

Bourse et Gestion de Portefeuille

*Énoncés d'exercices
(et certains corrigés)*

Septembre 2011
Dernière version 16 octobre 2014

Jacques Hamon

Introduction

Les exercices sont regroupés par chapitre en reprenant le plan du livre « Bourse et gestion de portefeuille » dans sa 5^e édition (Economica, 2014).

Une première section comporte des énoncés d'exercice et une deuxième section présente le corrigé de certains des exercices. Les exercices dont le corrigé n'est pas présenté ici pourront faire l'objet d'une correction en cours et bien sûr les corrigés présentés en cours ne sont pas ici exposés.

Résistez à la tentation d'aller directement voir le corrigé. Passez du temps sur l'énoncé. Et dans un deuxième temps seulement confrontez vos réponses spontanées avec le corrigé proposé.

Les exercices présentés répondent à plusieurs objectifs. La préparation aux épreuves des examens des UE 106 et 118 (Master de la mention finance, première année de Paris-Dauphine) ; mais aussi la confrontation à des situations réelles.

Certains exercices sont directement issus des annales des examens des UE 106 ou 118 selon les chapitres. Dans ce cas, la masse de données est limitée et l'exercice est conçu pour être résolu dans un laps de temps compatible avec le format des examens et avec les moyens de calcul limités imposés dans ce cadre (calculatrice non programmable).

La densité d'informations sur les marchés est impressionnante et il est indispensable de pouvoir accéder et de maîtriser des ensembles de données plus volumineux : évaluer sur un marché continu la volatilité d'une action pour laquelle plusieurs milliers voire dizaine de milliers de transactions sont conclues dans une seule séance ou évaluer le bêta sur 6 mois de données hebdomadaires sont des besoins quotidiens. Bien sûr des solutions logicielles existent et peuvent être pilotées avec très peu de connaissances.

L'ambition ici est d'aller au-delà de l'utilisation de boîtes noires. D'être capable de comprendre, de vérifier des étapes de calculs de logiciels, voire d'en développer. Pour ce faire on propose certains exercices plus proches de la réalité. L'utilisation d'un tableur (excel sans programmation) est très adaptée à la plupart des besoins courants.

La gestion de portefeuille formule des problèmes typiquement matriciels et certains langages sont alors particulièrement efficaces pour réaliser un développement rapide d'applications logicielles. Ponctuellement, on expose des solutions faisant appel à *Mathematica* qui présente par ailleurs l'avantage d'une facilité d'accès à des données financières (du moins sur un passé récent et en données quotidiennes). *Mathematica* n'est pas au départ (milieu des années 1980 sur Mac) un langage dédié à la finance mais aux mathématiques. Progressivement des fonctions ont été ajoutées et rendent aisées l'accès aux données les plus diverses (des galaxies, au génome humain en passant par la géolocalisation et ... les cours du DJIA depuis 1928). Il s'agit d'une plateforme de programmation ouverte et particulièrement adaptée aux calculs d'évaluation. Par

exemple en raison de l'utilisation, presque transparente pour l'utilisateur, des capacités de traitement vectoriels des machines et des capacités de traitement de certaines cartes graphiques (*cuda programming*).

1. Liste des exercices

Le tableau ci après récapitule 267 exercices, dont 105 sont corrigés. Les deux premiers chiffres du numéro de l'exercice font référence au chapitre. Pour certains exercices, les données sont téléchargeables, ce qui évite une saisie ou permet d'accéder à des données volumineuses. Certains de ces exercices consistent, à partir des données téléchargeables, à reproduire certains des graphiques de la 5^e édition de « Bourse et gestion de portefeuille ».

Dans la colonne « corrigé disponible » la mention « Cours » signifie que l'exercice sera corrigé en cours mais ne sera pas téléchargeable. La mention « oui » signifie que vous trouverez un corrigé dans le présent ouvrage. De nombreux exercices sont extraits des examens passés des UE 106 et 118, la date de l'examen est dans ce cas mentionnée.

N°	Exercice	corrigé disponible	données externes
Chap 1	La bourse et les entreprises de marché		UE 106
1-1	Concurrence	Oui	Non
1-2	Rente	Oui	Non
1-3	Démutualisation	Oui	Non
1-4	Crossing, concurrence et qualité de marché	Oui	Non
Chap 2	La bourse et l'organisation des échanges		UE 106
2-1	Acheteur pressé sur UTP	Oui	Non
2-2	Ordre à cours limité (SETS du LSE)	Oui	Non
2-3	Divers ordres sur UTP	Oui	Non
2-4	Ordre à quantité cachée	Oui	non
2-5	Ordre au marché sur Pernod Ricard	Cours	Non
2-6	Ordre à cours limité sur l'Oréal	Cours	Non
2-7	Ordre à seuil sur France Télécom	Cours	Non
2-8	Les options implicites aux ordres à cours limité	Oui	Non
2-9	Fixing sur SETS	Cours	Non
2-10	Fixing sur Bongrain (examen de mars 2005)	Cours	Non
2-11	Fixing sur Xetra (I)	Oui	Non
2-12	Fixing sur Xetra (II)	Oui	Non
2-13	SETS sur LSE	Oui	Non
2-14	Contrats de liquidité		Recherche web
2-15	Internalisation sur Euronext	Oui	Non
2-16	Fixing (exercice d'examen donné en avril 2002)	Oui	Non
2-17	NSC (Examen novembre 2008)		Non
2-18	Courbes d'offre et de demande de titres sur un marché en continu		
Chap 3	La bourse et la liquidité		UE 106
3-1	Demsetz (1968), retour aux sources	Oui	

3-2	Flash crash (le 6 mai 2010)	Oui	
3-3	La qualité de marché selon Equiduct		
3-4	Fourchette et FMP sur Club Méditerranée		Club20010911.xls
3-5	Fourchettes d'Ingenico le 4 octobre 2002		Ingenico 4oct2002f.txt
3-6	Profondeur de Lagardère le 17 janvier 2007		LAG20070117.xls
3-7	Penny stock et les dangers de l'illiquidité		PennyStock49255.xls
3-8	Echelon et Lagardère		LAG20070117.xls
3-9	Fourchettes sur NSC ou UTP		CD-Roms données horodatées Euronext
3-10	Les réservations sur Société Générale le 13 octobre 2008	partiel	SG 20081013.xls
3-11	Discrétisation (arbitraire) d'un processus continu	partiel	SG 20081013.xls
Chap 4	Les indices		UE 106
4-1	Entrée-sortie du CAC40 (examen d'avril 2002)	Cours	
4-2	Indice et plafonnement des poids (examen d'avril 2001)	Cours	
4-3	DJIA et la bulle ?		
4-4	Le CAC40 et quelques indices associés		
4-5	Flottant		
4-6	ITCAC50		
4-7	Biais du survivant	Oui	
4-8	CAC41	Oui	
4-9	Représentation d'indices de 1871 à 2012 en données mensuelles (Amit Goyal)		http://www.hec.unil.ch/agoyal/docs/PredictorData2012.xls
4-10	Représentation d'indices, données de Shiller de 1871 à juin 2014		www.econ.yale.edu/~shiller/data/ie_data.xls
Chap 5	Les fonds indiciels cotés (FIC ou ETF)		UE 118
5-1	UCITS, « 5/10/40 rule » et montage d'ETF	Oui	
5-2	Montage d'ETF aux Etats-Unis	Oui	
5-3	OPCVM, titres non listés et fonds indiciel	Oui	
5-4	Les ETF sont-ils exposés au risque de crédit ?	Oui	
5-5	ETF de Lyxor liés au CAC40		Cac40ETFLyxor.xls
Chap 6	Les actions et les titres liés		
6-1	CAC EXT affiché de 8h à 18h30 !		
6-2	Ecart vertical sur CAC40 (I)	Partiel	Téléchargement Yahoo ! ou mathematica
6-3	Ecart vertical sur CAC40 (II)	partiel	
6-4	Indices VIX & S&P 500 en 2011		
Chap 7	Le taux de rentabilité		UE 106
7-1	NYSE de fin 1925 à fin 2010, les hausses sont-elles récentes ?	Cours	
7-2	Passage à l'euro	Oui	
7-3	Nymphéas	Cours	
7-4	Trajectoire d'un cours		
7-5	Trois scénarii	Cours	
7-6	Fonds d'investissement	Oui	
7-7	Emprunt à 10 % et placement à moins	Oui	
7-8	Contribution d'un titre à l'espérance de rentabilité d'un portefeuille		
7-9	Natixis, le tobogan et le petit porteur	Oui	

7-10	Oxygène et acétylène (I)	Oui	v4c7.xls, feuille 3
7-11	Rachat par Saint Gobain de ses propres actions	Oui	v4c7.xls, f 4
7-12	Division d'actions d'Atos en 1999	Oui	v4c7.xls, f 5
7-13	Actions gratuites de Clarins en 1999	Oui	v4c7.xls, f 6
7-14	Eurotunnel en 1993 et 1994	Oui	v4c7.xls, f 7
7-15	Oxygène et acétylène (II)	Oui	
7-16	Le NYSE de 1825 à 2004		
7-17	Taux de rentabilité sur France Telecom	Oui	v4c7.xls, f 8
7-18	Taux de rentabilité sur France Télécom (II)		v4c7.xls, f 9
7-19	Alcatel 1999-2000 en données quotidiennes	Oui	v4c7.xls, f 10
7-20	Renault et les autres (avril 1999 à mars 2000)	Oui	v4c7.xls, f 11
7-21	Apple's split, 2014	partiel	Web ou mathematica
7-22	Taux discret, taux continu et équation différentielle	Oui	
7-23	Meriter à chef de terme (Trenchant, 1557)	Oui	
7-24	Option de remboursement anticipé au gré de l'emprunteur (Henri II, prêt de l'an 1555) Trenchant, 1557.	partiel	
Chap 8	La volatilité d'un titre		UE 106
8-1	Volatilité attendue et 3 scénarii	Cours	
8-2	Volatilité (Examen d'avril 2001)	Cours	
8-3	Variance des cours et variance des taux de rentabilité	Oui	
8-4	Trajectoire		
8-5	Volatilité estimée sur données quotidiennes durant le « krach de 29 »	Partiel	V4C8.XLS, f 3
8-6	Axa en 1990 et 1991		V4C8.XLS, f 1
8-7	La volatilité du Club Med	Partiel	V4C8.XLS, f 4
8-8	Renault et les autres (avril 1999 à mars 2000)	Oui	V4C8.XLS, f 6
8-9	Variance et carré des taux de rentabilité		
8-10	Moitié-moitié		
8-11	Volatilité ouverture et clôture		
8-12	Volatilité et extremums		
8-13	Ratios de variance	Oui (matematica)	téléchargements
8-14	Extraction de la volatilité implicite		
8-15	Risque et horizon de placement		
8-16	Diffusion (arbre binomial)	Partiel	
8-17	Smalto (examen novembre 2012, apprentissage)	oui	
Chap 9	Distribution des taux de rentabilité		Pré-requis
9-1	Richesse finale	Oui	
9-2	Corrélation sérielle d'ordre un		
9-3	Devin ou hasard?		
9-4	Manhattan	Oui	
9-5	Enquête d'opinions Associés, juin 1998		
9-6	Probabilité de pertes	Oui	
9-7	Trajectoires futures de 2000 à 2025		
9-8	Distribution de la richesse finale		
9-9	Trajectoires sur Cap Gemini	Oui	
9-10	Stock options sur Thalès	Oui	

Ch 10 La volatilité d'un portefeuille		UE 106	
10-1	Variance des taux de rentabilité d'un portefeuille de 2 titres	Oui	
10-2	Variance d'un portefeuille (examen d'avril 2001)	Cours	
10-3	Portefeuille de variance minimale (examen de juin 2001)	Cours	
10-4	Corrélation et dépendance		
10-5	La covariance : du taux de rentabilité au cours	Oui	
10-6	Une manipulation de covariance		
10-7	Renault et les autres en portefeuille (1999-2000)	Oui	V4C8.XLS, f 6
10-8	Risque marginal suivant Grinblatt et Titman (1997, p. 132)	Cours	Cf. Grinblatt et Titman (1997, p. 132)
10-9	Variance et intervalle		
10-10	Trois scénarii	Oui	
10-11	Portefeuille équipondéré	Oui	
10-12	Portefeuille de deux titres	Cours	
10-13	Portefeuille de variance minimale (PVM)	Cours	
10-14	Volatilité relative		
10-15	Corrélation (1998-2000) avec Renault et les autres		
10-16	Volatilité après fusion		
10-X	Inversion de matrice méthode du pivot (Gauss-Jordan)	Oui	
10-17	Risque marginal, 3 titres, examen novembre 2009	Oui	
Ch 11 Risque total, sensibilité et risque spécifique		UE 106	
11-1	Risque de marché	Oui	
11-2	Calcul d'un bêta sur historiques de cours	Oui	V4C11.xls, f 1
11-3	Bêta de portefeuille	Cours	
11-4	Taux de rentabilité et <i>bêta</i>	Cours	V4C11.xls, f 2
11-5	Bêta et 4 scénarii	Oui	
11-6	Risque non diversifiable	Cours	
11-7	Bêta d'Alcatel en 2002		V4C11.xls, f 3
11-8	Bêta mensuel, Renault et les autres		
11-9	Bêta d'Axa en 1989-1990		V4C11.xls, f 4
11-10	Bêta de portefeuille	partiel	V4C11.xls, f 5
11-11	Blume à Paris		
11-12	Corrélations sur périodes adjacentes		
11-13	Bêta pour les experts		
11-14	Bêta de LVMH		
11-15	Corrélations quotidiennes et mensuelles	partiel	
Ch 12 L'attitude d'hostilité au risque		UE 106	
12-1	Espérance et attitude	Cours	Cf. Roger (1999)
12-2	Trois actifs risqués	Cours	
12-3	Ordonner des portefeuilles	Cours	
12-4	Paradoxe de Saint-Petersbourg et utilité logarithmique	Oui	
12-5	Prime de risque et utilité logarithmique	Cours	
12-6	Modification d'un portefeuille	Oui	
12-7	QCM	Oui	

12-8	Taux de rentabilité et utilité		
12-9	Taux marginal de substitution entre la rentabilité et le risque	Oui	
12-10	AAR et niveau de richesse	Oui	
12-11	Equivalent certain	Oui	
12-12	Le taux d'intérêt	Oui	Cf Cochrane (2001)
12-13	Coefficient d'aversion relative au risque	Oui	
12-14	fonction HARA (hyperbolic absolute risk aversion)		
12-15	Allocation d'actifs (poids par classe d'actif et attitude au risque)	Oui	
12-16	Moitié-moitié		
12-17	d'après Radcliffe (1997), p 206-207		Cf. Radcliffe (1997)
12-18	Moyenne géométrique		
12-19	Questionnaire		
12-20	Elasticité	Oui	
12-21	Risques multiplicatifs et espérance de valeur		
12-22	Choix entre consommation et épargne	Oui	
12-23	Critique du critère espérance/variance	Oui	
Ch 13	Diversification naïve		UE 106
13-1	Quelle est l'utilité d'une diversification en Europe ?	Oui	
13-2	Diversification et corrélation	Oui	
13-3	Asymptotes à Paris		
13-4	Asymptotes zone Euro		Corrigé dans l'édition n° 5
Ch 14	Diversification raisonnée		UE 106
14-1	Minimisation du risque sous contrainte de rentabilité	Source	
14-2	Etablissement de la condition de premier ordre (variante)	Oui	
14-3	La pente de la tangente à la frontière	Oui	
14-4	Taux d'emprunt supérieur au taux de placement		
14-5	Portefeuilles et frontière (examen de septembre 2007)	Oui	
14-6	Position à effet de levier	Oui	
14-7	Frontière efficiente et choix de portefeuille	Cours	Cf Viviani (1997)
14-8	Algorithme de construction de la frontière		
Ch 15	Le MEDAF		UE 106
15-1	Qui détient le portefeuille de marché ?	Oui	
15-2	Évaluation du taux de rentabilité exigé par les actionnaires d'Eurotunnel	Cours	
15-3	11 septembre 2001 (I)	Oui	
15-4	Compositions de portefeuilles		
15-5	11 septembre 2001 (II)		
15-6	Pourquoi ?		
15-7	DDM et information publique	Oui	
15-8	Dynamique de l'alpha	Oui	
15-9	Révision, examen juin 2000		Cf Reilly et Brown, 1997
15-10	Révision	Oui	

15-11	MEDAF et rappel	Oui	
15-12	Espérance de rentabilité du portefeuille de marché		
15-13	Sélection de valeurs		
15-14	Sources de variation du alpha		
15-15	DDM prévisionnelle		
15-16	Allocation d'actif	Oui	
15-17	Prime de risque début 1975		
15-18	Critique de Roll		
15-19	Stock picking		
15-20	Prime de risque et market timing	Oui	
15-21	Allocation d'actif		
15-22	Allocation d'actif (2)		
15-23	Allocation d'actif (3)		
15-24	Exercice de synthèse (prime de risque, examen de janvier 2009 ; Edition 4 fin chapitre 15)	Oui	
Ch 16	Décisions financières dans l'entreprise		UE 106
16-1	Décision d'investissement	Oui	
16-2	Mutuellement exclusif (examen 1997)		
16-3	Décomposez		
16-4	Structure financière et bêta		
16-5	Société multi-produits		
16-6	Comparables (GM, Lockheed, Northrop)		
16-7	Choix de diversification		
Ch 17	La frontière de Markowitz		UE 118
17-1	Démonstration (relation 17-5)	Oui	
17-2	Frontière et 3 titres (UE118, examen de sept 2009 et mai 2010)		
17-3	Lieux d'investissement avec 5 titres	Oui	Avec mathematica
17-4	Trois ETFs (ou un peu plus) et le PVM		
17-5	Bêta et indice équipondéré (données de Roll, 1978)	Oui	Avec Mathematica
17-6	L'indice équipondéré de l'exemple de Roll est-il sur la courbe enveloppe ?	Oui	
17-7	Calculez le bêta du 2 ^e titre (Roll, 1978) par rapport au portefeuille frontière dont le taux de rentabilité est celui du portefeuille équipondéré	Oui	
17-8	courbe enveloppe, espace $E - \sigma^2$ (données de Roll, 1978)		
17-9	courbe enveloppe, espace $E - \sigma$ (données de Roll, 1978)		
17-10	Ecrivez la composition d'un portefeuille frontière (avec actif sans risque) avec en notation le taux de rentabilité (et non pas le taux en excès)		
17-11	point de tangence (données de Roll, 1978)		
17-12	Cac40 (données de 1997-1998)		
17-13	Zone Euro Cac40 (données historiques)		
17-14	Zone Euro Cac40 (données prévisionnelles)		
17-15	Zone Euro		
	Vente à découvert (examen de septembre 2011)		

17-16	Démontrez que l'équation de la frontière peut être réécrite ainsi $\frac{\sigma_p^2}{1/C} - \frac{(R_p - B/C)^2}{(AC - B^2)/C^2} = 1$	Oui	
17-X	Inversion de matrice méthode du pivot (Gauss-Jordan)	Oui	
17-17	Taux de rentabilité attendu et Markowitz (examen de mai 2009)		
17-18	PVM, Markowitz et les ventes à découvert		
17-19	SBBI et la frontière depuis 1925 jusque fin 2012		
17-20	Bhatti long-only		
17-21	SBBI sans ventes à découvert		
17-22	Gestion active avec un portefeuille de référence		
Ch 18	Arbitrage et modèles pluri factoriels		UE 118
18-1	Définitions	Oui	
18-2	Portefeuille immunisé (Market neutral portfolio)	Oui	
18-3	Covariance	Oui	
18-4	Deux facteurs (F1 & F2) non corrélés	Oui	
18-5	Pure factor portfolios	Oui	
18-6	Deux facteurs non corrélés (II)	Oui	Grinblatt et Titman (1997)
18-7	Prime de risque dans un modèle pluri-factoriel (examen sept 2009)		
18-8	Matrice des variances covariances des facteurs (examen mai 2011)		
Ch 19	Introduction à la gestion de portefeuille		UE 118
19-1	Passif et actif		
19-2	Prévision parfaite à un mois sur le CAC40		
19-3	Qu'est un « fonds monétaire » ?		
Ch 20	L'efficacité informationnelle		UE 106
20-1	Octobre 1987		
20-2	Ajustement et efficacité	Oui	
20-3	Anticipations et efficacité		
20-4	L'histoire se répète-t-elle ?	Oui	
20-5	Consensus		
20-6	Investissement en actions de 2001 à 2010		
20-7	Super-bowl	Oui	SB2011Data.xls
20-8	Sell in may and go away	Oui	DJIA Mois data.xls
20-9	RQ		
20-10	Ajustement		
20-11	Les cygnes noirs et les cygnes dorés		
20-12	Fundamental indexing		
20-13	Burelle : du Plastic Omnium à moitié prix		
Ch 21	Les coûts de transaction et la gestion de portefeuille		UE 118
21-1	L'impôt de bourse existe-t-il à Paris ?	Partiel	
21-2	Risque d'implémentation		
21-3	Diversification, gestion active et coûts de transaction		
21-4	Les frais et commissions peuvent-ils être négatifs ?	Partiel	
21-5	Frontière efficiente et coûts de transaction		

