïdale. Supposons que l'alternateur doive tourner 1,8 fois plus vite que le moteur, et la pompe à eau, 1,5 fois plus vite :

$$\omega_p = 1,5\omega_m \quad \text{et} \quad \omega_a = 1,8\omega_m \quad (1.13)$$

La caractéristique d'une courroie est de transmettre (au rendement près) sa vitesse tangentielle v aux poulies. On a donc

$$v = \frac{\omega_m d_m}{2} = \frac{\omega_p d_p}{2} = \frac{\omega_a d_a}{2} \quad (1.14)$$

si bien que les diamètres des poulies doivent être en rapport inverse des vitesses angulaires :

$$d_p = \frac{d_m}{1,5} \quad \text{et} \quad d_a = \frac{d_m}{1,8} \quad (1.15)$$

Le bilan des puissances est

$$P_m = P_a + P_p \quad (1.16)$$

Si, par exemple, l'alternateur consomme $230W$ et le groupe pompe-ventilateur, $500W$, on aura

$$P_m = 730W$$

Telle est la puissance consommée par le moteur pour faire tourner ses auxiliaires.

Venons-en aux efforts actifs. On appelle effort actif d'une courroie sur une poulie le rapport

$$Q = \frac{\mathcal{P}}{v} \quad (1.17)$$

C'est la charge tangentielle concentrée qui fournirait la même puissance ou encore, la somme de tous les efforts tangentiels fournis par la courroie à la poulie (ou inversement pour la poulie motrice). Si donc la vitesse de la courroie est de $30m/s$, on aura

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{\mathcal{P}_m}{v} = \frac{730}{30} = 24,33N \\ Q_p &= \frac{\mathcal{P}_p}{v} = \frac{500}{30} = 16,67N \\ Q_a &= \frac{\mathcal{P}_a}{v} = \frac{230}{30} = 7,67N \end{aligned}$$

Dans tout ceci, nous assimilons le rendement à l'unité. En pratique, il se situe aux environs de 96...98%.

1.3.3 Une distribution plus complexe

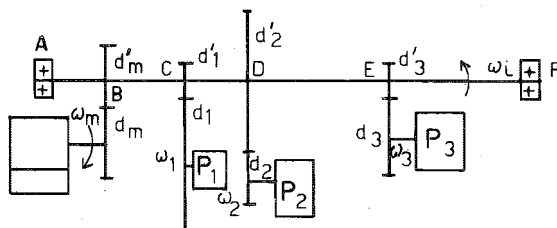


FIGURE 1.4 – Distribution de puissance.

Dans la transmission de la figure 1.4, le moteur m fournit sa puissance à trois récepteurs notés 1, 2 et 3. On obtient aisément le rhéogramme de la figure 1.5 en partant des récepteurs. Supposons d'abord que l'on désire connaître les moments de torsion régnant dans les différents tronçons de l'arbre secondaire. Il suffit pour cela de diviser la puissance par la vitesse angulaire.

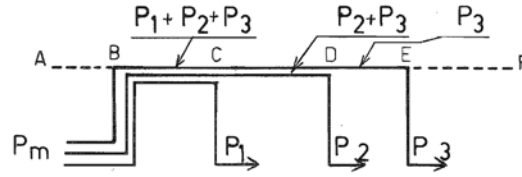


FIGURE 1.5 – Rhéogramme correspondant.

Tronçon	Moment de torsion
$A - B$	0
$B - C$	$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{\omega_i}$
$C - D$	$\frac{P_2 + P_3}{\omega_i}$
$D - E$	$\frac{P_3}{\omega_i}$
$E - f$	0

Le moment de torsion dans l'arbre primaire est donné par

$$M_{tm} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{\omega_m}$$

Les moments de torsion dans les arbres récepteurs sont

$$M_{t1} = \frac{P_1}{\omega_1}, \quad M_{t2} = \frac{P_2}{\omega_2}, \quad M_{t3} = \frac{P_3}{\omega_3}$$

Enfin, les efforts actifs dans les engrenages valent

$$Q_1 = \frac{P_1}{\omega_1 \frac{d_1}{2}}, \quad Q_2 = \frac{P_2}{\omega_2 \frac{d_2}{2}}, \quad Q_3 = \frac{P_3}{\omega_3 \frac{d_3}{2}}$$

1.3.4 Un cas de faible rendement

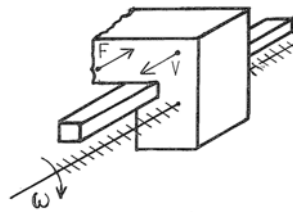


FIGURE 1.6 – Transmission par vis et écrou.

Il existe certains cas où il est indispensable de tenir compte des pertes parce qu'elles sont importantes. C'est notamment le cas des transmissions par vis et écrou (fig1.6). Dans ces transmissions, très fréquentes dans les machines-outils notamment (pour le mouvement d'avance) mais aussi dans les étaux, il n'est pas rare de trouver des vis *irréversibles*, c'est-à-dire que la vis peut faire avancer le chariot, mais que le mouvement du chariot est incapable de faire tourner la vis. Le rendement est alors inférieur à 1/2.

Examinons ce cas particulier. À chaque tour de la vis correspond une avance du chariot égale au pas p de la vis. Donc, en notant N la fréquence de rotation de la vis, la vitesse v du chariot est donnée par

$$v = Np \quad (1.18)$$

Soit η le rendement de ce système. La puissance donnée à la vis vaut

$$\mathcal{P}_{vis} = M_{t,vis} \cdot 2\pi N \quad (1.19)$$

Si le chariot doit vaincre une force F , la puissance correspondante vaudra

$$\mathcal{P}_{chariot} = Fv \quad (1.20)$$

Pour obtenir le moment que doit fournir la vis, on écrit que la puissance reçue par le chariot est égale à la puissance de la vis *multipliée par le rendement*,

$$\mathcal{P}_{chariot} = \eta \mathcal{P}_{vis} \quad (1.21)$$

soit explicitement

$$Fv = \eta M_{t,vis} \cdot 2\pi N$$

ce qui donne

$$M_{t,vis} = \frac{1}{\eta} F \frac{v}{2\pi N} = \frac{1}{\eta} F \frac{Np}{2\pi N} = \frac{1}{\eta} F \frac{p}{2\pi} \quad (1.22)$$

1.4 Efforts secondaires dans les engrenages

1.4.1 Engrenage droit

Commençons par préciser le vocabulaire exact relatif aux engrenages. Un *engrenage* est un système dans lequel deux *roues dentées* engrènent entre elles. On appelle généralement *pignon* la petite roue dentée, l'autre étant simplement dénommée *roue*. Affectons ici d'un indice 2 les grandeurs relatives au pignon et d'un indice 1 les grandeurs relatives à la roue (fig.1.7). Nous savons que l'effet des dents est d'amener les circonférences primitives à rouler sans glisser l'une sur l'autre. Leur vitesse commune au point de contact est donc

$$v = \omega_1 \frac{d_1}{2} = \omega_2 \frac{d_2}{2} \quad (1.23)$$

Pour que les dents des deux roues puissent entrer et sortir des entredents de la roue conjuguée, il faut évidemment qu'elles soient plus étroites en leur sommet qu'en leur base. Au point de contact, le profil de la dent a donc sa normale inclinée d'un angle β par rapport à la tangente au cercle passant par ce point de contact. Cet angle est appelé *angle de pression*. La dent conjuguée doit à ce moment avoir, au point de contact, *le même* angle. C'est à partir de ces conditions qu'on détermine le profil des dents, dont l'étude précise relève de cours spécialisés. En mécanique de puissance, on utilise exclusivement le profil en *développante de cercle*. Il possède cette propriété fondamentale que *l'angle de pression reste constant tout au long de l'engrènement*. À l'heure actuelle, cet angle est normalisé à la valeur

$$\beta = 20^\circ \quad (1.24)$$

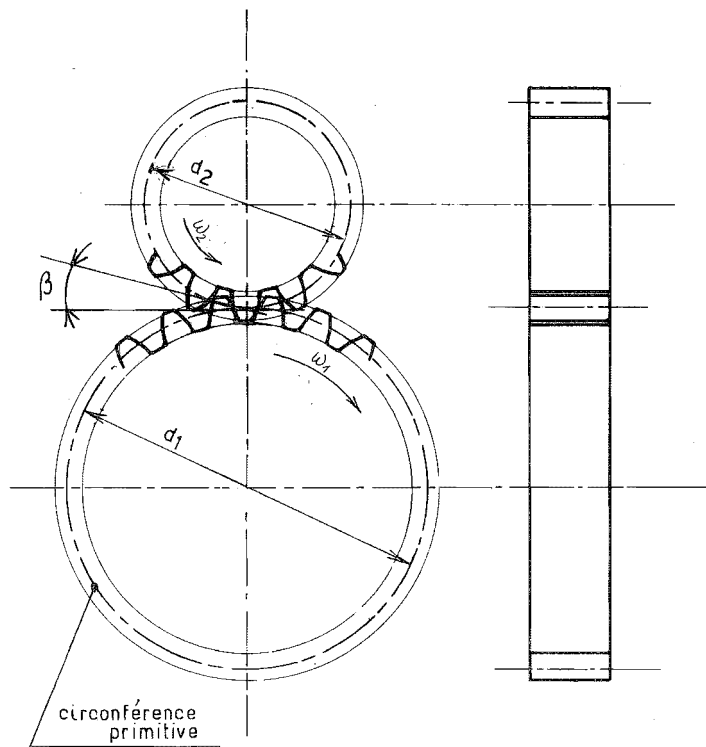


FIGURE 1.7 – Engrenage droit.

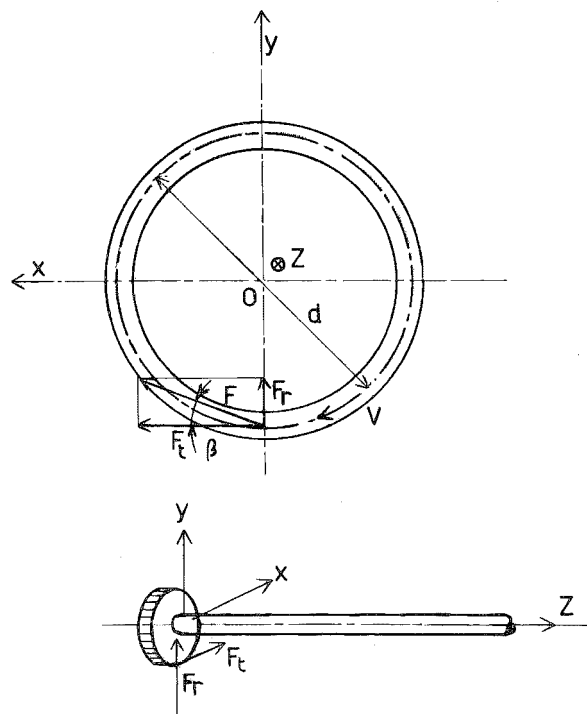


FIGURE 1.8 – Efforts dans un engrenage droit.

Si l'on néglige les frottements, l'action de la roue menante sur la roue menée est situé sur la normale commune aux deux profils. On a donc (fig1.8)

$$\text{Force tangentielle : } F_t = Q = \frac{\mathcal{P}}{v} = \frac{\mathcal{P}}{\omega \frac{d}{2}} \quad (1.25)$$

$$\text{Force radiale : } F_r = F_t \tan \beta \quad (1.26)$$

Pour un angle de pression de 20° , la tangente vaut 0,36, ce qui signifie que l'effort secondaire vaut ici 36% de l'effort actif. Les forces ci-dessus induisent les sollicitations suivantes pour l'arbre :

- Moment de torsion $M_t = F_t \frac{d}{2}$;
- Flexion dans le plan xOz , sous l'effet de l'effort tranchant F_t ;
- Flexion dans le plan yOz , sous l'effet de l'effort tranchant F_r .

1.4.2 Engrenage à denture hélicoïdale

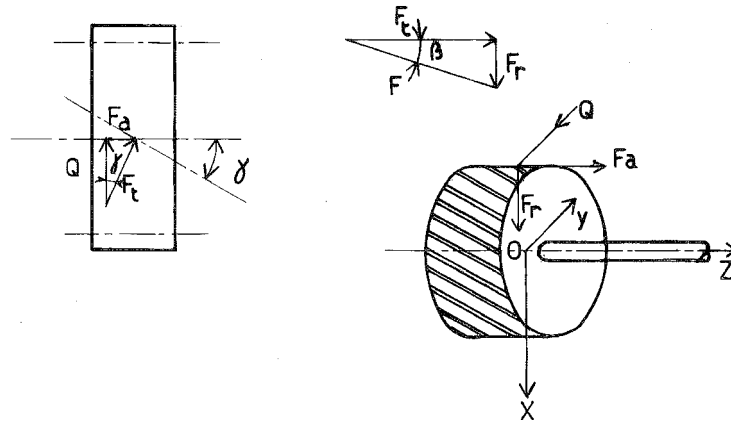


FIGURE 1.9 – Engrenage à denture hélicoïdale.

Diverses considérations pratiques, au rang desquelles interviennent le silence de fonctionnement et la régularité de l'engrènement, conduisent à préférer dans bien des cas la denture hélicoïdale. Sa caractéristique est que les dents sont inclinées par rapport à la génératrice du cylindre primitif d'un certain angle γ . Cet angle d'hélice varie entre 8 et 20° selon les applications. Il vaut souvent 10° .

Sur une dent, on a toujours (fig1.9)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_r \quad (1.27)$$

avec

$$F_r = F_t \tan \beta \quad (1.28)$$

et l'angle de contact reste en général de 20° . Mais du fait de l'angle d'hélice γ , la force tangentielle $\mathbf{F}_t$ se décompose elle-même en une composante active $\mathbf{Q}$ et une *force axiale* $\mathbf{F}_a$. On a donc

$$F_a = Q \tan \gamma \quad \text{et} \quad F_t = \frac{Q}{\cos \gamma}$$

soit en définitive

$$Q = \frac{\mathcal{P}}{\omega \frac{d}{2}}, \quad F_a = Q \operatorname{tg} \gamma, \quad F_r = Q \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \gamma} \quad (1.29)$$

Ces efforts soumettent l'arbre à

- un moment de torsion $M_t = Q \frac{d}{2}$;
- une flexion dans le plan xOz , due aux efforts F_r et F_a ;
- une flexion dans le plan yOz , due à l'effort Q ;
- un effort axial F_a qui devra être repris par une butée.

Remarque importante : l'effort axial change de sens avec le couple.

1.4.3 Engrenage conique droit

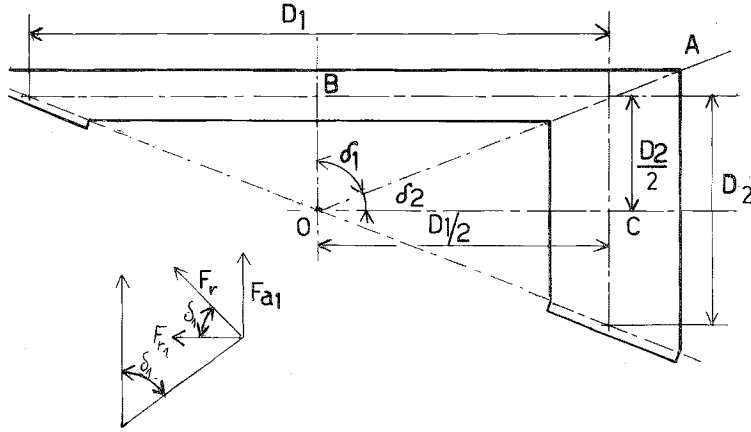


FIGURE 1.10 – Engrenage conique droit.

Nous nous limiterons au cas courant de l'engrenage entre deux arbres perpendiculaires. Les deux demi-angles au sommet des cônes, δ_1 et δ_2 (fig. 1.10) sont liés par les relations

$$\begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 &= \frac{\pi}{2} \\ \frac{D_1}{2} \operatorname{tg} \delta_2 &= \frac{D_2}{2} \\ \frac{D_2}{2} \operatorname{tg} \delta_1 &= \frac{D_1}{2} \end{aligned} \quad (1.30)$$

ce qui implique, en notant toujours Z le nombre de dents,

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{D_1}{D_2} = \frac{Z_1}{Z_2}, \quad \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{D_2}{D_1} = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (1.31)$$

La force active vaut

$$Q = \frac{\mathcal{P}}{\omega_1 \frac{D_1}{2}} = \frac{\mathcal{P}}{\omega_2 \frac{D_2}{2}} \quad (1.32)$$

La composante normale à la ligne OA , dans le plan BAC , vaut

$$F_n = Q \operatorname{tg} \beta \quad (1.33)$$

β étant l'angle de pression. Elle se décompose en

$$\begin{aligned} F_{r1} = F_{a2} &= F_n \cos \delta_1 = F_n \sin \delta_2 \\ F_{r2} = F_{a1} &= F_n \sin \delta_1 = F_n \cos \delta_2 \end{aligned} \quad (1.34)$$

1.5 Efforts secondaires dans les transmissions par courroie

1.5.1 Courroies plates

Nous commencerons par les courroies plates qui sont les plus simples. Du reste, les résultats obtenus se transposeront sans peine au cas des courroies trapézoïdales.

1.5.1.1 Géométrie de la transmission

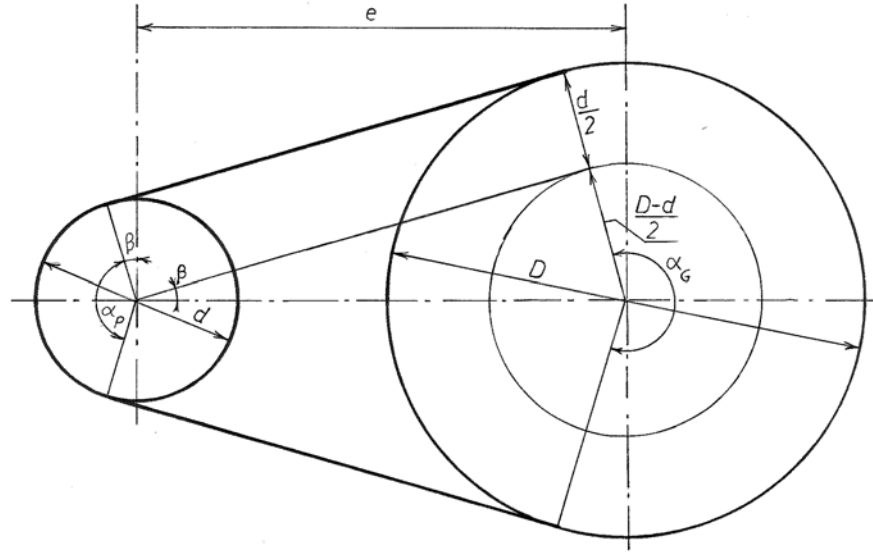


FIGURE 1.11 – Transmission par courroie sans tendeur.

La géométrie d'une transmission classique par courroie sans tendeur est représentée en figure 1.11. Les deux poulies ont pour diamètres respectifs D pour la grande et d pour la petite. L'arc sur lequel la courroie s'enroule sur la jante d'une poulie s'appelle *arc embrassé*. Nous le noterons α_G sur la grande poulie et α_P sur la petite poulie. Entre celles-ci, pour autant que la tension de la courroie soit suffisante, la courroie suit la tangente commune aux deux poulies. Ces parties de la courroie qui sont en l'air sont appelées *brins*. La distance e entre les axes des deux poulies est appelée *entraxe*.

Appelons β la différence $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_P}{2}$. Il ressort de la figure que

$$\sin \beta = \frac{D - d}{2e} \quad (1.35)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \alpha_P &= \pi - 2\beta \\ \alpha_G &= \pi + 2\beta \end{aligned} \quad (1.36)$$

Enfin, la longueur de la courroie *en service* se calcule par

$$\mathcal{L} = \frac{d}{2}\alpha_P + \frac{D}{2}\alpha_G + 2e \cos \beta \quad (1.37)$$

Ce n'est pas sa longueur relaxée, car la courroie est montée sous une *tension de pose* N_0 ¹. La longueur relaxée est, en vertu de la loi de Hooke, égale à

$$\mathcal{L}_0 = \frac{\mathcal{L}}{1 + \frac{N_0}{ES}} \quad (1.38)$$

où E est le module de Young de la courroie et S sa section.

1.5.1.2 Efforts dans la courroie en service

Nous nous limiterons ici à une théorie très élémentaire, qui suffit pour les calculs mais ne permet pas de comprendre réellement le détail du fonctionnement de la transmission. Le lecteur intéressé par cette question pourra consulter les ouvrages [12, 64, 43, 24, 20]. La tension en un point de la courroie se décompose en deux termes : la *tension centrifuge* N_c et la *tension productive* $\bar{N}$:

$$N = N_c + \bar{N} \quad (1.39)$$

1.5.1.3 Tension centrifuge

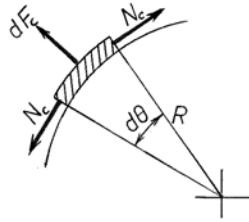


FIGURE 1.12 – Tension centrifuge.

La tension centrifuge résulte de la rotation de la courroie autour des poulies (figure 1.12). Soit R le rayon d'une poulie. Un élément d'arc $d\theta$ de la courroie

1. Il est de tradition d'appeler *tension* l'effort dans la courroie. Ce n'est donc pas une contrainte!

situé sur cette poulie a une masse $m'Rd\theta$, où m' est la masse linéique de la courroie. Il est donc soumis à une force centrifuge

$$dF_c = m'Rd\theta \cdot \frac{v^2}{R} = m'v^2d\theta$$

Cette force est équilibrée par les tensions N à ses deux extrémités, dont la résultante radiale vaut

$$2N_c \sin \frac{d\theta}{2} = 2N_c d\frac{d\theta}{2} = N_c d\theta$$

La condition d'équilibre est donc

$$dF_c = m'v^2d\theta = N_c d\theta$$

soit

$$N_c = m'v^2 \quad (1.40)$$

On observera que ce résultat est indépendant du rayon de la poulie. On a donc la même valeur de N_c sur les deux poulies et, par continuité des efforts, les brins subissent la même tension. En conclusion, *du fait de la vitesse v de la courroie, il naît tout au long de celle-ci une tension égale à $m'v^2$* ;

1.5.1.4 Tensions productives

On appelle *tensions productives* les tensions résultant des échanges d'efforts entre la courroie et les poulies.

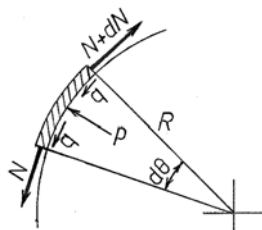


FIGURE 1.13 – Tensions productives.

Equilibre - Fondamentalement, la poulie motrice (notée M) exerce sur la courroie, outre des pressions normales p par unité de longueur, des efforts tangentiels q par unité de longueur dans le sens du mouvement. Au contraire, les efforts tangentiels exercés par la poulie réceptrice (notée R) sur la courroie s'opposent au mouvement. Pour fixer les idées, nous examinerons le cas de la poulie réceptrice. Ainsi que le montre la figure 1.13, la condition d'équilibre tangentiel s'écrit

$$(\bar{N} + d\bar{N}) - \bar{N} - qRd\theta = 0$$

soit

$$\frac{d\bar{N}}{d\theta} = qR \quad (1.41)$$

Quant à l'équilibre radial, il exige que

$$\bar{N} \frac{d\theta}{2} + (\bar{N} + d\bar{N}) \frac{d\theta}{2} = pRd\theta$$

ce qui donne

$$\bar{N} = pR \quad (1.42)$$

Examinons d'abord les conséquences directes de l'équation (1.41). Comme q est positif, la tension productive croît le long de la poulie. Sa valeur à l'entrée sera notée $\bar{t}$. La tension productive à la sortie sera notée $\bar{T}$. Par continuité, on retrouvera ces tensions dans les brins adjacents, c'est-à-dire que le brin allant dans le sens du mouvement de la poulie motrice à la poulie réceptrice aura la tension productive $\bar{t}$ - c'est le *brin mou* - et que l'autre brin aura la tension productive $\bar{T}$ - c'est le *brin tendu*. L'effort tangentiel total échangé entre la poulie et la courroie (effort actif) vaut

$$Q = \int_0^{\alpha_R} qRd\theta = \int_0^{\alpha_R} \frac{dN}{d\theta} d\theta = \bar{T} - \bar{t} \quad (1.43)$$

Il va sans dire que couple à la poulie vaut

$$M_{t,R} = QR_R$$

Le même raisonnement peut être fait pour la poulie motrice, dont l'effort actif aura la même valeur, à quoi correspond un couple $M_{t,M} = QR_M$.

Rapport entre $\bar{T}$ et $\bar{t}$ - La répartition des efforts tangentiels ne découle pas directement de ces deux équations d'équilibre. Mais on peut remarquer que si les poulies ne patinent pas, on doit avoir en chaque point

$$q \leq \mu p$$

l'égalité partout correspondant au patinage. Nous raisonnerons encore sur la poulie réceptrice pour fixer les idées. On déduit de (1.41) et (1.42) que

$$\frac{\frac{d\bar{N}}{d\theta}}{\bar{N}} = \frac{q}{p} \leq \mu$$

ce qui, intégré, donne

$$\ln \bar{N} \leq \ln \bar{t} + \mu\theta$$

ou encore

$$\bar{N} \leq \bar{t}e^{\mu\theta}$$

si bien que

$$\frac{\bar{T}}{\bar{t}} \leq e^{\mu\alpha_R} \quad (1.44)$$

Un raisonnement identique sur la poulie motrice conduit à la relation

$$\frac{\bar{T}}{\bar{t}} \leq e^{\mu\alpha_M} \quad (1.45)$$

Il résulte de ces deux inégalités que le rapport $\bar{T}/\bar{t}$ est limité par la *petite* poulie, qui a le plus petit arc embrassé. :

$$\frac{\bar{T}}{\bar{t}} \leq e^{\mu\alpha_P} \quad (1.46)$$

Calcul pratique - Pour tenir compte de la relation précédente, la pratique courante consiste à écrire

$$\frac{\bar{T}}{\bar{t}} = e^{\tilde{\mu}\alpha_P} \quad (1.47)$$

avec un coefficient de frottement *réduit* $\tilde{\mu} \leq \mu$. Voici quelques valeurs de $\tilde{\mu}$ [64] :

COURROIE	$\tilde{\mu}$
Cuir, côté poil	0,3+v/(100m/s)
Cuir, côté chair	0,2 +v/100m/s)
Coton	0,3
Soie artificielle imprégnée	0,35
Synthétique	0,5

Tension productive moyenne - On appelle tension productive moyenne $\bar{N}_0$ la moyenne entre la tension productive du brin tendu et celle du brin mou :

$$\bar{N}_0 = \frac{\bar{T} + \bar{t}}{2} \quad (1.48)$$

Calculons le rapport $Q/(2\bar{N}_0)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2\bar{N}_0} &= \frac{\bar{T} - \bar{t}}{\bar{T} + \bar{t}} \\ &= \frac{\bar{t}(e^{\tilde{\mu}\alpha_P} - 1)}{\bar{t}(e^{\tilde{\mu}\alpha_P} + 1)} \\ &= \frac{\exp \frac{\tilde{\mu}\alpha_P}{2} - \exp \frac{-\tilde{\mu}\alpha_P}{2}}{\exp \frac{\tilde{\mu}\alpha_P}{2} + \exp \frac{-\tilde{\mu}\alpha_P}{2}} \\ &= \operatorname{th} \frac{\tilde{\mu}\alpha_P}{2} \end{aligned} \quad (1.49)$$

1.5.1.5 Tension de pose

Dans le cas simple et relativement courant où la courroie est montée avec un entraxe constant, celui-ci est choisi pour assurer une tension de pose N_p donnée. La tension productive moyenne dépend de cette tension de pose d'une manière que l'on peut analyser comme suit. Lors de la pose, on allonge la courroie de longueur naturelle $\mathcal{L}_0$ jusqu'à la longueur de service $\mathcal{L}$. La relation entre les deux est

$$\mathcal{L}_0 = \frac{\mathcal{L}}{\left(1 + \frac{N_p}{ES}\right)}$$

Lorsque la courroie travaille, la longueur en service ne change pas, car elle est définie par la géométrie de la transmission. Si s désigne une coordonnée curviligne le long de la courroie, on a

$$\mathcal{L}_0 = \int_0^{\mathcal{L}} \frac{1}{\left(1 + \frac{N}{ES}\right)} ds$$

On notera que N/ES est petit devant l'unité, ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{1 + \frac{N}{ES}} \approx 1 - \frac{N}{ES}$$

ce qui mène à la condition

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \left(1 - \frac{N_p}{ES} \right) = \int_0^{\mathcal{L}} \left(1 - \frac{N}{ES} \right) ds$$

ou encore

$$N_p = \frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} N ds \quad (1.50)$$

On peut décomposer l'intégrale du second membre en

$$\int_{\text{brin mou}} + \int_{\text{poulie réceptrice}} + \int_{\text{brin tendu}} + \int_{\text{brin tendu}}$$

On a directement

$$\begin{aligned} \int_{\text{brin mou}} &= \ell_{brin} t \\ \int_{\text{brin tendu}} &= \ell_{brin} T \end{aligned}$$

Sur les poulies, la tension varie de t à T . Comme ce sont les seules valeurs connues, nous utiliserons la méthode du parallélogramme, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\text{poulie réceptrice}} &\approx \frac{T+t}{2} R_R \alpha_R \\ \int_{\text{poulie motrice}} &\approx \frac{T+t}{2} R_M \alpha_M \end{aligned}$$

Au total, il vient

$$\begin{aligned} N_p &\approx \frac{1}{\mathcal{L}} \left[T \left(\ell_{brin} + \frac{R_R \alpha_R}{2} + \frac{R_M \alpha_M}{2} \right) + t \left(\ell_{brin} + \frac{R_R \alpha_R}{2} + \frac{R_M \alpha_M}{2} \right) \right] \\ &\approx \frac{1}{\mathcal{L}} \left(T \frac{\mathcal{L}}{2} + t \frac{\mathcal{L}}{2} \right) \end{aligned}$$

soit en définitive

$$N_p = \frac{T+t}{2} = \frac{(\bar{T} + m'v^2) + (\bar{t} + m'v^2)}{2} = \bar{N}_0 + m'v^2 \quad (1.51)$$

Cela signifie que pour une tension de pose donnée, la tension productive moyenne diminue d'autant plus que la vitesse est grande et, en conséquence, l'effort tangentiel transmissible Q diminue :

$$Q = (N_p - m'v^2) \operatorname{th} \frac{\tilde{\mu} \alpha_P}{2} \quad (1.52)$$

1.5.1.6 Efforts transmis aux arbres

L'interaction entre la poulie et la courroie se résume aux seuls efforts à l'arrêt. Ainsi, dans le cas de la poulie motrice représentée en figure 1.14, la composante de l'effort transmis à l'arbre le long de la ligne des centres vaut

$$F_1 = \bar{T} \sin \frac{\alpha}{2} + \bar{t} \sin \frac{\alpha}{2} = 2\bar{N}_0 \sin \frac{\alpha}{2} \quad (1.53)$$


$$F_2 = \bar{T} \cos \frac{\alpha}{2} - \bar{t} \cos \frac{\alpha}{2} = Q \cos \frac{\alpha}{2} \quad (1.54)$$

1.5.2 Courroies trapézoïdales

$$p = 2p_1 \sin \frac{\delta}{2}$$
$$q_1 = \mu_1 p_1$$
$$q = 2q_1 = 2\mu_1 \frac{p}{2 \sin \frac{\delta}{2}} = \mu_1 \frac{p}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

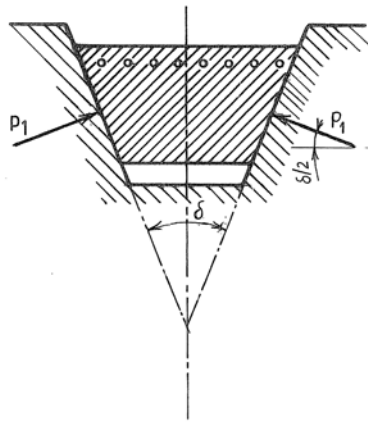


FIGURE 1.15 – Courroie trapézoïdale.

On se ramène donc à la théorie des courroies plates en introduisant un *coefficient de frottement équivalent*

$$\mu = \frac{q}{p} = \frac{\mu_1}{\sin \frac{\delta}{2}} \quad (1.55)$$

En pratique, l'angle δ est de l'ordre de 34° , ce qui donne

$$\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} = 3,420$$

On obtient ainsi des coefficients de frottement équivalents de l'ordre de 1 à 2,5. Les courroies trapézoïdales peuvent donc transmettre un effort actif plus grand pour la même tension moyenne à l'arrêt. mais elle ne permettent pas de travailler avec des vitesses aussi grandes que les courroies plates. On ne dépasse guère 30m/s avec les courroies trapézoïdales, alors que les courroies plates permettent d'atteindre 50m/s.

1.6 Efforts secondaires dans les transmissions par chaîne à rouleaux

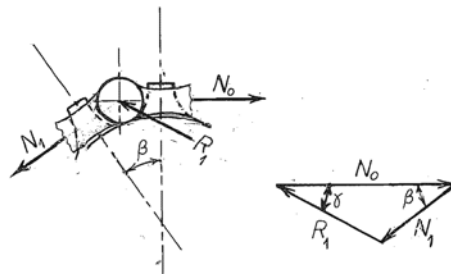


FIGURE 1.16 – Transmission par chaîne à rouleaux.

Dans les transmissions par chaînes à rouleaux, les rouleaux transmettent l'effort à la roue dentée avec une certaine obliquité γ égale au demi-angle de la dent (fig. 1.16). Cette obliquité est de l'ordre de 15 à 19°. On a donc, si β est l'angle entre deux maillons, les relations

$$N_0 = N_1 \cos \beta + R_1 \cos \gamma \quad (1.56)$$

$$N_1 \sin \beta = R_1 \sin \gamma \quad (1.57)$$

De (1.57), on tire immédiatement

$$R_1 = N_1 \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

ce qui implique

$$N_0 = N_1 \left(\cos \beta + \frac{\sin \beta \cos \gamma}{\sin \gamma} \right) = N_1 \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \gamma}$$

Cette relation se reproduit de maillon en maillon, si bien qu'après n maillons, il subsiste l'effort

$$N_n = N_0 \left(\frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \right)^n \quad (1.58)$$

Il est bien clair que $\beta = \frac{2\pi}{Z}$ où Z est le nombre de dents de la roue. Le nombre de dents *en prise* Z_P est la fraction de ce nombre de dents située dans l'arc embrassé α , soit

$$Z_P = \text{partie entière de } \left(Z \frac{\alpha}{\pi} \right) \quad (1.59)$$

L'effort au brin mou t est donc relié à l'effort au brin tendu $T = N_0$ par

$$t = T \left(\frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \right)^{Z_P} \quad (1.60)$$

Ainsi, par exemple, pour $\gamma = 15^\circ$ et $Z = 17$ dents, on a

$$\beta = \frac{360}{17} = 21,18^\circ$$

et

$$\frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{\sin(15^\circ)}{\sin(36,18^\circ)} = 0,4384$$

Pour un arc embrassé de 180° , le nombre de dents en prise vaut

$$Z_P = \text{partie entière de } \left(17 \frac{180}{360} \right) = 8$$

ce qui donne

$$\frac{t}{T} = (0,4384)^8 = 0,001364$$

L'effort dans le brin mou est donc *négligeable* et on peut écrire sans grande erreur $T = Q$. L'effort sur l'axe est dès lors approximativement égal à l'effort actif, dans la direction du brin tendu. C'est là l'avantage des chaînes sur les courroies : à effort actif égal, elles soumettent l'arbre à des efforts bien moindres.

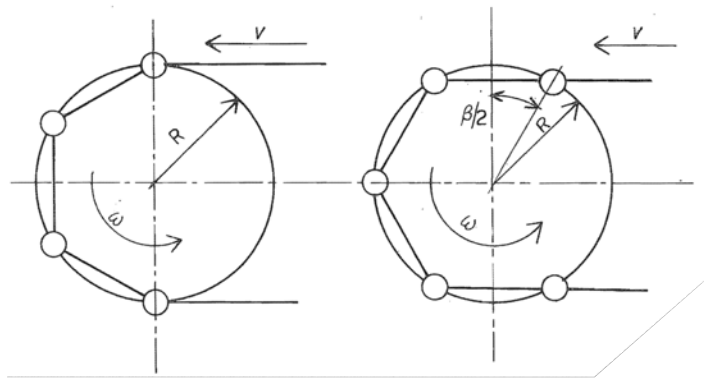


FIGURE 1.17 – Effet de polygone.

Il existe cependant un inconvénient aux transmissions par chaînes. Il s'agit de l'*effet de polygone*, qui consiste en ceci : supposons que la roue de la figure 1.17 soit motrice et tourne à une vitesse de rotation constante ω . Dans la première configuration, à gauche de la figure, la vitesse du brin tendu est donnée par

$$v = \omega R$$

tandis que dans la seconde configuration, à droite de la figure, elle vaut

$$v = \omega R \cos \frac{\beta}{2}$$

Le rapport de transmission n'est donc pas strictement constant. Cet effet s'accroît pour les roues à faible nombre de dents, pour lesquelles l'angle β est relativement grand.

Les *courroies crantées* s'apparentent aux chaînes pour la transmission de l'effort, avec $\gamma = 20 \dots 25^\circ$. Elles n'ont pas d'effet de polygone.

Chapitre 2

Avant-projet d'un arbre

2.1 Introduction

Le calcul des efforts peut en général être mené sur un schéma de principe de la chaîne cinématique. L'avant-projet consiste à dessiner l'arbre réel, de telle façon qu'il soit capable de supporter ces efforts

- en résistant suffisamment longtemps,
- sans trop se déformer,
- sans vibrations exagérées.

Et, condition absolue, il doit *être réalisable aussi simplement que possible*. Ajoutons encore que dans certaines applications interviennent de manière importante des conditions sur le *poids* (automobile et surtout, aéronautique).

2.2 Exemple illustratif

Illustrons les conditions qui précèdent par un exemple. Soit à dessiner un arbre de sortie de réducteur. On suppose qu'il se termine par un accouplement élastique et on admettra, pour un peu simplifier les choses, que cet accouplement ne transmet *aucun* moment de flexion. Il convient, bien entendu, que l'arbre de sortie soit dimensionné pour résister. Le moment de *flexion* est généralement le terme principal de la sollicitation. Il a l'allure donnée en figure 2.1.

- a) Si l'on se limite au seul critère de résistance, on donnera à l'arbre une section plus forte au droit de la roue dentée. Nous serons cependant amenés à réviser cette conception.
- b) Pour ce type d'applications, les roulements sont montés *serrés sur l'arbre* et libres (c'est-à-dire avec jeu) dans les logements du carter. Le dessin de la figure 2.1 est donc inadmissible, car il donne à l'arbre la possibilité de se mouvoir axialement. Nous touchons ici à un grand principe de la construction mécanique : *même si aucune force calculable ne tend à provoquer ce mouvement parasite, il aura toutes les chances de se produire du fait de causes fortuites ou secondaires* : très légères inclinaisons, vibrations, etc. Il est donc *nécessaire* d'empêcher le mouvement axial. En outre, ceci doit se faire sur *un seul* roulement et non sur les deux, car cela empêcherait la libre dilatation de l'arbre. La figure 2.2 montre comment on peut fixer

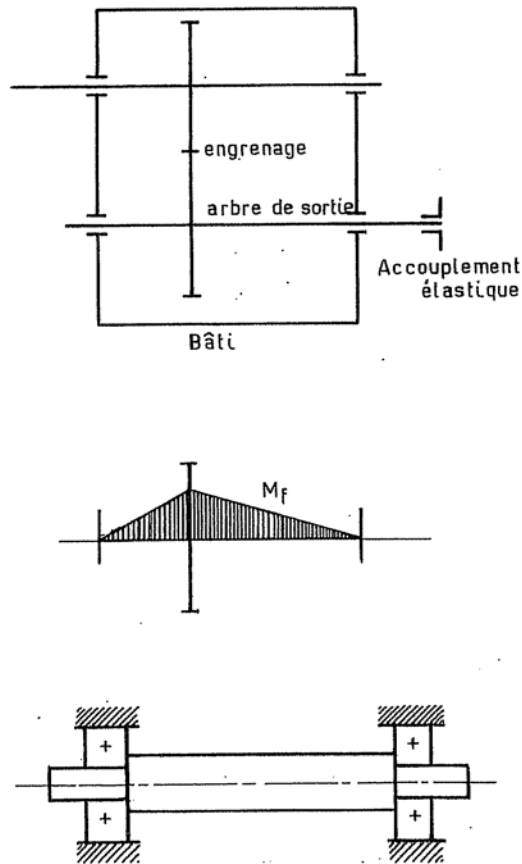


FIGURE 2.1 – Diagramme du moment de flexion dans l'arbre de sortie.

axialement le roulement *B* à l'aide d'épaulements et de couvercles. Il faut encore assurer l'*étanchéité* pour empêcher que des particules abrasives n'entrent dans les roulements et l'engrenage.

- c) Si la souplesse de l'arbre est trop grande, il se pourrait que l'engrènement soit défectueux. Nous reviendrons sur ce point.
- d) Il faut être attentif à la réalisation. Lors de chaque étude, on s'occupera explicitement de l'*ordre de montage des pièces*, pour vérifier que la machine est *réalisable*. Ainsi, pour l'arbre de la figure 2.2, on a conçu la gamme d'assemblage suivante qui n'est certes pas optimale, mais présente un certain intérêt par les répercussions qu'elle a sur la forme même de l'arbre :

Gamme de montage

- 1) Montage du roulement *A* (serré) sur l'arbre.
- 2) Montage du roulement *B* (serré) sur l'arbre.
- 3) Enfiler l'arbre par la droite dans les paliers, en enfilaient simultanément le roue dentée (qui ne peut donc pas être frettée).

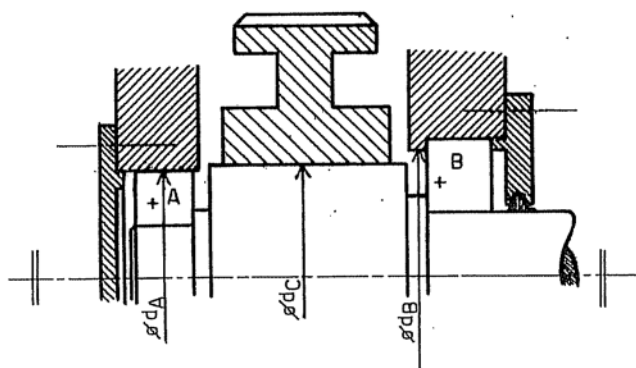


FIGURE 2.2 – Dessin final de l'arbre.

- 4) Pose du couvercle gauche.
- 5) Pose de la garniture d'étanchéité dans le couvercle droit.
- 6) Enfiler le couvercle droit sur l'arbre et le fixer au bâti.

On remarquera que l'opération 3 est délicate et c'est ce qui nous a fait dire que la gamme d'assemblage n'est pas optimale. Mais une chose est certaine : cette gamme exige les conditions

$$d_A < d_C < d_B$$

sans quoi l'opération 3 est géométriquement impossible.

2.2.1 Facteur de service

Les efforts calculés correspondent en fait à des valeurs de référence, généralement calculées dans des conditions moyennes. Jusqu'ici, aucun compte n'a été tenu des *conditions particulières* d'application de la charge ni de l'aspect *probabiliste* de la sollicitation. c'est pourquoi il faut multiplier la sollicitation calculée par un *facteur de service* que nous noterons K et qu'il faut se garder de confondre avec le coefficient de sécurité dont nous parlerons plus loin.

Dans un certain nombre de domaines où la sécurité est déterminante, il existe des *règlements* fixant les facteurs de service. Pour la construction mécanique courante, on cite souvent l'abaque de Richter et Ohlendorf représenté en figure 2.3. Cet abaque fait intervenir les facteurs suivants :

- Type de moteur, plus ou moins brutal.
- Fréquence des démarrages. Il faut en effet se rappeler que les démarrages impliquent des surcharges dues aux forces d'inertie.
- Distribution statistique de la charge et des chocs. Une machine qui travaille presque toujours à faible charge ne doit en effet pas être dimensionnée comme si la pleine charge était de règle.
- Sensibilité de l'organe calculé.
- Temps de service quotidien. Il faut cependant noter que le fait de tenir compte de ce point est parfois discuté.

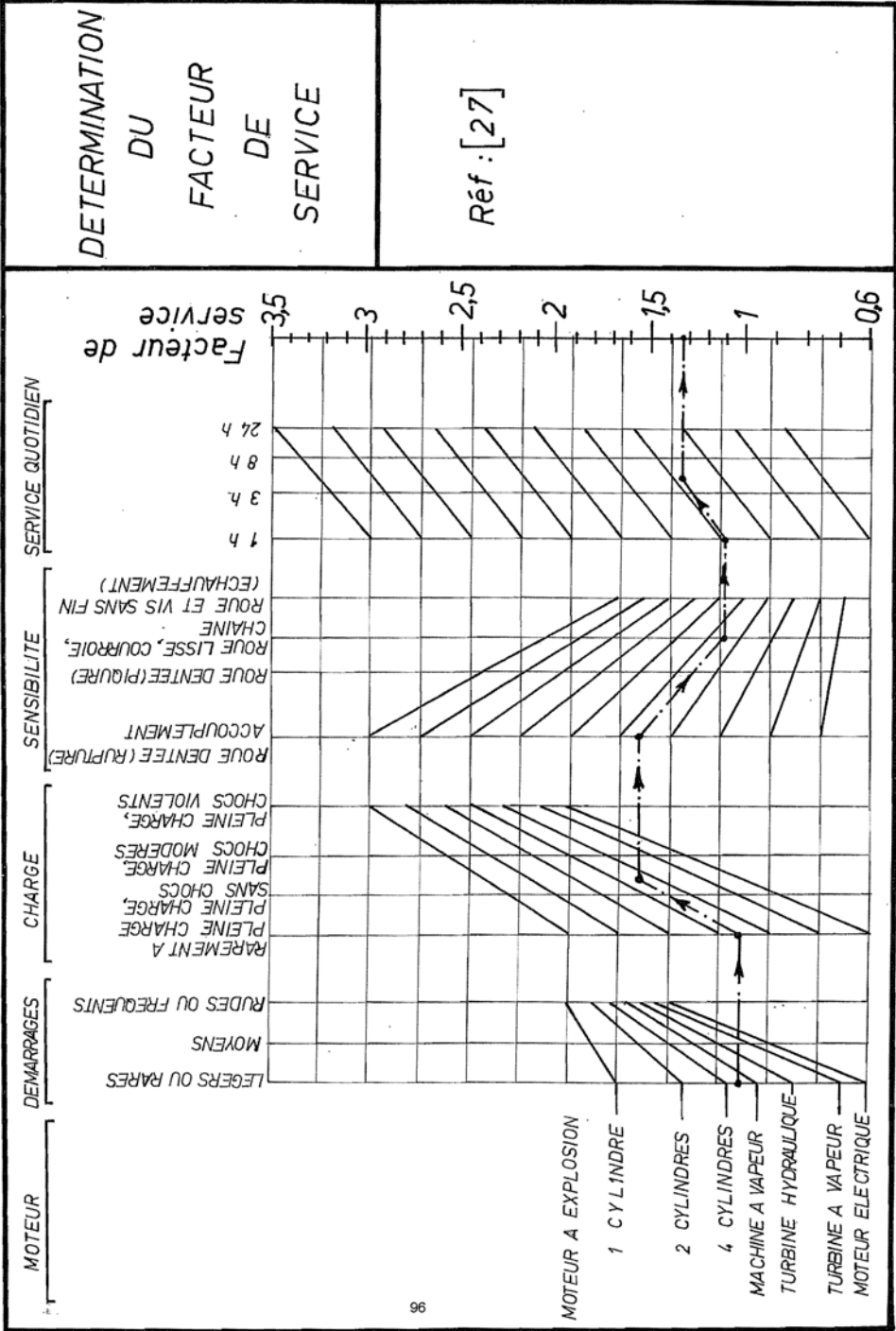


FIGURE 2.3 – Abaque de Richter et Ohlendorf.

2.3 Notion de moment idéal

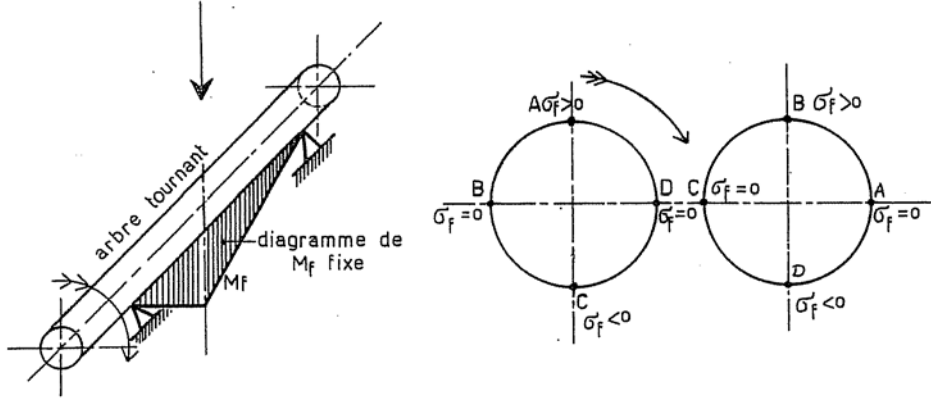


FIGURE 2.4 – Fatigue d'un arbre tournant soumis à un moment de flexion de direction constante.

La plupart des arbres sont soumis à la fois à de la flexion et de la torsion. Dans la majorité des cas, l'arbre tourne par rapport à la direction du moment de flexion. Comme l'illustre la figure 2.4, il en résulte que la contrainte de flexion σ en un point A varie constamment entre un maximum positif et un minimum négatif de même grandeur. On dit que l'arbre est soumis à la *fatigue*. La résistance à la fatigue, mesurée par la contrainte maximale σ_f au cours du cycle menant à la rupture, est plus faible que la résistance statique et même que la limite élastique. À cela s'ajoutent les concentrations de contrainte, si bien qu'il faut se limiter, au niveau de l'avant-projet, à des contraintes admissibles assez basses. La combinaison du moment de flexion et du moment de torsion se traite souvent à l'aide de la notion de *moment idéal*. L'idée est la suivante. À un moment de flexion M_f est associée une contrainte de flexion

$$\sigma_f = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}} \quad (2.1)$$

La contrainte de torsion est quant à elle égale à

$$\tau_t = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} \quad (2.2)$$

Pour l'étude de leur action combinée, on a besoin d'un *critère de mise hors service*. Il est généralement admis qu'il a la forme

$$\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_{f,lim}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_t}{\tau_{t,lim}} \right)^2 = 1 \quad (2.3)$$

ce qui généralise le critère de von Mises. Ici, $\sigma_{f,lim}$ et $\tau_{t,lim}$ sont les contraintes qui mèneraient à la mise hors service pour le flexion seule ou la torsion seule, respectivement. En définissant, comme l'école allemande [44, 65, 77], le facteur

$$\alpha = \frac{\sigma_{f,lim}}{\tau_{t,lim}\sqrt{3}} \quad (2.4)$$

on peut transformer le critère (2.3) en

$$\sigma_f^2 + 3\alpha^2 \tau_t^2 = \sigma_{f,lim}^2 \quad (2.5)$$

ce qui, si l'on introduit la notion de *contrainte idéale*

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_f^2 + 3\alpha^2 \tau_t^2} \quad (2.6)$$

s'écrit simplement

$$\sigma_i = \sigma_{f,lim} \quad (2.7)$$

En service, on se limitera à une contrainte plus faible, c'est-à-dire que l'on adoptera une *pseudo-sécurité* s^* et que l'on travaillera avec une *contrainte admissible* (jadis appelée *taux de travail*)

$$\sigma_{f,adm} = \frac{\sigma_{f,lim}}{s^*} \quad (2.8)$$

Si nous parlons de *pseudo-sécurité*, c'est parce que ce premier calcul ne tient pas compte des concentrations de contrainte. Mais ces dernières ne pourront être déterminées que lorsqu'on aura entièrement dessiné l'arbre, ce qui est précisément ce que nous nous attachons à faire. Il est clair qu'il faudra *in fine* vérifier la résistance de façon plus précise. Le critère provisoire est donc

$$\sigma_i = \sigma_{f,adm} \quad (2.9)$$

Multiplions les deux membres de la définition (2.6) de la contrainte idéale par $\frac{\pi d^3}{32}$. On a

$$\frac{\pi d^3}{32} \sigma_f = M_f \quad \text{et} \quad \frac{\pi d^3}{32} \tau_t = \frac{1}{2} M_t$$

Si l'on appelle encore *moment idéal* le moment défini par

$$M_i = \frac{\pi d^3}{32} \sigma_i \quad (2.10)$$

on a donc

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + 0,75\alpha^2 M_t^2} \quad (2.11)$$

et le critère provisoire de résistance s'écrit

$$M_i = M_{f,adm} \quad \text{avec} \quad M_{f,adm} = \frac{\pi d^3}{32} \sigma_{f,adm} \quad (2.12)$$

Pour une sollicitation statique, à vérifier par exemple quant au risque de plastification, le critère de von Mises s'applique, ce qui correspond à $\alpha = 1$. En fatigue, il faut se référer à la *limite d'endurance* qui, pour les aciers, peut être évaluée comme suit, en fonction de la limite de rupture R_m : si σ_{min} et σ_M sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur de la contrainte lors d'un cycle, notons

$$\mathcal{R}_f = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_M} \quad (2.13)$$

On peut admettre

$$\sigma_{f,lim} \approx R_m \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \mathcal{R}_f \right) \quad (2.14)$$

On admet de même la relation

$$\tau_{t,lim}\sqrt{3} \approx R_m \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\mathcal{R}_t \right) \quad (2.15)$$

avec $\mathcal{R}_t = \tau_{min}/\tau_M$.

Dans bon nombre de cas, la contrainte de flexion est alternée et le moment de torsion constant en valeur nominale. Cependant, comme il faut tenir compte des démarrages, des freinages et des à-coups inévitables provenant du moteur et du récepteur, on juge généralement qu'il est plus prudent de faire le calcul avec un moment de torsion pulsé ($\mathcal{R}_t = 0$). Dans ce cadre, on a

$$\sigma_{f,lim} = 0,5R_m, \quad \tau_{t,lim}\sqrt{3} = 0,75R_m, \quad \alpha = \frac{0,5}{0,75} = \frac{2}{3}$$

ce qui donne

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} M_t^2} = \sqrt{M_f^2 + \frac{1}{3} M_t^2} \quad (2.16)$$

C'est cette expression du moment idéal que nous adopterons dans tous les cas courants. Il convient de noter que la valeur

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + 0,75M_t^2}$$

que l'on trouve si souvent dans les cours de résistance des matériaux [60] est obtenue dans le cadre d'un calcul à la déformation plastique. En fatigue, elle ne vaut que si $\frac{\tau_m}{\tau_M} = \frac{\sigma_m}{\sigma_M}$ soit, pour un arbre tournant par rapport aux charges, si le moment de torsion est également alterné, ce qui est exceptionnel.

2.4 Une première formule de dimensionnement en fatigue

Pour un arbre tournant par rapport à la charge, on peut dans un premier temps choisir le diamètre par la formule¹

$$\frac{d}{mm} = 42,8 \frac{\left(\frac{M_i}{Nm}\right)^{0,352}}{\left(\frac{R_m}{MPa}\right)^{1/3}} \quad (2.17)$$

La valeur un peu inattendue de l'exposant du numérateur, 0,352, s'explique par le fait que pour établir cette formule, il a été tenu compte d'un certain facteur d'échelle. Le calcul peut se faire graphiquement grâce au diagramme que l'on trouvera dans le *Mémento*, page A2.

1. C'est une équation entre mesures et non entre grandeurs physiques. Par $\frac{d}{mm}$, il faut entendre le diamètre divisé par un millimètre, c'est-à-dire la *mesure du diamètre en mm* et de même pour les autres grandeurs. Cette manière d'écrire, conforme à la norme DIN 1313, évite toute erreur naissant d'un mauvais choix d'unités.

2.5 Formule des arbres de manège

Pour les arbres longs sollicités par un moment de torsion supposé pulsé et un moment de flexion *proportionné* - nous allons voir ce que cela veut dire - on utilise encore la très vieille *formule des arbres de manège*²

$$\frac{d}{120\text{mm}} = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{P}/\text{ch}}{N/(\text{tr}/\text{min})}} \quad (2.18)$$

où

$$\text{ch} = 736\text{W (cheval)}$$

Il faut prendre *la plus grande* des deux racines, soit la quatrième si le radicand est inférieur à 1 et la troisième dans le cas contraire. Cette formule correspond aux deux conditions suivantes :

1. Condition de raideur en torsion : l'angle de torsion de l'arbre par unité de longueur θ' ne dépasse pas $0,25^\circ/m$;
2. Condition de résistance : pour autant que le moment de flexion M_f soit inférieur à $1,06M_t$, le moment idéal correspond à une contrainte idéale ne dépassant pas $\sigma_f = 50\text{MPa}$.

La formule s'établit comme suit.

2.5.1 Valeur du radicand

On a successivement

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}}{\text{ch}} &= \frac{\mathcal{P}}{736\text{W}} = \frac{\mathcal{P}}{736\text{Nm/s}} = \mathcal{P} \cdot \frac{\text{s}}{736\text{Nm}} = 2\pi N M_t \cdot \frac{\text{s}}{736\text{Nm}} \\ \frac{N}{\text{tr}/\text{min}} &= N \frac{\text{min}}{\text{tr}} = N \frac{60\text{s}}{\text{tr}} \end{aligned}$$

Notant que tr n'a pas d'unité, on a donc

$$\frac{\mathcal{P}/\text{ch}}{N/(\text{tr}/\text{min})} = \frac{2\pi}{736 \cdot 60} \frac{M_t}{\text{Nm}} = 142,3 \cdot 10^{-6} \frac{M_t}{\text{Nm}}$$

soit

$$\frac{M_t}{\text{Nm}} = 7028 \frac{P/\text{ch}}{N/(\text{tr}/\text{min})} \quad (2.19)$$

2.5.2 Raideur en torsion

De la relation générale

$$M_t = G \frac{\pi d^4}{32} \theta'$$

2. Dans les usines anciennes, il y avait qu'un seul moteur (à vapeur) pour fournir toute la puissance d'un atelier. Ce moteur entraînait, à l'aide d'un courroie, un long arbre dit *arbre de manège*, qui parcourait toute la longueur de l'atelier, et toutes les machines recevaient leur puissance de cet arbre par des courroies. Le remplacement des arbres de manège par des moteurs électriques indépendants pour chaque machine a commencé à l'aube du XX^e siècle, mais ne s'est achevé que bien plus tard.

on déduit directement

$$d = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi G \theta'}} M_t \quad (2.20)$$

Comme

$$\begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2,6} = 80,77 \cdot 10^9 \text{Pa} \\ \theta' &= 0,25^\circ / m = 0,25 \cdot \frac{\pi}{180} \text{rad/m} = 4,363 \cdot 10^{-3} \text{rad/m} \end{aligned}$$

on obtient

$$\frac{d}{\text{m}} = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi \cdot 80,77 \cdot 10^9 \cdot 4,363 \cdot 10^{-3} \text{Nm}}} M_t = 0,01304 \sqrt[4]{\frac{M_t}{\text{Nm}}}$$

soit encore

$$\frac{d}{\text{mm}} = 13,04 \sqrt[4]{\frac{M_t}{\text{Nm}}} \quad (2.21)$$

Introduisant dans le second membre le résultat (2.19), on obtient

$$\frac{d}{\text{mm}} = 13,04 \sqrt[4]{7028 \frac{P/\text{ch}}{N/(\text{tr/min})}} = 119,4 \sqrt[4]{\frac{P/\text{ch}}{N/(\text{tr/min})}}$$

que l'on arrondit à

$$\frac{d}{\text{mm}} = 120 \sqrt[4]{\frac{P/\text{ch}}{N/(\text{tr/min})}}$$

2.5.3 Condition de résistance

On part de la condition

$$M_i = \frac{\pi d^3}{32} \sigma_{f,adm}$$

ce qui donne

$$d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi \sigma_{f,adm}}} M_i$$

Tenant compte de notre hypothèse $M_f = 1,06 M_t$, on a

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + \frac{1}{3} M_t^2} = M_t \sqrt{(1,06)^2 + \frac{1}{3}} = 1,207 M_t$$

et comme

$$\sigma_{f,adm} = 50 \cdot 10^6 \text{Pa}$$

on obtient

$$\frac{d}{\text{m}} = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi \cdot 50 \cdot 10^6}} \cdot 1,207 \frac{M_t}{\text{Nm}} = 6,265 \cdot 10^{-3} \sqrt[3]{\frac{M_t}{\text{Nm}}}$$

soit

$$\frac{d}{\text{mm}} = 6,265 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\text{Nm}}} \quad (2.22)$$

Faisant usage du résultat (2.19), on obtient

$$\frac{d}{\text{mm}} = 6,265 \sqrt[3]{7028 \frac{P/\text{ch}}{N/(\text{tr}/\text{min})}} = 120 \sqrt[3]{\frac{P/\text{ch}}{N/(\text{tr}/\text{min})}}$$

On trouvera dans le *Mémento*, page A3, un abaque à points alignés correspondant à la formule des arbres de manège.

2.6 Tourillons d'extrémité

On appelle *tourillons* les parties de l'arbre qui sont engagées dans les paliers. Dans le cas de tourillons d'extrémité, c'est-à-dire situés en bout d'arbre, le moment de flexion et le moment de torsion sont tous deux nuls et les formules (2.17) et (2.18) mènent toutes deux à un diamètre nul. Mais il existe un effort tranchant T auquel l'arbre doit pouvoir résister. En considérant que cet effort tranchant est appliqué au milieu du palier de longueur ℓ , il en résulte au bord du palier, vers l'intérieur, un moment de flexion

$$M_f = T \frac{\ell}{2}$$

La contrainte de flexion correspondante,

$$\sigma_f = \frac{32M_f}{\pi d^3} = \frac{16T\ell}{\pi d^3}$$

devra être limitée à 50MPa , ce qui fournit la condition

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{T\ell}{\sigma_{f,adm}}} \quad \text{avec} \quad \sigma_{f,adm} = 50\text{MPa} \quad (2.23)$$

2.7 Déformations de flexion

Pour calculer la déformée, on utilise l'équation de l'élastique

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_f}{EI} = \frac{M_f}{E \frac{\pi d^4}{64}} \quad (2.24)$$

dans chacun des deux plans perpendiculaires à l'arbre et on somme vectoriellement les déplacements obtenus. Il existe diverses règles de limitation des flèches et des pentes.

– Dans les *machines courantes*, on cite généralement la condition

$$\frac{f_{max}}{\ell} \leq \frac{1}{3000} \quad (2.25)$$

où f représente la flèche et ℓ , la distance entre paliers. Il s'agit en fait d'une limitation implicite des pentes φ . Supposons pour fixer les idées qu'un arbre sur deux appuis ait une déformée approximativement donnée par la relation

$$v(x) = f_{max} \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

où x est la coordonnée selon l'axe (on peut considérer que c'est le premier harmonique de Fourier). Alors, la pente aux extrémités est donnée par

$$\varphi = \frac{\pi f_{max}}{\ell} = \frac{\pi}{3000} = \frac{1,047}{1000} \approx \frac{1}{1000}$$

- En construction des *machines-outils*, on cite souvent les conditions un peu plus restrictives

$$\begin{aligned} \frac{f_{max}}{\ell} &\leq \frac{1}{5000} \\ \varphi_{max} &\leq \frac{1}{1000} \end{aligned} \quad (2.26)$$

- Les *roulements* supportent assez mal les inclinaisons de l'arbre. En général, il faut que l'inclinaison au droit du roulement vérifie

$$\varphi \leq \frac{1}{1000} \quad (2.27)$$

excepté pour les roulements à rotule qui admettent des inclinaisons de quelques degrés (1° à 4° selon les types : il faut consulter les catalogues des fabricants).

- Dans les *machines électriques*, la flèche provoque une variation de l'entrefer, dont résulte un déséquilibre des forces magnétiques. On impose généralement, si δ est l'entrefer,

$$f_{max} \leq \frac{\delta}{10} \quad (2.28)$$

Dans bien des cas, ces exigences de raideur sont *plus sévères* que les conditions de résistance. C'est une des différences entre la construction mécanique et les constructions du génie civil.

2.8 Calcul vibratoire

Il faut encore s'assurer qu'il n'y a pas de risque de résonance. Pour les vibrations de torsion, le calcul est assez classique et nous n'y reviendrons pas.

Il existe également un phénomène redoutable en flexion : les *vitesses critiques de flexion*, pour lesquelles l'arbre tourne comme une corde à sauter. La première vitesse critique de flexion se produit à une fréquence de rotation égale à la fréquence de résonance en flexion.

On trouvera dans le *Mémento*, page A6, quelques indications sur le calcul des vitesses critiques de flexion et des fréquences propres de torsion.

Chapitre 3

Principes généraux de fiabilité

3.1 Introduction

L'objet de l'étude de fiabilité est de vérifier que l'ensemble mécanique considéré aura une durée de vie satisfaisante pour l'utilisateur. On pense parfois que chaque pièce d'une machine doit avoir une durée de vie infinie. C'est une profonde erreur et cette opinion ne résiste pas à l'observation courante.

- Tout d'abord, il existe un certain nombre d'éléments de machines que l'on peut qualifier de *pièces d'usure* et qui se remplacent périodiquement. Au rang de celles-ci, on trouve les garnitures de freins, les disques d'embrayages, les courroies, les bougies des moteurs à essence, etc.
- Il existe aussi un certain nombre d'éléments de machines qui, sans être vraiment des pièces d'usure, ont nécessairement une durée de vie limitée pour des raisons physiques. C'est notamment la plupart des pièces supportant un contact hertzien, au nombre desquelles on trouve les roulements et les roues dentées.

Bien entendu, il ne faudrait pas que le remplacement des pièces susmentionnées soit trop fréquent, car il implique l'immobilisation de la machine, ce qui constitue une perte économique. Il y a donc un choix de durée de vie à faire, en fonction de la fréquence d'utilisation de la machine. Il est clair que les pièces d'un autobus, dont la durée de vie totale s'exprime en millions de kilomètres, doivent durer plus longtemps que celles d'une automobile particulière qui ne devra parcourir que quelques centaines de milliers de kilomètres.

A l'inverse, un surdimensionnement est anti-économique. Ainsi, il y a quelques années, un grand fabricant de roulements s'est un jour avisé de calculer aussi précisément que possible la durée de vie probable de boîtes paliers qu'il vendait depuis des années pour les essieux de wagons de chemin de fer. Le résultat fut *370 ans*, ce qui fait évidemment sourire et pose la question de l'opportunité de réduire les dimensions de ces boîtes à paliers [10].

En dernière analyse, la durée de vie de la machine est conditionnée par celle de ses organes principaux dont le remplacement nécessite des frais comparables à l'échange pur et simple de la machine (sinistre total). Mais le choix de celle-ci est encore limité par le fait que tôt ou tard, l'utilisateur préférera remplacer la machine par une autre, plus moderne et, à ses yeux, plus économique. C'est ce que l'on appelle l'*obsolescence*. Voudriez-vous, à l'heure actuelle, rouler en

Ford T ?

Il convient encore de noter que de nombreux constructeurs de biens pour tout public tendent à créer après un certain temps une obsolescence *subjective* en créant de nouveaux produits plus *up to date*. C'est là une affaire de commerce.

3.2 Notion de sécurité

3.2.1 Analyse du concept de sécurité

La notion de sécurité étant souvent mal comprise, il convient de bien préciser le problème. Considérons pour commencer une sollicitation simple, par exemple l'extension d'une pièce. Pour connaître la contrainte que la pièce peut supporter dans des circonstances données, on fait un certain nombre d'expériences. Les résultats obtenus sont malheureusement soumis à un certain nombre de facteurs imprévisibles, même si les expériences sont menées avec le plus grand soin. On remarquera notamment que le matériau est formé de grains, de joints de grains, avec des dislocations et des inclusions. Ainsi, dans le cas des roulements, la mise hors service résulte de défauts provenant d'inclusions. On est tenté de penser qu'en améliorant la pureté du matériau, on verra la dispersion diminuer. Or, comme l'a souligné Palmgren [68], il n'en est rien. Car si le matériau contient beaucoup d'impuretés, il y en aura certainement dans les zones fortement contraintes, ce qui mène à une destruction rapide, mais peu dispersée ; au contraire, si les impuretés sont peu nombreuses, il y aura des cas où la durée de vie sera grande parce que la zone chargée est pure et des cas où la durée de vie sera faible parce que justement, la zone chargée contient une impureté. Retenons de ceci qu'il existe *inévitablement* une *dispersion* des résultats.

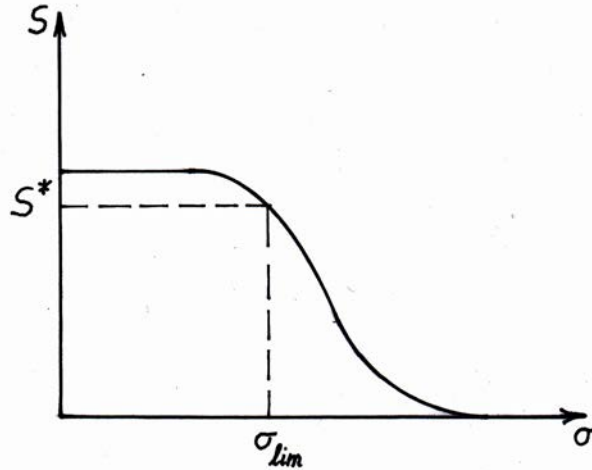


FIGURE 3.1 – Courbe de fiabilité et contrainte limite.

En multipliant les expériences, on peut établir une courbe de probabilité de résistance de l'éprouvette. Cette probabilité est encore appelée *fiabilité*. La forme de cette courbe est très généralement celle de la figure 3.1, où l'on a noté S la fiabilité et σ la contrainte. La courbe $\{\sigma, S\}$ est tangente à la droite $S = 1$

à l'origine et admet une asymptote $S = 0$ pour $\sigma \rightarrow \infty$. Cette courbe étant supposée connue, on se fixe une *fiabilité de référence* S^* , en principe arbitraire, et on définit la *contrainte limite* σ_{lim} comme étant l'abscisse correspondant à S^* .

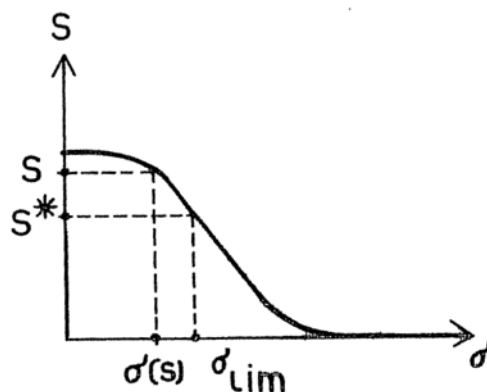


FIGURE 3.2 – Variation de la contrainte en fonction de la fiabilité.

Un accroissement de la fiabilité correspond, comme le montre la figure 3.2 à une diminution de la contrainte. Cela signifie que si, dans une application donnée, on estime devoir assurer une fiabilité plus grande S que la fiabilité de référence S^* , il faudra se limiter à une contrainte $\sigma(S) < \sigma_{lim}$. Le rapport

$$s = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma(S)} \quad (3.1)$$

ici supérieur à l'unité, est alors appelé *coefficient de sécurité*. Graphiquement,

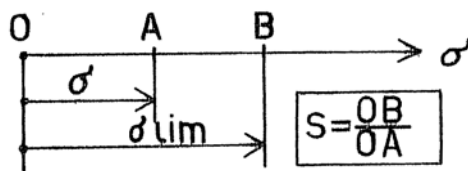


FIGURE 3.3 – Représentation du coefficient de sécurité sur l'axe des σ .

si l'on trace un axe des σ (fig. 3.3), le coefficient de sécurité est le rapport entre la longueur OB représentant σ_{lim} et la longueur OA représentant la contrainte appliquée σ .

