Seconde Générale

Fonctions de Références Variation de fonctions Formules Algébriques

DM EXERCICE CORRIGE PROBLEME OUVERT

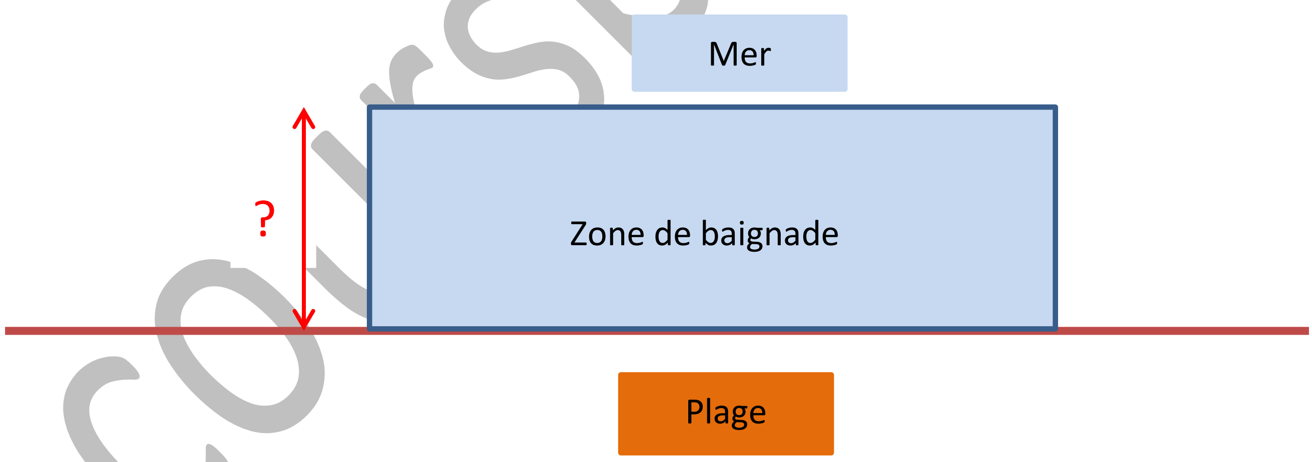
La zone de baignade

D'après problèmes ouverts, exercice 102 page 95, hyperbole mathématiques seconde 2010, Nathan. Il s'agit d'un problème ouvert. Quatre possibilités de solutions sont proposées pour des classes de seconde et une supplémentaire pour les classes de première.

Enoncé

Sur une plage, une colonie décide d'installer une zone limitée de baignade. Pour cela, elle instaure un périmètre de sécurité à l'aide d'une barrière de bouées. La longueur totale de cette barrière est 150 m. La zone de sécurité est un rectangle.

Quelle doit être la largeur de la zone de baignade afin que son aire soit maximale ? En déduire les dimensions de la zone de baignade.



Corrigés

▲ haut du document ▼ Suite du document

Corrigés

Quatre possibilités de corrigé dont trois selon la progression en seconde et une en première.

1. Méthode 1 : On conjecture le maximum d'une fonction à l'aide de la calculatrice et on démontre la conjecture en utilisant la définition du maximum d'une fonction.

2. Méthode 2 : On utilise les identités remarquables et une propriété de la différence de deux nombres.

3. Méthode 3 : **la plus appropriée** en s'aidant du cours pages 100 et 101: on utilise les identités remarquables et les propriétés de fonctions de la forme : $f : x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$. Voir page 100 du livre (hyperbole, nathan). Cette méthode s'utilise aisément si vous avez traité ce chapitre en cours.

4. Méthode 4 : On utilise les les identités remarquables et définition du maximum d'une fonction ou d'une somme algébrique.

5. Méthode 5 : la plus appropriée **pour les classes de première**. On utilise la forme canonique d'un polynôme de second degré, le discriminant et les propriétés d'une parabole, Voir DM 1ere S ES STI.