21-6	Capture de volatilité réglementaire		
Ch 22	La gestion passive		UE 118
22-1	Erreur de poursuite (tracking error) examen de mai 2011		
22-2	Buy and hold en 2008		
22-3	Rebalancing en zone euro	Oui	StoxxCM.csv
22-4	Buy and hold strict	Oui	
22-5	Buy and hold depuis 1950	Oui	
22-6	Asset allocation puzzle		
22-7	CAC40, la gestion indicielle et les frictions		
22-8	Stansky's monster		
22-9	Cosinus' law & tracking error	Oui	
Ch 23	Production d'information : le futur et l'espérance		
23-1	Dividende et plus-value		
23-2	Baisse de prime de risque et impact sur les cours	Oui	
23-3	Taux de croissance	Oui	
23-4	Vu dans une banque française		
23-5	Rachat d'actions, BPA et cours	Oui	
23-6	Distribuer les années paires	Oui	
23-7	Croissance nulle ou forte	Oui	
23-8	Création de valeur	Oui	Sous mathematica
23-9	Alcatel septembre 1998	Oui	Sous Mathematica
23-10	Evaluation et risque de taux (Usinor & Altran)		
23-11	Stock option		
23-12	Valeurs de croissance		
23-13	Equilibre de marché en octobre 1999 (exercice de synthèse)		DDM199910.csv
23-14	Rentabilité espérée et Markowitz, examen de sept 2009 (exercice de synthèse)		
23-15	Croissance (examen mai 2010)		
23-16	Les nifty fifty (ou la croissance sans fin ?)		
23-17	Evaluation d'E-Bay mi 1999		
Ch 24	Gestion active et arbitrage		
24-1	Pairs trading		
24-2	Rémunération des gérants		
24-3	Indices de hedge fund		

2 Exercices (avec données à télécharger)

Quelques exercices font appel à des données téléchargeables. Par exemple ci-après les données proposées pour l'exercice 7-14. Le fichier téléchargé est un classeur excel, cet exercice utilise la 7^e feuille (f 7)

Nom du fichier	Adresse sous www.dauphinefinance.com	Exercice
v4c7.xls, f 7	106/Data106	7-14

Comment récupérer les données ?

1 **Avec Mathematica**, par exemple commande Import (sur ligne input)
LG=Import["http://www.dauphinefinance.com/106/Data106/v4c7.xls",
{ "Data",7}];

Attention à la syntaxe. Dans la variable LG on récupère la feuille n°1 du classeur.

2. **Avec Excel** (office 2013)

Dans une cellule quelconque (ou dans la barre de saisie), taper l'adresse suivante :

<http://www.dauphinefinance.com/106/Data106/v4c7.xls>

Dans cet exemple, le classeur entier est alors disponible.

Attention à la syntaxe, une majuscule est différente d'une minuscule notamment. Si un lien apparaît (la main), cliquez sur le lien et le classeur se charge.

Chapitre 1

La bourse et les entreprises de marché

1. Énoncés des exercices

Exercice 1-1 : Concurrence

Le fait qu'un grand nombre de *market makers* soient en concurrence sur un marché de titres donné est-il une garantie de coûts de transaction minimums ?

Exercice 1-2 : Rente

Décrivez des situations de rente de certains marchés. Comment peut-on mettre en évidence de telles rentes ?

Exercice 1-3 : Démutualisation

Que signifie l'expression démutualisation appliqué à un marché de titre ? Donnez un exemple ?

Exercice 1-4 : Crossing, concurrence et qualité de marché

Les marchés de *crossing* importent leurs prix des marchés organisés classiques, et utilisent ce bien public pour organiser des échanges de titres. Comment les marchés classiques peuvent-ils se défendre ?

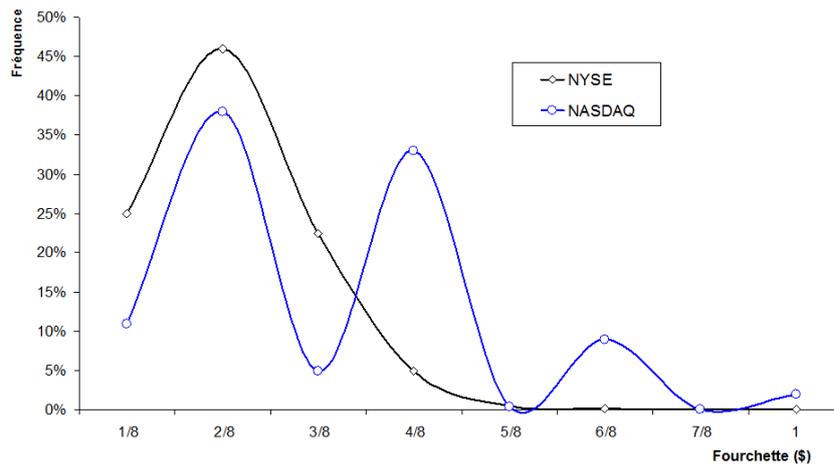
2. Corrigés (partiels)

Exercice 1-1 : Concurrence

Cet exercice propose une extension d'une question simplement abordée et non développée dans « Bourse et gestion de portefeuille ». Une première leçon importante est à tirer de cet exercice : un grand nombre d'intermédiaires en concurrence n'est pas forcément la preuve d'une concurrence effective, en particulier si des ententes sont possibles (elles sont interdites en principe bien sûr). La deuxième leçon est que la finalité du marché financier n'est pas de donner du travail aux intermédiaires mais de répondre aux besoins des clients (les investisseurs).

Christie et Schultz (1994) ont montré qu'une collusion entre les teneurs de marché du NASDAQ, deuxième marché d'actions américain, augmentait artificiellement les tarifs d'intermédiation, alors même que, par exemple pour l'action Microsoft, 35 teneurs de marché étaient apparemment en concurrence. On présente ici un résumé de ces travaux.

Graphique 1-1 : Fréquence des fourchettes



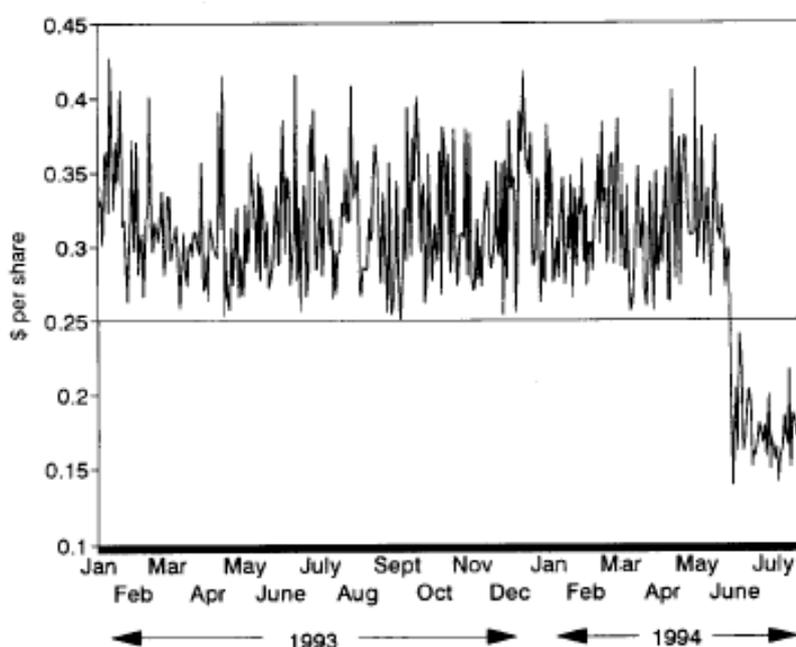
Note : à partir des résultats publiés par Christie et Schultz (1994)

En 1991, pour 100 actions choisies parmi les plus fortement capitalisées, sur 372 625 fourchettes (*inside bid-ask quotes*), 11% sont à 0,125\$ au NASDAQ, alors que sur la même période la proportion est de 25% au NYSE. Pourquoi une telle différence? Comment l'interpréter ?

Le graphique 1-1 est établi à partir des résultats publiés par Christie et Schultz (1994). Pour 100 actions du NYSE et 100 du NASDAQ durant l'année 1991, en ignorant le premier cours du NYSE (qui est établi en fixing) et en ne retenant que les révisions de fourchettes en prix. En 1991 l'échelon (tick) est le plus souvent de 1/8 \$ (la cotation était à l'époque exprimée en dollars et 1/8 ou multiples, la décimalisation n'intervient qu'en 2000) et la fourchette (en

abscisse) est de 1, 2, 3 etc ticks. On remarque que sur le NYSE, la fourchette la plus fréquente (le mode) en dollars est de $2/8$ et qu'une décroissance régulière de la fréquence d'affichage est observée. En revanche sur le NASDAQ, une sorte de sinusoïdale amortie est observée. La fréquence d'affichage des fourchettes est élevée à 2 ticks ou 4 ticks et faible à 3 ticks ou 5 ticks. Comment expliquer ces résultats ? Après avoir exploré d'autres explications (qui ne sont pas reprises ici, voir l'article), les auteurs arrivent à la conclusion qu'une entente entre les teneurs de marché est l'explication la plus probable. Le mécanisme de l'entente consistant à afficher des fourchettes en nombre pair de l'échelon de cotation. La fourchette affichée majorait ainsi la valeur qu'elle aurait probablement eue si la concurrence avait été effective.

Graphique 1-2 : Fourchette de l'action Microsoft en 1994



Source : Christie, Harris et Schultz (1994). Dès le lundi 28 mai 1994 la fourchette se cale à $1/8$ (valeur minimale).

Tableau 1-1 : Chronologie des réformes du NASDAQ (1994-1997)

Courant 1994	Papier de Christie et Schultz (1994)
26 mai 1994	Los Angeles Times, discute le papier
Mai 1994	Autres quotidiens suivent et commentent
Été 1994	Class-actions lawsuits (une trentaine très rapidement)
19 octobre 1994	US department of Justice annonce une instruction sur "allege price fixing on Nasdaq"
14 novembre 1994	SEC annonce une instruction sur les pratiques anticoncurrentielles du Nasdaq
Novembre 1994	NASD annonce une enquête interne

17 nov 1994	Wall street Journal (WSJ), constate une réduction des fourchettes mais uniquement sur les actions les plus visibles
21 fév 1995	WSJ, rumeurs de restructuration du marché
14 mars 1995	WSJ affirme que les fourchettes sont réduites pour faire bonne figure face aux enquêteurs
Sept 1995	commission du sénateur Warren Rudman critique les modalités de régulation des dealers du Nasdaq et recommande une séparation plus claire entre les fonctions de régulation/contrôle et le marché
Janv 1996	les membres du NASD approuvent le principe d'une réforme
18 juin 1996	WSJ, la SEC amènerait le NASD à reconnaître un échec dans la régulation du marché
1996	Création de NASDR, organisme de régulation des professionnels de l'intermédiation financière (depuis fusion dans Finra)
1997	mise en place imposée d'un marché en cotation assistée qui concurrence les teneurs de marché ; 50 actions le 20 janvier ; toutes le 13 octobre. Les investisseurs peuvent placer des ordres en carnet.
1997	1 milliard de dollars a été payé par 33 dealers du NASDAQ pour clore les « class actions »

Les conclusions de cette étude ont été reprises (avant leur publication par *The Journal of Finance*) par la grande presse américaine les 26 et 27 mai 1994 et dès le lundi suivant ce week-end, les coûts d'intermédiation (estimés par la fourchette de prix) ont été magiquement réduits de plus de 40% et ont encore été réduits après. Diverses enquêtes ont confirmé les soupçons de Christie et Schultz et ont amené à une profonde réorganisation du NASDAQ.

Les dealers/*markets makers* (MM) sont en compétition sur une période longue dans un jeu répétitif. Les conditions pratiquées sont visibles par tous les autres MM. Des "sanctions" ou mesures de rétorsion sont possible envers ceux qui ne « jouent pas le jeu ». Seuls les MM ont un accès direct au marché. Un MM qui réduit sa fourchette attire peu de nouveaux ordres (car il n'a pas accès aux clients de ses concurrents) et en revanche il réduit son chiffre d'affaires sur sa propre clientèle captive. L'organisation de marché ne donne pas d'incitation à un comportement concurrentiel.

La profession a dû dépenser un milliard de dollars dans la seule indemnisation des nombreuses actions collectives (*class actions*) intentées par les actionnaires (cf. tableau 1-1). Le NASDAQ a été également obligé d'investir pour moderniser le marché, de mettre en place et financer une structure de surveillance et de sanction des professionnels (NASDR) et surtout de s'ouvrir à la concurrence d'un carnet d'ordres à partir de 1997.

Depuis NASDR a fusionné avec le département de surveillance du NYSE (système dit d'auto régulation) et existe sous le nom de FINRA. Les autorités américaines ont obligé le passage à la décimalisation qui a eu notamment pour conséquence la réduction du tick et des fourchettes.

En fait cet épisode a obligé (bien malgré eux) les *markets makers* du NASDAQ, et le NASDAQ lui-même, à profondément évoluer ce qui leur a permis de prendre un virage technologique majeur avec la mise en place de la cotation assistée, alors que le NYSE continuait les échanges sur le parquet ! Le NASDAQ a progressivement pris des parts de marché, y compris sur les actions listées sur le NYSE. En avril 2005, le NASDAQ absorbe INET de Reuters (qui

résultait lui-même de la fusion d'Instinet –inventeur du *crossing*– et de Island qui était un marché électronique avec une dominante de carnet).

Références citées

- Christie, W., and P. Schultz, 1994, « Why do Nasdaq Market Makers Avoid Odd-Eighth Quotes? », *Journal of Finance*, Vol. 49, p. 1813–1840.
- Christie, W., J. Harris, and P. Schultz, 1994, « Why did Nasdaq Market Makers Stop Avoiding Odd-Eighth quotes », *Journal of Finance*, Vol. 19, p. 1841–1860.
- Barclay M.J., W.G. Christie, J.H. Harris, E. Kandel et P.H. Schultz, 1998, « The effects of market reform on the trading costs and depths of Nasdaq Stocks », *Journal of Finance*,

Exercice 1-2 : Rente

L'observation de la rente à l'occasion de sa disparition ou de sa réduction, lorsque la compétition entre les plateformes de négociation lamine les marges sous l'influence conjointe des modifications de réglementations (Europe et DMIF, Etats-Unis et Reg-NMS), et des bouleversements technologiques (cotation assistée par ordinateur, moyens de transmission modernes). On illustre l'existence et la disparition des rentes via deux phénomènes : l'évolution dans le temps de la valeur boursière des entreprises de marché et une comparaison en 2005 des recettes liées au négoce d'actions sur deux plateformes d'importance économique très différente.

L'évolution du cours en bourse des entreprises de marché (pages 36-37), la valeur de NYSE-Euronext est passée de 19,6 à 8,2 milliards de dollars entre 2006 et 2013. Ce qui traduit une perte de valeur importante que la crise (depuis 2007) ne peut expliquer. La concurrence entre les entreprises de marché d'échange d'actions a laminé les marges. Il est symptomatique de remarquer que NYSE-Euronext est racheté en 2013 par un leader des marchés dérivés (ICE).

L'examen de la ventilation du chiffre d'affaires des entreprises de marché (p. 36) En 2005, les recettes d'Euronext liées à la négociation d'actions (*trading fees*) se montaient à 215,7 millions d'euros. Sur la même année, les recettes de négociation du NYSE pour les actions étaient de 168 millions d'euros. Alors que les quantités échangées sur le NYSE étaient 4,8 fois plus importantes ET que Euronext était la plateforme la plus automatisée et de loin !

Les rentes d'aujourd'hui et de demain (non demandé). Les entreprises de marché qui résistent le mieux (et se développent) sont dans les échanges de dérivés (marges plus importantes), la maîtrise de la compensation (les marges toujours, de plus la réglementation des dérivés OTC leur bénéficie), et la maîtrise de la technologie de cotation assistée (maîtrise des coûts, offre de services pour lesquels une clientèle solvable existe). ICE mais aussi CME ou dans une moindre mesure Deutsche Börse sans oublier les marchés dérivés de Chine sont incontestablement les grands gagnants de la recomposition des marchés.

Les capacités de lobbying et d'influence sont également très différentes entre les marchés d'actions en Europe (taxe sur les transactions financières, 0,2% en France depuis 2012) et les marchés de produits dérivés (pour lesquels la taxe

était calibrée, en particulier sur les produits de change au départ, mais qui y échappent, avec d'ailleurs des arguments solides).

Exercice 1-3 : Démutualisation

(cf. p. 24), toutes les entreprises pilotant les marchés avaient adopté des statuts juridiques spécifiques. Ces entreprises n'étaient pas elle-même cotées en bourse et leur forme juridique était de type coopératif ou mutuel. Dans le cas français, un « service public » avec monopole était concédé par l'Etat à un opérateur (Chambre Syndicale des Agents de Change, puis Société des Bourses Françaises). Le NYSE était jusqu'en 2005 une « not-for-profit-organization ».

Puis certaines sociétés classiques ont obtenu des licences leur permettant d'organiser l'échange de titres (OM-Gruppen en Suède par exemple). Enfin les démutualisations débutent en 1993 (Stockholm) puis s'accroissent au tourant du siècle (page 32-33). Les statuts juridiques deviennent ceux d'entreprises classiques dont le capital action est admis en bourse.

Exercice 1-4 : Crossing, concurrence et qualité de marché

Les marchés historiques (classiques) cherchent à préserver leurs parts de marché. Le premier chapitre donne de nombreux exemples, ainsi :

1. par une réglementation (p 31), à l'image de la France qui jusque novembre 2007 a obligé le flux d'ordres à la concentration sur un marché réglementé. L'inconvénient est l'institution d'un monopole avec une réduction de la concurrence et probablement des coûts de transaction plus importants pour les investisseurs et un coût du capital plus élevé pour les entreprises cotées;
2. par des batailles juridiques sur la propriété des données de marchés (p. 26 exemple fin 19^e aux Etats Unis) ; sur l'obtention du droit à négocier un titre admis à la cotation sur une autre place (concurrente), voir le cas des UTP (*unlisted trading privilege*) aux Etats-Unis page 27 ;
3. en créant un double marché (une segmentation de la clientèle). Un marché traditionnel avec des fourchettes éventuellement larges pour l'investisseur ordinaire et un marché de *crossing* réservé aux investisseurs institutionnels. Cela s'est pratiqué par exemple à partir de 1994 à Paris avec la mise en place d'un marché des blocs géré par la SBF (prédécesseur d'Euronext, cf p. 39-40) ; et à partir de 2007 avec les MTF et marchés de crossings et autres internalisation autorisées en France à partir de l'application de la DMIF ;
4. en bruyant les prix affichés, à l'image de ce qui a été pratiqué par certains spécialistes du NYSE jusqu'en 1993, cf. page 26 ;

Avec un peu d'anticipation

5. par la capture de réglementation à l'image de la modification des priorités d'exécution des ordres et l'intercalation de la priorité membre qu'Euronext a obtenu des régulateurs européens (dont l'AMF pour la France) à partir de 2007, ce point est abordé dans le chapitre 2 ;
6. en réduisant la fourchette de prix, en améliorant la liquidité et en réduisant les coûts de transaction. Cela suppose que les quantités disponibles aux meilleures limites du carnet (la profondeur) soient suffisamment

importantes pour satisfaire les investisseurs institutionnels ; Ce point est développé dans le chapitre 3, voir page 91 par exemple.