Fixer un coefficient de sécurité à une valeur supérieure à l'unité revient donc à assurer une fiabilité supérieure à celle de référence. Mais il existe des applications où la fiabilité de référence n'est pas nécessaire. On pourra alors choisir un coefficient de sécurité *inférieur* à l'unité. Pour montrer que ceci n'est pas une vue de l'esprit, donnons tout de suite un exemple. La capacité statique d'un roulement à billes est la charge qu'il peut supporter à l'arrêt sans que les billes ne créent de trop grands cratères dans les pistes du roulement. La conséquence de tels cratères est un fonctionnement bruyant du roulement. Autant ce problème est important dans le cas d'un appareil devant fonctionner à côté d'un

lit d'hôpital, autant il est totalement indifférent sur un chantier de génie civil. dans le premier cas, on choisira une sécurité égale à 2, et dans le second cas, une sécurité égale à 1/2 est largement suffisante.

Comme on peut le constater, on très loin de la conception *naïve* d'une valeur critique sans dispersion qui correspondrait au diagramme de fiabilité de la figure 3.4. Mais à bien y penser, dans le cadre de cette conception étriquée, la sécurité

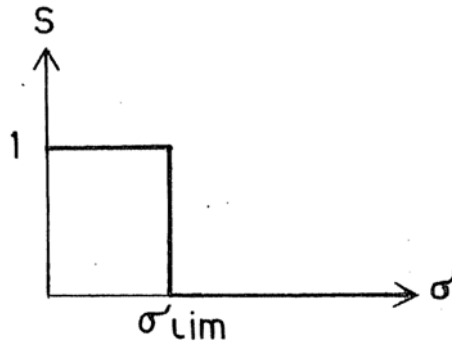


FIGURE 3.4 – Conception naïve de la contrainte limite.

sert-elle vraiment à quelque chose ?

3.2.2 Démarche d'Odingue

Le choix du coefficient de sécurité dépend d'un certain nombre de facteurs liés au matériau, à l'utilisation de l'organe et à la précision du calcul des contraintes. Odingue [24] a proposé de le déterminer par la formule

$$s = s_{mat} \cdot s_{grav} \cdot s_{prec} \quad (3.2)$$

où

1. s_{mat} dépend de la dispersion des résultats relatifs au matériau. Voici quelques valeurs indicatives :
 - $s_{mat} = 1,05$ à $1,10$ pour une pièce obtenue à partir d'une ébauche laminée ou forgée, *en statique*.
 - $s_{mat} = 1,15$ à $1,20$ pour une pièce obtenue à partir d'une ébauche moulée, *en statique*.
 - $s_{mat} = 1,20$ à $1,30$ pour une pièce soumise à la *fatigue*
2. s_{grav} tient compte de la gravité d'une mise hors service. Ainsi, la plastification est moins grave que la rupture franche d'un matériau fragile. En voici des valeurs indicatives :

$$s_{grav} = 1 \text{ à } 1,3$$

3. s_{prec} tient compte de la précision du calcul, dans la confiance que l'on a dans ses hypothèses et, en général, dans ses résultats. on pose en moyenne

$$s_{prec} = 1,2 \text{ à } 1,3$$

parfois plus.

Les valeurs que nous avons évoquées conduisent à un coefficient de sécurité minimal de

$$1,05 \cdot 1 \cdot 1,2 \approx \mathbf{1,25}$$

et à un coefficient maximal de

$$1,30 \cdot 1,30 \cdot 1,30 = 2,197 \approx \mathbf{2,2}$$

En pratique, il est assez courant d'adopter les valeurs suivantes :

Valeurs courantes de la sécurité		
Sollicitation	Risque	Coefficient de sécurité
Statique	Déformation permanente	1,25
Statique	Rupture fragile	2
Fatigue	Rupture différée	2...2,5

3.3 Notion de critère de mise hors service

Jusqu'à présent, nous avons envisagé une sollicitation simple. Dans ce cas, la figure 3.3 permet de représenter la sécurité comme le rapport entre le segment OB , image de σ_{lim} et le segment OA image de la contrainte dont on veut vérifier la sécurité. Voyons à présent comment cela se généralise pour des sollicitations composées. Un état de contrainte général $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31})$ peut être représenté par un point de l'espace à six dimensions dont les axes représentent chacun une composante. On pourra ainsi, dans cet espace, définir des *surfaces d'équifiabilité* de la forme

$$F(\sigma, S) = 1 \quad (3.3)$$

À la fiabilité de référence S^* correspond la surface d'équation

$$f(\sigma) \equiv F(\sigma, S^*) = 1 \quad (3.4)$$

La fonction f est appelée *critère de mise hors service* et la surface correspondante, *surface limite*. Cette surface étant définie, on dit que la sollicitation σ présente une sécurité s si la sollicitation homothétique

$$s\sigma = (s\sigma_{11}, s\sigma_{22}, s\sigma_{33}, s\sigma_{12}, s\sigma_{23}, s\sigma_{31})$$

est située sur la surface limite, c'est-à-dire si

$$f(s\sigma) = 1 \quad (3.5)$$

La figure 3.5 illustre cette notion dans le cas du critère de von Mises pour une sollicitation (σ, τ) . La courbe limite est ici une ellipse. OA est le vecteur représentatif de l'état de contrainte considéré, B est le point de percée du prolongement de ce segment sur la courbe limite. La sécurité est encore donnée par

$$s = \frac{OB}{OA}$$

Pour être rigoureux, il faut remarquer que n'importe quelle fonction $\sigma \mapsto f(\sigma)$ ne peut pas être candidate à servir de critère de mise hors service. Pour que nos définitions aient du sens, il faut que l'ensemble $E = \{\sigma : f(\sigma) \leq 1\}$ jouisse au moins des propriétés suivantes :

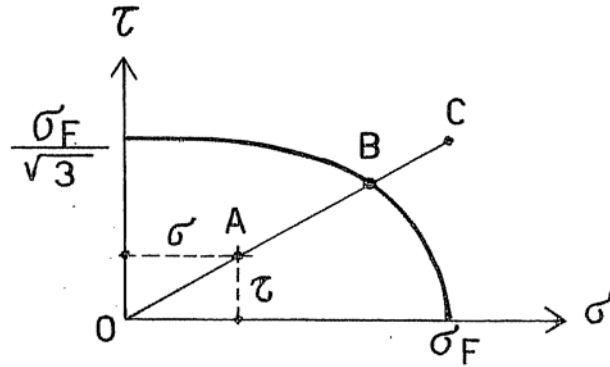


FIGURE 3.5 – Illustration de la sécurité dans le cas du critère de von Mises.

1. Il contient l'origine.
2. Il contient entièrement le segment joignant l'origine à un point quelconque de E . Un ensemble possédant cette propriété est dit *étoilé par rapport à l'origine*.
3. Quel que soit l'élément de l'espace des contraintes, il existe sur la demi-droite partant de l'origine vers ce point, un point de la surface limite à une distance non nulle de l'origine. (On dit que E est *absorbant*).

Enfin, dans les cas courants, E est *convexe*, c'est-à-dire que si les états σ^1 et σ^2 sont dans E , il en est de même du segment qui les joint.

Chapitre 4

Essais mécaniques des matériaux

4.1 Essai de traction

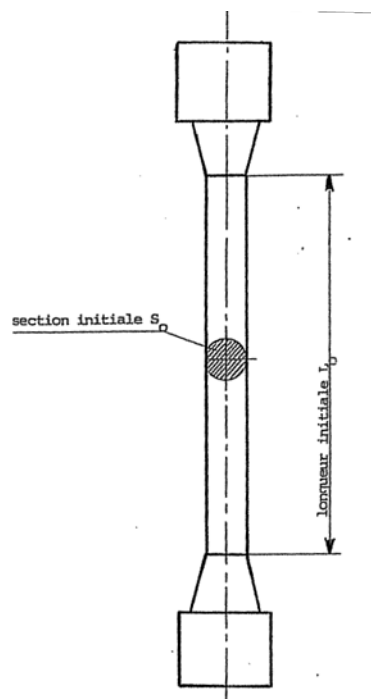


FIGURE 4.1 – Éprouvette de traction.

Le plus connu des essais de matériaux est l'*essai de traction*. L'éprouvette classique de traction a la forme représentée en figure 4.1. Outre la portion cylindrique sur laquelle porte la mesure, il faut en effet prévoir des têtes permettant la prise de l'éprouvette dans les mâchoires de la machine. Entre les têtes et la

portion cylindrique, on ménage une section conique pour limiter les concentrations de contrainte, afin d'éviter que la rupture ne se fasse à la jonction de la tête au corps de l'éprouvette. Les éprouvettes courantes ont un rapport ℓ_0/d_0 entre leur longueur et leur diamètre égal à 5¹. dans le cas où l'on utilise des éprouvettes non circulaires, la condition est

$$\ell_0 = 5,65\sqrt{S_0} \quad (4.1)$$

où S_0 est la section de l'éprouvette.

La machine de traction permet d'enregistrer le diagramme force/allongement. Définissant la *contrainte* par le rapport entre la force appliquée F et la section de départ S_0 ,

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \quad (4.2)$$

et la *déformation* par le rapport entre l'allongement $\Delta\ell$ et la longueur initiale ℓ_0 ,

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \quad (4.3)$$

on peut effectuer un changement d'échelle menant au diagramme contrainte/déformation (fig. 4.2). Les grandeurs importantes que l'on peut en principe

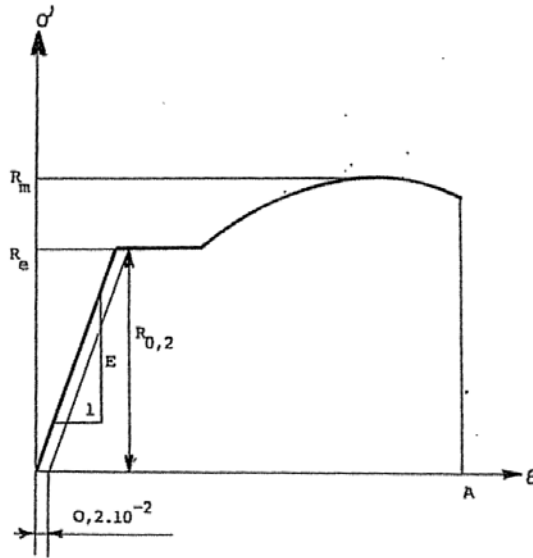


FIGURE 4.2 – Diagramme contrainte/déformation.

mesurer sur ce diagramme sont

- Le *module de Young* E .
- La *limite élastique* R_e ou, si elle n'est pas nettement marquée, la *limite élastique conventionnelle* à 0,2% d'allongement permanent $R_{0,2}$.

1. Ceci parce que lors de la striction, la portion de l'éprouvette où ce phénomène se produit a une longueur proportionnelle au diamètre et non à la longueur de l'éprouvette. Il faut donc fixer le rapport ℓ_0/d_0 pour obtenir des résultats comparables en termes des déformations.

- La *résistance à la rupture* R_m , contrainte correspondant au maximum du diagramme (σ, ε) .
- L'allongement à la rupture A . Si celui-ci est supérieur à 5%, le matériau est réputé *ductile*. Dans le cas contraire, le matériau est réputé *fragile*.

Cependant, il convient de noter que la droite de Hooke est quasiment verticale sur les diagrammes de traction courants², ce qui rend l'évaluation du module de Young *très imprécise*. C'est pourquoi on préfère généralement mesurer le module de Young par un essai de vibration. Un essai efficace de ce type consiste à placer un barreau cylindrique sur un tripode central et à l'exciter en extension, en phase à ses deux bouts (fig. 4.3). En modifiant la fréquence d'excitation,

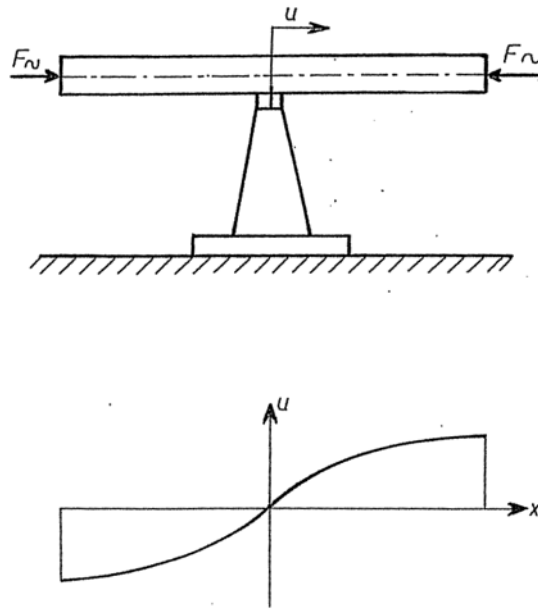


FIGURE 4.3 – Mesure du module de Young par un essai de vibration.

on peut déterminer la fréquence de résonance ν_p . La théorie du phénomène est simple à établir. Le mode propre correspondant est la demi-sinusoïde d'équation spatiale

$$u(x) = A \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (4.4)$$

Pour une variation temporelle en $\sin \omega t$, l'énergie de déformation vaut

$$V = \frac{1}{2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} ES_0 u'^2 dx \cdot \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} ES_0 \frac{\pi^2 A^2}{\ell^2} \frac{\ell}{2} \sin^2 \omega t$$

et l'énergie cinétique s'écrit, si ρ est la masse volumique,

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \rho S_0 u^2 dx \cdot \omega^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} \rho S_0 A^2 \frac{\ell}{2} \cos^2 \omega t$$

2. En effet, la limite élastique correspond à $\varepsilon \approx 0,001$. Si, par exemple, $A = 0,2$, la partie élastique de la courbe ne s'écarte de l'axe vertical que d'1/200 de cette valeur.

La vibration est caractérisée par un échange constant entre ces deux énergies, l'une étant maximale quand l'autre est nulle. On a donc

$$V_{max} = T_{max}$$

ce qui donne la relation suivante pour la pulsation propre ω :

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{E}{\rho} \quad (4.5)$$

Connaissant la fréquence propre $\nu_P = \frac{\omega}{2\pi}$, on peut donc déduire le module de Young par la relation

$$E = \rho \frac{\omega^2}{\pi^2} \ell^2 = 4\rho \nu_P^2 \ell^2 \quad (4.6)$$

Cette mesure est assez précise. Cependant, on peut lui reprocher une erreur *de principe*. En effet, les vibrations sont des phénomènes rapides, si bien que la chaleur n'a pas le temps de se propager au cours des oscillations. Le phénomène est donc pratiquement *adiabatique* et le module de Young mesuré est le module adiabatique

$$E_{ad} = \frac{\partial^2(\text{énergie interne volumique})}{\partial \varepsilon^2} \quad (4.7)$$

Au contraire, l'essai de traction est lent et on peut considérer qu'il est *isotherme*. Le module de Young correspondant est le module isotherme

$$E_{is} = \frac{\partial^2(\text{énergie libre volumique})}{\partial \varepsilon^2} \quad (4.8)$$

et n'a aucune raison d'être égal au précédent. Cette question a fait l'objet de longs débats au *XIX^e* siècle, jusqu'à ce que Lord Kelvin démontre la relation suivante : si α est le coefficient de dilatation thermique, si c_p est la chaleur massique à contrainte constante et si T est la température absolue, on a

$$\frac{1}{E_{ad}} = \frac{1}{E_{is}} - \frac{\alpha^2 T}{\rho c_p} = \frac{1}{E_{is}} \left(1 - \frac{E_{is} \alpha^2 T}{\rho c_p} \right) \quad (4.9)$$

Prenons pour exemple un acier courant, pour lequel on peut admettre les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} E_{is} &= 2,1 \cdot 10^{11} Pa \\ \alpha &= 1,2 \cdot 10^{-5} \\ \rho &= 7800 kg/m^3 \\ c_p &= 450 J/(K \cdot kg) \end{aligned}$$

à une température de 293K. Le groupe entre parenthèses de la formule de Kelvin vaut alors

$$(\dots) = (1 - 2,524 \cdot 10^{-3})$$

ce qui donne une différence de 0,25% entre les deux modules. Cette erreur systématique est bien inférieure à l'erreur de précision de l'évaluation du module de Young à partir de la courbe de traction. Cependant, il faut encore tenir compte des imprécisions sur ρ et ℓ , ce qui fait dire à l'O.T.U.A. (Office Technique pour l'Utilisation de l'Acier, France) qu'il est illusoire d'espérer une précision sur le module de Young meilleure que 5%.

4.2 Essais de dureté

4.2.1 Généralités

Par *dureté*, on entend la résistance qu'un matériau oppose à la pénétration d'un corps. Cette propriété joue un rôle important dans les problèmes de contact hertzien, ainsi que dans les phénomènes d'usure.

Les essais de dureté consistent généralement à faire pénétrer un corps réputé dur dans une pièce sous un effort donné et à mesurer soit l'empreinte qu'il y laisse, soit la profondeur à laquelle il s'arrête. Il s'agit donc d'essais *non destructifs*, du moins si l'on fait abstraction de la petite empreinte laissée en surface.

Nous limiterons l'étude aux essais Brinell, Vickers et Rockwell C, qui sont les plus courants lorsqu'il s'agit de mesurer la dureté de matériaux relativement durs. Leurs caractéristiques sont les suivantes :

Essai	Pénétrateur	Mesure	Remarques
Brinell	bille acier ou carbure	surface empreinte	normalisé
Brinell modifié	idem	enfoncement	non normalisé et approximatif
Vickers	pyramide diamant	surface empreinte	normalisé
Rockwell C	cône diamant	enfoncement	mesure arbitraire normalisée

4.2.2 Dureté Brinell

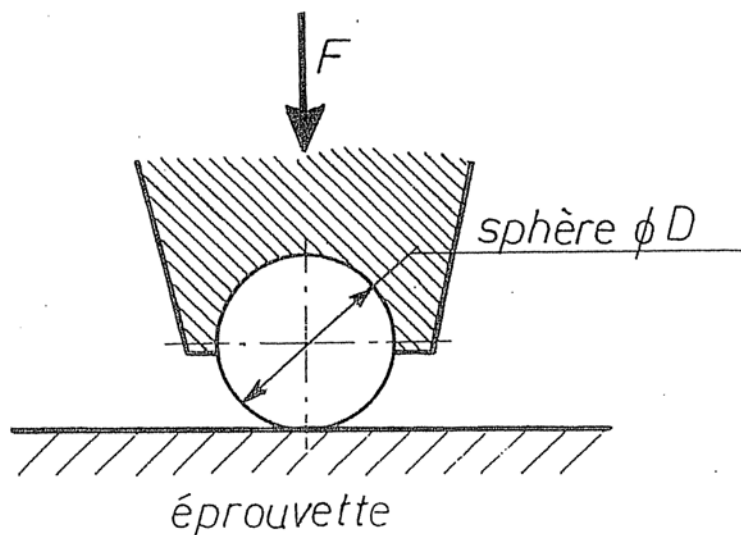


FIGURE 4.4 – Essai Brinell.

L'essai Brinell consiste à faire pénétrer une bille en acier trempé (HBS) ou en carbure (HBW) de diamètre donné, sous une charge F (fig. 4.4). On maintient la charge un certain temps, puis on mesure le diamètre d de l'empreinte. En

négligeant le retour élastique, on assimile l'empreinte à une calotte sphérique de diamètre D égal à celui de la bille. En se reportant à la figure 4.5, on constate que la surface de cette calotte vaut

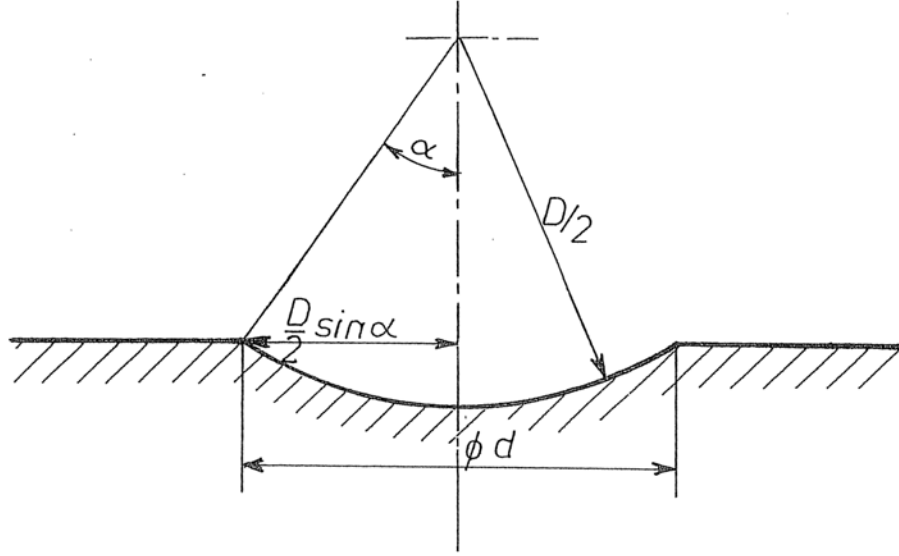


FIGURE 4.5 – Calcul de la surface de l'empreinte.

$$S = 2\pi \int_0^\alpha \left(\frac{D}{2}\right)^2 \sin \theta d\theta = \frac{\pi D^2}{2} (1 - \cos \alpha) \quad (4.10)$$

On détermine α par la relation

$$\frac{d}{2} = \frac{D}{2} \sin \alpha$$

ce qui permet de déduire

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{d^2}{D^2}}$$

Il vient donc

$$S = \frac{\pi D^2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{D^2}}\right) \quad (4.11)$$

C'est la formule officielle. Mais en multipliant le numérateur et le dénominateur par

$$1 + \sqrt{1 - \frac{d^2}{D^2}}$$

on peut encore l'écrire

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{d^2}{D^2}}} \quad (4.12)$$

ce qui est plus précis numériquement. Ceci posé, la dureté Brinell est définie en principe par

$$HB = \frac{F}{S} \quad (4.13)$$

Elle a la dimension d'une pression et devrait donc s'exprimer en MPa, ce que font certains. Mais l'usage reste encore très vivace d'utiliser l'ancienne unité kp/mm^2 faisant intervenir le kilopond égal à 9,81 N. Comme cette unité n'est pas reconnue dans le système SI, beaucoup disent simplement que le corps a, par exemple, une dureté de $220HB$, ce qui signifie

$$HB = 220kp/mm^2 = 220 \cdot 9,91MPa$$

Nous ne recommandons pas cet usage, mais il est impossible de l'ignorer.

Tout ceci serait parfait si la dureté Brinell était une caractéristique intrinsèque du matériau. Malheureusement, il n'en est rien et, pour un matériau donné, le rapport F/S dépend du diamètre de la bille. La raison en est que pour deux enfoncements différents, les deux empreintes ne sont pas homothétiques. Pour faire apparaître le paramètre secondaire qui intervient, nous ferons appel à l'analyse dimensionnelle. Les variables qui interviennent dans l'essai sont

Numéro	Grandeur	Unité
1	La charge F	F
2	Le diamètre de la bille D	L
3	La surface S	L^2
4	Une dureté intrinsèque σ_0 (ex : Vickers)	FL^{-2}

On a donc 4 grandeurs indépendantes et 2 unités, ce qui signifie qu'il existe deux nombres sans dimension indépendants. Le premier de ceux-ci pourra être

$$\Pi_1 = \frac{S}{D^2}$$

Il caractérise en fait le résultat de l'expérience. Le second nombre sans dimension devra contenir les grandeurs non encore prises en compte, à savoir, F et σ_0 . On s'aperçoit immédiatement que le nombre

$$\Pi_2 = \frac{F}{\sigma_0 D^2}$$

convient. Il caractérise les conditions de l'expérience. Il existe donc une relation de la forme

$$\Pi_1 = f(\Pi_2)$$

soit

$$\frac{S}{D^2} = f\left(\frac{F}{\sigma_0 D^2}\right) = f\left(\frac{k}{\sigma_0}\right) \quad (4.14)$$

en introduisant la grandeur

$$k = \frac{F}{D^2} \quad (4.15)$$

appelée *pression spécifique*. On déduit de (4.14)

$$S = D^2 f\left(\frac{k}{\sigma_0}\right)$$

et

$$HB = \frac{F}{S} = \frac{F}{D^2} \frac{1}{f\left(\frac{k}{\sigma_0}\right)} = \frac{k}{f\left(\frac{k}{\sigma_0}\right)}$$

ce qui entraîne finalement

$$\frac{HB}{\sigma_0} = \frac{\frac{k}{\sigma_0}}{f\left(\frac{k}{\sigma_0}\right)} = g\left(\frac{k}{\sigma_0}\right) \quad (4.16)$$

Cela signifie que *pour un matériau donné, la dureté Brinell n'est déterminée de manière unique que si l'on spécifie la pression spécifique de l'essai.*

Les valeurs habituelles de la pression spécifiques sont données dans le tableau suivant :

Matériau à tester	k/(9,81MPa)
Aciers	30
Alliages d'Al	2,5 ; 5 ; 10
Alliages de Cu	5 ; 10 ; 30

Pour spécifier que l'essai a été réalisé, par exemple, avec $k = 30 \cdot 9,81 \text{MPa}$, on écrit

$$HB_{30} = 450 \quad (\times 9,81 \text{MPa})$$

L'essai n'est considéré comme significatif que si le rapport d/D est situé

- entre 0,2 et 0,6 en France,
- entre 0,2 et 0,7 en Allemagne.

4.2.3 Essai Brinell modifié

Il arrive parfois, notamment quand les pièces dont on veut mesurer la dureté sont très volumineuses, que la mesure au microscope du diamètre d de l'empreinte soit particulièrement malaisée. Comme solution de rechange, on mesure alors la *profondeur* à laquelle s'arrête la bille. En supposant toujours que l'empreinte est une calotte sphérique de diamètre D , on déduit de la figure 4.5 que cette profondeur δ vaut

$$\delta = \frac{D}{2}(1 - \cos \alpha) \quad (4.17)$$

En utilisant le résultat (4.10), on obtient donc le résultat simple

$$S = \pi D \delta \quad (4.18)$$

ce qui permet d'évaluer la dureté par $HB = F/S$. Cette méthode *n'est pas normalisée* et doit être considérée comme une approximation. En principe, ses résultats ne sont donc pas opposables en cas de litige.

4.2.4 Dureté Vickers

L'essai Vickers se distingue du précédent par son pénétrateur. Il s'agit ici d'une pyramide de diamant, à base carrée, ayant un angle au sommet de 136° , comme l'illustre la figure 4.6. Le choix du diamant est judicieux, car il s'agit du matériau le plus dur que l'on puisse trouver. En outre, la forme pyramidale du pénétrateur a pour effet que toutes les empreintes sont homothétiques,

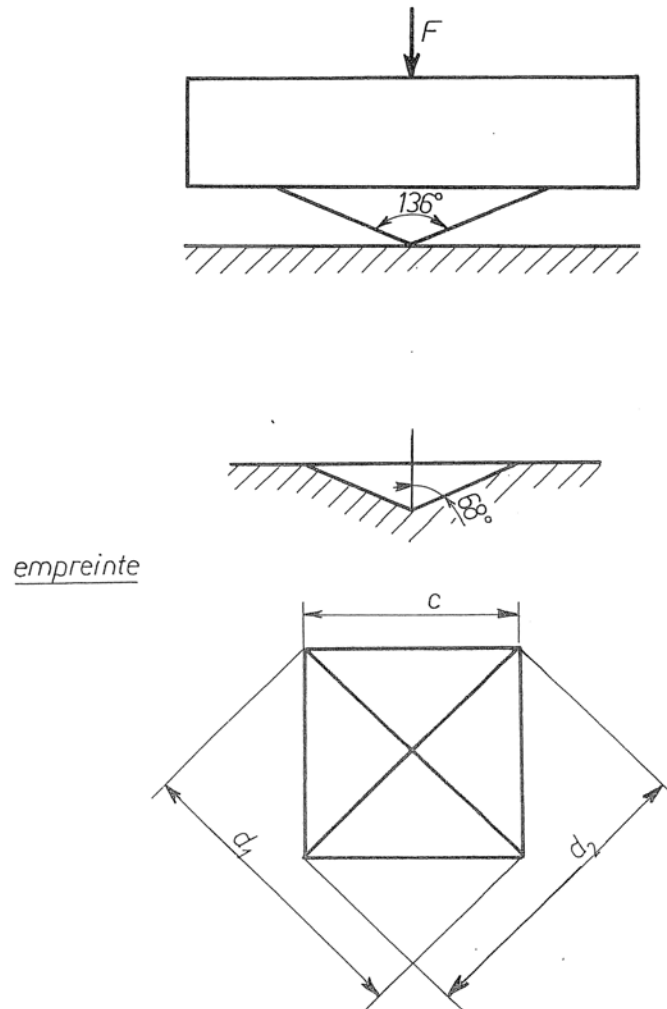


FIGURE 4.6 – Essai Vickers.

au contraire de la dureté Brinell. Pour le reste, la dureté Vickers est définie, comme la dureté Brinell, comme le rapport de la charge appliquée à la surface de l'empreinte,

$$HV = \frac{F}{S} \quad (4.19)$$

Il reste à calculer cette surface. Comme le montre la figure 4.6, en bas, l'empreinte est constituée de quatre triangles de base c et de hauteur

$$h = \frac{c}{2 \sin(68^\circ)}$$

Sa surface vaut donc

$$S = 4 \frac{ch}{2} = \frac{c^2}{\sin(68^\circ)} = 1,079c^2 \quad (4.20)$$

En pratique, on mesure au microscope les deux diagonales d_1 et d_2 , ce qui est plus précis. Ces deux diagonales ne sont pas nécessairement égales, car la surface du corps peut ne pas être parfaitement perpendiculaire à la trajectoire du pénétrateur. On adopte donc pour le calcul la moyenne d de ces deux diagonales,

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (4.21)$$

Il est clair que

$$c = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

si bien que

$$S = \frac{d^2}{2 \sin(68^\circ)} = 0,5393d^2$$

On en déduit

$$HV = \frac{F}{S} = 1,854 \frac{F}{d^2} \quad (4.22)$$

en unités cohérentes. Ici encore, il est resté d'usage d'exprimer les duretés Vickers en kp/mm^2 , ce que nous ne recommandons pas.

L'avantage essentiel de la dureté Vickers est de donner des résultats sensiblement indépendants de la charge. Ceci s'explique par le fait que deux empreintes de profondeur différentes sont géométriquement semblables. La charge la plus utilisée est

$$F = 30 \times 9,81N = 294N$$

La dureté Vickers est généralement préférée dans le cas des grandes duretés.

4.2.5 Dureté Rockwell C

Les essais Brinell et Vickers sont fondés sur la mesure d'une pression, ce qui est raisonnable. Mais ils impliquent la mesure du contour de l'empreinte à l'aide d'un microscope, ce qui n'est ni facile ni rapide. Ce sont donc essentiellement des essais de laboratoire. Dans les ateliers, on préfère un processus plus rapide, et c'est dans cet esprit que l'essai Rockwell a été créé. Il est assez différent des deux précédents. Tout d'abord, au lieu de mesurer une pression, on mesure une *profondeur de pénétration*. En outre, on recourt à une mesure *arbitraire*. Enfin, on prend des mesures spéciales pour mesurer non pas la dureté de la croûte mais celle du matériau sain sous-jacent, ce qui permet de travailler sur des pièces brutes.

Le pénétrateur peut être une bille d'acier trempé (Rockwell B) ou un cône de diamant (Rockwell C). L'essai Rockwell B convient pour les matériaux tendres et l'essai Rockwell C, pour les matériaux durs. Nous ne décrivons ici que l'essai Rockwell C, mais les principes restent les mêmes pour l'essai Rockwell B, avec des charges différentes. Le pénétrateur, en Rockwell C, est un cône de diamant de 120° d'angle au sommet. Le fonctionnement de l'essai est schématisé en figure 4.7 :

1. On commence par appliquer une charge initiale $F_0 = 98N$, ce qui provoque une pénétration e_0 . Cette pénétration est indiquée par une aiguille tournante. À ce moment, on fait tourner le cadran pour amener la graduation zéro en face de l'aiguille. Cette première étape est destinée à franchir la croûte du matériau qui a des propriétés inintéressantes.

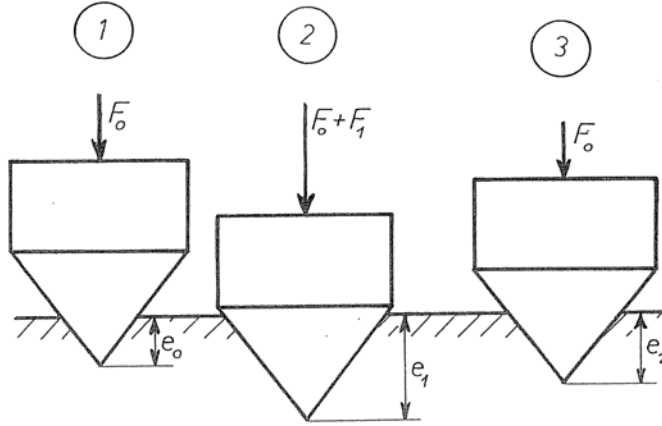


FIGURE 4.7 – Essai Rockwell C.

2. On applique alors une surcharge $F_1 = 1373N$, ce qui induit une pénétration e_1 .
3. Après avoir attendu la stabilisation de la pénétration précédente, on supprime la surcharge F_1 , tout en maintenant la charge initiale F_0 . La pénétration résiduelle est e_2 .

Comme on a mis le zéro du cadran en face de l'aiguille en fin d'étape 1, on mesure directement en face de l'aiguille

$$e_3 = e_2 - e_0 \quad (4.23)$$

sur une échelle dont chaque division équivaut à $2\mu m$. On lit donc le nombre

$$e = \frac{e_3}{2\mu m} \quad (4.24)$$

Il va de soi que plus ce nombre est petit, plus grande est la dureté. Par définition, la dureté Rockwell C est donnée par

$$HRC = 100 - e \quad (4.25)$$

L'avantage de l'essai Rockwell est sa rapidité de mise en œuvre (pas de mesure au microscope et pas de calcul à faire).

4.2.6 Une corrélation entre la dureté Rockwell C et la dureté Vickers

La dureté Rockwell C consiste à mesurer une profondeur de pénétration et on a

$$HRC = A - Be_3$$

De son côté, la dureté Vickers est proportionnelle à l'inverse de la surface de l'empreinte et celle-ci est proportionnelle au carré de la profondeur de pénétration. On peut donc s'attendre à trouver une relation de la forme

$$HRC = C - \frac{D}{\sqrt{HV}}$$

Un ajustement par les moindres carrés à partir de la correspondance donnée dans la norme DIN 50150 conduit à la corrélation suivante :

$$HRC \approx 116,5 - \frac{150}{\sqrt{\frac{HV}{GPa}}} \quad (4.26)$$

4.2.7 Corrélation entre la dureté Brinell des aciers et leur contrainte de rupture

L'expérience montre qu'il existe une corrélation entre la dureté Brinell des aciers et leur contrainte de rupture,

$$R_m \approx \alpha HB \quad (4.27)$$

en unités cohérentes, avec $\alpha = 0,35 \dots 0,36$.

4.2.8 Quelques valeurs indicatives de la dureté

Voici, pour fixer les idées, quelques valeurs indicatives de dureté pour les aciers :

Acier	$HB/(kp/mm^2)$	$HV/(kp/mm^2)$	HRC
St50, $R_m = 500MPa$	150	160	-
St80, $R_m = 800MPa$	240	250	22
100Cr6 trempé (acier à roulements)	-	850	63

4.3 Ténacité

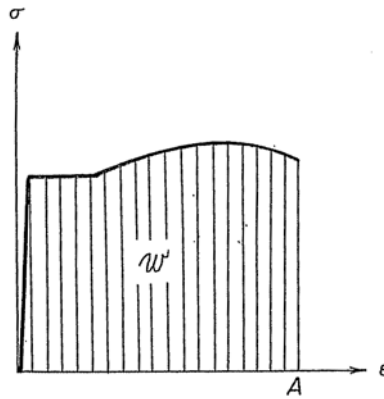


FIGURE 4.8 – Ténacité.

Par *ténacité*, on entend l'énergie nécessaire pour rompre *statiquement* un volume unitaire du matériau en traction. Il s'agit de la grandeur

$$w = \int_0^A \sigma d\varepsilon \quad (4.28)$$

c'est-à-dire l'aire sous la courbe de traction (fig. 4.8). Comme la théorie de la résistance des matériaux nous apprend que c'est l'énergie qui compte dans un choc, on pourrait croire que c'est la ténacité qui entre en ligne de compte. Il n'en est rien parce qu'en réalité, le courbe de la contrainte en fonction de la déformation *varie en fonction de la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$* ainsi que l'illustre la figure 4.9. La prévision de la résistance au choc nécessite donc des essais

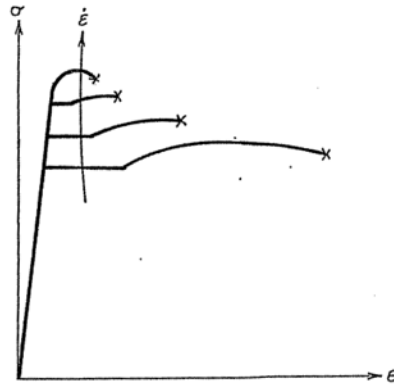


FIGURE 4.9 – La courbe (σ, ϵ) dépend de la vitesse de déformation.

propres.

4.4 Résilience

On appelle précisément *résilience* la propriété des matériaux à résister aux chocs. Lors d'un choc *mou*, c'est-à-dire sans rebondissement, le corps frappé doit absorber tout d'un coup une quantité importante d'énergie sous forme de travail de déformation. L'essai de résilience a pour but de mesurer l'énergie menant à la rupture d'une éprouvette entaillée. La figure 4.10 représente l'éprouvette

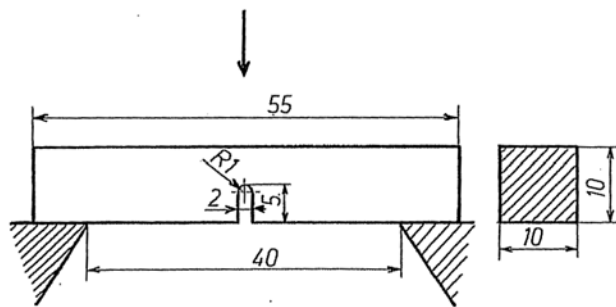


FIGURE 4.10 – Éprouvette Mesnager (en U).

Mesnager, qui se caractérise par une entaille en U. On préfère à l'heure actuelle l'éprouvette ISO en V, qui est représentée en figure 4.11. Ces éprouvettes sont normalisées. Le dispositif d'essai le plus courant est le *mouton de Charpy* (fig. 4.11) dont le principe est le suivant. Il s'agit d'un lourd pendule de masse M

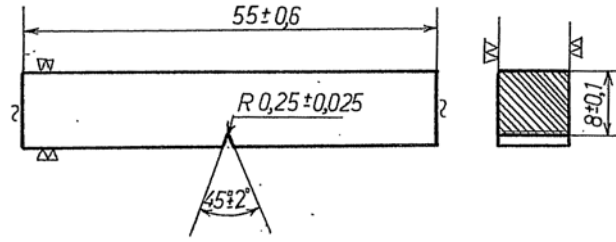


FIGURE 4.11 – Éprouvette ISO en V.

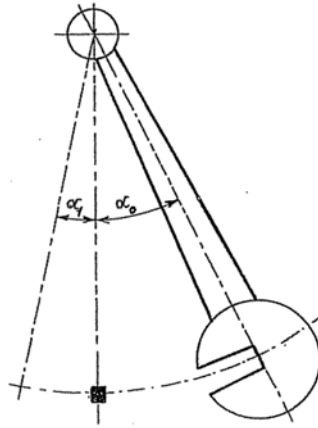


FIGURE 4.12 – Mouton de Charpy.

dont le centre de gravité se situe à une distance ℓ de son axe de rotation. Au départ, on le bloque en position haute, à un angle α_0 . Son énergie potentielle vaut alors

$$V_0 = -Mg\ell \cos \alpha_0 \quad (4.29)$$

en convenant de mesurer les hauteurs par rapport à l'axe de rotation. On lâche le pendule, qui vient briser l'éprouvette en lui cédant une énergie W . Il continue alors sa course jusqu'à l'angle α_1 où toute son énergie s'est retransformée en énergie potentielle³. À cet angle α_1 correspond l'énergie potentielle

$$V_1 = V_0 - W = -Mg\ell \cos \alpha_1 \quad (4.30)$$

En conséquence, la rupture de l'éprouvette a nécessité une énergie

$$W = V_0 - V_1 = Mg\ell(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0) \quad (4.31)$$

Les essais de résilience sont purement *comparatifs*, leurs résultats dépendant de l'éprouvette considérée, et le résultat de l'essai est l'énergie W , que l'on note KU ou KV selon qu'il s'agit d'une éprouvette en U ou en V. Une pratique ancienne consistait à utiliser comme mesure de résilience

$$KCU = \frac{KU}{S_0} \quad \text{ou} \quad KCV = \frac{KV}{S_0}$$

3. On connaît l'angle α_1 par le fait que le pendule pousse une aiguille montée légèrement dure sur l'arbre. Lorsque le pendule commence à reculer, cette aiguille reste en place.

où S_0 est la section de l'éprouvette au droit de l'entaille, ce qui n'a à vrai dire pas grand sens, car il faudrait logiquement diviser l'énergie par un certain volume et non par une surface. Bien entendu, comme les éprouvettes sont normalisées, cette division par la surface nette ne modifie pas la capacité de comparer des matériaux.

4.5 Le facteur d'intensité de contrainte de la mécanique de la rupture

4.5.1 Facteur d'intensité de contrainte

La mécanique de la rupture est la discipline qui s'occupe de la propagation des fissures, domaine très important en aéronautique notamment. Le problème

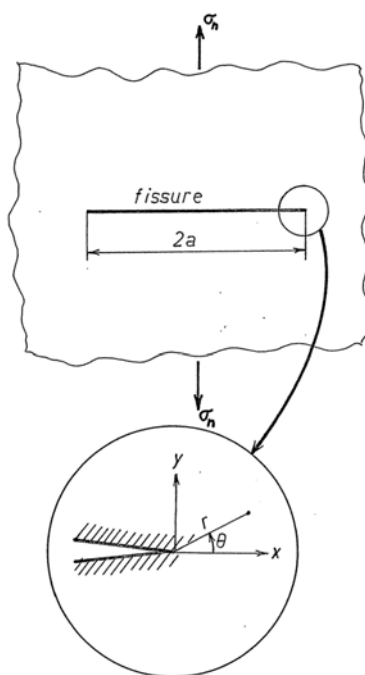


FIGURE 4.13 – Fissure non débouchante de longueur $2a$.

de base est une fissure non débouchante de largeur $2a$ dans une membrane indéfinie soumise à un champ de contrainte uniforme σ_n à une très grande distance de la fissure (fig. 4.13). On étudie ce problème en théorie de l'élasticité en considérant un trou elliptique de demi grands axes a et b (fig. 4.14) et en faisant tendre b vers zéro [22]. On obtient alors au voisinage du trou la solution

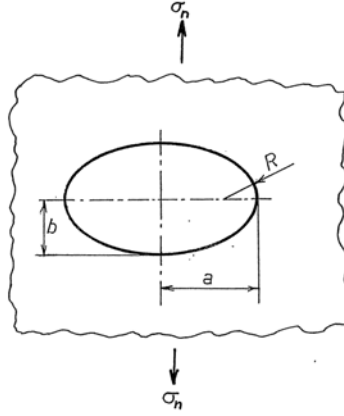


FIGURE 4.14 – Trou elliptique.

asymptotique suivante (voir le *zoom* de la figure 4.13) :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(\sigma_n) \\
 \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(\sigma_n) \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O}(\sigma_n)
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

où

$$K_I = \sigma_n \sqrt{\pi a} \tag{4.33}$$

Bien que ces champs de contrainte soient singuliers, leur énergie sur un cercle de rayon ρ est finie, puisqu'elle contient des termes de la forme

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\rho \frac{\sigma^2}{2E} r dr = \int_0^{2\pi} f^2(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \frac{K_I^2}{2E \cdot 2\pi r} r dr = \frac{1}{4\pi E} \int_0^{2\pi} f^2(\theta) d\theta \cdot K_I^2 \rho$$

On constate que le champ de contrainte au voisinage de l'entaille dépend essentiellement de la grandeur K_I définie en (4.33), qui est appelée *facteur d'intensité de contrainte*. Elle se mesure le plus souvent en $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$.

L'hypothèse fondamentale de la mécanique de la rupture est que *la fissure va se propager si le facteur d'intensité de contrainte atteint une certaine valeur critique K_{Ic} dépendant du matériau*. Cela revient à dire que le danger d'une fissure est proportionnel à la contrainte appliquée et à la racine carrée de sa longueur. Il existe du reste des corrélations entre K_{Ic} et la résilience KV sur éprouvettes en V [34].

Si l'on revient au trou elliptique, son rayon de courbure R au niveau du grand axe est donné par

$$R = \frac{b^2}{a} \tag{4.34}$$

Il est établi en théorie de l'élasticité [22] que la contrainte maximale au bord du trou est donnée par

$$\sigma_{max}(a, R) = \alpha_k(a, R) \sigma_n \tag{4.35}$$

où α_k est le coefficient de concentration de contrainte donné par

$$\alpha_k(a, R) = 1 + 2\frac{a}{b} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{R}} \quad (4.36)$$

Lorsque b s'approche de zéro, il en est de même de R et on a

$$\sigma_{max}(a, R) \approx 2\sigma_n \sqrt{\frac{a}{R}}$$

ce qui entraîne

$$K_I = \sigma_n \sqrt{\pi a} = \lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \sigma_{max}(a, R) \sqrt{\pi R} \right] = \sigma_n \lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \alpha_k(a, R) \sqrt{\pi R} \right] \quad (4.37)$$

Ce résultat est dû à Irwin [29, 28].

4.5.2 Propagation des fissures en fatigue

Lorsque le champ de contrainte est variable dans le temps, la propagation des fissures dépend de la variation du facteur d'intensité de contrainte

$$\Delta K_I = K_{I,max} - K_{I,min} \quad (4.38)$$

et du rapport

$$\mathcal{R} = \frac{K_{I,min}}{K_{I,max}} \quad (4.39)$$

de la façon suivante. Le taux d'accroissement $\frac{da}{dn}$ de la demi longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles n suit une loi de la forme

$$\frac{da}{dn} = f(\Delta K_I, \mathcal{R}) \quad (4.40)$$

et on invoque souvent une loi de puissance (loi de Paris [80]), mais *il existe un seuil en deçà duquel la fissure ne se propage pas* :

$$\frac{da}{dn} = 0 \quad \text{pour} \quad \Delta K_I \leq \Delta K_{I,seuil}(\mathcal{R}) \quad (4.41)$$

Ce seuil est à mettre en rapport avec la limite d'endurance en fatigue dont nous allons parler dans la prochaine section.

4.6 Essais de fatigue

Le comportement en fatigue des matériaux est une donnée de première importance pour le mécanicien. L'essai de fatigue le plus courant consiste à soumettre une éprouvette en rotation sous un moment de flexion connu et fixe dans l'espace. Un des dispositifs possibles est illustré en figure 4.15⁴. On appelle *courbe de Wöhler* le graphe obtenu en portant en ordonnées les contraintes d'essai et en abscisse, le nombre de cycles avant rupture (fig 4.16). Le plus souvent, on porte en fait en abscisse le *logarithme* du nombre de cycles. La

4. Il existe des montages plus pertinents, mais leur étude sort du cadre de cet ouvrage.

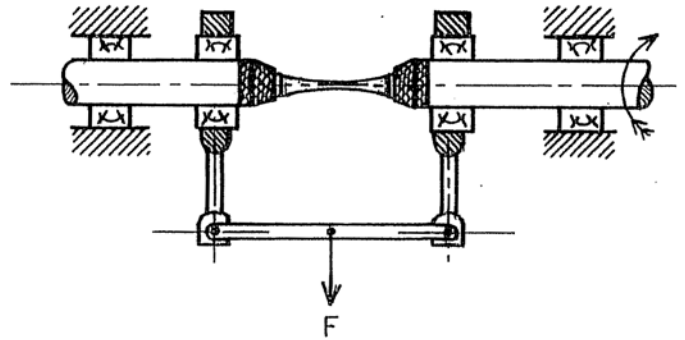


FIGURE 4.15 – Essai de fatigue en flexion rotative.

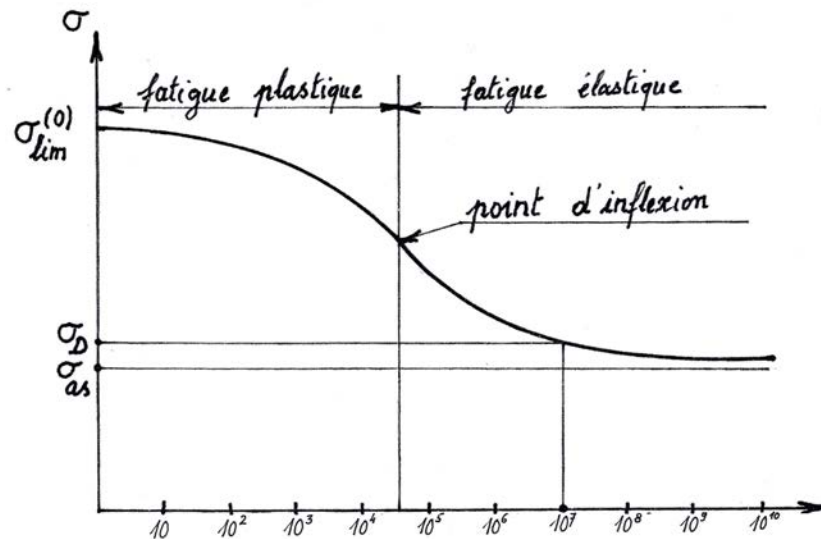


FIGURE 4.16 – Courbe de Wöhler.

la courbe de Wöhler a en général une courbure négative pour les faibles nombres de cycles (domaine de la *fatigue plastique*) et une courbure positive pour les grands nombres de cycles (domaine de la *fatigue élastique*). Son asymptote horizontale définit la *limite d'endurance asymptotique* σ_{as} . Pour les aciers, cette limite asymptotique se situe plus ou moins à la moitié de la limite de rupture statique. Pour les aluminiums, par contre, l'endurance est souvent *nulle*. Pour éviter de prolonger trop les essais, on s'arrête généralement à 10^7 cycles pour les aciers et on confond alors la limite d'endurance asymptotique avec la limite à 10^7 cycles σ_D , dite limite d'endurance conventionnelle, qui est un peu supérieure à la vraie.

La première difficulté de ces essais est leur *durée*. Supposons en effet que l'on veuille faire subir à l'éprouvette 10^7 cycles en flexion rotative. Pour des raisons constructives, la machine tourne par exemple à 1500 tr/min (moteur à 4 pôles,

le plus courant et le moins cher) . Il faudra donc, pour réaliser un essai,

$$\frac{10^7}{1500} = 6667 \text{ min} = 111 \text{ h}$$

soit quatre jours et demi. Si l'on ajoute à cela le caractère nettement dispersé des essais, on se rend compte que l'établissement d'une seule courbe de Wöhler nécessite une longue campagne d'essais. Ceci explique que les résultats disponibles en fatigue sont relativement peu nombreux.

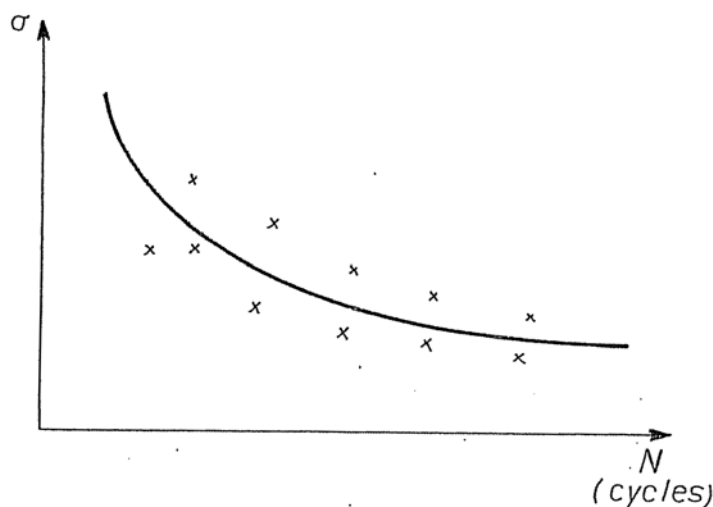


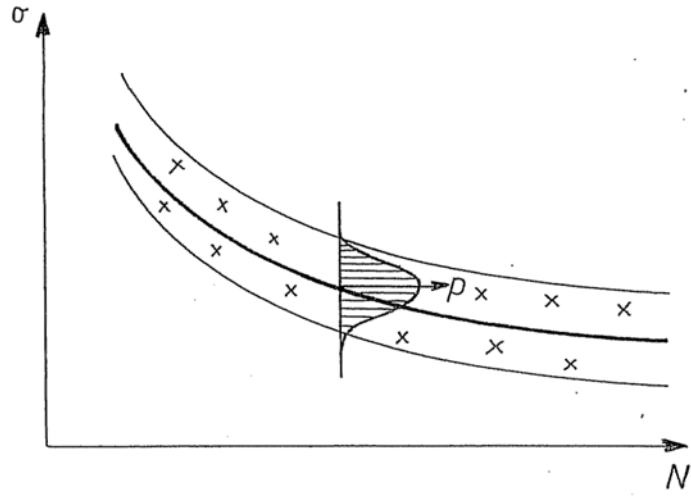
FIGURE 4.17 – Les essais de fatigue sont dispersés.

La seconde difficulté est la *dispersion* des résultats, qui est illustrée en figure 4.17. Si l'on considère, comme le suggère la nature même de l'essai, que la variable indépendante est la contrainte et que le nombre de cycles est la fonction, on peut, pour un même niveau de contrainte, obtenir des résultats aussi différents que

- Essai 1 : 10^4 cycles
- Essai 2 : 10^6 cycles
- Essai 3 : pas de rupture après 10^7 cycles

ce qui est assez déconcertant. En revanche, on sait depuis longtemps que si l'on considère la dispersion des contraintes pour une durée de vie donnée, on obtient une distribution normale d'écart-type à peu près constant dans toute la zone de fatigue élastique et *raisonnable* (fig. 4.18). On peut donc tracer des lignes d'équiprobabilité de rupture à hauteur constante par rapport à la courbe médiane qui sert de référence. On se rend alors aisément compte qu'au voisinage de la limite d'endurance, il est possible aussi bien d'avoir une rupture assez tôt que de ne pas avoir de rupture.

Il reste une troisième difficulté liée au fait que l'on s'intéresse à l'asymptote de la courbe de Wöhler et que rien n'est plus difficile à estimer - que ce soit graphiquement ou numériquement - qu'une asymptote. Pour porter remède à

FIGURE 4.18 – Pour N donné, la distribution de contrainte suit une loi normale.

cette situation, Belyaev [9] a fait remarquer qu'il est plus efficace d'utiliser comme abscisse non pas n ou $\log n$ mais $1/n$, car dans cette présentation, la limite d'endurance est l'ordonnée à l'origine de la courbe, ce qui est beaucoup plus facile à déterminer. (fig 4.19).

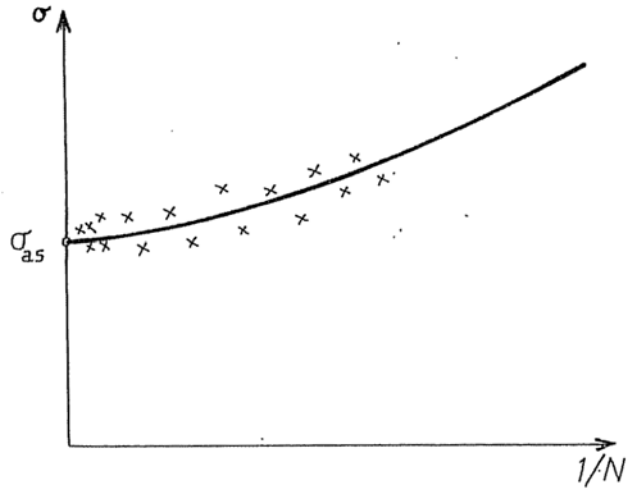


FIGURE 4.19 – Courbe de Wöhler à la Belyaev. La limite d'endurance est ici l'ordonnée à l'origine de la courbe.

Dans cette présentation, on peut procéder graphiquement ou ajuster par les moindres carrés une loi de la forme

$$\sigma = f\left(\frac{1}{N}\right)$$

par exemple,

$$\sigma = \sigma_{as} + A \left(\frac{1}{N} \right)^B$$

Chapitre 5

Détermination des limites de résistance

5.1 Contraintes nominales

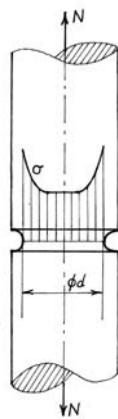


FIGURE 5.1 – Contraintes dans un barreau à gorge.

Les pièces de machines ont le plus souvent des formes accidentées et, par conséquent, des distributions de contraintes assez complexes. C'est par exemple le cas du barreau à gorge de la figure 5.1, pour lequel est représentée la distribution des contraintes en traction, au droit du fond de la gorge. Cette distribution peut être obtenue par différents procédés :

- Par voie analytique à partir de la théorie de l'élasticité. Ceci ne vaut que pour quelques entailles simples. De nombreux résultats utiles ont néanmoins été obtenus par Neuber [63].
- Par des essais photoélastiques. Cette méthode expérimentale a fourni un grand nombre de résultats utiles dans le passé.
- Par éléments finis.

De nombreuses solutions sont ainsi connues et répertoriées, notamment dans l'ouvrage de Peterson [73], et il est inutile d'essayer de les retrouver. Par ailleurs,

tant que l'on reste en régime élastique, les contraintes sont proportionnelles à la force appliquée. Ceci justifie la procédure suivante, qui est couramment appliquée en construction des machines : on considère la *section nette*, de diamètre d sur la figure, et on appelle *contrainte nominale* la contrainte uniforme donnant la même force sur cette section :

$$\sigma_n = \frac{F}{\pi d^2} \quad (5.1)$$

qui représente en fait la contrainte que l'on aurait dans la section nette s'il n'y avait pas de concentration. En régime élastique, la contrainte maximale σ_k dans la section considérée est alors un multiple de la contrainte nominale, et leur rapport

$$\alpha_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_n} \quad (5.2)$$

est alors appelé *coefficient de concentration de contrainte*¹.

Nous nous intéresserons spécialement aux arbres, dont les sollicitations essentielles sont l'extension, la flexion et la torsion. Pour une section nominale circulaire comme ci-dessus, on définit naturellement les trois contraintes nominales suivantes :

1. La *contrainte nominale d'extension* σ_e qui se calcule à partir de l'effort normal N par

$$\sigma_e = \frac{N}{\pi d^2} \quad (5.3)$$

2. La *contrainte nominale de flexion* σ_f , liée au moment de flexion résultant M_f par la relation

$$\sigma_f = \frac{32M_f}{\pi d^3} \quad (5.4)$$

3. La *contrainte nominale de torsion* τ_t , qui se calcule à partir du moment de torsion par

$$\tau_t = \frac{16M_t}{\pi d^3} \quad (5.5)$$

On trouvera dans le *Mémento* un atlas assez fourni de coefficients de concentration de contrainte.

Dans le cas que nous venons d'envisager, le choix de la section nette est assez naturel. Il existe d'autres situations où ce choix est moins évident et, par conséquent, plus arbitraire. Ainsi, pour un arbre avec une rainure de clavette, on trouve dans la littérature plusieurs choix de section et de contraintes nominales. Comme, de toute évidence, le coefficient de concentration de contrainte *dépend de ce choix*, il faut se conformer scrupuleusement au calcul de la contrainte nominale indiqué.

1. Il s'agit de la notation allemande. L'indice k signifie *Kerbe*, entaille en allemand. Les anglo-saxons notent ce coefficient K_t .

5.2 Principe de la détermination des limites de résistance

5.2.1 Généralités

Le calcul de vérification à la résistance suppose d'abord la détermination des sections dangereuses, que l'on suppose indépendantes quant à la résistance. Ceci n'est vrai que si elles sont suffisamment éloignées. Avec un peu d'expérience, on les repère aisément : ce sont presque toujours des sections où apparaissent des discontinuités ou des accidents de forme.

Pour chacune de ces sections, on détermine

- les contraintes nominales ;
- les contraintes nominales limites ;
- la sécurité s , rapport entre les précédentes.

L'étape la plus difficile dans ce calcul est la détermination des contraintes nominales limites, car elles dépendent de nombreux facteurs, au rang desquels il faut citer

- La forme effective de la section et de son voisinage. C'est ce que l'on appelle l'*effet d'entaille*.
- La dimension de la pièce. La résistance de pièces semblables de taille différente n'est pas la même. C'est ce que l'on appelle l'*effet d'échelle*.
- L'état de surface. La rugosité peut être préjudiciable à la tenue de la pièce. C'est ce que l'on appelle l'*effet d'élaboration*.
- Dans certains cas, il faut tenir compte de l'environnement : températures élevées, corrosion, etc. Nous ne traiterons pas ces effets qui relèvent de cours spécialisés.

5.2.2 Indices d'effet

L'approche traditionnelle consiste à tenir compte des effets cités ci-dessus en divisant la contrainte limite obtenue sur une éprouvette de laboratoire par des *indices d'effet* qui sont

- a) l'indice d'effet d'échelle β_g (g pour *Größe*, grandeur en allemand) ;
- b) l'indice d'effet d'entaille β_k (k pour *Kerbwirkung*, effet d'entaille en allemand) ;
- c) l'indice d'effet d'élaboration β_b (b pour *Bearbeitung*, élaboration en allemand).

Ces indices ne sont malheureusement pas indépendants et, en conséquence, ils dépendent de l'ordre dans lesquels on les considère. Une première manière de faire est celle de Leroy et Viseur [52], qui est représentée en figure 5.2².

1. L'éprouvette de laboratoire a une dimension de référence d^* (souvent 10mm), est sans entaille et présente une rugosité très faible $R_t^* \approx 0$. Sa contrainte limite est

$$(\sigma_{lim})_{\text{réf}} = \sigma_{lim}(d^*, \text{sans entaille}, R_t^*) \quad (5.6)$$

2. Dans ce qui suit, nous noterons σ une contrainte quelconque, d'extension, de flexion ou de torsion. Il faut noter que la valeur des indices d'effet diffère d'une sollicitation à l'autre.

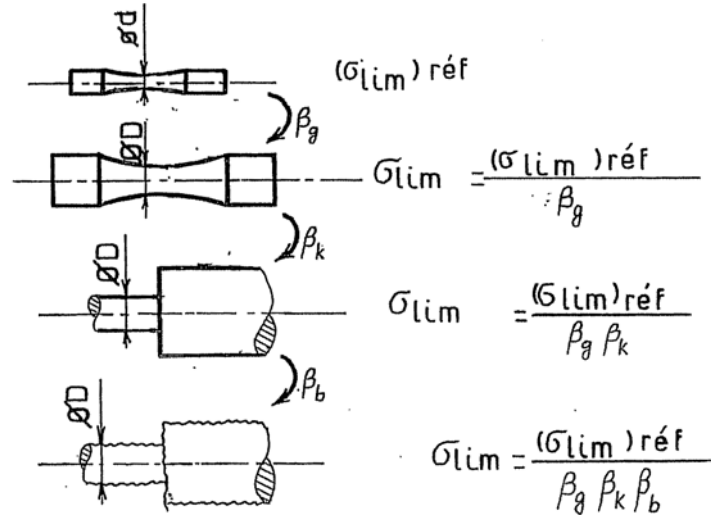


FIGURE 5.2 – Les indices d’effet, selon Leroy et Viseur.

2. On relie cette éprouvette de laboratoire à une éprouvette géométriquement semblable de dimension d par l’indice d’effet d’échelle

$$\beta_g(\text{matériau}, d) = \frac{\sigma_{lim}(d^*, \text{sans entaille}, R_t^*)}{\sigma_{lim}(d, \text{sans entaille}, R_t^*)} \quad (5.7)$$

3. À échelle constante, on tient compte de la forme par l’indice d’effet d’entaille

$$\beta_k(\text{matériau}, d, \text{entaille}) = \frac{\sigma_{lim}(d, \text{sans entaille}, R_t^*)}{\sigma_{lim}(d, \text{entaille}, R_t^*)} \quad (5.8)$$

4. L’échelle et la forme étant maintenues identiques, on tient compte de l’état de surface par l’indice d’effet d’élaboration

$$\beta_b(\text{matériau}, d, \text{entaille}, R_t) = \frac{\sigma_{lim}(d, \text{entaille}, R_t^*)}{\sigma_{lim}(d, \text{entaille}, R_t)} \quad (5.9)$$

Sous cette forme, l’indice d’effet d’échelle est indépendant de l’entaille, mais l’indice d’effet d’entaille dépend de l’échelle et, malheureusement, on ne dispose pratiquement pas dans la littérature de données relatives à l’effet d’entaille pour plusieurs tailles différentes d’éprouvettes. Aussi, de nombreux auteurs procèdent-ils autrement :

- 2'. Ils commencent par l’effet d’entaille à la dimension de référence :

$$\bar{\beta}_k(\text{matériau}, \text{entaille}) = \frac{\sigma_{lim}(d^*, \text{sans entaille}, R_t^*)}{\sigma_{lim}(d^*, \text{entaille}, R_t^*)} \quad (5.10)$$

- 3'. Ils font alors intervenir un indice d’effet d’échelle dépendant de l’entaille selon des abaques où intervient le coefficient de contrainte et, à vrai dire, sujets à caution :

$$\bar{\beta}_g(\text{matériau}, \text{entaille}, d) = \frac{\sigma_{lim}(d^*, \text{entaille}, R_t^*)}{\sigma_{lim}(d, \text{entaille}, R_t^*)} \quad (5.11)$$

4'. Enfin, leur indice d'élaboration est identique à celui de Leroy et Viseur,

$$\bar{\beta}_b = \beta_b \quad (5.12)$$

car il traduit le même rapport.

On le voit, aucune de ces deux approches n'est totalement satisfaisante, du fait du manque de données. Nous n'adopterons donc pas cette démarche telle quelle et nous la remplacerons, en fatigue notamment, par une analyse plus réaliste des faits dans laquelle les effets d'échelle et d'entaille sont imbriqués.

5.3 Rupture statique

La rupture statique est un phénomène relativement facile à cerner, car indépendant du temps. Le résultat de l'essai est formel et définitif : l'éprouvette résiste ou se rompt. L'essai est simple, bref et peu coûteux et la dispersion n'est pas grande. Il convient cependant d'étudier les effets d'échelle, d'entaille et d'élaboration, trop souvent omis dans les cours de résistance des matériaux. Nous affecterons d'un indice supérieur (0) les grandeurs relatives à la rupture statique.

5.3.1 Extension

Sur les éprouvettes de laboratoire, généralement de diamètre inférieur à 16 mm, on mesure la limite de rupture de référence R_m en extension³. Toujours pour cette sollicitation, on écrira dans le cas général

$$\sigma_{e,lim}^{(0)} = \frac{R_m}{\beta_{g,e}^{(0)} \beta_{k,e}^{(0)} \beta_{b,e}^{(0)}} \quad (5.13)$$

5.3.1.1 Effet d'échelle

On constate expérimentalement que la limite de rupture des grandes éprouvettes est inférieure à celle des petites. En se fondant sur l'hypothèse d'une répartition statistique de défauts dans la pièce et sur le postulat du lien le plus faible, ce qui revient à dire qu'une rupture locale entraîne la rupture totale, Weibull [85] a obtenu la relation

$$\beta_{g,e}^{(0)} = \left(\frac{d}{d^*} \right)^{3/m} \quad (5.14)$$

On constate que cette formule prédit très bien l'effet d'échelle des matériaux *fragiles* [15, 57]. Pour les aciers utilisés en construction mécanique, qui sont ductiles, il faut distinguer les aciers de construction et les aciers d'amélioration.

- Pour les *aciers de construction*, l'examen des données des normes DIN relatives à trois aciers courants, à savoir S235 (St37), E295 (St50) et E360 (St70) montre que la limite de rupture ne varie guère plus que de 3% jusqu'à 250 mm de diamètre. On peut donc écrire sans grande erreur

$$\beta_{g,e}^{(0)} \approx 1 \quad (\text{aciers de construction}) \quad (5.15)$$

3. Nous réserverons la notation R_m à la valeur obtenue sur des éprouvettes de taille standard.

- Les *aciers trempés et revenus* présentent un effet d'échelle lié au fait que lors de la trempe, le refroidissement du coeur de la pièce est plus lent que celui de la peau qui est en contact direct avec l'agent trempant. Il en résulte que le durcissement est d'autant plus faible que l'on se situe loin de la peau. Par conséquent, la valeur moyenne de la résistance de la pièce est inférieure à celle de sa peau.

L'examen des données des normes DIN sur l'acier 34CrMo4 conduit à un effet d'échelle de la forme $(d/10mm)^{0,1165}$. Pour l'acier 51CrV4, on obtient $(d/10mm)^{0,1030}$. Il semble donc que la relation souvent citée

$$\beta_{g,e}^{(0)} \approx \left(\frac{d}{10mm} \right)^{1/8} \quad (\text{aciers d'amélioration courants}) \quad (5.16)$$

va dans le sens de la sécurité.

- Il faut encore citer le cas des *aciers autotrepants* pour lesquels la pénétration de la trempe est très forte. L'examen des données DIN pour l'acier 36NiCrMo16 conduit à un effet d'échelle approximativement égal à $(d/10mm)^{0,06869}$, ce qui nous mène à écrire, avec une certaine sécurité,

$$\beta_{g,e}^{(0)} \approx \left(\frac{d}{10mm} \right)^{1/14} \quad (\text{aciers autotrepants}) \quad (5.17)$$

5.3.1.2 Effet d'entaille

Pour les matériaux *ductiles*, comme le sont les aciers de construction mécanique, la plasticité a pour effet de niveler la courbe des contraintes, si bien qu'à la rupture, les contraintes dans la section affaiblie sont pratiquement uniformes et égales à la contrainte nominale. En outre, si l'on considère, pour fixer les idées, la pièce de la figure 5.1, les parties de la pièce non affaiblies ont pour effet de gêner la striction, si bien que la section déformée n'est pas, comme dans une pièce sans entaille, amoindrie. Il en résulte que la limite de rupture est *augmentée* (mais qu'en contrepartie, l'allongement à la rupture est diminué, si bien que la pièce est plus fragile) (fig. 5.5). On peut donc écrire, avec une certaine

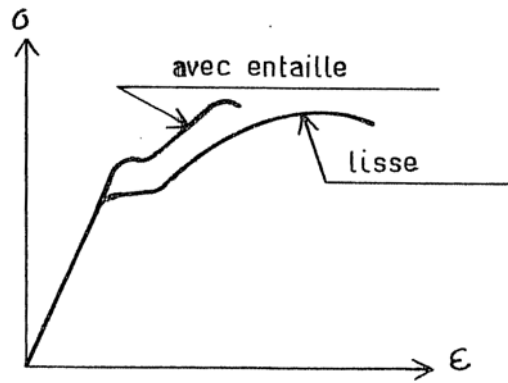


FIGURE 5.3 – L'entaille augmente la limite de rupture mais diminue la ductilité.

sécurité

$$\beta_{k,e}^{(0)} = 1 \quad (\text{matériaux ductiles}) \quad (5.18)$$

Il en est tout autrement des matériaux *fragiles* pour lesquels la distribution élastique des contraintes se maintient jusqu'à la rupture. C'est alors la contrainte à fond d'entaille σ_k qui importe et on aura par conséquent

$$\beta_{k,e}^{(0)} = \alpha_{k,e} \quad (\text{matériaux fragiles}) \quad (5.19)$$

Une exception à cette règle est constituée par les *fontes grises lamellaires* dans lesquelles les logements des lamelles de graphite constituent de sévères concentrations de contrainte pré-existantes dans le matériau, si bien que l'effet des entailles ne se fait plus sentir. C'est pourquoi on peut écrire

$$\beta_{k,e}^{(0)} = 1 \quad (\text{fontes grises lamellaires}) \quad (5.20)$$

5.3.1.3 Effet d'élaboration

On ne constate pas d'effet significatif de l'état de surface sur la limite de rupture statique, ce qui permet d'écrire

$$\beta_{b,e}^{(0)} = 1 \quad (5.21)$$

5.3.2 Autres sollicitations

Pour la flexion et la torsion, les limites de rupture sur éprouvettes non entaillées de laboratoire vérifient

$$\sigma_{f,lim}^{(0)}(d^*) \geq R_m \quad \text{et} \quad \tau_{t,lim}^{(0)}\sqrt{3} \geq R_m$$

si bien que c'est avec une certaine sécurité supplémentaire que l'on écrit

$$\sigma_{f,lim}^{(0)} = \frac{R_m}{\beta_{g,f}^{(0)}\beta_{k,f}^{(0)}\beta_{b,f}^{(0)}} \quad (5.22)$$

et

$$\tau_{t,lim}^{(0)}\sqrt{3} = \frac{R_m}{\beta_{g,t}^{(0)}\beta_{k,t}^{(0)}\beta_{b,t}^{(0)}} \quad (5.23)$$

Les indices d'effets se calculent selon les mêmes principes qu'en extension.