Méthode 1 Conjecture calculatrice	**Méthode 2** Maximum d'une fonction	**Méthode 3** Propriétés algébriques	**Méthode 4** $f : x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$	**Méthode 5** Forme canonique Niveau première

Corrigé

▲ haut du document ▼ Suite du document

Corrigés

Méthode 1 : On conjecture le maximum d'une fonction à l'aide de la calculatrice et on démontre la conjecture en utilisant la définition du maximum d'une fonction.

La zone (l'aire) de la baignade est un rectangle de longueur L et de largeur x et de contour 150 m

On a donc $L + 2\,x = 150$

Ainsi la largeur de la zone de la baignade est

$$L = 150 - 2x\,.$$

D'où l'aire, A, de la zone de la baignade en fonction de la largeur x :

$$A = longeur \times largeur$$

Soit $A(x) = (150 - 2x) \times x\,.$

L'aire A de la zone de baignade est donc une fonction qui varie selon les valeurs de x.

Déterminons d'abord les valeurs possibles de x. La longueur maximale du contour de la zone est 150 m,

donc $0 \leq x \leq 150\,.$

Or une aire est une grandeur positive, et comme $x \geq 0$,

donc $A(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $150 - 2x \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $-2x \geq 0 - 150$

$\Leftrightarrow$ $-2x \geq -150$

$\Leftrightarrow$ $x \leq \dfrac{-150}{-2}$

$\Leftrightarrow$ $x \leq \dfrac{150}{2}$

$\Leftrightarrow$ $x \leq 75\,.$

Donc $0 \leq x \leq 75\,.$

Déterminons par le calcul l'aire maximale par une conjecture à l'aide de la calculatrice.

▲ haut du document ▼ Suite du document

$$A(x) = (150 - 2x) \times x$$

$\Leftrightarrow$ $\quad A\,(x) = 150x - 2x^2$

Ou encore $\quad A\,(x) = -2x^2 + 150x$.

A l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que l'aire maximale est 2812, 5 . (voir annexe : tableau de valeurs)

Démontrons cette conjecture par le calcul.

Pour tout ∈ [0 ; 75] ,

$$A\,(x) = -2x^2 + 150x$$

$\Leftrightarrow \quad A\,(x) - 2812{,}5 = -2x^2 + 150x - 2812{,}5$

$\Leftrightarrow \quad A\,(x) - 2812{,}5 = -2(x^2 - 75{,}5x + 1406, 25)$

$\Leftrightarrow \quad A\,(x) - 2812{,}5 = -2(x^2 - 150x + 37{,}5^2)$

$\Leftrightarrow \quad A\,(x) - 2812{,}5 = -2(x - 37{,}5)^2$

Comme un carré est toujours positif,

donc $\quad (x - 37{,}5)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad -2(x - 37{,}5)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad A\,(x) - 2812{,}5 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A\,(x) \leq 2812, 5}}$

Donc par définition du maximum d'une fonction (page 62 du livre) , pour tout $x \in [\,0\ ;\ 75\,]$, le maximum de $A(x)$ est 2810 ; Ce maximum est alors atteint lorsque

$$A\,(x) = 2812{,}5$$

$\Leftrightarrow \quad A\,(x) - 2812{,}5 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2(x - 37{,}5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x - 37{,}5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x - 37{,}5 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x = 37, 5}}$

Conclusion : L'aire de le la zone de baignade est maximale lorsque la largeur de la zone se baignade est 37,5 m et sa longueur est alors 75 m (L = 150 – 2 × 37,5) .

▲ haut du document ▼ Suite du document

Méthode 2 : On utilise les identités remarquables et une propriété de la différence de deux nombres.

La zone (l'aire) de la baignade est un rectangle de longueur L et de largeur x et de contour 150 m

On a donc $L + 2\,x = 150$

Ainsi la largeur de la zone de la baignade est

$$L = 150 - 2x\ .$$

D'où l'aire, A, de la zone de la baignade en fonction de la largeur x :

$$A\ = longeur\ \times largeur$$

Soit $A(x) = (150 - 2x) \times x\ .$

L'aire A de la zone de baignade est donc une fonction qui varie selon les valeurs de x, avec
$0\ \leq x\ \leq 150\ .$

Or une aire est une grandeur positive, et comme $x\ \geq 0$

Donc $A(x)\ \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $150 - 2x\ \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $-2x\ \geq 0 - 150$