Quelle solution préserve au mieux les intérêts des investisseurs ?

Chapitre 2

La bourse et l'organisation des échanges

1. Énoncés des exercices

Exercice 2-1 : Acheteur pressé sur UTP

• La feuille de marché est la suivante à 11h11:

Achat		Vente		Derniers échanges		
Quantité	Limite	Limite	Quantité	Heure	Quantité	Cours
60	100,00	101,00	10	11h10	50	100,50
10	99,90	101,50	5	11h10	150	100,00
30	99,70	103,20	20	11h09	30	99,80
50	99,50	103,80	100	11h08	20	99,50
40	99,20	104,20	40	11h08	30	99,00

Source : site web de NYSE Euronext en 1998, mais l'exemple est atemporel.

Un client veut acheter 50 titres et s'assurer une exécution totale de son ordre sans aucune condition de prix.

Questions :

1. Comment l'investisseur doit-il formuler son ordre ?
2. Est-il exécuté?
3. Totalemment ou partiellement?
4. A quel(s) prix?
5. Que se passerait-il si l'ordre est libellé « à la meilleure limite »?

Exercice 2-2 : Ordre à cours limité (SETS du LSE)

	BUY			SELL		
	Time	Volume	Price	Price	Volume	Time
Order A	10.15	4,800	870	871	5,900	10.25
Order B	10.22	1,500	870	871	7,500	10.48
Order C	10.18	8,700	869	872	13,800	09.25

Source : site web du LSE en 1997, mais l'exemple est atemporel.

À 11 heures un ordre de vente de 10 000 actions à 870 arrive sur le marché :

1. Dans le carnet ci-dessus quel est le *bid* et quel est l'*ask* ?
2. À quel prix est-il exécuté?
3. Est-il totalement exécuté?
4. Que devient la partie éventuellement non exécutée?

Exercice 2-3 : Divers ordres sur UTP

ACHAT		VENTE	
quantité	limite	limite	quantité
40	61,05	61,10	10
10	61,00	61,15	30
30	60,95	61,20	30
10	60,90	61,25	20
20	60,85	61,30	40

Source : site web de NYSE Euronext vers 2000, mais l'exemple est atemporel.

Quel est le *bid* et quel est l'*ask* dans cet exemple ? Indiquez les conditions d'exécution d'un ordre d'achat de 100 actions libellé de la manière suivante :

1. À cours limité 61,20€ ;
2. Au marché ;
3. À la meilleure limite ;

Exercice 2-4 : Ordre à quantité cachée

Répondez aux questions suivantes.

1. L'ordre à quantité cachée est-il pris en compte dans le fixing pour la seule partie visible ou bien en totalité ?
2. Un ordre à quantité cachée, d'une quantité totale de 10 000 avec 200 en tranche visible est entré à 7 heures 30. Une quantité de 2 500 de cet ordre est exécutée en fixing. A 9h01:00 une nouvelle tranche de 200 actions du même ordre est en concurrence avec un ordre à cours limité entré à 8 heures 30. Comment sera gérée la priorité d'exécution ?

Exercice 2-5 : Ordre au marché sur Pernod Ricard

À 9 heures 22 minutes le 7 mars 2005, le dernier cours coté de Pernod-Ricard (RI) est 111,2€ avec 78 actions échangées. Les 5 meilleures limites du carnet sont détaillées dans le tableau 1-12. Le gérant d'un fonds passe un ordre d'achat « au marché » sur 1 500 actions.

Tableau 2-1 : Carnet Pernod Ricard

Achat		Vente	
Quantité	Prix	Quantité	Prix
1 031	111,0	900	111,2
13	110,5	357	111,3
320	110,3	824	111,5
71	110,2	3 799	111,6
315	110,1	1	111,8

1. L'ordre est-il immédiatement exécuté ? à quelles conditions ?
2. Décrivez l'exécution dans l'hypothèse où l'ordre d'achat est libellé « à la meilleure limite ».

Exercice 2-6 : Ordre à cours limité sur l'Oréal

À 9 heures 31 minutes le 7 mars 2005, le dernier cours coté de L'Oréal (OR) est 59,85€ avec 68 actions échangées. Les 5 meilleures limites du carnet sont les suivantes :

Tableau 2-2 : Carnet L'Oréal

Achat		Vente	
Quantité	Prix	Quantité	Prix
5 082	59,85	3 527	59,90
8 114	59,80	3 688	59,95
1 000	59,75	10 535	60,00
4 374	59,70	1 124	60,05
5 029	59,65	2 002	60,10

Le gérant d'un fonds passe un ordre de vente à cours limité 59,80 sur 15 000 actions.

1. L'ordre est-il immédiatement et intégralement exécuté ? À quelles conditions ?
2. Que devient la partie éventuellement non immédiatement exécutée ?
3. Décrivez l'exécution de l'ordre si les mentions suivantes l'accompagnent : « exécuté et éliminé », « exécuté ou éliminé ».

Exercice 2-7 : Ordre à seuil sur France Télécom

À 9h25 le 7 mars 2005, le dernier cours coté de France Télécom (FTE) est 23,39€ avec 200 actions échangées. Les 5 meilleures limites du carnet sont décrites dans le Tableau 2-3.

Tableau 2-3 : Carnet France Télécom

Achat		Vente	
Quantité	Prix	Quantité	Prix
12 593	23,38	250	23,39
9 841	23,37	26 530	23,40
15 106	23,36	2 985	23,41
128	23,34	143	23,42
500	23,33	8 694	23,43

1. Le gérant d'un fonds souhaite vendre 10 000 actions à partir de 23,34€ et être intégralement exécuté, comment doit-il libeller son ordre ?
2. S'il souhaite de plus, que le prix de vente minimal soit de 23,30€, comment doit-il libeller son ordre ?

Exercice 2-8 : Les options implicites aux ordres à cours limité

Mettez en évidence les options implicites aux ordres à cours limité.

Exercice 2-9 : Fixing sur SETS

Sur le site internet du *London Stock Exchange*, on trouve le carnet détaillé dans le tableau 1-16.

Tableau 2-4 : Carnet sur SETS

<i>Aggregate buy orders at a limit price</i>	<i>Price</i>	<i>Aggregate sell orders at a limit price</i>	<i>Cumulative buy side pressure</i>	<i>Cumulative sell side pressure</i>
0	MO	30 000		
0	15	50 000	0	170 000
5 000	14	40 000	5 000	120 000
10 000	13	30 000	15 000	80 000
15 000	12	20 000	30 000	50 000
25 000	11	0	55 000	30 000
40 000	10	0	95 000	30 000
60 000	9	0	155 000	30 000
200 000	8	0	355 000	30 000

Source : SETS du London Stock Exchange

À partir de ces données et sachant qu'à Paris avant la mise en place d'UTP ou à Francfort la solution serait identique, répondez aux questions suivantes :

1. Quel(s) cours maximise(nt) le nombre de titres échangés?
2. Quel est le premier cours coté?
3. Quelle est la fourchette en pourcentage après le fixing ?
4. Quelle est la profondeur aux meilleures limites de prix ?

Exercice 2-10 : Fixing sur Bongrain (examen de mars 2005)

Le 1^{er} septembre 2004, les premiers ordres enregistrés par NSC sur Bongrain sont recensés dans le Tableau 2-5: Le dernier cours coté la veille est de 54€.

1. Établissez le carnet consolidé.
2. Au fixing de 9h quel est le cours coté et combien de titres sont échangés ?
 - a. Archéologie financière : en appliquant les règles de NSC valides avant la mise en place d'UTP en 2010
 - b. En appliquant les règles actuelles, en supposant que les données sont de 2012 par exemple
3. Après le fixing quels seront les ordres en carnet ?
4. Quelle sera la fourchette de prix en euros et en pourcentage et quelles seront juste après le fixing, les profondeurs aux meilleures limites ?
5. Comment sera traité, à son arrivée, le dernier ordre du tableau ?

Tableau 2-5 : Carnet de Bongrain

Heure	Sens	Quantité		Type d'ordre	Prix
		Totale	Dévoilée		
7 :30 :23	A	21	21	L	51,05
7 :31 :15	V	24	24	L	61,00
7 :31 :54	A	24	24	L	51,50
8 :31 :41	V	38	38	L	59,50
8 :39 :27	A	30	30	L	52,00
8 :39 :51	V	3 000	200	L	54,50
8 :40 :31	A	30	30	L	51,00
8 :40 :48	V	8 460	360	L	54,00
8 :41 :33	V	30	30	L	56,00
8 :52 :17	V	24	24	L	56,00
8 :55 :30	A	30	30	X	
8 :58 :26	V	25	25	L	53,80
8 :59 :52	V	25	25	L	53,95
9 :02 :21	V	7 000	250	L	53,95

Note : le sens de l'ordre est soit l'achat (A) soit la vente (V). Deux types d'ordres sont recensés : à cours limité (L) ou au marché (X).

Exercice 2-11 : Fixing sur Xetra (I)

Bid				Limit	Ask			
Quantity	Acc. Quantity	Surplus	Surplus		Acc. Quantity	Quantity		
Limit 200	200		202	500	700			
Limit 200	400		201	300	700			
Limit 300	700		200		700	100	Limit	
	700	100	198		600	200	Limit	
	700	300	197		400	400	Limit	

Source : le site web (version anglaise) de la Deutsche Börse.

1. Commentez cette feuille de marché
2. Quel est le cours d'ouverture ?
3. Quel est le volume échangé ?

Exercice 2-12 : Fixing sur Xetra (II)

Bid				Limit	Ask			
Quantity	Acc. Quantity	Surplus	Surplus		Acc. Quantity	Quantity		
Limit 300	300		202	300	600			
Limit 200	500		201	100	600			
	500		199	100	600	400	Limit	
	500	300	198	200	200	200	Limit	

Source : le site web (version anglaise) de la Deutsche Börse.

À partir de cette feuille de marché de Xetra (automate de la Deutsche Börse à Francfort). Le cours de référence est de 198.

1. Quel est (ou quels sont) les cours qui maximisent le nombre de titres échangés?
2. Quel est le premier cours coté?

Exercice 2-13 : SETS sur LSE

Aggregate order book			Pressures	
BUY	Price	SELL	BUY	SELL
Aggregate orders at a limit price		Aggregate orders at a limit price	Cumulative buy side pressure	Cumulative sell side pressure
5,000	16	10,000	5,000	115,000
0	15	35,000	20,000	80,000
15,000	14	25,000	35,000	55,000
15,000	13	20,000	55,000	35,000
20,000	12	0	55,000	35,000
0	11	10,000	70,000	25,000
15,000	10	15,000	115,000	10,000
45,000		0		

Source : le site web du LSE vers 1998.

1. Pour chaque prix, calculez le volume théorique
2. Pour chaque prix calculez la demande ou l'offre en excès
3. Quel sera le premier cours coté ?

Pour répondre aux questions précédentes, on supposera que le dernier cours coté est de 13,5 £, ou bien de 11 £ ou encore de 15 £.

Exercice 2-14 : Contrats de liquidité

Au moyen de recherches sur internet, identifiez les émetteurs du CAC40 ayant des contrats de liquidité. Puis répondez aux questions suivantes :

1. Quels sont les montants en espèces et en titres confiés par les émetteurs au PSI ? Qui choisit le PSI ? Quels sont les deux PSI réalisant la part de marché la plus forte ?
2. Quels types de conflits d'intérêt peuvent découler d'un contrat de liquidité ? Quels sont les mécanismes mis en place pour prévenir ces conflits d'intérêt ?
3. Le PSI doit-il s'abstenir d'intervenir dans les séances précédant les publications trimestrielles de l'entreprise ? La quantité rachetée par le PSI une séance donnée est-elle contrainte relativement au total échangé sur la séance ?
4. Qu'est l'AFEI et quel est le rôle joué par cet organisme dans les contrats de liquidité ?
5. Quelles sont les statistiques publiées (par le PSI ou Euronext ou l'AMF ou l'AFEI) permettant de juger de la qualité du service de liquidité rendu par le PSI ayant signé un tel contrat ?
6. Quels sont, selon vous, les objectifs d'un contrat de liquidité ?
7. Comment les contrats de liquidité sont-ils réglementés au LSE ?

Exercice 2-15 : Internalisation sur Euronext

Sur le site d'Euronext on trouve (en 2007, « *Liquidity at hand* ») l'exemple suivant. Le tableau décrit 4 ordres les mieux placés en carnet du côté vendeur (*ask*). Pour chaque ordre 4 informations sont reportées : le prix limite, la quantité offerte à la vente, l'identité du vendeur (en fait il s'agit du membre par lequel l'ordre transite) et l'heure d'apparition publique de l'ordre en carnet.

En supposant qu'à 10 :06 un ordre d'achat à 22,13€ pour 400 actions soit transmis par le membre « Company A », décrivez l'exécution de l'ordre, en distinguant a) une exécution avant novembre 2007, et b) une exécution après et donc depuis la mise en place de la procédure initialement dénommée par Euronext « internalisation ».

Order book sell side			
Price	QTY	Seller	Time
22,12	100	Company B	10 :05
22,13	200	Company C	10 :02
22,13	300	Company A	10 :03
22,13	200	Company A	10 :04

Exercice 2-16 : Fixing (exercice d'examen donné en avril 2002)

Sur UTP (appliquez les règles actuelles, à partir de 2010) les 12 ordres ci dessous sont parvenus dans l'ordre repéré dans la colonne « N° » en pré-ouverture. AM signifie « ordre au marché », le sens est acheteur (A) ou vendeur (V). On supposera tout d'abord que le dernier cours coté la veille est de 62€.

1. Construisez la feuille de marché (1 point)
2. Etablissez le premier cours en fixing (justifiez) (1 point).

Les deux questions suivantes constituent des variantes qui peuvent être ignorées

- Quel est le cours en fixing si le dernier cours coté la veille est de 59,80€ ?

- *Quel est le cours coté en fixing si on applique les règles de NSC (avant la mise en place d'UTP en 2010) ?*
3. quelle est la quantité échangée au premier cours, quels sont les ordres exécutés ? (1 point)
 4. quelle est la fourchette affichée après le fixing ? (1 point)
 5. quelle est la profondeur aux meilleures limites ? (1 point)
 6. quel est l'état du carnet après le fixing ? (1 point)
 7. Si à 9h01' un ordre d'achat à la meilleure limite de 100 actions parvient sur le marché que se passe-t-il (cours, volume, modification éventuelle du carnet) ? (1 point)
 8. Si à 9h01' un ordre de vente à cours limité 60€ de 300 actions parvient sur le marché que se passe-t-il (cours, volume, modification éventuelle du carnet) ? (1 point)

N°	Sens	Qté	Limite	N°	Sens	Qté	Limite
1	A	50	AM	8	A	420	58,80
2	V	150	59,90	9	V	180	63,00
3	A	620	61,20	10	V	60	63,00
4	A	150	61,20	11	V	350	59,90
5	V	75	63,00	12	A	500	61,10
6	V	80	AM		V	450	61,00

Exercice 2-17 : NSC (Examen novembre 2008)

Le 13 novembre 2008 à 14h18, le dernier cours coté de IGP, société cotée à Euronext Paris, est 23,27€ avec 1581 actions échangées. Le carnet d'ordres est détaillé dans le tableau suivant :

Tableau 1 : carnet d'ordre à 14h18

ACHAT			VENTE		
Ordres	Qté	Prix	Prix	Qté	Ordres
1	1 503	23,16	23,27	3 419	1
2	12 392	23,02	23,29	320	2
1	3 125	23,00	23,30	5 232	7
1	8 930	22,98	23,31	5 589	8
1	8 905	22,95	23,33	8 101	2

De plus, à 13h45, un ordre de vente à seuil de déclenchement à 23,10 offrant 5 000 avait été soumis. Entre 14h18 et 14h30, les ordres suivants ont été soumis :

Tableau 2 : Ordres soumis

Heure	Sens	Type	Quantité		Prix ou seuil
			Totale	Dévoilée	
14 :22 :20	A	L	606	101	23,22
14 :24 :46	V	ML	422	422	
14 :27 :01	L'ordre d'achat de 14 :22 :20 est annulé par le donneur d'ordre				
14 :28 :08	A	X	3800	3800	

Note : X : ordre au marché, ML : ordre à la meilleure limite, L : ordre à cours limité

Question 1 : Expliquez le fonctionnement des ordres à seuil de déclenchement (1 point)

Question 2 : S'il y a lieu, donnez les cours et les quantités échangées à chaque instant d'arrivée d'ordre.(3 points)

En fait, Euronext a réservé temporairement la cotation de IGP car le dernier ordre d'achat provoquerait, s'il était exécuté, des négociations à un (ou des) cours situé en dehors de limites appelées "seuils de réservation". En conséquence, l'action est réservée pendant 5 minutes et les cotations redémarreront par un fixing après annulation de l'ordre soumis à 14h28'08'' pour la quantité totale demandée. Le nouveau cours de référence est 23,31. Pendant la phase de pré-fixing, les ordres suivant sont soumis :

Tableau 3 : ordres soumis pendant la phase de pré-fixing

	Sens	Quantité		Type d'ordre	Limite
		Totale	Dévoilée		
1	Achat	385	385	L	23
2	Vente	405		X	
3	Vente	482	482	L	22
4	Vente	1200	1200	L	23,50
5	Achat	505	505	L	22,9
6	Vente	550	550	L	23,2
7	Achat	1320	1320	L	23,30
8	Achat	784	784	L	23,23

Question 3 : Donnez le premier cours, les quantités échangées à ce prix, ainsi que les caractéristiques des meilleures limites en prix et profondeur. (4 points).

Exercice 2-18 : Courbes d'offre et de demande de titres sur un marché en continu

Le graphique 2-1 du chapitre 2 reproduit les courbes d'offre et de demande d'Air Liquide à un instant particulier de la séance du 23 2011. Le type de données nécessaire pour construire ce graphique est produit en permanence et affiché par les marchés. Pour Euronext il est très courant de disposer des 10 meilleures limites de prix.

Construire les courbes de demande et d'offre en escalier.

Certaines données ont été rassemblées dans le classeur excel Euronext201011121736.xls qui comporte plusieurs feuilles avec des données de Lafarge, Somfy ou Air Liquide.

Reproduisez le graphique 2-1.

2. Corrigés (partiels) des exercices

Exercice 2-1 : Acheteur pressé sur UTP (corrigé)

L'investisseur place un ordre d'achat « au marché » pour 50 actions. L'ordre est immédiatement et intégralement exécuté. Il y a plusieurs prix d'exécution qui dépendent des limites de prix qui ont été formulées par les investisseurs présents

en carnet (dans la feuille de marché pour reprendre la terminologie utilisée par Euronext en français).

L'ordre d'achat est exécuté avec comme contrepartie les vendeurs en carnet. Il est exécuté pour 10 titres à 101€ ; 5 titres à 101,5€ ; 20 titres à 103,20€ et le solde de l'ordre soit $50 - (10 + 5 + 20) = 15$ titres à 103,80€. Le carnet est modifié, les deux meilleures limites de l'ancien carnet disparaissent et la 3^e est modifiée. De nouveaux ordres apparaissent : on peut supposer que ce sont des ordres anciens qui n'étaient tout simplement pas affichés, puisqu'ici seules les 5 meilleures limites sont montrées.

• La feuille de marché devient alors :

Achat		Vente		Derniers échanges		
Quantité	Limite	Limite	Quantité	Heure	Quantité	Cours
60	100,00	103,80	85	11h11	15	103,80
10	99,90	104,20	40	11h11	20	103,20
30	99,70	104,30	50	11h11	5	101,50
50	99,50	104,50	100	11h11	10	101,00
40	99,20	105,00	40	11h10	50	100,50

• Alors que si l'ordre avait été donné "Au prix du marché", il aurait été exécuté pour 10 titres à 101 F, les 40 titres restants s'affichant à l'achat à ce cours limite de 101 F.

Source : site web de NYSE Euronext en 1998, mais l'exemple est atemporel.

Vous remarquez dans la partie droite de l'encadré ci-dessus que la liste des prix a été mise à jour. Les quatre derniers prix (en haut de la pile) ont été provoqués par l'exécution de l'ordre de taille modeste qui vient d'être exécuté.