5.4 Fatigue sous sollicitation alternée

Nous envisagerons à présent le cas d'une sollicitation de la forme

$$\sigma(t) = \sigma_a \sin \omega t \quad (5.24)$$

dont l'amplitude est donc σ_a . C'est typiquement la sollicitation de flexion d'un arbre qui tourne sous un moment de flexion fixe dans l'espace. Sous ce type de sollicitation, on constate à la fois un effet d'échelle, un effet d'entaille et un effet d'élaboration, en bonne partie interdépendants. Nous affecterons d'un indice supérieur (1) les grandeurs relatives à l'endurance sous sollicitation alternée. Nous commencerons par présenter un certain nombre de faits expérimentaux.

5.4.1 Effet d'échelle

L'expérience montre que sur des pièces *non entaillées*,

- il n'existe pas d'effet d'échelle en extension ;
- il existe un effet d'échelle marqué en flexion et en torsion.

En revanche, sur des pièces *entaillées*, on constate qu'il existe un effet d'échelle *quelle que soit la sollicitation*.

Ces faits paradoxaux semblent indiquer qu'il existe un *effet de gradient*. En effet, ce qui distingue, sur les pièces non entaillées, l'extension de la flexion et la torsion, c'est que dans ces dernières, le gradient de contrainte n'est pas nul, puisque la contrainte passe de zéro sur l'axe à sa valeur maximale à la périphérie. Dans les pièces entaillées, il existe, quelle que soit la sollicitation, un gradient de contrainte au voisinage du fond de l'entaille où se produit la concentration de contrainte. Nous retrouverons cet effet en étudiant l'effet d'entaille.

Une deuxième remarque qui découle de l'observation de ces faits, c'est que le seul paramètre intrinsèque du matériau en fatigue est la limite d'endurance *en extension*, que nous noterons par la suite σ_{D_0} . On peut dire que c'est la limite d'endurance à gradient nul.

5.4.2 Effet d'entaille

Les entailles jouent un très grand rôle en fatigue. Tant que l'on est en fatigue élastique - et c'est le seul cas intéressant en construction des machines - il ne fait aucun doute que la contrainte qui importe est $\sigma_k = \alpha_k \sigma$. Mais sa seule valeur ne permet pas de prédire la tenue en fatigue. En d'autres termes, il serait erroné de considérer que $\beta_k = \alpha_k$. En effet, on constate que

- L'effet d'entaille est d'autant plus prononcé que l'acier est plus dur.
- L'effet d'entaille est d'autant plus marqué que la pièce est plus grosse.
- La limite d'endurance, en termes de la contrainte maximale σ_k , de pièces entaillées géométriquement semblables, décroît lorsque la taille de la pièce augmente, même en extension.
- Plus étonnant, les entailles *vives*, c'est-à-dire dont le rayon à fond d'entaille R est nul, pour lesquelles le coefficient de contrainte est infini, conduisent néanmoins à une limite d'endurance non nulle (quoique faible) en termes de la contrainte nominale et en outre, cette limite *dépend très peu de l'acier*, comme en témoigne la figure 5.4 tirée de Köhler et Rönitz [43].

Là encore, on pressent l'influence du gradient de contrainte.

5.4.3 Théorie du gradient

Toutes les constatations qui précèdent peuvent être expliquées si l'on admet qu'en réalité, ce n'est pas seulement la contrainte maximale qui entre en ligne de compte, mais que la forme du diagramme des contraintes au voisinage du maximum joue également un rôle. Cette forme peut être caractérisée par le *gradient relatif de contrainte*

$$\chi = \left| \frac{\text{grad} \sigma}{\sigma} \right|_{\text{au point où } \sigma \text{ est maximal}} \quad (5.25)$$

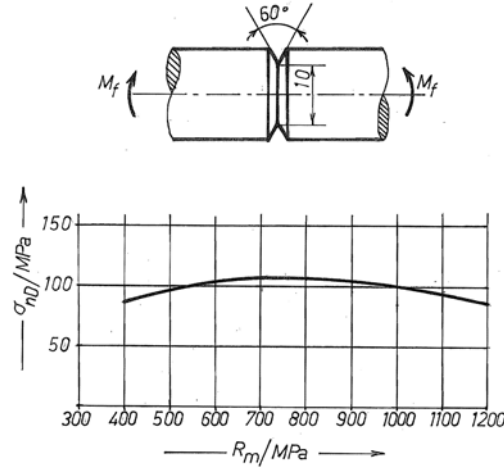


FIGURE 5.4 – Endurance d'une pièce à entaille vive.

introduit par Siebel [82, 83] et Petersen [71]^{4 5}. Pour des pièces sans entaille de diamètre d , ce gradient relatif vaut

$$\begin{aligned}\chi_0 &= 0 \quad (\text{extension}) \\ &= \frac{2}{d} \quad (\text{flexion et torsion})\end{aligned}\tag{5.26}$$

En présence d'une entaille de rayon R , cette valeur doit en général être augmentée de $\Delta\chi$, c'est-à-dire $\chi = \chi_0 + \Delta\chi$, avec [80]

$$\begin{aligned}\Delta\chi &= \frac{2 + \frac{1}{\alpha_k}}{R} \approx \frac{2}{R} \quad (\text{extension et flexion}) \\ &= \frac{1}{R} \quad (\text{torsion})\end{aligned}\tag{5.27}$$

Les valeurs à prendre en compte pour des entailles pratiques sont données dans l'atlas de concentration de contraintes, pages F du *Mémento*.

La limite d'endurance, en termes de la contrainte maximale à fond d'entaille σ_k , est alors une fonction du matériau et du gradient relatif⁶,

$$\sigma_{k,lim}^{(1)} = \Sigma(\text{matériau}, \chi)\tag{5.28}$$

Cette fonction doit vérifier deux conditions aux limites.

1. Pour un gradient relatif nul, on doit retrouver la limite d'endurance en extension, c'est-à-dire que

$$\Sigma(\text{matériau}, 0) = \sigma_{D_0}\tag{5.29}$$

4. On prendra garde à ne pas confondre Petersen, professeur allemand, et Peterson, ingénieur américain et auteur du célèbre ouvrage *Stress concentration factors* [73].

5. Une approche très voisine a également été proposée par Heywood [35].

6. Nous ne nous préoccupons pas, pour l'instant, de l'effet d'élaboration, qui sera traité plus loin.

2. A l'autre extrême, lorsque le gradient relatif est infini, c'est-à-dire pour un rayon nul, nous savons que la limite d'endurance, exprimée en termes de la contrainte nominale, possède une valeur non nulle et pratiquement indépendante de l'acier, c'est-à-dire que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\Sigma(\text{matériau}, \chi)}{\alpha_k} = B \quad (5.30)$$

Or, pour la plupart des entailles, lorsque le rayon tend vers zéro, on a les relations

$$\alpha_k \approx C_1 \sqrt{\frac{1}{R}} = C_2 \sqrt{\chi}$$

ce qui ramène la condition 5.30 à

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{\Sigma(\chi)}{\sqrt{\chi}} = A \quad (5.31)$$

avec une constante A à peu près indépendante de l'acier. On peut admettre la valeur [18]⁷

$$A \approx 70 \text{ MPa} \sqrt{\text{mm}} \quad (5.32)$$

L'expression la plus simple qui vérifie ces conditions aux limites est

$$\Sigma(\chi) = \sigma_{D_0} + A\sqrt{\chi} \quad (5.33)$$

En termes de la contrainte nominale, la limite d'endurance est alors donnée par

$$\sigma_{lim}^{(1)} = \frac{\Sigma(\chi)}{\alpha_k} \quad (5.34)$$

Ceci vaut pour l'extension et la flexion. Pour la torsion, il faut écrire

$$\tau_{t,lim}^{(1)} \sqrt{3} = \frac{\Sigma(\chi_t)}{\alpha_{k,t}} \quad (5.35)$$

On notera que les entailles vives peuvent être traitées par la présente approche par un passage à la limite pour $R \rightarrow 0$, pour autant que l'on dispose d'une formule analytique du coefficient de concentration de contrainte α_k .

5.4.4 Entailles non calculables

Malheureusement, la méthode exposée ci-dessus souffre d'une sévère limitation : pour l'utiliser, il faut pouvoir chiffrer à la fois α_k et χ , ce qui est loin d'être toujours le cas. En réalité, pour un grand nombre d'entailles de la pratique, on est dans l'impossibilité de calculer directement, soit le coefficient de concentration de contrainte, soit le gradient, soit les deux. Parmi celles-ci, il faut classer

- Les entailles vives ($R = 0$), pour lesquelles α_k et χ tendent vers l'infini, dans le cas où on ne connaît pas d'expression analytique du coefficient de concentration de contrainte pour R fini (fig. 5.4).
- Une série d'entailles pour lesquelles les données sont insuffisantes, ou dont le rayon à fond d'entaille est mal défini. C'est notamment le cas des rainures de clavettes (fig. 5.5), des cannelures, des filetages sur arbre, etc.

7. Ce raisonnement peut être mis en relation avec la mécanique de la rupture [18].

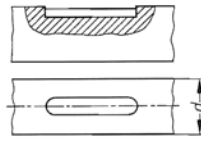


FIGURE 5.5 – Rainure de clavette : quel est le rayon de raccordement du fond aux parois verticales ?

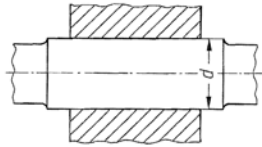


FIGURE 5.6 – Moyeu fretté.

- Les assemblages frettés, dans lesquels l'état de contrainte est complexe et n'est nullement régi par un quelconque rayon (fig. 5.6).

Ces entailles, que nous appellerons *non calculables*, sont malheureusement parmi les plus courantes. Elles ne peuvent être traitées qu'à partir de l'expérience et c'est là que gît la difficulté, car les résultats expérimentaux répertoriés dans la littérature sont extrêmement peu nombreux et se limitent souvent à un seul diamètre. Ceci rend ces résultats peu exploitables, en raison de l'effet d'échelle qui peut être très marqué, comme en témoignent les résultats de Lehr [48] représentés en figure 5.7⁸.

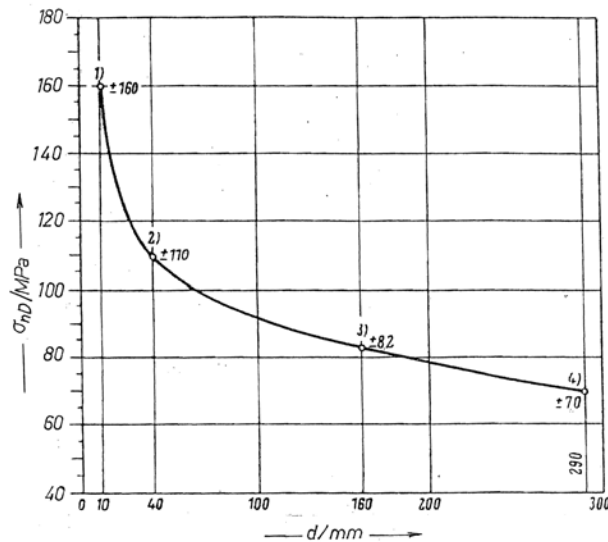


FIGURE 5.7 – Résultats de Lehr relatifs au frettage sur des essieux en acier ($R_m = 500MPa$). Noter l'importance de l'effet d'échelle.

8. Au vu de cette figure, on peut juger de la grossièreté de l'approximation préconisée par Massonnet [57], qui consiste à poser $\beta_k = 2$ dans tous les cas de frettage.

Pour tous ces cas, on peut adopter une *méthode de similitude* [19]. Soit une famille de pièces géométriquement semblables. Toutes les pièces de cette famille ont en commun la valeur des deux nombres sans dimension suivants :

- le coefficient de concentration de contrainte α_k ;
- le *nombre de gradient*

$$G = \sqrt{\chi d} \quad (5.36)$$

où d est une dimension caractéristique de la pièce.
Définissons le *facteur d'affaiblissement*

$$\gamma = \frac{\sigma_{lim}^{(1)}}{\sigma_{D_0}} \quad (5.37)$$

En vertu des relations (5.33) et (5.34) et moyennant la définition (5.36), ce facteur peut s'écrire

$$\gamma = \frac{1}{\alpha_k} + \frac{G}{\alpha_k \sigma_{D_0} \sqrt{d}} = C_1 + C_2 \frac{A}{\sigma_{D_0} \sqrt{d}} \quad (5.38)$$

où les coefficients sans dimension C_1 et C_2 ne dépendent que de la famille de pièces considérée. En outre, on voit apparaître dans ce résultat le nombre sans dimension $\frac{A}{\sigma_{D_0} \sqrt{d}}$. Pour les aciers courants, A a une valeur constante, ce qui permet d'écrire la relation ci-dessus sous la forme simplifiée

$$\gamma = C_1 + \frac{C_3}{\sigma_{D_0} \sqrt{d}} \quad (5.39)$$

où l'on a posé $C_3 = C_2 A$. On peut, par ce moyen, déterminer la limite d'endurance de n'importe quel représentant d'une famille de pièces homothétiques, à partir de deux résultats expérimentaux au moins. Les pages F32 et F34 du *Mémento* donnent un certain nombre de valeurs des coefficients C_1 et C_3 , qui ont été déduites de résultats de la littérature [19, 21].

5.4.5 Effet d'élaboration

Les sillons de rugosité sont autant de petites entailles superficielles et la limite d'endurance des pièces *non entaillées* doit être divisée par un facteur $\beta_b^{(1)}$ dépendant de la rugosité totale R_t et de la dureté de l'acier. Les valeurs données par le diagramme de la page F5 du *Mémento* valent pour l'extension et la flexion. En torsion, l'effet d'élaboration est moins marqué, et on peut écrire, selon Kravchenko [46],

$$\frac{1}{\beta_{b,t}^{(1)}} = 0,4 + 0,6 \frac{1}{\beta_{b,e}^{(1)}} \quad (5.40)$$

Dans le cas de pièces *entaillées*, il semble excessif de considérer le produit

$$\begin{aligned} \alpha_k \beta_b^{(1)} &= [1 + (\alpha_k - 1)] \left[1 + (\beta_b^{(1)} - 1) \right] \\ &= 1 + (\alpha_k - 1) + (\beta_b^{(1)} - 1) + (\alpha_k - 1) (\beta_b^{(1)} - 1) \end{aligned}$$

Selon Kloos [45], il est plus raisonnable d'admettre que les contraintes additionnelles d'entaille $(\alpha_k - 1) \sigma$ et les contraintes additionnelles de rugosité

$(\beta_b^{(1)} - 1) \sigma$ s'additionnent, ce qui donne, à la place du produit $\alpha_k \beta_b^{(1)}$, le facteur

$$1 + (\alpha_k - 1) + (\beta_b^{(1)} - 1) = \alpha_k + (\beta_b^{(1)} - 1) = \alpha_k \beta_{b,corr}^{(1)} \quad (5.41)$$

où apparaît l'indice d'effet d'élaboration corrigé

$$\beta_{b,corr}^{(1)} = 1 + \frac{\beta_b^{(1)} - 1}{\alpha_k} \quad (5.42)$$

Dans le cadre du calcul par similitude, on notera que la formule (5.38) définit C_1 comme égal à $1/\alpha_k$, ce qui mène à écrire

$$\beta_{b,corr}^{(1)} = 1 + C_1(\beta_b^{(1)} - 1) \quad (5.43)$$

De tout ceci, il faut retenir que l'effet d'élaboration est moindre pour les pièces entaillées que pour les pièces non entaillées. Autrement dit, si l'on redessine une pièce pour diminuer la concentration de contrainte, il faut prendre garde au fait que l'effet d'élaboration augmente du même coup et donc, veiller à la qualité de l'état de surface.

5.5 Fatigue sous sollicitation ondulée

5.5.1 Définitions

On appelle *sollicitation ondulée* une sollicitation de la forme

$$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t \quad (5.44)$$

combinant un terme constant σ_m positif ou négatif et une sollicitation alternée d'amplitude σ_a positive. Quitte à changer l'origine des temps d'une demi-alternance, il est préférable d'écrire

$$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \text{sign}(\sigma_m) \sin \omega t \quad (5.45)$$

On définit alors la sollicitation maximale (en grandeur)

$$\sigma_M = |\sigma_m| + \sigma_a \quad (5.46)$$

et le *taux de pulsation*⁹

$$\varpi = \frac{\sigma_a}{\sigma_M} \quad (5.47)$$

Avec ces notations, la sollicitation s'écrit donc

$$\sigma(t) = \sigma_M \text{sign}(\sigma_m) [(1 - \varpi) + \varpi \sin \omega t] \quad (5.48)$$

et apparaît comme l'interpolation linéaire entre un terme constant et un terme alterné. Traditionnellement,

- pour $\varpi = 0$, la sollicitation est dite *statique* ;
- pour $\varpi = 1$, la sollicitation est dite *alternée* (elle varie de $-\sigma_a$ à $+\sigma_a$)
- pour $\varpi = 1/2$, la sollicitation est dite *pulsée* (elle varie entre 0 et le maximum) ;
- pour toutes les autres valeurs de ϖ , elle est dite *ondulée*.

9. la lettre ϖ est appelée *pi cursif*.

5.5.2 Diagramme d'endurance

À l'endurance, la composante σ_a limite dépend de la composante moyenne, et réciproquement. La courbe d'interaction entre ces deux composantes s'appelle *diagramme d'endurance*. Il en existe plusieurs représentations.

1. Dans la littérature anglo-saxonne, on utilise surtout le diagramme de *Haigh* représenté en figure 5.8, où l'on porte σ_m en abscisse et σ_a en ordonnée.

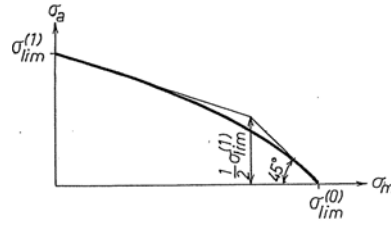


FIGURE 5.8 – Diagramme de Haigh.

2. En Allemagne, on utilise presque exclusivement le diagramme de *Smith-Goodman* où l'on porte en abscisse σ_m et en ordonnée σ_M . En outre, sur ce diagramme, on porte également la courbe de $\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a$. Ce diagramme est représenté en figure 5.7.

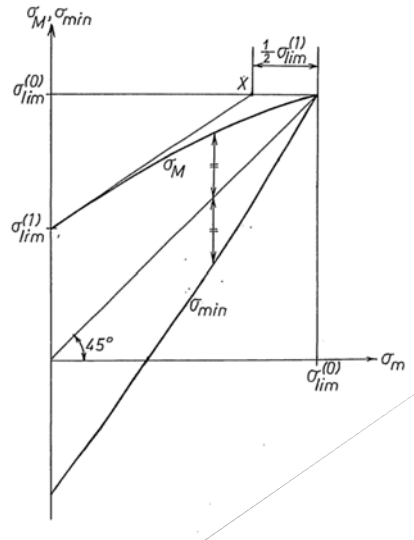
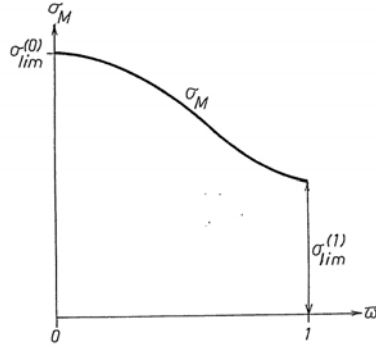


FIGURE 5.9 – Diagramme de Smith-Goodman.

3. On peut également représenter la valeur limite de σ_M en fonction du taux de pulsation [52]. Le diagramme correspondant est représenté en figure 5.8

FIGURE 5.10 – Diagramme d'endurance en fonction de ϖ .

Pour $\varpi = 0$, l'ordonnée est évidemment la limite de rupture statique $\sigma_{lim}^{(0)}$. Pour $\varpi = 1$, c'est la limite en sollicitation alternée $\sigma_{lim}^{(1)}$. Pour une valeur intermédiaire du taux de pulsation, nous noterons $\sigma_{lim}^{(\varpi)}$ la valeur limite de la contrainte maximale σ_M .

5.5.3 Mise hors dimension du diagramme d'endurance

Appelons *facteur d'endurance* le nombre

$$\xi(\varpi) = \frac{\sigma_{lim}^{(\varpi)}}{\sigma_{lim}^{(0)}} \quad (5.49)$$

Sa valeur en $\varpi = 1$,

$$\xi(1) = \frac{\sigma_{lim}^{(1)}}{\sigma_{lim}^{(0)}} \quad (5.50)$$

définit la courbe qu'il faut choisir sur le diagramme de la page F3 du *Mémento*, qui n'est autre qu'un réseau de diagrammes d'endurance. Sur cette courbe, à l'abscisse ϖ correspondant à la sollicitation envisagée, l'ordonnée vaut $\xi(\varpi)$. La contrainte limite a alors pour maximum

$$\sigma_{lim}^{(\varpi)} = \xi(\varpi) \sigma_{lim}^{(0)} \quad (5.51)$$

Les diagrammes de la page F3 du *Mémento* sont fondés sur la relation

$$\xi(\varpi) = \frac{\xi(1)}{\varpi^n + (1 - \varpi^n) \xi(1)} \quad (5.52)$$

avec

$$n = \frac{1}{1 - \frac{\xi(1)}{2}} \quad (5.53)$$

Sur un diagramme de Smith-Goodman, la tangente à la courbe ainsi calculée en $\sigma_m = 0$ passe par le point X de coordonnées $\left(\sigma_{lim}^{(0)} - \frac{1}{2} \sigma_{lim}^{(1)}, \sigma_{lim}^{(0)} \right)$ (figure 5.9), ce qui correspond assez bien avec la réalité.

5.5.4 Diagramme VDI

En Allemagne, on utilise souvent le diagramme VDI qui est une simplification du diagramme de Smith-Goodman dans laquelle la courbe supérieure est remplacée par sa tangente en $\sigma_m = 0$ jusqu'à son point de rencontre X avec la droite d'ordonnée $\sigma_{lim}^{(0)}$. Ce diagramme, représenté en figure 5.11, est un peu optimiste pour les grandes valeurs de σ_m , mais ce fait porte peu à conséquence, car à ce niveau, on est en fait limité par la condition de plastification.

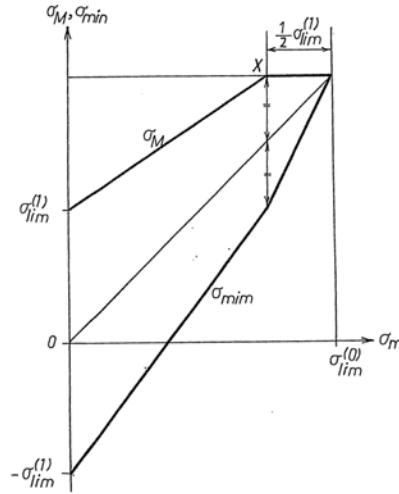


FIGURE 5.11 – Diagramme VDI.

On peut du reste établir que le diagramme VDI est équivalent à un diagramme d'endurance en fonction de ϖ d'équation

$$\begin{aligned} \xi(\varpi) &= \frac{\xi(1) \left(1 - \frac{\xi(1)}{2}\right)}{\frac{\xi(1)}{2} + \varpi[1 - \xi(1)]} \quad \text{pour } \varpi > \frac{\xi(1)}{2} \\ &= 1 \quad \text{pour } \varpi \leq \frac{\xi(1)}{2} \end{aligned} \quad (5.54)$$

5.6 Sollicitations combinées

Les arbres sont très souvent soumis à la fois à de l'extension, de la flexion et de la torsion. Chacune de ces composantes d'indice général i a son maximum propre $\sigma_{i,M}$ et son taux de pulsation ϖ_i et, prise séparément, elle a pour limite $\sigma_{i,lim}$. De nombreuses expériences [30, 31, 36, 72] ont montré que dans tous les cas, on peut écrire le critère d'endurance

$$\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{e,lim}} + \frac{\sigma_f}{\sigma_{f,lim}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_t}{\tau_{t,lim}}\right)^2 = 1 \quad (5.55)$$

quels que soient les taux de pulsation respectifs, à condition d'utiliser les limites correspondantes.

La sécurité s d'une sollicitation de service $(\sigma_e, \sigma_f, \tau_t)$ s'obtient, suivant la règle générale, en exprimant que l'état homothétique $(s\sigma_e, s\sigma_f, s\tau_t)$ se trouve sur la surface limite, ce qui donne [52]

$$\frac{1}{s^2} = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{e,lim}} + \frac{\sigma_f}{\sigma_{f,lim}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_t}{\tau_{t,lim}} \right)^2 \quad (5.56)$$

La littérature russe [24, 26, 74] introduit les *sécurités partielles*

$$s_e = \frac{\sigma_{e,lim}}{\sigma_e}, \quad s_f = \frac{\sigma_{f,lim}}{\sigma_f}, \quad s_t = \frac{\tau_{t,lim}}{\tau_t} \quad (5.57)$$

ce qui ramène (5.56) à

$$\frac{1}{s^2} = \left(\frac{1}{s_e} + \frac{1}{s_f} \right)^2 + \left(\frac{1}{s_t} \right)^2 \quad (5.58)$$

Cette présentation a l'avantage de mener à des calculs très systématiques.

Signalons encore que pour le cas classique flexion-torsion, la littérature allemande utilise souvent une *contrainte de flexion équivalente*

$$\sigma_{f,eq} = \sqrt{\sigma_f^2 + 3\alpha^2 \tau_t^2} \quad (5.59)$$

et en déduisent la sécurité par

$$s = \frac{\sigma_{f,lim}}{\sigma_{f,eq}} \quad (5.60)$$

Le coefficient α est défini par

$$\alpha = \frac{\sigma_{f,lim}}{\tau_{t,lim}\sqrt{3}} \quad (5.61)$$

On vérifie aisément qu'il s'agit d'une approche équivalente au critère (5.56), bien qu'un peu moins simple conceptuellement. C'est du reste cette formule que nous avons utilisée anticipativement dans la section consacrée au moment idéal (section 2.3).

5.7 Contraintes oscillatoires d'amplitude variable

5.7.1 Principe du dommage cumulatif

Considérons à présent une sollicitation ondulée dont la contrainte maximale varie au cours du temps,

$$\sigma(t) = \pm \sigma_M(t) [(1 - \varpi) + \varpi \sin \omega t] \quad (5.62)$$

On se limite d'habitude au cas où ϖ est invariable et plus spécialement, à $\varpi = 1/2$ (sollicitation pulsée) ou $\varpi = 1$ (sollicitation alternée) [80]. Dans un premier stade, nous supposons que la fonction $\sigma_M(t)$ est une fonction en escalier, c'est-à-dire que l'on a une succession du type

$$\begin{array}{lll} \sigma_M = \sigma_{M_1} & \text{pendant} & n_1 \text{ cycles} \\ \sigma_M = \sigma_{M_2} & \text{pendant} & n_2 \text{ cycles} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \sigma_M = \sigma_{M_k} & \text{pendant} & n_k \text{ cycles} \end{array} \quad (5.63)$$

et que certaines au moins de ces sollicitations dépassent la limite d'endurance. La pièce va-t-elle résister ? Pour tenter de répondre à cette question, Palmgren [66] a proposé en 1924 le raisonnement suivant (dans le cadre des roulements qui, en première approximation, ont une endurance nulle) :

- À la sollicitation 1 correspond par la courbe de Wöhler une durée de vie de N_1 cycles. Après n_1 cycles, on a donc consommé une partie $\frac{n_1}{N_1}$ de la durée de vie de la pièce. On dit que la pièce a subi un *dommage*

$$\mathcal{D}_1 = \frac{n_1}{N_1} \quad (5.64)$$

Si ce dommage est inférieur à 1, la pièce résiste et si ce dommage est supérieur à 1, la pièce se rompt ¹⁰.

- Pour la sollicitation 2, la courbe de Wöhler donne une durée de vie de N_2 cycles, donc aux n_2 cycles effectués correspond un dommage

$$\mathcal{D}_2 = \frac{n_2}{N_2}$$

L'hypothèse fondamentale de Palmgren est qu'à ce stade, on n'a plus droit qu'à un dommage égal à (1 moins le dommage déjà consommé $\mathcal{D}_1$), ce qui revient à dire que pour éviter la rupture, il faut que

$$\mathcal{D}_2 < 1 - \mathcal{D}_1$$

Il est équivalent de dire que le dommage cumulé des deux sollicitations est donné par

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$$

et que la pièce ne sera à même de supporter les deux sollicitations successives que si ce dommage cumulé reste inférieur à l'unité.

- Continuant ce raisonnement par récurrence, on obtient que pour la succession des k sollicitations décrite en (5.63), le dommage cumulé vaut

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \dots + \mathcal{D}_k = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i}$$

et que la pièce tiendra ou se rompra selon que ce dommage est inférieur ou supérieur à l'unité. Autrement dit, le critère de rupture est

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (5.65)$$

L'application de ce critère à tout type de fatigue, c'est à dire pas seulement aux roulements, a été proposée par Miner [62] en 1945. Comme son article a eu plus de retentissement que celui de Palmgren, on parle souvent du critère de Miner, parfois du critère de Palmgren-Miner, mais la justice voudrait qu'on l'appelle critère de Palmgren.

10. Plus exactement, si le dommage est inférieur à 1, on est à gauche de la courbe de Wöhler et s'il est supérieur à 1, on est à droite, ce qui correspond à des probabilités de rupture respectivement inférieure et supérieure à la probabilité de référence de la courbe de Wöhler. Nous adoptons ici la présentation "naïve" pour faciliter la compréhension.

On peut généraliser ce critère au cas où la sollicitation change constamment en fonction du temps. Alors, à un intervalle de temps $]t, t + dt[$ correspond une sollicitation $\sigma_M(t)$ pour laquelle la durée de vie vaut $N(\sigma_M(t))$. L'incrément de dommage pendant cet intervalle vaut donc

$$d\mathcal{D} = \frac{1}{N(\sigma_M(t))} \frac{dn}{dt} dt$$

donc, après un temps t^* , on aura le dommage

$$\mathcal{D}(t^*) = \int_0^{t^*} \frac{1}{N(\sigma_M(t))} \frac{dn}{dt} dt$$

et, selon le critère de Palmgren, la rupture surviendra lorsque ce dommage vaudra l'unité. Si l'on note T la durée de vie exprimée en temps, on aura donc

$$\mathcal{D}(T) = \int_0^T \frac{1}{N(\sigma_M(t))} \frac{dn}{dt} dt \quad (5.66)$$

On remarquera du reste que, selon le critère de Palmgren, l'*ordre* dans lequel se succèdent les sollicitations n'a pas d'importance. Or, on peut souvent admettre que sur une période assez longue $\mathcal{T}$, on pourra associer une densité de probabilité $p(\sigma_M)$ à tout $\sigma_M > 0$, avec, bien entendu, la condition de normalisation

$$\int_0^\infty p(\sigma_M) d\sigma_M = 1 \quad (5.67)$$

Si à cette période correspond un nombre de cycles total $\mathcal{N}$, il y aura donc $\mathcal{N}p(\sigma_M)d\sigma_M$ cycles sous une contrainte maximale comprise entre σ_M et $\sigma_M + d\sigma_M$. À ces cycles correspond le dommage élémentaire

$$d\mathcal{D} = \frac{\mathcal{N}p(\sigma_M)d\sigma_M}{N(\sigma_M)}$$

Dès lors, à la fin d'une période, on a le dommage

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{N} \int_0^\infty \frac{p(\sigma_M)}{N(\sigma_M)} d\sigma_M \quad (5.68)$$

ou, ce qui revient au même, le taux moyen d'accroissement du dommage vaut

$$\dot{\mathcal{D}} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{T}} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{T}} \int_0^\infty \frac{p(\sigma_M)}{N(\sigma_M)} d\sigma_M \quad (5.69)$$

La mise hors service aura donc lieu après une durée de vie T qui peut s'évaluer par la condition

$$\dot{\mathcal{D}}T = 1$$

soit

$$T = \frac{1}{\dot{\mathcal{D}}} \quad (5.70)$$

5.7.2 Discussion physique

Nous empruntons le raisonnement suivant à Lemaître et Chaboche [51]. Le dommage de Palmgren est une notion formelle. Mais on peut imaginer qu'il existe dans le matériau une variable constitutive δ permettant d'exprimer son dommage de manière objective. On peut encore admettre que sous l'effet d'une sollicitation σ appliquée pendant dn cycles, ce dommage varie selon une *équation d'état* du type

$$d\delta = f(\sigma, \delta)dn \quad (5.71)$$

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse imaginer quant à la structure de cette fonction f consiste à la supposer *séparée*

$$f(\sigma, \delta) = A(\sigma)B(\delta) \quad (5.72)$$

Dans ce cas, l'équation d'état se ramène à

$$\frac{d\delta}{B(\delta)} = A(\sigma)dn$$

et, en introduisant la primitive

$$C(\delta) = \int_0^\delta \frac{dx}{B(x)} \quad (5.73)$$

on obtient

$$\frac{dC}{d\delta}d\delta = A(\sigma)dn \quad (5.74)$$

Considérons d'abord le cas simple d'une sollicitation d'amplitude constante. En admettant que la rupture se produise pour une valeur donnée δ^* du dommage, le nombre de cycles à la rupture $N(\sigma)$ est donné par la condition

$$C(\delta^*) = A(\sigma)N(\sigma)$$

ce qui implique

$$A(\sigma) = \frac{C(\delta^*)}{N(\sigma)} \quad (5.75)$$

Lorsque la sollicitation varie dans le temps, on obtient après un temps t_1 un dommage physique δ_1 donné par

$$C(\delta_1) = \int_0^{t_1} A(\sigma(t)) \frac{dn}{dt} dt = \int_0^{t_1} \frac{C(\delta^*)}{N(\sigma(t))} \frac{dn}{dt} dt$$

soit encore

$$\frac{C(\delta_1)}{C(\delta^*)} = \int_0^{t_1} \frac{1}{N(\sigma(t))} \frac{dn}{dt} dt \quad (5.76)$$

On en déduit que le dommage physique δ_1 vaudra δ^* , ce qui correspond à la rupture, après un temps T donné par

$$\int_0^T \frac{1}{N(\sigma(t))} \frac{dn}{dt} dt = 1$$

On retrouve l'expression (5.66) du principe du dommage cumulatif.

Ainsi, la condition de séparation (5.72) est suffisante pour que s'applique le principe du dommage cumulatif. On peut d'ailleurs montrer que cette condition est également nécessaire [17].

5.7.3 Courbes iso-dommage

S'il existe une variable exprimant le dommage physique en fonction de la contrainte et du nombre de cycles, on doit pouvoir tracer des iso-dommages dans le plan (σ, n) de la courbe de Wöhler. Toute fonction constante sur ces iso-dommages et permettant de les échelonner de façon croissante jusqu'à la courbe de Wöhler où elle vaut l'unité, peut être considérée comme une mesure valable du dommage. Une hypothèse simple est d'écrire que si à la durée de vie n correspond sur la courbe de Wöhler une contrainte $\sigma = \mathcal{S}(n)$, le dommage peut s'exprimer par l'inverse de la sécurité, soit

$$\delta = \frac{\sigma}{\mathcal{S}(n)} \quad (5.77)$$

Envisageons, dans ce cadre le cas d'une courbe de Wöhler de la forme

$$\mathcal{S}(n) = \sigma_{as} + kn^{-\alpha} \quad (5.78)$$

qui est souvent admise. On a alors

$$\delta = \frac{\sigma}{\sigma_{as} + kn^{-\alpha}} \quad (5.79)$$

En un point du plan, la donnée de la contrainte et du dommage permet de déduire n par inversion de la relation précédente, ce qui donne

$$n = k^{1/\alpha} \left(\frac{\sigma}{\delta} - \sigma_{as} \right)^{-1/\alpha} \quad (5.80)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dn} &= -\frac{\sigma}{(\sigma_{as} + kn^{-\alpha})^2} (-\alpha kn^{-\alpha-1}) \\ &= \frac{\delta^2}{\sigma} \alpha k k^{-1-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\sigma}{\delta} - \sigma_{as} \right)^{1+\frac{1}{\alpha}} \\ &= \alpha k^{-1/\alpha} \delta^{1-\frac{1}{\alpha}} \sigma^{1/\alpha} \left(1 - \frac{\sigma_{as}\delta}{\sigma} \right)^{1+\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (5.81)$$

On constate que cette fonction n'est séparée (condition de validité du dommage cumulatif) *que si la limite d'endurance asymptotique est nulle*, ce qui est le cas des roulements, de certains alliages d'aluminium, mais non des aciers.

Pratiquement, si un matériau présente une limite d'endurance raisonnablement grande, ce qui est le cas des aciers, il n'est guère opportun de faire un calcul en durée de vie finie. Ce n'est que lorsque la limite d'endurance est très faible ou nulle que le problème se pose et dans ce cas, le principe du dommage cumulatif est la seule approche simple du problème.

Chapitre 6

Contacts hertziens

6.1 Introduction

Toute machine comporte un certain nombre d'organes ayant entre eux des liaisons partielles, dites *connexions*. Celles-ci peuvent être *conformes*, ce qui signifie que les deux corps s'épousent exactement sur les surfaces de liaison. Mais on rencontre aussi des connexions non conformes, que l'on appelle *contacts hertziens*. Parmi ces derniers, on peut encore distinguer les contacts *ponctuels*, par exemple une sphère sur un plan, et les contacts *linéaires*, que l'on trouve par exemple entre deux cylindres ayant une génératrice commune (fig. 6.1). Les

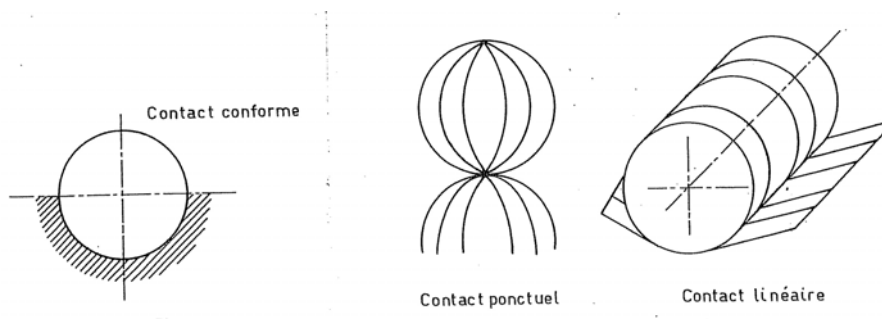


FIGURE 6.1 – Les trois types de contacts.

exemples de contacts hertziens abondent. Citons (fig. 6.2) les galets, les cames, les couteaux de balance, les dents d'engrenage, les roues libres à coincement d'éléments roulants et les roues lisses pressées que l'on rencontre dans certains variateurs de vitesse.

Dans tous ces contacts, les surfaces peuvent subir diverses détériorations qui les rendent impropres à assurer correctement leur fonction :

- *Déformations plastiques*, formant des empreintes. Une accumulation de telles déformations sous l'effet de charges dynamiques très élevées s'appelle le *matage*.
- *Fatigue superficielle*, se manifestant par de petites fissures qui, se propageant, forment des *écailles* (petites plaques qui se détachent) ou des *piqûres* (petits cratères), selon les conditions de lubrification.

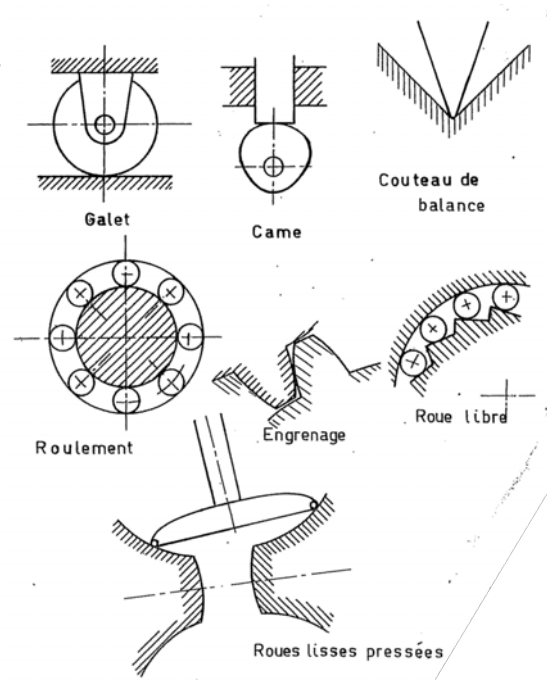


FIGURE 6.2 – Exemples de contacts hertziens en mécanique.

- *Usure*, c'est-à-dire enlèvement progressif de matière.
- *Grippage*, c'est-à-dire soudure locale des surfaces. Il faut distinguer les *microgrippages*, petites soudures qui cassent dès leur naissance en détériorant la surface, du *grippage caractérisé* dans lequel la soudure est étendue et bloque le mouvement.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de calculer les pressions de contact dans les contacts hertziens.

6.2 Considérations géométriques

La surface d'un corps possède, en un point régulier P , deux rayons de courbure principaux, situés dans deux plans orthogonaux (fig 6.3). Par convention, nous dirons qu'un rayon de courbure est *positif* si le centre de courbure correspondant est situé du même côté de P que la matière. Dans le cas contraire, on affectera le rayon de courbure du signe *négatif*. Nous appellerons *courbures* les inverses des rayons de courbure :

$$\rho_1 = \frac{1}{R_1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{R_2} \quad (6.1)$$

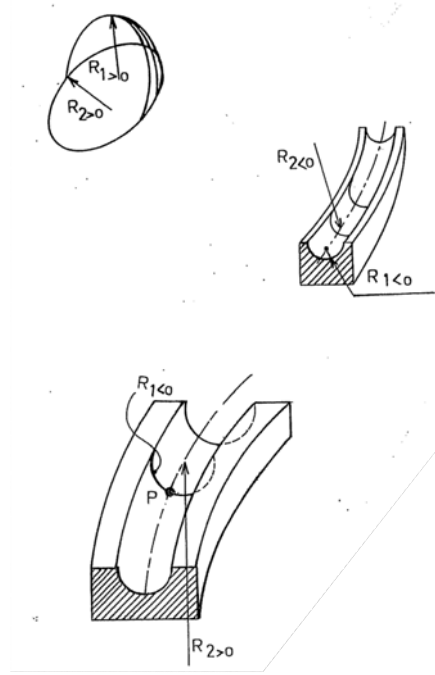


FIGURE 6.3 – Rayons de courbure

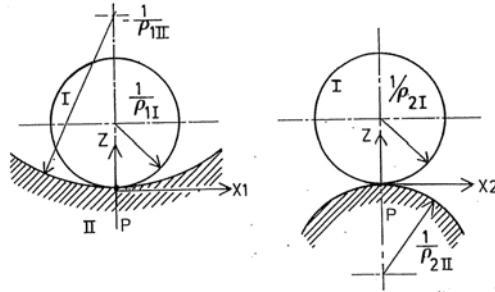


FIGURE 6.4 – Notion de divergence

Lorsque deux corps *I* et *II* sont en contact de telle façon que leurs plans principaux de courbure coïncident au point *P* de contact, seul cas que nous considérerons ici (fig. 6.4), commençons par observer que dans la direction x_1 , l'écart entre les deux surfaces, compté selon la normale commune au contact, est donné par

$$\Delta z = \frac{1}{2}(\rho_{1I} + \rho_{1II})x_1^2 \quad (6.2)$$

en assimilant, au voisinage du contact, les profils des deux corps à deux paraboles. Nous donnerons au groupement $(\rho_{1I} + \rho_{1II})$ le nom de *divergence dans la direction 1*. De même, dans la direction x_2 , on a

$$\Delta z = \frac{1}{2}(\rho_{2I} + \rho_{2II})x_2^2 \quad (6.3)$$

On se convainc aisément que le contact au point P n'est possible que si les deux divergences sont non négatives,

$$\rho_{1I} + \rho_{1II} \geq 0 \quad \text{et} \quad \rho_{2I} + \rho_{2II} \geq 0 \quad (6.4)$$

La nullité de la divergence dans une direction correspond à un contact linéaire et la nullité des deux divergences caractérise un contact conforme.

Pour caractériser plus finement le contact, on utilise les deux grandeurs suivantes :

– La *somme des courbures*

$$\sum \rho = (\rho_{1I} + \rho_{1II}) + (\rho_{2I} + \rho_{2II}) \quad (6.5)$$

qui, du reste, est aussi la somme des divergences. En vertu des considérations qui précèdent, c'est un nombre positif.

– La *dissymétrie du contact*

$$F(\rho) = \frac{|(\rho_{1I} + \rho_{1II}) - (\rho_{2I} + \rho_{2II})|}{\sum \rho} \quad (6.6)$$

qui appelle les commentaires suivants.

1. Tout d'abord, comme les deux divergences sont positives, leur différence est, en grandeur, inférieure à leur somme. Donc

$$0 \leq F(\rho) \leq 1 \quad (6.7)$$

2. Lorsque $F(\rho) = 0$, on a nécessairement

$$\rho_{1I} + \rho_{1II} = \rho_{2I} + \rho_{2II}$$

Les deux divergences sont donc identiques et tout se passe comme dans le contact d'une sphère sur un plan : le contact est alors dit *sphérique*.

3. A l'opposé, lorsque $F(\rho) = 1$, cela signifie que

$$|(\rho_{1I} + \rho_{1II}) - (\rho_{2I} + \rho_{2II})| = \sum \rho = (\rho_{1I} + \rho_{1II}) + (\rho_{2I} + \rho_{2II})$$

On a donc, *ou bien*,

$$(\rho_{1I} + \rho_{1II}) - (\rho_{2I} + \rho_{2II}) = (\rho_{1I} + \rho_{1II}) + (\rho_{2I} + \rho_{2II})$$

ce qui implique

$$\rho_{2I} + \rho_{2II} = 0$$

ou bien,

$$-(\rho_{1I} + \rho_{1II}) + (\rho_{2I} + \rho_{2II}) = (\rho_{1I} + \rho_{1II}) + (\rho_{2I} + \rho_{2II})$$

ce qui implique

$$\rho_{1I} + \rho_{1II} = 0$$

Dans les deux cas, il s'agit d'un contact *linéaire*.

4. Entre ces deux extrêmes, on trouve les contacts ponctuels dissymétriques.

Tenant compte du fait que $F(\rho)$ est toujours compris entre 0 et 1, il est de tradition d'introduire l'angle auxiliaire θ défini par

$$\cos \theta = F(\rho) \quad (6.8)$$

Il vaut $\pi/2$ pour un contact sphérique et 0 pour un contact linéaire.

6.3 Contacts ponctuels

6.3.1 Pression de Hertz, aire de contact, rapprochement

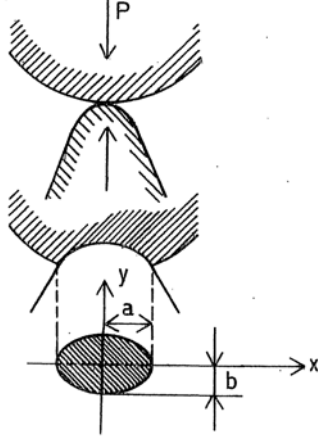


FIGURE 6.5 – Surface de contact

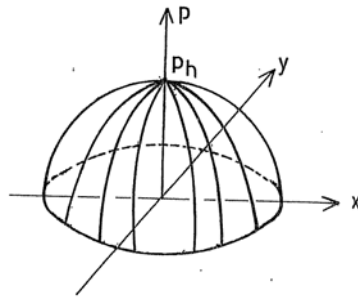


FIGURE 6.6 – Répartition des pressions de contact

La théorie des contacts ponctuels est due à Hertz [33]. L'effort P pressant les surfaces a pour effet d'établir une petite *surface de contact* dont la projection sur le plan tangent commun aux deux surfaces en contact est une ellipse de demi axes a et b , a étant par définition le plus grand des deux (fig. 6.5). Cette déformation fait naître un champ de pression de la forme

$$p = p_H \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (6.9)$$

représenté en figure 6.6. La pression maximale p_H est appelée *pression de Hertz*. On peut également calculer le rapprochement h des deux corps. Les grandeurs a , b , p_H et h dépendent de la charge, de la somme des courbures, de l'angle θ et d'un *module d'élasticité moyen* qui se calcule en fonction des modules de Young

E et des coefficients de Poisson ν des deux corps par la relation

$$\frac{2}{E_m} = \frac{1 - \nu_I^2}{E_I} + \frac{1 - \nu_{II}^2}{E_{II}} \quad (6.10)$$

La théorie complète du problème fait intervenir des intégrales elliptiques et sort largement du cadre du présent cours [22]. Mais on peut donner une expression des formules de Hertz à la fois simple et facile à retenir, en recourant à l'analyse dimensionnelle. Les données du problème ont les dimensions suivantes :

$$\begin{aligned} [P] &= F \\ [E_m] &= \frac{F}{L^2} \\ \left[\sum \rho \right] &= \frac{1}{L} \\ \theta &= 1 \end{aligned}$$

À part θ qui est sans dimension, il reste trois paramètres indépendants qui dépendent de deux unités, ce qui ne permet de définir qu'un seul autre nombre sans dimension, à savoir

$$\Pi = \frac{P (\sum \rho)^2}{E_m} \quad (6.11)$$

que nous appellerons *nombre de contact*. La théorie montre que a , b et p_H varient *dans la même proportion* avec la charge et comme

$$P \propto abp_H \propto \Pi$$

on a

$$a, b, p_H \propto \Pi^{1/3} \quad (6.12)$$

D'autre part, la géométrie du contact implique que h soit proportionnel à a^2 , ce qui donne

$$h \propto \Pi^{2/3} \quad (6.13)$$

Ceci posé, aux résultats a , b , h et p_h , on associera de façon tout à fait naturelle les nombres sans dimension $a \sum \rho$, $b \sum \rho$, $h \sum \rho$ et p_H/E_m . Ceci mène à écrire les formules de Hertz sans dimension suivantes :

$$\begin{aligned} a \sum \rho &= k_a(\theta) \Pi^{1/3} \\ b \sum \rho &= k_b(\theta) \Pi^{1/3} \\ \frac{p_H}{E_m} &= k_p(\theta) \Pi^{1/3} \\ h \sum \rho &= k_h(\theta) \Pi^{2/3} \end{aligned} \quad (6.14)$$

On trouvera, en pages CH2 et CH3 du *Mémento* des diagramme permettant de déterminer les coefficients k_a , k_b , k_p , k_h et l'angle θ en fonction du paramètre $e = \frac{b}{a}$.

6.3.2 Contraintes dimensionnantes

6.3.2.1 Cisaillement de Tresca

Si l'on adopte le critère de Tresca pour la déformation plastique, on cherchera le maximum τ_{st} du cisaillement équivalent

$$\tau_T = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

où σ_1 et σ_3 sont respectivement la plus grande et la plus petite des trois contraintes principales. Ce maximum ne se situe pas en surface, mais à une certaine profondeur

$$z_{st} = \zeta_{st} b \quad (6.15)$$

et sa valeur est (évidemment) proportionnelle à la pression de Hertz :

$$\tau_{st} = T_{st} p_H \quad (6.16)$$

Les deux facteurs T_{st} et ζ_{st} s'obtiennent à l'aide des courbes de la page CH4 du *Mémento*. Le critère de Tresca indique que la première plastification aura lieu pour

$$\tau_{st} = \frac{R_e}{2}$$

où R_e est la limite élastique. Or, en examinant le diagramme de T_{st} , on constate que l'on peut écrire sans grande erreur

$$T_{st} \approx \frac{1}{3} \quad (6.17)$$

quelle que soit l'excentricité du contact. On est donc conduit à la relation

$$p_{H,\text{lim. statique}} \approx \frac{3}{2} R_e \quad (6.18)$$

Une sécurité de 1,25 est largement suffisante. Du reste, en technique du roulement, on admet dans certains cas une légère déformation plastique.

6.3.2.2 Variation maximale du cisaillement dans le cas d'une charge défilante

Dans le cas fréquent où l'un des deux corps défile devant l'autre, par exemple en roulant, la contrainte de cisaillement de Tresca maximale vaut τ_{st} lorsque le second corps se trouve autour du point considéré et 0 s'il en est éloigné. La variation du cisaillement maximal en ce point vaut donc $T_{st} p_H$. Mais, comme l'illustre la figure 6.7, il existe, à une distance

$$z_0 = \zeta_0 b \quad (6.19)$$

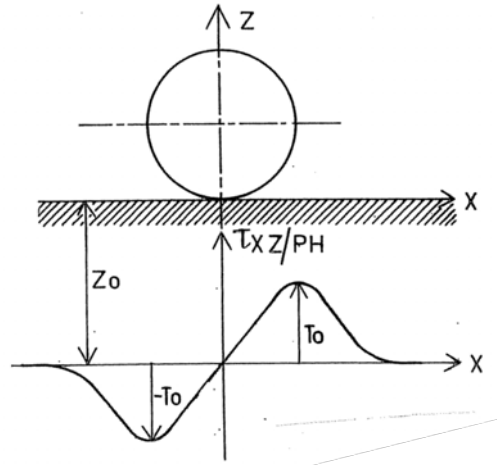
de la surface, une contrainte de cisaillement qui a une forme antisymétrique par rapport à la verticale au droit du contact. Lors du roulement, elle passe de $\tau_0 = T_0 p_H$ à $-\tau_0$, si bien que sa variation est

$$\Delta\tau = 2T_0 p_H \quad (6.20)$$

Or, comme le montrent les courbes de la page CH4 du *Mémento*, il se trouve que

$$2T_0 \geq T_{st} \quad (6.21)$$

ce qui pousse à admettre que *c'est cette variation qui est responsable de l'écaillage* [56, 54, 55, 37].

FIGURE 6.7 – Le diagramme alterné du cisaillement à une profondeur z_0 .

6.3.2.3 Pression spécifique

Certaines mesures technologiques relatives au contact d'une bille sur un autre corps sont fondées sur la notion de *pression spécifique* k définie par

$$k = \frac{P}{D^2} \quad (6.22)$$

où D est le diamètre de la bille. C'est notamment le cas des essais relatifs aux roulements à billes. Mais la limite élastique exprimée en termes de k *dépend des divergences*, car la vraie variable est p_H .

6.3.3 Limitations de pression pour les aciers à roulements

Les aciers à roulements sont des aciers trempés d'une dureté Vickers comprise entre 7500 et 8500 MPa¹. On les utilise bien sûr, comme leur nom l'indique, pour les roulements, mais également dans certaines applications comme les couteaux de balance où une déformation permanente fausserait la mesure. Dans le passé, Palmgren, Lundberg et Bratt [70, 69] ont proposé une étude de la déformation élastique fondée sur l'analyse dimensionnelle et en ont déduit une *capacité de charge statique* correspondant à une très petite déformation permanente. À l'heure actuelle, ces résultats sont contestés et la norme ISO14728-1 a introduit les limitations suivantes sur la pression de Hertz :

$$\begin{aligned} p_H &= 4200 \text{ MPa} \quad (\text{roulements à billes, sauf à rotule}) \\ &= 4600 \text{ MPa} \quad (\text{roulements à billes à rotule}) \end{aligned} \quad (6.23)$$

1. La dureté en surface ne suffit pas. Il faut encore que la courbe de dureté en fonction de la profondeur ne plonge pas trop vite, car en contact hertzien, les contraintes dimensionnantes se situent en sous-couche, comme nous l'avons vu.

6.4 Contacts linéaires

6.4.1 Résultats généraux

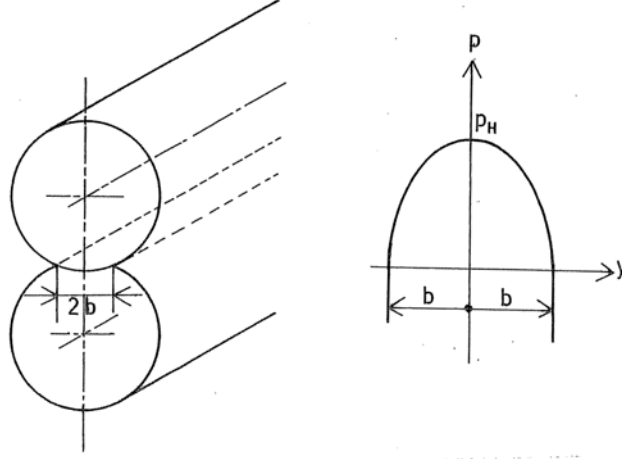


FIGURE 6.8 – Contact de deux cylindres

Considérons deux cylindres parfaits de longueur infinie pressés l'un sur l'autre, leurs axes étant parallèles (fig. 6.8). La sollicitation est définie par la *charge par unité de longueur* P' . Dans le cas pratique de cylindres de longueur ℓ_a (en principe grande), on a

$$P' = \frac{P}{\ell_a} \quad (6.24)$$

On obtient une distribution de pression parabolique sur une *bande de contact* de largeur b dépendant de la charge :

$$p = p_H \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (6.25)$$

De la même façon que pour le contact ponctuel, nous allons donner une présentation des résultats fondée sur un nombre sans dimension. Les données du problème sont la charge par unité de longueur P' , la somme des courbures $\sum \rho = \rho_I + \rho_2$ et le module de Young équivalent E_m . Leurs dimensions sont

$$\begin{aligned} [P'] &= \frac{F}{L} \\ [\sum \rho] &= \frac{1}{L} \\ [E_m] &= \frac{F}{L^2} \end{aligned}$$

ce qui conduit au nombre sans dimension

$$\Pi = \frac{P' \sum \rho}{E_m} \quad (6.26)$$

De la même manière qu'en contact ponctuel, la largeur de contact est proportionnelle à la pression de Hertz, et comme

$$\Pi \propto P' \propto bp_H$$

on a

$$b \propto \Pi^{1/2} \quad \text{et} \quad p_H \propto \Pi^{1/2} \quad (6.27)$$

Les formules exactes sont

$$b \sum \rho = \sqrt{\frac{8}{\pi} \Pi} \quad (6.28)$$

$$\frac{p_H}{E_m} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \Pi} \quad (6.29)$$

Pour le rapprochement h , la théorie se heurte à une difficulté. En effet, si les deux cylindres sont réellement de longueur infinie, le rapprochement n'a pas une valeur bornée. Dans le cas de corps de longueur finie, on peut calculer le rapprochement de l'axe d'un cylindre par rapport à un point éloigné de l'autre corps par la formule de Lundberg [56, 69]

$$h = 2,537 \frac{P^{0,9}}{E_m^{0,9} \ell_a^{0,8}} \quad (6.30)$$

Il est intéressant de noter que dans cette formule, *la divergence n'intervient pas*, ce qui est paradoxal. Par ailleurs, on notera que cette formule est dimensionnellement correcte, car

$$\begin{aligned} \frac{[P^{0,9}]}{[E_m^{0,9}][\ell_a^{0,8}]} &= \frac{F^{0,9}}{\left(\frac{F}{L^2}\right)^{0,9} L^{0,8}} \\ &= \frac{F^{0,9}}{\left(\frac{F^{0,9}}{L^{1,8}}\right) L^{0,8}} \\ &= L \end{aligned}$$

6.4.2 Contraintes

Les contraintes se calculent à partir de la pression de Hertz comme pour un contact ponctuel, avec une excentricité $e = 0$.

Dans le cas du contact linéaire entre un cylindre de diamètre D et un autre corps de diamètre plus grand, on appelle *pression spécifique* la grandeur

$$k = \frac{P'}{D} = \frac{P}{\ell_a D} \quad (6.31)$$

Il est d'usage, dans la littérature technique, de limiter cette pression spécifique, mais la limite doit être choisie en fonction des courbures, car c'est la pression de Hertz qui importe.

6.4.3 Limitation de pression pour les aciers à roulements

De même que dans le cas des contacts ponctuels, et avec les mêmes commentaires que dans la section 6.3.3, la limitation de pression hertzienne préconisée par la norme ISO 14728-1 pour les roulements à rouleaux est

$$p_H = 4000 MPa \quad (6.32)$$

6.5 Sollicitations dynamiques

Les sollicitations dynamiques se rencontrent chaque fois qu'il y a glissement ou roulement. On notera en particulier le cas des roulements à billes pour lesquels des études très approfondies ont été menées. L'expérience montre que la durée de vie est pratiquement toujours limitée et que la loi de la durée de vie N (nombre de cycles) en fonction de la charge P est de la forme

$$\frac{N}{N^*} = \left(\frac{P^*}{P} \right)^{\alpha_P} \quad (6.33)$$

où N^* est la durée de vie correspondant à une charge de référence arbitraire P^* . L'exposant α_P vaut 3 pour un contact ponctuel et 4 pour un contact linéaire. En termes des pressions de Hertz, cela se traduit par

$$\frac{N}{N^*} = \left(\frac{p_H^*}{p_H} \right)^{\alpha_H} \quad (6.34)$$

avec les exposants

$$\begin{aligned} \alpha_H &= 9 && \text{pour un contact ponctuel} \\ &= 8 && \text{pour un contact linéaire} \end{aligned} \quad (6.35)$$

En l'absence de renseignements expérimentaux, on peut admettre pour les aciers trempés les valeurs suivantes citées par Niemann [65, 81]

$$\begin{aligned} \text{Pour } N^* = 33Mc, \quad p_H &= 0,525 HB && \text{en contact ponctuel} \\ &= 0,3 HB && \text{en contact linéaire} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Ces relations sont valables en unités cohérentes pour p_H et HB .

Chapitre 7

Roulements

7.1 Constitution des roulements

À quelques exceptions près, les roulements sont constitués des éléments suivants :

- Des *éléments roulants*, billes, rouleaux ou aiguilles.
- Une *bague extérieure*, dans laquelle est creusée une piste pour guider les éléments roulants.
- Une *bague intérieure*, également creusée d'une piste.
- Une *cage*, destinée à maintenir entre les éléments roulants la distance voulue.

7.2 Principaux types de roulements

Il existe de très nombreux types de roulements, dont nous ne présenterons ici que les plus courants. Nous sommes redevable, pour les figures, à la société SKF-France.

7.2.1 Roulements rigides à billes

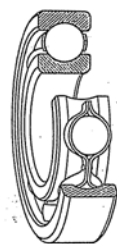


FIGURE 7.1 – Roulement rigide à billes.

La figure 7.1 représente un roulement rigide à billes. La conformité des pistes avec les billes est très forte dans la direction axiale ($r_{piste} \approx 0,52D_{bille}$). Ces roulements peuvent reprendre une charge radiale, une charge axiale modérée

et ont une certaine raideur vis-à-vis de l'inclinaison de l'arbre. L'inclinaison admissible est de $2'$ à $10'$. Pour assembler ce type de roulements, on excentre la bague intérieure, ce qui rend possible l'introduction des billes (fig. 7.2). On recentre alors le tout et on place la cage qui est composée de deux pièces qui, sur la figure 7.1, sont rivées. Très répandus, les roulements de ce type sont aussi les moins chers.

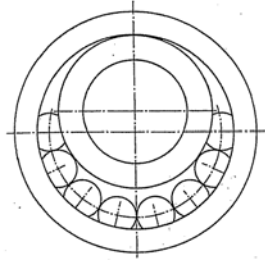


FIGURE 7.2 – Introduction des billes.

7.2.2 Roulements à billes à contact oblique

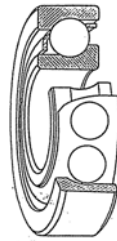


FIGURE 7.3 – Roulement à billes à contact oblique.

Les roulements à une rangée de billes à contact oblique (fig. 7.3) sont conçus pour reprendre la combinaison d'une charge radiale et d'une charge axiale. En l'absence d'une charge axiale suffisante, les deux bagues ont tendance à se séparer. Ces roulements sont donc toujours montés par paire.

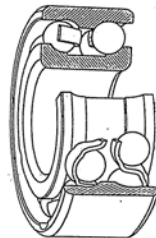


FIGURE 7.4 – Roulement à deux rangées de billes montées en O.

Certains roulements possèdent deux rangées de billes à contact oblique montées en O, expression que nous expliquerons plus loin (fig 7.4). Ils constituent un réel encastrement de l'arbre.

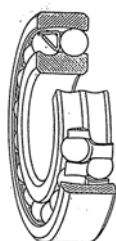


FIGURE 7.5 – Roulement à rotule à deux rangées de billes.

À l'inverse, si l'on place deux rangées de billes sur une piste extérieure sphérique, on obtient un roulement à rotule. Ce type de roulements permet une inclinaison de l'arbre de $1,5$ à 3° .

7.2.3 Roulements à rouleaux

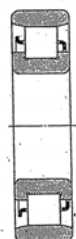


FIGURE 7.6 – Roulement à rouleaux cylindriques.

Les roulements à rouleaux supportent des charges plus grandes que les roulements à billes et ils sont en outre plus rigides. Ils ont le plus souvent une seule bague épaulée latéralement. Sur la figure 7.6, c'est la bague intérieure. Il est clair qu'un tel roulement est totalement incapable de reprendre une charge axiale. L'inclinaison admissible de l'arbre dans un tel roulement est de $2'$.

7.2.4 Roulements à rouleaux coniques

L'équivalent en roulements à rouleaux du roulement à billes à contact oblique est le roulement à rouleaux coniques (fig. 7.7). Il faut noter qu'ici, les efforts, normaux à deux génératrices opposées du rouleau, ont une résultante tendant à chasser le rouleau en direction de sa grande base. Il est donc impératif de disposer des épaulements sur une des deux bagues - en général, c'est la bague intérieure - et cela implique que la grande base frotte réellement sur l'épaulement. De la même façon que les roulements à billes à contact oblique, ces roulements se montent par paire, de manière à équilibrer les efforts axiaux.

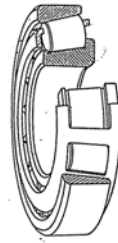


FIGURE 7.7 – Roulement à rouleaux coniques.

7.2.5 Roulements à rotule à rouleaux en forme de tonneau

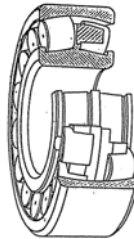


FIGURE 7.8 – Roulement à rotule à rouleaux en forme de tonneaux.

On peut obtenir un roulement à rotule avec deux rangées de rouleaux en forme de tonneau, la bague extérieure étant sphérique (fig. 7.8). Ce type de roulement a été développé par A. Palmgren, de la société SKF.

7.2.6 Roulements à aiguilles.

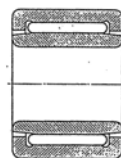


FIGURE 7.9 – Roulement à aiguilles

On appelle roulements à aiguilles des roulements ayant des rouleaux très minces comparables à des aiguilles (figure 7.9). Ces roulements ont des applications spécifiques, notamment les têtes de bielles des moteurs à deux temps. La raison de leur utilisation dans ce cas est que le mouvement pendulaire de la bielle induit des accélérations qui, avec de gros rouleaux, provoqueraient des forces d'inertie importantes, nuisibles à la cage.

7.2.7 Butées

On appelle butée un roulement destiné à reprendre une charge axiale. La figure 7.10 représente une butée à billes à simple effet, c'est-à-dire capable de

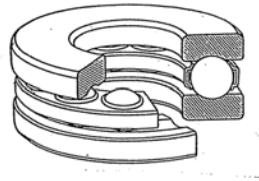


FIGURE 7.10 – Butée à simple effet.

reprendre des efforts axiaux dans un seul sens. la figure 7.11 représente une butée à double effet, c'est-à-dire capable de reprendre un effort axial dans les deux sens. Il existe également des butées à rouleaux.

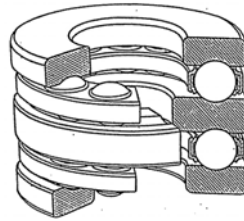


FIGURE 7.11 – Butée à double effet.

7.3 Fatigue des roulements

Considérons un roulement tournant sous une charge donnée de direction fixe. L'expérience montre qu'après un certain temps de fonctionnement (heureusement assez long si le roulement est bien dimensionné), le roulement commence à émettre un bruit caractéristique que l'on considère généralement comme le signe de sa défaillance. L'origine de ce bruit est le phénomène d'*écaillage*, dont voici la genèse. Les éléments roulants font supporter aux pistes des efforts répétés et, comme nous l'avons vu lors de l'étude du contact hertzien, cela provoque à une certaine profondeur un cisaillement alterné. À l'issue d'un certain nombre de cycles, il arrive qu'une fissure se forme en un point faible. Petit à petit, cette fissure se propage jusqu'à la surface et on assiste à la formation d'une écaille qui se détache, laissant sur la piste un cratère. Les éléments roulants, en passant sur ce cratère, subissent des accélérations qui sont à l'origine du bruit dont nous avons parlé (fig. 7.12).

Le phénomène d'écaillage est *inévitabile* et se produit d'autant plus vite que la charge est plus élevée. Les roulements ont donc une durée de vie *finie*, que l'on note L , et qui se compte en nombre de cycles, c'est-à-dire en nombre de tours de l'arbre. Malheureusement, ce nombre de cycles avant écaillage sous une charge donnée est *très dispersé*, ce qui complique l'analyse. Des études statistiques ont été menées de longue date par les constructeurs de roulements et elles ont conduit à une courbe de probabilité de survie dont la forme est représentée en figure 7.13.

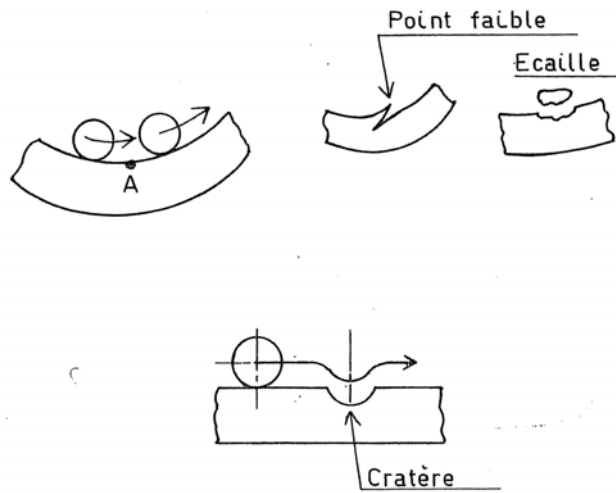


FIGURE 7.12 – L'écaillage et ses conséquences.

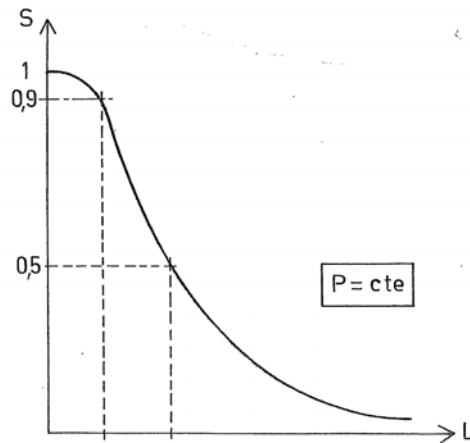


FIGURE 7.13 – Probabilité de survie des roulements.