$\Leftrightarrow$ $-2x\ \geq -150$

$\Leftrightarrow$ $x\ \leq \dfrac{-150}{-2}$

$\Leftrightarrow$ $x\ \leq \dfrac{150}{2}$

$\Leftrightarrow$ $x\ \leq 75\ .$

Donc $0\ \leq\ x\ \leq 75\ .$

Déterminons par le calcul l'aire maximale :

$$A(x) = (150 - 2x) \times x\ .$$

$\Leftrightarrow$ $A\ (x) = 150x - 2x^2$

Ou encore $A\ (x) = -2x^2 + 150x$

▲ haut du document ▼ Suite du document

$\Leftrightarrow$ $$A\,(x) = -2(x^2 - \frac{150}{2}x)$$

$\Leftrightarrow$ $$A\,(x) = -2(x^2 - 75x) \qquad \textbf{(1)}$$

Or $x^2 - 75x$ sont deux termes d'une identité remarquable

En effet $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ou encore $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

D'où $a^2 - 2ab = (a-b)^2 - b^2$

Donc $$x^2 - 75x = x^2 - 2 \times \frac{75}{2}x$$

$$x^2 - 75x = x^2 - 2 \times 37{,}5x$$

$$x^2 - 75x = (x - 37{,}5)^2 - 37{,}5^2$$

En remplaçant

$$x^2 - 75x$$

par $$(x - 37{,}5)^2 - 37{,}5^2$$

dans l'expression **(1)** de $A(x)$ ci-dessous réécrite

$$A\,(x) = -2(x^2 - 75x)\ , \qquad \textbf{(1)}$$

on obtient

$$A\,(x) = -2[(x - 37{,}5)^2 - 37{,}5^2]$$

$$A\,(x) = -2[(x - 37{,}5)^2 - 37{,}5^2]$$

$$A\,(x) = -2(x - 37{,}5)^2 + 2 \times 37{,}5^2$$

$$A\,(x) = -2(x - 37{,}5)^2 + 2 \times 1406{,}25$$

$$\boxed{A\,(x) = -2(x - 37{,}5)^2 + 2812{,}5}$$

Ou encore $$\boxed{A\,(x) = 2812{,}5 - 2(x - 37{,}5)^2}$$

▲ haut du document ▼ Suite du document

Comme un carré est toujours positif, il s’agit donc de la différence de deux nombres positifs (on retranche un nombre positif à 2812,5). Donc $A\,(x)$ est maximale lorsque cette différence estt maximale, c'est-à-dire lorsque le nombre retranché est minimal, c'est-à-dire 0 , on alors

$$A\,(x) = 2812{,}5 - 0$$

C'est-à-dire lorsque $2(x-37{,}5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x-37{,}5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x - 37{,}5 = 0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{x = 37{,}5}$

Conclusion : L’aire de baignade est maximale lorsque sa largeur est 37,5 m et sa longueur est alors 75 m $(\mathrm{L} = 150 - 2 \times 37{,}5)$.

▲ haut du document ▼ Suite du document

3. Méthode 3 : On utilise les les identités remarquables et définition du maximum d'une fonction ou d'une somme algébrique.

La zone (l'aire) de la baignade est un rectangle de longueur L et de largeur x et de contour 150 m

On a donc $L + 2\,x = 150$

Ainsi la largeur de la zone de la baignade est

$$L = 150 - 2x \,.$$

D'où l'aire, A, de la zone de la baignade en fonction de la largeur x :

$$A = longueur \times largeur$$

Soit $A(x) = (150 - 2x) \times x$.

L'aire A de la zone de baignade est donc une fonction qui varie selon les valeurs de x, avec

$$0 \leq x \leq 150 \,.$$

Or une aire est une grandeur positive, et comme $x \geq 0$

Donc $A(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $150 - 2x \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $-2x \geq 0 - 150$

$\Leftrightarrow$ $-2x \geq -150$

$\Leftrightarrow$ $x \leq \dfrac{-150}{-2}$

$\Leftrightarrow$ $x \leq \dfrac{150}{2}$

$\Leftrightarrow$ $x \leq 75$.