Si l'ordre était formulé ainsi « Achat à la meilleure limite de 50 actions », l'ordre ne serait immédiatement exécuté que pour 10 titres (la quantité en carnet à la meilleure limite vente). Le solde de l'ordre, soit 40 titres entrerait en carnet du côté des ordres d'achat et il prendrait position au sommet de la pile en constituant la nouvelle meilleure limite de prix à 101€ (c'est le prix auquel il a été partiellement exécuté).

Cet exemple a été situé à Paris. La présentation des données est celle de Paris mais la logique de l'exécution est universelle. L'ordre « au marché » est ailleurs le *market order*. En cours, le carnet est présenté de manière légèrement différente en plaçant les ordres d'achat (en carnet) sous les ordres de vente. Ce qui permet d'exposer de manière explicite la première règle de priorité appliquée par les marchés d'actions : à savoir la priorité prix (exécution prioritaire du mieux disant).

Exercice 2-2 : Ordre à cours limité (SETS du LSE), corrigé

Le carnet qui est ici affiché n'est pas consolidé : deux ordres d'achat à 870£ sont visibles de même que 2 ordres de vente à 871£. L'heure d'arrivée des ordres est indiquée. Ce type d'information n'est généralement pas public. On suppose ici que l'information est affichée par exemple sur un des écrans de la cellule de contrôle du marché.

Le *bid* (meilleure limite des acheteurs en carnet) est de 870£ et l'*ask* (meilleure limite des vendeurs en carnet) est de 871£. Bien sûr $ask > bid$.

L'ordre de vente sera immédiatement exécuté. 4 800 actions seront exécutées à 870 contre l'ordre A et 1 500 contre l'ordre B à 870£ également. Le solde de

l'ordre $10\,000 - (4\,800 + 1\,500) = 3\,700$ ne peut être exécuté en raison de l'exigence de prix du vendeur (870£ est son prix de réserve). Le solde entre en carnet (du côté des vendeurs, au sommet de la pile) et constitue la nouvelle meilleure limite (*ask*).

L'exécution de l'ordre modifie le carnet :

	BUY			SELL			
	Time	Volume	Price	Price	Volume	Time	
Order A	10.15	4,800	870	870	3,700	11.00	XYZ's
Order B	10.22	1,500	870	871	5,900	10.25	
Order C	10.18	8,700	869	871	7,500	10.48	
				872	13,800	09.25	

Source : site web du LSE en 1997, mais l'exemple est atemporel.

Exercice 2-3 : Divers ordres sur UTP (corrigé)

Le *bid* (meilleure limite des acheteurs en carnet) est 61,05€ et l'*ask* (meilleure limite des vendeurs en carnet) est 61,10€. Bien sûr $ask > bid$.

- À cours limité 61,20€. L'ordre est exécuté pour 10 titres à 61,10€, pour 30 titres à 61,15€ et pour 30 titres à 61,20€ et reste est inscrit à l'achat pour 30 titres limités à 61,20€. Ce libellé assure la maîtrise du prix et une exécution rapide, éventuellement fractionnée en plusieurs fois si les quantités nécessaires ne sont présentes sur le marché que par lots successifs.
- Au marché. L'ordre est immédiatement et intégralement exécuté. Mais sur plusieurs limites de prix. Il est exécuté pour 10 titres à 61,10€ + 30 titres à 61,15€ + 30 titres à 61,20€ + 20 titres à 61,25€ + 10 titres à 61,30€, soit un prix moyen de 61,20€ par titre. L'ordre est entièrement exécuté.
- À la meilleure limite. L'ordre est exécuté pour 10 titres à 61,10€; le solde de l'ordre $100 - 10 = 90$, entre en carnet du côté acheteurs à 61,10€ (le prix auquel il a été partiellement exécuté). Ce libellé d'ordre permet d'obtenir le meilleur prix disponible lors de son arrivée sur le marché mais, du fait qu'il ne sert qu'une limite, il présente un fort risque d'exécution partielle.

Exercice 2-4 : Ordre à quantité cachée : corrigé

- L'ordre est pris en compte en totalité pour la détermination du cours. Pour l'exécution des ordres et en cas de réduction, la partie cachée des ordres sera supposée révélée au marché à l'instant du fixing quelle que soit l'heure d'arrivée de l'ordre.
- la priorité temporelle n'est pas définie par rapport à l'entrée d'un l'ordre dans le système, mais par rapport à son affichage public. Ici, la deuxième tranche est dévoilée juste après la première exécution au fixing de 9 heures. L'ordre n'est pas prioritaire par rapport à un ordre « au marché » entré et visible avant.

Exercice 2-8 : Les options implicites aux ordres à cours limité : corrigé

Un acheteur comme un vendeur à cours limité s'exposent en carnet et attendent qu'une contrepartie cède à leurs exigences. Une fois l'ordre formulé et entré en carnet, le donneur d'ordre ne décide pas de l'exécution, c'est sa

contrepartie éventuelle qui déclenche la transaction. Le donneur d'ordre à cours limité en ce sens est vendeur d'option.

L'acheteur à cours limité qui souhaite acquérir l'action (avec un cours limite inférieur au *ask*) est vendeur d'une option de vente alors que le vendeur d'action (avec un cours limite supérieur au *bid*) est vendeur d'une option d'achat.

Sur un marché en équilibre, les options ne sont pas gratuites. La prime est encaissée par le vendeur et payée par l'acheteur. Ici l'option n'est pas contractuellement définie. Toutefois suivant cette analyse due à Copeland et Galai (1983), la rentabilité associée à un placement d'ordre à cours limité devrait être plus importante que celle d'un placement d'ordre avec exécution immédiate, avec un ordre au marché par exemple. Le différentiel de rentabilité doit être lié à la volatilité de l'action.

Exercice 2-11 : Fixing sur Xetra (corrigé)

La présentation des données du carnet telle que reproduite dans l'énoncé est différente de la présentation faite en cours. Le vocabulaire utilisé est en partie différent de celui utilisé sur le LSE ou sur la version en anglais du site Euronext-Paris. Mais on reconnaît les données qui sont malgré tout familières. *Bid* : repère les acheteurs en carnet et *ask* (partie droite) les vendeurs en carnet. Au milieu du tableau sous l'intitulé « limit » les différentes limites de prix associées aux ordres en carnet. Le carnet est consolidé (une seule ligne dans le carnet pour un prix donné) et ordonné par limites de prix décroissantes du haut vers le bas.

Les colonnes « quantity » donnent les tailles des ordres en carnet. Les colonnes « Acc. Quantity » donnent les cumuls des quantités en carnet : à 201 €, 400 acheteurs (côté *bid*) sont prêts à payer ce prix ou plus par exemple. De même à 201€, 700 vendeurs en carnet (côté *ask*) sont prêts à ne recevoir que ce prix ou moins.

Le nombre de titres qui sont échangés à un cours donné est le minimum entre les deux colonnes de cumul. Le cours est fixé à 200€, qui est le cours qui maximise les quantités échangées (700).

Cet exemple ici pris à Francfort donnerait exactement la même solution à Londres sur SETS ou à Paris sur UTP mais aussi sur NSC (avant 2010).

Exercice 2-12 : Fixing sur Xetra (II)

Le corrigé de l'exercice 2-11 décrit la présentation d'un carnet très similaire. L'application des règles d'exécution en vigueur sur XETRA amène la solution suivante :

1. Deux cours maximisent les quantités échangées : à 199 ou à 201 € pour une quantité de 500 (le minimum des deux cumuls côtés acheteur et vendeur).
2. Sur XETRA la deuxième règle fait référence à l'excès d'offre ou à l'excès de demande (c'est-à-dire aux quantités non servies au prix fixé). L'énoncé dans la colonne intitulée surplus donne l'excès d'offre (côté vendeur ou *ask*) et l'excès de demande (côté acheteur ou *bid*). L'excès est calculé comme différence (si elle est positive, zéro sinon) entre la quantité théorique échangée et la quantité en carnet (colonne Acc. Quantity).
3. Au cours de 199, on constate un excès d'offre de 100 titres (si on cote 199, 500 titres sont échangés, mais à ce prix 100 vendeurs prêts à vendre à ce

- prix ne seront pas exécutés, ils seront réduits). Au cours de 201, c'est également un excès d'offre également de 100 qui est constaté.
4. La troisième règle permet de départager les deux cours de 199 et de 201. Suivant la 3^e règle en cas d'excès d'offre de même ampleur sur plusieurs cours, le cours le plus faible est retenu, soit 199.
 5. Ici le cours de référence n'est pas utilisé. On souligne par ailleurs, que si des excès de demande avaient été constatés, on aurait retenu le cours le plus élevé.
 6. Enfin (réponse à une question non posée), la solution ici obtenue serait également celle retenue par SETS à Londres ou par Euronext à Paris mais avant 2010, c'est-à-dire du temps de NSC. Depuis UTP, les règles ont été simplifiées à Paris et dans cet exemple, les deux cours seraient départagés directement par rapport au cours de référence et sans calcul d'excès d'offre ou de demande, ce qui aboutirait ici à un cours de 199 €.

Exercice 2-13: SETS sur LSE (corrigé)

Aggregate order book			Pressures		Executable volume	Order surplus
BUY	Price	SELL	BUY	SELL		
Aggregate orders at a limit price		Aggregate orders at a limit price	Cumulative buy side pressure	Cumulative sell side pressure		
5,000	MO	10,000			5,000	-110,000
0	16	35,000	5,000	115,000	20,000	-60,000
15,000	15	25,000	20,000	80,000	35,000	-20,000
15,000	14	20,000	35,000	55,000	35,000	20,000
20,000	13	0	55,000	35,000	35,000	20,000
0	12	10,000	55,000	35,000	25,000	45,000
15,000	11	15,000	70,000	25,000	10,000	80,000
45,000	10	0	115,000	10,000		

Source : le site web du LSE vers 1998.

Dans le carnet d'ordres de l'énoncé, MO pour *market order* ; Remarquez qu'à gauche les ordres « MO » à la vente ne sont pas classés suivant la priorité prix : il convient en fait de les positionner en bas du tableau avant de réaliser le cumul permettant la mise en évidence des courbes d'offre et de demande. Au milieu, *aggregate orders at a limit price* correspond aux quantités additionnées pour une limite de prix donnée ; *pressure* correspond au cumul des quantités. Vous remarquez que les 10000 vente MO sont effectivement en bas.

À partir de ces données on calcule (tableau ci-dessus partie droite) le volume théorique à chacun des prix possibles (*executable volume*) et l'excès d'offre ou de demande (*order surplus*). La dernière colonne est signée et par convention un excès d'offre a le signe négatif.

1. Trois prix donnent le volume le plus fort : 12, 13 ou 14£ (35000 actions) ;
2. Il y a également trois prix différents pour lesquels les ordres non exécutés sont minimisés : 12, 13 ou 14£ ;
3. On constate un excès d'offre à 14 £ mais un excès de demande à 12 ou 13 £, et donc une indétermination du sens de l'excès ; Trois prix (12, 13 et 14) sont toujours en compétition et non départagés ;

4. La quatrième règle à Londres utilise le prix de référence. Ici on suppose que le dernier cours indiqué est le prix de référence. Sur SETS, si le cours de référence est plus fort que le plus haut des prix possibles, on retient le plus haut. Si le cours de référence est inférieur au plus faible des prix possibles on retient le plus faible et enfin si le cours de référence est intercalé c'est le cours de référence qui est retenu. L'application de ces règles amène à coter amène à afficher comme cours de fixing (opening auction) 13,5 si le cours de référence est à ce niveau ; de 12 si le cours de référence est à 11 et de 14 si le cours de référence est à 15£.

Exercice 2-15 : Internalisation sur Euronext (corrigé)

At 10:06 Company A buys 400 shares at €22.13 with the following book on the sell side.

Order Book Sell Side				Executions with the existing process Scenario 1	Buyer Seller QTY Price			
Price	QTY	Seller	Time		Company A	Company B	100	22.12
22.12	100	Company B	10:05	Executions with the new process Scenario 2	Company A	Company C	200	22.13
22.13	200	Company C	10:02		Company A	Company A	100	22.13
22.13	300	Company A	10:03		Company A	Company B	100	22.12
22.13	200	Company A	10:04		Company A	Company A	300	22.13

Source : site web d'Euronext en 2007

À droite de l'encadré ci-dessus en haut, on trouve une description de l'exécution de l'ordre arrivé à 10:06 avant novembre 2007. Les priorités d'exécution étaient 1/ mieux disant en prix et 2/ priorité à l'ordre rendu public avant les autres (à prix identique). L'ordre d'achat de 400 actions s'exécute donc contre a) l'ordre company B à 22,12 puis b) l'ordre company C à 22,13 (arrivé à 10 :02), puis c) l'ordre company A arrivé à 10 :04.

L'encadré en bas à droite décrit l'exécution depuis novembre 2007 et la mise en place de « l'internalisation sur Euronext » qui implique une modification des règles de priorité. Ces nouvelles priorités amènent à exécuter a) contre company B qui est toujours le mieux-disant en prix, puis b) contre les deux ordres company A. L'ordre de company C, pourtant affiché AVANT le deuxième ordre company A est ignoré.

Avant novembre 2007, une application consistait pour un membre à pré-arranger (*matcher*) deux ordres puis faire enregistrer la transaction sur Euronext. L'enregistrement était obligatoire puisque le marché était centralisé par la loi. L'application, comme « l'internalisation sur Euronext » limitent toutes deux le travail d'Euronext puisque le risque de contrepartie n'est pas traité par Euronext et que la compensation est assurée par le membre (les deux cotés de la transaction passent par lui). Euronext facture donc un tarif réduit par rapport à une transaction classique.

Le nouveau dispositif est dans le prolongement des applications d'avant novembre 2007. Le point commun entre les deux dispositifs est qu'il s'agit d'un petit arrangement entre Euronext et le membre, sans que le client ne soit informé (le membre l'informe s'il le souhaite). Il y a partage des gains entre Euronext et le membre, sans que le client soit forcément informé.

Exercice 2-19 : Fixing (exercice d'examen donné en avril 2002)

Le corrigé est très détaillé et des variantes sont explorées (ce qui n'est pas demandé dans l'énoncé). En situation d'examen, un texte plus bref en réponse gagnera tous les points. Attention toutefois à expliquer à minima ce que vous faites et à préciser les notations utilisées.

1. La feuille de marché

Ou carnet d'ordres. La prise en compte de la priorité prix (mieux disant) dans l'exécution des ordres amène à trier les ordres en prix décroissants. Remarque : « AM » à l'achat est le prix le plus élevé (acheteur disposé à payer n'importe quel prix) et « AM » à la vente le prix le plus faible. On consolide (ou agrège) les ordres formulés à des prix identiques (exemples n° 3 & 4). On obtient les 4 premières colonnes du tableau suivant

N°	Limite	Achat	Vente	Cumul Achat	Cumul Vente	Volume	Excès dde	Excès offre
1	AM	50	0	50	1345	50	0	1295
9	63	0	315	50	1345	50	0	1295
3	61,2	770	0	820	1030	820	0	210
11	61,1	500	0	1320	1030	1030	290	0
12	61	0	450	1320	1030	1030	290	0
10	59,9	0	500	1320	580	580	740	0
7	58,8	420	0	1740	80	80	1660	0
6	AM	0	80	1740	80	80	1660	0

2. Premier cours en fixing

On établit les courbes d'offre de titres (cumul des quantités proposées à la vente du bas vers le haut du tableau) et de demande (cumul des quantités à l'achat du haut vers le bas). On obtient les colonnes 5 & 6 du tableau ci-dessus. Par exemple, le tableau indique qu'au prix 61,1€ 1320 achat sont possibles à ce prix (ou à un prix inférieur) et que 1030 vente sont possibles à ce prix ou à un prix supérieur.

A chaque prix (ligne) du tableau, on calcule le volume théorique. Il est égal à $\text{Min}[\text{Cumul achat} ; \text{cumul vente}]$. Par exemple à 61,10 le volume théorique est de $\text{Min}[1320 ; 1030]$ soit 1030. Ce qui signifie que si le prix de 61,10€ est retenu alors 1030 titres pourront changer de main (en face d'un acheteur il y a obligatoirement un vendeur). On obtient la 7^e colonne du tableau.

Il n'est pas nécessaire ici (pour établir le cours en fixing) de calculer les excès d'offre et de demande (colonnes 8 & 9) du tableau. Ces colonnes indiquent toutefois les quantités non exécutées. Par exemple si le prix de 61,10€ est retenu, alors $1320-1030=290$ ordres d'achat ne peuvent être exécutés (excès de demande).

Les règles sur Euronext Paris en 2010 : a) on choisit le cours qui maximise les quantités échangées (ici deux cours remplissent cette condition soit 61 et 61,10€) ; b) en cas d'ex-oequo, ce qui est ici le cas, on choisit parmi le cours le plus proche du cours de référence. Le dernier cours coté la veille est le cours de référence (62€ dans l'énoncé). Le cours en fixing sera donc de 61,10€.

Les deux questions suivantes constituent des variantes qui peuvent être ignorées (elles n'étaient pas posées dans l'examen de 2002)

- *Quel est le cours en fixing si le dernier cours coté la veille est de 59,80€ ?*
Le cours de 61€ (ci-dessus) est le plus proche. Mais la solution est dans ce cas un peu plus complexe. En effet, 290 acheteurs ne peuvent être exécutés à ce prix, or ils étaient prêts à payer 61,10€. Il n'est pas possible de coter 61 et de leur annoncer qu'ils ne sont pas exécutés ! Le cours **faisable** le plus proche du cours de référence est donc là aussi de 61,10€ !
- *Quel est le cours coté en fixing si on applique les règles de NSC (avant la mise en place d'UTP en 2010) ?*
Les règles étaient les suivantes : a) priorité prix (61€ ou 61,10€) ; b) minimisation des excès d'offre ou de demande (61€ ou 61,10€, la règle ne permet pas de progresser) ; c) cours le plus élevé si excès de demande et le plus faible si excès d'offre (ici on cote 61,10 car excès de demande). On obtient ici la même solution.

3. quelle est la quantité échangée au premier cours, quels sont les ordres exécutés ? (1 point)

Sont exécutés et disparaissent du carnet (ou feuille de marché suivant la terminologie en français d'Euronext)

- a) les ordres d'achat à un prix $>61,1$; (n° 1, 3, 4 pour $50+620+150=820$ titres)
- b) les ordres de vente à un prix $<61,1$ (n° 2, 6, 10 et 12 ; pour $150+80+350+450=1030$)
- c) tous les ordres de vente à 61,10 (aucun en fait)
- d) les ordres d'achat à 61,10 non réduits : seul l'ordre n° 11 est à l'achat à 61,10€ ; il ne peut être exécuté en totalité seuls 290 titres seront exécutés et les autres ($500-290=210$ excès de demande) seront réduits et resteront en carnet après le fixing.

4. quelle est la fourchette affichée après le fixing ? (1 point)

Il est pratique pour cette question et les suivantes d'établir l'état du carnet juste après le fixing (et l'évacuation des ordres exécutés) on obtient le tableau suivant :

N°	Limite	Achat	Vente
1	AM		0
9	63		315
3	61,2		0
11	61,1	290	0
12	61	0	
10	59,9	0	
7	58,8	420	
6	AM	0	

La **fourchette** est de 61,10 (le bid) / 63 (le ask) (ask-bid=1,9€ ou 3,06% du milieu de fourchette à 62,05).

5. quelle est la profondeur aux meilleures limites ? (1 point)

La profondeur correspond aux quantités en carnet (aux meilleures limites) Elle est de 290 / 315. On pourrait l'exprimer en euros. On pourrait donner la

profondeur sur les x premières limites du carnet (en cumulé donc). La question est floue et la réponse standard (et au plus court)

6. quel est l'état du carnet après le fixing ? (1 point)

cf le tableau ci-dessus

7. Si à 9h01' un ordre d'achat à la meilleure limite de 100 actions parvient sur le marché que se passe-t-il (cours, volume, modification éventuelle du carnet) ? (1 point)

Exécution immédiate intégrale à 63€ (enfin une réponse plus courte que la question posée !)

8. Si à 9h01' un ordre de vente à cours limité 60€ de 300 actions parvient sur le marché que se passe-t-il (cours, volume, modification éventuelle du carnet) ? (1 point)

Vente de 290 actions à 61,1€, le solde entre comme ordre de vente à cours limité à 60€.