Il est d'usage de noter L_{10} la durée de vie correspondant à 10% de défaillances (soit une fiabilité de 90%), L_{50} la durée de vie correspondant à 50 % de défaillances, et, en général, $L_{d\%}$ la durée de vie correspondant à un pourcentage de défaut $d\% = 100(1 - S)$. On constate que

$$L_{50} \approx 5,25L_{10} \quad (7.1)$$

La fiabilité de référence S^* généralement adoptée par les constructeurs est de 90%. Il y correspond la *durée de vie nominale* L (on omet l'indice 10). Pour les autres fiabilités, les travaux les plus récents [11, 5, 6] ont conduit à la formule suivante :

$$\frac{\ln S}{\ln 0,9} = \left(\frac{L_{d\%} - L_0}{L - L_0} \right)^e \quad (\text{loi de Weibull}) \quad (7.2)$$

où L_0 est la durée de vie atteinte par tous les paliers ($L_0 \approx 0,05L$), et e , un exposant de dispersion, mesurant la vitesse d'endommagement du matériau. On peut adopter la valeur $e = 1,11$ pour tous les types de roulements. Cette loi donne les résultats suivants :

S	$d\%$	$L_{d\%}/L$
0,2	80	11,1
0,5	50	5,23
0,8	20	1,92
0,9	10	1
0,95	5	0,547
0,98	2	0,265
0,99	1	0,165
0,995	0,5	0,111
0,998	0,2	0,077
0,999	0,1	0,064
1	0	0,05

À titre d'illustration, considérons un roulement qui supporte un arbre tournant à une fréquence de rotation $N = 3000$ tr/min et supposons qu'on en attende un temps de vie $T = 10000$ h¹ avec une fiabilité exceptionnelle de 99,9%. Cela revient à dire que

$$L_{0,1} = TN = (10000 \times 60) \cdot 3000 = 1,8 \cdot 10^9 \text{ cycles}$$

En se référant au tableau ci-dessus, il faudra donc calculer le palier pour une durée de vie nominale

$$L = \frac{L_{0,1}}{0,064} = 28,13 \cdot 10^9 \text{ cycles}$$

7.4 Relation entre la charge et la durée de vie

Les essais ont montré que la relation entre la charge P appliquée au roulement et sa durée de vie nominale L peut s'écrire

$$\frac{L}{L^*} = \left(\frac{C}{P} \right)^p \quad (7.3)$$

où $L^* = 10^6$ cycles, et C est la *capacité de charge dynamique du roulement*. C'est par définition la charge pour laquelle la durée de vie nominale égale L^* . L'exposant p vaut

$$p = \left\{ \begin{array}{ll} 3 & \text{pour les roulements à billes} \\ \frac{10}{3} & \text{pour les roulements à rouleaux} \end{array} \right\} \quad (7.4)$$

Le lecteur intéressé aux essais et simplifications qui ont présidé au choix de ces deux exposants pourra consulter les articles [67, 54, 56].

1. On notera que les fabricants de roulements notent L_h la durée de vie exprimée en heures et non en nombre de tours. Nous préférons, pour éviter toute confusion, parler de *temps de vie* et utiliser la notation T .

7.5 Comportement des roulements sous une charge de direction quelconque

Dans la section précédente, nous avons parlé de la charge sans en préciser la direction. Or, un roulement peut en général être soumis à une charge radiale F_r et une charge axiale F_a , comme le montre la figure 7.14. Que vaut alors la

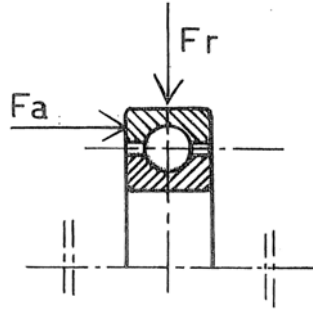


FIGURE 7.14 – Charge radiale F_r et charge axiale F_a .

charge P à prendre en considération dans la formule (7.3)? La réponse à cette question nécessite deux étapes.

7.5.1 Direction de référence de la charge

On associe d'abord à chaque type de roulement une *direction de référence* qui est utilisée lors des essais.

- Pour les *roulements rigides à billes*, la charge de référence P est radiale, ce qui est assez naturel.
- Pour les *butées*, la charge de référence P est axiale, ce qui est tout aussi naturel.
- Pour les *roulements à billes à contact oblique* et les *roulements à rouleaux coniques*, le choix de la direction de référence est moins évident. En effet,

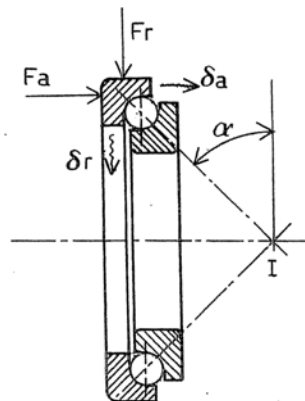


FIGURE 7.15 – Ligne de pression dans un roulement à contact oblique.

l'effort siégeant dans un élément roulant dépend de son déplacement de compression élastique dans la direction de contact (ligne de pression), mesuré sur l'élément supérieur de la figure 7.15 par

$$\delta = \delta_r \cos \alpha + \delta_a \sin \alpha \quad (7.5)$$

où δ_r et δ_a sont les rapprochements des deux bagues dans la direction radiale et la direction axiale respectivement, et α est l'angle de contact. Il ne peut y avoir d'effort que si δ est positif, soit si

$$\delta_a \sin \alpha > -\delta_r \cos \alpha \quad (7.6)$$

Plus précisément, la loi de comportement des roulements à contact oblique (à billes ou à rouleaux) admet la représentation approximative donnée par la figure 7.16². En particulier,

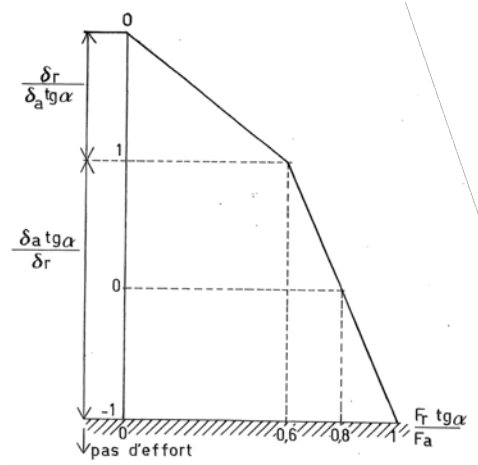


FIGURE 7.16 – Loi approximative de comportement des roulements à contact oblique (à billes ou à rouleaux).

$$\frac{\delta_a \operatorname{tg} \alpha}{\delta_r} = 0$$

c'est-à-dire que *le déplacement relatif des deux bagues est purement radial* pour

$$\frac{F_r \operatorname{tg} \alpha}{F_a} = 0,8$$

soit

$$F_a = 1,25 F_r \operatorname{tg} \alpha \quad (7.7)$$

C'est ce cas de charge qui sert de référence : pour un roulement à contact oblique, *la charge de référence est la composante radiale de la charge donnant un déplacement relatif des deux bagues purement radial*. Le chargement de référence est donc de la forme

$$(F_r, F_a) = (P, 1,25 P \operatorname{tg} \alpha) \quad (7.8)$$

2. Dans cette figure, la variable en ordonnée s'inverse à l'ordonnée $(\delta_a \operatorname{tg} \alpha / \delta_r = 1$, ce qui permet d'éviter un diagramme s'étendant jusqu'à l'infini.

7.5.2 Charge dynamique équivalente

Ceci posé, on dit que deux systèmes de charge (F_{r_1}, F_{a_1}) et (F_{r_2}, F_{a_2}) d'un roulement sont *équivalents* s'ils mènent à la même durée de vie. Dans chaque classe d'équivalence de charges, il en existe une qui a la direction de référence. La charge P correspondante est appelée *charge dynamique équivalente*. Le calcul de celle-ci pour un roulement peut être fait avec une bonne approximation à l'aide de lois approchées constituées de deux segments de droite de la forme

$$P = XF_r + YF_a \quad (7.9)$$

dont on trouve les coefficients dans les catalogues des constructeurs. À l'heure actuelle, ce calcul est normalisé sur base des travaux fondamentaux de Palmgren et Lundberg [5, 6, 67, 54, 56].

7.6 Comportement sous une charge dépendant du temps

Dans de nombreuses applications, la charge n'est pas constante. Soit par exemple [27] un roulement à billes de capacité dynamique égale à 45000 N, monté dans une boîte de vitesses d'automobile, et devant fonctionner dans les conditions suivantes³ :

Vitesse enclenchée	1	2	3
x = fraction du temps d'utilisation	0,1	0,1	0,8
Fréquence de rotation N /(tr/min)	750	1050	1500
Charge équivalente P /Newton	10260	7840	5780

Quel temps de vie T atteindra ce roulement ?

La réponse à ce genre de problèmes est fondée sur le principe du dommage cumulatif qui, du reste, a été introduit par Palmgren dans ce cadre précis en 1924 [66]. De ce principe résulte l'introduction de ce que nous appellerons la charge *biéquivalente*⁴.

7.6.1 Charge biéquivalente

Supposons que le palier soit soumis à n cycles qui se décomposent en n_1 cycles sous la charge équivalente P_1 , n_2 cycles sous la charge P_2 , etc. Sous la charge P_k , à laquelle correspond la durée de vie L_k , il subit un dommage

$$\mathcal{D}_k = \frac{n_k}{L_k}$$

qui, en vertu de la loi de durée de vie (7.3), s'écrit encore

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_k &= \frac{n_k}{L^*} \frac{P_k^p}{C^p} \\ &= \frac{n}{L^*} \frac{1}{C^p} \frac{n_k}{n} P_k^p \end{aligned}$$

3. Le spectre de charge est ici extrêmement simplifié.

4. Nous introduisons ce néologisme pour exprimer qu'il s'agit d'une valeur équivalente de la charge équivalente définie plus haut.

Le dommage total après les n cycles vaut donc

$$\mathcal{D} = \sum_k \mathcal{D}_k = \frac{n}{L^*} \frac{1}{C^p} \sum_k \frac{n_k}{n} P_k^p$$

ce qui, en introduisant la *charge biéquivalente*

$$P_{\text{éq}} = \sqrt[p]{\sum_k \frac{n_k}{n} P_k^p} \quad (7.10)$$

donne

$$\mathcal{D} = \frac{n}{L^*} \left(\frac{P_{\text{éq}}}{C} \right)^p \quad (7.11)$$

La durée de vie L , comptée en nombre total de cycles n , correspond alors à un dommage unitaire, ce qui conduit à la relation

$$\frac{L}{L^*} = \left(\frac{C}{P_{\text{éq}}} \right)^p \quad (7.12)$$

qui a la même forme que (7.3).

7.6.2 Application au problème posé

Appliquons cette notion à notre problème. On peut admettre qu'après un temps raisonnablement long, les fractions de temps d'utilisation sont stabilisées, ce qui rend les rapports n_k/n de la formule (7.10) à peu près invariants. Sur le temps de vie, on aura fait dans la vitesse k un nombre de cycles égal à

$$n_k = x_k N_k T$$

et un nombre total de cycles égal à

$$n = \sum_k n_k = \left(\sum_k x_k N_k \right) T = \bar{N} T$$

en notant $\bar{N}$ la fréquence de rotation moyenne

$$\bar{N} = \sum_k x_k N_k \quad (7.13)$$

Il en résulte que la formule (7.10) se transforme en

$$P_{\text{éq}} = \sqrt[p]{\sum_k \frac{x_k N_k}{\bar{N}} P_k^p} \quad (7.14)$$

La durée de vie se calcule alors par la formule (7.12) et on en déduit le temps de vie par

$$T = \frac{L}{\bar{N}} \quad (7.15)$$

Effectuons le calcul. On a

$$\bar{N} = x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 = 0,1 \cdot 750 + 0,1 \cdot 1050 + 0,8 \cdot 1500 = 1380 \text{tr/min}$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}\frac{x_1 N_1}{\bar{N}} &= \frac{0,1 \cdot 750}{1380} = 0,05435 \\ \frac{x_2 N_2}{\bar{N}} &= \frac{0,1 \cdot 1050}{1380} = 0,07609 \\ \frac{x_3 N_3}{\bar{N}} &= \frac{0,8 \cdot 1500}{1380} = 0,8696\end{aligned}$$

On vérifie, à titre de preuve, que la somme de ces coefficients vaut l'unité. L'application de la formule (7.14) donne alors

$$P_{\text{éq}} = \sqrt[3]{0,05435 \cdot (10260)^3 + 0,07609 \cdot (7840)^3 + 0,8696 \cdot (5780)^3} = 6409N$$

La durée de vie en cycles est donc

$$L = \left(\frac{C}{P}\right)^3 L^* = \left(\frac{40500}{6409}\right)^3 \cdot 10^6 = 252,3 \cdot 10^6 \text{ cycles}$$

Il y correspond un temps de vie

$$T = \frac{L}{\bar{N}} = \frac{252,3 \cdot 10^6}{1380} = 182,9 \cdot 10^3 \text{ min} = 3048h$$

7.6.3 Problème inverse

Le problème inverse, qui est celui de la conception, consiste à trouver la capacité dynamique nécessaire pour obtenir un temps de vie donné. Dans ce cas, on calcule comme ci-dessus la fréquence de rotation moyenne et la charge biéquivalente, on obtient la durée de vie par

$$L = \bar{N}T$$

et la capacité de charge dynamique nécessaire s'en déduit par

$$C = P_{\text{éq}} \left(\frac{L}{L^*}\right)^{1/p} \quad (7.16)$$

7.6.4 Cas d'une charge équivalente variant de manière continue lors d'un cycle

Soit une charge équivalente variant selon un cycle de paramètre $\theta \in]0, 2\pi[$, pour fixer les idées. Alors, la charge biéquivalente est donnée par

$$P_{\text{éq}} = \sqrt[p]{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P^p(\theta) d\theta} \quad (7.17)$$

7.7 Choix de la durée de vie

La durée de vie peut être fixée par le cahier des charges. À défaut, on peut s'inspirer du tableau indicatif suivant :

Type d'appareil	Temps de vie en heures
Appareil d'usage restreint : démonstration, mesures, portes	50...1000
Usage intermittent : outil manuel, appareil ménager, appareil de levage	2000...10000
Fonctionne 8h/jour	10000...30000
Fonctionne 24h/jour	30000...100000

On notera que la considération de l'*usure*, qui sera traitée plus loin (section 7.11), définit implicitement des durées de vie.

7.8 Calcul statique des roulements

7.8.1 Capacité de charge statique

Lorsqu'un roulement tourne peu, la durée de vie qu'on en attend est faible, si bien que le calcul à la fatigue donne une charge admissible

$$P = C \left(\frac{L^*}{L} \right)^p \gg$$

Mais il est bien évident qu'une charge trop importante peut mener à des déformations permanentes sous forme d'empreintes sur les pistes, un peu comme dans un essai Brinell. Ces détériorations

- nuisent à la précision du guidage (l'arbre ne tourne plus rond) ;
- sont à l'origine d'un fonctionnement bruyant du roulement.

Dans cette optique, on définit la *capacité de charge statique* C_0 , correspondant à l'heure actuelle à une valeur maximale de la contrainte de Hertz, avec la condition supplémentaire que la déformation plastique du contact n'excède pas le dix-millième du diamètre d'un élément roulant. La charge statique P_0 est alors limitée en fonction du choix d'un coefficient de sécurité s_0 , c'est-à-dire que l'on admet la valeur

$$P_0 = \frac{C_0}{s_0} \quad (7.18)$$

Il faut bien se rendre compte que la capacité de charge statique n'est nullement définie par la ruine du roulement, si bien que le coefficient de sécurité s_0 ne doit pas nécessairement être supérieur à l'unité.

- Dans les applications où le silence de fonctionnement est hautement nécessaire, comme dans les appareils médicaux d'hôpital, on posera normalement $s_0 = 2$.
- De même, dans les machines-outils, qui nécessitent pour bien fonctionner une grande précision de rotation, on posera également $s_0 = 2$.
- En revanche, si le silence du roulement importe peu, comme par exemple dans les engins de chantier de génie civil, on pourra poser $s_0 = 1/2$.
- De même, lorsqu'on veut gagner coûte que coûte du poids, comme en aviation, on pourra également poser $s_0 = 1/2$.

7.8.2 Charge statique équivalente

De la même façon que pour la charge dynamique, on traite le cas d'une sollicitation quelconque à l'aide d'une *charge statique équivalente* qui se calcule par deux lois affines de la forme

$$P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a \quad (7.19)$$

Le coefficients X_0 et Y_0 sont donnés dans les catalogues des constructeurs. On prendra note du fait qu'ils ne sont pas égaux aux coefficients X et Y servant à calculer la charge dynamique équivalente.

7.9 Calcul des charges dans le cas de deux roulements à contact oblique (à billes ou à rouleaux) montés en opposition

7.9.1 Montage en X et montage en O

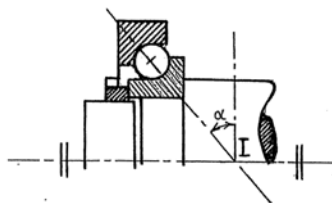


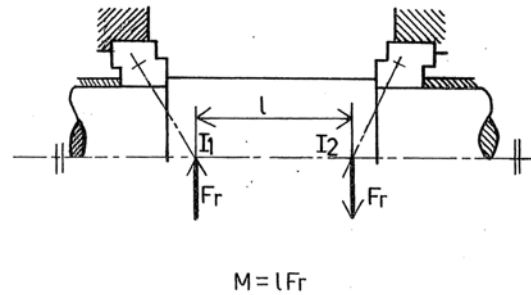
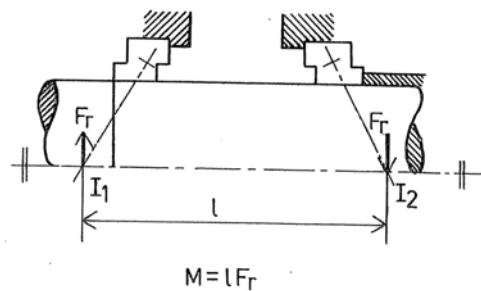
FIGURE 7.17 – Centre de pression d'un roulement à contact oblique.

La résultante des efforts des différents éléments roulants d'un roulement à contact oblique passe par le *centre de pression I* (fig. 7.17) et ne peut exister que si

$$F_a \geq F_r \operatorname{tg} \alpha \quad (7.20)$$

α étant l'angle de contact. Pour pouvoir reprendre des efforts axiaux dans les deux sens, on monte *deux roulements en opposition*. Deux montages sont possibles : en *X* ou en *O*.

- Le montage en *X* (fig. 7.18) est caractérisé par le fait que les centres de pression sont situés entre les deux roulements. Les lignes de contact tracées de part et d'autre de l'axe dessinent alors une figure qui suggère la lettre *X*, d'où le nom de ce montage. Les charges radiales, qui passent par les centres de pression, sont donc plus rapprochées que les roulements eux-mêmes, ce qui diminue le moment que peut reprendre le système. À la limite, pour une distance ℓ nulle entre les centres de pression, on obtient une rotule (du moins, au premier ordre).
- Dans le montage en *O* (fig. 7.19), les centres de pression sont situés à l'extérieur des roulements. Les lignes de contact tracées de part et d'autre de l'axe dessinent alors une figure qui suggère la lettre *O*. Les centres de pression sont alors plus éloignés que les roulements, ce qui augmente le moment que peut reprendre le système. Même si les roulements sont accolés, la distance ℓ des centres de pression est positive.

FIGURE 7.18 – Montage en *X*FIGURE 7.19 – Montage en *O*

On utilise le montage en *X* lorsque le moment à reprendre est petit ou que la distance entre les paliers est grande. Pour des raisons de facilité de montage, on le préfère lorsque c'est l'arbre qui tourne. Le montage en *O* s'utilise dans tous les cas où des paliers très proches doivent reprendre un grand moment. Le cas typique est la roue de véhicule. Du reste, on préfère le montage en *O* lorsque c'est le moyeu qui tourne sur un axe fixe, car le montage est plus aisé.

On notera encore que le montage en *O* permet, sans efforts supplémentaires, une dilatation de l'arbre plus grande que celle du bâti, ce qui n'est pas le cas du montage en *X*. Ce dernier permet par contre un raccourcissement relatif de l'arbre par rapport au bâti.

7.9.2 Répartition des charges axiales

7.9.2.1 Exposé du problème

Dans ces deux montages, le calcul de la charge revenant à chaque roulement est délicat : une charge radiale sur le roulement 1 a tendance à séparer ses deux bagues. Mais ce mouvement est empêché par le roulement 2. Il en résulte une charge axiale mutuelle dont le calcul relève de l'hyperstatique (non linéaire). Le même problème subsiste lorsqu'une charge axiale K_a est appliquée à l'ensemble.

Pour écrire les relations de manière unique, nous conviendrons d'appeler *roulement 1* celui que la charge axiale K_a tend à surcharger et *roulement 2* celui que cette charge a tendance à décharger. Ainsi (fig. 7.20), la charge axiale du

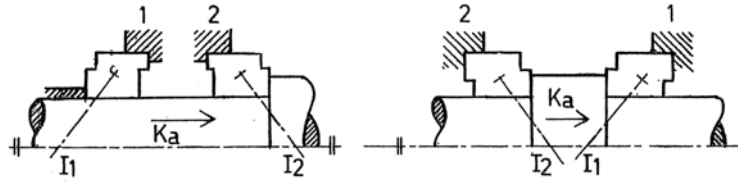


FIGURE 7.20 – Définition des roulements 1 et 2

roulement 2 s'ajoute à K_a pour donner la charge axiale du roulement 1 :

$$K_a = F_{a1} - F_{a2} \quad (7.21)$$

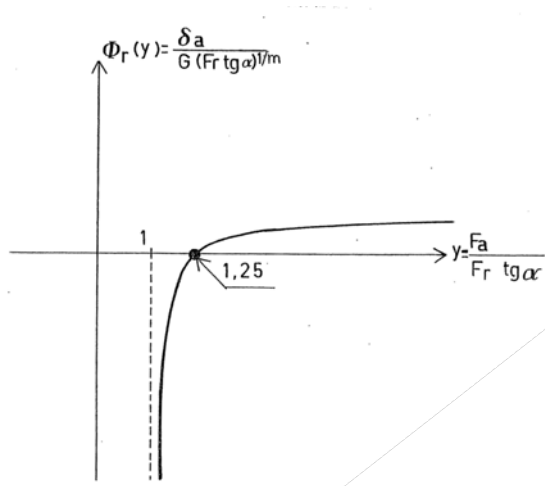
Mais cette relation d'équilibre ne suffit pas à déterminer F_{a1} et F_{a2} et il faut faire intervenir les lois liant les déplacements relatifs des bagues de roulements à leur charge. En notant δ_a le déplacement axial relatif des bagues d'un roulement dans le sens de la compression, on peut écrire [16]

$$\delta_a = G (F_r \operatorname{tg} \alpha)^{1/m} \Phi_r(y) \quad (7.22)$$

où G est une constante du roulement, m , un exposant valant 1,5 pour les roulements à billes et 1,1 pour les roulements à rouleaux, y , un facteur de direction de charge donné par

$$y = \frac{F_a}{F_r \operatorname{tg} \alpha} \quad (7.23)$$

et Φ_r , une fonction ayant l'allure représentée en figure 7.21.

FIGURE 7.21 – Allure de la fonction Φ_r

En l'absence de serrage initial, on a $\delta_{a1} = -\delta_{a2}$ car les deux roulement sont rigidement liés à l'arbre et au bâti. Dès lors, un des deux roulement a un déplacement axial positif et l'autre, un déplacement axial négatif. Comme le montre la figure 7.21, cela implique la relation

$$\Phi_r(y_1) \cdot \Phi_r(y_2) < 0$$

Mais il y a plus : si la fonction Φ_r est négative, cela implique que son argument y a une valeur comprise entre 1 et 1,25. On peut donc affirmer qu'un des deux roulements fonctionne entre $y = 1$ et $y = 1,25$ et que l'autre roulement fonctionne avec une valeur de y supérieure à 1,25.

7.9.2.2 Méthode du maître et de l'esclave

Il est d'usage de simplifier le problème en admettant que le roulement ayant la plus petite valeur de y fonctionne en $y = 1,25$. Cette procédure *exagère* un peu les charges axiales sur les roulements. Nous dirons par convention que ce roulement fonctionnant en $y = 1,25$ (ce qui signifie $F_a = 1,25F_r \operatorname{tg} \alpha$) est *le maître* et que l'autre, que nous appellerons *l'esclave*, prend le reste de la charge axiale de manière à vérifier l'équilibre. Le maître peut être le roulement 1 ou le roulement 2, ce qui signifie que deux schémas de calcul sont possibles :

- **Schéma 1** : *Le roulement 1 est le maître.*

Alors,

$$\begin{aligned} F_{a1} &= 1,25F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1 \\ F_{a2} &= F_{a1} - K_a \end{aligned} \quad (7.24)$$

Ce schéma est *en échec* si $F_{a2} < 1,25F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2$. Dans ce cas, il faut adopter le schéma 2.

- **Schéma 2** : *Le roulement 2 est le maître.*

Alors,

$$\begin{aligned} F_{a2} &= 1,25F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2 \\ F_{a1} &= F_{a2} + K_a \end{aligned} \quad (7.25)$$

Ce schéma est *en échec* si $F_{a1} < F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1$. Dans ce cas, il faut adopter le schéma 1.

La procédure la plus simple et la plus facile à retenir est d'essayer l'un des deux schémas et, en cas d'échec, d'adopter l'autre. Les constructeurs de roulements présentent le calcul de manière déterministe en définissant trois cas [5, 6]. C'est strictement équivalent, mais plus compliqué et plus difficile à retenir.

7.9.2.3 Cohérence de la méthode

Mais ceci pose une question de cohérence. En effet, est-on sûr qu'il ne soit pas possible que *les deux* schémas soient en échec ? Nous allons montrer que l'échec d'un quelconque des deux schémas implique la réussite de l'autre.

- a) Supposons d'abord le schéma 1 en échec. Cela signifie que si l'on pose $F_{a1} = 1,25F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1$, on obtient

$$F_{a2} = F_{a1} - K_a = 1,25F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1 - K_a < 1,25F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2$$

et que, par conséquent,

$$K_a > 1,25F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1 - 1,25F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2$$

Mais alors, dans le schéma 2, où l'on pose $F_{a2} = 1,25F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2$, le calcul de F_{a1} donne

$$\begin{aligned} F_{a1} &= F_{a2} + K_a \\ &> 1,25F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2 + (1,25F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1 - 1,25F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2) = 1,25F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1 \end{aligned}$$

donc le schéma 2 n'est pas en échec.

- b) Supposons à présent le schéma 2 en échec, ce qui revient à dire que si l'on pose $F_{a2} = 1,25F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2$, on obtient

$$F_{a1} = F_{a2} + K_a = 1,25F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2 + K_a < 1,25F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1$$

et que, par conséquent,

$$K_a < 1,25F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1 - 1,25F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2$$

Mais alors, dans le schéma 1, où l'on pose $F_{a1} = 1,25F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1$, le calcul de F_{a2} donne

$$\begin{aligned} F_{a2} &= F_{a1} - K_a \\ &> 1,25F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1 - (1,25F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1 - 1,25F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2) = 1,25F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2 \end{aligned}$$

donc le schéma 1 n'est pas en échec.

Finissons par noter que les deux schémas ne sont simultanément valables que si

$$K_a = F_{a1} - F_{a2} = 1,25F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1 - 1,25F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2$$

7.9.3 Identification des angles de contact

En pratique, les angles de contact ne sont pas indiqués explicitement dans les catalogues. Mais on peut les connaître à partir des lois pratiques de calcul de la charge dynamique qui sont de la forme

$$P = \begin{cases} F_r & \text{si } \frac{F_a}{F_r} \leq e \\ XF_r + YF_a & \text{si } \frac{F_a}{F_r} > e \end{cases} \quad (7.26)$$

Dans le cas des roulements à billes à contact oblique, on a

$$1,25 \operatorname{tg} \alpha = e \quad (7.27)$$

et dans le cas des roulements à rouleaux coniques,

$$1,25 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2Y} \quad (7.28)$$

7.9.4 Serrage initial

Pour être rigoureux, l'état calculé par la procédure du maître et de l'esclave correspond à un certain serrage (il faut entendre par là un rapprochement des deux paliers sous l'effet d'un écrou serré d'un côté). Ce serrage, que nous noterons Δ , est donné par

$$\Delta = G_1 (F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1)^{1/m} \Phi_r(y_1) + G_2 (F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2)^{1/m} \Phi_r(y_2) \quad (7.29)$$

On trouvera toutes les données nécessaires à son calcul dans le *Mémento*, pages R3 et suivantes. La précharge correspondante vaut

$$F_{a0} = \left(\frac{\Delta}{G_1 + G_2} \right)^m \quad (7.30)$$

On peut du reste modifier cette précharge, soit pour obtenir une durée de vie maximale de *l'ensemble des deux roulements*, soit pour raidir le guidage de l'arbre. Cette question est discutée dans la référence [16], dont les résultats principaux sont repris dans le *Mémento*.

7.10 Ajustement des roulements sur l'arbre et au niveau du logement

7.10.1 Roulage

Les ajustements à pratiquer pour les deux bagues du roulement diffèrent selon que ces bagues tournent ou non par rapport à la charge. Examinons quelques exemples.

- Soit d'abord un arbre tournant soumis à une charge fixe dans l'espace. Dans ce cas, la bague intérieure du roulement tourne par rapport à la charge et sa bague extérieure est fixe par rapport à la charge.
- Soit à présent une roue folle sur un axe fixe et soumise à une charge fixe dans l'espace. Ici, la bague extérieure du roulement tourne par rapport à la charge et sa bague intérieure est fixe par rapport à la charge.
- Soit un arbre tournant qui porte un rotor excentré. Le poids du rotor est fixe dans l'espace, mais le balourd tourne avec l'arbre. Il en résulte que la charge tourne par rapport aux deux bagues des roulements.

La règle fondamentale est la suivante : *une bague qui tourne par rapport à la charge doit être montée serrée*. Par contre, une bague fixe par rapport à la charge peut très bien être montée avec jeu.

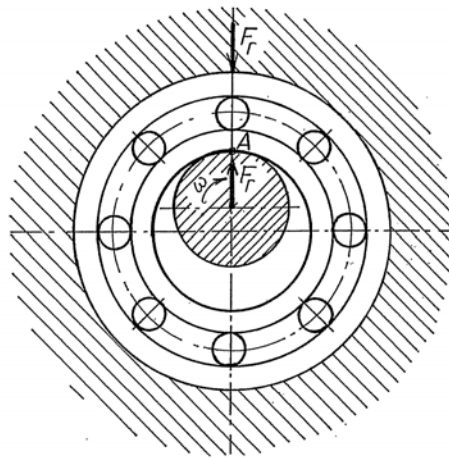


FIGURE 7.22 – Phénomène de roulage

Pourquoi cette règle ? Imaginons un arbre tournant par rapport à la charge radiale et supposons que la bague intérieure du roulement ait du jeu. Comme le montre la figure 7.22, le contact se fait au seul point *A*. Si la force radiale F_r est suffisante, la bague va *rouler* sur l'arbre. Ce roulage forcé, bien qu'il n'entraîne pas de glissement macroscopique des surfaces, entraîne cependant

une usure rapide de l'arbre et de la bague parce que la surface de contact est un peu aplatie et qu'il en résulte des *microglissements*. Du reste, un glissement plus franc peut se produire lors d'accéléérations. Ce phénomène est connu sous le nom de *roulage* (on dit aussi *laminage*) et le seul moyen de l'éviter est de recourir à un ajustement serré. On trouvera en page R10 du *Mémento* des indications sur les ajustements à choisir. Il en existe d'ailleurs dans les catalogues des constructeurs⁵. Le même phénomène se produit sur la bague extérieure lorsqu'elle tourne par rapport à la charge.

Notons encore que les roulements sont conçus pour qu'avec *une* bague serrée, le jeu interne soit approximativement nul. Lorsque les deux bagues sont serrées, il faut commander des roulements avec un jeu plus grand que le jeu normal [32].

7.10.2 Roulement fixe et roulement libre

Dans le montage classique d'un arbre sur deux roulements rigides à billes, avec une charge fixe dans l'espace, on fixe axialement à l'aide d'un serrage latéral la bague extérieure d'un seul des deux roulements, de manière à laisser libre la dilatation thermique de l'arbre.

7.11 Usure des roulements

Outre la fatigue, il existe un autre facteur qui limite la durée d'utilisation satisfaisante d'un roulement : c'est l'usure.

7.11.1 Généralités

L'usure peut être causée par différents facteurs, comme la présence de corps étrangers, une lubrification insuffisante, une corrosion par l'eau de condensation. Les facteurs influençant l'usure sont les conditions de fonctionnement, l'ambiance et l'efficacité des dispositifs d'étanchéité et de graissage. Les conséquences de l'usure sont une augmentation de la rugosité à l'intérieur du roulement, une augmentation du jeu interne, une augmentation du bruit de fonctionnement, une baisse de la précision du guidage en rotation. Il peut en résulter des engrenements défectueux, des balourds et une surcharge du palier.

7.11.2 Données expérimentales

Des essais ont été réalisés par Eschmann [25] sur 100000 paliers. Cet auteur définit d'abord un *jeu optimal* e_0 du roulement, qui dépend de son diamètre par la relation

$$\frac{e_0}{\mu m} \approx 0,46 \left(\frac{d}{mm} \right)^{0,67} \quad (7.31)$$

Il définit en suite un *facteur d'usure* f_V ⁶ par

$$f_V = \frac{V}{e_0} \quad (7.32)$$

5. Ceci fait appel aux notions sur les tolérances et ajustements exposés dans le chapitre suivant.

6. L'indice V signifie *Verschleiß*, usure en allemand.

où V est l'augmentation du jeu radial par usure. Ce facteur d'usure dépend du temps d'utilisation du roulement et de ses conditions de fonctionnement. Deux courbes fondamentales ont été tracées à partir des expériences :

- La courbe A , qui correspond à une usure minimale, c'est-à-dire aux conditions les plus favorables.
- La courbe B , qui correspond à une usure maximale, c'est-à-dire aux conditions les plus sévères.

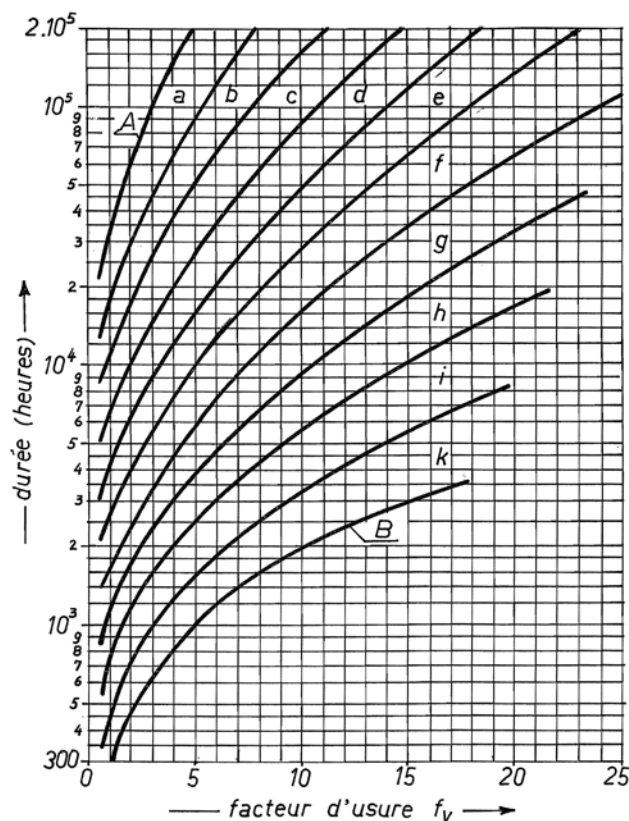


FIGURE 7.23 – Courbes d'usure d'Eschmann [25]

En outre, dix plages intermédiaires ont été définies, pour représenter les conditions courantes (fig. 7.23). Enfin, il a été établi un tableau des plages et des facteurs d'usure admissibles pour un grand nombre d'applications (voir *Mémento*, pages R12 et R13). En portant sur le diagramme de la figure 7.23 la valeur admissible f_v et la plage assignées par le tableau, on obtient une valeur de la durée de vie du roulement dans des conditions acceptables de précision. Ainsi, pour les roues avant d'un véhicule automobile, le tableau donne une valeur admissible de f_v comprise entre 4 et 8, et spécifie que le fonctionnement se situe dans les plages h à i . Cela donne une durée de vie comprise entre 1600 et 4500 h environ (en se plaçant sur la frontière des deux plages).

Chapitre 8

Tolérances dimensionnelles

8.1 Raison d'être des tolérances

En fabrication unitaire - ce qui reste le cas de la mécanique lourde - il arrive que des pièces à assembler soient *appariées*, c'est-à-dire qu'on réalise la seconde pièce en fonction de la première, de façon à permettre un assemblage correct. À titre d'exemple, il n'est pas rare que l'on perce simultanément deux pièces à assembler pour pouvoir passer les boulons sans problème. Il va sans dire que dans ces circonstances, le remplacement d'une des deux pièces ne peut se faire sans ajustage préalable.

Dans les fabrications en série, une telle méthode est inadmissible, car elle mène à un assemblage laborieux et coûteux. Pour une machine composée des éléments $A, B, C, \dots$, on désire pouvoir fabriquer les éléments A sur une chaîne, les éléments B sur une deuxième chaîne, les éléments C sur une troisième chaîne, etc., toutes ces chaînes étant *indépendantes* et éventuellement très distantes géographiquement. On veut en outre pouvoir procéder à l'assemblage de la machine sans ajustage, *quel que soit le choix particulier d'une pièce A , d'une pièce B , d'une pièce C , etc.* et ces choix ne peuvent pas affecter le fonctionnement de la machine. C'est ce que l'on appelle l'*interchangeabilité totale*¹.

L'interchangeabilité totale suppose évidemment une organisation telle que les écarts de dimensions entre deux pièces identiques soient suffisamment faibles pour ne pas être gênants. Tout serait simple s'il était possible de fabriquer des pièces *sans défauts*. Malheureusement, il n'en est rien : les cotes obtenues sur des machines-outils ont d'une part, une dispersion aléatoire et d'autre part, une erreur évolutive liée à l'usure progressive de l'outil (*dérive de la cote*). La grandeur de ces erreurs dépend du procédé de fabrication. *Par conséquent, la définition précise d'une cote est dénuée de sens : on peut seulement exiger qu'elle appartienne à un intervalle limité par une cote minimale et une cote maximale.* C'est ce que l'on appelle les *tolérances*.

1. Il existe cependant des cas où l'on se contente d'une interchangeabilité *partielle* où il faut classer les pièces. Nous ne nous étendrons pas ici sur cette question.

8.2 Cote nominale, écarts, intervalle de tolérance

8.2.1 Définitions

Ainsi, dire qu'un arbre doit avoir un diamètre $\phi = 100\text{mm}$ n'a pas de sens précis. Mais on peut dire

$$99,98 \leq \phi \leq 100,03$$

Cependant, ce n'est pas de cette façon que l'on donne l'intervalle tolérance. On définit plutôt la cote *nominale* (en général, c'est celle qui a servi dans les calculs), soit ici 100mm , et les *écarts* supérieur et inférieur. L'intervalle ci-dessus s'écrira alors

$$\phi = 100^{+0,03}_{-0,02} \quad (8.1)$$

Très précisément, la cote nominale est

$$\bar{\phi} = 100 \quad (8.2)$$

l'écart supérieur est

$$es = 0,03 \quad (8.3)$$

l'écart inférieur est

$$ei = -0,02 \quad (8.4)$$

et la *tolérance fondamentale*, c'est-à-dire la largeur de l'intervalle de tolérance, (encore appelée improprement intervalle de tolérance quand aucune confusion n'est permise) est

$$it = es - ei = 0,05 \quad (8.5)$$

La valeur maximale du diamètre est

$$\phi_M = \bar{\phi} + es = 100 + 0,03 = 100,03 \quad (8.6)$$

et sa valeur minimale est

$$\phi_m = \bar{\phi} + ei = 100 - 0,02 = 99,98 \quad (8.7)$$

8.2.2 Remarque importante

Il peut se faire que les deux écarts soient de même signe, auquel cas la cote nominale n'est pas contenue à l'intérieur de l'intervalle de tolérance. Considérons par exemple un arbre devant tourner dans un palier. Il est clair que l'arbre doit avoir un diamètre inférieur à celui du palier, mais cette différence est très petite. On leur donne donc *la même cote nominale*, 100mm pour fixer les idées, et ils ne différeront que par leurs écarts. On écrira par exemple (il s'agit de valeurs réalistes)

$$\begin{aligned} \text{Alésage du palier } D &= 100^{+0,054}_0 \\ \text{Diamètre de l'arbre } d &= 100^{-0,072}_{-0,126} \end{aligned} \quad (8.8)$$

8.3 Cotes d'arbre et cotes d'alésage

Il convient de distinguer deux genres de cotes : les cotes d'arbre et les cotes d'alésage.

- On dit d'une cote qu'elle est *une cote d'arbre* si son augmentation correspond à un supplément de matière ou, ce qui revient au même, si cette cote diminue lors de l'usinage.
- On dit d'une cote qu'elle est *une cote d'alésage* si son augmentation correspond à une diminution de la quantité de matière ou, ce qui revient au même, si elle augmente lors de l'usinage.

Ces définitions correspondent bien à ce que l'on connaît du diamètre d'un arbre et de l'alésage d'un palier. Mais il existe d'autres formes en mécanique, pour lesquelles il faut se référer aux définitions ci-dessus. Ainsi, la largeur d'une rainure de clavette dans un arbre est une cote d'alésage, car si on usine les parois de la rainure, celle-ci s'élargit.

8.4 Système ISO de tolérances

Nous avons donc vu qu'il doit exister des tolérances sur les cotes. La vraie question est de préciser l'écart supérieur et l'écart inférieur de manière aussi censée que possible. Les besoins de la pratique ont depuis longtemps conduit à définir des systèmes universels permettant de fixer ces écarts en fonction de la dimension de la pièce, de sa destination et de la dépense que l'on est prêt à engager pour sa fabrication. C'est le cas du système ISO², qui est à présent adopté de façon universelle.

8.4.1 Unité de tolérance

Le premier problème à résoudre dans un système de tolérancement est de définir, en fonction de la cote D , une *unité de tolérance* correspondant à une difficulté constante de réalisation et de mesure. Dans le système ISO, cette unité est donnée par

$$\frac{i}{\mu m} = 0,45 \left(\frac{D}{mm} \right)^{1/3} + 0,001 \frac{D}{mm} \quad (8.9)$$

Dans cette relation, le premier terme représente la difficulté de *réalisation* de la cote - le présent système admet qu'elle varie comme la racine cubique de la cote - et le second, la difficulté de la *mesurer* - ici admise proportionnelle à la cote. Cependant, pour éviter une multiplication inutile des unités de tolérance, on a découpé l'ensemble des dimensions de 1 à 500mm en *échelons* de type $[d_1, d_2]$ et pour chacun de ces échelons, on adopte une valeur unique de l'unité de tolérance calculée à partir de la *moyenne géométrique des extrémités de l'échelon*.

8.4.2 Degré de tolérance

Il va de soi que toutes les cotes d'une pièce ne requièrent pas la même précision. Ne doivent être précises que les cotes intervenant dans un assemblage. Par contre, dans de nombreux cas, les cotes d'encombrement ne sont pas fonctionnelles et les surfaces correspondantes peuvent rester brutes de forgeage ou

2. ISO=International Standardization Organization.

de fonderie. Ceci a mené à introduire la notion de *degré de tolérance* (on disait autrefois *qualité*) qui, pour une cote donnée, définit la *tolérance fondamentale* (largeur de l'intervalle de tolérance) IT . Plus le degré de tolérance est élevé, plus IT est grand, à taille égale. Il existe 18 degrés de tolérance, à savoir,

$$01, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 16$$

(La notation 01 doit être comprise comme (-1).) Au degré de tolérance n correspond la largeur d'intervalle de tolérance IT_n selon les lois suivantes pour les principaux :

$$\begin{aligned} IT5 &= 7i \\ IT6 &= 10i \\ IT7 &= 16i \\ IT8 &= 25i \\ IT9 &= 40i \\ IT10 &= 64i \\ IT11 &= 100i \\ IT12 &= 160i \\ IT13 &= 250i \\ IT14 &= 400i \\ IT15 &= 640i \\ IT16 &= 1000i \end{aligned} \tag{8.10}$$

Pour les degrés de tolérance inférieurs à 5, les formules sont un peu plus compliquées et nous ne nous y attarderons pas (Voir [3, 2], où l'on trouvera en outre les règles d'arrondissement). On notera qu'à partir d' $IT6 = 10i$, les largeurs d'intervalle de tolérance sont approximativement en progression géométrique de raison 1,6.

Le domaine d'application des différents degrés de tolérance peut être schématisé comme suit :

01	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<i>Calibres très précis</i>						<i>Construction mécanique</i>						<i>Grossier</i>					
						↪ arbres						ébauches, cotes					
						↪ alésages						non fonctionnelles					

Une table des tolérances fondamentales se trouve dans le *Mémento*, page T2.

La figure 8.1 donne une idée de la variation du prix de revient en fonction de la tolérance fondamentale. On notera en particulier qu'à tolérance fondamentale identique, les alésages sont toujours plus chers à fabriquer que les arbres.

8.5 Écarts et types

L'analyse des écarts est facilitée par l'utilisation d'un diagramme où l'on dessine les cotes de bas en haut (fig. 8.2). La cote nominale est repérée par une ligne horizontale dite *ligne zéro* parce que sur cette ligne, l'écart est nul. Il est de tradition d'utiliser

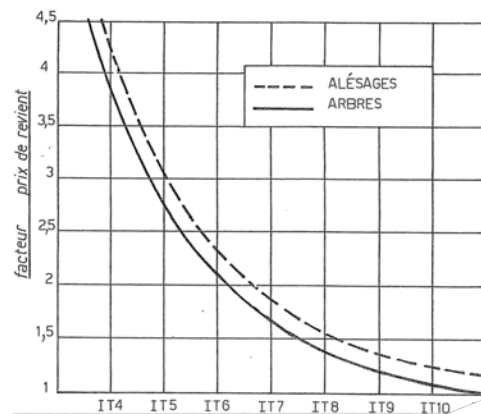


FIGURE 8.1 – Variation du prix de revient avec la tolérance fondamentale [65]

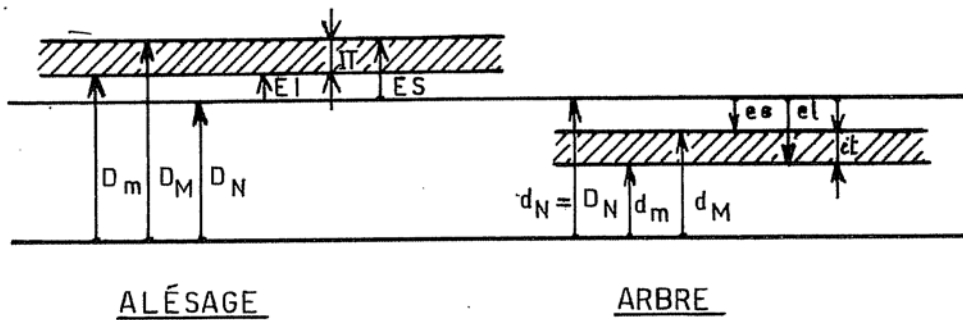


FIGURE 8.2 – Représentation des intervalles de tolérance

- des *majuscules* pour tout ce qui concerne les cotes d'*alésage* ;
- des *minuscules* pour tout ce qui concerne les cotes d'*arbre*.

Pour une cote donnée, les deux écarts peuvent être, soit de signe contraire, soit de même signe, positif ou négatif. Dans tous les cas, on appelle *écart fondamental* ef ou EF celui qui a la plus petite valeur absolue. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} ef = es \text{ (ou } EF = ES) & \text{si la zone de tolérance est entièrement située} \\ & \text{en-dessous de la ligne zéro} \\ ef = ei \text{ (ou } EF = EI) & \text{si la zone de tolérance est entièrement située} \\ & \text{au-dessus de la ligne zéro} \end{array} \right.$$

Lorsque l'intervalle de tolérance chevauche la ligne zéro, on donne les deux écarts.

Pour une cote donnée, les écarts fondamentaux sont en nombre fini. Leur valeur est liée au *type* de l'intervalle de tolérance. Les types sont définis par une lettre de l'alphabet et plus on avance dans l'alphabet, plus il y a de la matière. Ceci est illustré en figure 8.3. Une importance spéciale est accordée aux arbres et alésages dits *normaux*, notés h et H , dont l'écart fondamental est nul. Autrement dit, une cote normale a la valeur nominale à son maximum de matière. Chaque fois que c'est possible, on essaie d'avoir dans les ajustements,

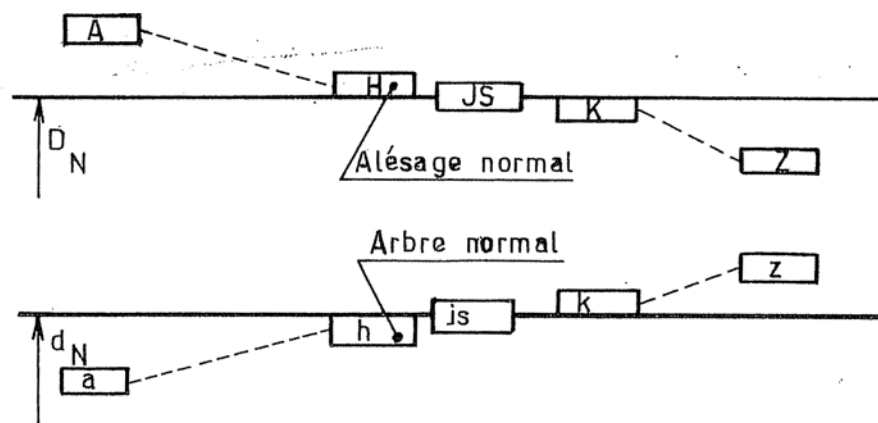


FIGURE 8.3 – Types d'intervalles de tolérance

soit l'arbre, soit l'alésage normal³.

8.6 Écarts fondamentaux des arbres

Mis à part les types js et k , les écarts fondamentaux des arbres sont *indépendants du degré de tolérance*. Ainsi, un arbre $a7$ et un arbre $a8$ ont leur écart supérieur commun et égal à l'écart fondamental $ef(a)$. On a donc, par exemple,

$$\begin{aligned} es(a7) = es(a8) &= ef(a) \\ ei(a7) &= ef(a) - it7 \\ ei(a8) &= ef(a) - it8 \end{aligned}$$

Les écarts fondamentaux des arbres sont donnés dans les tables des pages T3 et T4 du *Mémento*.

8.7 Écarts fondamentaux des alésages

La fixation des écarts fondamentaux des alésages suit des règles un peu plus complexes.

1. **Règle générale** : les intervalles de tolérance des alésages sont exactement symétriques par rapport à la ligne zéro de celles des arbres de même symbole :

$$\begin{aligned} EF &= -ef \\ ES_n &= -ei_n \\ EI_n &= -es_n \end{aligned} \tag{8.11}$$

2. **Exception 1** : Pour le type N , de degré de tolérance 9 ou plus, la règle est :

$$ES = 0 \tag{8.12}$$

3. Une nette préférence est donnée au système de l'alésage normal, qui permet de travailler avec un seul type d'alésoir par cote.

3. **Exception 2** : Pour les types
 – J à N , de degré de tolérance ≤ 8
 – P à ZC , de degré de tolérance ≤ 7
 avec une dimension $d > 3\text{mm}$, la règle est

$$ES_n = -ei_{n-1} + (IT_n - IT_{n-1}) \quad (8.13)$$

Cette règle a été prévue pour que, dans les degrés de tolérance fins envisagés, deux ajustements homologues tels que H7-p6 et P7-h6 aient exactement les mêmes jeux et interférences⁴.

4. **Exception 3** : Pour M6, dans l'échelon]250, 315], la règle est

$$ES = -9\mu m \quad (8.14)$$

Ces règles sont rappelées en page T5 du *Mémento*. À titre d'exemple, calculons les écarts d'un alésage $\phi 100P7$. Le tableau de la page T4 du *Mémento* donne

$$ei(p) = 37\mu m$$

On tire du tableau de la page T3 du *Mémento*, pour $\phi = 100\text{mm}$,

$$IT7 = 35\mu m, \quad IT6 = 22\mu m$$

soit

$$\Delta = IT7 - IT6 = 13\mu m$$

(Cette valeur est d'ailleurs déjà calculée en page T5). Il vient donc

$$ES = -ei(p) + \Delta = -37 + 13 = -24\mu m$$

et on en déduit

$$EI = ES - IT7 = -24 - 35 = -59\mu m$$

Finalement,

$$\phi 100P7 = \phi 100 \begin{smallmatrix} -0,024 \\ -0,059 \end{smallmatrix}$$

8.8 Choix des ajustements

Comme nous l'avons déjà signalé, les ajustements courants sont, soit à alésage normal H , soit à arbre normal h . Généralement, on préfère le système de l'alésage normal, car il évite d'avoir recours à des alésoirs spéciaux. On réserve le système de l'arbre normal aux cas où il présente un intérêt économique certain, par exemple si l'on utilise un arbre constitué d'un barreau acheté pré-rectifié.

Selon la position relative des deux zones de tolérances, on distingue (fig. 8.4)

- les ajustements *avec jeu*, où l'intervalle de tolérance de l'arbre est tout entier en retrait de celui de l'alésage ;
- les ajustements *serrés*, où l'intervalle de tolérance de l'arbre est tout entier situé au-delà de celui de l'alésage ;

4. La bonne pratique est en effet d'attribuer, dans ces ajustements de précision, un degré de tolérance de l'alésage d'une unité supérieure à celui de l'arbre, parce que les alésages sont plus difficiles à réaliser que les arbres.

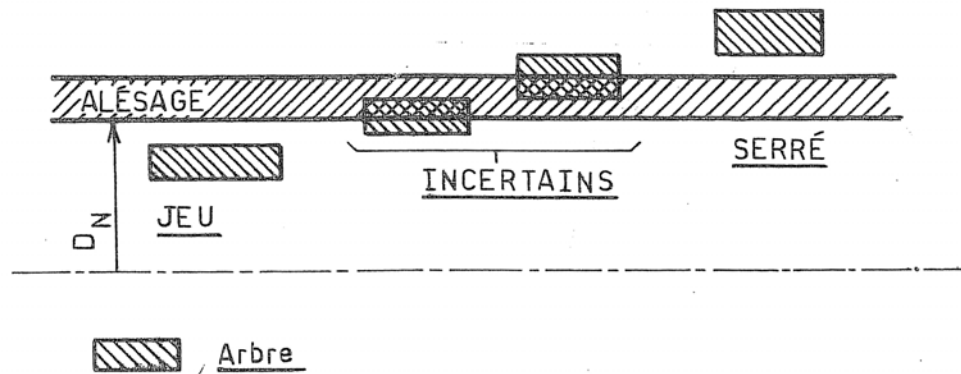


FIGURE 8.4 – Les trois espèces d'ajustements

- les ajustements *incertains*, où les deux intervalles de tolérance se chevauchent.

On trouvera dans le *Mémento*, pages T6 et T7, des indications sur les ajustements les plus courants, avec quelques exemples d'application.

Nous concluons en disant qu'il faut toujours établir les tolérances en s'inspirant du principe suivant : « *aussi grossier que possible, aussi fin que nécessaire* » [77]. C'est là une question d'économie.

Chapitre 9

Vis et écrous

9.1 Introduction

Les vis comptent parmi les éléments les plus utilisés en construction des machines et dans les assemblages. On peut les classer, d'après leur fonction, en

- *vis d'assemblage*, servant à construire des assemblages démontables ;
- *vis de mouvement*, permettant de transformer une rotation en une translation ;
- *vis de fermeture et d'étanchéité*, servant à fermer des orifices, par exemple pour le remplissage et la vidange d'huile, ou à serrer un couvercle à joint ;
- *vis de pression*, servant à presser une pièce en leur extrémité ;
- *vis de mesure* (micromètre) ;
- etc.

9.2 Filetages

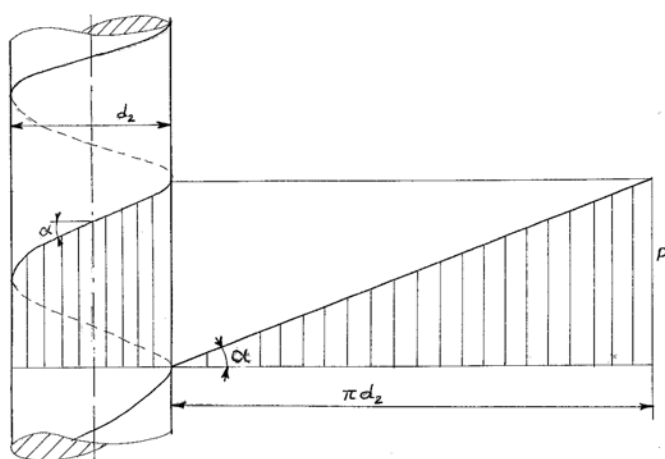


FIGURE 9.1 – Hélice définissant le filetage.

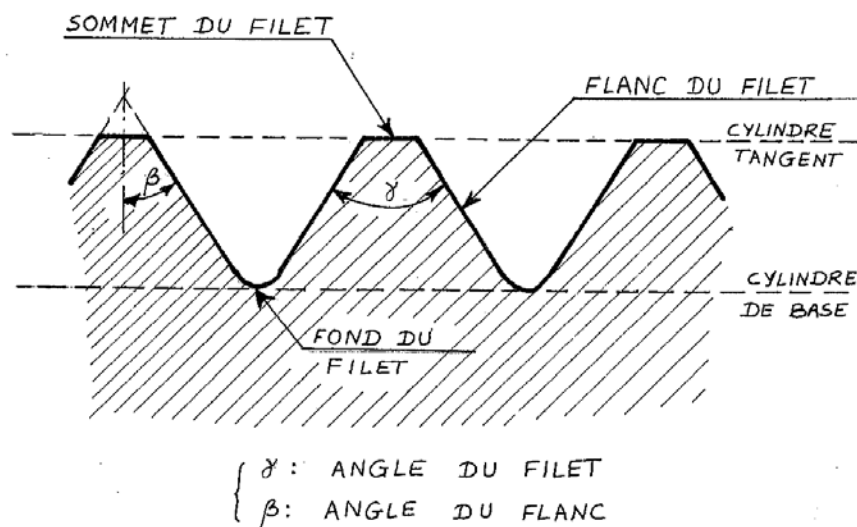


FIGURE 9.2 – Terminologie.

9.2.1 Généralités

La caractéristique fondamentale des vis est le *filet*, « *nervure en saillie sur une surface cylindrique ou conique engendrée par le mouvement hélicoïdal, au tour de l'axe de cette surface, d'une section génératrice prise dans un plan méridien* » (NBN109-1961). Voir figure 9.1.

Le filet est dit *mâle* lorsqu'il fait saillie extérieurement sur une pièce mâle (exemple : vis). Il est dit *femelle* lorsqu'il fait saillie intérieurement sur une pièce femelle (exemple : écrou).

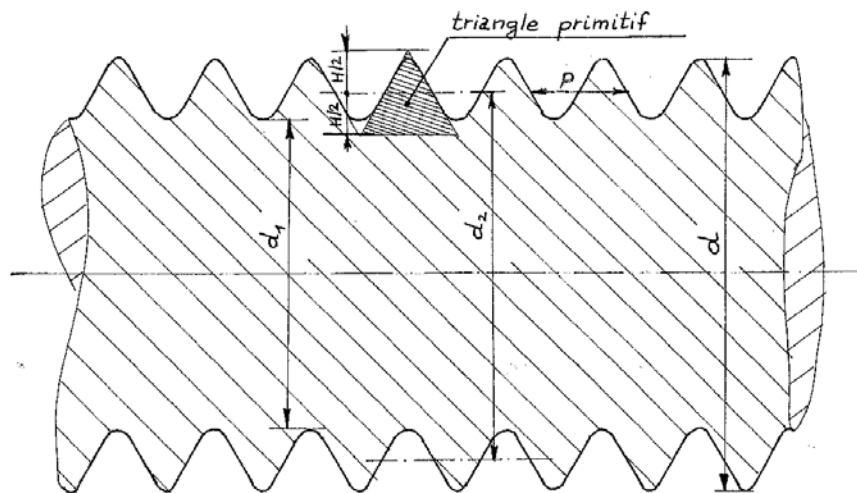
Les notions de *sommet du filet* et de *fond de filet* sont exprimées par la figure 9.2 mieux que par toute forme de discours, ainsi que celle de *flanc du filet*.

L'*angle de flanc* β est l'angle formé par l'une des traces des deux flancs sur un plan méridien et la perpendiculaire à l'axe du cylindre ou du cône de base contenue dans ce plan. On notera qu'à priori, il peut exister deux angles de flanc différents (filets à profil dissymétrique).

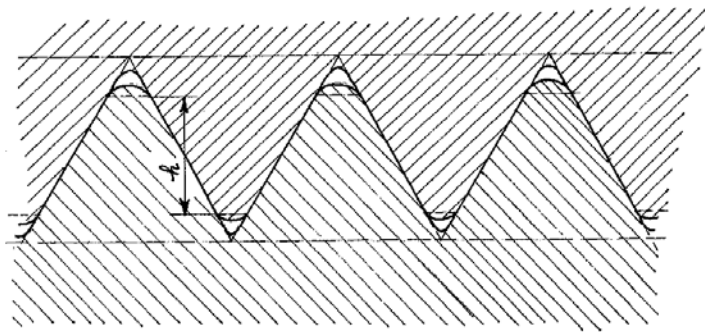
Le *pas* P est la distance, mesurée le long de l'axe, entre deux points homologues de sections successives d'un même filet dans un plan méridien.

Les autres dimensions sont représentées en figure 9.3. On notera que le *diamètre nominal* d , qui sert à définir la vis, est le diamètre *extérieur*. Le *diamètre du noyau* de la vis (diamètre à fond de filet) sert dans certains calculs de résistance. Le *diamètre à flancs de filet* d_2 se compte à mi-hauteur du profil.

Une pièce est dite filetée à *droite* lorsque, vissée dans le sens des aiguilles d'une montre à une pièce fixe, elle s'écarte de l'opérateur ; elle est dite filetée à *gauche* lorsque, vissée dans le sens anti-horlogique, elle s'écarte de l'opérateur. Les pièces filetées à gauche, qui sont exceptionnelles, doivent être repérées pour éviter tout risque de détérioration au dévissage. Ces repères consistent en des saignées (figure 9.4). Une pièce filetée peut comporter un seul filet ou plusieurs filets juxtaposés, identiques et équidistants ; elle est dite, dans le premier cas,



d = diamètre extérieur = diamètre nominal
 d_1 = diamètre du noyau
 d_2 = diamètre à flancs de filet
 H = hauteur du triangle primitif
 p = pas



h = hauteur portante du filet

FIGURE 9.3 – Dimensions.

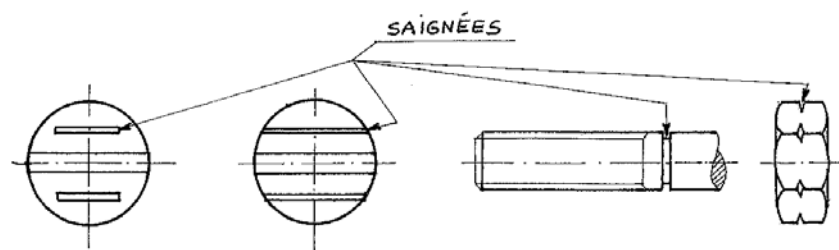


FIGURE 9.4 – Marquage des filets à gauche.

à *filet simple* et dans le second, à *filets multiples* ou à *plusieurs entrées*. Cette dernière dénomination provient du fait que le vissage de la vis sur l'écrou peut démarrer dans autant de positions angulaires différentes qu'il y a de filets.

9.2.2 Filetage ISO (figure 9.5)

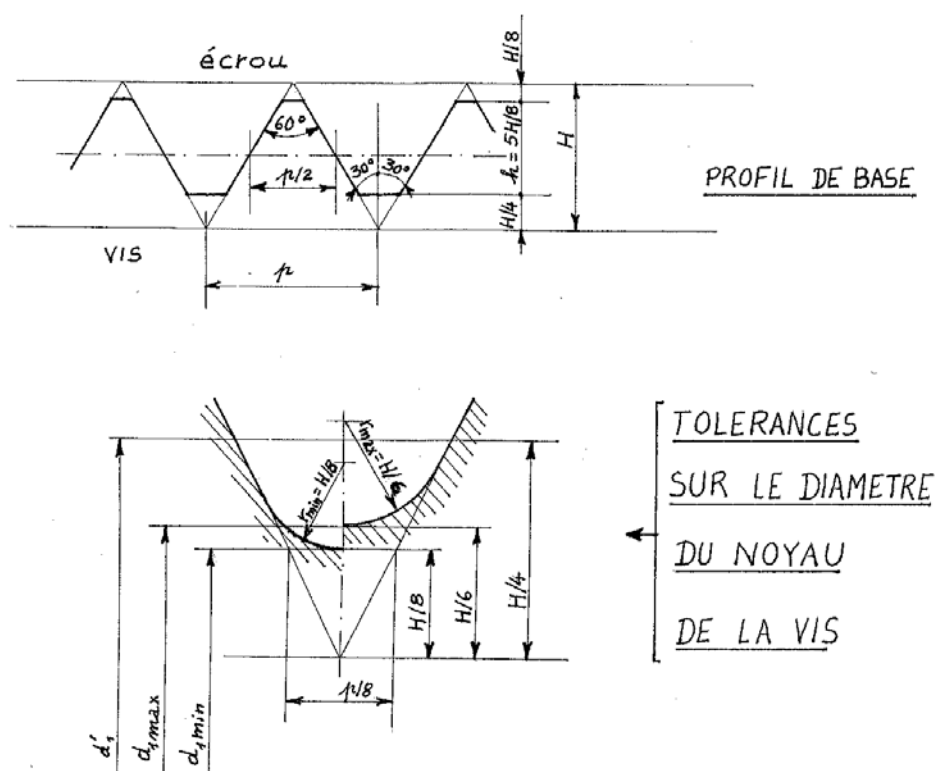


FIGURE 9.5 – Profil ISO.

Le filetage triangulaire ISO a pour section génératrice un triangle équilatéral dont le côté est égal au pas. Le profil ainsi défini est tronqué par deux cylindres,

menés au huitième et au quart de sa hauteur, respectivement à partir du sommet et de la base. On a donc

$$H = \frac{p}{2} \operatorname{tg} 30^\circ$$

et les autres dimensions en découlent, suivant la figure 9.5. La hauteur portante vaut $\frac{5}{8}H$. C'est le filetage le plus courant pour les assemblages.

9.2.3 Filetage trapézoïdal et filetage carré

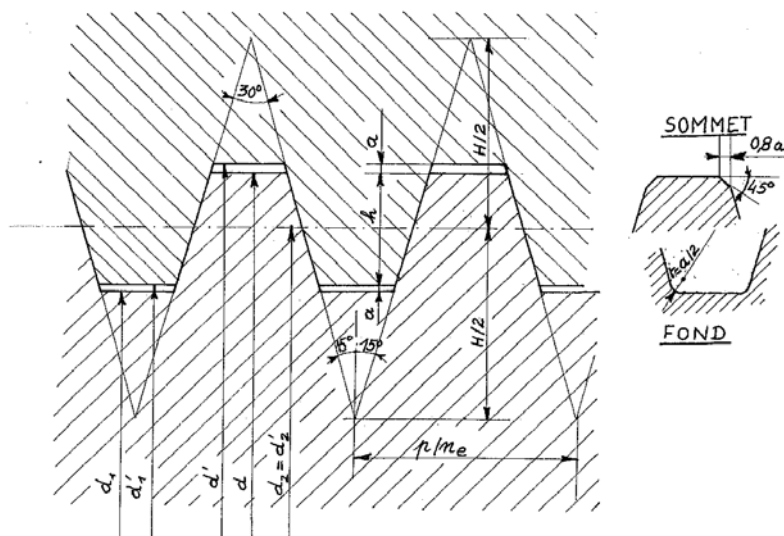


FIGURE 9.6 – Filetage trapézoïdal : n_e = nombre d'entrées ; p = pas ; H = hauteur du triangle primitif, $H = 1,866p/n_e$; h = hauteur portante du filet, $h = 0,5p/n_e$; a = vide à fond de filet.

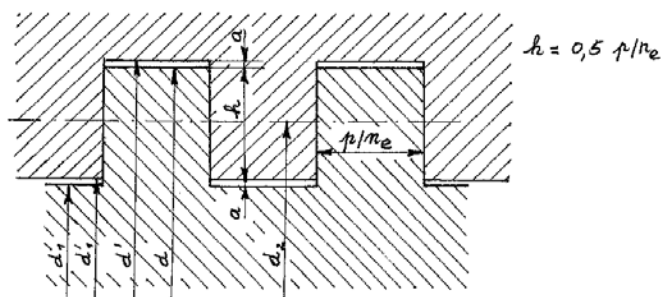


FIGURE 9.7 – Filetage carré.

Ces filetages, représentés en figures 9.6 et 9.7, sont très courants dans les vis de mouvement. Leur rendement est d'autant meilleur que l'angle de flanc est plus petit, comme nous le verrons plus bas.

9.2.4 Autres filetages

Les filetages précédents sont les plus courants. Il en existe cependant d'autres, parmi lesquels il convient de citer

- le *filetage à gaz*, ayant un angle de flanc de 55° , qui s'utilise dans les raccords de tuyauteries ;
- le filetage *Withworth*, le filetage *en dents de scie*, etc. ;
- le filetage *rond*, très robuste et peu sensible aux chocs, qui est utilisé pour les accouplements de wagons de chemin de fer.

9.3 Visserie d'assemblage

9.3.1 Désignation

Il existe de très nombreuses espèces de vis et d'écrous et les figures 9.8 et 9.9 ont pour seule prétention d'en donner quelques exemples, sans vouloir être exhaustives. La norme belge NBN 507 dénombre en effet 119 espèces différentes de vis et 19 espèces d'écrous. Il existe une désignation abrégée des vis et écrous, dont les principes sont donnés en figure 9.10, suivant NBN E 27-002. Les *rondelles* s'emploient dans certains cas, soit que la surface sur laquelle repose l'écrou soit très tendre (bois), auquel cas on emploie une rondelle large, soit qu'elle soit mal finie ou encore oblique par rapport à l'axe de la vis (serrage de profilés, fig. 9.11). Certains boulons à haute résistance comportent des congés qui rendent l'utilisation de rondelles nécessaire.

9.3.2 Dispositifs de sécurité

Pour empêcher le desserrage spontané des vis et écrous, spécialement dans le cas de sollicitations dynamiques ou accompagnées de chocs, il est souvent nécessaire d'utiliser un *dispositif de freinage*, encore appelé *dispositif de sécurité*. Certains de ces dispositifs consistent à augmenter le couple de desserrage par frottement, comme les rondelles élastiques, les écrous auto-serrants les rondelles à dents, les rondelles Belleville, les contre-écrous. On parle alors de *sécurités relatives*. Lorsque la sécurité résulte d'un effet d'obstacle, on l'appelle *sécurité absolue*. Dans cette catégorie se trouvent les goupilles, les rondelles à ailerons et les sécurités par fil (fig 9.12).

9.3.3 Qualité mécanique des vis

En ce qui concerne la résistance des vis, il existe une classification en *classes de qualité*, fondée sur la charge de rupture nominale. La contrainte de référence est le quotient de l'effort passant par le boulon, par une *section résistante conventionnelle* Ω_b définie par

$$\Omega_b = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d_{1,max} + d_2}{2} \right)^2$$

où $d_{1,max}$ est le diamètre maximum à fond de filet et d_2 , le diamètre à flanc de filet (figures 9.3 et 9.5). (On trouvera les valeurs de Ω_b pour les vis les plus courantes en figure 9.13.) Chaque classe de qualité est repérée par deux nombres

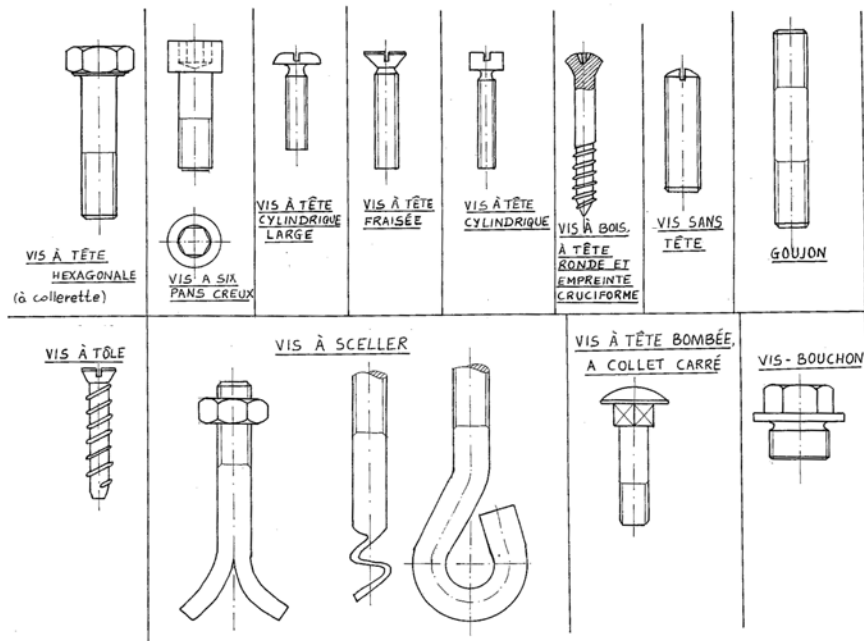


FIGURE 9.8 – Quelques types de vis.