Donc $0 \leq x \leq 75$.

Déterminons par le calcul l'aire maximale :

$$A(x) = (150 - 2x) \times x \,.$$

$\Leftrightarrow$ $A\,(x) = 150x - 2x^2$

▲ haut du document ▼ Suite du document

Ou encore $A\,(x) = -2x^2 + 150x$

$\Leftrightarrow$ $A\,(x) = -2(x^2 - \frac{150}{2}x)$

$\Leftrightarrow$ $A\,(x) = -2(x^2 - 75x)$ **(1)**

Or $x^2 - 75x$ sont deux termes d'une identité remarquable

En effet $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ou encore $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

D'où $a^2 - 2ab = (a-b)^2 - b^2$

Donc $x^2 - 75x = x^2 - 2 \times \frac{75}{2}x$

$x^2 - 75x = x^2 - 2 \times 37{,}5x$

$x^2 - 75x = (x - 37{,}5)^2 - 37{,}5^2$

En remplaçant

$x^2 - 75x$

par $(x - 37{,}5)^2 - 37{,}5^2$

dans l'expression **(1)** de $A(x)$ ci-dessous réécrite

$A\,(x) = -2(x^2 - 75x)$, **(1)**

on obtient

$A\,(x) = -2[(x - 37{,}5)^2 - 37{,}5^2]$

$A\,(x) = -2[(x - 37{,}5)^2 - 37{,}5^2]$

$A\,(x) = -2(x - 37{,}5)^2 + 2 \times 37{,}5^2$

$A\,(x) = -2(x - 37{,}5)^2 + 2 \times 1406{,}25$

$\boxed{A\,(x) = -2(x - 37{,}5)^2 + 2812{,}5}$

Ou encore $\boxed{A\,(x) = 2812{,}5 - 2(x - 37{,}5)^2}$

▲ haut du document ▼ Suite du document

Comme un carré est toujours positif, on a donc

Ou encore $(x-37{,}5)^2 \geq 0$

On multiplie par (-2) et on change le sens de l'inégalité

$$-2(x-37{,}5)^2 \ \leq 0$$

On ajoute 2812,5 à chaque membre et on obtient une nouvelle inégalité équivalente

$$2812{,}5-2(x-37{,}5)^2 \ \leq 2812{,}5$$

$$A\ (x) \leq 2812{,}5$$

Ce qui montre que par définition du maximum d'une fonction sur un intervalle, que $A\ (x)$ admet un maximum de 2812,15 sur l'intervalle [0 ; 75]. Ce maximum est atteint lorsque

$$A\ (x)\ = 2812{,}5$$

$\Leftrightarrow$ $$-2(x-37{,}5)^2+2812{,}5 = 2812{,}5$$

$$-\ 2(x-37{,}5)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $$(x-37{,}5)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $$x-37{,}5 = 0$$

$$\boxed{x = 37{,}5}$$

Conclusion : L'aire de baignade est maximale, égale à 2812,25, lorsque sa largeur est 37,5 m et sa longueur est alors 75 m (L = 150 – 2 × 37,5) .

▲ haut du document ▼ Suite du document

4. Méthode 4 : la plus appropriée en s'aidant du cours page 101 : on utilise les identités remarquables et les propriétés de fonctions de la forme : $\boldsymbol{f : x \mapsto a\,(x - \alpha\,)^2 + \beta}$.

La zone de la baignade est un rectangle de longueur L et de largeur x et de contour 150 m

On a donc $L + 2\,x = 150$

Ainsi la largeur de la zone de la baignade est

$$L = 150 - 2x\ .$$

D'où l'aire, A, de la zone de la baignade en fonction de la largeur x :

$$A = longeur \times largeur$$

Soit $A(x) = (150 - 2x) \times x$.

Déterminons d'abord les valeurs possibles de x. Comme la longueur du contour de la zone de baignade est 150 m ?

Donc $0 \leq x \leq 150$.