Chapitre 3

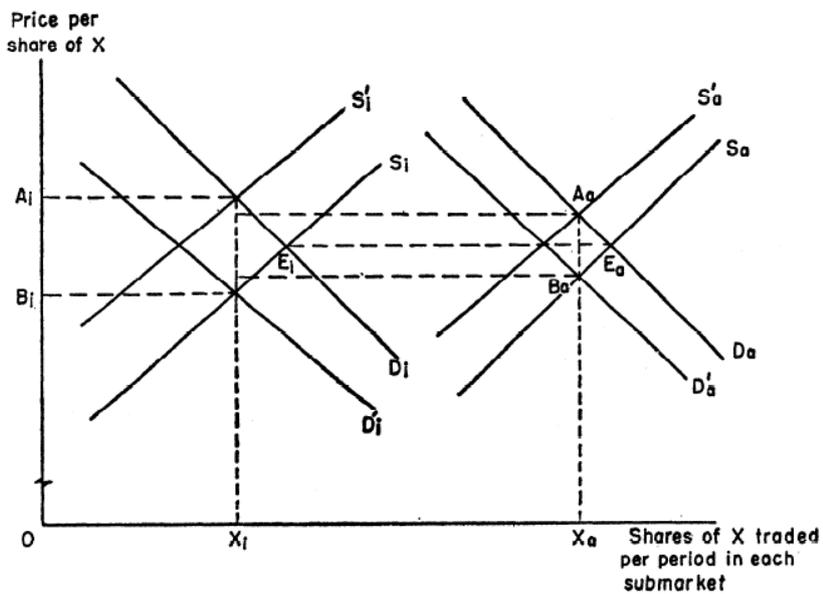
La bourse et la liquidité

1. Exercices

Exercice 3-1 : Demsetz (1968)

Retour aux sources. Dans l'article de 1968, la figure 1 (reproduite ci après) correspond-elle au graphique 3-4, chapitre 3 ? Quelle est la structure de frais évoquée par Demsetz en 1968 ?

Graphique 3-1 : Demsetz, graphique 1



Source : il s'agit de la figure 1 de l'article de Demsetz (1968).

Exercice 3-2 : Flash crash (le 6 mai 2010)

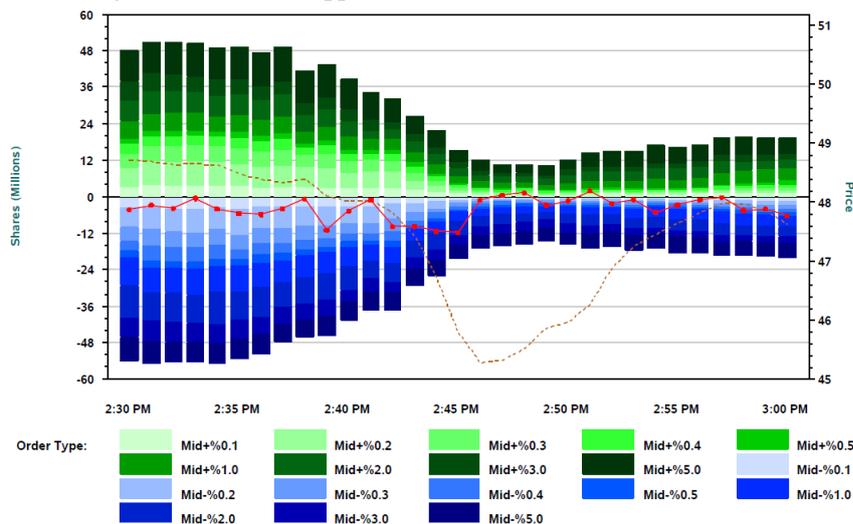
Le graphique ci-après est tiré du rapport SEC-CFTC publié le 1^{er} oct 2010 à propos du « krach du 6 mai 2010 ». Il concerne les actions de l'indice S&P500 (1.A, p. 33) négociées sur NYSE openbook, ArcaBook, Nasdaq Model view et BATS.

Le titre du graphique est « *market depth, within 500 basis points, and net aggressive volume* ». L'histogramme décrit l'évolution de la profondeur par tranche d'environ 1 minute. Le trait en pointillé, la trajectoire des cours cotés (en retenant à un instant donné le plus faible de tous les marchés). Le trait avec carré décrit l'évolution du *net aggressive buy volume*.

Questions

1. Définissez *basis point* et *500 basis points*
2. Précisez ce qu'est la profondeur ?
3. Définissez précisément le *net aggressive buy volume*, commentez son évolution.
4. Combien d'actions ont-elles été échangées entre 2:40 et 3:00pm sur tous les marchés américains ?
5. Le volume de transaction est-il un indicateur de liquidité ?

Graphique 3-2 : Market depth, within 500 basis points, and net aggressive volume (rapport SEC-CFTC)



Exercice 3-3 : La qualité de marché selon Equiduct

Equiduct est une plateforme de négociation d'actions européennes qui diffuse également des indicateurs sur les échanges réalisés par les différentes plateformes concurrentes (cf. <http://www.equiduct.eu/home/home.asp>).

A l'onglet « Market / LFA/ Download » des statistiques d'échanges sont présentées mensuellement par plateforme et par titres pour environ 1100 actions européennes (téléchargement possible de feuilles excel).

En 2014, l'accès aux données est restreint, vous pouvez télécharger les statistiques de mars 2013 tout de même.

La part de marché effectivement réalisée (*observed market share*) un mois donné est publique, de même qu'une statistique intitulée « *potential market share* ».

Par exemple pour le mois de mai 2012 sur les actions de l'indice CAC40, CHIX réalise 23,9% de « *observed market share* ». Ce même mois, LFA indique 29,3% de « *Potential Market share price only* » et de 32,3% de « *potential market share fee&price* ».

Le même mois les valeurs pour Euronext sont respectivement de 61,6% (*observed market share*), 57% (*potential market share price only*) et 40,6% (*potential market share price&fee*)

Expliquez les deux derniers termes, la démarche de calcul et l'intérêt présenté par ces mesures additionnelles de part de marché.

Exercices (avec données à télécharger)

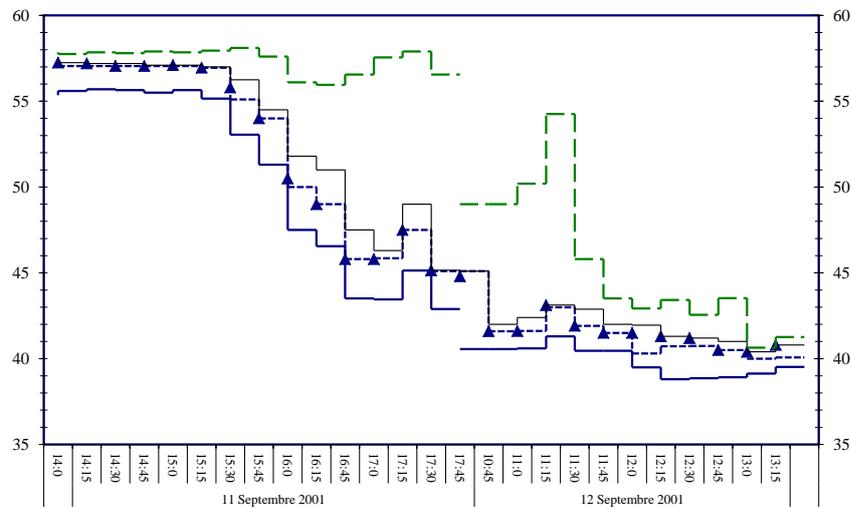
Nom du fichier	Adresse sous www.dauphinefinance.com	Exercice
LAG20070117.xls	106/Data106	3-3 et 3-4
Ingenico 4oct2002f.txt	106/Data106	3-3
Euronext201011121736.xls	106/Data106	
Club20010911.xls	106/Data106	3-2
PennyStock49255.xls	106/Data106	3-5
SG 20081013.xls	106/Data106	3-10 et 3-11

Exercice 3-4 : Fourchette et FMP sur Club Méditerranée

Tracez les trajectoires des meilleures limites et de la FMP de l'action Club Méditerranée du 11 septembre à 14 heures au 12 septembre 2001 à 15 heures, en retenant un intervalle de 15 minutes, les données sont dans le fichier excel de nom « Club20010911.xls » qui découpe la séance par tranches de 15 minutes.

Vous devez obtenir le résultat du graphique 3-3 (ici obtenu sous excel). Les triangles repèrent les cours cotés les plus proches de chaque début de quart d'heure. Les traits extérieurs, en escaliers, dessinent les meilleures limites définies par la FMP (la fourchette moyenne pondérée était à cette date calculée et publiée par Euronext à partir des meilleures limites –à peu près 5– à concurrence d'une TNB, taille normale de bloc) et les deux trajectoires intérieures, également en escalier, représentent les meilleures limites du carnet. On remarque la limite supérieure de la FMP qui reste suspendue dans le vide (la plupart des vendeurs en carnet qui ne réajustent pas leurs ordres), alors que la limite inférieure plonge sous l'assaut des nouveaux vendeurs.

À partir des CD-Roms d'Euronext, extrayez les données nécessaires pour un graphique similaire avec un découpage de la séance par tranche de 5 minutes.

Graphique 3-3 : Club et fourchettes**Exercice 3-5 : Fourchettes d'Ingenico le 4 octobre 2002**

Reproduire les graphiques de la section 1.3 du chapitre 3 (graphiques 3-2 et 3-3). Le fichier « Ingenico 4oct2002f.txt » contient les données de date et heure, de cours, meilleure demande (bid) et meilleure offre (ask) pour Ingenico. Les données sont observées le plus proche de la fin de chaque tranche horaire de 15 minutes.

1. représentez l'évolution des cours du 2 (vendredi) au 7 (lundi) oct 2002
2. représentez l'évolution des cours le 4 oct 2002 avec un graphique en escaliers
3. représentez les évolutions Bid et Ask du 2 oct 2002 sur un graphique en escaliers
4. représentez les cours du 2 oct (graphique en point)

Exercice 3-6-. Profondeur de Lagardère le 17 janvier 2007

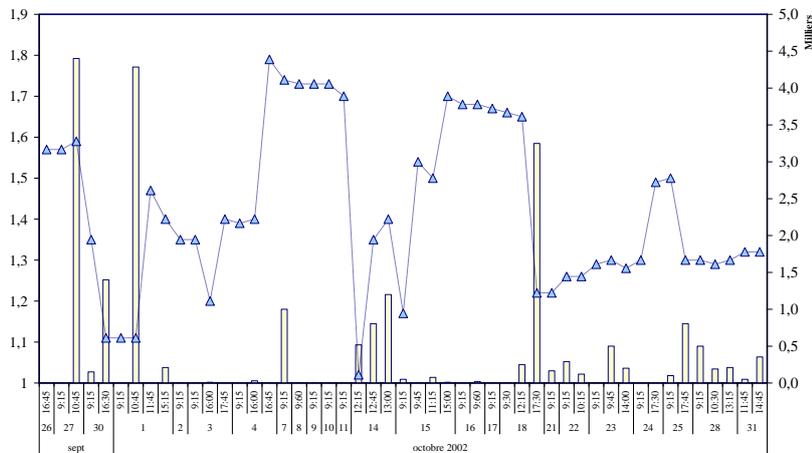
Reproduire le graphique 3-5. Le fichier « LAG20070117.xls » contient les données de la séance du 17 janvier 2007 pour Lagardère. Deux feuilles. La première est organisée par transaction réalisée. La deuxième décrit la dynamique des premières limites.

1. Représentez l'évolution des cours
2. Représentez les évolutions des profondeurs aux 1ères et 5è limites de prix

Exercice 3-7 : Penny stock et les dangers de l'illiquidité

Le fichier « Pennystock49255.xls » donne toutes les transactions sur Euronext entre le 26 septembre 2002 et le 31 octobre 2002 pour une action négociée en marché continu. L'action est IB group.com. Reproduisez le graphique suivant et commentez.

Graphique 3-4 : IB Group.com en octobre 2002

**Exercice 3-8 : Echelon et Lagardère**

Reproduire le graphique 3-7 de la séance du 17 janvier 2007.

Exercice 3-9 : Fourchettes sur NSC ou UTP

En moyenne à Paris pour les titres du CAC40, sur l'année 2004, la fourchette aux instants de transaction est-elle plus forte, plus faible ou encore pas significativement différente des valeurs observées en dehors des transactions ? Bien sûr la même question peut être posée sur une période récente. Le travail ici demandé est plus complexe car il nécessite un dépouillement des données de CD-Roms d'Euronext et que le travail demandé concerne toutes les actions.

À défaut de faire les calculs, quelles hypothèses pouvez-vous formuler ?

Exercice 3-10 : Réservations sur Société Générale le 13 octobre 2008

Le fichier téléchargeable SG 20081013.xls comporte les données de transactions sur l'action Société Générale le 13 octobre 2008. A partir des données de transactions repérez les réservations sur le titre.

Exercice 3-11 : Discrétisation (arbitraire) d'un processus continu

À partir des données du 13 octobre 2008 pour la Société Générale, représentez sur un graphique, les cours de la séance, et les cours à la fin de chaque intervalle de 15 minutes puis de 30 minutes. Interprétez.

2. Corrigés (partiels) des exercices**Exercice 3-1 : Demsetz (1968, retour aux sources), corrigé**

À gauche S_i représente la courbe d'offre de titres (pour une vente immédiate), certains vendeurs peuvent accepter un délai avant l'exécution de

leur ordre mais en contrepartie d'un prix plus avantageux (droite S'_i)¹. De même les acheteurs pressés sont représentés par la droite de demande de titres (D_i) et les acheteurs acceptant un éventuel délai d'exécution le font en contrepartie d'un prix plus avantageux (plus faible) et sont représentés par la droite D'_i .

Avec Demsetz on constate alors les deux points d'intersection (toujours sur le graphique de gauche). Au point A_i (*ask price*) la rencontre entre les vendeurs patients et les acheteurs pressés et au point D_i (*bid price*), la rencontre entre les acheteurs patients et les vendeurs pressés.

La graphique 1 de Demsetz correspond donc tout à fait au graphique 3-4 (page 87), D'_i et S'_i y ont été dénommés acheteurs en carnet et vendeurs en carnet, ce sont les acheteurs et vendeurs patients, ceux qui sur un marché d'agence passeront leurs ordres à cours limité et se positionneront en carnet, visibles du public.

Le coût total de transaction pour un échange d'une quotié (100 actions) à un cours de 48\$ est de 1,3% selon Demsetz. Ce coût se répartit à 40% pour la fourchette (bid-ask spread) et 60% de courtage (commission brokerage).

Sur la figure de droite Demsetz envisage le cas d'une action pour laquelle une augmentation du niveau d'activité est constaté. Pour Demsetz il s'agit d'un facteur important de réduction de la fourchette de prix, via un déplacement des courbes d'offre et de demande.

Exercice 3-2 : Flash crash (éléments de corrigé)

1. Basis point : 100bp=1% =0,01; 500 BP=5%.
2. La profondeur c'est la quantité d'ordres en carnet. Sur le graphique on la voit s'effondrer. La profondeur aux meilleures limites est la quantité sur les deux meilleures limites = bidsize+asksize.
3. Net aggressive volume. Un ordre agressif est un ordre demandeur de liquidité (c'est aussi un ordre qui s'exécute sans délai, ou qui ne reste pas en carnet). Donc soit un ordre au marché ou un ordre à cours limité avec une limite égale à la meilleure limite.
4. En 2010, le 6 mai sur **tous les marchés** actions américains entre 2:40 et 3:00pm, 2 milliards d'actions pour 56 milliards \$ sont échangés.
5. Non. L'indicateur de liquidité a plusieurs facettes qui sont : la fourchette (coût de l'immédiateté), la profondeur (capacité à absorber des ordres agressifs) et la résilience (récupération de forme après déformation).

Exercice 3-10 : Réservations SG corrigé

Ces données correspondent à la séance du 13 octobre 2008, elles ont été téléchargées sur le site NYSE-Euronext (la séance du jour est téléchargeable en 'horodaté'), puis localisées dans un classeur excel qui comporte deux feuilles une pour les données horodatées de Société Générale et l'autre pour les données de l'indice Cac40 pour la même séance. Dans le champ HHMMSS seule l'heure figure. La première ligne de la feuille contient les noms de variables.

¹ “S’ shows the supply curve of asking prices for those who stand ready and waiting to sell to those who demand immediate servicing of their purchase orders”.

On propose ci après la prise en charge de ces données avec Mathematica. A l'importation, *Mathematica* va ajouter une date constante (fin 1899). Les données doivent être triées par valeur croissante du champ "n°" en ce qui concerne la feuille SG et par heure croissante sur la feuille CAC40. A cette époque une valeur d'indice était affichée chaque 30 secondes (toutes les 15 secondes maintenant) et 1073 valeurs d'indices sont disponibles sur cette séance. Société Générale a 35 555 observations sur la même séance. Ce sont des données de transactions assez désagrégées qui sont communiquées : à 9:02:02, de très nombreux cours identiques sont ainsi disponibles ils correspondent aux échanges en fixing.

L'exécution des deux commandes ci-dessous met dans la variable SG toutes les données de GLE et celles du CAC40 dans la variable CAC.

```
SG =
Import[
"http://www.dauphinefinance.com/106/Data106/SG%2020081013.xls",
{"Data", 1}]; (* Première feuille *)
CAC =
Import[
"http://www.dauphinefinance.com/106/Data106/SG%2020081013.xls",
{"Data", 2}];
```

Les deux variables ainsi créés sont des listes pour Mathematica (vous pouvez penser à des variables indicées ou à des matrices). La commande ci après donne les dimensions de la matrice qui comporte 35556 lignes et 4 colonnes.

```
SG//Dimensions
{35556,4}
```

SG comporte une en-tête en première ligne, de même CAC :

```
{First[SG], First[CAC]} (* première ligne, les en-têtes *)
{{HHMMSS, n°, SG, Volume}, {HHMMSS, Cac40}}
```

Ci après, on récupère les en-têtes de lignes dans les variables SGn et CACn (qui sont des listes également), on complète les dates en ajoutant le jour qui ne figure pas dans les données téléchargées, et on trie chronologiquement les données Société générale.

```
SGn = SG[[1]]; SG = Delete[SG, 1]; CACn = CAC[[1]]; CAC = Delete[CAC, 1];
SG = SG /. {{An_, mo_, jo_, he_, min_, sec_}, num_, cours_, qté_} →
  {{2008, 10, 13, he, min, sec}, num, cours, qté};
CAC = CAC /. {{An_, mo_, jo_, he_, min_, sec_}, cours_} →
  {{2008, 10, 13, he, min, sec}, cours};
SG = Sort[SG, #1[[2]] < #2[[2]] &];
```

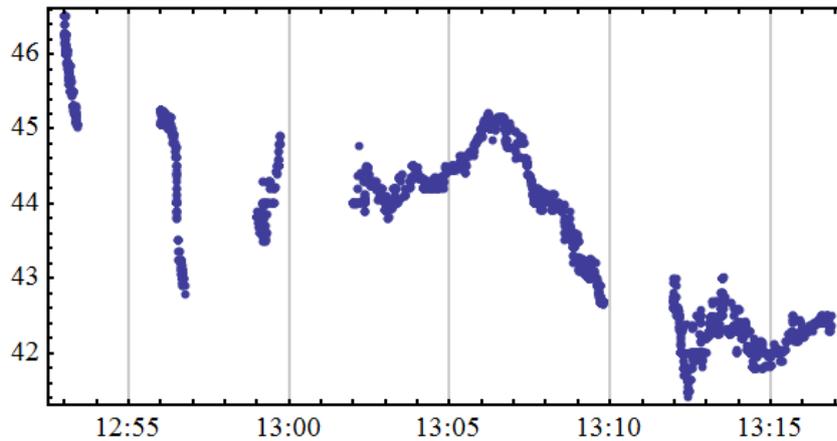
SG comporte maintenant une ligne en moins (l'en-tête a été supprimée). On a utilisé un modèle (*pattern*) pour remodeler les données. On utilise deux

commandes de Mathematica Delete et Sort qui apparaissent en noir. L'écriture `[[x]]` permet de cibler un ou des éléments dans une liste. La dernière ligne comporte des fonctions implicites (# et &). Ci après on crée une variable SGC qui comporte pour chaque transaction, la date et le cours.

```
In[98]:= SGC = Transpose[{Transpose[SG][[1]], Transpose[SG][[3]]};
```

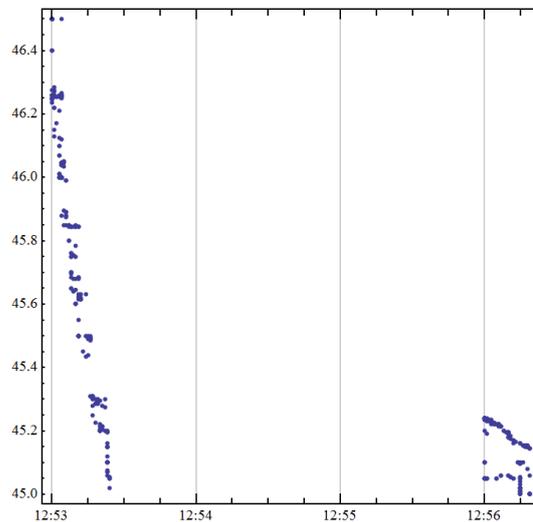
Un graphique (ci-après) permet de repérer des « trous de cotation », ici autour de 13 heures, le cours connaît de brutales variations à la baisse mais aussi à la hausse.

```
In[100]:= DateListPlot[SGC[[13 000 ;; 17 000]], PlotStyle -> Thick, AspectRatio -> 0.5,
BaseStyle -> {FontFamily -> Times, FontSize -> 10}]
```



Ces différents trous de cotations correspondent-ils à des réservations ? A vous de poursuivre les investigations ! Ci après un agrandissement sur l'arrêt puis la reprise de 12 :56.