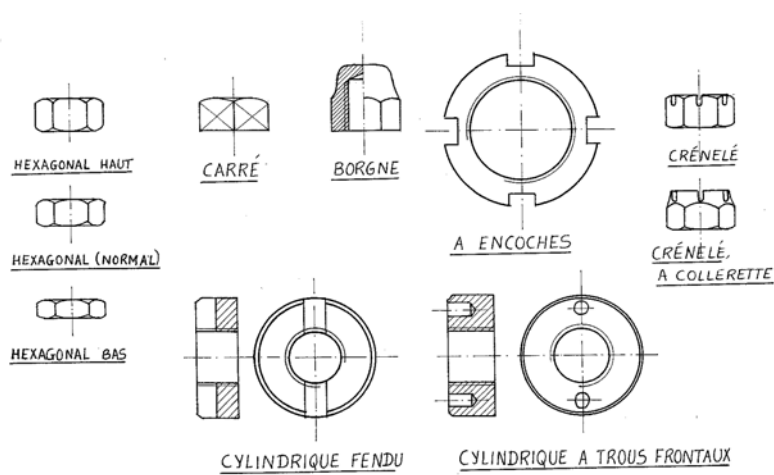


FIGURE 9.9 – Quelques types d'écrous.

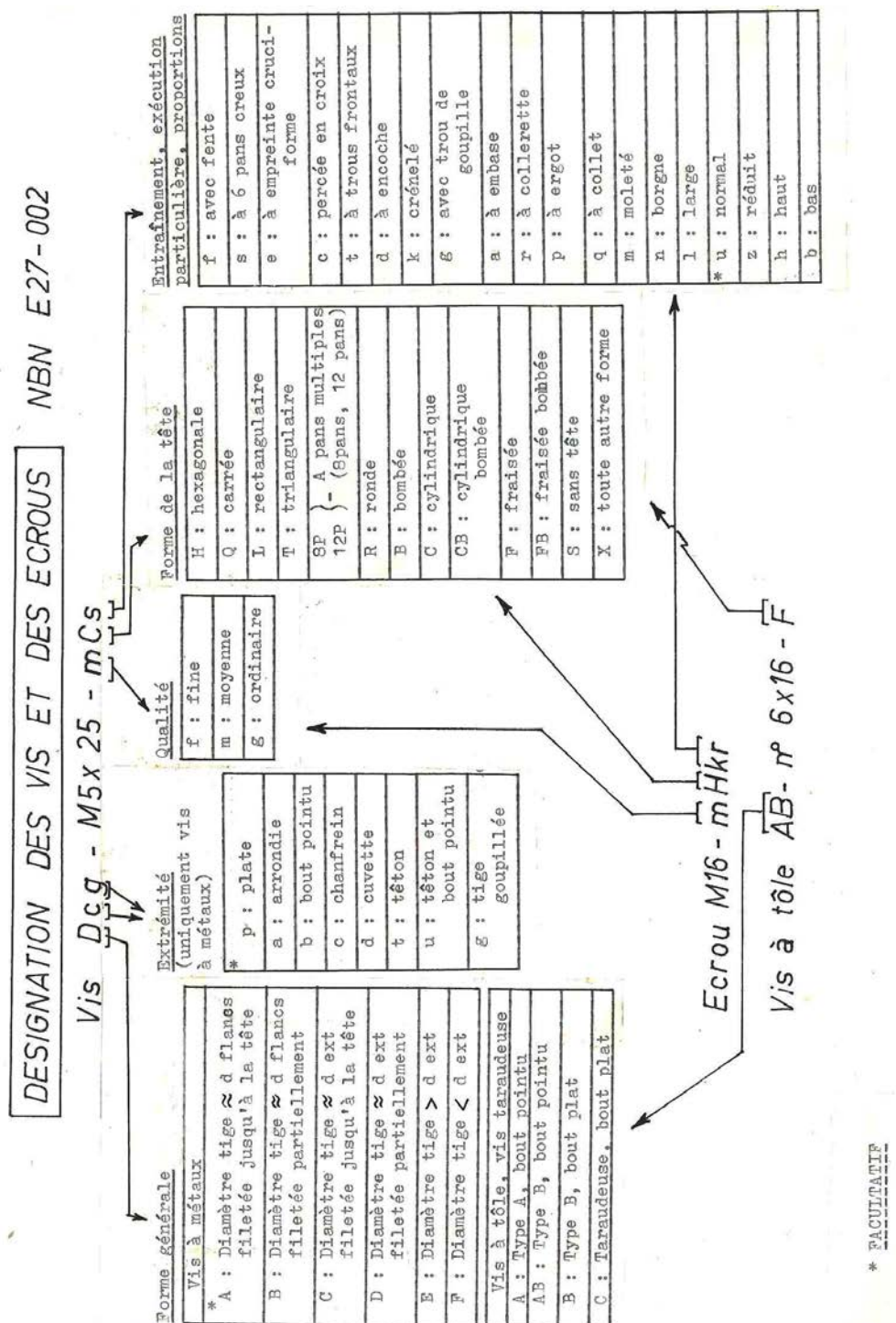


FIGURE 9.10 – Classification des vis et écrous.

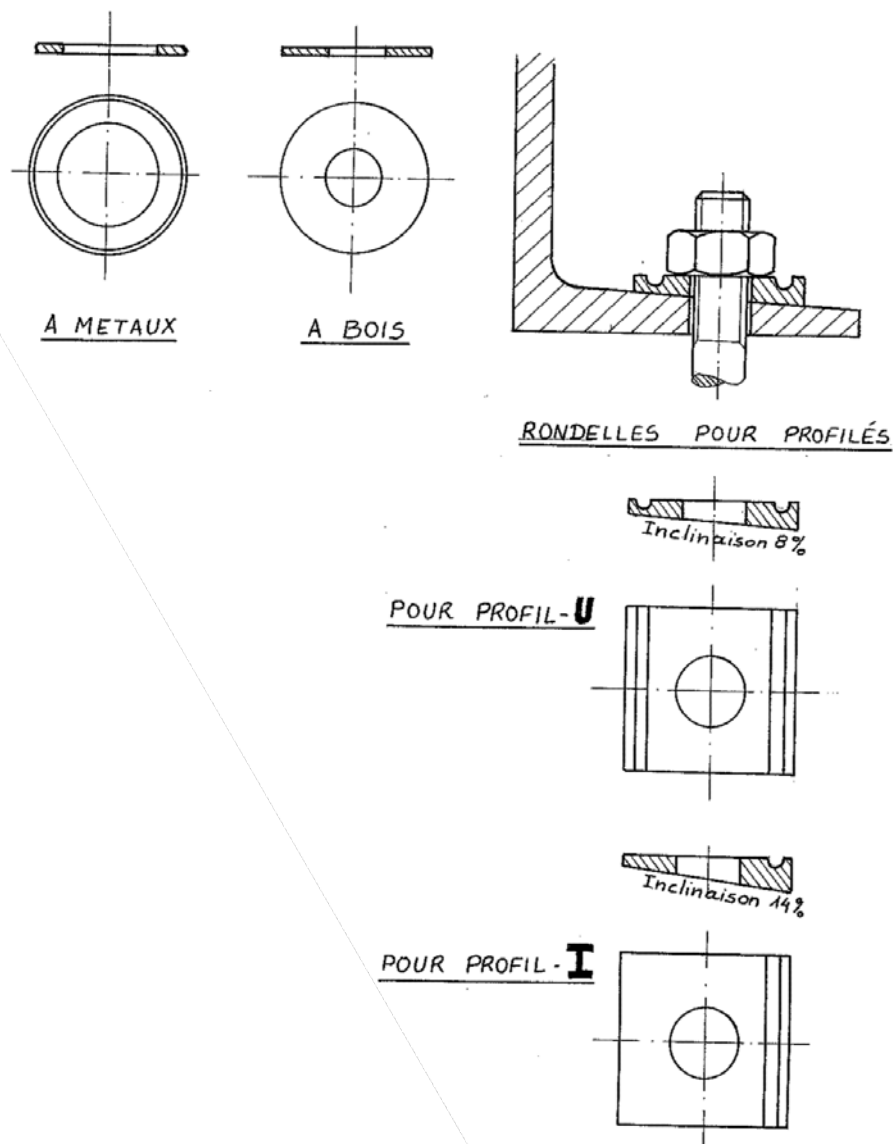


FIGURE 9.11 – Rondelles.

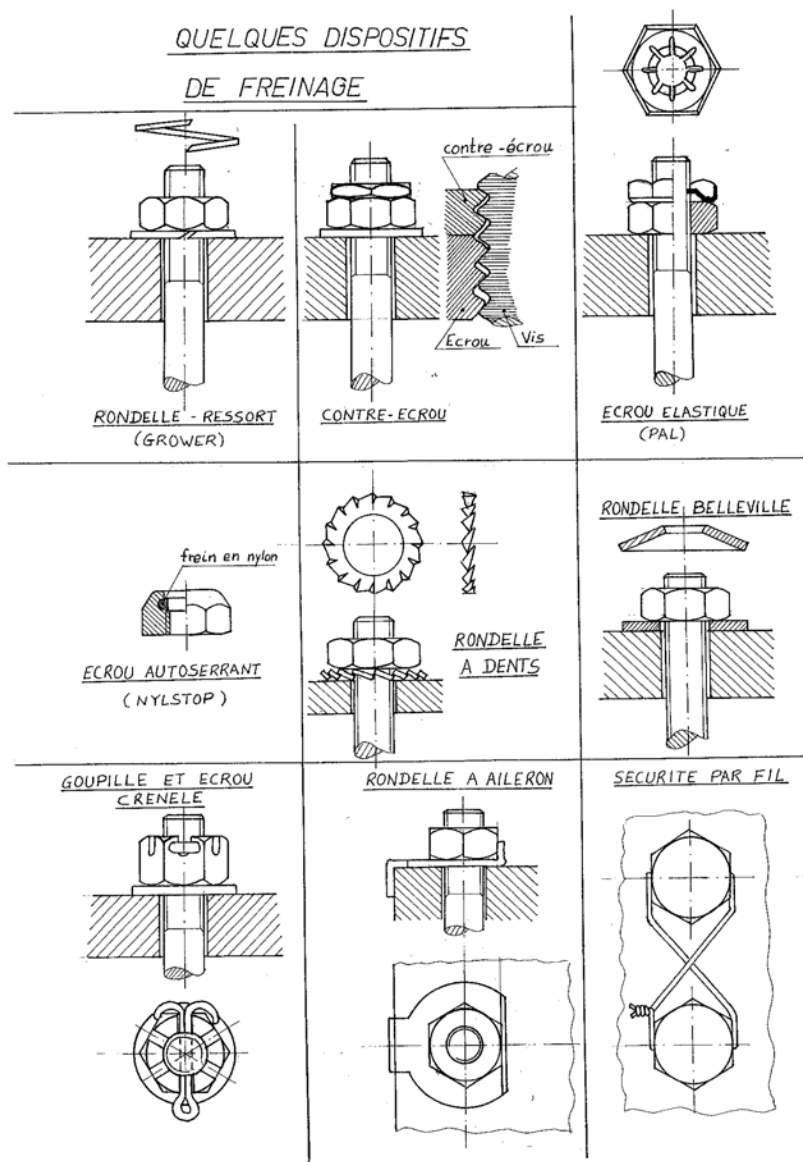


FIGURE 9.12 – Freinage des écrous.

CARACTERISTIQUES DES BOULONS LES PLUS COURANTS

p = pas ; d_2 = diam. à flancs de filet ; d_a = diam. sur pans de la tête ; $D_a = 3 d_a \dots mm$
 Ω_b = section résistante ; Ω_n = section noyau ; Ω_p = surf. pression écrou $\dots mm^2$

d	pas normal			pas fin			trous de passage D_b			mCf			mCfl			mH,gH			mCs		
	p	Ω_b	Ω_n	p	Ω_b	Ω_n	d ₂	f	m	g	d _a	D _a	Ω_p	d _a	D _a	Ω_p	d _a	D _a	d _a	D _a	Ω_p
M16	0,35	1,27	1,17	0,2	1,57	1,50	1,470	17	18	2	3	9	4,52	3,2	9,6	5,50					
M2	0,4	2,07	1,93	0,25	2,45	2,35	1,838	2,2	2,4	2,6	3,8	11,4	6,82	4	12	8,04					
M2,5	0,45	3,39	3,18	0,25	4,03	3,90	2,338	2,7	2,9	3,1	4,5	13,5	9,30	5	15	13,0	5	15	13,0		
M3	0,5	5,03	4,75	0,35	5,61	5,85	2,773	3,2	3,4	3,6	5,5	16,5	14,7	6	18	19,2	5,5	16,5	14,7	5,5	16,5
M4	0,7	8,78	8,25	0,5	9,79	9,40	3,675	4,3	4,5	4,8	7	21	22,6	8	24	34,4	7	21	22,6	7	21
M5	0,8	14,2	13,4	0,5	16,1	15,6	4,675	5,3	5,5	5,8	8,5	25,5	33,0	10	30	54,8	8	24	26,5	8,5	25,5
M6	1	20,1	19,0	0,75	22	21,1	5,503	6,4	6,6	7	10	30	44,3	12	36	78,9	10	30	44,3	10	30
M8	1,25	36,6	34,7	1	39,2	37,6	7,350	8,4	9	10	13	39	69,1	16	48	137	13	39	69,1	13	39
M10	1,5	58,0	55,1	1,25	61,2	58,7	9,188	10,5	11	12	16	48	106	20	60	219	17	51	132	16	48
M12	1,75	84,3	80,2	1,25	92,1	89,0	11,188	13	14	15	18	54	101				19	57	130	18	54
(M14)	2	115	110	1,5	125	120	13,026	15	16	17	21	63	145				22	66	179	21	63
M16	2	157	144	1,5	167	162	15,026	17	18	19	24	72	198				24	72	198	24	72
(M18)	2,5	192	184	1,5	216	211	17,026	19	20	21	27	81	258				27	81	258	27	81
M20	2,5	245	235	1,5	272	265	19,026	21	22	24	30	90	327				30	90	327	30	90
(M22)	2,5	303	292	1,5	333	326	21,026	23	24	26							32	96	352	33	99
M24	3	353	338	2	384	374	22,701	25	26	28							36	108	487	36	108
(M27)	3	459	443	2	496	484	25,701	28	30	32							41	123	613	40	120
M30	3,5	561	540	2	621	609	28,701	31	33	35							46	138	807	45	135
(M33)	3,5	694	670	2	761	747	31,701	34	36	38							50	150	946	50	150
M36	4	817	788	3	865	843	34,051	37	39	42							55	165	1180	54	162
(M39)	4	976	944	3	1028	1004	37,051	40	42	45							60	180	1440	54	162
M42	4,5	1121	1083	3	1206	1179	40,051	43	45	48							65	195	1730	63	189
(M45)	4,5	1306	1265	3	1398	1369	43,051	46	48	52							70	210	2040		
M48	5	1473	1424	3	1604	1573	46,051	50	52	56							75	225	2290	72	216
(M52)	5	1758	1705	3	1900	1867	50,051	54	56	62							80	240	2560		

FIGURE 9.13 – Dimensions des vis les plus courantes.

séparés par un point. le premier de ces nombres représente le centième de la contrainte à la rupture minimale, exprimée en MPa , et le second exprime le rapport entre la limite élastique et la contrainte de rupture, en dixièmes. Ainsi, une vis de classe 10.9 possède une contrainte de rupture au moins égale à

$$R_m = 10 \cdot 100 = 1000 MPa$$

et une limite élastique au moins égale à

$$R_{0,2} = 0,9 R_m = 900 MPa$$

Les essais de réception sont spécifiés dans les normes. De la même façon il existe une classification de qualité des écrous fondée sur la pseudo-contrainte $Force/\Omega_b$ qu'ils doivent subir sans dommage lors d'une épreuve normalisée. On trouvera en figure 9.14 les qualités des vis et écrous et leur disponibilité selon les types de vis.

9.3.4 Fabrication des vis

À partir de rondins laminés ou étirés, on peut fabriquer les vis de plusieurs manières.

- (a) Au tour, il faut partir d'un rondin dont le diamètre excède le diamètre sur angles de la tête, tourner un corps et une tête ronds, fileter le corps, puis fraiser les pans de la tête.
- (b) Par déformation plastique, on forge d'abord la tête par repoussage, et il ne reste plus qu'à fileter la tige.
- (c) On forge la tête, puis on marque le filet par roulage.

En ce qui concerne l'équipement, le procédé (a) est le seul possible dans un atelier courant. Mais il nécessite un enlèvement de matière important. Pour la fabrication en série, le procédé (c) est le plus économique et le plus rapide. Le filet roulé présente un meilleur état de surface et est plus résistant, car les fibres de laminage y suivent le filet, contrairement au filet tourné, où elles sont coupées. De plus, le roulage provoque des contraintes superficielles de compression favorables à la résistance en fatigue. Cependant, ces contraintes résiduelles peuvent être annihilées par un traitement thermique. C'est pourquoi les meilleures vis, en ce qui concerne la résistance, sont obtenues par roulage *après traitement thermique* à l'aide de machines très puissantes, comme la machine luxembourgeoise PEE WEE [13]. Signalons encore les traitements superficiels, dont le plus courant est la *phosphatation* (au manganèse de préférence) qui empêche la rouille et lubrifie le boulon. Les vis phosphatées se reconnaissent à leur couleur noire.

9.4 Frottement de la vis sur l'écrou

9.4.1 Système à coins

Nous commencerons par envisager le système de la figure 9.15 où deux coins sont en contact sur une surface inclinée d'un angle α selon l'axe 1 et d'un angle $-\beta$ selon l'axe 2. Le coin inférieur est astreint à se mouvoir horizontalement et le coin supérieur, à se mouvoir verticalement, par des guidages sans frottement.

QUALITES MECANQUES DES VIS (ISO/R898/I, ISO/R898/II)														
CARACTERISTIQUES MECANQUES		CLASSES DE QUALITE NORMALISEES												
		3.6	4.6	4.8	5.6	5.8	6.6	6.8	6.9	8.8	10.9	12.9	14.9	
R _m (MPa)	min	340	400	400	500	500	600	600	600	800	1000	1200	1400	
	max	490	550	550	700	700	800	800	800	1000	1200	1400	1600	
BRINELL	min	90	110	110	140	140	170	170	170	225	280	330	390	
	max	150	170	170	215	215	245	245	245	300	365	425	-	
R _{0.2} (MPa) min		200	240	320	300	400	360	480	540	640	900	1080	1260	
Résilience min J/cm ²		-	-	-	-	-	-	-	-	60	40	30	30	
A ₅₀ min		25	25	14	20	10	16	8	12	12	9	8	7	
Résistance à la traction sous cale biaise		Identique à R _m min. La rupture ne peut se produire juste sous la tête de la vis.												

QUALITES MECANQUES DES ECROUS									
QUALITE	4	5	6	8	10	12	14		
Tension ^a /R _b lors de l'épreuve de charge (MPa)	400	500	600	800	1000	1200	1400		

VIS NORMALISEES													
TYPE	QUAL.	3.6	4.6	4.8	5.6	5.8	6.6	6.8	6.9	8.8	10.9	12.9	14.9
mCf				x		x				x	x		
mCfl				x		x			x				
mH					x					x			
gH	x	x											
mCs									x	x	x	x	
mSf			x			x							
mSs											x	x	x

FIGURE 9.14 – Qualité mécanique des vis et écrous.

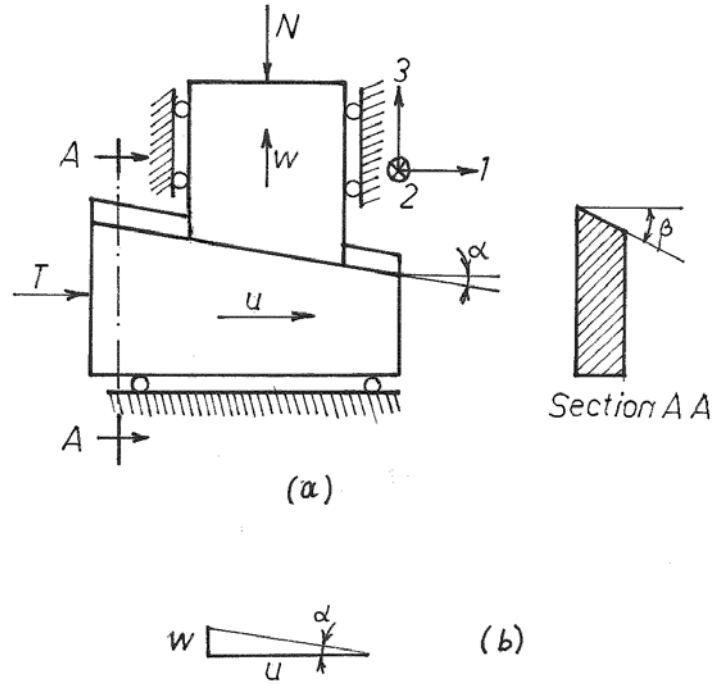


FIGURE 9.15 – Système à coins.

Le coin horizontal se meut à une vitesse u sous l'effet d'une charge T et le coin vertical, à une vitesse w , tout en étant soumis à une charge résistante N .

Comme le montre la figure 9.15 (b), la vitesse de glissement relatif v_g est inclinée de l'angle α , ce qui mène à la condition

$$w = u \operatorname{tg} \alpha$$

La normale à la surface de contact a pour composantes

$$\mathbf{n} = \frac{(\operatorname{tg} \alpha, -\operatorname{tg} \beta, 1)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

Sur cette surface agissent une force normale P et une force de frottement $Q = \mu N$. L'équilibre vertical du coin supérieur s'exprime par la condition

$$N = P n_3 - Q \sin \alpha = \frac{P}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} - Q \sin \alpha$$

L'équilibre horizontal du coin inférieur donne

$$T = P n_1 + Q \cos \alpha = \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} + Q \cos \alpha$$

Tenant compte de la condition $Q = \mu P$, on obtient

$$\frac{T}{N} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu \cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}{1 - \mu \sin \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

On peut simplifier cette expression en posant

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \mu \cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} = \mu \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta \cos^2 \alpha} \quad (9.1)$$

ce qui conduit au résultat ¹

$$\frac{T}{N} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi^*}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi^*} = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi^*) \quad (9.2)$$

Le rendement de ce mécanisme, dans le sens direct que nous avons examiné, est donné par

$$\eta_{direct} = \frac{Nw}{Tu} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi^*)} \quad (9.3)$$

On remarquera qu'il est d'autant plus faible que φ^* est plus grand, ce dernier augmentant si

- le coefficient de frottement μ augmente ;
- l'angle β augmente ;
- l'angle α diminue. ²

Examinons à présent le fonctionnement rétrograde du mécanisme, c'est-à-dire celui où u et w sont négatifs. La relation entre u et w est inchangée, mais la force de frottement change de sens, ce que l'on peut exprimer en changeant le signe de φ^* . Il vient alors

$$\frac{T}{N} = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi^*) \quad (9.4)$$

Comme on peut le constater, le second membre n'est pas nécessairement positif.

- Si $\alpha > \varphi^*$, T est positif, ce qui revient à dire que la charge N est capable de vaincre une réaction T positive. On dit alors que le mécanisme est *réversible*.
- Si $\alpha < \varphi^*$, T est négatif, c'est-à-dire que le coin inférieur a besoin d'être aidé pour se mouvoir. Sans cette aide, le mécanisme se coince. On dit alors que le mécanisme est *irréversible*.
- Si les deux angles sont égaux, le mécanisme est à la limite de réversibilité.

Le rendement rétrograde est donné par

$$\eta_{rétrograde} = \frac{Tv}{Nu} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi^*)}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (9.5)$$

Il est positif si le mécanisme est réversible et négatif si le mécanisme est irréversible.

Lorsque le mécanisme est irréversible, on a $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi^*) > \operatorname{tg} 2\alpha > 2 \operatorname{tg} \alpha$, ce qui implique que le rendement direct vérifie

$$(\eta_{direct})_{irréversible} < \frac{1}{2} \quad (9.6)$$

1. *Remarque* : Lorsque l'angle α est petit, on peut écrire

$$\cos \alpha \approx 1, \quad \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta \cos^2 \alpha} \approx \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{1}{\cos \beta}$$

ce qui donne

$$\operatorname{tg} \varphi^* \approx \frac{\mu}{\cos \beta}$$

formule qui est parfois, à tort, utilisée sans se soucier de la valeur de α .

2. Dans certaines limites. En fait, φ^* atteint un maximum pour un angle α un peu inférieur à 45° .

9.4.2 Système vis-écrou

Tout ce qui vient d'être vu s'applique au système vis-écrou. Le coin inférieur est alors la vis et le coin supérieur, l'écrou. N est alors la force axiale sur l'écrou. Le moment de torsion à la vis vaut alors, lorsque la vis est motrice,

$$M_t = T \frac{d_2}{2} = N \frac{d_2}{2} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi^*) \quad (9.7)$$

où d_2 est le diamètre à flanc de filet. Si l'écrou est moteur, on pourra, dans le cas réversible, récupérer à la vis un moment

$$M_t = N \frac{d_2}{2} \operatorname{tg}(\alpha - \varphi^*) \quad (9.8)$$

Les vis de mouvement peuvent être réversibles ou irréversibles. Dans le cas irréversible, seule la vis peut commander le mécanisme, ce qui peut être recherché pour éviter un frein, mais c'est au détriment du rendement. C'est le cas, notamment, des étaux, que l'on ne désire évidemment pas voir se desserrer spontanément. Le rendement direct des étaux est donc toujours faible et à défaut d'un calcul précis, on table sur $\eta = 0,1$. Les vis d'assemblage sont toujours irréversibles.

Un système vis-écrou sera d'autant plus réversible ou plus proche de la réversibilité que l'on

- augmentera l'angle $\alpha = \frac{p}{\pi d_2}$ et donc, le pas. Les vis à plusieurs entrées, ayant un pas plus grand, sont plus réversibles que les vis à simple entrée.³
- diminuera l'angle de flanc β . Les vis à filet carré sont donc les plus réversibles.
- diminuera le coefficient de frottement (lubrification).

9.4.3 Couple de serrage de l'écrou dans un assemblage

Dans le cas des assemblages, la technique normale consiste à poser la vis puis à serrer l'écrou. Ce dernier presse les pièces serrées avec une pression p , d'où il résulte un couple de frottement supplémentaire

$$(M_t)_{\text{écrou/pièce}} = \int_{\text{surface de contact}} \mu p r \cdot 2\pi r dr$$

auquel on donne généralement la forme

$$(M_t)_{\text{écrou/pièce}} = \mu N \frac{D_M}{2}$$

où D_M est un diamètre moyen de l'écrou, qui, pour les proportions courantes, s'évalue par

$$D_M = 1,4d$$

Au total, on a donc un couple de serrage donné par

$$M_S = N \left[\frac{d_2}{2} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi^*) + \mu \frac{D_M}{2} \right], \quad D_M \approx 1,4d \quad (9.9)$$

3. Dans certaines limites, voir note de bas de page précédente.

Dans le cas des vis d'assemblage, l'angle α est petit et on peut écrire approximativement, si P est le pas,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi^*) \approx \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi^* \approx \frac{P}{\pi d_2} + \frac{\mu}{\cos \beta}$$

ce qui simplifie la formule en

$$M_S \approx N \frac{d_2}{2} \left(\frac{P}{\pi d_2} + \frac{\mu}{\cos \beta} + \mu \frac{D_M}{d_2} \right) \quad (9.10)$$

À titre de première approximation, on cite souvent la formule forfaitaire

$$M_S \approx 0,2Nd_2$$

L'application de la formule 9.10 se heurte à la très grande *dispersion* des coefficients de frottement expérimentaux. Des essais pratiques [41, 42] ont mené aux valeurs données en figure 9.16.

ETAT DE SURFACE		$f_{\text{éq}}$, selon lubrification (VDI-R 2230)		
VIS	ECROU	non graissé	huilé	pâte MoS ₂
Phosphaté Mn	Non traité	0,14...0,18	0,14...0,15	0,10...0,11
Phosphaté Zn		0,14...0,21	0,14...0,17	0,10...0,12
Galvanisé (Zn) $\approx 8 \mu\text{m}$		0,125...0,18	0,125...0,17	
Cadmié $\approx 7 \mu\text{m}$		0,08...0,12	0,08...0,11	
Galvanisé $\approx 8 \mu\text{m}$	Galvan. $\approx 5 \mu\text{m}$	0,125...0,17	0,14...0,19	
Cadmié $\approx 8 \mu\text{m}$	Cadmié $\approx 6 \mu\text{m}$	0,08...0,12	0,10...0,15	

FIGURE 9.16 – Frottement des boulons - μ est ici noté $f_{\text{éq}}$.

9.5 Précontrainte

Le fonctionnement correct d'un système boulonné nécessite un fort serrage préalable du boulon, lui donnant une contrainte initiale *proche de sa limite élastique*. C'est la *précontrainte*. Son rôle est d'empêcher le décollement des pièces serrées. Nous allons voir que, moyennant cette condition, l'assemblage résiste d'une manière particulièrement favorable au boulon.

Nous allons d'abord étudier le processus de serrage du boulon. Lorsque l'écrou arrive au contact des pièces à serrer, le serrage commence. La vis est alors tendue d'une force N_0 et les tôles (c'est le terme générique que nous utiliserons pour les pièces serrées), comprimées de la même force. Par conséquent, le boulon s'allonge d'une longueur

$$u_{0,v} = \frac{N_0}{k_v} \quad (9.11)$$

où k_v est sa *raideur* (loi de Hooke). De la même façon, les pièces serrées se contractent d'une longueur

$$|u_{0,t}| = \frac{N_0}{k_t} \quad (9.12)$$

Le déplacement total, repris par le déplacement axial de l'écrou, vaut

$$u_0 = u_{0,v} + |u_{0,t}| = N_0 \left(\frac{1}{k_v} + \frac{1}{k_t} \right) \quad (9.13)$$

On en réduit aisément l'angle θ_0 dont a tourné l'écrou, à condition de connaître le pas P^4

$$\theta_0 = \frac{2\pi}{P} N_0 \left(\frac{1}{k_v} + \frac{1}{k_t} \right) \quad (9.14)$$

9.6 Calcul des raideurs

Examinons à présent de quelle manière on peut évaluer les raideurs k_v et k_t

9.6.1 Raideur de la vis

Considérons, pour fixer les idées, la vis représentée en figure 9.17. Sous un effort N_0 , on a les allongements suivants :

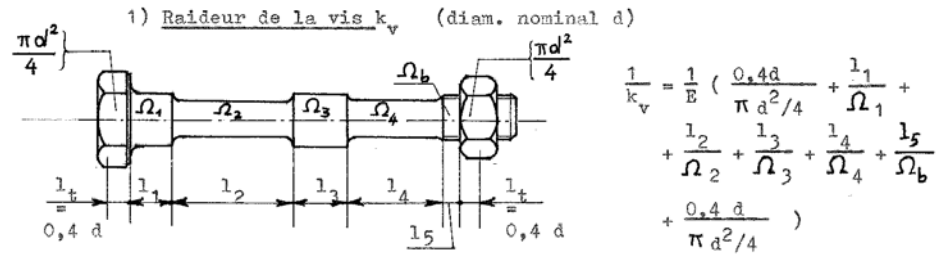


FIGURE 9.17 – Calcul de la raideur de la vis.

$$\begin{aligned} \text{Portée 1} &: \frac{N_0}{E\Omega_1} \ell_1 \\ \text{Portée 2} &: \frac{N_0}{E\Omega_2} \ell_2 \\ \text{Portée 3} &: \frac{N_0}{E\Omega_3} \ell_3 \\ \text{Portée 4} &: \frac{N_0}{E\Omega_4} \ell_4 \\ \text{Portée 5} &: \frac{N_0}{E\Omega_b} \ell_5 \quad \text{où } \Omega_b \text{ est la section résistante de la partie filetée.} \end{aligned}$$

Il reste à tenir compte de la déformation de la tête et de la partie engagée dans l'écrou. On admet que ces deux parties équivalent chacune à une portion de longueur

$$\ell_{\text{tête}} = \ell_{\text{écrou}} = 0,4d$$

4. À cet angle θ_0 , il faut encore ajouter l'angle dû à la torsion de la vis lors de la précontrainte, de la forme $\theta_{0,T} = \tau_0 \cdot \ell / (GI_p)$ - Nous verrons plus loin comment calculer τ_0 .

de cylindre de diamètre nominal d . Il vient ainsi

$$u_0 = N_0 \left(\frac{0,4d}{E \frac{\pi d^2}{4}} + \frac{\ell_1}{E\Omega_1} + \frac{\ell_2}{E\Omega_2} + \frac{\ell_3}{E\Omega_3} + \frac{\ell_4}{E\Omega_4} + \frac{\ell_5}{E\Omega_5} + \frac{0,4d}{E \frac{\pi d^2}{4}} \right)$$

donc

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{E} \left(\frac{0,4d}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{\ell_1}{\Omega_1} + \frac{\ell_2}{\Omega_2} + \frac{\ell_3}{\Omega_3} + \frac{\ell_4}{\Omega_4} + \frac{\ell_5}{\Omega_5} + \frac{0,4d}{\frac{\pi d^2}{4}} \right) \quad (9.15)$$

On notera que dans le cas d'une vis roulée, le diamètre de la tige n'est pas le diamètre nominal d , mais le diamètre à flancs de filets d_2 .

9.6.2 Raideur des pièces serrées

Le calcul de la raideur des pièces serrées est plus délicat. Le principe généralement adopté consiste à remplacer les pièces serrées par un cylindre creux équivalent :

$$\frac{1}{k_t} = \frac{\ell_t}{E\Omega_t} \quad (9.16)$$

La détermination du rayon de ce cylindre a fait l'objet de recherches depuis longtemps déjà, notamment par Bobarikov en 1911 [24] et par Röttscher en 1927 [78]. Des études plus récentes, dues à Junker [38, 39, 40], ont amené à corriger quelque peu ces premiers résultats. Les formules de Junker distinguent trois cas, en fonction du diamètre D_H du plus grand cylindre inscrit dans les pièces serrées et de son rapport au diamètre sur pans d_a de la tête de vis (figure 9.18).

1. Pour $D_H \leq d_a$, on a simplement

$$\Omega_t = \frac{\pi}{4} (D_H^2 - D_i^2) \quad (9.17)$$

2. À l'autre extrême, lorsque les pièces serrées présentent une largeur D_H grande, c'est-à-dire $D_H \geq 3d_a$, on a

$$\Omega_t = \frac{\pi}{4} \left[\left(d_a + \frac{\ell_t}{10} \right)^2 - D_i^2 \right] \quad (9.18)$$

3. Pour les cas intermédiaires, c'est-à-dire pour $d_a < D_H < 3d_a$, on procède par interpolation linéaire entre les deux formules précédentes :

$$\begin{aligned} D_H = d_a &\rightarrow \frac{\pi}{4} (d_a^2 - D_i^2) \\ D_H = 3d_a &\rightarrow \frac{\pi}{4} \left[\left(d_a + \frac{\ell_t}{10} \right)^2 - D_i^2 \right] = \frac{\pi}{4} \left[(d_a^2 - D_i^2) + \frac{d_a \ell_t}{5} + \frac{\ell_t^2}{100} \right] \end{aligned}$$

et pour $d_a < D_H < 3d_a$, on écrit

$$\Omega_t = \frac{\pi}{4} \left[(d_a^2 - D_i^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{D_H}{d_a} - 1 \right) \left(\frac{d_a \ell_t}{5} + \frac{\ell_t^2}{100} \right) \right] \quad (9.19)$$

ce qui est correct aux limites.

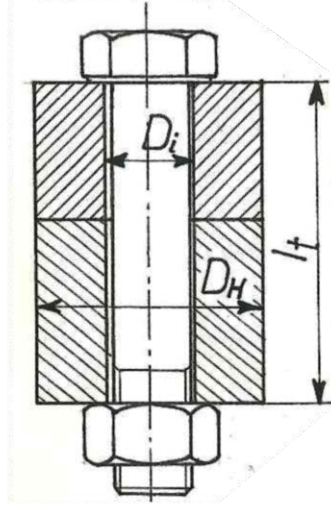


FIGURE 9.18 – Calcul de la raideur des pièces assemblées.

9.7 Fonctionnement sous une charge axiale

Généralement, la charge axiale F est appliquée à l'intérieur des pièces, souvent sur le plan méridien de chacune d'elles (figure 9.19). La partie des pièces situées entre les points d'application de la charge forme le *système des pièces serrées*, dont la flexibilité s'obtient aisément :

$$u'_t = \frac{N_t}{E\Omega_t} q \ell_t = \frac{1}{k'_t} N_t \quad (9.20)$$

avec

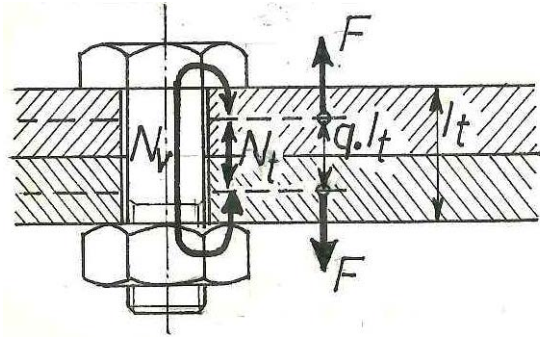
$$\frac{1}{k'_t} = \frac{q}{k_t} \quad (9.21)$$

Le reste forme le *système de la vis*, dont la flexibilité est donnée par la relation

$$u'_v = \frac{N_v}{E\Omega_b} + \frac{N_v}{E\Omega_t} (1 - q) \ell_t = \frac{1}{k'_v} N_v \quad (9.22)$$

avec

$$\frac{1}{k'_v} = \frac{1}{k_v} + (1 - q) \frac{1}{k_t} \quad (9.23)$$

FIGURE 9.19 – Répartition des efforts sous une charge axiale F .

Il est clair que l'on a la relation

$$\frac{1}{k_v} + \frac{1}{k_t} = \frac{1}{k'_v} + \frac{1}{k'_t} \quad (9.24)$$

Considérant alors le système précontraint comme référence, l'effet de la surcharge F est d'allonger le système de la vis et le système des pièces serrées d'un même déplacement $\Delta u'$. Les efforts dans les deux systèmes sont alors modifiés suivant la loi de Hooke,

$$\begin{aligned} N_v &= N_0 + k'_v \Delta u' \\ N_t &= N_0 - k'_t \Delta u' \end{aligned}$$

avec la condition d'équilibre

$$F = N_v - N_t$$

soit

$$F = (k'_v + k'_t) \Delta u'$$

On en déduit la répartition suivante des efforts entre le système de la vis et le système des pièces serrées :

$$N_v = N_0 + \frac{k'_v}{k'_v + k'_t} F = N_0 + \Phi' F \quad (9.25)$$

$$N_t = N_0 - \frac{k'_t}{k'_v + k'_t} F = N_0 - (1 - \Phi') F \quad (9.26)$$

où apparaît le *coefficient de charge du système de la vis*

$$\Phi' = \frac{k'_v}{k'_v + k'_t} \quad (9.27)$$

On définit aussi fréquemment la *raideur relative de la vis*

$$\Phi = \frac{k_v}{k_v + k_t} \quad (9.28)$$

Ces deux coefficients sont en relation simple. En effet ,

$$\Phi' = \frac{\frac{1}{k'_t}}{\frac{1}{k'_t} + \frac{1}{k'_v}} = \frac{\frac{q}{k_t}}{\frac{1}{k_t} + \frac{1}{k_v}} = q \frac{k_v}{k_v + k_t}$$

soit

$$\Phi' = q\Phi \quad (9.29)$$

Le coefficient de charge Φ' est généralement très inférieur à l'unité ($\Phi' = 0,1 \dots 0,4$) ce qui permet d'expliquer la *bonne tenue des systèmes boulonnés à la fatigue*. Les vis sont en effet des corps fortement entaillés pour lesquels la résistance en fatigue est assez faible. Par rapport au métal de base, la charge de rupture est fortement augmentée et la limite d'endurance, fortement diminuée, ce qui mène à un diagramme de Smith-Goodman dont les branches sont pratiquement à 45°. En conséquence, le critère de résistance à la fatigue se résume à vérifier que le terme alterné de la contrainte σ_a soit inférieur à σ_D . Or, sous une charge alternée F , l'assemblage ne transmet à la vis qu'une charge $\Phi'F$ *beaucoup plus faible*, ce qui est très favorable. Ceci est d'autant plus vrai que

- le système de la vis est plus souple ;
- le système des pièces serrées est plus raide.

C'est pourquoi, dans les cas difficiles, on utilise des vis *amincies* les plus longues possibles, ou d'autres artifices représentés en figure 9.20.

9.8 Serrage initial

Le serrage initial est important à plusieurs titres. D'une part, c'est lui qui garantit que les pièces restent serrées en toutes circonstances, ce qui s'exprime par la condition

$$N_t = N_0 - (1 - \Phi')F > 0$$

D'autre part, on peut prescrire un serrage requis N_R pour diverses applications.

9.8.1 Étanchéité pour un liquide sous une pression p

Il faut que la pression sur le joint soit au moins égale à un multiple γp , avec

$$\gamma = 1,5 \text{ (joint souple)} \dots 4 \text{ (métal/métal)}$$

Dans le cas de forces fortement variables, on mettra les surfaces en contact direct avec un joint torique.

9.8.2 Effort transversal Q à reprendre par frottement

$$N_R = \frac{Q}{\mu_{surf}}$$

avec $\mu_{surf} =$

- 0,45 : construction métallique, acier $R_{0,2} = 300MPa$, surfaces grenillées, sablées, passées au chalumeau, moyennant des essais préalables avec 90% de succès ;
- 0,60 : mêmes conditions, acier $R_{0,2} = 360MPa$;
- 0,30 : constructions métalliques, surfaces brossées ;
- 0,10...0,15 : construction mécanique, surfaces contaminées.

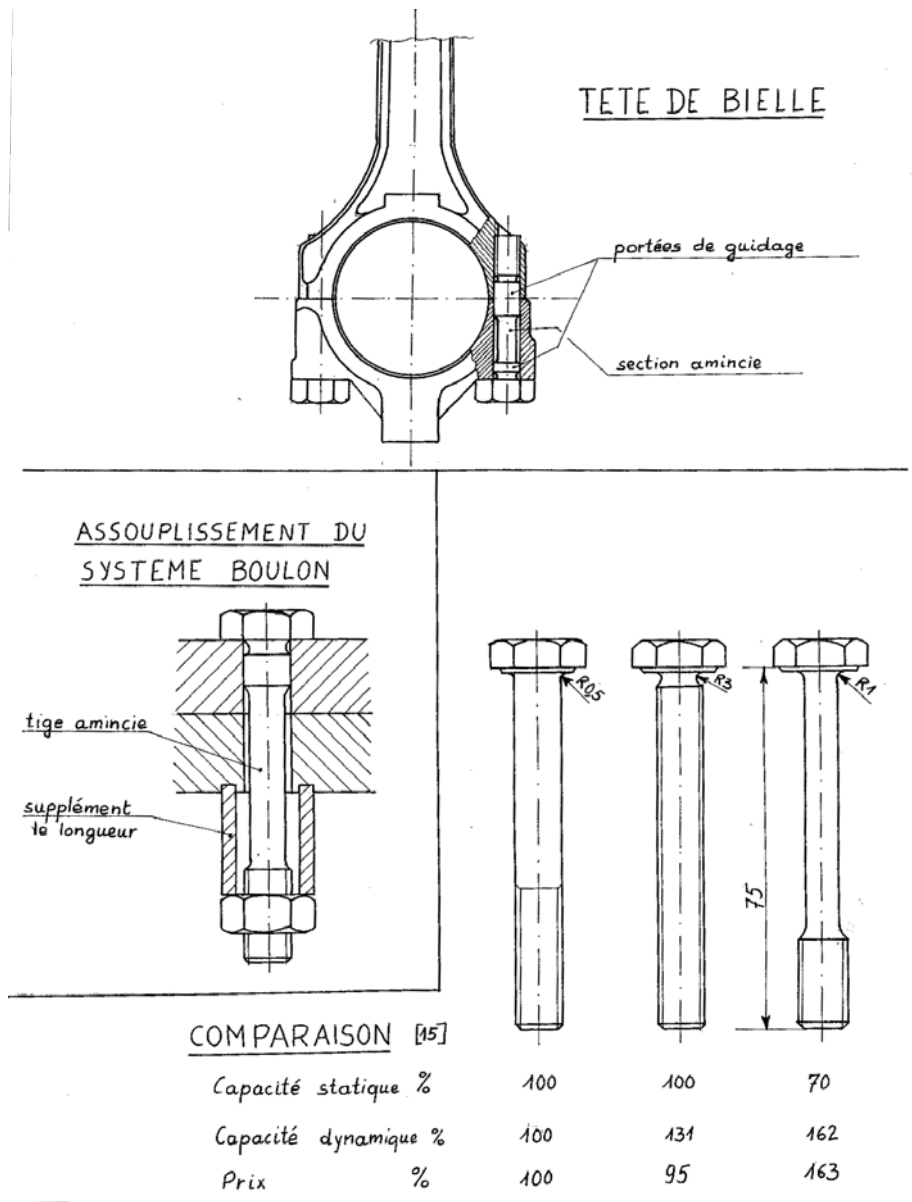


FIGURE 9.20 – Amélioration de la tenue des vis en fatigue.

9.8.3 Serrage résiduel sous force axiale

$N_R > 0$, pourcentage raisonnable de F

9.8.4 Effet du tassement des interfaces

Or, le serrage n'est pas parfaitement permanent, car les rugosités de surface se tassent petit à petit sous l'effort. Ce tassement peut être chiffré de manière approximative à l'aide du tableau suivant [44] :

Tassement axial Δu_0 en μm		
Source	Sollicitation axiale pulsatoire	Sollicitation au glissement ou combinée
Filet	5	5
Chaque interface		
$\nabla\nabla$	4	8
$\nabla\nabla\nabla$	2	4

La perte de serrage qui en résulte se calcule par la formule

$$\Delta N_0 = \frac{\Delta u_0}{\frac{1}{k_v} + \frac{1}{k_t}} \quad (9.30)$$

9.8.5 Effet des dilatations thermiques différentielles

Notons encore que le serrage peut être altéré par des *dilatations différentielles*. Dans le cas de matériaux différents, les pièces serrées, soumises à une augmentation T de la température, ont tendance à se dilater de

$$\Delta u_{0,t} = \alpha_t \ell_t T$$

tandis que la vis a tendance à s'allonger de

$$\Delta u_{0,b} = \alpha_v \ell_t T$$

ce qui provoque une *diminution de serrage*

$$\Delta N_{0,T} = \frac{(\alpha_v - \alpha_t) \ell_t T}{\frac{1}{k_v} + \frac{1}{k_t}} \quad (9.31)$$

On notera que si la vis est en acier et les pièces en aluminium, on obtient, pour $T > 0$, une *diminution* de serrage négative.

9.9 Sécurité par rapport à la déformation permanente des vis

Le calcul de la vis à la déformation permanente doit se faire avec la section minimale de la vis Ω_s . Pour une vis filetée sur toute sa longueur, c'est Ω_b . Notons σ_0 la contrainte normale liée à la précontrainte :

$$\sigma_0 = \frac{N_0}{\Omega_s}$$

Il ne faut pas perdre de vue qu'il existe, lors du serrage, une contrainte de torsion due au moment de frottement entre la vis et l'écrou. Cette contrainte vaut

$$\tau_0 = \frac{16M_t}{\pi d_s^3} = \frac{8N_0 d_2}{\pi d_s^3} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi^*) = 2\sigma_0 \frac{d_2}{d_s} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi^*) \quad (9.32)$$

En pratique, cela donne le plus souvent $\tau_0 \approx 0,4\sigma_0$, à moins que la vis ne soit assouplie par des sections plus minces que le filet. En notant alors $\Delta\sigma$ le supplément de contrainte axiale dû à la force F ,

$$\Delta\sigma = \frac{\Phi' F}{\Omega_s} \quad (9.33)$$

on obtient, à partir du critère de von Mises, la condition

$$\sqrt{(\sigma_0 + \Delta\sigma)^2 + 3\tau_0^2} \leq \frac{R_{0,2}}{s_{0,2}} \quad (9.34)$$

L'expérience a montré que l'on peut se contenter d'une sécurité vis-à-vis de la limite élastique égale à 1 [44], ce qui est parfaitement compréhensible, car la première plastification en torsion n'implique pas la plastification dans la masse.

Généralement, $\Delta\sigma$ est faible ($\Delta\sigma \approx 0,1R_{0,2}$), ce qui permet d'effectuer un serrage initial menant environ à

$$\sqrt{\sigma_0^2 + 3\tau_0^2} \approx 1,3\sigma_0 = 0,9R_{0,2}$$

soit

$$\sigma_0 \approx 0,7R_{0,2} \quad (9.35)$$

Ce résultat sert de base au prédimensionnement de l'assemblage.

9.10 Résistance des vis à la fatigue

Fortement entaillées, les vis n'ont qu'une résistance limitée en fatigue. Comme nous l'avons déjà signalé, il suffit en fait de vérifier la grandeur de la contrainte alternée σ_a . La sécurité en fatigue, donnée par

$$s_D = \frac{\sigma_D}{\sigma_a} \quad (9.36)$$

doit être au moins égale à **1,5**. Il faut noter que la contrainte alternée se calcule avec la *section du noyau* Ω_n et non avec la section résistante conventionnelle Ω_b . Les limites d'endurance à prendre en compte sont données dans le tableau suivant [44, 65].

Limite d'endurance des vis					
Élaboration	Tt. therm. après roulage			Roulé après Tt. therm.	
Classe	5.6	8.8	10.9,12.9	8.8	10.9,12.9
M4...M8	50	60	70	100	110
M10...M16	40	50	60	90	100
M18...M30	30	40	50	80	90

9.11 Risque d'écrasement des pièces serrées

La tête de la vis et l'écrou transmettent aux pièces serrées une pression équilibrant l'effort dans la vis. Cette pression ne peut être excessive, sous peine de marquer fortement les pièces. D'après les recherches de Junker [38], le serrage provoque à la fois des déformations et de l'écrouissage, ce qui permet d'atteindre en service des pressions limites plus élevées que les classiques pressions d'écrasement : on écrira donc la condition

$$p = \frac{N_v}{\Omega_p} \leq p_{lim} \quad (9.37)$$

avec les limites suivantes pour un serrage à la main :

Matériau pièces serrées	p_{lim}/MPa
Acier, $R_m = 370MPa$	300
Acier, $R_m = 500MPa$	500
Acier C45 amélioré	900
Ft, $R_m = 200MPa$	750
Mg-Al9 moulé sous pression	200
Mg-Al9 moulé en coquille	200
Al-Si6Cu4 moulé en coquille	300

Dans le cas d'un serrage à la machine, ces valeurs sont à multiplier par 0,65.

9.12 Risque d'arrachement des filets

Lorsque l'on utilise l'écrou fabriqué de pair avec la vis, le problème de l'arrachement des filets ne se pose pas, car les normes prévoient une mise à l'épreuve de l'écrou garantissant contre ce risque : l'écrou est fait pour résister au moins aussi bien que la vis.

Mais il existe de nombreuses applications où la vis s'engage directement dans un trou taraudé pratiqué dans une des pièces (par exemple, pour fixer un accessoire sur le bâti d'une machine). Il faut alors s'assurer que le nombre de filets en prise suffit à reprendre l'effort. Le tableau suivant donne des indications à ce sujet :

Longueur d'engagement minimale					
/	Classe de qualité de la vis	8.8	8.8	10.9	10.9
/	Finesse du pas d/P	< 9	≥ 9	< 9	≥ 9
Pièce taraudée	AlCu4Mg1	1,1 d	1,4 d	-	-
	Ft grise $R_m = 200MPa$	1,0 d	1,2 d	1,4 d	1,4 d
	Acier $R_m = 370MPa$	1,0 d	1,25 d	1,4 d	1,4 d
	Acier $R_m = 500MPa$	0,9 d	1,0 d	1,2 d	1,2 d
	C45 amélioré	0,8 d	0,9 d	1,0 d	1,0 d

9.13 Incertitude de la valeur du serrage initial

Dans tout ce qui précède, nous avons parlé de la valeur de la précontrainte N_0 sans trop nous soucier de la manière de la mesurer. Il convient cependant d'examiner avec quelque attention les méthodes de production de la précontrainte, afin de déterminer leur précision.

1. Nous avons déjà cité la *mesure de l'angle de rotation de l'écrou*. On serre l'écrou *à la main* jusqu'à ce que la résistance devienne manifeste et on admet que ce symptôme détermine la mise en contact des pièces. Il suffit alors de mesurer l'angle de rotation de l'écrou mû à la clef pour déterminer l'effort, par la formule

$$\theta_0 = \frac{2\pi}{P} N_0 \left(\frac{1}{k_v} + \frac{1}{k_t} \right)$$

Il faudrait, en toute rigueur, ajouter l'angle de déformation de la vis en torsion, mais celui-ci reste faible ($\approx 2^\circ$).

2. On peut également mesurer l'*allongement de la vis* : on a en effet

$$u_{0,v} = \frac{N_0}{k_v}$$

Cette mesure est souvent malaisée du fait que les deux extrémités de la vis ne sont pas toujours accessibles. En outre, le matériel de mesure doit être suffisamment précis.

3. La méthode la plus courante consiste à mesurer le couple de serrage grâce à une *clé dynamométrique*. Certaines se contentent de mesurer le couple, mais d'autres, plus perfectionnées, déclenchent lorsque le couple atteint une valeur donnée. L'inconvénient de ce procédé réside dans le fait que le couple de serrage dépend du coefficient de frottement qui varie très fort, excepté dans le cas des vis *phosphatées au manganèse* dont le traitement de surface assure une bonne reproductibilité du frottement.
4. Il existe des *machines à visser*, électriques, hydrauliques, pneumatiques ou encore à percussion. Elles possèdent toutes un dispositif de limitation du couple.
5. Le procédé le plus grossier consiste à prescrire le serrage *avec une clé dont le bras de levier est relativement court*. Le principe est qu'un homme de force normale, obtiendra le serrage voulu en y mettant toutes ses forces. Il va sans dire que ce procédé est le plus grossier de tous. (Pour des vis de fixation de roues, tabler sur une force de 500N.)

Pour chacun de ces procédés, la précision peut être mesurée par le rapport α_b entre la plus grande et la plus petite valeur de la précontrainte à laquelle il peut mener :

$$\alpha_b = \frac{N_{0,max}}{N_{0,min}} \quad (9.38)$$

Les valeurs du tableau suivant sont prescrites par la recommandation VDI-R2231, *Anziehen von Schrauben*.

α_b	Mode de serrage et circonstances
1,4	<i>clé dynamométrique</i> , surfaces huilées ou enduites de pâte de MoS_2
1,6	<i>machine à boulonner</i> , surfaces huilées ou enduites de pâte de MoS_2 <i>mesure de l'allongement</i>
1,8	<i>clé dynamométrique</i> , pas de lubrification
2	<i>machine à boulonner</i> , pas de lubrification <i>mesure d'angle</i>
3	serrage avec une <i>clé de longueur réduite</i>

La *précontrainte à prescrire* est égale aux 9/10 de la précontrainte maximale, de manière à éviter toute surcontrainte.

9.14 Calcul des assemblages vissés précontraints

9.14.1 Dimensionnement initial

Dans le cas le plus général, l'assemblage doit reprendre un effort longitudinal F , tout en garantissant un serrage résiduel N_R nécessaire pour l'étanchéité, le frottement, etc. On doit donc avoir

$$N_{t,min} = N_{0,min} - \Delta N_0 - (1 - \Phi')F = N_R$$

où ΔN_0 est la perte de serrage. Ceci donne

$$N_{0,min} = N_R + \Delta N_0 + (1 - \Phi')F$$

Le serrage maximum vaut donc

$$N_{0,max} = \alpha_b N_{0,min} = \alpha_b [N_R + \Delta N_0 + (1 - \Phi')F] \quad (9.39)$$

Mais cette formule contient le coefficient Φ' , qui dépend des dimensions à déterminer, de même d'ailleurs que la perte de serrage. En d'autres termes, le problème est implicite, et il nous faut une valeur de départ. Pour obtenir celle-ci, nous remplacerons dans la formule (9.39) $(1 - \Phi')F$ par F , ce qui constitue une majoration, et nous omettrons en compensation le terme ΔN_0 . Ceci donne

$$N_{0,max} \approx \alpha_b (N_R + F) \quad (9.40)$$

Ceci permet de déterminer la section résistante minimale de la vis par la formule

$$\Omega_{min} = \frac{N_{0,max}}{0,7R_{0,2}} \quad (9.41)$$

9.14.2 Vérification

La section étant choisie, on peut calculer les raideurs k_v et k_t , les nombres Φ , q , Φ' et la perte de serrage ΔN_0 . On en déduit $N_{0,max}$ par (9.39) et $N_{0,min} = N_{0,max}/\alpha_b$. On peut alors vérifier la vis suivant le processus suivant :

1. Sécurité par rapport à la déformation permanente : relation (9.34), avec $N_{0,max}$.
2. Sécurité en fatigue : relation (9.36).
3. Écrasement des pièces serrées : relation (9.37), avec $N_{0,max}$.
4. Risque d'arrachement du filet, avec $N_{0,max}$.

9.14.3 Exemple

Assemblage d'étanchéité. Pièces en acier $R_m = 500\text{MPa}$. Épaisseur à serrer : 50mm. Effort variant entre 10000 et 20000N par boulon. Serrage minimum : 170N par boulon. Boulons phosphatés, hexagonaux, qualité 8.8, serrés à la clé dynamométrique sans lubrification. La zone de serrage contient au mieux un cercle de diamètre $D_H = 40\text{mm}$.

1. *Prédimensionnement* On a d'abord $\alpha_b = 1,8$ et $R_{0,2} = 0,8 \times 800 = 640 \text{ MPa}$. Donc

$$N_{0,max} \approx 1,8(N_R + F) = 1,8(170 + 20000) = 36310 \text{ N}$$

et

$$\Omega_{min} \approx \frac{N_{0,max}}{0,7R_{0,2}} = \frac{36310}{0,7 \times 640} = 81,04 \text{ mm}^2$$

La section minimale est ici Ω_b . Le tableau des vis donne pour M12 :

$$\begin{aligned} \Omega_b &= 84,3 \text{ mm}^2 \\ d_a &= 19 \text{ mm} \\ P &= 1,75 \text{ mm} \quad (\text{pas normal}) \\ d_2 &= 10,863 \text{ mm} \\ \Omega_n &= 80,2 \text{ mm}^2 \\ D_i &= 14 \text{ mm} \end{aligned}$$

et on peut encore calculer

$$\begin{aligned} d_b &= \sqrt{\frac{4\Omega_b}{\pi}} = 10,36 \text{ mm} \\ \Omega &= \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(12)^2}{4} = 113,1 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

2. *Calcul des flexibilités*

$$\frac{1}{k_v} = \frac{1}{210000} \left(\frac{0,4 \times 12}{113,1} + \frac{50}{84,3} + \frac{0,4 \times 12}{113,1} \right) = 3,229 \cdot 10^{-6} \text{ mm/N}$$

Comme $D_H = 40 \text{ mm} < 3d_a = 57 \text{ mm}$,

$$\begin{aligned} \Omega_t &= \frac{\pi}{4} \left[(19)^2 - (14)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{40}{19} - 1 \right) \left(\frac{19 \cdot 50}{5} + \frac{(50)^2}{100} \right) \right] = 222,9 \text{ mm}^2 \\ \frac{1}{k_t} &= \frac{1}{210000} \frac{50}{222,9} = 1,068 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

3. *Raideur relative de la vis*

$$\Phi = \frac{1/k_t}{\frac{1}{k_v} + \frac{1}{k_t}} = \frac{1,068}{3,229 + 1,068} = 0,2485$$

4. *Coefficient de charge du système de la vis* : En posant $q = 0,5$ (valeur courante),

$$\Phi' = q\Phi = 0,5 \cdot 0,2485 = 0,1283, \quad (1 - \Phi') = 0,8757$$

5. *Perte de serrage* : 3 interfaces $\nabla \nabla$

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= 5 + 3 \times 4 = 17 \mu\text{m} \\ \Delta N_0 &= \frac{17 \times 10^{-3}}{(3,229 + 1,068)10^{-6}} = 3956 \text{ N} \end{aligned}$$

6. Précontrainte

$$\begin{aligned} N_{0,min} &= 170 + 3956 + 0,8757 \cdot 20000 = 21640N \\ N_{0,max} &= 1,8N_{0,min} = 1,8 \cdot 21640 = 38950N \end{aligned}$$

7. Sécurité par rapport à la déformation permanente

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{N_{0,max}}{\Omega_b} = \frac{38950}{84,3} = 462,0MPa \\ \mu &= 0,14 \\ \text{tg}(\alpha + \varphi^*) &\approx \frac{P}{\pi d_2} + \frac{\mu}{\cos \beta} = \frac{1,75}{\pi \cdot 10,863} + \frac{0,14 \times 2}{\sqrt{3}} = 0,2129 \\ \tau_0 &= 2\sigma_0 \frac{d_2}{d_b} \text{tg}(\alpha + \varphi^*) = 2 \times 462,0 \frac{10,863}{10,36} 0,2129 = 206,3MPa \\ \Delta\sigma &= \frac{\phi' F}{\Omega_b} = \frac{0,1243 \times 20000}{84,3} = 29,49MPa \\ \sigma_{VM} &= \sqrt{(462,0 + 29,49)^2 + 3(206,3)^2} = 607,7MPa \\ s_{0,2} &= \frac{640}{607,7} = 1,053 > 1 \quad \text{O.K.} \end{aligned}$$

8. Sécurité en fatigue

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{F_{max} - F_{min}}{2} = 5000N \\ \sigma_a &= \frac{\Phi' F_a}{\Omega_n} = \frac{0,1243 \times 5000}{80,2} = 7,749N \\ \sigma_D &= 90MPa \quad (\text{vis roulées après T.T.}) \\ s_D &= \frac{90}{7,749} = 11,61 > 1,5 \quad \text{O.K.} \end{aligned}$$

9. Pression sur les pièces

$$\begin{aligned} \Omega_p &= 130mm^2 \\ N_v &= N_0 + \Phi' F = 38950 + 0,1243 \times 20000 = 41440N \\ p &= \frac{N_v}{\Omega_p} = \frac{41440}{130} = 318,7MPa \\ p_{adm} &= 500MPa \quad \text{acier } R_m = 500MPa \\ s_p &= \frac{500}{318,7} > 1 \quad \text{O.K.} \end{aligned}$$

10. Couple de serrage

$$\begin{aligned} M_t &= \frac{N_0 d_2}{2} \text{tg}(\alpha + \varphi^*) = 38950 \frac{10,863}{2} 0,2129 = 45,05 \cdot 10^3 Nmm \\ D_M &= 1,4d = 16,8mm \\ M_{\text{écrou/pièce}} &= \mu N_0 \frac{D_m}{2} = 45,81 \cdot 10^3 Nmm \\ M_S &= M_t + M_{\text{écrou/pièce}} = 90860 Nmm = 90,86Nm \end{aligned}$$

Le couple à prescrire est $0,9 \cdot 90,86 = 81,77Nm$

9.15 Vis sollicitées à l'effort tranchant

Dans les fabrications anciennes, on utilisait des vis pour résister au tranchage. Ceci ne peut se faire que si la section cisailée *n'est pas filetée* et si, de plus, elle est *ajustée dans le trou*. Cete dernière condition est destinée à éviter les chocs. Elle est absolument nécessaire et malheureusement, elle nécessite une opération d'ajustage coûteuse. De plus, il est nécessaire de percer les pièces à assembler simultanément après les avoir positionnées convenablement, ce qui est incompatible avec une fabrication en série. Cette méthode est à présent abandonnée⁵. À l'heure actuelle, on monte les vis avec jeu dans leur trou, et on ne compte, pour la transmission de l'effort tranchant, que sur le frottement. Bien entendu, on perd ainsi le positionnement relatif des pièces, qui doit être assuré par d'autres moyens. On dit généralement : « les vis ne sont pas des centrages ».

9.16 Flexion parasite

Des surfaces insuffisamment parallèles provoquent une flexion de la vis. Si α est l'angle entre les deux surfaces et ℓ , la longueur de la vis, la contrainte de flexion vaudra

$$\sigma_f = E \frac{\alpha d}{\ell 2}$$

et croîtra avec l'angle mais sera inversement proportionnelle à l'élancement ℓ/d de la vis. Pour $\alpha = 1^\circ$ et $\ell/d = 3$, on a

$$\sigma_f = 210000 \cdot \frac{0,0175}{2} \cdot \frac{1}{3} = 611 \text{ MPa} !$$

Ce résultat montre qu'il est indispensable de vérifier le parallélisme des surfaces. Par ailleurs, des vis longues seront beaucoup moins sensibles à ce problème que des vis courtes.

5. La vérification consiste alors à s'assurer que la contrainte de cisaillement de la vis est admissible, ainsi que les pressions de contact entre les vis et les pièces.

Chapitre 10

Assemblages arbre-moyeu

10.1 Généralités

Le problème de la fixation d'un moyeu sur un arbre se pose chaque fois que l'on veut lier à l'arbre une poulie, une roue dentée et, en général, un corps quelconque destiné à tourner avec lui. C'est dire que ce problème se rencontre souvent.

Le tableau ci-dessous donne une classification des modes d'assemblage les plus fréquents, selon leur principe et leur domaine d'utilisation

Principe → Couple ↓	Obstacle		Obstacle précontraint	Adhérence
	Mobilité axiale éventuelle	Fixe axialement		
faible		clavette-disque goupille	clavette-vélo clavette-disque sur rainure moyeu inclinée	clavette creuse pinçage
moyen	clavette //		clavette inclinée	cône emmanchement à la presse
grand	profil pol. arbre cannelé		clavetage tg profil pol. serré arbre cannelé serré	anneaux élast. RINGFEDER emmanchement par ΔT

Il reste toujours la possibilité de réaliser des assemblages permanents : collage, brasure, soudure.

10.2 Dimensionnement du moyeu

Pour le dimensionnement du moyeu, on pourra utiliser les formules empiriques suivantes [65] (voir figure 10.1)

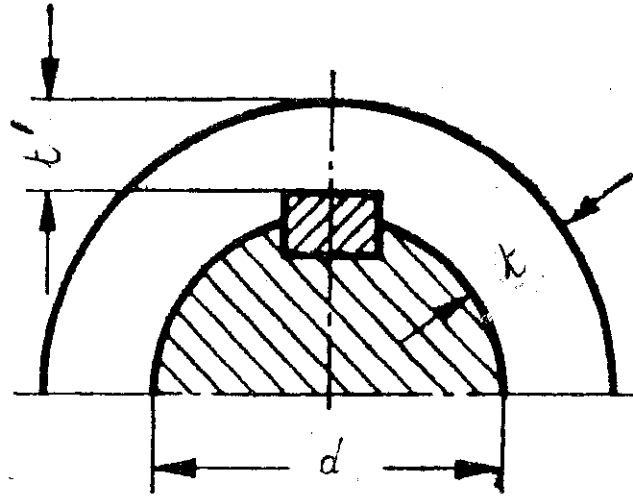


FIGURE 10.1 – Proportions du moyeu.

$$\text{Longueur : } \ell/mm = x \sqrt[3]{10M_t/(Nm)} \quad (10.1)$$

$$\text{épaisseur : } t/mm = y \sqrt[3]{10M_t/(Nm)} \quad (10.2)$$

ou mieux,

$$\text{épaisseur, rainure déduite : } t'/mm = y' \sqrt[3]{10M_t/(Nm)} \quad (10.3)$$

avec les valeurs du tableau suivant :

Liaison	Moyeu en fonte			Moyeu acier ou acier coulé		
	x	y	y'	x	y	y'
frettage, cône	4,2 ... 5,3	2,1...3,0	2,1...3,0	2,1...3,5	1,8...2,6	1,8...2,6
clavette, pinçage	5,3...7,0	1,8...2,1	1,5...1,8	3,5...4,6	1,4...1,8	1,1...1,5
cannelures :						
série forte	3,4...4,2	1,4...1,8	1,3...1,6	2,1...3,0	1,25...1,6	1,1...1,5
série moyenne	2,1...3,0	1,4...1,8	1,2...1,5	1,3...2,1	1,25...1,6	1,0...1,4
série légère	1,4...2,1	1,4...1,8	1,1...1,4	0,8...1,3	1,25...1,6	0,9...1,3

Il faut encore que le moyeu soit *proportionné à l'arbre* : il est normal d'avoir un moyeu de diamètre $\geq 1,8d$ pour un moyeu en fonte et $\geq 1,6d$ pour un moyeu en acier ; une longueur $\geq 0,8d$ pour un moyeu en fonte et $\geq 0,6d$ pour un moyeu en acier.

10.3 Assemblages par effet d'obstacle

10.3.1 Clavettes parallèles

Le plus courant des procédés d'assemblage d'un moyeu sur un arbre est la clavette parallèle. La rainure peut être exécutée par une fraise-doigt (figure 10.2)

ou avec une fraise-disque (figure 10.3). Ce dernier procédé conduit à des concen-

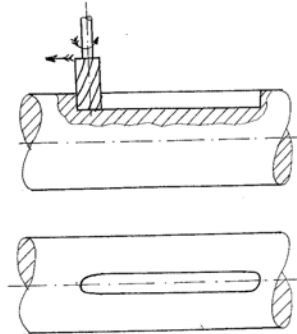


FIGURE 10.2 – Rainure exécutée à la fraise-doigt.

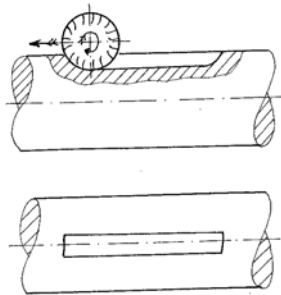


FIGURE 10.3 – Rainure exécutée à la fraise-disque.

trations de contrainte en flexion plus faibles. La rainure du moyeu s'obtient par mortaisage, à moins que l'on ne réalise l'alésage rainuré par brochage. Il est également possible de travailler par électroérosion.

La clavette réalise exclusivement la fixation tangentielle (reprise du moment). La fixation axiale doit être obtenue par un autre moyen :

- une vis de pression ;
- un montage serré (H7/k6 ...m6) ;
- des circlips ou des écrous ;
- un épaulement de l'arbre et un circlips ou un écrou.

Le passage des efforts dans la clavette peut être schématisé comme suit (voir figure 10.4) : l'arbre s'appuie sur la clavette et sur un point A du moyeu situé approximativement à hauteur de l'axe. Il en résulte un moment Fr_1 . La charge passe sous la forme de pressions de contact, entre la clavette et le moyeu d'une part, entre la clavette et l'arbre d'autre part. Ces efforts n'étant pas alignés, il en résulte un moment $\mu = Fe$ qui doit être équilibré par une liaison entre la clavette et l'arbre. Cette liaison peut être obtenue de deux manières :

- par un fort serrage de la clavette (N9/h9) ;
- par des vis de fixation dans l'arbre. Cette dernière solution est de rigueur lorsque le moyeu est mobile.