Or une aire est une grandeur positive, et comme $x \geq 0$,

Donc $A(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $150 - 2x \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $-2x \geq 0 - 150$

$\Leftrightarrow$ $-2x \geq -150$

$\Leftrightarrow$ $x \leq \dfrac{-150}{-2}$

$\Leftrightarrow$ $x \leq \dfrac{150}{2}$

$\Leftrightarrow$ $x \leq 75$.

Donc $0 \leq x \leq 75$.

Déterminons par le calcul l'aire maximale : à l'aide de la calculatrice établissons un tableau de valeur de $A\,(x)$ en fonction de x :

$$A(x) = (150 - 2x) \times x\ .$$

▲ haut du document ▼ Suite du document

$\Leftrightarrow$ $A\,(x) = 150x - 2x^2$

Ou encore $A\,(x) = -2x^2 + 150x$

$\Leftrightarrow$ $A\,(x) = -2(x^2 - \frac{150}{2}x)$

$\Leftrightarrow$ $A\,(x) = -2(x^2 - 75x)$ **(1)**

Or $x^2 - 75x$ sont deux termes d'une identité remarquable

En effet $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ou encore $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

D'où $a^2 - 2ab = (a-b)^2 - b^2$

Donc $x^2 - 75x = x^2 - 2 \times \frac{75}{2}x$

$x^2 - 75x = x^2 - 2 \times 37{,}5x$

$x^2 - 75x = (x - 37{,}5)^2 - 37{,}5^2$

En remplaçant $x^2 - 75x$

par $(x - 37{,}5)^2 - 37{,}5^2$

dans l'expression **(1)** de $A(x)$ ci-dessous réécrite

$A\,(x) = -2(x^2 - 75x)$, **(1)**

on obtient $A\,(x) = -2[(x - 37{,}5)^2 - 37{,}5^2]$

$A\,(x) = -2[(x - 37{,}5)^2 - 37{,}5^2]$

$A\,(x) = -2(x - 37{,}5)^2 + 2 \times 37{,}5^2$

$A\,(x) = -2(x - 37{,}5)^2 + 2 \times 1406{,}25$

$$\boxed{A\,(x) = -2(x - 37{,}5)^2 + 2812{,}5}$$

A est une fonction de la forme

$$f : x \mapsto a\,(x - \alpha)^2 + \beta$$

▲ haut du document ▼ Suite du document

Or **propriété 1** (page 100) : f est la fonction $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{x} - \alpha)^2 + \boldsymbol{\beta}$ avec $\neq 0$.

Si $a < 0$, alors la fonction f est croissante sur$]-\infty\,;\,\alpha\,]$ et décroissante sur $[\,\alpha\,;\,+\infty\,]$.

Donc la fonction A est croissante sur $]-\infty\,;\,\mathbf{37,5}\,]$ et décroissante sur $[\,\mathbf{37,5}\,;\,+\infty\,]$.

Propriété 2 (page 100) : f est la fonction $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{x} - \alpha)^2 + \boldsymbol{\beta}$ avec $\neq 0$.

Dans un repère orthonormé du plan, la représentation graphique de f est une parabole de sommet $\boldsymbol{S}\,(\,\alpha\,;\,\boldsymbol{\beta}\,)$.

Donc la courbe représentative de A est une parabole de sommet $\boldsymbol{S}\,(\,\mathbf{37,5}\,;\,\mathbf{2812,5}\,)$.

Don la fonction a admet un maximum atteint au sommet de parabole. Ce maximum est 2812,25 atteint pour $= 37{,}5$.

Conclusion : L'aire de baignade est maximale lorsque sa largeur est 37,5 m et sa longueur est alors 75 m $(\,\mathrm{L} = 150 - 2 \times 37{,}5\,)$.

▲ haut du document ▼ Suite du document

5. Méthode 5 : la plus appropriée **pour les classes de première**. On utilise la forme canonique d'un polynôme de second degré, le discriminant et les propriétés d'une parabole, Voir DM 1ere.

Annexe : tableau de valeurs de $A(x)$:

x	0	5	10	15	20	25	30	35
$A(x)$	0	700	1300	1800	2200	2500	2700	2800

x	40	45	50	55	60	65	70	75
$A(x)$	2800	2700	2500	2200	1800	1300	700	0

▲ haut du document