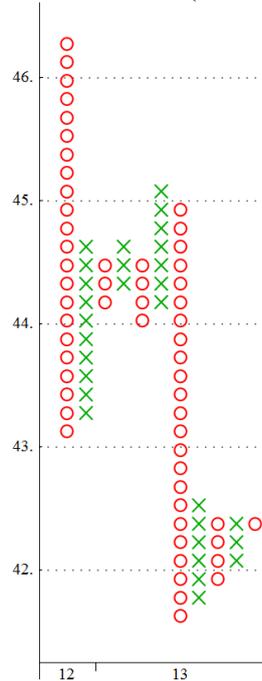
```
In[103]:= DateListPlot[SGC[[13 000 ;; 13 500]], PlotStyle -> Thick,
BaseStyle -> {FontFamily -> Times, FontSize -> 10}, AspectRatio -> 1]
```



Hors sujet. Le graphique point et croix (*point & figure*) grand classique (y compris à Paris notamment au 19^e siècle), remarquez en abscisse le temps ne s'écoule pas linéairement. On a fait le choix de représenter les hausses en vert par le symbole X et les baisses en rouge par le symbole O.

```
PointFigureChart[SGC[[13 000 ;; 17 000]], ChartElements -> "PointFigure",
  AspectRatio -> Automatic, TrendStyle -> {Darker[Green], Red},
  BaseStyle -> {FontFamily -> Times, FontSize -> 10},
  PlotLabel ->
  Text[Style["SG le 13 octobre 2008 (12:53 à 13:17)", Bold, FontSize -> 14]]]
```

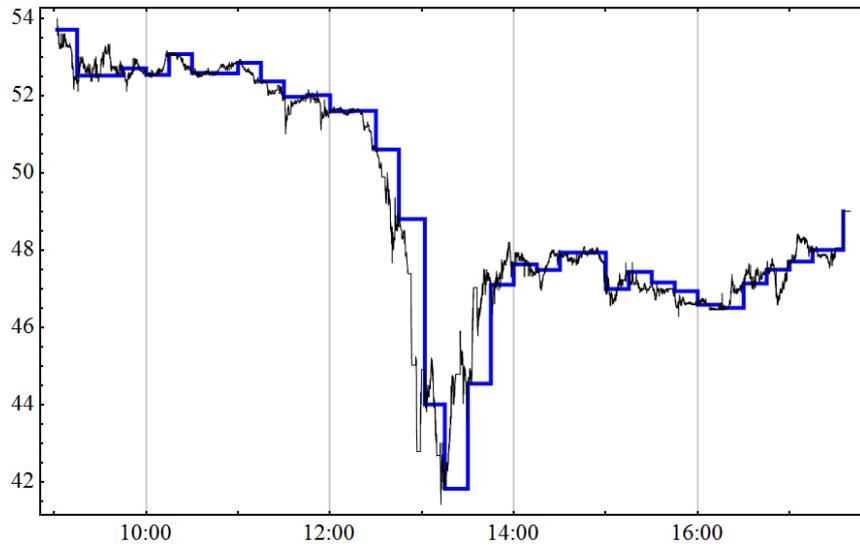
Cette commande permet d'obtenir le graphique ci après
SG le 13 octobre 2008 (12:53 à 13:17)



Exercice 3-11 : Discrétisation (arbitraire) d'un processus continu, corrigé partiel

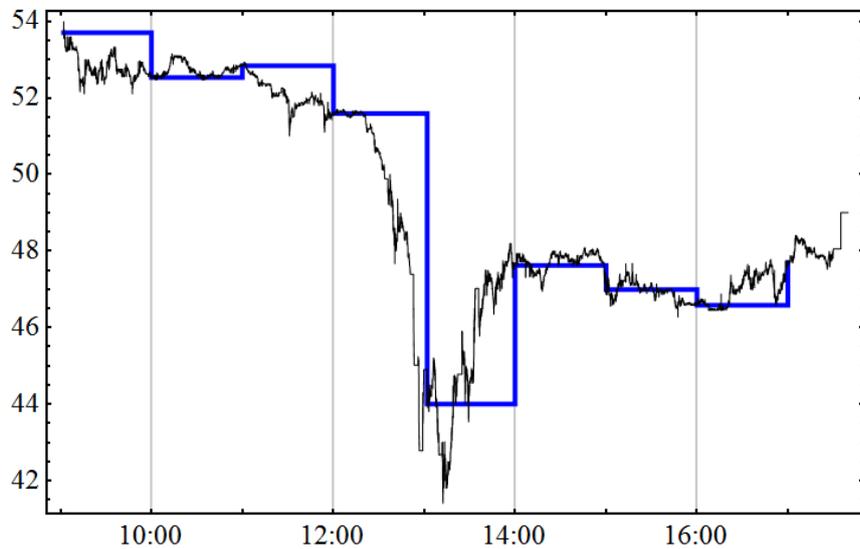
SG enregistre uniquement sur UTP à Paris ce jour là plus de 35000 transactions. La formation des prix obéit à un processus (presque) continu, contrarié par quelques trous de cotation (techniques, réglementaires).

Toutefois le plus souvent, lorsque ce type de données est utilisé, une valeur est extraite à intervalle de temps (arbitrairement choisi) plus ou moins fixe. Typiquement les cours de fin de séance largement repris sur les différents supports. Ici on demande de retenir le cours (le plus proche) de chaque fin d'intervalle de 15 minutes (défini arbitrairement). Ce que vous devez obtenir est ci dessus représenté pour toute la séance (de 9 heures à 17h30) :



Note : transactions de SG et cours de fin d'intervalle de 15 minutes, le 13 octobre 2008.

Sur le graphique ci-dessus, en bleu, la série des cours en fin de chaque intervalle, les points ont été rejoints en supposant constant le dernier cours connu, d'où l'effet d'escalier sur la graphique. L'autre trajectoire est construite avec les mêmes règles (points rejoints en supposant constant le dernier cours connu) mais compte tenu de la fréquence des transactions l'effet d'escalier n'est quasiment plus perceptible à l'œil.



Note : transactions de SG et cours de fin d'intervalle d'une heure, le 13 octobre 2008.

Ce que l'on constate, et qui apparaît encore plus net si le découpage de la séance est réalisé en tranches plus épaisses (1 heure sur le graphique ci dessus), c'est que la série « discrétisée » est sujette à deux biais : elle réagit avec retard et elle minore l'amplitude des fluctuations.

Retenir des cours quotidiens (au lieu de données horodatées) provoque un gaspillage d'information. De plus l'échantillon ainsi prélevé peut donner une vision biaisée de la population.

Bien sûr utiliser toutes les données pose d'autres problèmes (stockage, traitement, règles à définir lors de la comparaison de deux ou plusieurs séries). Il n'y a pas une solution universelle. Des compromis peuvent être trouvés et dépendent du type de questions que l'on se pose, du type de problème à résoudre.

Chapitre 4

Les indices d'actions

1. Énoncés d'exercices

Exercice 4-1 : Entrée-sortie du CAC40 (examen d'avril 2002)

Le conseil scientifique de l'indice CAC40 a décidé lors de sa dernière réunion que l'action Alstom serait remplacée à compter du mardi 2 avril 2002 par l'action Vinci. Le vendredi 29 mars 2002 (précédant le week-end pascal) en clôture de séance : la capitalisation de l'indice est de 884 286 873 003 € ; la valeur de l'indice est de 4 462,99 ; la capitalisation d'Alstom est de 2 978 808 588 € ; la capitalisation de Vinci égale 5 948 409 441 €.

Questions

1. Quel est le sens et la valeur de l'accident de capitalisation ?
2. Quelle est la valeur de la capitalisation boursière de base ajustée de l'indice à l'ouverture de la séance du mardi 2 (juste après le week-end pascal) – justifiez– ?

Exercice 4-2 : Indice et plafonnement des poids (examen d'avril 2001)

Progressivement, depuis 2000, Euronext a introduit des mécanismes de plafonnement du poids d'un titre donné dans ses différents indices. L'excès de poids est alors réparti sur les autres valeurs au prorata de leurs capitalisations respectives. La fréquence de révision des poids intervient tous les mois, après la clôture de la dernière séance du mois.

	Entreprise				
	1	2	3	4	5
Capitalisation	10 000	10 000	2 500	2 500	500

À titre d'illustration du mécanisme de plafonnement. Soit le cas simplifié d'un indice constitué de cinq entreprises dont les capitalisations sont données dans le tableau ci-dessus. Cet indice est calculé avec plafonnement à 25 % du poids d'un titre quelconque. On vous demande de calculer le poids de chaque

titre dans l'indice après répartition éventuelle de l'excès de poids de certains titres et de telle manière bien sûr à ce que la somme des poids soit égale à l'unité.

Exercice 4-3 : DJIA et la bulle ?

L'indice *Dow Jones* est passé pour la première fois au dessus de 1 000 le 14 novembre 1972, près de 80 ans après son lancement; alors qu'il a franchi 2 000 le 8 janvier 1987, soit à peine plus de 14 ans après. N'est-ce pas la preuve que la bourse est montée trop rapidement dans une période récente et qu'une bulle (surévaluation) s'était formée en 1987 ou peu avant ?

Exercice 4-4 : Le CAC40 et quelques indices associés

Téléchargez la dernière année de données quotidiennes (sur le site d'Euronext) concernant les indices suivants d'Euronext : CAC40, Xbear CAC40, Leverage CAC40, CAC40 Short.

1. Représentez graphiquement des évolutions des 4 indices
2. Commentez

Réalisez le même travail sur les périodes suivantes : 2008/2009 ; puis en 2011.

Exercice 4-5 : Flottant

Euronext en 2003 calcule le flottant en enlevant de la capitalisation boursière a) les actions en auto-contrôle « au sens de l'article 233-3 du code de commerce », ce qui ne concerne pas les actions auto-détenues ; b) les actions détenues par les fondateurs dans la mesure où ils exercent une influence sur la gestion ; c) les participations détenues directement ou non par l'État ; d) les actions dans le champ d'un pacte d'actionnaires ; e) les actions détenues par des personnes morales qui exercent un contrôle au sens de l'article 233-3 du code de commerce ; f) les participations de plus de 5% et jugées stables depuis 3 ans.

La définition du flottant par Euronext est-elle toujours la même en 2011 ? Et quelle est la définition du flottant retenue par Standard & Poor's ? Puis répondez aux questions suivantes :

1. Si plus de 10% du capital d'une entreprise cotée est détenu par une autre entreprise, cette participation est-elle comprise dans le flottant ? Donnez la réponse en appliquant la définition d'Euronext puis celle de Standard & Poor's.
2. Si plusieurs entreprises sans lien entre elles détiennent en cumulé plus de 10% du capital d'une entreprise cotée cet ensemble de participations est-il compris dans le flottant ? Donnez la réponse en appliquant la définition d'Euronext puis celle de Standard & Poor's.
3. Si les dirigeants et/ou fondateurs d'une entreprise détiennent collectivement plus de 10% du capital d'une entreprise, cette participation est-elle comprise dans le flottant ? Donnez la réponse en appliquant la définition d'Euronext puis celle de Standard & Poor's.

Exercice 4-6 : ITCac50

L'indice ITCAC50 des valeurs technologiques, vaut 3 657,05 fin mars 2000, lors de son lancement par Euronext.

1. Quelle est la valeur maximale de l'indice et à quelle date ?
2. Quelle est la valeur minimale de l'indice et à quelle date ?
3. Quelle sont la base de l'indice et la date de la base ?
4. Quelle est la valeur de l'indice fin juin 2003 ?

Exercice 4-7 : Biais du survivant

1. Pour quelle raison ne parle-t-on plus de l'indice du nouveau marché?
2. Y-a-t-il un biais du survivant à prendre en compte lorsque l'on utilise l'indice DJIA 30?

Exercice 4-8 : CAC41

Kering (anciennement PPR) est une action incluse dans l'indice CAC40 en 2013. Kering réalise en 2013 un *spin off* et cote séparément à la bourse de Paris la FNAC. Un actionnaire possédant 1 action Kering le 19 juin en clôture possèdera avant l'ouverture du 20 juin, 1 action Kering, un versement de dividende de 2,25€ (*cash dividend*) et un droit d'attribution d'action FNAC (*allotment right*). 8 droits étant convertis automatiquement en 1 action FNAC (*stock dividend*). Un actionnaire détenant 9 actions Kering le 19 juin détiendra donc 9 actions Kering, plus 9 fois 2,25 € de dividende en espèces, plus 1 action FNAC plus 1 droit d'attribution d'action FNAC.

Le nombre d'actions FNAC est de 16 595 610; le principal actionnaire est Artémis (38,8 % du capital le 20 juin 2013); 5 % des actions sont conservées par Kering pour des raisons techniques et seront mises sur le marché séparément. Le premier cours en ouverture le 19 juin est de 20,1 €; la capitalisation boursière de la FNAC est de 332 244 112 €. Le flottant de PPR et de la FNAC est le 19 juin de 60 %. Le 20 juin 2013, la FNAC est introduite à la Bourse de Paris. Euronext annonce à l'AFP, qu'exceptionnellement, l'indice CAC40 comportera 41 valeurs le jeudi 20 et le vendredi 21 juin. FNAC sort de l'indice CAC40 le lundi 24 juin 2013.

La capitalisation de base ajustée de l'indice (ou son diviseur suivant l'appellation actuelle d'Euronext), était de 191 695 324, 297767 avant la sortie de la FNAC de l'indice.

1. Ce type d'événement est-il fréquent ? s'est-il déjà produit ? (CAC à 41)
2. Quelle est la valeur du diviseur du CAC40 lors du passage à 41 ?

Exercices faisant appel à des données téléchargeables**Exercice 4-9 : Indices depuis 1871 (Amit Goyal)**

Amit Goyal sur son site web (<http://www.hec.unil.ch/agoyal/>) propose différentes données notamment mensuelles, cf. feuille de calcul suivante. <http://www.hec.unil.ch/agoyal/docs/PredictorData2012.xls>. Ces données ont été à l'origine utilisées dans un article publié en 2008 dans *Review of Financial Studies*.

À partir de ces données, représentez sur longue période l'évolution d'un placement en actions aux Etats-Unis en termes nominaux et en termes réels

Exercice 4-10 : Indices depuis 1871 jusqu'en 2014 (Robert Shiller)

Dans une feuille excel, les données de Shiller : www.econ.yale.edu/~shiller/data/ie_data.xls, permettent de tracer sur longue période des évolutions d'indices représentatifs de placements aux Etats-Unis. Représentez les évolutions des indices d'actions présents dans ce fichier.

2. Corrigé de certains d'exercices

Exercice 4-7 : Biais du survivant, corrigé

1. L'indice a disparu avec le nouveau marché et la performance enregistrée en 2001-2003 par les entreprises qui y étaient cotées.
2. La question est de savoir quelle utilisation on fait de l'indice. Si c'est pour avoir une idée du comportement de l'ensemble des titres cotés aux Etats-Unis, aucune entreprise du DJIA n'a été mise en faillite. Hasard? Sur l'ensemble des stés cotées ce n'est pas le cas. Discussion de Copeland, Weston & Shastri (CWS) p 172. Biais et surévaluation de la rentabilité?

Exercice 4-8 : CAC41, corrigé

Un précédent en 2010. Le CAC 40 a déjà par le passé comporté un 41e membre, le vendredi 2 juillet 2010, avec la scission du groupe Accor, qui avait vu l'introduction en Bourse d'Edenred.

L'intégration de FNAC dans l'indice CAC40 n'entraîne pas ici de modification du diviseur. En revanche le 24, le diviseur est ajusté (accident négatif lié à la sortie d'un titre), le nouveau diviseur de l'indice est 192 267 209, 249476 le 24 en ouverture de séance.

Après avoir perdu 13,64%, à son premier jour de cotation, le titre du distributeur de produits culturels recule de 1% en séance (300 mille titres échangés). Le premier jour de cotation, le cours de la Fnac se place en bas de la fourchette des estimations des analystes (300 à 500 millions d'euros). Les titres Fnac chutent de 1% en séance. Fnac subit le dégagement mécanique des fonds indiciels et des fonds spécialisés dans le luxe qui se débarrassent de leur actions. La perspective d'une cession progressive de la participation résiduelle de Kering (38,8% du capital) après le délai de blocage contractuel (*locking period*) pèse probablement sur les cours.

Chapitre 5

Fonds indiciel coté (FIC)

1. Exercices

Exercice 5-1 : UCITS, « 5/10/40 rule » et montage d'ETF

Pour être classé comme fonds UCITS, un fond européen doit-il respecter la « 5/10/40 rule » suivant laquelle les OPCVM ne peuvent concentrer plus de 5% de l'encours sur une valeur, avec dérogation(s) à 10%, la somme des poids en dérogation (>5%) ne pouvant être supérieure à 40% ?

Discutez des conséquences en matière de technique de montage du fonds, pour un ETF souhaitant pouvoir être classé UCITS dans le cas de la réplique d'un indice européen tel le CAC40 par exemple.

Quelle est la réglementation en la matière aux États-Unis ?

Exercice 5-2 : Montage d'ETF aux États-Unis

Précisez les modalités de montage. Donnez des exemples.

Exercice 5-3 : OPCVM, titres non listés et fonds indiciel

Les OPCVM peuvent-ils détenir des titres non cotés ou négociés sur des marchés non réglementés ? Un fonds indiciel composé de titres négociés sur un marché non réglementé est-il envisageable en France ?

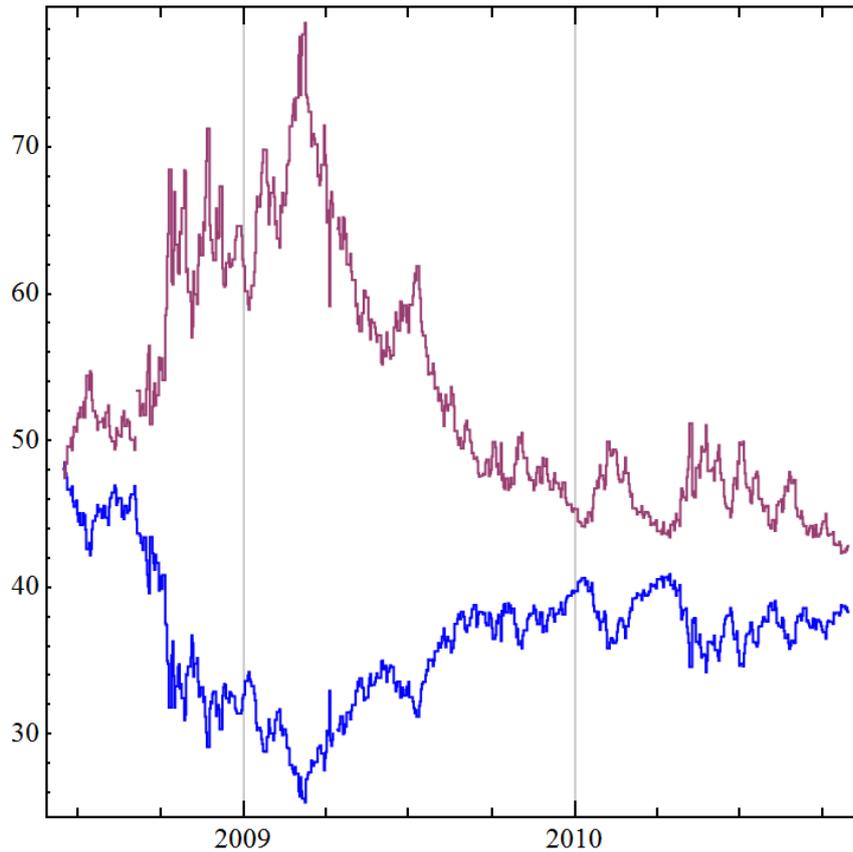
Exercice 5-4 : Les ETF sont-ils exposés au risque de crédit ?