La pression de contact est maximale sur le moyeu, car la clavette y entre moins profondément que dans l'arbre. En notant ℓ la longueur du moyeu, h la

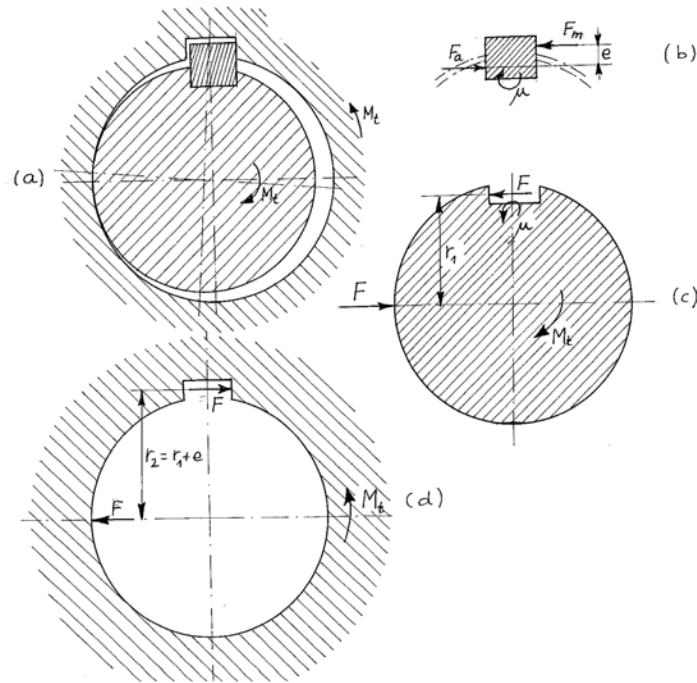


FIGURE 10.4 – Clavette parallèle.

hauteur de la clavette et t_1 la profondeur de la rainure de l'arbre, on vérifie que

$$p = \frac{F}{\ell(h - t_1)} \leq p_{adm} \quad (10.4)$$

avec

$$F = \frac{M_t}{r_2} \lesssim \frac{M_t}{d/2} \quad (10.5)$$

Les pressions admissibles sont assez faibles, en raison des chocs qui peuvent se produire et provoquer le matage. On se référera au tableau ci-dessous [44].

Pressions de contact admissibles/MPa	
Matériaux en présence	M_t avec chocs...constant
St42/fonte grise	45...65
St50 ou plus dur/acier ou acier coulé	75...115
Glissant à vide : diviser ces valeurs par 3	
Glissant sous charge : diviser ces valeurs par 6	

On notera que les dimensions de b et h sont normalisées. C'est la *longueur* que l'on peut faire varier.

Les clavettes sont normalement fabriquées en un acier plus dur que les pièces à assembler. On utilise d'habitude un acier St60...St80. Les tolérances des clavettes sont :

Tolérances des clavettes (ISO/R773)	
Largeur de la clavette b	h9
Hauteur de la clavette h	h9 si $h \leq 6mm$ h11 si $h > 6mm$

Pour les largeurs des rainures, les tolérances sont indiquées dans le tableau suivant :

Tolérances des largeurs de rainures			
Pièce	Cas normal	Serrage	Libre (vis)
Arbre	N9	P9	H9
Moyeu	JS9	P9	D10

On notera que le moyeu doit toujours être un peu plus long que la clavette.

10.3.1.1 Dimensions courantes (en mm) des clavettes parallèles et de leurs rainures

clavette $b \times h$	diamètre arbre d		profondeur rainure	
	$>$	$\leq$	arbre t_1	moyeu t_2
2×2	6	8	1,2	1
3×3	8	10	1,8	1,4
4×4	10	12	2,5	1,8
5×5	12	17	3	2,3
6×6	17	22	3,5	2,8
8×7	22	30	4	3,3
10×8	30	38	5	3,3
12×8	38	44	5	3,3
14×9	44	50	5,5	3,8
16×10	50	58	6	4,3
18×11	58	65	7	4,4
20×12	65	75	7,5	4,9
22×14	75	85	9	5,4
25×14	85	95	9	5,4
28×16	95	110	10	6,4
32×18	110	130	11	7,4
36×20	130	150	12	8,4
40×22	150	170	13	9,4
45×25	170	200	15	10,4
50×28	200	230	17	11,4
56×32	230	260	20	12,4
63×32	260	290	20	12,4
70×36	290	330	22	14,4
80×40	330	380	25	15,4
90×45	380	440	28	17,4
100×50	440	500	31	19,5

10.3.2 Clavettes-disques

Ces clavettes particulières, représentées en figure 10.5, affaiblissent très fort l'arbre. Aussi ne sont-elles guère utilisées qu'en bout d'arbre, où le moment de flexion est nul. On les calcule à la pression de contact sur le moyeu :

$$p = \frac{F}{\ell(h - t_1)} \leq p_{adm} \quad (10.6)$$

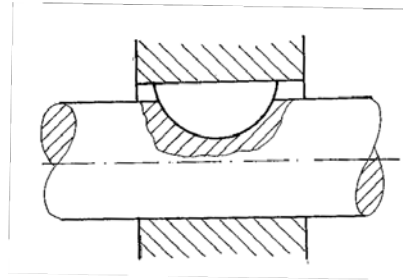


FIGURE 10.5 – Clavette-disque.

où h est la hauteur maximale de la clavette, t_1 est la profondeur maximale de la rainure dans l'arbre et

$$F = \frac{M_t}{d/2} \quad (10.7)$$

Les pressions admissibles sont les mêmes que pour les clavettes parallèles. On utilise également les mêmes tolérances pour les largeurs de rainures, à ceci près que le cas *libre* n'existe pas (on ne fixe pas ce type de clavette avec des vis).

10.3.3 Cannelures

Lorsque le couple est trop important pour pouvoir être transmis par une clavette de longueur raisonnable ($\ell \leq 2d$), on utilise des arbres *cannelés* (figure 10.6, (a)). Ils sont également très fréquents dans les boîtes de vitesses à déplacement de roues dentées. Initialement, les cannelures avaient toujours leurs flancs

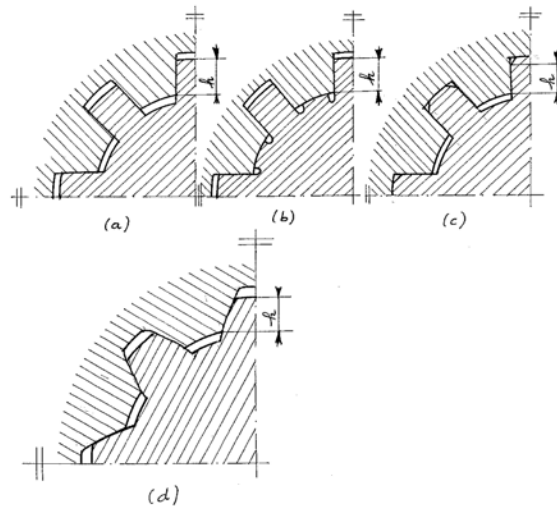


FIGURE 10.6 – Cannelures.

parallèles. Le centrage du moyeu se fait alors sur la circonférence intérieure (figure 10.6, (b)) lorsque le nombre de dents z n'est pas trop grand ($6 \leq z \leq 10$) et, si les dents sont plus nombreuses, sur les dents elles-mêmes (figure 10.6, (c))

ce qui réduit un peu l'hyperstaticité. Depuis, on a développé des *cannelures triangulaires* à 60° , ce qui permet d'aller de 4 à 60 cannelures, ainsi que les *cannelures en développante de cercle* (figure 10.6, (d)). Ces dernières présentent l'avantage d'une moindre concentration de contrainte et en outre, peuvent être taillées à l'aide des mêmes outils que les engrenages. Le nombre de cannelures en développante peut aller jusqu'à 61. Pour le calcul, on notera que, comme

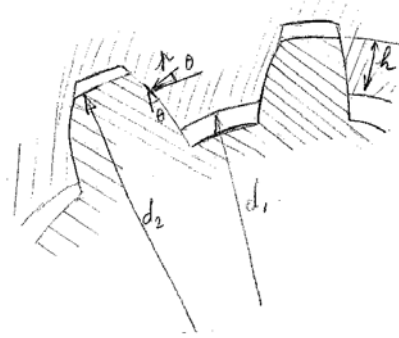


FIGURE 10.7 – Calcul des cannelures.

l'illustre la figure 10.7, si p est la pression sur une dent, on a, quelle que soit la géométrie,

$$(M_t)_{1dent} = \ell \int_{dent} p \cos \theta r ds = \ell \int_{dent} p r dr = \ell p \left(\frac{d_2^2}{8} - \frac{d_1^2}{8} \right) = p \ell h r_m$$

avec

$$h = \frac{d_2 - d_1}{2} \quad \text{et} \quad r_m = \frac{d_1 + d_2}{4}$$

Du fait de l'hyperstaticité prononcée de ce système, on admet que l'effort ne se transmet que par 75% des z dents, ce qui donne

$$M_t = p \cdot 0,75 z \ell h r_m \quad (10.8)$$

Il faut alors vérifier que $p \leq p_{adm}$, les pressions amissibles étant les mêmes que pour les clavettes parallèles.

Dans le cas, où l'on ne désire pas permettre de mouvement axial, on utilise des circlips.

10.3.4 Goupilles

On utilise également des goupilles, pleines ou creuses et fendues (figure 10.8). Dans ce dernier cas, la goupille est en acier trempé (goupilles élastiques). L'affaiblissement de l'arbre est alors très important, spécialement en flexion. Les goupilles ne s'utilisent donc que pour la transmission de faibles couples. Les goupilles pleines peuvent servir de *limiteurs de couple*, cassant lors d'une surcharge. Pour leur calcul,

- Les goupilles pleines, en acier doux ou mi-dur, doivent être vérifiées au cisaillement technologique comme suit : si Ω est la section de la goupille

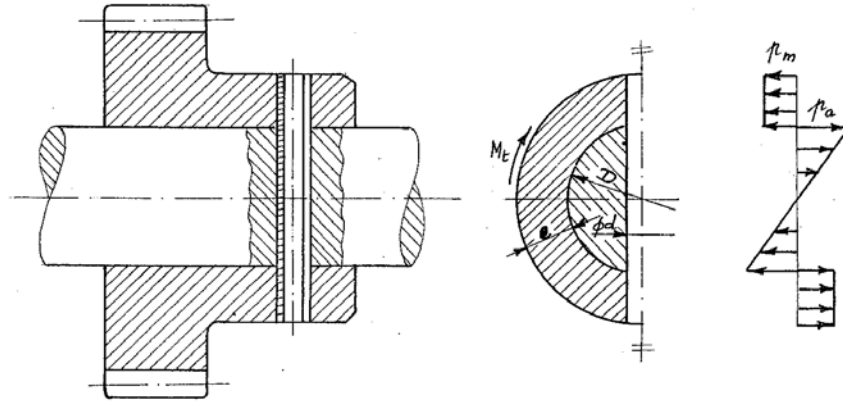


FIGURE 10.8 – Goupille creuse fendue.

et D le diamètre de l'arbre,

$$\tau = \frac{M_t}{\Omega D} \leq \tau_{adm} \quad (10.9)$$

avec

$$\tau_{adm} = 0,8R_m/s, \quad s = 2(\text{calme}) \text{ à } 4(\text{chocs})$$

- Quel que soit le type de goupille, il faut vérifier les pressions de contact sur l'arbre et le moyeu. La distribution de ces pressions est indiquée en figure 10.8. A une pression p en un rayon donné correspond un effort tangentiel par unité de longueur de la goupille égal à pd , d étant le diamètre de la goupille.

Au niveau de l'arbre, si p_{Ma} est la pression maximale à l'arbre, on a

$$p(r) = p_{Ma} \frac{r}{D/2}$$

donc le couple est donné par

$$M_t = \int_{-D/2}^{D/2} p_{Ma} \frac{r}{D/2} \cdot d \cdot r \, dr = 2 \frac{dp_{Ma}}{D} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{-D/2}^{D/2} = \frac{dp_{Ma} D^2}{6}$$

ce qui mène à la condition

$$p_{Ma} = \frac{6M_t}{D^2 d} \leq p_{adm} \quad (10.10)$$

Au niveau du moyeu, la pression est considérée comme uniforme, de valeur p_m . Si e est l'épaisseur du moyeu, le couple transmis vaut

$$M_t = p_m d \cdot e \cdot (D + e)$$

d'où la condition

$$p_m = \frac{M_t}{de(D + e)} \leq p_{adm} \quad (10.11)$$

Les pressions admissibles sont les mêmes que pour les clavettes parallèles.

Les proportions normales sont

$$d/D = 0,2 \dots 0,3$$

$$D_{\text{moyeu}}/D = (D + 2e)/D = 2,5 \text{ (fonte) ou } 2 \text{ (acier coulé ou laminé)}$$

Les ajustements se font comme suit :

– Trou de goupille pleine :

$$0,8 \dots 1,2 \text{ mm} : H8$$

$$1,5 \dots 3 \text{ mm} : H9$$

$$> 3 \text{ mm} : H11$$

– Trou de goupille élastique : H12

– Goupille elle-même : h11

10.3.5 Profils polygonaux

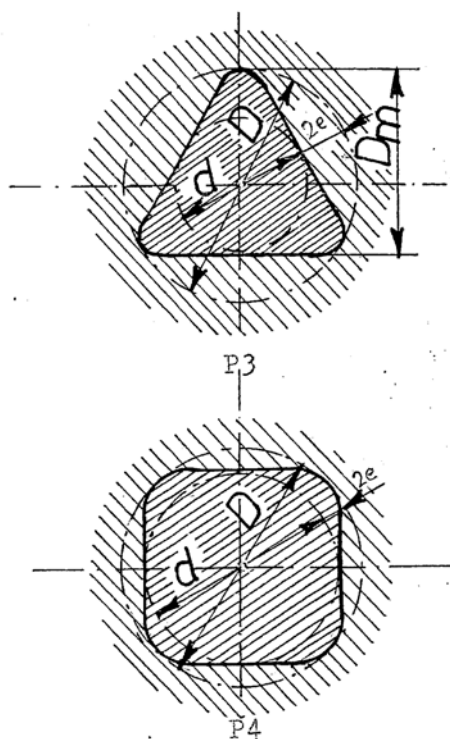


FIGURE 10.9 – Profils polygonaux.

Ce type de profils, fabriqués par MANURHIN à Mulhouse (France) et par FORTUNA-WERKE à Stuttgart-Bad Cannstatt (Allemagne) conduisent à la plus faible concentration de contrainte ($\alpha_{kt} = 1,2 \dots 1,5$). On utilise le profil triangulaire (P3) et le profil rectangulaire (P4) (figure 10.9).

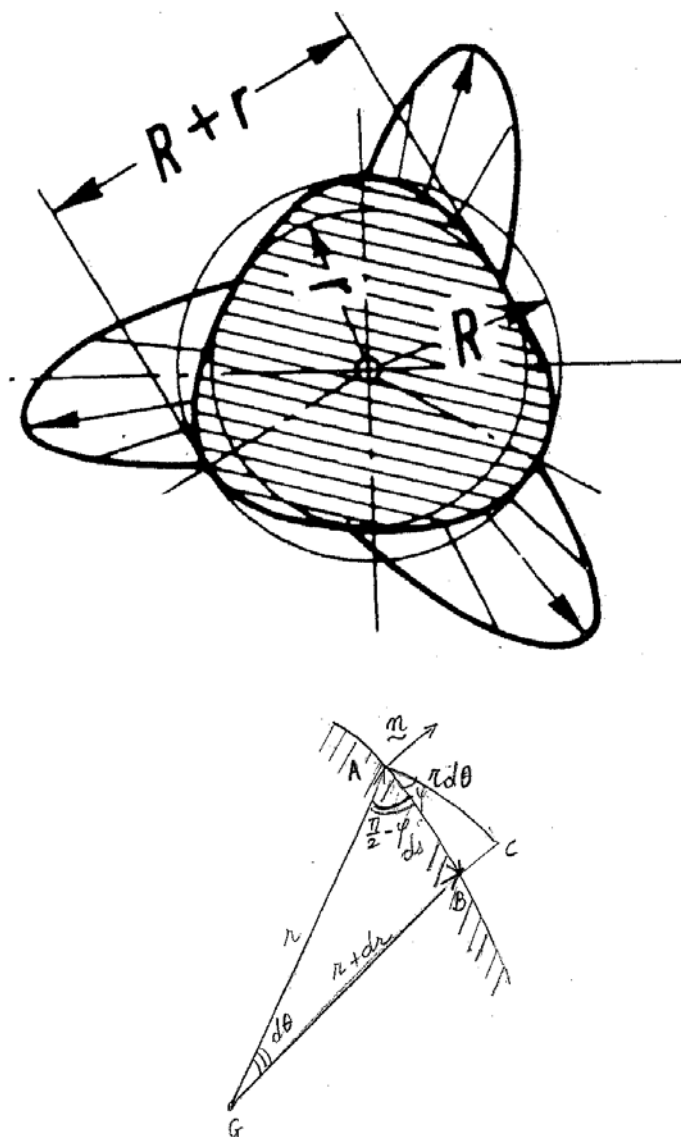


FIGURE 10.10 – Pressions dans les assemblages à profil polygonal.

Comme l'indique la figure 10.10, les pressions se répartissent de manière non uniforme sur le profil. Pour les déterminer, établissons d'abord deux relations géométriques du profil. Dans le triangle GAB , on peut écrire

$$\overline{GB}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{GA} \cdot \overline{AB} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

soit

$$(r + dr)^2 = r^2 + ds^2 - 2rds \sin \varphi$$

et, en négligeant le second ordre,

$$2rdr = -2rds \sin \varphi$$

ce qui implique la relation

$$\sin \varphi = -\frac{dr}{ds} \quad (10.12)$$

Par ailleurs, il est clair que

$$ds \cos \varphi = r d\theta \quad (10.13)$$

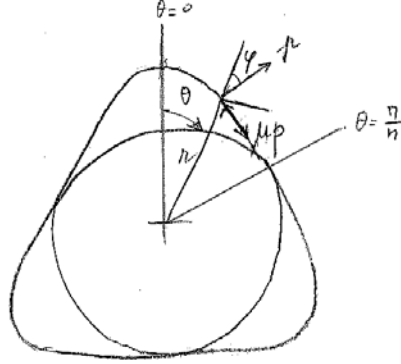


FIGURE 10.11 – Passage des efforts.

Cela étant, si n est le nombre de sommets du profil, ℓ , la longueur de calage et μ le coefficient de frottement, on a, comme le montre la figure 10.11,

$$M_t = n\ell \left\{ \underbrace{\int_0^{\pi/n} p \sin \varphi \cdot r ds}_I + \underbrace{\int_0^{\pi/n} \mu p \cos \varphi \cdot r ds}_{II} \right\}$$

et, par (10.12) et (10.13),

$$I = - \int_0^{\pi/n} p r dr \quad , \quad II = \mu \int_0^{\pi/n} p r^2 d\theta$$

A ce stade, nous admettrons que la géométrie est correctement représentée par l'expression

$$r(\theta) = R_m + e \cos n\theta$$

R_m étant le rayon moyen et e , la demi-différence entre les rayons extrêmes. Nous admettrons en outre que la pression, qui doit s'annuler en $\theta = 0$ et en $\theta = \pi/n$, admet la forme simple

$$p = p_M \sin n\theta$$

où p_M désigne visiblement la pression maximale. Il en découle

$$I = p_M n e \int_0^{\pi/n} (R_m + e \cos n\theta) \sin^2 n\theta d\theta = p_M n e R_m \frac{\pi}{2n} = p_M \frac{D_m}{2n} \cdot \frac{n}{2} e \pi$$

où l'on a introduit le diamètre moyen $D_m = 2R_m$. De même,

$$\begin{aligned} II &= p_M \mu \int_0^{\pi/n} \sin n\theta (R_m^2 + 2R_m e \cos n\theta + e^2 \cos^2 n\theta) d\theta \\ &= p_M \mu \left(R_m^2 \frac{2}{n} + e^2 \frac{2}{3n} \right) = p_M \frac{D_m}{2n} \mu \left(D_m + \frac{4}{3} \frac{e^2}{D_m} \right) \end{aligned}$$

Au total, il vient donc

$$M_t = \frac{1}{2} p_M D_m \ell \left[\frac{n}{2} \pi e + \mu D_m \left(1 + \frac{4}{3} \frac{e^2}{D_m^2} \right) \right]$$

soit, en négligeant le petit terme en e^2/D_m^2 devant l'unité,

$$M_t \approx \frac{1}{2} p_M D_m \ell \left(\frac{n}{2} \pi e + \mu D_m \right) \quad (10.14)$$

Cette relation permet de calculer p_M . Pour le coefficient de frottement, on adopte généralement la valeur $\mu = 0,1$. On vérifiera la condition

$$p_M \leq \frac{R_{0,2}}{s}, \quad s = 1, 25 \quad (10.15)$$

beaucoup moins sévère que pour la pression de contact des clavettes. En effet, la pression est répartie et, de plus, le frottement amortit les chocs.

Le profil *carré* convient mieux pour les moyeux *mobiles* que le profil triangulaire pour lequel un jeu provoque une forte perturbation du diagramme des pressions.

Les ajustements se choisissent comme suit :

Moyeu mobile : H7/g6 (profil carré de préférence)
Moyeu fixe : H7/k6 (les deux profils)

10.3.5.1 Table des profils polygonaux

P3		P4	
D/mm	d/mm	D/mm	d/mm
14,88	13,12	14	11
17	15	16	13
19,12	16,88	18	15
21,26	18,74	20	17
23,4	20,6	22	18
26,6	23,4	25	21
29,8	26,2	28	24
32	28	30	25
34,24	29,76	32	27
37,5	32,5	35	30
42,8	37,2	40	35
48,2	41,8	45	40
53,6	46,4	50	43
59	51	55	48
64,5	55,5	60	53
69,9	60,1	65	58
75,6	64,4	70	60
81,3	68,7	75	65
86,7	73,3	80	70
92,1	77,9	85	75
98	82	90	80
103,5	86,5	95	85
109	91	100	90

10.4 Assemblages par effet d'adhérence

10.4.1 Généralités

Leur principe est de créer une pression de surface telle que le couple et un éventuel effort axial puissent être repris par frottement. Il va de soi que l'état des surfaces de contact doit jouer un grand rôle. On a cru longtemps qu'une grande rugosité était favorable. Des recherches ont montré qu'au contraire, il est avantageux de présenter des surfaces très parfaites.

Lorsque la pression macroscopique est élevée, comme dans le cas du frettage, les sommets des rugosités sont soumis à des pressions locales beaucoup plus élevées. Il en résulte un *tassement plastique* des aspérités qui s'arrêtera lorsque la pression moyenne sera devenue admissible, ce qui constitue une limite difficile à préciser. Mais le tassement plastique se faisant à volume constant, il devra s'arrêter lorsque le tassement Δu_0 vaudra (figure 10.12)

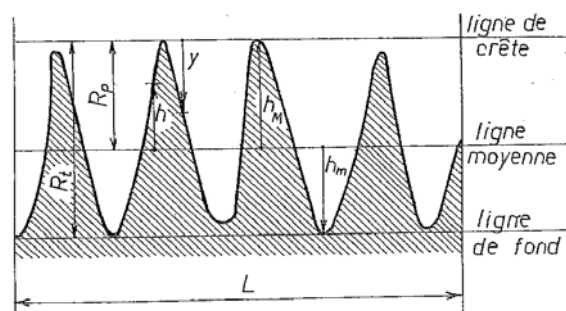


FIGURE 10.12 – Tassement des rugosités.

$$\Delta u_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell y dx = R_p$$

valeur connue sous le nom de *profondeur moyenne de rugosité*. Ainsi donc, le tassement maximal d'un couple de surfaces conjuguées notées 1 et 2 vaut

$$\Delta u_0 = R_{p_1} + R_{p_2}$$

Voici quelques valeurs indicatives de R_p , selon Niemann [65] :

Procédé de fabrication	poli	finement rectifié	finement tourné	tourné
$R_p/\mu m$	0,5	1,25	2,5	5

Pour le cas courant d'un arbre dans un moyeu, la perte d'interférence diamétrale est donc

$$\Delta \delta = 2(R_{p_a} + R_{p_m}) \quad (10.16)$$

puisque le tassement se produit aux deux extrémités d'un même diamètre.

Pour les coefficients de frottement, on utilise les valeurs *en mouvement* et non au repos, car il se pourrait qu'un mouvement s'amorce lors d'une surcharge. En d'autres circonstances, ce choix constitue de toute manière une sécurité. On peut adopter les valeurs suivantes [44] :

Coefficient de frottement						
Pièces appariées	St/St ou St/St coulé		St/Ft		St/Al ou Mg	St/All. Cu
Surfaces	grasses	sèches	grasses	sèches	sèches	sèches
Montage à la presse Cônes	0,07...0,14	0,10...0,17	0,05	0,07...0,12	0,05...0,09	0,05...0,13
Autres cas	0,1...0,2	0,15...0,25	0,08	0,1...0,18	0,08...0,13	0,08...0,2
arbre refroidi	0,1...0,2	0,1...0,15	0,08	0,1...0,18	0,08...0,13	0,08...0,2

10.4.2 Frettage

10.4.2.1 Généralités

Le frettage consiste à faire adhérer un moyeu sur un arbre par la pression provenant d'une interférence : avant montage, le diamètre intérieur du moyeu est plus faible que le diamètre extérieur de l'arbre. Pour les serrages modérés, le montage se fait à la presse ; pour les très grandes interférences, on dilate le moyeu en l'échauffant ou on refroidit l'arbre, ce qui permet un montage sans effort.

10.4.2.2 Relations élastiques fondamentales

La détermination de l'interférence nécessaire se fonde sur la théorie des cylindres à paroi épaisse, due à Lamé et Clapeyron [47, 57, 84], dont les résultats peuvent être résumés comme suit, en appelant Q le rapport d_i/d_e entre le diamètre intérieur et le diamètre extérieur.

a) Action d'une pression intérieure (moyeu)

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta_{max}} &= p \frac{1 + Q_m^2}{1 - Q_m^2} \\ \sigma_{r_{max}} &= -p\end{aligned}\quad (10.17)$$

ces deux contraintes se présentant sur le manteau intérieur. La contrainte équivalente de Tresca vaut

$$\sigma_T = \sigma_{\theta_{max}} - \sigma_{r_{max}} = \frac{2p}{1 - Q_m^2} \quad (10.18)$$

La raideur du manteau intérieur est donnée par la relation

$$\frac{u_m}{r_m} = C_m p \quad \text{avec} \quad C_m = \frac{1}{E_m} \left(\frac{1 + Q_m^2}{1 - Q_m^2} + \nu_m \right) \quad (10.19)$$

b) Action d'une pression extérieure (arbre)

– Si $Q_a \neq 0$ (arbre creux)

$$\sigma_{\theta_{max}} = -\frac{2p}{1 - Q_a^2} \quad (\text{manteau intérieur}) \quad (10.20)$$

$$\sigma_T = \frac{2p}{1 - Q_a^2} \quad (\text{manteau intérieur}) \quad (10.21)$$

– Si $Q_a = 0$ (arbre plein)

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -p \text{ partout}, \sigma_T = p \quad (10.22)$$

Dans les deux cas, la raideur est donnée par

$$\frac{u_a}{r_a} = -C_a p, \quad \text{avec} \quad C_a = \frac{1}{E_a} \left(\frac{1 + Q_a^2}{1 - Q_a^2} - \nu_a \right) \quad (10.23)$$

10.4.2.3 Interférence conduisant à une pression donnée

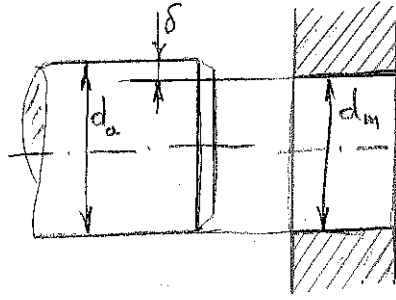


FIGURE 10.13 – Interférence diamétrale.

Soit alors un arbre de diamètre d_a supérieur au diamètre d_m du moyeu de l'interférence δ (figure 10.13). Après assemblage, l'arbre voit son rayon diminué de $|u_a|$ et son diamètre devient donc

$$d = d_a - 2|u_a| = d_a - C_a p d_a = d_a(1 - C_a p)$$

Le moyeu prend quant à lui le diamètre

$$d = d_m + 2u_m = d_m(1 + C_m p)$$

Le diamètre final des deux pièces est identique, ce qui s'écrit

$$d = d_a(1 - C_a p) = d_m(1 + C_m p)$$

relation dont on tire

$$\delta = d_a - d_m = d_a C_a p + d_m C_m p \approx d(C_a + C_m)p$$

la dernière approximation se justifiant par le fait que la variation relative des diamètres est de l'ordre de 10^{-3} . Au total, on a donc

$$\frac{\delta}{d} = (C_a + C_m)p \quad (10.24)$$

10.4.2.4 Principe du calcul de l'assemblage

Le calcul de l'assemblage comporte deux étapes : le calcul du serrage nécessaire pour assurer l'adhérence et la vérification de la résistance sous ce serrage.

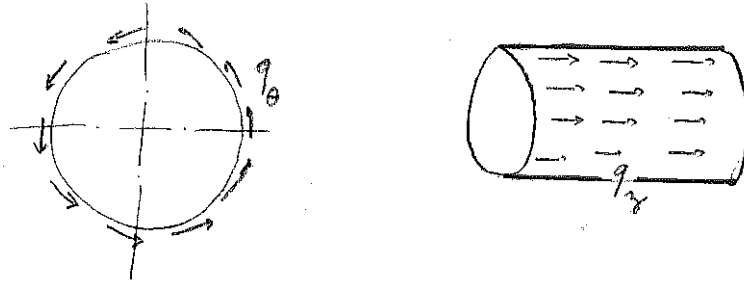


FIGURE 10.14 – Passage des efforts.

10.4.2.5 Calcul du serrage nécessaire à assurer l'adhérence

On commence par calculer la pression nécessaire au fonctionnement correct.

- Le *moment de torsion* est repris par des efforts tangentiels q_θ supposés uniformes, si bien que pour une longueur ℓ et un diamètre d , on aura (figure 10.20)

$$M_t = q_\theta \frac{d}{2} \pi d \ell$$

soit

$$q_\theta = \frac{2M_t}{\pi d^2 \ell} \quad (10.25)$$

- L'*effort axial* est repris par des efforts longitudinaux q_z dont la résultante est

$$F_a = q_z \pi d \ell$$

ce qui donne

$$q_z = \frac{F_a}{\pi d \ell} \quad (10.26)$$

Au glissement, on aura

$$\sqrt{q_\theta^2 + q_z^2} = \mu p$$

ce qui signifie que la *pression minimale* assurant l'adhérence vaut

$$p_{min} = \frac{\sqrt{q_\theta^2 + q_z^2}}{\mu} \quad (10.27)$$

À cette pression minimale correspond une interférence minimale théorique $\delta_{min,th}$ donnée par la condition

$$\frac{\delta_{min,th}}{d} = (C_a + C_m) p_{min} \quad (10.28)$$

On corrige cette valeur de la perte d'interférence par tassement des aspérités :

$$\delta_{min} = \delta_{min,th} + 2(R_{pa} + R_{pm}) \quad (10.29)$$

10.4.2.6 Calcul de l'interférence maximale

La seconde étape est le calcul du serrage maximal pour assurer la résistance. C'est le moyeu qui est critique.

Calcul élastique. C'est la méthode classique.

Pour un moyeu en *fonte*, il faut limiter la plus grande contrainte d'extension :

$$\sigma_{max} = p \frac{1 + Q_m^2}{1 - Q_m^2} \leq \frac{R_m}{s_m}, \quad s_m = 2 \dots 3$$

d'où

$$p_{max} = \frac{1 - Q_m^2}{1 + Q_m^2} \frac{R_m}{s_m} \quad (10.30)$$

Pour les moyeux en matériau *ductile*, on se limite en général à la première plastification, ce qui mène à la condition

$$\sigma_T = \frac{2p}{1 - Q_m^2} \leq \frac{R_e}{s_e}, \quad s_e = 1, 25$$

soit

$$p_{max} = \frac{1 - Q_m^2}{2} \frac{R_e}{s_e} \quad (10.31)$$

Dans les deux cas, on en déduit l'interférence maximale par

$$\delta_{max} = (C_a + C_m)p_{max} \quad (10.32)$$

Calcul élastoplastique. Ce calcul ne vaut que pour un moyeu ductile.

L'étude du comportement élasto-plastique du moyeu montre que la pression continue à croître après la première plastification [57, 53]. Si la plasticité s'étend jusqu'au rayon $\frac{d_p}{2} = \psi \frac{de}{2}$, le moyeu est régi par les équations

$$\begin{aligned} \frac{p}{R_e} &= \ln \frac{\psi}{Q_m} + \frac{1 - \psi^2}{2} \\ \frac{2E_m u_m}{R_e d_{i,m}} &= \left(\frac{\psi}{Q_m} \right)^2 \left[1 - (1 - \nu_m) \frac{1 - \psi^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (10.33)$$

représentées en figures 10.15 et 10.16.

La *plastification complète* se produit pour $\psi = 1$, ce qui donne

$$\frac{p}{R_e} = \ln \frac{1}{Q_m} \quad (10.34)$$

$$\frac{2E u_m}{R_e d_i} = \frac{1}{Q_m^2} \quad (10.35)$$

On peut donc se contenter de la double limitation suivante dans le cas courant de l'arbre plein :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{max} \leq R_{e,m} \ln \frac{1}{Q_m} \frac{1}{s_e} \\ p_{max} \leq R_{e,a} \frac{1}{s_e} \end{array} \right\} s_e = 1, 25 \quad (10.36)$$

L'interférence correspondante se calcule alors par

$$\frac{\delta_{max}}{d} = \left(\frac{u_{max}}{r} \right)_a + \left(\frac{u_{max}}{r} \right)_m \quad (10.37)$$

avec

$$\left(\frac{u_{max}}{r} \right)_a = C_a p \quad (10.38)$$

tandis que la valeur relative au moyeu se calcule à l'aide de la valeur de $(Eu)/R_e r$ correspondant à p_{max}/R_e dans les diagrammes.

Le bénéfice essentiel du régime élasto-plastique est la possibilité de travailler avec de plus grandes pressions, donc avec des portées plus petites et éventuellement moins précises ($(\delta_{max} - \delta_{min})$ augmente).

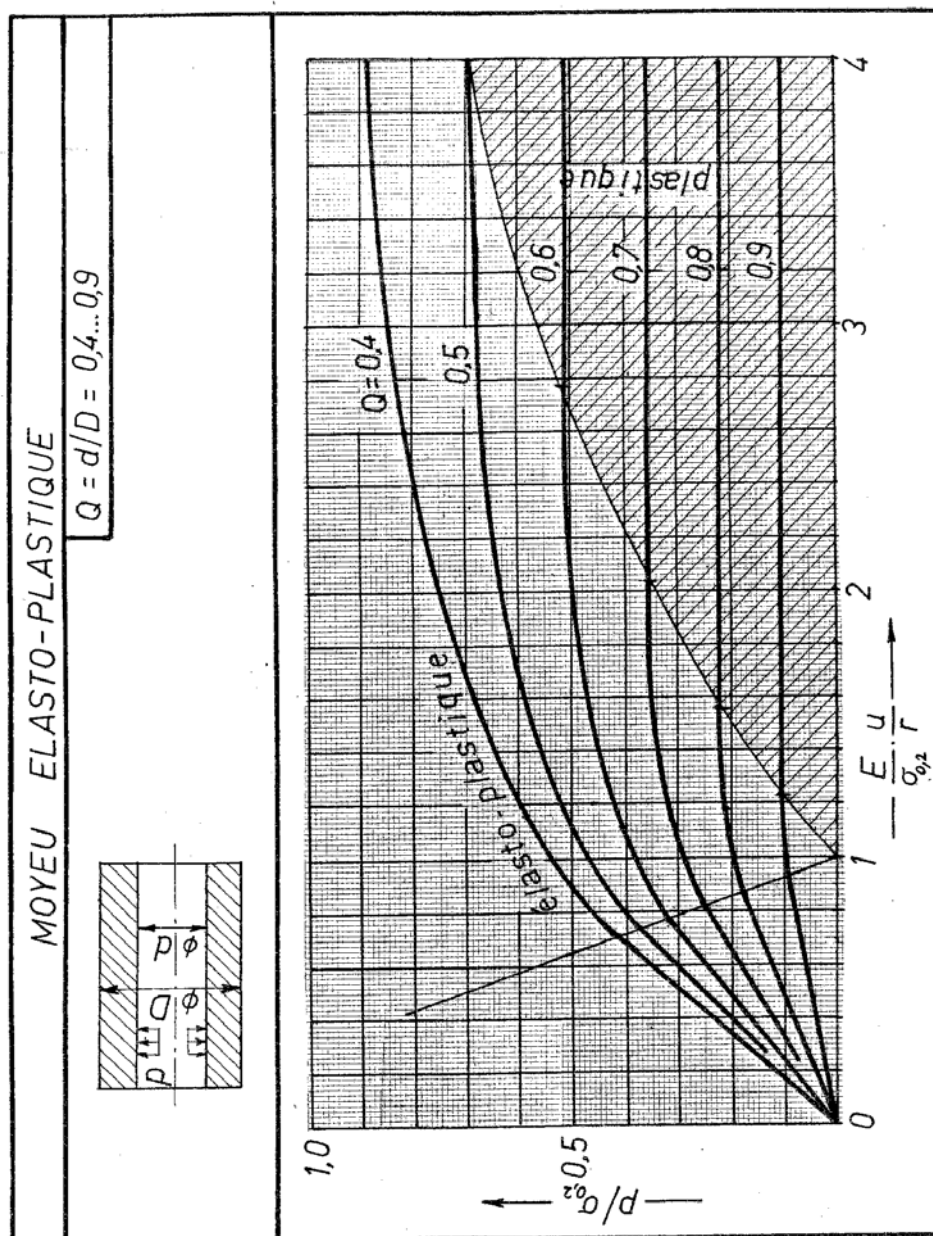


FIGURE 10.15 – Moyeu élasto-plastique (1).

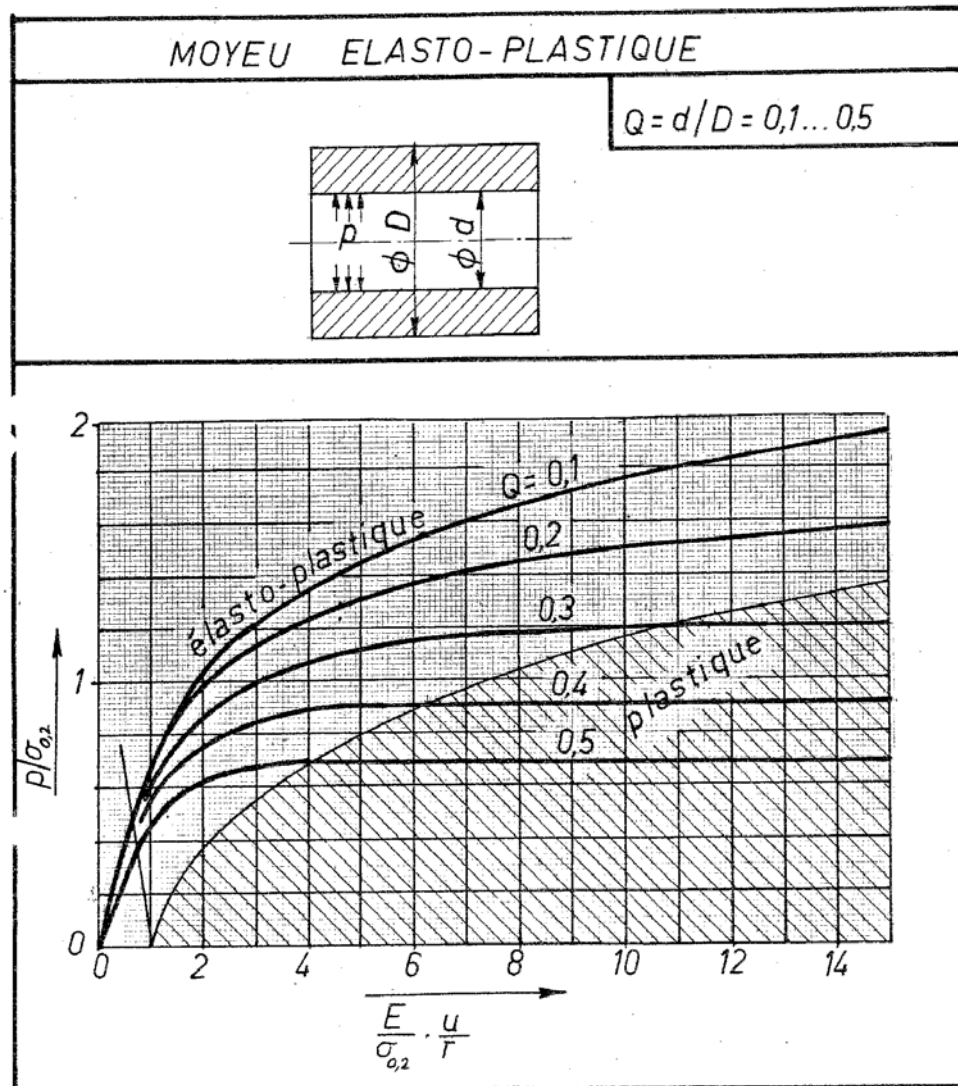


FIGURE 10.16 – Moyeu élasto-plastique (2).

10.4.2.7 Choix de l'ajustement

Connaissant δ_{max} et δ_{min} , il faut trouver un ajustement permettant de respecter ces limites. L'alésage sera choisi d'un degré de tolérance $n = 8, 7$ ou 6 , par ordre de préférence. Le degré de tolérance de l'arbre sera alors $(n - 1)$. On devra donc avoir

$$IT_n + IT_{n-1} \leq \delta_{max} - \delta_{min}$$

On commence donc par établir un tableau de la forme

n	IT_n	IT_{n-1}	$IT_n + IT_{n-1}$	?
8	*	*	*	NON
7	*	*	*	OK
6	*	*	*	OK

Il faut choisir la plus grande valeur de n qui convient. En cas d'échec, il faut augmenter le diamètre de la portée ou la longueur de l'assemblage, sans pour autant dépasser $\ell/d = 2$. On cherche alors des ajustements tels que

$$\delta_M \leq \delta_{max} \quad \text{et} \quad \delta_m \geq \delta_{min}$$

le plus souvent dans le système de l'alésage normal.

10.4.2.8 Montage à la presse

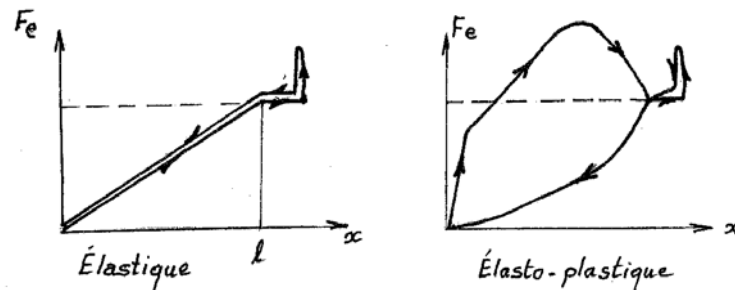


FIGURE 10.17 – Effort d'emmanchement.

Lors du montage à la presse, il faut vaincre l'effort de frottement, qui, pour une longueur x déjà engagée, vaut (figure 10.17)

$$F_e = \pi dx \mu p$$

et croît donc linéairement. Cependant, si l'ajustement est élastoplastique, le diagramme comporte un dépassement [65] et il est prudent de prévoir une capacité de presse double.

10.4.2.9 Montage par différence de température

On peut chauffer le moyeu

- en le trempant dans l'eau bouillante : $+100^\circ C$;
- en le trempant dans l'huile minérale bouillante : $+360^\circ C$;
- en le mettant au four : $+700^\circ C$.

Les températures sont limitées par le *risque de changement de structure* du matériau (modification des propriétés mécaniques, des cotes et de la forme).

On peut refroidir l'arbre

- en le mettant au congélateur : $-20^\circ C$;
- en le plongeant dans la neige carbonique : $-72^\circ C$;
- en le plongeant dans l'air liquide : $-150^\circ C$ (risque d'explosion et de fragilisation du matériau : porter gants et lunettes!) ;
- en le plongeant dans l'azote liquide : -192° (mêmes risques).

La variation de température $\Delta\theta$ doit au moins assurer l'annulation de l'interférence. Il convient encore d'assurer un certain jeu ($\approx 1IT7$). On obtient donc la condition suivante, en notant α le coefficient de dilatation thermique,

$$\delta_{max} + IT7 = \alpha\Delta\theta$$

soit, selon le cas,

$$\theta_m = \theta_{amb} + \frac{\delta_{max} + IT7}{\alpha} \quad (10.39)$$

ou

$$\theta_a = \theta_{amb} - \frac{\delta_{max} + IT7}{\alpha} \quad (10.40)$$

le problème se complique un tout petit peu du fait que le coefficient de dilatation varie avec la température. Mais il suffit de faire le calcul avec une valeur estimée de α , puis de corriger celle-ci. Voici un tableau des coefficients de dilatation thermique, établi à partir des données de Ražnević [75] :

Coefficients de dilatation thermique entre $0^\circ C$ et $T^\circ C$ (K^{-1})		
matériau	température T ($^\circ C$)	$10^5\alpha$
acier au carbone	-190	0,86
	0	1,10
	700	1,49
fonte grise	-190	0,84
	0	0,98
	800	1,47
bronze 85Cu,9Mn,6Zn	-190	1,49
	0	1,71
	500	1,92
laiton 62Cu,38Zn	-190	1,64
	400	2,10
aluminium, duralumin	-253	1,47
	-100	2,20
	600	2,83

Les températures de ce tableau ont été choisies de manière à permettre une interpolation linéaire. Ainsi, pour l'aluminium, on obtient

$$10^5\alpha(0; -190) \approx 1,47 + \frac{-190 - (-253)}{-100 - (-253)}(2,20 - 1,47) = 1,77$$

la vraie valeur étant 1,81 (2% d'erreur).

10.4.2.10 Diminution du serrage avec la vitesse de rotation

Lors d'une rotation rapide, les forces centrifuges tendent à dilater le moyeu, creux, plus fortement que l'arbre ici supposé plein. Il en résulte une diminution de la pression de serrage, qui s'annule pour la *fréquence de rotation limite* [65]¹

$$N_L = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{32p(0)}{(3 + \nu)\rho d_{e,m}^2(1 - Q_m^2)}} \quad (10.41)$$

1. Cette formule n'est valable que si l'arbre et le moyeu sont constitués du même matériau.

où $p(0)$ est la pression à fréquence de rotation nulle (il convient de faire le calcul avec p_{min} , par sécurité). Pour une fréquence de rotation N comprise entre 0 et N_L , la pression varie selon la formule

$$p(N) = p(0) \left[1 - \left(\frac{N}{N_L} \right)^2 \right] \quad (10.42)$$

Le couple et la force axiale transmissibles varient évidemment selon la même loi.

Ainsi, pour $p_{min} = 30 \text{ MPa}$; $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$; $d_{e,m} = 80 \text{ mm}$; $Q_m = 0,5$; $\nu = 0,3$, on obtient

$$N_L = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{32 \cdot 3 \cdot 10^7}{3,3 \cdot 7800 \cdot (0,08)^2 \cdot 0,75}} = 443,6 \text{ tr/s}$$

soit 26620 tr/min . À 3000 tr/min , la pression est multipliée par le facteur

$$1 - \left(\frac{3000}{26620} \right)^2 = 0,9873 \quad (-1,3\%)$$

La diminution de pression est souvent faible. Néanmoins, dans le cas de rotations rapides, ce calcul doit être effectué.

10.4.2.11 Exemple

Frettage d'un moyeu St50 sur un arbre St50. Montage à la presse. $R_e = 300 \text{ MPa}$; $d = 40 \text{ mm}$; $d_{e,m} = 80 \text{ mm}$; $\ell = 50 \text{ mm}$.

Arbre et moyeu finement rectifiés, $R_p = 1,25 \mu\text{m}$. Les surfaces en présence sont grasses.

Moment à transmettre : $M_t = 850 \text{ Nm}$

Déterminer l'ajustement et la force nécessaire à la presse, pour un frettage élastoplastique.

Solution

Pression minimale Coefficient de frottement (surfaces grasses) : $\mu = 0,07$

$$\begin{aligned} q_\theta &= \frac{2M_t}{\pi d^2 \ell} = \frac{2 \cdot 850}{\pi \cdot (0,04)^2 \cdot 0,05} = 6,764 \cdot 10^6 \text{ Pa} \\ p_{min} &= \frac{q_\theta}{\mu} = 6,764 / 0,07 = \mathbf{96,63 \text{ MPa}} \\ C_a &= \frac{1 - \nu}{E} = \frac{0,7}{2,1 \cdot 10^{11}} = 3,333 \cdot 10^{-12} \text{ m/N} \\ Q_m &= \frac{0,4}{0,8} = 0,5 \\ C_m &= \frac{1}{E} \left(\frac{1 + Q_m^2}{1 - Q_m^2} + \nu \right) = \frac{1}{2,1 \cdot 10^{11}} \left(\frac{1,215}{0,75} + 0,3 \right) = 9,365 \cdot 10^{-12} \text{ m/N} \\ \delta_{min,th} &= (C_a + C_m) p_{min} d = (3,333 + 9,365) \cdot 10^{-12} \cdot 93,63 \cdot 10^6 \cdot 0,04 \\ &= 47,56 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 47,56 \mu\text{m} \\ \delta_{min} &= \delta_{min,th} + 4R_p = 47,56 + 5 = \mathbf{52,56 \mu\text{m}} \end{aligned}$$

Pression maximale

$$\frac{p_{max}}{R_e} = \frac{1}{1,25} \ln \frac{1}{Q_m} = \frac{1}{1,25} \ln 2 = 0,5545$$

À cette valeur correspondent

$$\begin{aligned} p &= 166,4 MPa \\ \left(\frac{E}{R_e} \frac{u}{r} \right)_m &= 1,38 \\ \rightarrow \delta_{max,m} &= 1,38 \frac{300}{210000} \cdot 40 = 78,86 \cdot 10^{-3} mm = 78,86 \mu m \\ \delta_{max,a} &= C_a p_{max} d = 3,333 \cdot 10^{-12} \cdot 166,4 \cdot 10^6 \cdot 0,04 \\ &= 22,18 \cdot 10^{-6} m = 22,18 \mu m \end{aligned}$$

soit

$$\delta_{max} = 78,86 + 22,18 = \mathbf{101 \mu m}$$

Choix de l'ajustement

$$\begin{aligned} IT + it &\leq \delta_{max} - \delta_{min} = 101 - 53 = 48 \mu m \\ IT8 + it7 &= 39 + 25 = 64 : \text{NON} \\ IT7 + it6 &= 25 + 16 = 41 : \text{OUI} \\ 40H7 &= 40_0^{+0,025} \\ \delta_{max} &= d_M - D_m = es - 0 \rightarrow es = 101 \mu m \\ \delta_{min} &= d_m - D_M = ei + 25 \rightarrow ei = 52 + 25 = 77 \\ 40v6 &= 40_{+0,081}^{+0,097} \text{ convient} \end{aligned}$$

On choisira donc **40H7 – v6**, ce qui donne

$$\delta_{max} = \mathbf{97 \mu m}, \quad \delta_{min} = 81 - 25 = \mathbf{56 \mu m}$$

Effort de montage

$$\begin{aligned} \mu &= 0,07 \\ F_e &= \pi d \ell \mu p_{max} = \pi \cdot 40 \cdot 50 \cdot 0,07 \cdot 166,4 = 73,19 kN \end{aligned}$$

Comme le frettage considéré est élastoplastique, on choisira une presse dont la capacité est de l'ordre de 150 kN au moins.

10.4.3 Emmanchements sur cônes

Ces assemblages présentent, par rapport au frettage, l'avantage d'un démontage facile. Mais ils sont plus chers (usinage précis pour obtenir la coïncidence des conicités). Le plus souvent, dans les machines courantes, il s'agit de cônes *réversibles*. Il faut alors garantir le maintien de l'emmanchement, à l'aide d'un

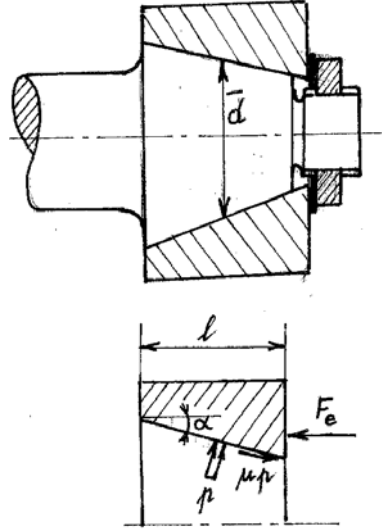


FIGURE 10.18 – Emmanchement sur cône.

écrou (figure 10.18). Les cônes irréversibles ne s'emploient guère que dans les machines-outils (contre-pointes de tour, forets).

Pour le calcul, on peut identifier le comportement élastique de l'arbre et du moyeu à celui que l'on rencontrerait dans un assemblage cylindrique de même diamètre moyen $\bar{d}$ [65].

Soit α le demi-angle du cône. La force axiale F_e donnée par l'écrou est évidemment

$$F_e = \int_S (p \sin \alpha + \mu p \cos \alpha) dS$$

et comme

$$dS = \pi \bar{d} \frac{d\ell}{\cos \alpha}$$

où $d\ell$ est l'élément de longueur axiale, on a encore

$$F_e = p(\tan \alpha + \mu) \pi \bar{d} \ell \quad (10.43)$$

La force nécessaire pour défaire l'assemblage vaut, quant à elle,

$$F_d = p(\mu - \tan \alpha) \pi \bar{d} \ell \quad (10.44)$$

Elle est positive, c'est-à-dire que l'assemblage est irréversible si $\mu > \tan \alpha$. Il faut, dans ce cas, utiliser un arrache-roulement pour extraire le moyeu.

Le déplacement axial élastique sous la force de serrage vaut

$$u_a = \frac{\frac{\delta}{2} + (R_{pa} + R_{pm})}{\tan \alpha} \quad (10.45)$$

Il peut être utilisé pour mesurer le serrage. On peut aussi, pour ce faire, mesurer le couple à l'écrou, qui s'évalue par la formule

$$C = 0,2 F_e d_{\text{écrou}}$$

Comme dans le cas du frettage, la valeur minimale de la pression se détermine à l'aide du couple à transmettre et la valeur maximale dépend de la résistance de contact. Mais la tolérance porte ici sur la précision de la valeur du serrage, qui se mesure à l'aide du coefficient

$$\alpha_b = \frac{\text{serrage maximum}}{\text{serrage minimum}}$$

On admet pour ce coefficient les valeurs suivantes :

Procédé de serrage	α_b
Clé dynamométrique	1,8
Mesure de u_a	1,6
Serrage par une clé de longueur réduite	3

La valeur à prescrire pour la force de serrage ou le déplacement axial est égale à 9/10 de la valeur maximale, de manière à éviter les surcharges.

10.4.4 Pinçage

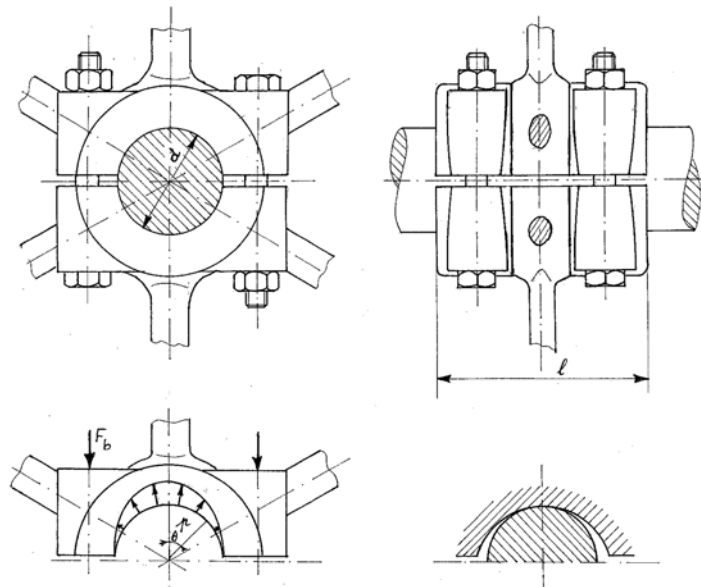


FIGURE 10.19 – Pinçage.

Dans ce genre d'assemblage, représenté en figure 10.19, le moyeu est en deux pièces, qui sont serrées sur l'arbre par un nombre pair z de boulons. La répartition des pressions ainsi obtenues n'est pas uniforme en θ . Quelle qu'elle soit, on a la relation

$$zF_b = \ell \frac{d}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p \cos \theta d\theta$$

et les efforts transmissibles sont

$$\begin{aligned}\text{Force axiale} & : F_a = \ell d \mu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p d\theta \\ \text{Couple} & : M_t = \frac{\ell d^2}{2} \mu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p d\theta\end{aligned}$$

Lorsque ces deux sollicitations sont combinées, le résultat s'obtient ainsi : les contraintes tangentielles de frottement peuvent s'écrire

$$q_z = \lambda_z \mu p, \quad q_\theta = \lambda_\theta \mu p$$

avec

$$\lambda_z^2 + \lambda_\theta^2 = 1$$

et on admet que λ_z et λ_θ ne dépendent pas de θ . Alors,

$$\begin{aligned}F_a &= \lambda_z \ell d \mu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p d\theta \\ \frac{2}{d} M_t &= \lambda_\theta \ell d \mu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p d\theta \\ \text{Combinaison des deux} & : \sqrt{F_a^2 + \left(\frac{2}{d} M_t\right)^2} = \ell d \mu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p d\theta\end{aligned}$$

S'il est déraisonnable de compter sur une pression uniforme, l'hypothèse d'une charge concentrée dans une petite zone autour de $\theta = 0$ est trop pessimiste *si les pièces sont bien ajustées*, ce à quoi il faut veiller lors de la fabrication. Nous opterons pour une distribution intermédiaire, de la forme

$$p(\theta) = p_0 \cos \theta$$

Le calcul donne alors

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p \cos \theta d\theta &= p_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = p_0 \frac{\pi}{2} \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p d\theta &= p_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 2p_0 \\ z F_b &= p_0 \frac{\pi}{4} \ell d \\ F_a &= \lambda_z \mu p_0 \cdot 2 \ell d \\ M_t &= \lambda_\theta \mu p_0 \cdot \ell d^2\end{aligned}$$

Le calcul s'effectue comme suit. On détermine d'abord une pression minimale permettant de transmettre les efforts :

$$p_{0,min} = \frac{1}{2\mu\ell d} \sqrt{F_a^2 + \left(\frac{2}{d} M_t\right)^2} \quad (10.46)$$

On détermine alors une pression maximale $p_{0,max}$ d'après la condition de résistance. Les valeurs admissibles de la pression sont :

Pressions admissibles/MPa	
fonte/acier	40...64
acier/acier	64...120

A ces limites correspondent $F_{b,min}$ et $F_{b,max}$. On vérifie que le rapport $F_{b,max}/F_{b,min}$ est supérieur au coefficient de précision du boulonnage α_b , sans quoi il convient d'augmenter les dimensions de la portée de calage. Le rapport des diamètres du moyeu est normalement compris entre 1,7 et 2.

10.4.4.1 Exemple

$d=40mm$; $M_t = 150Nm$. Serrage à la clé dynamométrique ($\alpha_b = 1,8$). Moyeu en fonte grise. Rapport des diamètres du moyeu = 2. Deux boulons. Déterminer la longueur de calage et le serrage.

Solution On choisira

$$p_{0,max} = 60MPa$$

Alors,

$$p_{0,min} = \frac{p_{0,max}}{\alpha_b} = \frac{60}{1,8} = 33,33MPa$$

Pour $\mu = 0,08$, on obtient

$$\ell = \frac{\frac{2}{d}M_t}{2\mu dp_{0,min}} = \frac{\frac{2}{0,04}150}{2 \cdot 0,08 \cdot 0,04 \cdot 33,33 \cdot 10^6} = 35,16 \cdot 10^{-3}m$$

On prendra la valeur $\ell = 35,5mm$ (R20). Alors,

$$2F_{b,min} = p_{0,min} \frac{\pi}{4} \ell d = 33,33 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 35,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,04 = 37170N$$

$$2F_{b,max} = 1,8 \cdot 2F_{b,min} = 66910N$$

10.4.5 Pinçage d'un moyeu fendu

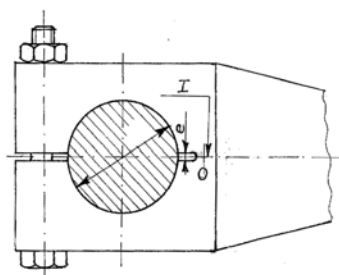


FIGURE 10.20 – Pinçage d'un moyeu fendu.

On traite de la même manière le cas du pinçage d'un moyeu fendu (figure 10.20), qui ne nécessite qu'une vis sur deux. Dans ce cas, l'ajustement doit être conçu de manière que les pièces aient un écart moyen nul (H7/k6 par exemple), de manière à éviter toute perturbation due à la flexion du moyeu, que l'on aura d'ailleurs intérêt à fendre du côté opposé aux boulons.

10.4.6 Anneaux élastiques RINGFEDER ANOBLOC

10.4.6.1 Description

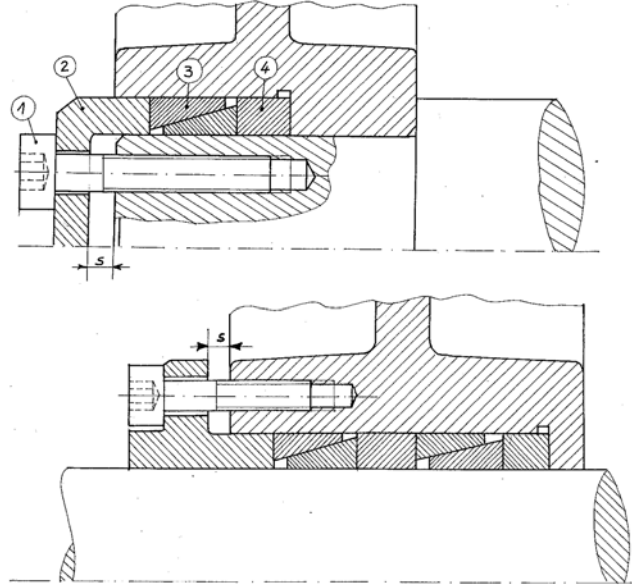


FIGURE 10.21 – Anneaux élastiques RINGFEDER ANOBLOC - 1 : vis de mise sous tension ; 2 : bague de serrage ; 3 : anneau élastique ; 4 : entretoise.

Il s'agit de paires d'anneaux coniques qui, sous l'effet d'un effort axial, serrent l'arbre pour l'un et le moyeu pour l'autre (figure 10.28). Le demi-angle α des anneaux vérifie $\tan \alpha = 0,3$. Il s'agit d'anneaux réversibles pour un coefficient de frottement estimé à 0,12 pour des surfaces sèches.

10.4.6.2 Équations générales

Étant donné un anneau de section Ω , soumis à des forces radiales de grandeur N_i par unité de longueur circonférentielle à l'intérieur et N_e par unité de longueur à l'extérieur, la contrainte circonférentielle dans l'anneau vérifie la relation (figure 10.22)

$$2\sigma\Omega = N_i d_i - N_e d_e$$

Soit ℓ la longueur axiale des anneaux, et soit λ la portion de longueur de sa partie conique où le contact se fait. Pour l'anneau m situé du côté du moyeu, l'indice m se réfère au moyeu et l'indice i , à la jonction des deux anneaux. On a (figure 10.23),

$$\begin{aligned} N_i &= (p_i \cos \alpha - \mu p_i \sin \alpha) \frac{\lambda \ell}{\cos \alpha} = \lambda p_i (1 - \mu \tan \alpha) \ell \\ N_m &= p_m \ell \end{aligned}$$

d'où

$$2\sigma_m \Omega = \ell [\lambda p_i d_i (1 - \mu \tan \alpha) - p_m d_m] \quad (10.47)$$

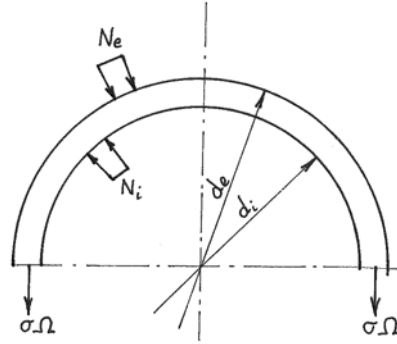


FIGURE 10.22 – Équilibre d'un anneau.

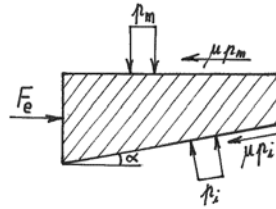


FIGURE 10.23 – Anneau extérieur.

Pour l'anneau a situé du côté de l'arbre, l'indice a se réfère à l'arbre et l'indice i désigne toujours la jonction des deux anneaux. On a (fig10.24),

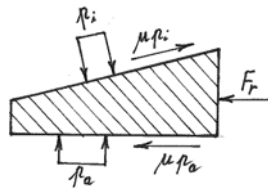


FIGURE 10.24 – Anneau intérieur.

$$N_a = p_a \ell$$

$$N_i = (p_i \cos \alpha - \mu p_i \sin \alpha) \frac{\lambda \ell}{\cos \alpha} = \lambda p_i (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) \ell$$

d'où

$$2\sigma_a \Omega = \ell [p_a d_a - \lambda p_i d_i (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)] \quad (10.48)$$

Notant que

$$\sigma_m = E \frac{2u_m}{(d_{moy})_m} \approx E \frac{2u_m}{d_i}, \quad \sigma_a \approx E \frac{2u_a}{d_i}$$

on peut encore écrire ces relations sous la forme

$$2E\Omega \frac{2u_m}{d_i} = \ell[\lambda p_i d_i (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) - p_m d_m] \quad (10.49)$$

$$2E\Omega \frac{2u_a}{d_i} = \ell[p_a d_a - \lambda p_i d_i (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)] \quad (10.50)$$

La force d'emmanchement F_e est donnée par

$$F_e = \mu p_m \pi d_m \ell + (\mu p_i \cos \alpha + p_i \sin \alpha) \pi d_i \frac{\lambda \ell}{\cos \alpha}$$

soit

$$F_e = \pi \ell [\mu p_m d_m + \lambda p_i d_i (\mu + \operatorname{tg} \alpha)] \quad (10.51)$$

La force de réaction F_r vaut, quant à elle,

$$F_r = \pi \ell [-\mu p_a d_a + \lambda p_i d_i (\mu + \operatorname{tg} \alpha)] \quad (10.52)$$

10.4.6.3 Les deux étapes du serrage

Lors du serrage des anneaux, il faut distinguer une première étape où les anneaux se déforment jusqu'à entrer en contact avec l'arbre et le moyeu et une deuxième étape où les anneaux serrent les deux pièces. Pour obtenir une analyse relativement simple, il faut faire quelques hypothèses :

- Le jeu diamétral de l'anneau extérieur par rapport au moyeu et le jeu diamétral de l'anneau intérieur par rapport à l'arbre sont supposés *égaux*. On note leur valeur commune j .
- Une fois en contact avec l'arbre ou le moyeu, les anneaux *ne se déforment plus*, se contentant de les presser.

10.4.6.4 Première étape : approche

Au cours de la première étape, les anneaux ne touchent ni l'arbre ni le moyeu et on a donc $p_m = 0$ et $p_a = 0$. les relations (10.49) et (10.50) se réduisent alors à

$$\begin{aligned} 2E\Omega \frac{2u_m}{d_i} &= \lambda \ell p_i d_i (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) \\ 2E\Omega \frac{2u_a}{d_i} &= -\lambda \ell p_i d_i (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) \end{aligned}$$

ce qui implique évidemment $u_a = -u_m$. Cette étape se termine lorsque $u_m = -u_a = j/2$ et on a alors

$$p_i d_i = \frac{2E\Omega \frac{j}{d_i}}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}$$

Pendant toute cette étape, on a par (10.51) et (10.52)

$$F_e = F_r = \lambda \pi \ell p_i d_i (\mu + \operatorname{tg} \alpha)$$

ce qui, lorsque le contact se réalise, donne

$$F_e = F_r = F_0 = \pi \cdot 2E\Omega \frac{j}{d_i} \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}$$

ou, en introduisant l'angle de frottement φ défini par $\operatorname{tg} \varphi = \mu$,

$$F_0 = 2E\Omega\pi \frac{j}{d_i} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \quad (10.53)$$

Sachant qu'en moyenne, les anneaux vérifient $\ell = 1,332(d_m - d_a)$ et $\ell' = 1,129\ell$, ℓ' étant l'encombrement axial d'une paire d'anneaux, on peut montrer que la section Ω d'un anneau vaut approximativement

$$\Omega = 1,05 \frac{d_m - d_a}{4} \ell$$

En outre, on peut admettre que

$$d_i = \frac{d_m + d_a}{2}$$

ce qui conduit à la relation

$$F_0 = 2\pi E \cdot 1,05 \frac{d_m - d_a}{4} \ell \frac{2j}{d_m - d_a} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = 1,437E \frac{d_m - d_a}{d_m + d_a} j \quad (10.54)$$

On se place dans le sens de la sécurité en adoptant pour j la plus grande des valeurs possibles en fonction des tolérances du moyeu, des anneaux et de l'arbre, qui sont données dans le tableau suivant :

Tolérances		
	$d_a \times d_m \leq 38 \times 44$	$d_a \times d_m > 38 \times 44$
Arbre	h6	h8
Anneau intérieur	E7	E8
Anneau extérieur	f7	e8
Moyeu	H7	H8
Rugosités : $R_t \leq 6\mu m$		

10.4.6.5 Deuxième étape : serrage

Lorsque le contact est réalisé, les anneaux ne se déforment plus, donc σ_a et σ_m ne varient plus. Appelant Δp_i la variation de la pression d'interface, on a alors, à partir de (10.49) et (10.50)

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \Delta p_i d_i (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) - p_m d_m \\ 0 &= p_a d_a - \lambda \Delta p_i d_i (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) \end{aligned}$$

ce qui implique visiblement

$$p_m d_m = p_a d_a = pd \quad (10.55)$$

en notant simplement pd leur valeur commune. On a également

$$\lambda \Delta p_i d_i = \frac{pd}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}$$

La variation de la force d'emmanchement vaut alors, par (10.51),

$$\Delta F_e = \pi \ell [\mu pd + pd \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}] = \pi \ell pd [\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)] = 0,5557 \pi \ell pd \quad (10.56)$$

tandis que la variation de la force de réaction vaut, par (10.52)

$$\Delta F_r = \pi \ell [-\mu p d + p d \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}] = \pi \ell p d [\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) - \operatorname{tg} \varphi] = 0,3157 \pi p \ell d \quad (10.57)$$

On notera que ces deux forces sont dans le rapport

$$\frac{\Delta F_r}{\Delta F_e} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) - \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) + \operatorname{tg} \varphi} = q < 1 \quad (10.58)$$

Pour $\operatorname{tg} \alpha = 0,3$ et $\mu = 0,12$, on obtient

$$q = 0,5681 \quad (10.59)$$

Au total, la force d'emmanchement et la réaction sont alors

$$\begin{aligned} F_e &= F_0 + \Delta F_e \\ F_r &= F_0 + \Delta F_r \end{aligned} \quad (10.60)$$

10.4.6.6 Cas de plusieurs paires d'anneaux en série

Si l'on monte plusieurs paires d'anneaux en série, la réaction de la première paire d'anneaux sert de force d'emmanchement de la deuxième et ainsi de suite. Donc la première paire d'anneaux voit une force d'emmanchement ΔF_e , la seconde, une force d'emmanchement $q \Delta F_e$, et ainsi de suite. Il en résulte que si la première paire d'anneaux réalise $p_1 d$, on a pour la seconde $p_2 d = q p_1 d$, pour la troisième $p_3 d = q^2 p_1 d$, et la n^e , $p_n d = q^{n-1} p_1 d$. Les pressions sont donc de plus en plus faibles d'une paire à l'autre.

10.4.6.7 Efforts transmissibles

Chaque couple d'anneaux permet de transmettre un effort axial et un couple, suivant la formule classique

$$\sqrt{F_a^2 + \left(\frac{2}{d_a} M_t\right)^2} = \mu \pi d \ell p$$

Lorsque n couples d'anneaux sont montés en série, la pression nécessaire au premier anneau, que nous noterons p_{min} , est donnée par

$$\begin{aligned} \sqrt{F_a^2 + \left(\frac{2}{d_a} M_t\right)^2} &= (1 + q + \dots + q^{n-1}) \mu \pi d \ell p_{min} \\ &= \frac{1 - q^n}{1 - q} \mu \pi d \ell p_{min} \end{aligned} \quad (10.61)$$

ce qui permet de déduire $\Delta F_{e,min}$ par (10.56). Au maximum, on aura donc un facteur $1/(1 - q) = 2,284$. Le tableau suivant montre les performances de plusieurs paires d'anneaux :

n	1	2	3	4	5	∞
$(1 - q^n)/(1 - q)$	1,000	1,568	1,895	2,074	2,178	2,315

Comme on peut le constater, il est inutile de placer plus de quatre paires d'anneaux, car les paires supplémentaires seraient trop mal utilisées.