Quelles sont les sources de risque de crédit pour les ETF ? Un ETF est-il toujours exposé ? Si le risque de crédit est présent peut-il être géré ? Et si oui comment ?

Exercice avec données à télécharger

Exercice 5-5 : ETF de Lyxor liés au CAC40

A l'adresse [http://www.dauphinefinance.com/106/Fichiers XLS 106/Cac40ETF Lyxor.xls](http://www.dauphinefinance.com/106/Fichiers%20XLS%20106/Cac40ETF%20Lyxor.xls)
 La feuille excel comporte les colonnes suivantes : "Date", "Cac40C", "Short", "Leverage", "Xbear", "Flexible", "Rshort", "Rleverage", "Rxbear", "Rflex"
 Le graphique ci après représente les évolutions de l'ETF CAC40 (en bas) et du Short CAC40 (en haut).



Sur ce graphique, l'ETF CAC40 a une valeur en fin de période inférieure à celle de début de période. Mais n'est-il pas étonnant que l'ETF short CAC40 ait lui aussi une valeur finale inférieure ?

1. Représentez graphiquement l'ETF CAC40 par rapport à chacun des autres ETF
2. Calculez les taux de rentabilité quotidiens (en anticipation du chapitre 7), puis représentez graphiquement des couples de taux de rentabilité entre l'ETF CAC40 et les autres ETF, Que constatez-vous ?

3. Retrouvez le document de présentation de l'ETF short de Lyxor. La définition donnée dans le document correspond elle aux observations faites ici ?

2. Corrigés des exercices

Exercice 5-1 : UCITS, « 5/10/40 rule » et montage d'ETF

Cette règle correspond à une obligation de diversification. Appliquée sans discernement elle interdirait une réplique physique de nombreux indices d'actions. Par exemple en 2012 l'action Total (première capitalisation de l'indice) a un poids d'environ 12% dans l'indice CAC40. L'indice CAC40 lui-même plafonne les poids à 15%, bien au-delà des 5% ou 10% de la règle énoncée. Cf. page 130.

En fait **cette règle (d'obligation à la diversification des fonds d'investissement) a été aménagée dès le lancement des ETF**. Selon le rapport annuel de l'AMF en 2001, au niveau européen, la directive autorise, pour les fonds visant à reproduire la composition d'indices reconnus, une dérogation aux règles traditionnelles de répartition des risques : il est possible d'aller jusqu'à 20 % de l'actif investi en une valeur (donc 5 lignes en portefeuille), voire 35 % dans des cas très exceptionnels. Si l'indice est reconnu par les autorités de régulation les contraintes sont encore élargies.

Pour les fonds d'investissement américains une obligation de diversification existe mais est calibrée différemment du cas français. La SEC impose que le poids maximum d'un seul titre du portefeuille ne dépasse pas 25%, que les 5 titres les plus lourds ne dépassent pas 60% et que la somme des poids des titres dépassant 5% n'excède pas 50%. Ce dernier volet est contraignant. Cette première catégorie semble similaire aux OPCVM français, en fait d'importantes différences notamment sur le plan fiscal les distinguent.

Certains ETF sont peu diversifiés, voire focalisés (matières premières ou devises) à la limite ils sont mono-produit (l'or, le palladium etc). Dans ce cas, le montage en Europe ne peut s'appuyer sur un fonds d'investissement de type OPCVM. Le montage peut consister à émettre une dette non subordonnée contre un engagement de payer la performance d'un panier de matières premières ou d'un taux de change après déduction de frais de gestion. La dette est négociée sur une plateforme, le terme *Exchange Traded Note* (ETN) correspond à ce montage initialement proposé par *Barclays Bank PLC*. Les ETC (C pour *Commodities* ou *Currencies*) ou ETV sont parfois structurés selon les mêmes principes. Le détenteur d'ETN est alors exposé à un risque de crédit qui toutefois peut être géré par l'ETF.

Exercice 5-2 : Montage d'ETF aux Etats-Unis

Les montages d'ETF aux États-Unis utilisent trois voies juridiques/réglementaires différentes : le *Unit Investment Trust* (UIT), le fonds d'investissement (*open-end* ou *Regulated Investment Company*) et le *HOLDR* ou *Grantor Trust*.

Le premier ETF monté en 1993 par *State Street* (le trustee) et toujours en vie est le Standard & Poors' 500, dit SPDR (mnémonique SPY) qui réplique le S&P500, SPDR est structuré comme un UIT (le terme ETT, T pour Trust, est utilisé par certains dans ce cas à la place d'ETF). Le fonds est monté avec une échéance (22 janvier 2118). Le prêt/emprunt de titre lui est interdit, il a obligation de gérer passivement (strict respect d'un portefeuille dont la composition fait l'objet d'un dépôt rectificable périodiquement), il réplique physiquement l'indice et détient les 500 valeurs, sans erreur de suivi. Il a obligation de verser les dividendes des actions chaque trimestre, les frais de gestion sont prélevés (0,08% annuel) sur les dividendes. C'est l'ETF d'indice d'actions ayant l'encours le plus élevé.

B2B Internet HOLDERS (mnémonique BHH) de Merrill Lynch, négocié par exemple sur le NYSE, est structuré comme un *Grantor Trust*, la composition du portefeuille est strictement fixe (les poids en pourcentages des titres varient donc avec les cours) il comporte uniquement 2 lignes dont une pèse 88% en 2010. Suivant le montage Grantor Trust, l'investisseur est le propriétaire des actions sous-jacentes détenues (conservées) par le fonds. Par exemple l'investisseur exerce le droit de vote sur les actions en portefeuille. Les transactions se font pour l'investisseur en quotité de 100. Les frais prélevés sont fixes par lot et prélevés par trimestre.

SPDR Gold Trust (GLD) de *State Street* est monoligne (l'or) avec réplification physique (stockage à Londres, HSBC est le custodian), présenté parfois comme un ETF (*Gold Shares is the largest physically backed gold exchange traded fund (ETF) in the world, cf www.spdrgoldshares.com*), se définit lui-même comme un ETG (marque déposée de State Street, G pour gold). Négocié sur NYSE-Arca et structuré comme un *Investment Trust*.

Exercice 5-3 : OPCVM et titres non listés

Les OPCVM doivent respecter certaines règles de composition telle que le « ratio poubelle » qui limite à 10% des encours la part du non coté et du non réglementé.

Depuis fin mars 2006 en France les actions négociées sur Alternext, qui est un MTF d'Euronext, ne sont pas décomptées dans les 10%. On peut donc imaginer un fonds indicial spécialisé sur des valeurs négociées sur ce marché.

Exercice 5-4 : Les ETF sont-ils exposés à un risque de crédit ?

Dans un montage d'ETF le risque de crédit peut être présent. Il est particulièrement évident pour un montage de type ETN (ou ETC ou encore ETV) mais n'est pas forcément absent d'un classique ETF. Lorsqu'il est présent, le risque de crédit peut être géré.

Le risque de crédit est lié à certaines techniques de montage ou à une activité de prêt de titres. Dans le premier cas il s'agit d'une réplification synthétique par un OPCVM ou bien des ETN dont le porteur n'acquiert pas des parts d'OPCVM mais des parts de dette non subordonnée émise par une entité (filiale de banque ou SPV par exemple) et il est alors sujet au risque de crédit de cette entité. Dans ce cas il n'y a pas de ségrégation des actifs détenus par l'entité pour le compte

de ses clients comme dans le cas d'une OPCVM. Dans le second cas, le risque de crédit se matérialise en conséquence du prêt des titres acquis par un fonds dans le cas d'un montage en réplique physique par exemple.

La structuration sous forme d'UIT (*Unit Investment Trust*) ou de *Grantor Trust* aux Etats-Unis, fait disparaître les risques de contrepartie. Ce type de structure est obligée de répliquer physiquement et exactement, n'a pas de droit de prêter les titres. Une séparation est réalisée entre les actifs de l'investisseur et le bilan de la société de gestion.

En Europe les ETF structurés comme fonds d'investissement (OPCVM) ont également obligation de faire appel à un conservateur extérieur. Il y a séparation entre la société de gestion et les actifs des investisseurs qui n'apparaissent pas dans son bilan et ne seraient donc pas affectés en cas de faillite de la société de gestion. Toutefois, un risque de crédit peut apparaître dans un montage ETF, lors du recours à certaines techniques de gestion. Dans le cas d'un ETF indiciel avec réplique physique, si le monteur fait appel au prêt/emprunt de titres, un risque de crédit apparaît. Dans le cas d'un ETF indiciel avec réplique synthétique, le risque de crédit est présent et lié à la qualité de signature de la contrepartie du swap de performance.

Les ETF labellisés UCITS peuvent être également soumis au risque de crédit, puisque des ETF avec prêt de titres ou montages synthétiques et même des ETF avec performance inversée ou effet de levier peuvent recevoir le label UCITS.

Chapitre 6

Les actions et les titres liés

1. Énoncés des exercices

Exercice 6-1 : CAC EXT

Nyse Euronext, annonce le 19 juin 2013, le lancement de CAC40 Ext, une réplique du CAC40 avec des horaires élargis d'une heure le matin et le soir (affiché de 8 h00 à 18 h30)

1. Puisque le marché des actions ouvre de 9 à 17h30, comment Euronext pourra-t-il afficher les valeurs de l'indice en dehors de ces plages horaires ?
2. A quoi cela sert-il ?

Exercice 6-2 : Ecart vertical sur CAC40 (I)

Les options sont évaluées avec une volatilité de 30 %, un taux sans risque de 3 % et une échéance à maturité de 120 jours, pas de dividendes attendus. L'indice CAC40 est à 4500. Construisez une position d'écart vertical à base de calls (vente à 4600 et achat à 4400). L'écart est-il débiteur ou créditeur ? Traduit-il des anticipations de hausse ou de baisse de l'indice ?

Exercice 6-3 : Ecart vertical sur CAC40 (II)

Les options sont évaluées avec une volatilité de 30 %, un taux sans risque de 3 % et une échéance à maturité de 120 jours, pas de dividendes attendus. L'indice CAC40 est à 4500. Construisez une position d'écart vertical à base de puts (vente à 4600 et achat à 4400). L'écart est-il débiteur ou créditeur ? Traduit-il des anticipations de hausse ou de baisse de l'indice ?

Et si l'écart est constitué en achetant à 4600 et en vendant à 440 les deux puts ? L'écart est-il débiteur ou créditeur ? Traduit-il des anticipations de hausse ou de baisse de l'indice ?

Exercice 6-4 : Indices VIX & S&P 500 en 2011

Représentez l'évolution des valeurs de l'indice VIX, puis de l'indice S&P500 sur l'année 2011. Calculez la volatilité de VIX (par fenêtre glissante de 40 séances) sur l'année 2011.

Début juillet 2011, on suppose que l'encours de votre portefeuille diversifié d'actions américaines est de 10 millions de \$. En reprenant la couverture proposée au chapitre 6 (reverse collar), quelle taille de position d'options suggérez-vous ?

Estimez la valeur du Call 25 (cf fin du chapitre 6) début septembre 2011 et celle du put 14. La valeur du portefeuille d'options et la valeur de la position couverte.

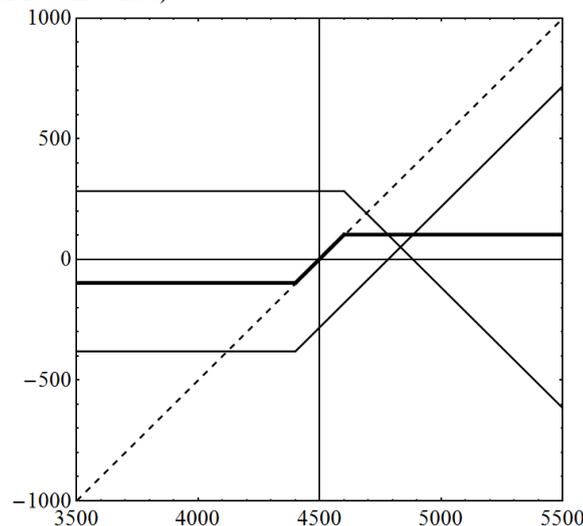
2. Corrigés des exercices**Exercice 6-1 : CAC EXT (corrigé)**

Le CAC EXT est établi à partir des transactions observées sur le **CAC40 index future**, sur lequel les cotations se déroulent de 8 h à 18 h15, puis de 18 h15 à 22 h, soit une amplitude horaire beaucoup plus forte que le CAC40. Le CAC40 Ext sera ajusté, pour tenir compte d'un réinvestissement des dividendes

NYSE Euronext indique que sa création répond à une forte demande de la part d'émetteurs de produits structurés qui se serviront du CAC40 Ext comme sous-jacent pour élargir la gamme de leurs offres commerciales. Il doit également permettre le développement du volume de transactions sur les produits dérivés.

Exercice 6-2 : Écart vertical à base de call, *bull call spread* (corrigé)

L'écart est débiteur (le prix payé pour le call acheté est supérieur au prix encaissé pour le call vendu).

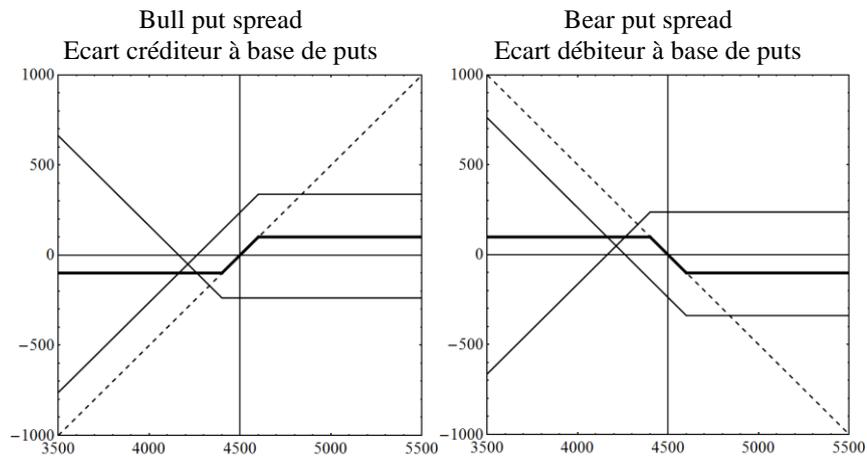


En traits fins les calls, en pointillé le support et en trait épais la position résultante. Le modèle Black-Scholes avec les données de l'énoncé donne une valeur de Call 4600 de 283,648 (vendu) et de call 4400 de 380,446 (acheté).

La position traduit des anticipations de légère hausse, avec une baisse envisagée contre laquelle un dispositif de couverture est mis en place. Les fortes hausses sont jugées peu probables (si elles interviennent un coût d'opportunité important est associé à la position, sous forme de gains abandonnés).

Exercice 6-3 : Écart vertical à base de put, *bull put spread* (corrigé)

La position résultante est (sur le papier au moins) la même que celle de l'exercice précédent, alors qu'elle est construite à base de puts. On note que la position est créditrice cette fois (ci-dessous à gauche).



Si la position est débitrice à base de puts (ci-dessus à droite), l'écart valorise des anticipations de baisse du support (*bear put spread*).

Chapitre 7

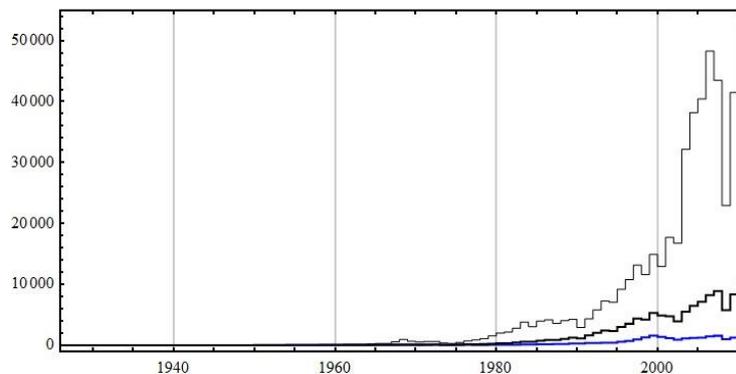
Le taux de rentabilité

1. Énoncés des exercices

Exercice 7-1 : NYSE de fin 1925 à fin 2010, les hausses sont-elles récentes ?

Le graphique suivant donne l'évolution de la valeur de trois ensembles d'actions cotées sur le NYSE, regroupées suivant l'importance de leurs capitalisations. L'ensemble des actions est réparti suivant leur capitalisation en dix groupes d'effectif identique. Le graphique retient les deux déciles extrêmes (les plus petites, courbe supérieure), les plus grosses (courbe inférieure) et le décile n° 5 (courbe intermédiaire).

Graphique 7-1 : Actions du NYSE de 1925 à fin 2010



Source : d'après Ibbotson, SBBI yearbook 2011 ; pour 1 \$ placé fin 1925.

Fin 1925, les trois indices valent 1, par construction. Le tableau suivant donne les valeurs des trois indices, fin 2010 ainsi que fin 1967, soit à peu près à mi-parcours.

Fin	Décile 1 (fortes capitalisations)	Décile 5	Décile 10 (très petites capitalisations)
1925	1,00	1,00	1,00
1967	35,89	91,34	576,26
2010	1 402,76	10 787,60	53 754,40

Les hausses ont-elles été plus importantes dans la deuxième moitié de la période ? Justifiez votre réponse.

Exercice 7-2 : Passage à l'euro

La bourse de Paris adopte l'euro au début de l'année 1999. Les cours antérieurs au 3 janvier 1999 sont exprimés en francs français (FF) et à partir du 3 janvier 1999 ils sont exprimés en euros. De quelle manière peut-on rendre les historiques de cours homogènes ?

Exercice 7-3 : Nymphéas

Le tableau « Le bassin aux nymphéas » de 1919 (1m X 2m) de Claude Monet a été vendu aux enchères à New York le 5 mai 1971 pour 320 000 \$. Le 24 juin 2008, aux enchères chez Christie's à Londres, le même tableau est vendu 40,9 millions de livres (51,7 millions d'euros). Le taux de change est de 0,508706.

1. Quel est le taux de rentabilité annualisé?
2. Discutez les limites de la comparaison avec le marché des actions

Exercice 7-4 : Trajectoires d'un cours

Une action a un taux de rentabilité attendu de 10%. À chaque période de un an, soit le cours monte de 30%, soit il baisse de 10% avec la même probabilité.

1. Retracer les trajectoires des cours sur deux périodes consécutives de un an.
2. Calculez la moyenne arithmétique des taux de rentabilité.
3. Calculez la moyenne géométrique des taux de rentabilité.
4. Quelle est la valeur de l'espérance de rentabilité? Interprétez.

Exercice 7-5 : Trois scénarii

Une analyse économique couplée à un sondage vous a permis d'établir les prévisions conditionnelles suivantes à trois mois.

Conditions économiques	Probabilité	E(R)
Normales	1/3	4%
Croissance réelle forte	1/3	30%
Stagflation (récession et inflation)	1/3	-10%

1. Quelle est l'espérance du taux de rentabilité du marché des actions?
2. Annualisez la réponse précédente.

Exercice 7-6 : Fonds d'investissement

Deux fonds d'investissement publient l'historique suivant de taux de rentabilité sur les cinq dernières années

	Fonds A	Fonds B
1	16 %	30 %
2	10 %	-10 %
3	14 %	28 %
4	2 %	17 %
5	4 %	-2 %

1. Quel est le taux de rentabilité annualisé sur la période de cinq ans ?
2. Quelle est la meilleure estimation du taux de rentabilité de la prochaine année (l'année six) ?
3. Discutez les limites et hypothèses sous-jacentes au calcul réalisé à la question 2.
4. Si les encours des deux fonds sont les suivants, cela modifie-t-il les réponses aux questions précédentes ?