10.4.6.8 Limitation des pressions

On calcule normalement les pressions admissibles comme en frettage, soit

– Pour un moyeu ductile,

$$\sigma_T = \frac{2p}{1 - Q_m^2} \leq \frac{R_e}{s_e}, \quad s_e = 1,25$$

ce qui donne

$$p_{max} = \frac{1 - Q_m^2}{2} \frac{R_e}{s_e} \quad (10.62)$$

– Pour un moyeu fragile,

$$\sigma_{max} = p \frac{1 + Q_m^2}{1 - Q - m^2} \leq \frac{R_m}{s_m}, \quad s_m = 2...3$$

ce qui donne

$$p_{max} = \frac{1 - Q_m^2}{1 + Q_m^2} \frac{R_m}{s_m} \quad (10.63)$$

Il s'agit, bien entendu, de la pression au premier anneau.

10.4.6.9 Tableau des anneaux élastiques RINGFEDER ANOBLOC

Voir *Mémento*, page AM8.

10.4.6.10 Calcul d'un assemblage à anneaux élastiques RINGFEDER ANOBLOC

Le calcul résulte de la comparaison de deux valeurs extrêmes de l'effort d'engagement. On calcule d'abord le jeu maximal j et on en déduit l'effort initial F_0 par la formule (10.54)

$$F_0 = 1,437E \frac{d_m - d_a}{d_m + d_a} j \quad (10.64)$$

1. *Valeur minimale* : pour reprendre les efforts. Comme le produit pd est le même à l'arbre et au moyeu, c'est à l'arbre que le glissement peut se produire. On déduit de (10.61)

$$\pi d \ell p_{min} = \frac{1 - q}{1 - q^n} \frac{\sqrt{F_a^2 + \left(\frac{2}{d_a} M_t\right)^2}}{\mu} \quad (10.65)$$

et, par (10.56),

$$(\Delta F_e)_{min} = 0,557 \pi d \ell p_{min} \quad (10.66)$$

ainsi que

$$(F_e)_{min} = F_0 + (\Delta F_e)_{min} \quad (10.67)$$

2. *Valeur maximale* : pour la résistance du moyeu. On calcule

$$\begin{aligned} p_{max} &= \frac{1 - Q_m^2}{2} \frac{R_e}{s_e} \quad (\text{moyeu ductile}) \\ &= \frac{1 - Q_m^2}{1 + Q_m^2} \frac{R_m}{s_m} \quad (\text{moyeu fragile}) \end{aligned} \quad (10.68)$$

et on en déduit

$$(\Delta F_e)_{max} = 0,557\pi d_m \ell p_{max} \quad (10.69)$$

$$(F_e)_{max} = F_0 + (\Delta F_e)_{max} \quad (10.70)$$

Si l'on se donne un procédé de serrage des vis, on vérifiera que

$$\frac{(F_e)_{max}}{(F_e)_{min}} \geq \alpha_b \quad (10.71)$$

Si ce n'est pas le cas, on peut ajouter des anneaux (jusqu'à 4 paires, après cela ne change pratiquement plus rien) ou alors, augmenter les diamètres.

La force de serrage à prescrire est $0,9(F_e)_{max}$. Elle est à diviser entre les vis.

10.4.7 Ensemble de serrage RINGFEDER DYNABLOC

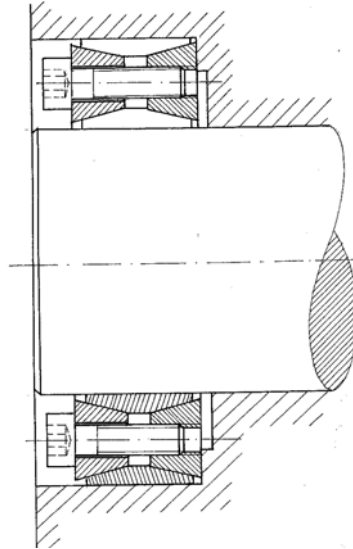
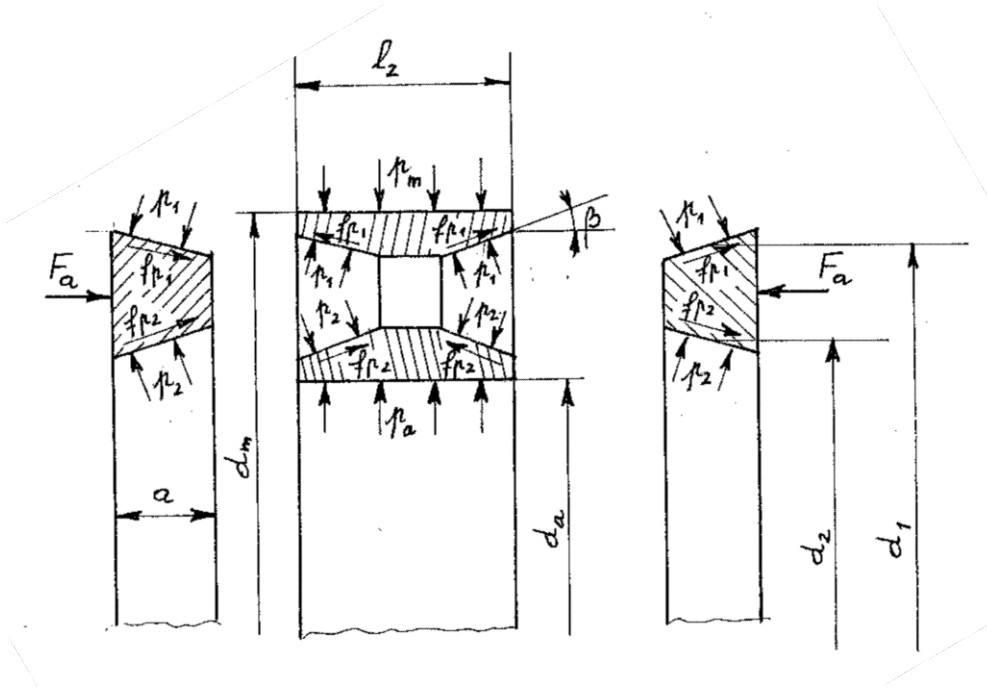


FIGURE 10.25 – Ensemble de serrage RINGFEDER DYNABLOC.

Il s'agit d'ensembles comprenant deux anneaux fendus et deux bagues de serrage fendues munies de vis à six pans creux (figure 10.25). Plus encombrants que les anneaux de serrage ANOBLOC, ces ensembles permettent de transmettre des couples importants. La conicité des bagues est de 0,5 (c'est-à-dire $\tan \alpha = 0,25$). Lors du serrage, un léger moment de flexion naît dans les bagues, ce qui permet le démontage spontané lorsque l'on relâche la tension. Ce système est donc très pratique pour le montage et pour le démontage. C'est essentiellement dans les machines lourdes que l'on utilise ce genre de liaison.

Le calcul de ces ensembles est beaucoup plus simple que celui des anneaux ANOBLOC. Comme le montre la figure 10.26, on a

$$F_e = \pi(p_1 d_1 + p_2 d_2) a (\mu + \tan \alpha)$$

FIGURE 10.26 – Répartition des efforts. Par f , il faut entendre μ .

et, les bagues étant dépourvues de contraintes circonférentielles, on obtient, en négligeant le petit effet de flexion,

$$p_1 d_1 = p_2 d_2$$

Par ailleurs, l'équilibre des anneaux implique, avec la même approximation,

$$\begin{aligned} p_m d_m \ell &= 2p_1 d_1 a (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) \\ p_a d_a \ell &= 2p_2 d_2 a (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) \end{aligned}$$

ce qui implique

$$p_a d_a = p_m d_m = p d \text{ unique} = \frac{a}{\ell} p_1 d_1 (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) = \frac{a}{\ell} p_2 d_2 (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} F_e &= \pi \cdot 2p_1 d_1 a (\mu + \operatorname{tg} \alpha) \\ &= 2\pi p d \ell \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} \\ &= 2\pi p d \ell \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \end{aligned} \quad (10.72)$$

La pression nécessaire pour transmettre un effort axial F_a et un couple M_t est encore une fois donnée par

$$\pi d \ell p_{\min} = \frac{\sqrt{F_a^2 + \left(\frac{2}{d_a} M_t\right)^2}}{\mu} \quad (10.73)$$

ce qui, combiné à (10.72), donne

$$(F_e)_{min} = 2\sqrt{F_a^2 + \left(\frac{2}{d_a}M_t\right)^2} \frac{\text{tg}(\alpha + \varphi)}{\text{tg} \varphi} \quad (10.74)$$

On calcule par ailleurs p_{max} sur le moyeu comme en frettage et on en déduit

$$(F_e)_{max} = 2\pi p_{max} d_m \ell \text{tg}(\alpha + \varphi) \quad (10.75)$$

On vérifie alors que

$$\frac{(F_e)_{max}}{(F_e)_{min}} \geq \alpha_b$$

Si c'est le cas, il faut prescrire un serrage égal aux 9/10 du maximum, à répartir, évidemment, entre les boulons.

Pour ce qui est des tolérances de fabrication, ces anneaux n'ont pas d'exigences sévères, car ils peuvent se dilater et se contracter dans d'assez larges limites. On pourra admettre :

- pour l'arbre : $h11 \dots k11$
- pour le moyeu : $H11 \dots N11$

La rugosité totale doit vérifier $R_t \leq 16\mu m$.

10.4.7.1 Tableau des ensembles de serrage RINGFEDER DYNABLOC

Voir *Mémento*, page AM8.

10.4.8 Clavette inclinée creuse

La clavette provoque un serrage de l'arbre et du moyeu, globalement représentable par deux charges P diamétralement opposées (figure 10.27). Le couple résulte du frottement et vaut donc

$$M_t = \mu P d \quad (10.76)$$

Tout dépend évidemment de la charge P que l'on peut produire. Il s'agit tout d'abord de ne pas endommager le moyeu. Si l'on idéalise la mise en charge par deux charges linéiques diamétralement opposées de résultante P , la contrainte circonférentielle maximale se produit aux deux points A et A' représentés en figure 10.27 et est donnée par [73]

$$\sigma_{\theta, max} = \beta(Q) \frac{P}{\ell d} \quad (10.77)$$

où Q est le rapport entre le diamètre intérieur et le diamètre extérieur du moyeu. La fonction $\beta(Q)$ prend les valeurs suivantes :

Q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
β	0,6246	1,304	2,191	3,496	5,680	9,930	19,59	48,09	206,4

Pour Q très voisin de l'unité, on a

$$\beta(Q) \approx \frac{2,18}{(1 - Q)^2} \quad (10.78)$$

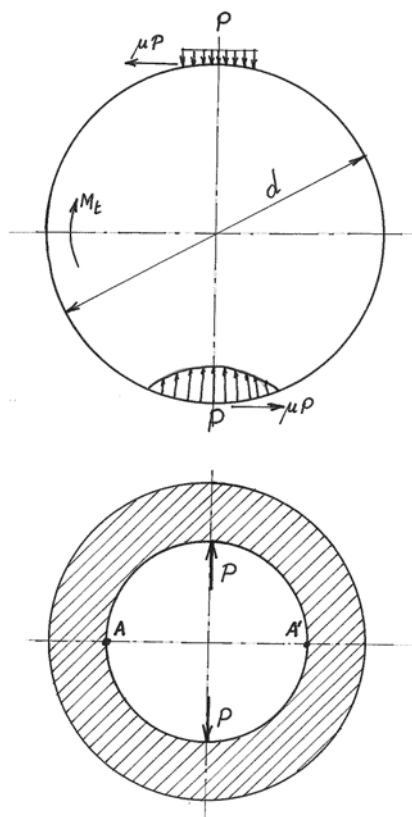


FIGURE 10.27 – Clavette inclinée creuse.

Cette contrainte maximale doit être limitée à

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &\leq \frac{R_e}{s_e}, \quad s_e = 1,25 \text{ (moyeu ductile)} \\ &\leq \frac{R_m}{s_m}, \quad s_m = 2 \text{ (moyeu fragile)}\end{aligned}$$

L'effort nécessaire pour insérer la clavette s'obtient aisément par des conditions d'équilibre (figure 10.28). L'équilibre vertical implique

$$P_1(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = P$$

et l'équilibre horizontal,

$$\begin{aligned}F_e &= \mu P + P_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \\ &= P \left(\mu + \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} \right) \\ &= P[\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)]\end{aligned}\tag{10.79}$$

Cet effort n'étant pas mesuré en pratique, on court le risque de faire éclater le moyeu. Pour éviter cet accident, il faut dimensionner la clavette de manière à ce qu'elle se mate avant que le moyeu n'éclate (la clavette est beaucoup moins

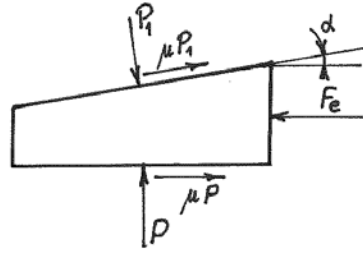


FIGURE 10.28 – Effort d'insertion de la clavette.

chère que le moyeu). Étant donné que la clavette est enfoncée au maillet, ce qui amplifie la contrainte en son sein, cette condition sera certainement réalisée si l'on atteint simultanément la limite élastique de la clavette et la limite de résistance du moyeu. Exprimons cette condition. On a

$$(R_e)_{clavette} = \frac{F_e}{bh} = \frac{P[\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)]}{bh}$$

et

$$(\sigma_{lim})_{moyeu} = \beta \frac{P}{\ell d}$$

d'où

$$\frac{(R_e)_{clavette}}{(\sigma_{lim})_{moyeu}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{\beta} \frac{\ell d}{bh}$$

ce qui entraîne la condition

$$\frac{\ell}{d} \geq \frac{b}{d} \cdot \frac{h}{d} \cdot \frac{\beta}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \frac{(R_e)_{clavette}}{(\sigma_{lim})_{moyeu}} \quad (10.80)$$

Le signe $\geq$ résulte du fait qu'une plus grande longueur soulage le moyeu.

Remarques

1. Bien qu'en général elle ne soit pas grande, il convient de s'assurer que la pression de contact à la clavette vérifie

$$p = \frac{P}{b\ell} \leq \frac{R_e}{s_e} \text{ ou } \frac{R_m}{s_m}$$

2. L'action de la clavette décentre légèrement le moyeu par rapport à l'arbre, ce qui crée un balourd lors de la rotation. On ne peut donc pas utiliser ce genre de calage si la vitesse de rotation est importante.

10.5 Assemblages par obstacle précontraint

Il s'agit d'assemblages combinant l'effet d'adhérence à l'effet d'obstacle.

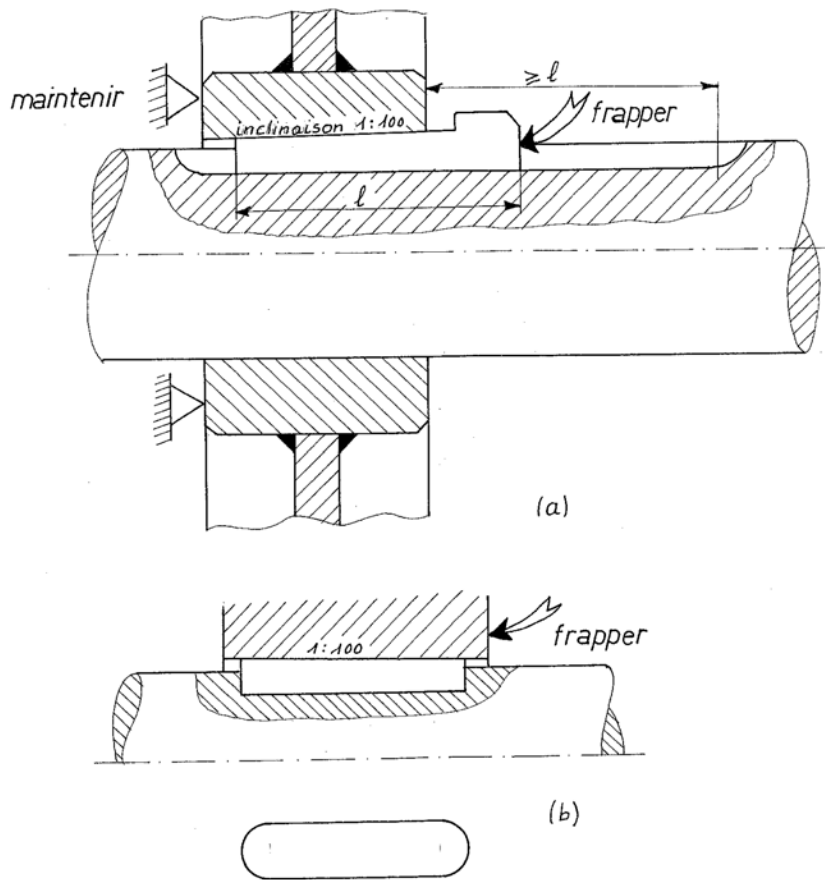


FIGURE 10.29 – Montage des clavettes inclinées.

10.5.1 Clavettes inclinées

Les clavettes inclinées sont chassées entre l'arbre et le moyeu, qui comportent chacun une rainure (figure 10.29). Contrairement aux clavettes parallèles, les clavettes inclinées sont libres dans leur logement dans la direction tangentielle (figure 10.30). Sous l'effet du couple, la clavette tend à basculer, ce qui provoque un déplacement x des forces de pression P donné par

$$P \cdot 2x = \mu Ph \quad (10.81)$$

On a donc

$$M_t = \mu P(d - t_1) + Px = \mu P \left(d - t_1 + \frac{h}{2} \right) \approx \mu Pd \quad (10.82)$$

La pression maximale sur la clavette vaut donc

$$p_0 = \underbrace{\frac{P}{\ell b}}_{\text{effort normal}} + \underbrace{\frac{6Px}{\ell b^2}}_{\text{moment}} = \frac{P}{\ell b} \left(1 + 3\mu \frac{h}{b} \right) \quad (10.83)$$

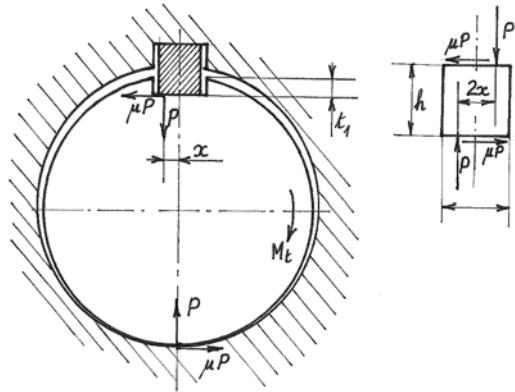


FIGURE 10.30 – Transmission du couple.

En général, cependant, c'est l'état de contrainte du moyeu qui est critique. Il suffit donc d'effectuer le calcul comme dans le cas d'une clavette creuse.

Les tolérances relatives à la largeur des clavettes et de leur logement sont $D10/h9$.

Remarque : Ici encore, le moyeu est décentré.

10.5.2 Clavetage double tangentiel

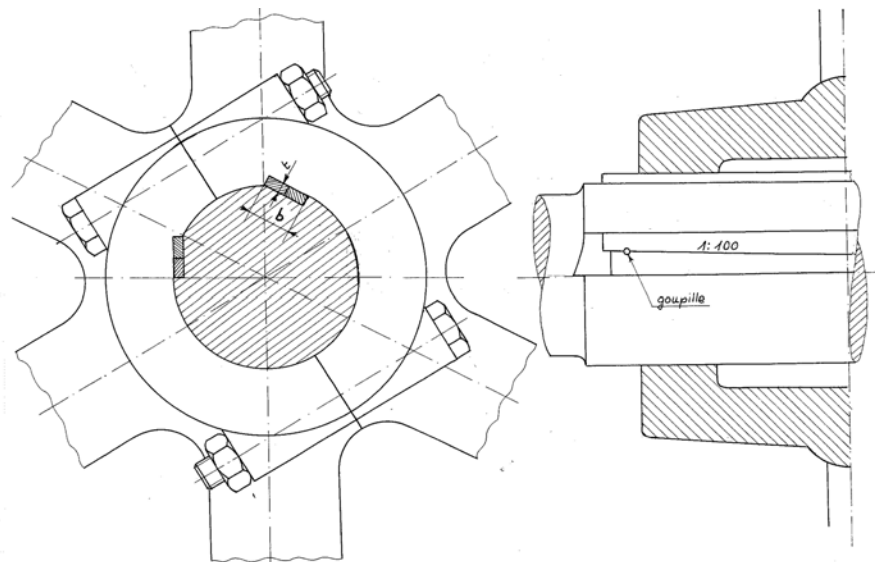


FIGURE 10.31 – Clavetage double tangentiel.

Les clavettes tangentielles (figure 10.31) ont un angle α donné par $\tan \alpha = 1/100$. Elles sont normalement disposées à 120° . Au repos, l'arbre est soumis à

des forces de compression P et P_1 , de telle sorte que (figure 10.32)

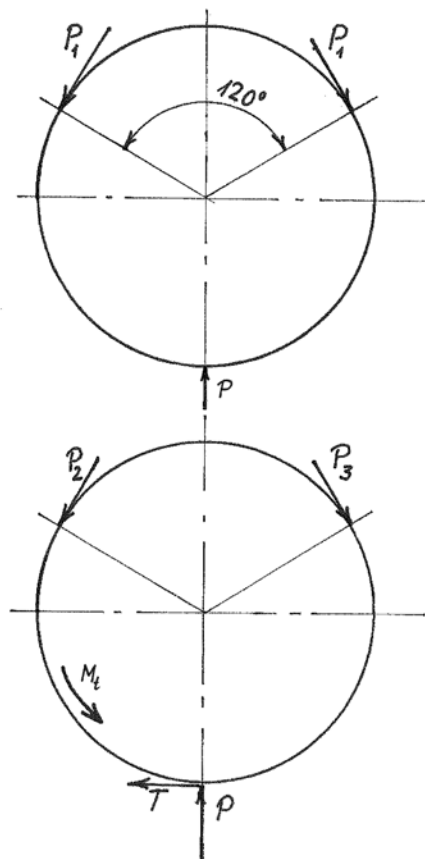


FIGURE 10.32 – Passage des efforts.

$$2P_1 \cos 30^\circ = P$$

soit

$$P_1 = 0,5774P$$

Lors de la transmission d'un couple, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (P_2 + P_3) \cos 30^\circ &= P \\ (P_3 - P_2) \sin 30^\circ &= T \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} P_3 &= 0,5774P + T \\ P_2 &= 0,5774P - T \end{aligned}$$

et le couple vaut

$$M_t = T \frac{d}{2} + P_3 \frac{d}{2} - P_2 \frac{d}{2} = \frac{3}{2} T d$$

Lorsque le glissement s'amorce, il vient

$$M_t = \frac{3}{2}\mu Pd \quad (10.84)$$

et

$$P_3 = (0,5774 + \mu)P$$

ce qui mène à la pression de contact aux clavettes

$$p = \frac{P_3}{\ell t} = (0,5774 + \mu) \frac{P}{\ell t} = \frac{2}{3}(0,5774 + \mu) \frac{M_t}{\ell t d} \quad (10.85)$$

On limitera cette pression à

$$\begin{aligned} p_{max} &= \frac{R_e}{s_e}, \quad s_e = 1,25 \text{ (moyeu ductile)} \\ &= \frac{R_m}{s_m}, \quad s_m = 2 \text{ (moyeu fragile)} \end{aligned}$$

Le calcul du moyeu peut, en première approximation, se faire comme dans le cas des clavettes creuses. Par rapport à celles-ci, le clavetage double tangentiel permet de transmettre un couple 1,5 fois plus élevé. Mais ici encore, le moyeu est décentré.

Chapitre 11

Paliers lisses

11.1 Introduction

À la vieille question consistant à savoir lequel, du palier lisse ou du roulement, est le meilleur, on ne peut en fait donner qu'une réponse mitigée. En fait, chacun a ses avantages et ses inconvénients propres, ce qui fixe des domaines où le roulement s'impose, d'autres où le palier lisse peut seul convenir et, bien entendu, un certain nombre de cas où ils entrent en concurrence. Il n'est donc pas inutile de dresser un rapide bilan des avantages et inconvénients des deux espèces de paliers.

Caractéristique	Palier lisse	Roulement
Amortissement des vibrations et des chocs	bon	mauvais
Sensibilité aux ébranlements et vibrations	faible	forte
Encombrement radial	faible	plus grand
Précision du guidage	meilleure	moins bonne
Exigence sur les tolérances	moyenne	grande
Possibilité de plusieurs pièces	oui	non
Durée de vie	illimitée dans les cas favorables	limitée
Grandes vitesses	oui	non
Quantité de lubrifiant requise	grande	faible
Puissance perdue	plus grande	plus faible
Comportement au démarrage	mauvais	bon
Surveillance	absolument nécessaire	moins impérative
Rodage	oui	non
Conséquences d'une avarie	souvent graves (arbre détérioré)	souvent bénignes (remplacer le roulement)

C'est pourquoi on préfère le palier lisse dans les circonstances suivantes :

- pour réduire le bruit et la dureté du fonctionnement ;
- pour les grande vitesses de rotation ;
- lorsque l'exigence de précision de la rotation est grande ;

- pour les forts ébranlements et vibrations ;
- pour les paliers découpés et les très petits diamètres ;
- pour les paliers devant fonctionner très longtemps en régime (centrales électriques).

11.2 Principe de la lubrification

11.2.1 Introduction

Le problème fondamental des paliers lisses est d'éviter un frottement direct des surfaces en présence, qui aurait pour conséquence une dissipation d'énergie exagérée. Cette dissipation d'énergie se fait sous forme d'arrachement de métal (*usure*) et en *échauffement*. L'*usure* est gênante en ce qu'elle nuit à la précision du guidage et nécessite par ailleurs un remplacement périodique des pièces. L'échauffement, s'il est localisé, peut provoquer des soudures locales entre les pièces frottantes (*microgrippages*). Ces micro-soudures se détruisent, mais en provoquant des arrachements qui nuisent à l'état de surface. Au stade ultime, on assiste au *grippage*, où les pièces sont bloquées l'une sur l'autre. Il en résulte l'arrêt et, souvent, une détérioration grave de la machine.

C'est pourquoi on introduit entre les deux surfaces un fluide appelé *lubrifiant*, dans l'espoir d'éviter ces avaries. Le fonctionnement *idéal* est celui où, grâce à la présence du lubrifiant, les deux surfaces sont totalement séparées par un *film d'huile*. Cette circonstance apparaît dans le cas où se forme un *coin d'huile*, c'est-à-dire un rapprochement des deux surfaces dans le sens du mouvement.

11.2.2 Le coin d'huile

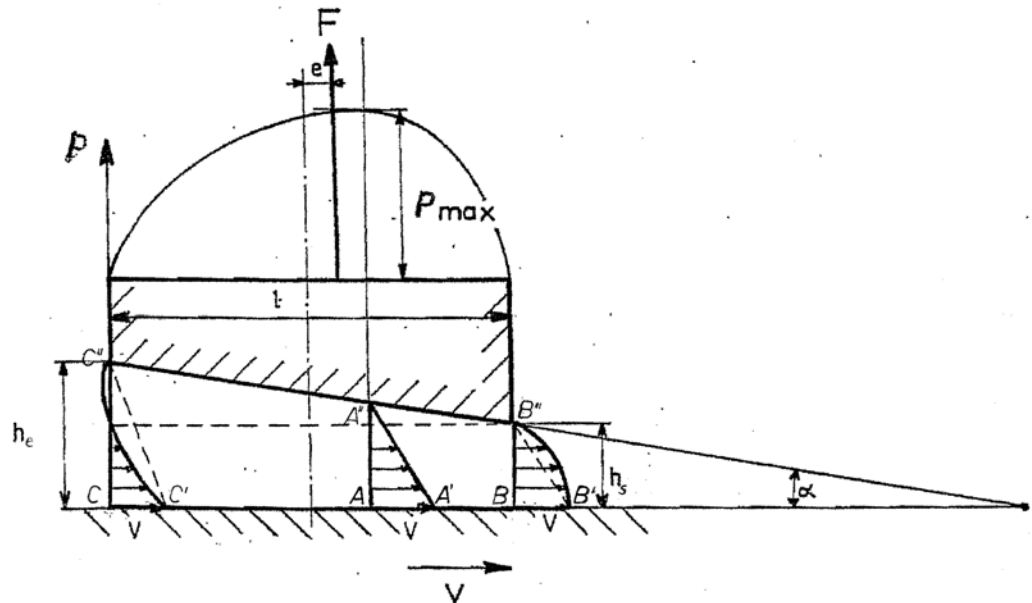


FIGURE 11.1 – Coin d'huile.

Considérons une surface horizontale se mouvant avec une vitesse V par rapport à une surface inclinée de manière à converger vers la surface horizontale dans le sens du mouvement (figure 11.1). Si au point A le diagramme des vitesses dans l'huile est linéaire, sa surface $AA'A''$ représente le débit par unité de largeur :

$$Q' = \frac{Vh_A}{2}$$

À la sortie, le diagramme $BB'B''$ devra être convexe pour donner le même débit, car $h_B < h_A$. Au contraire, à l'entrée, le diagramme des vitesses devra être concave. Or, on sait que *la concavité du diagramme des vitesses se tourne toujours dans le sens du gradient de pression*. Il en résulte que de B à A , la pression augmente et que de A à C , elle diminue. Comme la pression (relative) en B et C est nulle, le diagramme des pressions a la forme indiquée sur la figure. Il en résulte une *force verticale* $P = \sum p$ tendant à écarter la surface fixe de la surface mobile. En s'arrangeant pour que cette force soit suffisante, on peut supprimer tout contact des deux pièces. Le *film d'huile* est alors réalisé.

11.2.3 Formation pratique des coins d'huile

Un coin d'huile peut être obtenu artificiellement en mettant en présence deux surfaces planes comme évoqué ci-dessus. C'est ce que l'on appelle un *blochet*. Ceci est par exemple réalisé dans certaines butées, dites butées Michell, où les blochets peuvent avoir une orientation fixe ou être articulés [50]. Mais dans le cas des paliers, en dehors du cas improbable où l'arbre est parfaitement centré dans l'alésage, l'excentricité de l'arbre provoque un rétrécissement de la section du passage de l'huile qui constitue *naturellement* un coin d'huile.

11.3 Pertes dans les paliers. Courbe de Stribeck

Étant donné un arbre de diamètre d qui tourne tout en supportant une charge P , on constate qu'il faut, pour faire tourner l'arbre, dépenser une certaine puissance $\mathcal{P}_p$ dite *perte de puissance*. Le *moment de perte*, défini par

$$M_p = \frac{\mathcal{P}_p}{2\pi N} \quad (11.1)$$

est le moment à appliquer à l'arbre pour le faire tourner à la fréquence de rotation N . Traditionnellement, on se réfère au schéma de Coulomb et on identifie le moment M_p à l'action d'une force tangentielle de la forme¹

$$T = fP$$

comme le représente la figure 11.2, ce qui mène à écrire

$$M_p = fP \frac{d}{2}$$

Dans le cadre des paliers, il est de pratique courante d'encore appeler f le *coefficient de frottement*, bien qu'il ne s'agisse pas à proprement parler de frottement.

1. Dans ce chapitre, le symbole μ est réservé à la viscosité, selon la tradition des tribologues. On note donc f le coefficient de frottement.

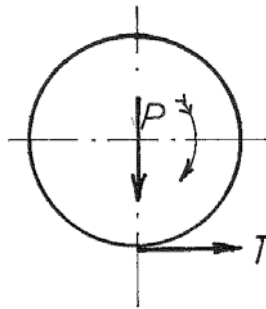


FIGURE 11.2 – Schéma coulombien.

Il est plus correct de parler de *coefficient de perte* et de considérer qu'il est *défini* par la relation

$$f = \frac{M_p}{P \frac{d}{2}} \quad (11.2)$$

Au démarrage, l'arbre repose sur l'alésage du palier. Le coefficient de perte est alors important (de l'ordre de 0,2) et l'influence des rugosités de surface est énorme. Pour des vitesses un peu plus importantes, l'effet hydrodynamique commence à se faire sentir et les surfaces s'écartent, tout en restant encore très proches. Il y a alors superposition des interactions de surface et du frottement visqueux dans le lubrifiant. Ce régime mixte est souvent appelé *régime onctueux des paliers*. Il est caractérisé par une *diminution* du coefficient de perte lorsque la vitesse s'accroît. Cette diminution prend fin pour une vitesse où le coefficient de perte passe par un minimum. Ce point de fonctionnement est appelé *point critique* et est arbitrairement pris comme frontière du régime onctueux. Au-delà du point critique, les effets hydrodynamiques sont prépondérants, et on parle donc de *régime hydrodynamique*. Cependant, il faut être conscient que les effets de surface ne disparaissent tout à fait que pour une vitesse plus élevée. Ce n'est qu'alors que toute usure disparaît. En régime hydrodynamique, le coefficient de perte *croît* avec la vitesse. Une dernière transition peut apparaître, quand l'écoulement devient turbulent, mais ceci se présente rarement dans les paliers courants. La courbe donnant le coefficient de perte en fonction de la fréquence de rotation, à *température constante*, est appelée *courbe de Stribeck*. Son allure est représentée en figure 11.3.

Le fonctionnement idéal d'un palier est le régime hydrodynamique, car les surfaces y sont nettement séparées, ce qui implique *l'absence d'usure* et l'impossibilité du grippage.

11.4 Principales qualités des lubrifiants

Il va de soi que les qualités du lubrifiant jouent un grand rôle dans le succès du graissage. En régime hydrodynamique, la qualité fondamentale est la *viscosité*. En régime mixte, l'huile doit présenter d'autres qualités, assez mal définies, et que l'on regroupe souvent sous le nom d'*onctuosité*. En gros, l'onctuosité est ce qui fait diminuer le frottement en régime onctueux.

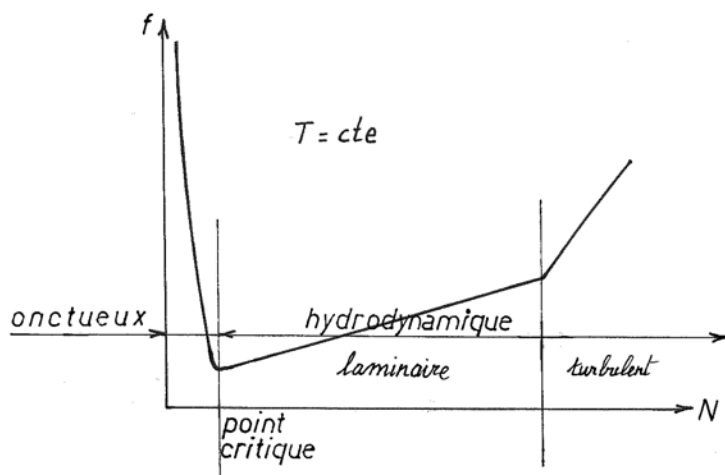


FIGURE 11.3 – Courbe de Stribeck.

11.4.1 Viscosité

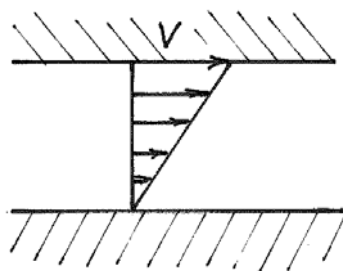


FIGURE 11.4 – Définition de la viscosité.

Rappelons que dans le cas d'une vitesse linéairement variable sur l'épaisseur (écoulement de Couette, figure 11.4), la contrainte de cisaillement τ a la forme

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

où s'introduit la *viscosité* μ . L'équation aux dimensions de cette grandeur est donc

$$[\mu] = \frac{[\tau][z]}{[u]} = \frac{\text{Pa} \times \text{m}}{\text{m/s}} = \text{Pa.s}$$

Pour fixer les idées, les huiles minérales (i.e. élaborées à partir du pétrole) ont une viscosité de l'ordre de 0,1 à 0,2 Pa.s.

On utilise aussi la notion de *viscosité cinématique* (par opposition à la précédente, qui est dite *dynamique*), donnée par

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

où ρ est la masse volumique. La dimension de cette nouvelle grandeur est

$$[\nu] = \frac{[\mu]}{[\rho]} = \frac{FL^{-2}T}{ML^{-3}} = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-3}} = L^2T^{-1}$$

donc ν s'exprime en m^2/s . En pratique, on utilise plutôt le sous-multiple mm^2/s .

La mesure de la viscosité cinématique peut théoriquement se faire à l'aide d'un tube capillaire suffisamment long pour que l'on puisse négliger la vitesse du fluide. La viscosité cinématique est alors en raison directe du temps d'écoulement d'un volume déterminé de fluide. Mais ce type d'essai est trop long pour les besoins de la pratique. Aussi préfère-t-on utiliser des conduits plus larges. Mais alors, l'énergie cinétique du fluide n'est plus négligeable et la mesure n'a de valeur que si l'on s'en tient à des essais normalisés. Parmi les échelles de ce genre, les plus courantes sont :

- l'échelle *Engler* (E), utilisée en Europe continentale ;
- l'échelle *Redwood* (R), d'application au Royaume Uni ;
- l'échelle *Saybolt* (S), utilisée aux U.S.A.

Pour convertir ces valeurs en viscosités cinématiques, on peut utiliser les formules empiriques suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{mm^2/s} &= 7,31E - \frac{6,31}{E} \\ \frac{\nu}{mm^2/s} &= 0,220S - \frac{180}{S} \\ \frac{\nu}{mm^2/s} &= 0,250R - \frac{160}{R} \end{aligned} \quad (11.3)$$

11.4.1.1 Variation de la viscosité avec la température

Pente de viscosité - La viscosité diminue *très fort* lorsque la température augmente. Il ne suffit donc pas de connaître la viscosité à une température donnée, encore faut-il savoir comment elle varie avec la température. Une méthode assez généralement admise pour cette caractérisation repose sur la constatation empirique que la variable

$$W = \log \log \left(\frac{\nu}{\nu_0} + 0,8 \right), \quad \text{où } \nu_0 = 1mm^2/s \quad (11.4)$$

varie de manière à peu près linéaire en fonction du logarithme de la température absolue² (formule d'*Ubbelohde-Walther*)³. Partant de cette relation, on peut déterminer la *pente de viscosité*

$$m = \frac{W_1 - W_2}{\log T_2 - \log T_1} \quad (11.5)$$

Il existe également un *indice de viscosité* VI défini arbitrairement à partir de deux températures, et tel qu'un indice $VI = 0$ désigne une huile de viscosité très variable et un indice $VI = 100$ une huile de viscosité moins variable. Dans

2. On peut utiliser indifféremment les logarithmes décimaux ou les logarithmes népériens. La valeur de W changera, mais sa pente, non.

3. Du reste, lors d'un *mélange* d'huiles, huile k en fraction x_k , avec $\sum_k x_k = 1$, l'équation de Refutas équivaut à dire que $W = \sum_k W_k$

ce système, les huiles courantes oscillent entre $VI = 90$ et $VI = 110$. On a du reste proposé un *nombre de viscosité* VN défini à partir de m ci-dessus par la relation

$$VN = \left(2 - \frac{m}{3,55}\right) \cdot 100 \quad (11.6)$$

qui, aux environs de $VI = 100$, correspond à peu près à VI , mais a visiblement pour maximum $VN = 200$ (taux de variation nul), alors que l'on rencontre parfois $VI = 400$.

Formule de Cornelissen et Waterman - On utilise également la formule de Cornelissen et Waterman [14], qui donne directement la viscosité dynamique sous la forme⁴

$$\ln \mu = \frac{A}{T^x} + B \quad (11.7)$$

où l'exposant x peut être pris égal à 3,5 pour les huiles courantes. On peut du reste l'ajuster correctement à partir de trois valeurs de la viscosité.

11.4.1.2 Classification S.A.E des huiles

On utilise très souvent la classification S.A.E. des huiles, fondée sur la viscosité. La désignation des huiles pour moteurs ne se fonde que sur la viscosité à $100^\circ C$ pour les huiles SAE 20...SAE 60. Les nuances SAE 0W...SAE 25W ont également une limite supérieure de viscosité à basse température :

	Basse température (Pa.s)	Haute température ($100^\circ C$) (mm^2/s)	
Grade	μ max à ... $^\circ C$	ν min	ν max
0W	6 à -35	3,8	-
5W	6,6 à -30	3,8	-
10W	7 à -25	4,1	-
15W	7 à -20	5,6	-
20W	9,5 à -15	5,6	-
25W	13 à -10	9,3	-
20	-	5,6	<9,3
30	-	9,3	<12,5
40	-	12,5	<16,3
50	-	16,3	<21,9
60	-	21,9	26,1

Cette classification ne définit pas l'index de viscosité. Mais pour les huiles pour moteurs, on table d'habitude sur $VI = 100$, soit $m = 3,55$. Certaines huiles, classifiées de *multigrades*, possèdent une pente de viscosité très faible. On les note sous la forme

$$SAE\ 5W - 50$$

ce qui signifie qu'à $-30^\circ C$, l'huile a les propriétés d'une huile SAE 5W et qu'à $100^\circ C$, elle se comporte comme une huile SAE 50. Tablant sur $\rho = 900 kg/m^3$,

4. Cette forme est indépendante du fait que l'on utilise des logarithmes népériens ou des logarithmes décimaux.

cela donne

$$\begin{aligned}
 \nu_{-30} &= \frac{6,6}{900} = 7,333 \cdot 10^{-3} m^2/s = 7333 mm^2/s \\
 W_{-30} &= \log \log(7333 + 0,8) = -0,5872 \\
 \nu_{100} &= 16,3 mm^2/s \\
 W_{100} &= \log \log(16,3 + 0,8) = 0,09096 \\
 \log 373 &= 2,572 \\
 \log 243 &= 2,346 \\
 m &= \frac{0,5872 - 0,09096}{2,572 - 2,346} = 2,196 \\
 VN &= \left(2 - \frac{2,196}{3,55}\right) \cdot 100 = 138,1
 \end{aligned}$$

soit $VN = 138,1$ au moins.

Les figures 11.5, 11.6 et 11.7 donnent les courbes de viscosité d'un certain nombre d'huiles courantes.

11.4.1.3 Variation avec la pression

La viscosité varie encore avec la pression. Pour des pressions pouvant aller jusqu'à $2000 \cdot 10^5 Pa$, on peut écrire

$$\eta(p) = \eta(0)e^{\beta p_{rel}} \quad (11.8)$$

D'après Kuss, on a, à $25^\circ C$,

- pour les huiles synthétiques : $\beta_{25} = 1,1 \dots 1,6 (MPa)^{-1}$;
- pour les huiles minérales : $\beta_{25} = 1,5 \dots 5,0 (MPa)^{-1}$,

selon leur composition. Supposant $p_{rel} = 200 \cdot 10^5 Pa$ on obtient par exemple

$$e^{\beta p_{rel}} = e^{1,6 \cdot 0,2} = 1,377$$

11.4.2 Masse volumique

Selon la norme DIN51757, on estime la masse volumique d'une huile à la température $(15 + \theta)^\circ C$ par la formule

$$\frac{\rho(15 + \theta)}{kg/m^3} = \frac{\rho(15)}{kg/m^3} - 0,7(\theta - 15) \quad (11.9)$$

On a en général $\rho(15) \approx 900 kg/m^3$. À $80^\circ C$, on obtient ainsi

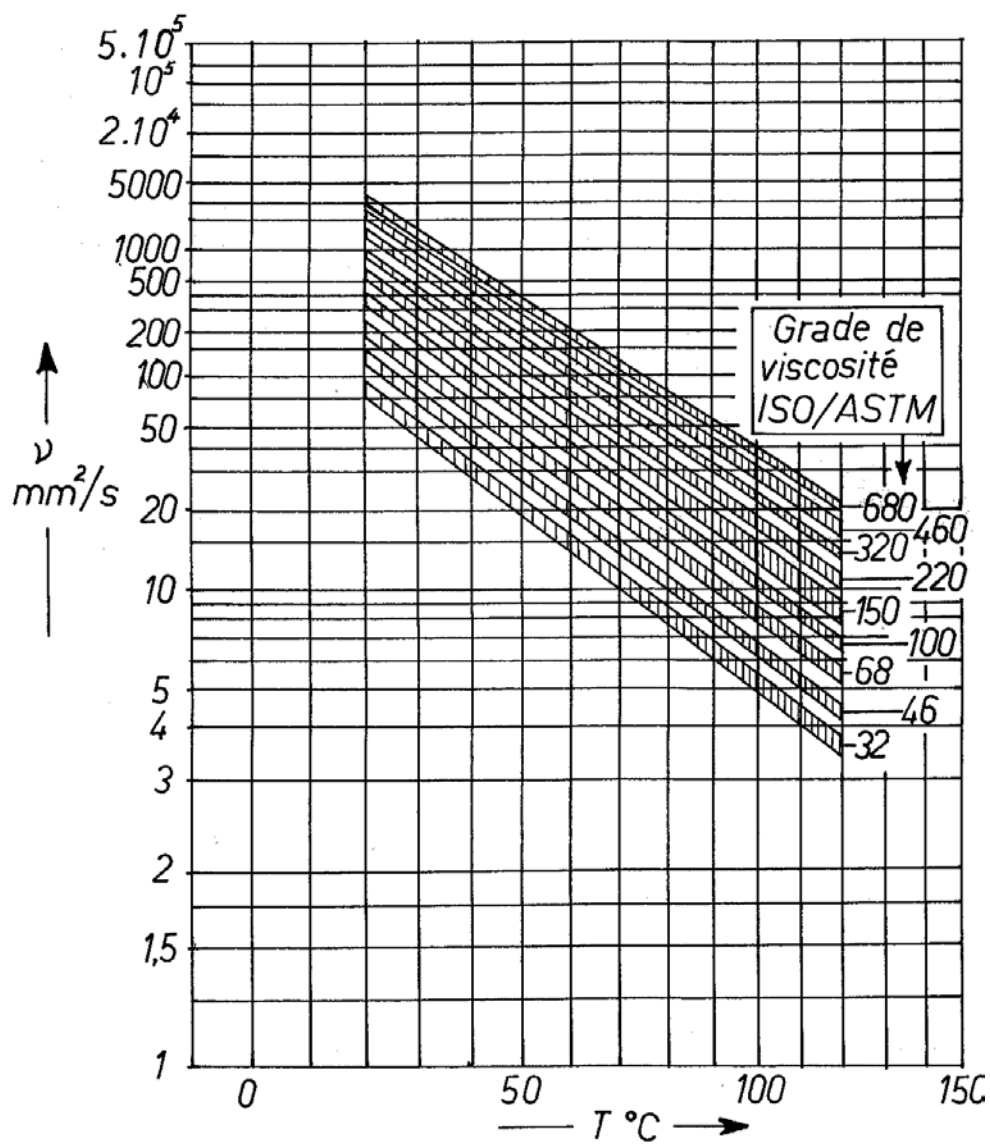
$$\rho = 900 - 0,7(80 - 15) = 854,5 kg/m^3$$

soit une diminution de 6% par rapport à $15^\circ C$.

11.5 Dissipation des paliers lisses en régime hydrodynamique

11.5.1 Description fonctionnelle du palier

Le *tourillon*, partie de l'arbre qui tourne dans le palier, a un diamètre d et un rayon $r = d/2$. Le coussinet, partie du palier en contact avec l'arbre, a un rayon $(r + a)$, où a est le *jeu radial*. Notons deux choses.

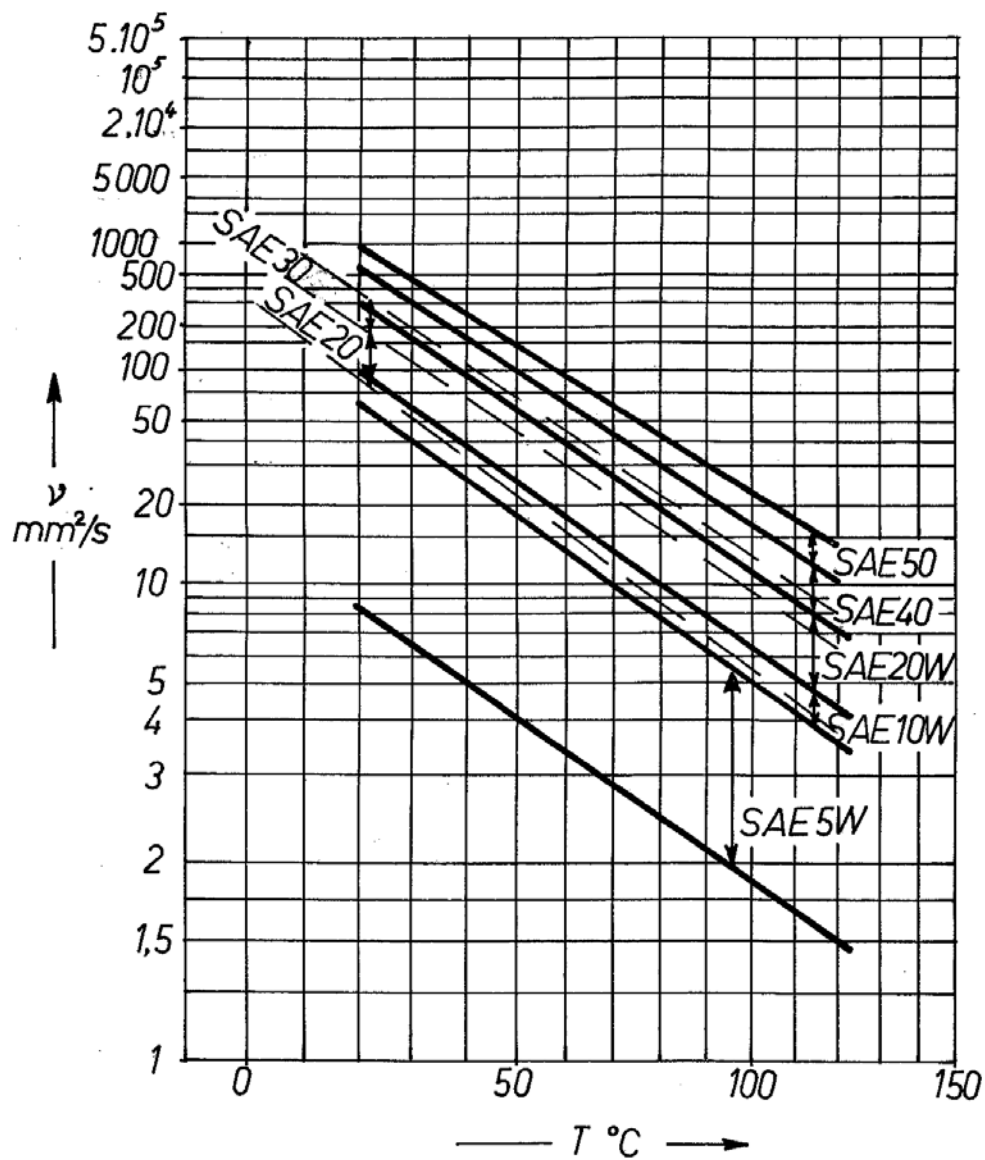


LUBRIFIANTS LIQUIDES INDUSTRIELS

ISO 3448 - ASTM D2422 - V.I. = 90

(d'après TIMKEN)

FIGURE 11.5 - Lubrifiants ISO/ASTM

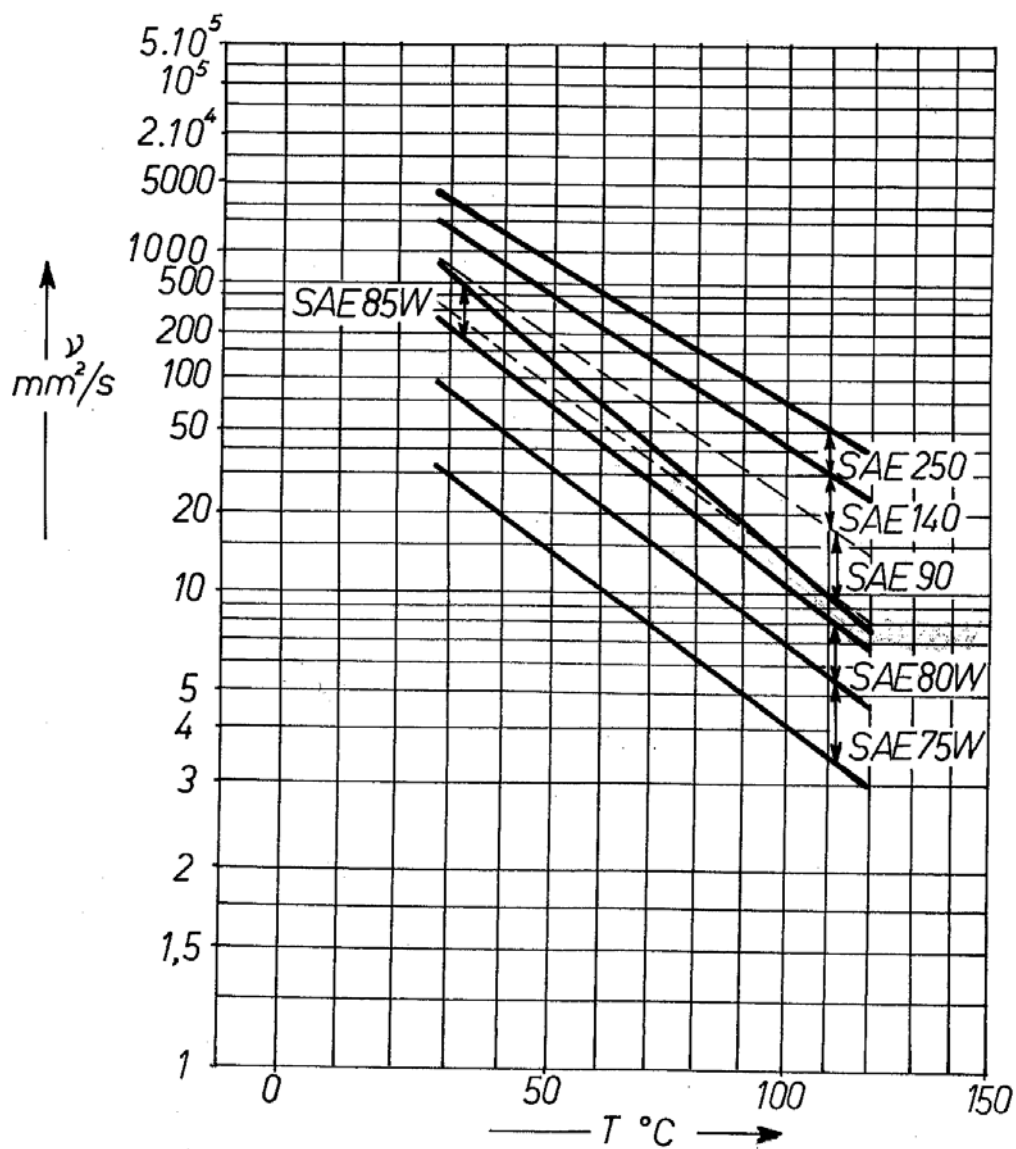


HUILES POUR MOTEURS

SAE J300c V.I.=110

(d'après TIMKEN)

FIGURE 11.6 – Lubrifiants SAE pour moteurs



HUILES POUR BOÎTES ET PONTS

SAE J306b V.I. = 90
(d'après TIMKEN)

FIGURE 11.7 – Lubrifiants SAE pour boîtes de vitesses et ponts

- En pratique, le diamètre *nominal* de l'arbre et du palier sont identiques. Ils ne diffèrent que par leurs écarts. Pour fixer les idées, ce sera un ajustement $H7 - f7$ ou $H8 - e8$.
 - On utilise parfois le *jeu diamétral* $2a = d_{\text{coussinet}} - d_{\text{palier}}$.
- On appelle *paramètre de jeu* la grandeur

$$j = \frac{a}{r} = \frac{2a}{d} \quad (11.10)$$

Le palier a une longueur ℓ au niveau du coussinet, et on définit l'*élancement* du palier comme le rapport

$$n = \frac{\ell}{d} \quad (11.11)$$

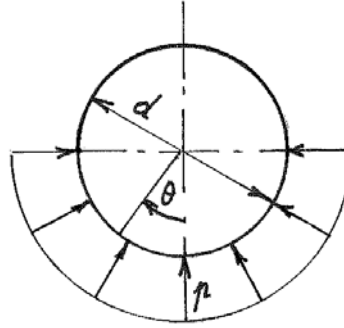


FIGURE 11.8 – Pression moyenne.

La charge verticale P est d'habitude représentée par la *pression moyenne*

$$p = \frac{P}{\ell d} \quad (11.12)$$

En effet, si l'on équilibre la force P par une distribution uniforme p de la pression sur la moitié inférieure du coussinet, on a (figure 11.8)

$$P = \int_S p = \ell p \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta r d\theta = pr\ell [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = p\ell d$$

donc p est bien la moyenne de la pression.

Enfin, le lubrifiant est caractérisé par sa viscosité μ et le régime, par la fréquence de rotation N .

11.5.2 Loi de Petroff et nombre de Sommerfeld

Pour les paliers très élancés, subissant de grandes vitesses de rotation et de faibles charges, on peut admettre en première approximation que l'arbre est centré et qu'il n'y a pas de fuite latérale d'huile. Alors, la vitesse croît linéairement sur l'épaisseur du film et on a

$$\tau = \mu \frac{V}{a} = \mu \frac{2\pi N r}{a} = 2\pi \mu N \frac{r}{a}$$

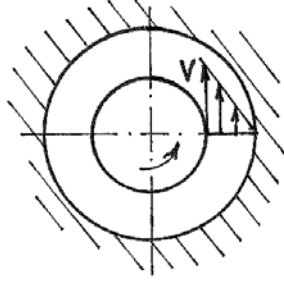


FIGURE 11.9 – Loi de Petroff.

Le moment de perte vaut alors

$$M_p = \tau \cdot r \cdot 2\pi r \ell$$

si bien que

$$f = \frac{M_p}{Pr} = \frac{\tau r \cdot 2\pi r \ell}{p \cdot 2r \ell \cdot r} = \pi \frac{\tau}{p}$$

soit

$$f = 2\pi^2 \frac{\mu N}{p} \frac{r}{a}$$

Multipliant par r/a , on obtient

$$f \frac{r}{a} = 2\pi^2 \chi \quad (11.13)$$

où apparaît la *variable de Sommerfeld*

$$\chi = \frac{\mu N}{p} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \quad (11.14)$$

C'est la *loi de Petroff*.

Cependant, cette loi est en général jugée trop approximative et de plus, elle ne permet pas d'expliquer le mécanisme de la portance qui est précisément lié à l'excentrement. Son principal intérêt est d'introduire simplement la variable de Sommerfeld, qui régit entièrement le comportement du palier. En particulier, l'excentrement relatif $\varepsilon = e/a$ (où e est l'excentrement) et l'angle de contrebalancement (angle ψ où se place l'épaisseur maximale du film) sont entièrement déterminés par le nombre de Sommerfeld et l'élancement :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E(\chi, n) \\ \psi &= \Psi(\chi, n) \end{aligned}$$

et on peut encore montrer que

$$f \frac{r}{a} = F(\chi, n) \quad (11.15)$$

11.5.3 Comportement aux faibles nombres de Sommerfeld

À l'autre extrême, considérons le cas de très faibles nombres de Sommerfeld. Une manière d'obtenir cette condition est de faire tendre r/a vers zéro. On doit alors avoir

$$\lim_{r/a \rightarrow 0} f = \lim_{r/a \rightarrow 0} \frac{F(\chi, n)}{r/a} = \text{fini}$$

ce qui n'est possible que si l'on a, pour les faibles valeurs de r/a ,

$$F(\chi, n) \approx A(n)\sqrt{\chi}$$

soit

$$f \frac{r}{a} \approx A(n)\sqrt{\chi} \quad (11.16)$$

ou, ce qui revient au même,

$$f \approx A(n) \sqrt{\frac{\mu N}{p}} \quad (11.17)$$

11.5.4 Lois de Hanocq-Leloup

Les travaux de Hanocq et Leloup à l'Université de Liège ont conduit à proposer les lois suivantes pour les paliers de longueur finie [50] :

$$f \frac{r}{a} = \begin{cases} A(n)\sqrt{\chi} & \text{pour } \chi \leq \chi_0(n) \\ B(n) + C(n)\chi & \text{pour } \chi > \chi_0(n) \end{cases} \quad (11.18)$$

avec les coefficients suivants :

Alimentation : 90 à 180° en amont de la charge				
n	χ_0	A	B	C
$\geq 1,5$	0,03	7,2	0,76	16,3
1	0,03	7,2	0,68	19,0
0,5	0,1	10,3	1,40	18,6

Pour d'autres valeurs de l'élancement n , on interpolera comme suit :

a) $0,5 < n < 1$: calculer $f(0,5)$ et $f(1)$, puis interpoler linéairement :

$$f(n) = \frac{1-n}{0,5} f(0,5) + \frac{n-0,5}{0,5} f(1)$$

b) $1 < n < 1,5$: calculer $f(1)$ et $f(1,5)$ et interpoler suivant la formule

$$f(n) = \frac{1,5-n}{0,5} f(1) + \frac{n-1}{0,5} f(1,5)$$

Ces valeurs correspondent en fait à des conditions idéales en termes de rugosité. C'est pourquoi on y ajoute un *terme correctif*

$$\Delta f = 2,66 \times 10^{-13} \left(\frac{1}{j} \right)^3 \quad (11.19)$$

introduit par la Société belge des mécaniciens (SBM), sur base de travaux expérimentaux du Bureau of Standards des U.S.A.

11.5.5 Lois de Vogelpohl

Vogelpohl, grand spécialiste allemand de la lubrification, a proposé les lois simples que voici :

$$f \frac{r}{a} = \begin{cases} 3\sqrt{2\pi\chi} & \text{pour } 2\pi\chi \leq 1 \\ 3 \cdot 2\pi\chi & \text{pour } 2\pi\chi > 1 \end{cases} \quad (11.20)$$

qui donnent en général une bonne approximation.

11.6 Détermination du point critique

Il convient, comme nous l'avons déjà signalé, de placer le fonctionnement en régime hydrodynamique, de manière à éviter l'usure et les grands coefficients de perte pouvant mener au grippage. Mais ceci suppose que l'on puisse situer le point critique.

La détermination du point critique a fait l'objet de travaux remarquables de Leloup à l'Université de Liège [49]. Ces travaux, qui se sont étalés sur de nombreuses années, ont montré que le point critique est défini par une valeur donnée de la variable

$$\mathcal{L} = \frac{\mu V}{\sqrt[4]{P' \frac{d}{\ell}}} \quad (11.21)$$

que l'on appelle, en son honneur, *variable de Leloup*. On notera que cette variable est dimensionnée,

$$[\mathcal{L}] = (FL^{-1})^{3/4}$$

donc elle s'exprime en $(N/m)^{3/4}$. La valeur critique $\mathcal{L}_0$ de cette variable dépend encore de la nature des *matériaux en présence*, ainsi que des *états de surface*.

Pour des coussinets en *métal blanc (babbitt)* et un état de surface standard, Leloup a obtenu

$$\mathcal{L}_0 = 1,04 \cdot 10^{-3} (N/mm)^{3/4} \quad (\text{métal blanc}) \quad (11.22)$$

Après un rodage poussé, on peut obtenir des valeurs plus faibles. Pour des coussinets en bronze, il propose une valeur double,

$$\mathcal{L}_0 = 2,08 \cdot 10^{-3} (N/mm)^{3/4} \quad (\text{bronze}) \quad (11.23)$$

En fonctionnement, il convient de se placer en sécurité par rapport au point critique, de manière à éviter toute usure. On travaillera donc à une valeur de $\mathcal{L}$ donnée par

$$\mathcal{L} = m\mathcal{L}_0, \quad m = 3 \quad (11.24)$$

11.7 Loi d'échauffement

11.7.1 Relations de base

La connaissance de la température de frottement est essentielle, car la viscosité de l'huile varie très fort avec la température. Si, du fait de l'échauffement,

la viscosité devient à ce point faible que l'on se trouve en-deçà du point critique, on se retrouve en régime onctueux, avec usure et risque de grippage.

La puissance dissipée dans le palier est donnée par

$$\mathcal{P}_p = M_p \cdot 2\pi N = Pfr \cdot 2\pi N = pldfV = pfVS \quad (11.25)$$

où $S = \ell d$. La chaleur ainsi produite se dissipe dans l'ambiance par conduction, convection et rayonnement :

$$\mathcal{P}_p = Q(\text{cond.}, \text{conv.}, \text{ray.})$$

Nous admettons, selon la pratique courante, que l'on peut écrire

$$Q = \alpha S'(t_s - t_a) \quad (11.26)$$

où S' est la surface *extérieure* du palier, t_s , la température sur cette surface, et t_a , la température ambiante. le coefficient de transfert α vaut, selon les travaux de Hanocq et Leloup [50] complétés par Delcour [23],

$$\frac{\alpha}{W/(m^2 \cdot K)} = 18 \left(1 + \gamma + \beta \sqrt{\frac{v}{m/s}} \right) \quad (11.27)$$

où le premier terme représente l'échange par la surface du palier, le second, la conduction de l'arbre et le troisième, la convection forcée en cas de ventilation. Pour le terme γ , on peut écrire

$$\gamma = \delta \inf \left[1, \left(\frac{1}{n_1} \frac{d}{d_1} \right)^2 \right] \quad (11.28)$$

où $n_1 = L/d$, L étant la *longueur du palier* et d_1 une longueur de référence,

$$d_1 = 0,027m \quad (11.29)$$

Le coefficient δ tient compte du fait que dans un palier intermédiaire, la chaleur se dissipe dans l'arbre des deux côtés, tandis que dans un palier d'extrémité, elle ne passe que d'un côté. On écrit donc naturellement

$$\delta = \begin{cases} \frac{1}{2} & (\text{palier d'extrémité}) \\ 1 & (\text{palier intermédiaire}) \end{cases} \quad (11.30)$$

Le terme de convection par ventilation contient le facteur β auquel on donne les valeurs suivantes :

$$\beta = \begin{cases} 0 & : \text{fonctionnement en air calme} \\ \frac{1}{2} & : \text{palier ventilé d'un côté} \\ 1 & : \text{palier ventilé des deux côtés} \end{cases} \quad (11.31)$$

Dans ce terme, v représente la vitesse de l'air de refroidissement brassé par un petit ventilateur placé sur l'arbre. La vitesse de l'air est normalement de l'ordre de $1,25m/s$.

Cependant, ce n'est pas la température à la surface du palier qui importe, mais la *température moyenne du coussinet* t_c . On admet qu'elle lui est liée par une relation du type

$$t_s - t_a = K(t_c - t_a) \quad (11.32)$$

avec les valeurs suivantes, tenant compte de l'aptitude du corps de palier à transmettre la chaleur :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Palier ramassé, coussinet à fortes liaisons} & K = 1 \\ \text{Palier courant, coussinet fixe} & K = 0,9 \\ \text{Palier à rotule extérieure} & K = 0,85 \\ \text{Palier à rotule intérieure} & K = 0,8 \end{array} \right. \quad (11.33)$$

La formule finale s'écrit donc

$$Q = \alpha S' K (t_c - t_a) \quad (11.34)$$

Il reste à voir comment calculer la surface extérieure S' du palier.

- Pour un palier à semelle, on ne tient pas compte de la surface inférieure de la semelle. On peut aussi utiliser la formule approchée de Palmgren, qui consiste à assimiler le palier à un cylindre de longueur L , couché sur une génératrice. Alors, sa hauteur h est égale au diamètre du cylindre, et la surface extérieure vaut $\pi h L$, tandis que la surface de chaque base vaut $\pi h^2/4$. Au total, on obtient

$$S' \approx \pi h \left(L + \frac{h}{2} \right) \quad (11.35)$$

- Lorsqu'il s'agit d'un palier situé dans le bâti d'une machine, on a en général

$$S' \approx 15 \dots 25 \ell d \quad (11.36)$$

11.8 Avant-projet de palier

En général, on connaît

- la charge P ;
- la fréquence de rotation N .

Le diamètre du tourillon est en général fixé par des considérations étrangères à la lubrification (résistance et raideur de l'arbre). Il faut alors choisir la longueur du palier et le jeu.

11.8.1 Choix de l'élancement

L'encombrement axial et l'existence inévitable de désalignements poussent à choisir de faibles valeurs de l'élancement ℓ/d . Mais la limitation des fuites et la tenue du coussinet en régime onctueux - inévitable au démarrage et à la mise à l'arrêt - militent en sens inverse. Pratiquement, on adopte une valeur de n comprise entre 0,5 et 1,2, à condition de vérifier les valeurs de p (voir figure 11.10).

11.8.2 Choix du jeu radial

- On utilise souvent un ajustement arbre/palier $H_8 - e_8$ ou $H_7 - f_7$.
- Une autre manière de procéder consiste à utiliser la vieille norme allemande

$$\frac{a}{mm} = \frac{\left(\frac{d}{mm}\right)^{0,3}}{90} \quad (11.37)$$

PRESSIONS ADMISSIBLES, d'après les proportions (VOGEL POHL)

cas $l = d = 50 \text{ mm}$

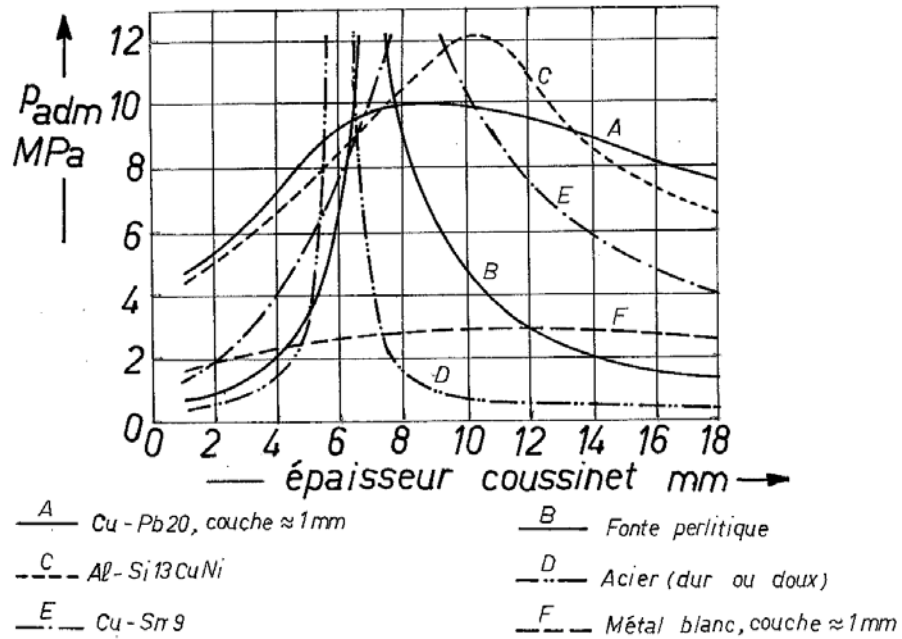


FIGURE 11.10 – Pressions moyennes admissibles, selon Vogelpohl.

- Leloup a proposé de choisir le jeu radial conduisant au *plus faible coefficient de perte*, sur base des lois de frottement de Hanocq-Leloup. On remarquera que pour $\chi \leq \chi_0$, le coefficient de perte ne dépend pas du jeu radial. Par contre, pour $\chi > \chi_0$, on a, en posant $J = a/r$

$$f = BJ + \frac{C \mu N}{J p}$$

et cette expression est minimale par rapport à J pour

$$B - \frac{C \mu N}{J^2 p} = 0$$

soit

$$J = \sqrt{\frac{C \mu N}{B p}} \quad (11.38)$$

valeur qui dépend des conditions de charge et de vitesse. Le coefficient de perte vaut alors

$$f = 2\sqrt{BC} \sqrt{\frac{\mu N}{p}} \quad (11.39)$$

En considérant par exemple le cas $n \geq 1,5$, on obtient

$$J = \sqrt{\frac{16,3}{0,76}} \sqrt{\frac{\mu N}{p}} = 4,631 \sqrt{\frac{\mu N}{p}}$$

et

$$f = 2 \cdot \sqrt{16,3 \cdot 0,76} \sqrt{\frac{\mu N}{p}} = 7,039 \sqrt{\frac{\mu N}{p}}$$

Remarquons que pour ce choix, on obtient

$$\chi = \frac{\mu N}{p} \frac{1}{J^2} = \frac{\mu N}{p} \frac{Bp}{C\mu N} = \frac{B}{C}$$

soit, dans le cas présent, $\chi = 0,04663$, valeur supérieure à $\chi_0 = 0,03$. Pour $n = 1$, on a $B/C = 0,03579$, également supérieur à $\chi_0 = 0,03$, mais que pour $n = 0,5$, on a $B/C = 0,07527$ alors que $\chi_0 = 0,1$. *Cette méthode ne convient donc pas pour les paliers courts ($n < 1$).*

11.8.3 Choix de la viscosité en service

Ce choix se fait de manière à se mettre en sécurité par rapport au point critique. La condition

$$\frac{\mu V}{\sqrt[4]{P' \frac{d}{\ell}}} = m\mathcal{L}_0$$

conduit à

$$\mu = m\mathcal{L}_0 \frac{\sqrt[4]{P' \frac{d}{\ell}}}{V} \quad (11.40)$$

11.8.4 Calcul de la température

Connaissant μ , on est en mesure de calculer le coefficient de perte f . On a alors

$$t_c = t_a + \frac{PfV}{\alpha S'K} \quad (11.41)$$

On vérifie que cette température est raisonnable, soit de l'ordre de $50 \dots 60^\circ C$ normalement, $60 \dots 90^\circ C$ au maximum.

11.8.5 Choix du lubrifiant

On cherche alors un lubrifiant ayant la viscosité voulue à la température calculée.

11.8.6 Cas d'une température trop élevée

Dans le cas où la température calculée est trop élevée, diverses solutions sont possibles :

- Augmenter l'élancement du palier, ce qui permet, à sécurité constante, de diminuer la viscosité en service, puisque

$$\mathcal{L} = \frac{\mu V}{\sqrt[4]{P' \frac{d}{\ell}}} = \frac{\mu V}{\sqrt[4]{P \frac{d}{\ell^2}}} = \mu V \sqrt[4]{\frac{dn^2}{P}} = \mu V \sqrt[4]{\frac{d}{P}} \sqrt{n}$$

croît comme $\sqrt{n}$. Mais pour des valeurs importantes de n , il faudra utiliser un palier à rotule, qui évacue moins bien sa chaleur.

- Augmenter le diamètre du tourillon, ce qui augment $\mathcal{L}$ à viscosité constante, puisque

$$\mathcal{L} = \mu V \sqrt[4]{\frac{dn^2}{P}} = \mu \pi N d^{5/4} n^{1/2} P^{-1/4}$$

11.9 Débit de fuite

Lors du fonctionnement, une partie de l'huile fuit sur les bords du coussinet. Le débit correspondant est noté Q_f . On y attache la variable sans dimension

$$\frac{Q_f}{ar\ell N}$$

Cette grandeur varie avec le nombre de Sommerfeld, l'élancement du palier et les conditions d'alimentation, à 180 ou 90 degrés en amont de la charge. La figure 11.11 donne des courbes valables pour l'alimentation à 180 degrés en amont de la charge.

Il faut donc alimenter constamment le palier, ce qui peut se faire par une alimentation sous pression, ou plus simplement à l'aides de bagues fixes (figure 11.12) ou mobiles (figure 11.13). Les bagues fixes sont légèrement serrées sur l'arbre par un petit ressort et leur partie inférieure plonge dans la réserve d'huile. Au sommet, un racloir fait couler l'huile sur l'arbre, en face d'une rainure longitudinale du demi-coussinet supérieur. Les bagues mobiles ont un diamètre plus grand que l'arbre et roulent sur celui-ci.

Une pratique ancienne consistait à ménager dans le coussinet des rainures allant jusqu'au bas du coussinet, dans l'espoir de mieux amener l'huile. C'est ce que l'on appelait des *pattes d'araignée*. C'est une profonde erreur, car cela amène une pression nulle en bas du palier, là où précisément, on compte sur une pression suffisante pour porter l'arbre.

Remarque : un palier construit selon les figures précédentes ne convient que pour des charges verticales de haut en bas. Dans le cas d'une charge verticale de bas en haut, le film d'huile ne peut se former convenablement du fait de la rainure d'alimentation où la pression est nulle. C'est une restriction que l'on ne rencontre pas avec les paliers à roulement.

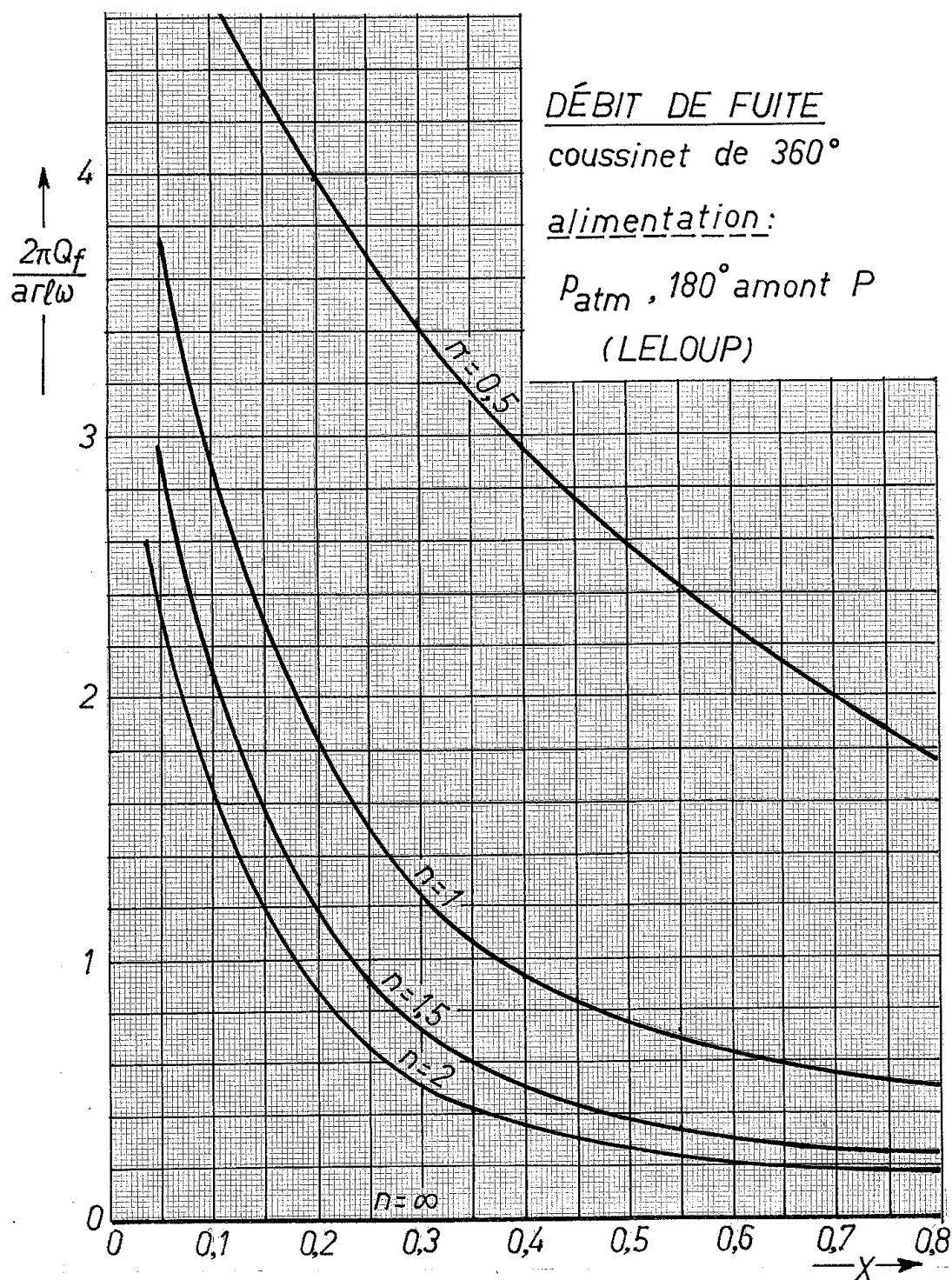


FIGURE 11.11 – Débit de fuite.

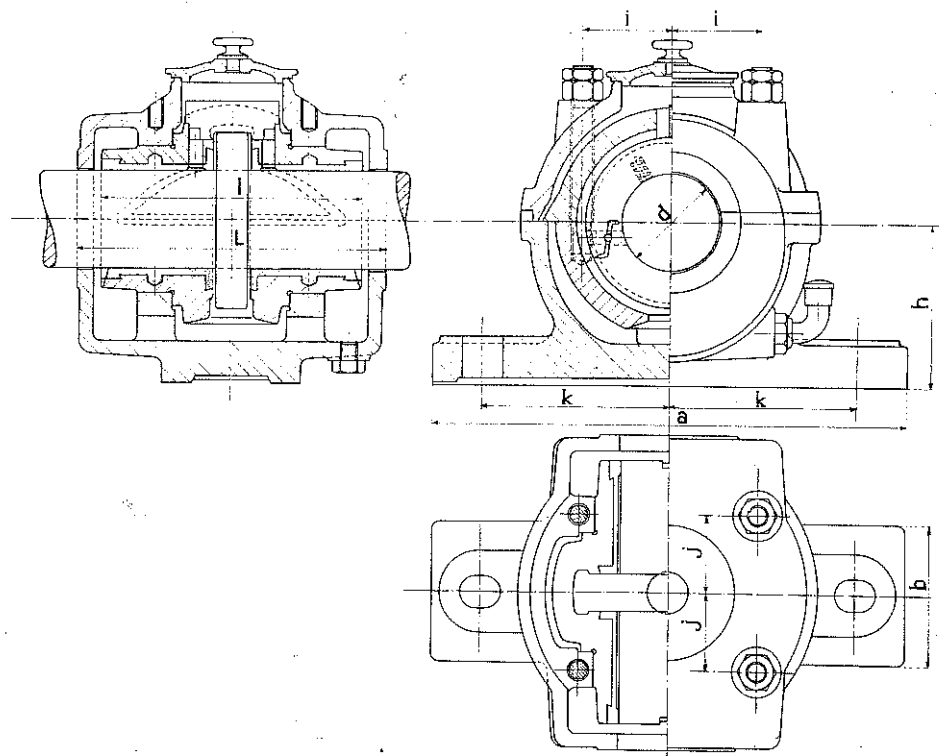


FIGURE 11.12 – Alimentation par bague fixe.

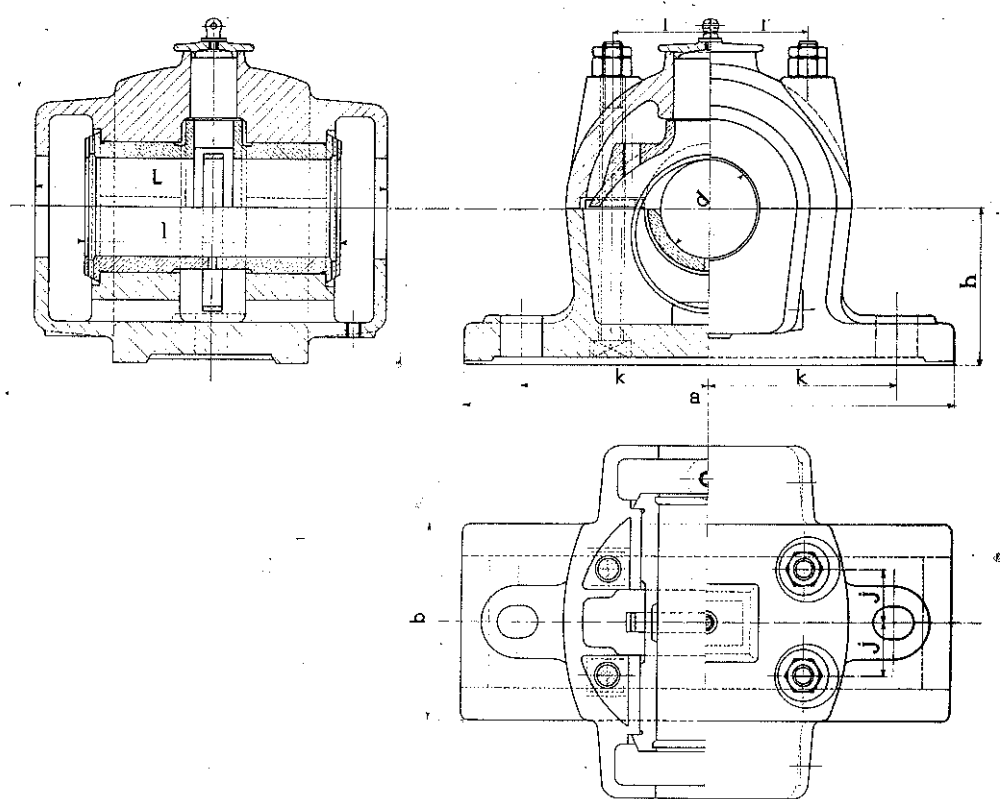


FIGURE 11.13 – Alimentation par bague mobile.

Chapitre 12

Soudures

12.1 Généralités

Par *soudure*, on entend un assemblage de deux pièces obtenu par fusion locale du métal *avec interpénétration*. Il peut y avoir ou non apport de métal¹. Le soudage est très utilisé en constructions civiles métalliques. En construction des machines également, on s'en sert pour fabriquer, soit des bâtis, soit des pièces de forme impropre à un usinage économique, que l'on ne peut ou ne veut pas obtenir par les procédés de fonderie. Ainsi, pour fabriquer la pièce de la figure 12.1 en acier, un usinage au tour nécessiterait l'enlèvement d'une quantité de

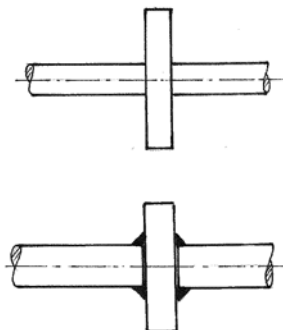


FIGURE 12.1 – Pièce réalisée au tour et pièce soudée.

copeaux supérieure à la masse de la pièce, ce qui n'est pas économique. Mais il est également possible de la réaliser par soudage. Cependant, à ces propriétés attrayantes, il faut en ajouter d'autres qui le sont un peu moins. Le refroidissement du cordon de soudure après pose s'accompagne d'un retrait, et celui-ci peut provoquer des *déformations* modifiant les positions ou les cotes des pièces (figure 12.2). Si ces déformations sont empêchées, il en résulte des *contraintes résiduelles* qui peuvent être dangereuses. Ces contraintes résiduelles ont été à l'origine de nombreux accidents dans l'entre-deux guerres (ponts écroulés, navires rompus sous le simple effet de la houle). En outre, dans beaucoup de cas,

1. L'opération consistant à souder s'appelle *soudage*. La *soudure* est le résultat du soudage.

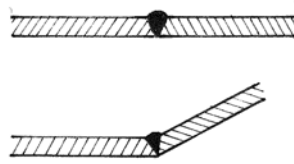


FIGURE 12.2 – Déformations de retrait.

le joint de soudure ne réalise pas la continuité parfaite des pièces soudées, ce qui provoque un *effet d'entaille* très préjudiciable en fatigue (figure 12.3). Enfin, le

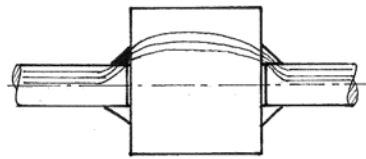


FIGURE 12.3 – Concentration de contrainte.

joint de soudure peut être entaché de diverses imperfections, bulles, inclusions de laitier, etc. qui compromettent évidemment ses performances. Il peut également y avoir un *défait de pénétration*, ce qui signifie que le joint ne se mêle pas aux pièces à leur jonction (*collage*, voir figure 12.4).

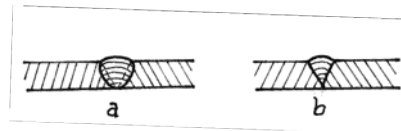


FIGURE 12.4 – Pénétration (a) et collage (b).

12.2 Procédés de soudage

Les principaux procédés de soudage ont été décrits dans le cours de *procédés industriels de mise à forme*, auquel nous nous contentons de faire référence. On pourra aussi consulter l'excellent ouvrage de Baus et Chapeau [76].

12.3 Soudabilité

Certains matériaux ont tendance à se fragiliser quand on les soude. La capacité d'un matériau à admettre une soudure sans devenir fragile est appelée *soudabilité*.

- En règle générale, un *acier* est d'autant moins soudable qu'il contient plus de carbone. Jusqu'à 0,35% de carbone, l'acier est soudable sans problème. Au-delà, la soudabilité est limitée, ce qui signifie qu'il faut s'entourer de précautions, par exemple, chauffer les pièces avant soudage, les revenir

après. Les aciers effervescent sont moins soudables que les aciers calmés², à cause de leur teneur inévitable en soufre et en phosphore, éléments fragilisants. Certains aciers ont été développés spécialement pour obtenir une soudabilité améliorée.

- Pour les aciers alliés, l'Institut International de la Soudure propose d'utiliser la notion de teneur en carbone équivalente,

$$C_{\text{eq}} = \%C + \frac{\%Mn}{6} + \frac{\%Cr + \%Mo + \%V}{5} + \frac{\%Cu + \%Ni}{15} \quad (12.1)$$

à partir de laquelle on déduit les appréciations suivantes :

C_{eq}	Soudabilité
$\leq 0,35$	excellente
0,36...0,40	très bonne
0,41...0,45	bonne
0,46...0,50	satisfaisante
$\geq 0,50$	faible

- Les *fontes* se soudent difficilement. Il ne faut les souder que pour d'éventuelles réparations, et cette opération demande des précautions spéciales.
- L'*aluminium* et ses alliages se soudent assez bien, mais avec des postes à souder fonctionnant en courant alternatif.
- Le soudage des métaux spéciaux (titane, zirconium, tellure) demande des procédés appropriés.

12.4 Calcul statique des soudures de pièces d'acier

Le calcul des soudures entre pièces d'acier du génie civil est régi par l'Eurocode 3, [79, 61, 1] que nous suivrons dans notre exposé.

12.4.1 Section du cordon

Dans le cas d'une soudure en bout, le cordon a sa racine d'un côté des pièces et son épaisseur a est égale à celle des tôles, comme le montre la figure 12.5. La

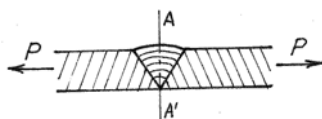
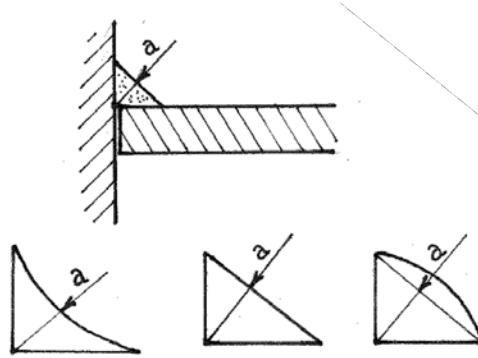


FIGURE 12.5 – Soudure en bout.

contrainte d'extension dans ce joint se définit de manière naturelle.

2. Désoxydés dans le four

FIGURE 12.6 – Épaisseur a d'un joint de soudure d'angle.

Dans le cas d'une soudure d'angle (figure 12.6), on définit l'épaisseur du joint a comme étant la plus petite distance de sa racine à la surface libre. Cependant, si le joint est convexe, l'épaisseur est limitée à la corde du joint. La longueur ℓ du joint est toujours amputée de $2a$, pour tenir compte des *cratères d'extrémité*.

12.4.2 Définition conventionnelle des contraintes

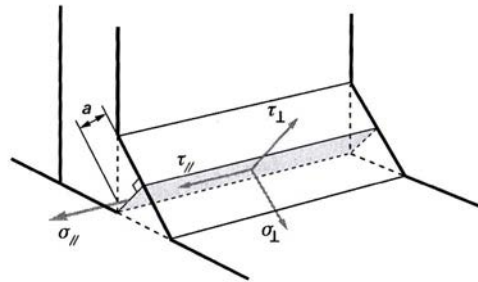


FIGURE 12.7 – Définition conventionnelle des contraintes dans le cordon.

Les forces appliquées d'un côté du joint sont décomposées conventionnellement dans le plan de gorge du cordon en contraintes $\sigma_{\perp}, \tau_{\perp}, \tau_{\parallel}$ et $\sigma_{\parallel}$, comme l'illustre la figure 12.7. Il est à présent admis que la contrainte $\sigma_{\parallel}$ ne joue aucun rôle dans la résistance de la soudure.

12.4.3 Vérification de la soudure

Le code définit la contrainte équivalente

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_{\perp}^2 + 3(\tau_{\perp}^2 + \tau_{\parallel}^2)} \quad (12.2)$$

La contrainte de référence est la *limite de rupture du métal de base* notée f_u , que l'on divise par un *coefficient de sécurité partiel* γ_{Mw} . En outre, on tient

compte du fait que le cordon de soudure, réalisé dans les règles de l'art, est plus résistant que le métal de base, en divisant encore la limite par un coefficient β_w inférieur à 1. C'est la *première condition à vérifier* :

$$\sigma_e \leq \frac{f_u}{\beta_w \gamma_{Mw}} \quad (12.3)$$

En outre, le code prescrit de vérifier la *seconde condition* suivante :

$$\sigma_{\perp} \leq \frac{f_u}{\gamma_{Mw}} \quad (12.4)$$

Les valeurs à utiliser sont données dans le tableau suivant :

Acier	f_y/MPa	f_u/MPa	β_w	γ_{Mw}
S235	235	360	0,80	1,25
S275	275	410	0,85	1,30
S355	355	510	0,90	1,35

12.4.4 Formule enveloppe

On remarquera que la valeur de σ_e définie par la formule 12.2 est évidemment majorée par la contrainte dite *d'enveloppe*

$$\sigma_{env} = \sqrt{3\sigma_{\perp}^2 + 3(\tau_{\perp}^2 + \tau_{\parallel}^2)} = \sqrt{3}\sqrt{\sigma_{\perp}^2 + \tau_{\perp}^2 + \tau_{\parallel}^2} \quad (12.5)$$

Il est donc clair que l'utilisation de la contrainte d'enveloppe en lieu et place de la contrainte équivalente va dans le sens d'une sécurité accrue. Or, cette contrainte enveloppe a l'avantage d'être indépendante de la direction de la force F appliquée : dans tous les cas, on a

$$\sigma_{env} = \sqrt{3} \frac{F}{a\ell} \quad (12.6)$$

où ℓ est la longueur du cordon, ce qui simplifie notablement les calculs.

12.5 Calcul statique des soudures de pièces d'alliages d'aluminium

Pour les soudures de pièces en aluminium, les règles françaises AL71 [61] utilisent la contrainte équivalente

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_{\perp}^2 + 2,7(\tau_{\perp}^2 + \tau_{\parallel}^2)} \quad (12.7)$$

et définissent le critère de vérification

$$\sigma_e \leq \alpha\beta\gamma f_y \quad (12.8)$$

où

- f_y est la limite élastique de l'alliage considéré

- α est un coefficient de qualité de réalisation de la soudure, compris entre 0,8 et 1 ;
- β et γ sont des coefficients destinés à caractériser une minoration de résistance dépendant du métal de base et du métal d'apport.

Les valeurs proposées pour β et γ sont données dans le tableau suivant :

Alliage 1/état	Alliage 2/état	Épaisseur/mm	Nuance d'apport	β	γ
AW5754/H111	AW5754/H111	≤ 20	AW5154	1	1
AW5086/H111	AW5086/H111	≤ 20	AW5836	1	1
AW6060/T5	AW6060/T5	≤ 8	AW40473A	0,6	0,9
AW6060/T5	AW6060/T5	≤ 8	AW5336	0,65	1
AW6081/T6	AW6081/T6	≤ 20	AW4043A	0,45	0,8
AW6081/T6	AW6081/T6	≤ 20	AW5386	0,45	1
AW7020/T6	AW7020/T6	≤ 8	AW4043A	0,6	0,7
AW7020/T6	AW7020/T6	≤ 12	AW5356	0,8	0,65
AW5086/H111	A-S7 G0,6/Y33	≤ 8	AW4043A	0,4	0,8
AW6060/H111	A-S7 G0,3/Y23	≤ 8	AW4043A	0,6	0,8

12.6 Résistance des soudures à la fatigue

12.6.1 Généralités

Pour le calcul des soudures à la fatigue, nous nous référons aux recommandations de l'Institut International de la Soudure (I.I.W.), dans leur version de 2008 [8], dont le présent exposé n'est qu'un bref survol.

Les cordons de soudure provoquent généralement des discontinuités de forme assez aiguës. Il en résulte que

- Les ruptures de fatigue ont le plus souvent lieu dans les pièces soudées, au voisinage des joints.
- Conformément à ce que l'on connaît des pièces à entaille aiguë en construction des machines, leur résistance en fatigue est à peu près *indépendante de l'acier considéré*.
- Les soudures engendrent de fortes contraintes résiduelles. En conséquence, on peut considérer que le seul paramètre déterminant en fatigue est la *variation de contrainte* $\Delta\sigma$.

12.6.2 Lois de durée de vie

L'I.I.W. classe les différents assemblages soudés, selon leurs entailles, en catégories repérées par la variation de contrainte FAT correspondant à 2.10^6 cycles, avec une probabilité de survie de 95%. Les courbes de Wöhler correspondantes, représentées en figure 12.8, ont des équations de la forme suivante :

$$\Delta\sigma(N) = FAT \left(\frac{2.10^6}{N} \right)^{1/m} \quad \text{pour } N \leq N_C \quad (12.9)$$

$$\Delta\sigma_C = \Delta\sigma(N_C) = FAT \left(\frac{2.10^6}{N_C} \right)^{1/m} \quad (12.10)$$

$$\Delta\sigma(N) = \Delta\sigma_C \left(\frac{N_C}{N} \right)^{1/m'} \quad \text{pour } N > N_C \quad (12.11)$$

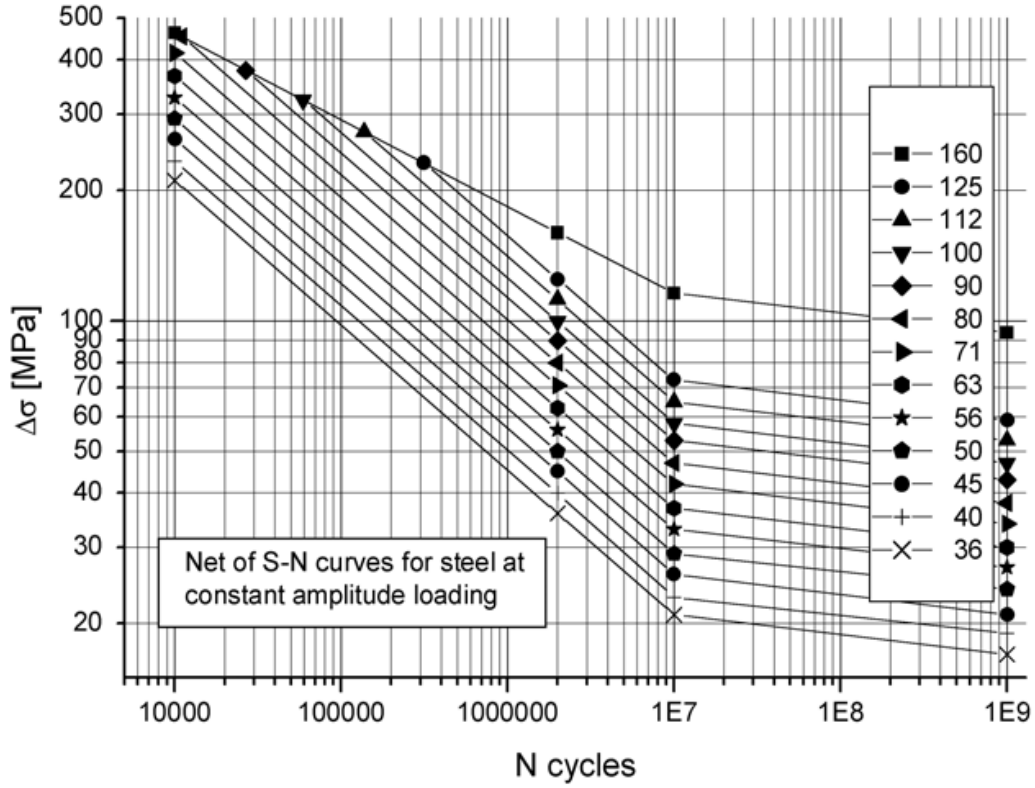


FIGURE 12.8 – Réseau de courbes de Wöhler.

Dans ces expressions, N_C représente la contrainte correspondant au coude de la courbe de Wöhler. L'I.I.W. a donc abandonné toute notion de limite d'endurance. Selon les sollicitations, on adopte les valeurs suivantes de m , m' et N_C :

Sollicitation	m	m'	N_C
Extension	3	22	10^7
Cisaillement	5	22	10^8

On remarquera que l'expression (12.9) est équivalente à

$$\Delta\sigma(N) = \Delta\sigma_C \left(\frac{N_C}{N} \right)^{1/m} \quad \text{pour } N \leq N_C \quad (12.12)$$

ce qui nous sera utile plus loin.

Un grand nombre de cas sont prévus dans les recommandations de l'I.I.W., sous forme de tableaux contenant un schéma d'assemblage soudé, le *FAT* correspondant et des remarques [8] (Voir *Mémento*). La figure 12.9 reproduit l'un de ceux-ci. Le calcul consiste à d'abord calculer la variation de contrainte $\Delta\sigma_{lim}$ ou $\Delta\tau_{lim}$ correspondant à la durée de vie désirée. La sécurité est alors

$$s = \frac{\Delta\sigma_{lim}}{\Delta\sigma} \quad \text{ou} \quad s = \frac{\Delta\tau_{lim}}{\Delta\tau} \quad (12.13)$$

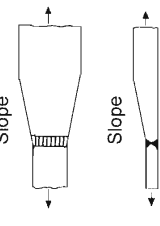
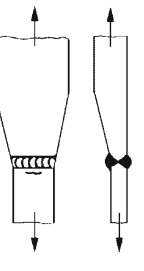
No.	Structural Detail	Description (St.= steel; Al.= aluminium)	FAT St.	FAT Al.	Requirements and Remarks
217		Transverse partial penetration butt weld, analysis based on stress in weld throat sectional area, weld overfill not to be taken into account.	36	12	The detail is not recommended for fatigue loaded members. Assessment by notch stress or fracture mechanics is preferred.
221		Transverse butt weld ground flush, NDT, with transition in thickness and width slope 1:5 slope 1:3 slope 1:2	112 100 90	45 40 32	All welds ground flush to surface, grinding parallel to direction of loading. Weld run-on and run-off pieces to be used and subsequently removed. Plate edges to be ground flush in direction of stress. Misalignment due to deliberate thickness step to be considered, see Section 3.8.2. Additional misalignment due to fabrication imperfection < 5% of plate thickness.
222		Transverse butt weld made in shop, welded in flat position, weld profile controlled, NDT, with transition in thickness and width: slope 1:5 slope 1:3 slope 1:2	90 80 72	32 28 25	Weld run-on and run-off pieces to be used and subsequently removed. Plate edges ground flush in direction of stress. Misalignment due to deliberate thickness step to be considered, see Section 3.8.2. Additional misalignment due to fabrication imperfection < 5% of plate thickness.

FIGURE 12.9 – Exemple de tableau de l'I.I.W.

12.6.3 Variations de charges d'amplitude variable

Dans le cas de variations de charges d'amplitude variable, on utilise la règle de Palmgren-Miner exprimant le *dommage* par

$$\mathcal{D} = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \leq 1 \quad (12.14)$$

L'I.I.W. conseille de remplacer la valeur 1 du dommage total par une valeur limite plus faible $\mathcal{D}_{lim} = 0,5$ dans les cas courants et même $\mathcal{D}_{lim} = 0,2$ si la contrainte moyenne varie fortement.

Il est utile d'introduire la variation de contrainte équivalente $\Delta\sigma_{\text{éq}}$, contrainte constante qui donnerait le même dommage pour le nombre total de cycles. Assignons un indice i aux variations de contraintes supérieures à $\Delta\sigma_C$ et un indice j aux autres. Le dommage s'écrit donc

$$\mathcal{D} = \sum_i \frac{n_i}{N_i} + \sum_j \frac{n_j}{N_j}$$

Comme

$$\frac{1}{N_i} = \frac{1}{N_C} \left(\frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\sigma_C} \right)^m$$

et

$$\frac{1}{N_j} = \frac{1}{N_C} \left(\frac{\Delta\sigma_j}{\Delta\sigma_C} \right)^{m'}$$

on a

$$\mathcal{D} = \frac{1}{N_C} \left[\sum_i n_i \left(\frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\sigma_C} \right)^m + \sum_j n_j \left(\frac{\Delta\sigma_j}{\Delta\sigma_C} \right)^{m'} \right]$$

La variation de contrainte équivalente est celle qui conduirait au même dommage pour le nombre total de cycles $(\sum_i n_i + \sum_j n_j)$, ce qui s'écrit

$$\mathcal{D} = \frac{1}{N_C} \left(\sum_i n_i + \sum_j n_j \right) \left(\frac{\Delta\sigma_{\text{éq}}^m}{\Delta\sigma_C^m} \right)^m$$

Elle vaut donc

$$\Delta\sigma_{\text{éq}} = \sqrt[m]{\frac{\sum_i n_i \Delta\sigma_i^m + \Delta\sigma_C^{m-m'} \sum_j n_j \Delta\sigma_j^{m'}}{\sum_i n_i + \sum_j n_j}}$$

pour autant que cette valeur soit supérieure à $\Delta\sigma_C$. Dans le cas contraire, il faut écrire

$$\Delta\sigma_{\text{éq}} = \sqrt[m']{\frac{\Delta\sigma_C^{m'-m} \sum_i n_i \Delta\sigma_i^m + \sum_j n_j \Delta\sigma_j^{m'}}{\sum_i n_i + \sum_j n_j}}$$

La contrainte équivalente limite est alors la contrainte qui, sur la courbe de Wöhler, correspond au nombre total de cycles divisé par $\mathcal{D}_{lim}$:

$$\Delta\sigma_{\text{éq},lim} = \Delta\sigma \left(\frac{\sum_i n_i + \sum_j n_j}{\mathcal{D}_{lim}} \right) \quad (12.15)$$

Bien entendu, tout ce qui précède s'applique, *mutatis mutandis*, aux contraintes de cisaillement.

12.6.4 Comptage des cycles

La difficulté pratique est qu'en réalité, on a souvent des diagrammes de la charge assez tourmentés, comme celui de la figure 12.10. Il existe plusieurs

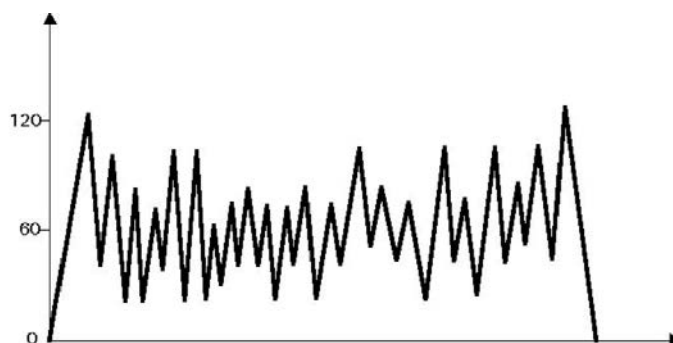


FIGURE 12.10 – Chargement d'amplitude variable.

méthodes pour traiter ce genre de sollicitation, la plus simple étant sans doute la *méthode du réservoir* qui est expliquée en la figure 12.11 empruntée aux British Standards [7].

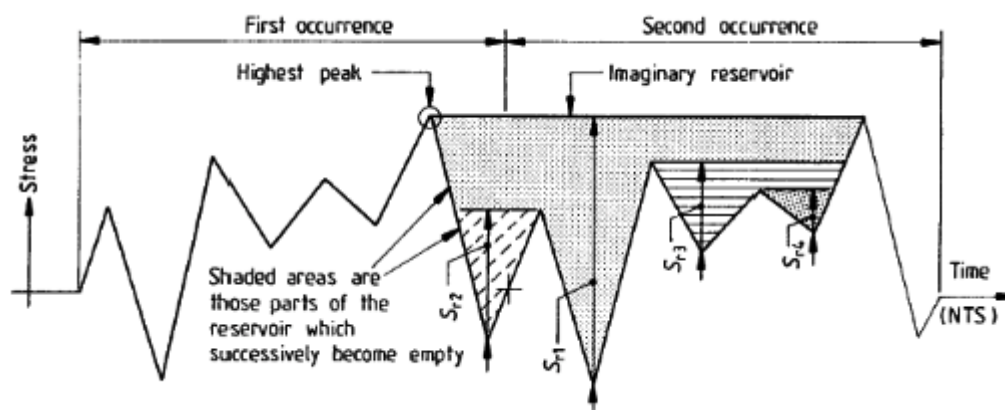


FIGURE 12.11 – Méthode du réservoir.

12.6.5 Combinaison d'extension et de cisaillement

Dans le cas où il y a à la fois extension et cisaillement, on calcule la sécurité par

$$\frac{1}{s^2} = \left(\frac{\Delta\sigma_{\text{éq}}}{\Delta\sigma_{\text{éq},\text{lim}}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta\tau_{\text{éq}}}{\Delta\tau_{\text{éq},\text{lim}}} \right)^2$$

Chapitre 13

Rivures

13.1 Généralités

Les rivures constituent des assemblages permanents. Selon leur destination, on distingue traditionnellement

- les *rivures de force*, que l'on rencontre dans les constructions métalliques en acier ou en métaux légers ;
- les *rivures de force et d'étanchéité*, en chaudronnerie ;
- les *rivures d'étanchéité*, dans les réservoirs, les cheminées en tôles, les tuyauteries sans surpression ;
- les *rivures de liaison des éléments de tôles* (aviation, automobile).

Dans beaucoup d'applications, les rivures ont été supplantées par la soudure. Une rivure demande en effet plus de travail, et les pièces soudées sont plus simples et moins chères. En outre, le façonnage des rivets à la bouterolle soumet l'ouïe des ouvriers à rude épreuve. Cependant, les rivures sont *très sûres* et d'un contrôle très facile (au son, quand on frappe l'assemblage). Par ailleurs, dans le cas des alliages légers, on préfère encore souvent la rivure qui permet d'éviter les conséquences de l'échauffement de soudage.

13.2 Pratique de la rivure

13.2.1 Types de rivets, et leur pose

Le rivet plein se présente avant pose comme une tige possédant une tête, la tige ayant une longueur suffisante pour pouvoir former la deuxième tête. Pour assembler des pièces d'acier dont la somme des épaisseurs est $\sum t$, la tige doit avoir une longueur $\sum t + f$, avec $f = (1,5 \text{ à } 1,7)d$ (fig. 13.1). Le diamètre d du trou est supérieur au diamètre d_1 du rivet, pour faciliter la pose :

$$d \approx d_1 + 1mm \quad (d_1 \geq 10mm)$$

Pour les métaux légers, on a

$$d \approx \begin{array}{ll} d_1 + 0,1mm & (d_1 \leq 10mm) \\ d_1 + 0,2mm & (d_1 > 10mm) \end{array}$$

Il existe deux manières de poser les rivets : à chaud ou à froid.

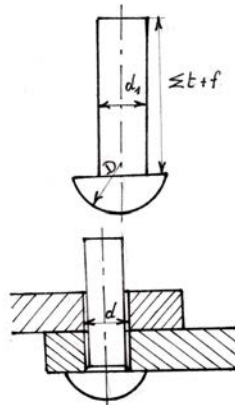


FIGURE 13.1 – Rivet avant pose.

1. Les rivets d'acier ayant un diamètre de 10mm et plus sont posés à *chaud*. On porte le rivet à la température du rouge clair ($\approx 900^{\circ}\text{C}$), on forme la tête à la bouterolle et on maintient celle-ci en place jusqu'à une température de l'ordre de 500°C (fig 13.2). En se refroidissant, le rivet se

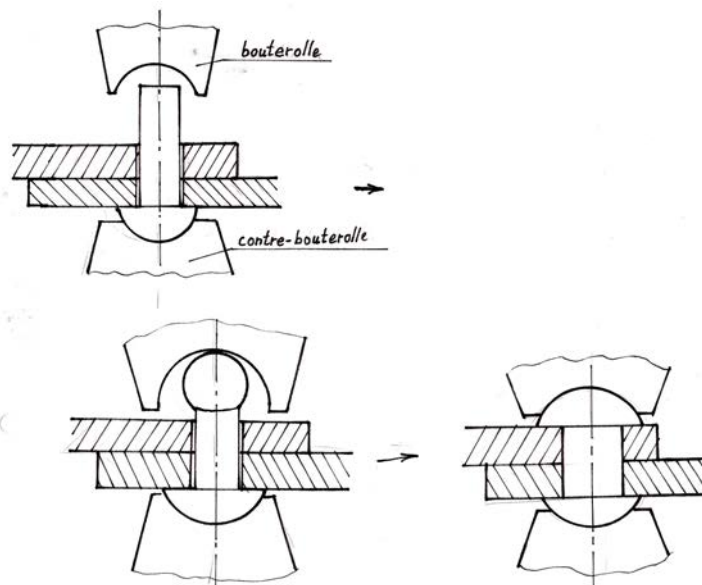


FIGURE 13.2 – Façonnage du rivet.

contracte et provoque un *serrage* important des tôles. La contrainte du rivet avoisine, pour les qualités les plus tendres (acier : $R_m = 340\text{MPa}$), la limite élastique. Il en résulte que l'assemblage est capable de reprendre de grands efforts transversaux au rivet par *frottement*. Ce fait peut être mis à profit dans les rivures d'étanchéité, ainsi qu'en fatigue (fig. 13.3).

2. Les rivets d'acier de diamètre inférieur à 10mm, ainsi que les rivets de

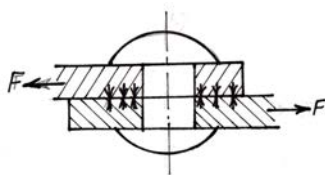


FIGURE 13.3 – Comportement du rivet monté à chaud.

métaux légers et de cuivre sont montés à froid. Le serrage résiduel reste faible et on ne peut compter sur un effort de frottement important. La transmission de l'effort dans ces rivures se fait ici essentiellement par cisaillement du rivet et pression des tôles sur le manteau de sa tige (fig. 13.4).

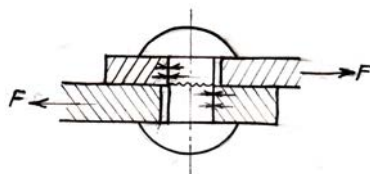


FIGURE 13.4 – Comportement du rivet monté à froid.

Pour les applications où la tête ne peut dépasser de la tôle, on utilise des rivets à tête noyée, dont l'une des têtes est noyée dans une fraisure. La sécurité est moins grande et la main-d'œuvre est plus coûteuse (fig. 13.5).

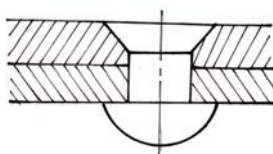


FIGURE 13.5 – Rivet à tête noyée.

Les rivets creux (fig. 13.6) s'utilisent surtout en construction aéronautique, dans les appareils de précision, dans l'industrie légère ou encore, pour assembler des pièces de cuir. Lorsqu'un des côtés est inaccessible, on utilise le rivet borgne, encore appelé rivet *POP*. Il s'agit d'un rivet creux dans lequel passe un mandrin épaulé. On introduit le rivet avec son mandrin dans le trou, puis on tire sur le mandrin en prenant appui sur la tête apparente du rivet. Le mandrin forme la seconde tête du rivet, puis casse (fig. 13.7).

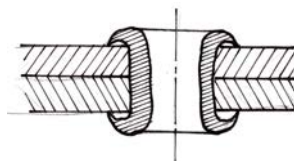


FIGURE 13.6 – Rivet creux.



FIGURE 13.7 – Rivet borgne, encore appelé rivet POP.

13.2.2 Gamme des opérations d'exécution d'une rivure

1. Il faut d'abord faire un *plan* de la rivure pour déterminer le nombre et la position des rivets.
2. *Traçage* : après avoir blanchi la tôle, on marque les axes avec une pointe d'acier dur. On marque alors les centres au pointeau.
3. *Perçage des trous*. Jadis, ce perçage se faisait par poinçonnage. Il en résultait un fort écrouissage qui rendait le trou fragile. Actuellement, les trous sont forés.
4. S'il y a lieu, *cintrage* des tôles.
5. *Pose* des rivets.
6. Pour les soudures d'étanchéité, on effectue un *rematage* (fig 13.8).

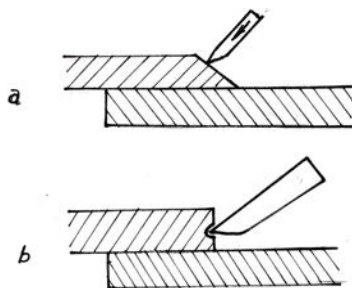


FIGURE 13.8 – Matage classique (a) et matage anglais (b).

- Le *matage classique* consistait à chanfreiner les tôles, puis à en presser le biseau avec un *matoir*, sorte de burin émoussé.
- La *matage anglais*, plus rapide, consiste à faire une rainure à l'extrémité de la tôle à l'aide d'un burin monté sur marteau pneumatique. On peut alors mater la partie inférieure de la rainure. L'avantage est la disparition de l'opération de chanfreinage.
- Les têtes de rivets sont également matées, sauf pour les très faibles épaisseurs, pour lesquelles on utilise des *joint*s.

13.3 Calcul des rivures

13.3.1 Section du rivet

Lorsque le modelage du rivet est parfait, *le trou est entièrement rempli*. cependant, cette condition ne peut être vérifiée que si le rivet n'est pas trop long. Un rivet trop long peut en effet flamber lors du façonnage, ce qui rend le remplissage impossible (fig 13.9). C'est pourquoi il convient de respecter la

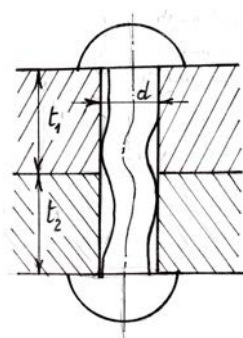


FIGURE 13.9 – Flambage d'un rivet trop long.

condition [4, 65]

$$\sum t \leq 4d \quad (13.1)$$

C'est une règle de bonne pratique. Si elle n'est pas respectée, il y a lieu de majorer la section du rivet [4].

13.3.2 Résistance des pièces assemblées

13.3.2.1 Section nette et coefficient d'utilisation de la tôle

Les trous de rivets affaiblissent les tôles. Sans tenir compte de l'inévitable concentration de contrainte (qui ne joue pas un rôle fondamental en statique¹), on définit la *section nette* en soustrayant à la section brute la somme des diamètres de rivets. Le *coefficient d'utilisation* ρ est par définition le rapport entre la contrainte qui existerait en l'absence de trous et la contrainte nominale calculée dans la section nette. Pour une simple rangée de n rivets (fig. 13.10), on

1. Lors de la plastification, les contraintes tendent à s'égaliser.

La section dangereuse sera la section I si

$$\frac{1}{a-d} \geq \frac{4}{5(a-2d)}$$

soit si

$$5a - 10d \geq 4a - 4d$$

ce qui donne

$$a \geq 6d$$

ce qui est généralement le cas. On a alors

$$\rho = \frac{a-d}{a} = 1 - \frac{d}{a}$$

Posant, par exemple, $a = 7d$, on obtient un coefficient d'utilisation

$$\rho = \frac{6}{7} = 0,86$$

Remarque On notera que si la première rangée avait été *complète*, on aurait eu en tout 6 rivets, ce qui aurait mené au tableau suivant :

Section	Effort	Section nette	Contrainte nominale
I	F	$(a-2d)t$	$\frac{F}{(a-2d)t}$
II	$\frac{4}{6}F$	$(a-2d)t$	$\frac{4}{6} \frac{F}{(a-2d)t}$
III	$\frac{2}{6}F$	$(a-2d)t$	$\frac{2}{6} \frac{F}{(a-2d)t}$

La contrainte dans la rangée I aurait alors été égale à 1,5 fois celle de la rangée II. C'est ce qui justifie la première rangée incomplète.

Revenant au cas de la rivure à première rangée incomplète, le couvre-joint peut être découpé en sinusoïde sur son bord, ce qui réduit sa section brute de moitié, mais à cet endroit les couvre-joints ne reprennent encore qu'un cinquième de la charge. Cette forme du bord est préférable pour l'efficacité du matage dans le cas de rivures devant assurer l'étanchéité.

13.3.2.2 Contrainte nominale de la tôle

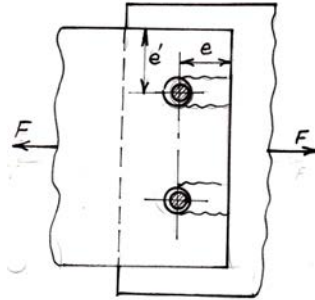
On définit naturellement la contrainte nominale de la tôle par

$$\sigma_{nom} = \frac{F}{\rho A} \quad (13.3)$$

ce qui mène à la sécurité

$$s = \frac{(\sigma_{lim})_{tôle}}{\sigma_{nom}} \quad (13.4)$$

Pour une sollicitation statique, $\sigma_{lim} = R_e$ et une sécurité normale sera de l'ordre de 1,25 à 1,5.

FIGURE 13.12 – Pince longitudinale e et pince transversale e' .

13.3.2.3 Pince longitudinale et pince transversale

D'autre part, il convient de ménager une *pince longitudinale* e suffisante pour éviter la déchirure du métal (fig. 13.12). Des accidents se sont produits du fait de la négligence de cette condition [4], qui ne doit donc pas être perdue de vue. Ce type de ruine se faisant par cisaillement technologique, on utilise la contrainte nominale

$$\tau = \frac{F}{2zet} \quad (13.5)$$

où z est le nombre de rivets correspondant à la charge F . En admettant une limite de cisaillement technologique $\tau_{lim} = 0,8Re$, et une sécurité de 1,25, on obtient la condition

$$e \geq 0,78 \frac{F}{ztR_e}$$

que les règles CM66 arrondissent à

$$e \geq 0,8 \frac{F}{ztR_e}$$

En outre, les mêmes règles fixent une second condition :

$$e \geq 1,5d$$

ce qui donne finalement

$$e \geq \max \left(1,5d \quad , \quad 0,8 \frac{F}{ztR_e} \right) \quad (13.6)$$

Cependant, il ne faut pas exagérer la pince longitudinale, pour éviter l'oxydation par bûillement (fig.13.13). De bonnes valeurs sont

$$e \leq \begin{cases} 4d & (\text{pièce pincée entre deux autres}) \\ 2,5d & (\text{autres cas}) \end{cases} \quad (13.7)$$

Pour la pince transversale e' , prendre

$$e' \approx \frac{e}{2} \quad (13.8)$$

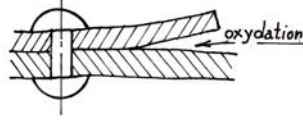


FIGURE 13.13 – Bûillement d'une tôle rivée trop près de son bord et oxydation consécutive.

13.4 Vérification des rivets

On utilise généralement des rivets légèrement plus doux que les matériaux à assembler. Le principe est que la ruine de la rivure est moins grave que la ruine des pièces assemblées.

13.4.1 Calcul à l'adhérence

Lorsque les rivets sont montés à *chaud*, ils se contractent en se refroidissant, ce qui provoque un fort serrage des pièces assemblées. Des essais ont montré que la contrainte dans le rivet dépasse toujours 70% de sa limite élastique et, pour des rivets tendres, avoisine celle-ci [4, 58, 59, 86]. Il en résulte que l'assemblage peut reprendre un effort important par frottement des pièces l'une sur l'autre. Si σ est la contrainte dans le rivet, cet effort vaut

$$F = \mu \frac{\pi d^2}{4} \sigma$$

où μ est le coefficient de frottement. Pour des conditions favorables (tôles d'acier doux nettoyées au chalumeau), on peut compter sur un coefficient de frottement $\mu = 0,45$. Notant alors $\xi = \mu\sigma$, on peut compter sur une valeur

$$\xi_{lim} = 0,7\mu R_e(\text{rivet}) \quad (13.9)$$

Dès lors, si l'on dimensionne la rivure à l'adhérence, la sécurité d'une rivure à z rivets et n surfaces de frottement (fig. 13.14) soumise à une force F sera donnée

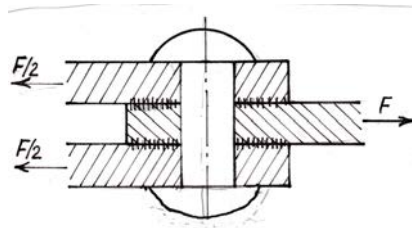


FIGURE 13.14 – Deux surfaces de frottement.

par

$$s = \frac{zn \frac{\pi d^2}{4} \xi_{lim}}{F} \quad (13.10)$$

Comme en cas de glissement, il existe encore une réserve de résistance par cisaillement, la sécurité pourra être très limitée (jusqu'à $s=1$).

Ce mode de raisonnement s'impose pour les constructions où se posent des problèmes d'étanchéité (chaudronnerie). On considère également qu'il constitue une base raisonnable du calcul à la fatigue, car l'adhérence évite le contact direct entre les tôles et les rivets. Cependant, ce calcul ne s'applique ni aux rivets d'acier de petites dimensions, ni aux rivets non ferreux, qui se posent à froid.

13.4.2 Calcul au cisaillement et à la pression de contact

Pour des charges dépassant la limite de glissement (et pour les rivets posés à froid, quelle que soit la charge), l'effort passe par le contact entre le rivet et les pièces assemblées. Il importe plus que jamais que le rivet remplisse bien son trou si l'on veut éviter l'arrachement de sa tête (fig. 13.15)

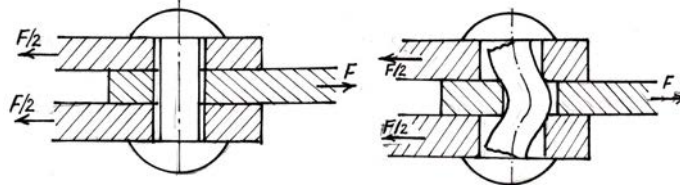


FIGURE 13.15 – Rivet posé à froid : il faut que le rivet soit bien ajusté au trou, sous peine d'arrachement de sa tête.

1. On vérifie d'abord le rivet au cisaillement technologique

$$\tau = \frac{F}{zn \frac{\pi d^2}{4}} \leq \frac{\tau_{lim}}{s} \quad (13.11)$$

On admet généralement la limite

$$\tau_{lim} = 0,8\sigma_{lim} \quad (13.12)$$

2. D'autre part, il faut éviter que la pression de contact entre les pièces assemblées et le rivet ne soit trop importantes. Cette pression, supposée uniformément répartie sur la demi-circonférence du rivet (fig. 13.16), vaut

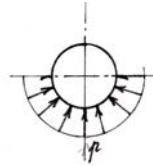


FIGURE 13.16 – Pression de contact.

$$p = \frac{F_{rivet}}{td} \quad (13.13)$$

où t est l'épaisseur de la tôle. Cependant, dans les rivures simplement cisailées, la répartition des pressions est très inégale (fig13.17). Cet ef-

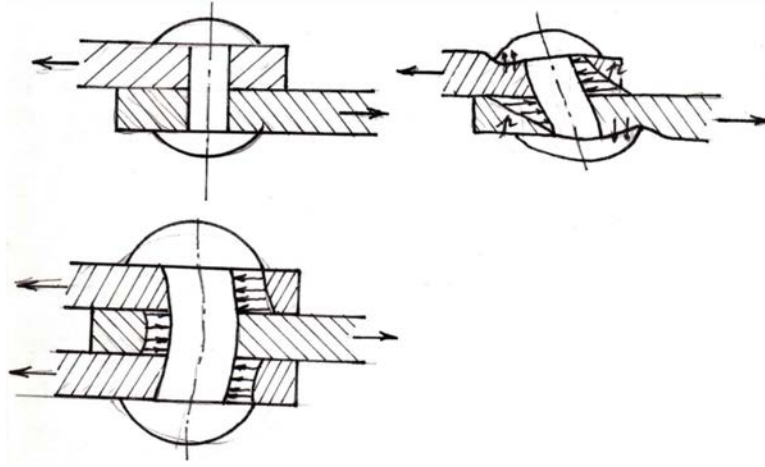


FIGURE 13.17 – Répartition des pressions de contact.

et s'atténue très nettement pour des rivures multiples cisillées. On définit donc un *coefficient β_r de répartition des pressions* :

$$\begin{aligned}\beta_r &= 1,11 \quad (\text{rivure simplement cisillée}) \\ &= 1 \quad (\text{rivure multiples cisillée})\end{aligned}\quad (13.14)$$

La condition à vérifier est alors

$$\beta_r p \leq \frac{p_{lim}}{s} \quad (13.15)$$

D'une manière assez générale, la limite de pression est

$$p_{lim} = 2\sigma_{lim} \quad (13.16)$$

Si l'on dimensionne à la limite élastique, cette valeur de p_{lim} met à l'abri de déformations plastiques appréciables. S'il s'agit, par exemple, de river un support de pièce mécanique, il faudra obtenir une sécurité normale. Mais dans les assemblages du génie civil, qui ne demandent pas un dimensionnement précis, on peut descendre jusqu'à 0,6 fois la sécurité habituelle.

Dans les assemblages courants, la condition sur la pression diamétrale ne joue que rarement un rôle. Considérons par exemple un assemblage à double couvre-joint, figure 13.18. La pression ne sera dimensionnante que si

$$2p_{lim}t_{min}d \leq 2\frac{\pi d^2}{4}\tau_{lim}$$

soit

$$\frac{d}{t_{lim}} \geq \frac{4}{\pi} \frac{p_{lim}}{\tau_{lim}} = \frac{4}{\pi} \frac{2Re}{0,8Re} \approx 3$$

Or, on n'utilise jamais d'aussi gros rivets, car ils pourraient reprendre la charge tout en étant très distants les uns des autres. Les tôles auraient alors la possibilité de bâiller (fig 13.19) ce qui est préjudiciable à l'étanchéité, à la tenue à la

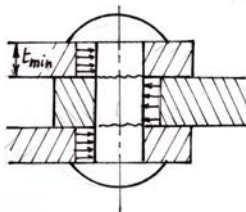


FIGURE 13.18 – Comparaison entre la pression de contact et la résistance au cisaillement.

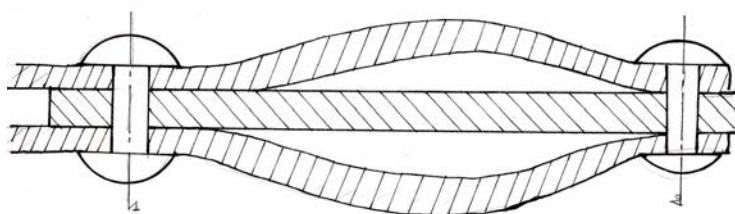


FIGURE 13.19 – Bâillement de pièces liées par des rivets trop écartés.

corrosion et même à la répartition des efforts. Pour fixer les idées, voici des formules empiriques en usage en Allemagne [77] :

$$\frac{d}{mm} \approx \sqrt{50 \frac{t_{min}}{mm}} - 2 \quad (\text{acier}) \quad (13.17)$$

$$d \approx 2t_{min} \quad (\text{alliages légers}) \quad (13.18)$$

13.5 Rivets sollicités en traction

La traction est une sollicitation dangereuse pour les rivets. En l'absence de précautions spéciales, une traction excentrée risque d'arracher les têtes (fig13.20).

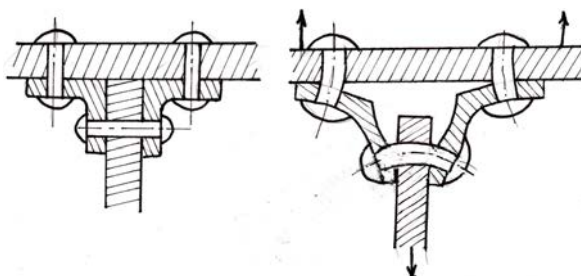


FIGURE 13.20 – Rivets en traction, avec cornières : risque d'arrachement des têtes de rivets.

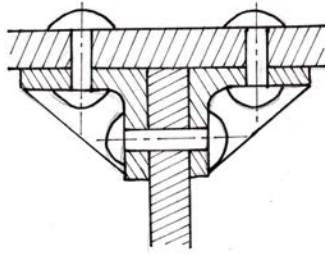


FIGURE 13.21 – On améliore sensiblement les choses en raidissant les cornières par des voiles.

Il faut donc raidir à l'aide de voiles les pièces portant les rivets (fig. 13.21). Dans ces conditions, le rivet peut reprendre par extension une charge égale à sa limite élastique. Si le rivet est posé à froid, c'est évident. Si le rivet est posé à chaud, il se comporte comme un boulon précontraint, et la plus grande partie de la charge est en fait reprise par détente des tôles. On a donc

$$\sigma_{lim} = Re, \quad \tau_{lim} = 0,8Re \quad (13.19)$$

et la formule classique

$$\frac{1}{s^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma_{lim}^2} + \frac{\tau^2}{\tau_{lim}^2} \quad (13.20)$$

est d'application avec les limites ci-dessus [4, 59].

Bibliographie

- [1] *ESDEP Course* – www.fgg.uni-lj.si/kmk/esdep/master/toc.htm.
- [2] *Norme allemande DIN7151*.
- [3] *Normes belges NBN 101 à 103*.
- [4] *Règles de calcul des constructions en acier (règles cm66)* – Paris, 1979.
- [5] *SKF - Catalogue général* – 1989.
- [6] *FAG-Programme standard* – 1990.
- [7] « Code of practice for fatigue design and assessment of steel structures » – *British Standards* (1993), no. BS7608.
- [8] *Recommendations for fatigue design of welded joints and components* – IIW-1823-07/XIII-2151r4-07/XV-1254r4-07, December 2008.
- [9] N. M. BELYAEV – *Strength of materials*, Mir, Moscou, 1979.
- [10] G. BERGLING – « Analysis of failure statistics for railway axlebox bearings », *Rolling bearing reliability*, ed. S. K. F. (1977).
- [11] — , « The operational reliability of rolling bearings », *Rolling bearing reliability*, ed. S. K. F. (1977).
- [12] J. BOULVIN – *Cours de mécanique appliquée aux machines*, 3 éd., vol. 1, Albin Michel, Paris, 1922.
- [13] A. CAMPA et J. ROLLET – *Technologie professionnelle générale pour les mécaniciens*, vol. 3, Foucher, Paris, 1971.
- [14] J. CORNELISSEN et H. WATERMAN – « The viscosity-temperature relation of liquids », *Chem. Eng. Sci.* **4** (1955), p. 238.
- [15] N. DAVIDENKOV, E. SHEVANDIN et F. WITMANN – « The influence of size on the brittle strength of steel », *Jl. Appl. Mech.* **14** (1947), p. 63–67.
- [16] J. F. DEBONGNIE – « Calcul et choix du serrage d’une paire de roulements à contact oblique », *Revue M* **28** (1982), no. 3.
- [17] — , « Fondements théoriques des essais accélérés d’usure des outils », Tech. report, Université de Liège, rapport LMF/D25, 1993, <http://hdl.handle.net/2268/16624>.
- [18] — , « On the link between design against fatigue and fracture mechanics », *Proc. 2000 ASME DETC* (Baltimore), August 2000.
- [19] — , « Predicting the fatigue notch effect from partial experimental data », *International conference on engineering design, ICED01* (Glasgow), August 2001.

- [20] — , *Conception mécanique*, vol. 1, Debongnie (Jean-François), Liège, 2007, <http://hdl.handle.net/2268/12993>.
- [21] — , « Calculs d'endurance par similitude », *10 e Congrès de mécanique* (Oujda, Maroc), Avril 2011.
- [22] — , *Élasticité*, Debongnie (Jean-François), Liège, 2011, <http://hdl.handle.net/2268/27209>.
- [23] F. DELCOUR – « Contribution par la voie expérimentale à l'amélioration de l'expression analytique de la dissipation de chaleur dans les paliers lisses », 1972.
- [24] V. DOBROVOLSKI, K. ZABLONSKI, S. MAK et A. RADTCHIK – *Éléments de machines*, Mir, Moscou, 1974.
- [25] P. ESCHMANN, L. HASBARGEN et K. WEIGAND – *Die Wälzlagerpraxis*, Oldenburg, München, 1978.
- [26] V. FEODOSSIEV – *Résistance des matériaux*, 3e éd., Mir, Moscou, 1976.
- [27] W. FISCHER – *Calcul de la capacité de charge dynamique des roulements*, SKF, Paris, 1960.
- [28] D. FRANÇOIS, A. PINEAU et A. ZAOUI – *Comportement mécanique des matériaux*, vol. 2, Hermès, Paris, 1993.
- [29] W. GNILKE – *Lebensdauerberechnung der Maschinenelemente*, Hanser, München, 1980.
- [30] H. G. GOUGH et H. V. POLLARD – « Strength of materials under combined alternating stresses », *Proc. I.M.E.* **131** (1935).
- [31] H. GOUGH et W. J. CLENSHAW – « Some experiments on the resistance of metals to fatigue under combined stresses », *Aeronautical research council reports*, ed. H.M.S.O., London (1951).
- [32] W. HAMPP – *Wälzlagerungen*, Springer Verlag, Berlin, 1968.
- [33] H. HERTZ – « Ueber die Berührung fester elastischer Körper », *Journal für die reine and angewandete Mathematik* **42** (1881), p. 156–171.
- [34] R. HERTZBERG – *Deformation and fracture mechanics of engineering materials*, 3d éd., Wiley, New York, 1989.
- [35] R. B. HEYWOOD – *Designing against fatigue*, Chapman and Hall, London, 1962.
- [36] K. HOHENEMSER et W. PRAGER – « The problem of fatigue strength under complex stresses », *Metallwirtschaft* **12** (1933).
- [37] A. B. JONES – « The mathematical theory of rolling element bearings », (H. Rothbart, éd.), Mc Graw Hill, 1964.
- [38] G. JUNKER – « Flächenpressung unter Schraubenköpfe », *Z. Maschinenmarkt* **38** (1961), p. 29–39.
- [39] G. JUNKER et D. BLUME – *Neue Wege einer systematischen Schraubenverbindung*, Triltsch-Verlag, Düsseldorf, 1964.
- [40] G. JUNKER et D. STREHLOW – « Untersuchungen über die Mechanik der selbsttätige Lösens und die zweckmäßige Sicherung von Schraubenverbindungen », *Z. Drahtwelt* **3** (1966).
- [41] R. KELLERMANN et H. KLEIN – « Untersuchungen über den Einfluß der Reibung », *Z. Konstruktion* **2** (1955).

- [42] — , « Anziehdrehmomente für Schraubenverindungen », *Z. Konstruktion* **4** (1960).
- [43] G. KÖHLER et H. RÖGNITZ — *Maschinenteile*, 5e éd., vol. 2, Teubner, Stuttgart, 1976.
- [44] — , *Maschinenteile*, 5e éd., vol. 1, Teubner, Stuttgart, 1976.
- [45] K. H. KLOOS — « Grundlagen der Werkstoff- und Bauteileigenschaften », *Dubbel Taschenbuch für die Maschinenbau*, Springer, Berlin, 17. éd., 1990.
- [46] P. KRAVCHENKO — *Fatigue resistance*, Pergamon, 1964.
- [47] G. LAMÉ et E. CLAPEYRON — « Mémoires sur l'équilibre intérieur des solides homogènes », *Mémoires présentés par divers savants* **4** (1833).
- [48] E. LEHR — « Formgebung und Werkstoffausnutzung », *Stahl und Eisen* **43** (1941), p. 965–971.
- [49] L. LELOUP — « Etude d'un régime de lubrification : le frottement onctueux des paliers lisses », *Revue universelle des mines* **90e année, 9e série, tome 3** (1947), p. 373–419.
- [50] — , *Étude de la lubrification et calcul des paliers*, 2e éd., Sciences et Lettres, Liège, 1961.
- [51] J. LEMAÎTRE et J. L. CHABOCHE — *Mécanique des milieux solides*, Dunod - Bordas, Paris, 1988.
- [52] A. LEROY et B. VISEUR — Communications personnelles.
- [53] G. LUNDBERG — « Die festigkeit von presspassungen », *Kugellager Z.* **1/2** (1944), p. 1–11.
- [54] G. LUNDBERG et A. PALMGREN — « Dynamic capacity of rolling bearings », *Acta polytechnica, Mech. engng. series* **1** (1947), no. 3.
- [55] — , « Dynamic capacity of rolling bearings », *The ball bearing journal* (1947), no. 304, p. 50,61.
- [56] — , « Dynamic capacity of roller bearings », *Acta polytechnica, Mech. engng. series* **2** (1952), no. 4.
- [57] C. MASSONNET — *Résistance des matériaux*, vol. 2, Dunod, Paris, 1965.
- [58] — , *Résistance des matériaux*, second éd., Sciences et Lettres, Liège, 1967.
- [59] — , *Éléments de statique des constructions*, vol. 2. Constructions métalliques, AEES, Liège, 1970.
- [60] C. MASSONNET et S. CESCOTTO — *Mécanique des matériaux*, Sciences et Lettres, Liège, 1980.
- [61] A. MICHEL — « Pièces mécaniques soudées - Calcul des assemblages », *Techniques de l'ingénieur* **BM 5 187**, p. 1–14.
- [62] M. A. MINER — « Cumulative damage in fatigue », *Journal of applied mechanics* **12** (1945).
- [63] H. NEUBER — *Kerbspannungslehre*, 2e éd., Springer Verlag, Berlin, 1958.
- [64] G. NIEMANN — *Maschinenelemente*, vol. 2, Springer Verlag, Berlin, 1965.
- [65] — , *Maschinenelemente*, 2e éd., vol. 1, Springer Verlag, Berlin, 1975.
- [66] A. PALMGREN — « Die Lebensdauer von Kugellagern », *ZVDI* **68** (1924), no. 14.

- [67] — , « On the carrying capacity and life of ball bearings », *The ball bearing journal* (1937), no. 3, p. 34–44.
- [68] — , « Life dispersion of rolling bearings », *The ball bearing journal* **4** (1950).
- [69] — , *Les roulements*, 2e éd., SKF, Göteborg, 1967.
- [70] A. PALMGREN, G. LUNDBERG et E. BRATT — « Capacidad de carga estática de los rodamientos de bolas y de rodillos », *La revista de cojinetas a bolas* (1943), no. 48, p. 36–44.
- [71] C. PETERSEN — « Die Gestaltfestigkeit von Bauteilen », *ZVDI* **94** (1952), no. 30, p. 977–982.
- [72] R. E. PETERSON — « Stress concentration phenomena in fatigue of metals », *T.A.S.M.E.* **55** (1933), p. 157–171.
- [73] — , *Stress concentration factors*, Wiley, New York, 1974.
- [74] G. PISSARENKO, A. YAKOVLEV et V. MATVEEV — *Aide-mémoire de résistance des matériaux*, Mir, Moscou, 1979.
- [75] K. RAŽNEVIĆ — *Tables et diagrammes thermodynamiques*, Eyrolles, Paris, 1970.
- [76] R. BAUS et W. CHAPEAU — *Application du soudage aux constructions*, Sciences et Lettres, Liège, 1977.
- [77] H. ROLOFF et W. MATEK — *Maschinenelemente*, 7. éd., Vieweg, Braunschweig, 1976.
- [78] F. RÖTSCHER — *Die Maschinenelemente*, vol. 1, Springer, Berlin, 1929.
- [79] I. RYAN et A. BUREAU — « Résistance des assemblages soudés par cordons d'angle. Analyse élastique », *Construction mécanique* (1999), no. 4, p. 79–96.
- [80] J. SCHIJVE — *Fatigue of structures and materials*, Kluwer, Dordrecht, 2001.
- [81] B. SCHLECHT — *Maschinenelemente 1*, Pearson, München, 2007.
- [82] E. SIEBEL — « Neue Wege der Festigkeitsberechnung », *ZVDI* **90** (1948), no. 5, p. 135–139.
- [83] E. SIEBEL et M. STIELER — « Ungleichförmige Spannungsverteilung bei schwingende Beanspruchung », *ZVDI* **97** (1955), no. 5, p. 121–152.
- [84] S. TIMOSHENKO — *Résistance des matériaux*, vol. 2, Dunod, Paris, 1968.
- [85] W. WEIBULL — « A statistical theory of the strength of materials », *Ingeniörsvetenskapsakademiens Stockholm* **151** (1939).
- [86] W. WILSON et W. OLIVIER — « Tension tests of rivets », *Univ. Illinois Eng. Exp. Sta. Bull* **210**.