	Fonds A	Fonds B
1	1	0,5
2	1,1	3
3	1,2	1
4	3	2
5	2,5	4

Exercice 7-7 : Emprunt à 10 % et placement à moins

1. Un emprunt de 10 000 € sur un an à 10 % amène à rembourser quelle somme au bout d'un an ?
2. En septembre 1626, Pierre Minuit, gouverneur de la *West India Company*, acheta l'île de Manhattan aux Indiens pour la somme de 60 guilders, soit l'équivalent de 24 dollars de l'époque pour une île de 31 miles carrés (Jorion et Goetzman, 1999). Quelle est la valeur des 24 \$ et des intérêts accumulés : À 3 %, À 5 %, 6 %, et 7 %, Commentez.

Exercice 7-8 : Contribution d'un titre à l'espérance de rentabilité d'un portefeuille

Le portefeuille p est composé de n actions. X_i est le pourcentage du patrimoine investi dans le titre i , avec la somme des poids égale à 100 %. Déterminez la contribution d'un titre i particulier à l'espérance de rentabilité du portefeuille.

Exercice 7-9 : Natixis, le tobogan et le petit porteur

Un investisseur souscrit à l'introduction en bourse de Natixis en novembre 2006 en vidant son livret (12 000 €). Toujours suivant l'avis de son conseiller financier, il souscrit début 2008 pour 5 000 € supplémentaires (pour « moyenner à la baisse » c'est-à-dire réduire le prix moyen d'acquisition, c'est du moins l'argumentation développée par son conseiller). Et enfin il souscrit à l'augmentation de capital en numéraire de septembre 2008.

Questions :

1. Représentez les cours bruts et corrigés de Natixis depuis son introduction.
2. Combien d'actions Natixis l'actionnaire possède-t-il fin 2009 ?
3. Quelle est à cette date la valeur de son placement ?
4. Estimez le taux de rentabilité annualisé fin 2009 ?
5. Quelles sont les possibilités de recours de l'actionnaire ? Peut-il joindre une action de groupe ? Quels griefs peut-il formuler ?

Exercice 7-10: Oxygène et Acétylène (I)

Le 21 juin 1982, Oxygène et Acétylène de l'Extrême Orient distribue une action gratuite pour 5 actions détenues. Le coefficient correcteur de cette opération d'incorporations de réserves est de 0,833. Le 15 novembre 1982 débute la période de souscription pour une augmentation de capital en numéraire à raison d'une nouvelle pour 9 anciennement détenues au prix d'émission de 200 FF et le coefficient correcteur associé à l'opération est de 0,911. Les actions nouvelles sont cotées séparément et assimilées le 20 janvier 1983. Un dividende net de 60F est détaché le 21 juin 1982. Divers autres cours sont donnés dans le tableau ci-après.

1. Calculez les cours et dividende corrigés.
2. Calculez le taux de rentabilité ajusté entre fin mars 1982 et fin mars 1983.
3. Représentez graphiquement les cours cotés et ajustés.
4. Calculez la série des cours ajustés pour les OST et « super ajustés » pour tenir compte du détachement de dividende.

Tableau 7-1 : Oxygène, cours cotés et dividendes

Date	Coefficient	Cours coté	Dividende
31 mars 1982	1	1 508	0
30 avril 1982	1	1 600	0
28 mai 1982	1	1 680	0
18 juin 1982	1	1 699	0
21 juin 1982	0,833	1 365	60
30 juin 1982	1	1 530	0
30 juillet 1982	1	1 549	0
30 septembre 1982	1	1 651	0
29 octobre 1982	1	1 850	0
14 novembre 1982	1	1 849	0
15 novembre 1982	0,911	1 750	0
20 janvier 1983	1	1 581	0
30 mars 1983	1	1 960	0

Exercice 7-11 : Rachat par Saint-Gobain de ses propres actions

Le Tableau 7-2 reporte les quantités (en dernière colonne) que Saint-Gobain a déclarées, à la COB, racheter de ses propres actions sur la période allant de début mars 2001 à fin octobre 2002. Par ailleurs on a reporté la quantité totale de titres Saint-Gobain échangés dans le mois sur le marché central d'Euronext Paris (sur NSC), le dernier cours coté du mois, les dividendes et coefficients

correcteurs de la période. On supposera qu'en juin 2002 les rachats sont faits entre le jour du détachement de dividende (le 24) et la veille de l'OST (du 27).

1. Peut-on dire que la quantité rachetée en octobre 2002 est supérieure à la quantité rachetée en mars 2001 ? Argumentez.
2. Déterminez les quantités équivalentes.
3. Les cours de rachat (non communiqués ici) doivent-ils être ajustés pour les rendre comparables dans le temps ? Et si oui, quelle procédure d'ajustement proposez-vous ?

Tableau 7-2 : Les rachats par Saint Gobain de ses propres actions

Date	Cours	Qté sur NSC	Divi- dende	Coef- ficient	Nb rachat	Qté rachetée
30 mars 01	160,0	6 877 949	0	1	9	147 998
30 avr. 01	170,1	5 940 273	0	1	6	80 050
31 juil. 01	167,4	7 363 786	4,3	1		
28 sep. 01	156,4	10 036 636	0	1	1	14 000
31 mai 02	189,2	7 809 989	0	1		
28 juin 02	45,3	14 369 820	4,5	0,25	2	31 746
31 juil. 02	29,8	66 167 979	0	1	14	2 322 000
30 août 02	31,2	51 271 380	0	1	14	1 998 363
30 sep. 02	23,3	44 379 340	0	1	16	777 801
31 oct. 02	21,6	72 895 836	0	1	1	178 000

Exercice 7-12 : Division d'Atos en 1999

Le « Décisions et Avis » des bourses françaises, n° 99-1109 en date du 22 mars 1999, est partiellement reproduit ci-après.

« L'assemblée générale mixte des actionnaires de la Société ATOS réunie le 25 février 1999 a décidé, aux termes de sa treizième résolution, de procéder à la division du titre, en ramenant la valeur nominale de 10 F à 5 F, le nombre des titres composant le capital constaté sur l'exercice clos le 30 septembre 1998 étant ainsi porté de 10 603 657 actions de 10 F nominal à 21 207 314 actions de 5 F chacune et le capital demeurant inchangé. Aux termes de cette résolution, la même assemblée générale a conféré tous pouvoirs au Directoire en vue de la réalisation de cette opération. Le Directoire, réuni ce même jour, a décidé de fixer au 24 mars 1999 la date à partir de laquelle la division des titres deviendra effective.

Cette opération sera effectuée d'office chez Sicovam SA par le doublement des soldes d'actions figurant au compte des affiliés à l'issue de la journée comptable du 23 mars 1999 et leur inscription en actions de 5 F nominal.

À partir du 24 mars 1999, admission sur le premier marché à règlement mensuel de 21 207 874 actions de 5 F nominal aux lieu et place des 10 603 937 actions de 10 F nominal actuellement admises. Les ordres non exécutés le 23 mars 1999 devront être renouvelés par la clientèle le 24 mars au matin, premier jour de cotation des actions divisées. Les ordres présents dans le système NSC seront éliminés le 23 mars au soir (...). Le nombre d'actions de 5F de nominal, jouissance 1er octobre 1998, (...) à la date du 24 mars 1999 est de 21 207 874. »

Questions

1. Définissez les termes suivants qui apparaissent dans le « Décisions et Avis » :

Assemblée générale mixte, Sicovam, Le capital, Le nominal, Doublement des soldes d'actions, Compte des affiliés, Système NSC, Premier marché à règlement mensuel, Jouissance 1er octobre 1998.

2. Quelle est la valeur du coefficient correcteur associé à cette opération?
3. À quelle date le coefficient s'applique-t-il?
4. Décrivez la procédure de correction des données boursières.
5. Quelles sont les valeurs du nombre de titres avant et après cette opération?
6. De combien la capitalisation boursière varie-t-elle sous l'impact de cette opération.

Exercice 7-13 : Actions gratuites de Clarins en 1999

Le «Décisions et Avis» n° 99-4559 présente une opération de capital de la société Clarins. Le cours de clôture du 25 octobre 1999 est de 105,5 €. L'avis est partiellement reproduit ci-après.

« Le Directoire, qui s'est réuni le 29 septembre 1999, a décidé d'incorporer au capital la somme de 134 375 000 FRF, prélevée sur les réserves donnant lieu à la création de 2 687 500 actions nouvelles qui seront attribuées aux actionnaires. À partir du 26 octobre 1999, attribution gratuite de 2 687 500 actions nouvelles de 50 FRF nominal, jouissance 1er janvier 1999, réparties aux propriétaires des 16 125 000 actions existantes, à raison de UNE action nouvelle pour SIX actions anciennes possédées. Si cette attribution laisse apparaître des rompus, les actionnaires devront faire leur affaire personnelle de toute acquisition ou cession de droits nécessaires pour obtenir la délivrance d'un nombre entier d'actions. Le droit d'attribution sera détaché le 26 octobre 1999 des 16 125 000 actions anciennes portant jouissance 1er janvier 1999. En conséquence : à partir du 26 octobre 1999, négociation des 16 125 000 actions anciennes en titres ex-droit à l'attribution d'actions gratuites.

En conséquence, le 25 octobre 1999, après la période d'ouverture du marché : les opérateurs RM qui auront une position acheteur en actions bénéficieront du droit à l'attribution d'actions gratuites ; les opérateurs RM qui auront une position vendeur en actions ex-droit d'attribution et en droits devront : en ce qui concerne les vendeurs ayant les titres sous dossier, livrer les droits correspondants aux acheteurs dans le délai de 3 jours de bourse suivant le 26 octobre 1999, soit le 29 octobre ; en ce qui concerne les vendeurs à découvert, racheter les droits correspondants sur le marché au comptant à partir du 26 octobre 1999 pour les livrer aux acheteurs.

À partir du 26 octobre 1999, admission sur la même ligne que celle affectée aux 16 125 000 actions anciennes ex-droit de 50 FRF nominal, jouissance 1er janvier 1999, négociables sur le premier marché à règlement mensuel, des 2 687 500 actions nouvelles gratuites de 50 FRF nominal, libérées et au porteur, jouissance 1^{er} janvier 1999.

À la suite de cette opération, le capital social de la Société CLARINS est porté à 940 625 000 FRF divisé en 18 812 500 actions de 50 FRF nominal négociables sur le premier marché à règlement mensuel (code Sicovam ** 13 029* - mnémonique CLR - code report AFC 87 054 - mnémonique RECLR).

Du 26 octobre au 27 décembre 1999 inclus, cotation du droit d'attribution sur le premier marché au comptant dans les conditions suivantes : fixage A, groupe

de valeur 33, code Sicovam ** 95087 *. Dès le 26 octobre 1999, le droit d'attribution sera admis dans la filière bourse des procédures de règlement/livraison RELIT. Les négociations seront compensées et garanties. Le 27 décembre 1999, à l'issue de la période d'ouverture du marché le droit d'attribution sera radié du premier marché au comptant. »

Questions

1. Définissez les termes suivants apparaissant dans le texte : Rompu, Droit d'attribution, Action ex-droit, Vendeur à découvert, Vendeur ayant les titres sous dossier, Fixage A, Les négociations seront garanties et compensées.
2. Qui bénéficie des actions gratuites? Quelle est la variation de la situation nette impliquée par cette opération? Quelle est la variation de la capitalisation boursière impliquée par cette opération? Que doit faire un actionnaire qui exerce ses droits?
3. Quelle est la valeur du coefficient correcteur associé à cette opération? À quelle date le coefficient correcteur s'applique-t-il?
4. Décrivez la situation patrimoniale et les choix offerts à un actionnaire détenant 10 actions Clarins avant l'opération.

Exercice 7-14 : Eurotunnel en 1993 et 1994 (*)

Eurotunnel procède à deux opérations de capital à l'origine de deux coefficients correcteurs en 1993 et en 1994. La première est une émission de bons de souscriptions autonomes distribués gratuitement aux porteurs d'actions (Décisions et Avis n° 93-1788). La seconde est une augmentation de capital en numéraire avec droits de souscription et différé d'assimilation (Décisions et Avis n° 94-1563 et 94-1788). L'étoile attribuée à cet exercice l'est en raison de la difficulté à trouver les informations. Sur le site web d'Euronext les cours ne sont désormais téléchargeables que pour la dernière année et les anciens « Décisions et Avis » ont été supprimés.

Questions

1. Retrouvez les « Décisions et Avis » détaillant ces opérations.
2. Définissez les termes suivants apparaissant dans ces avis : libérer intégralement; à titre irréductible; admission en promesse; dénouement en ligne à ligne; souscrire au pair; émission réservée.
3. Calculez le coefficient correcteur de l'attribution gratuite de bons jumelés à des unités à émettre de 1993.
4. En 1994, les opérations d'augmentation en numéraire avec droits et d'augmentation en numéraire réservée, nécessitent-elles une correction des cours? Si oui, précisez le mécanisme de correction.
5. Calculez la capitalisation boursière d'Eurotunnel le 1er juin, le 2 juin et le 15 juillet 1994.
6. Calculez et représentez les cours corrigés d'Eurotunnel en 1993 et 1994.

Exercice 7-15 : Oxygène et Acétylène (II)

Le 31 mars 1982 le nombre d'actions Oxygène admises à la cote est de 145 961, la valeur nominale est de 100 FF et le cours de 1 508 FF. Une distribution d'actions gratuites (1/5) est réalisée le 21 juin 1982. Le 15 novembre 1982 débute la période de souscription pour une augmentation de capital en

numéraire (1/9) au prix d'émission de 200 FF, en ouverture le cours est de 1 750 FF. La veille le cours était de 1 849FF. Les actions nouvelles sont cotées séparément et assimilées le 20 janvier 1983. Un dividende net de 60 FF est détaché le 21 juin 1982 et le cours coté le 30 mars 1983 est de 1 960.

Questions

1. Calculez les coefficients correcteurs des deux opérations de capital.
2. Calculez la capitalisation boursière aux différentes dates pour lesquelles un cours vous est indiqué.

Exercice 7-16 : Le NYSE de 1825 à 2004

À partir de 1926, www.Ibbotson.com présente des séries mensuelles fiables. De 1815 à 1925, Goetzmann, Ibbotson et Peng (2001) ont reconstitué des indices à partir de données individuelles téléchargeables à <http://viking.som.yale.edu/>. Un dollar investi en 1825 vaut 3 029 162,91\$ fin 2004 avec dividendes réinvestis (et 362,7 sans les dividendes, cf SBBI 2005, p. 209). La valeur maximale de fin d'année a été atteinte en 1999 avec 3 402 761,27 \$ avec dividendes réinvestis et 439,71 sans les dividendes. Ces données concernent les actions cotées de forte capitalisation. Quel est le taux de rentabilité moyen annualisé entre 1825 et 2004 à la bourse de New York, pour les actions de forte capitalisation?

Exercice 7-17 : Taux de rentabilité sur France Télécom

Dans le tableau ci-après, la première observation correspond au dernier cours de la séance du 1^{er} mars 2000 et les suivantes sont observées en fin de tranches de 15 minutes dans la séance du 2 mars 2000 (dernier plus haut enregistré).

Tableau 7-3: Une séance de France Télécom

Début tranche	Cours	Qté	Nb T	Début tranche	Cours	Qté	Nb T
17:00	175	139	85	13:15	194	34	191
09:00	185	537	2 191	13:30	195	40	262
09:15	186	152	568	13:45	194	42	267
09:30	186	114	487	14:00	194	46	256
09:45	186	92	345	14:15	196	76	403
10:00	189	207	626	14:30	196	86	345
10:15	190	399	658	14:45	195	80	322
10:30	189	85	331	15:00	195	95	302
10:45	191	114	427	15:15	196	176	307
11:15	196	307	1 111	15:30	197	196	440
11:30	194	219	449	15:45	195	91	388
11:45	195	86	407	16:00	198	180	639
12:00	196	208	415	16:15	201	131	588
12:15	195	82	247	16:30	211	373	764
12:30	197	59	267	16:45	210	496	776
12:45	196	126	243	17:00	219	226	316
13:00	195	49	198				

Les cours sont en euros. On a également reporté les quantités échangées (Qté) en milliers de titres et le nombre de transactions dans la tranche (Nb T). À cette date, France Télécom était la première capitalisation boursière d'Euronext.

1. Calculez le taux de rentabilité composé continu sur chacune des tranches de 15 minutes.
2. Pour quelle(s) raison(s) la mesure en taux composé continu est-elle adaptée à cette échelle de temps ?
3. Doit-on toujours préférer la mesure en taux composé continu, même par exemple, pour calculer des taux de rentabilité mensuels ?
4. Le nombre de transactions est-il élevé, comparable ou plus faible que celui observé sur les valeurs les plus échangées des marchés américains ? Pour quelles raisons ?

Exercice 7-18 : Taux de rentabilité sur France Télécom (II)

Le tableau 7-4 donne les cours de fin de mois et le nombre de titres échangés durant le mois (en milliers) de France Télécom. Un dividende de 1 € est détaché en juin 1999.

Tableau 7-4 : France Télécom sur un an

Date	Cours	Quantité échangée
30 avril 99	77,1	37 089
31 mai 99	72,7	28 117
30 juin 99	74	32 108
30 juil. 99	67,4	35 743
31 août 99	73,9	33 836
30 sept. 99	78,25	40 671
29 oct. 99	89	42 854
30 nov. 99	117	40 944
30 déc. 99	127	39 291
31 jan. 00	133	41 856
29 fév. 00	165,1	39 863
31 mars 00	177	52 341

1. Calculez les taux de rentabilité discrets mensuels.
2. Déduisez des taux mensuels discrets, les taux continus exprimés en unité annuelle.

Exercice 7-19 : Alcatel 1999-2000 en données quotidiennes

Tableau 7-5 : Alcatel en 1999-2000, évolution du nombre d'actions émises

De (inclusive)	Jusqu'à (exclus)	Nb d'actions
11 sept. 98	4 févr. 99	198 681 246
4 févr. 99	30 juin 99	198 710 296
30 juin 99	26 janv. 00	198 714 596
26 janv. 00	18 mai 00	206 632 020
18 mai 00	22 mai 00	206 648 635
22 mai 00	26 mai 00	1 033 243 175
26 mai 00	30 mai 00	1 129 355 399
30 mai 00	13 juil. 00	1 131 355 399
13 juil. 00	18 juil. 00	1 137 018 483
18 juil. 00	24 juil. 00	1 139 244 934
24 juil. 00	31 déc. 99	1 140 556 484

Le tableau 7-5 donne le nombre d'actions d'Alcatel admises en bourse entre septembre 1998 et juillet 2000.

La liste des cours d'Alcatel (code Isin FR0000130007) en mai 2000 est reproduite dans le tableau 7-6. Ce sont les cours tels qu'ils ont été cotés en ouverture et clôture de séance, sans retraitement. Deux dividendes nets sont détachés le 30 juin 1999 (pour 2 €) et le 18 mai 2000 (pour 2,2 €).

Tableau 7-6 : Les cours et volume d'Alcatel en mai 2000

Date	Nb actions	Cours	Date	Nb actions	Cours
4-janv.-99	784	108	16-mai-00	5 003	286,7
.....	17-mai-00	6 432	293,8
02-mai-00	8 014	260	18-mai-00	4 308	286,8
03-mai-00	5 754	253,6	19-mai-00	8 342	276,3
04-mai-00	18 749	259,8	22-mai-00	3 960	53
05-mai-00	20 578	281	23-mai-00	6 440	52,5
08-mai-00	8 144	298	24-mai-00	10 310	50,4
09-mai-00	10 664	295,1	26-mai-00	6 399	50,55
10-mai-00	7 215	285,8	29-mai-00	5 572	54,1
11-mai-00	7 844	268	30-mai-00	7 668	56,85
12-mai-00	4 327	280	31-mai-00	10 644	60
15-mai-00	2 981	280			

Note : le nombre d'actions échangées dans la séance est en milliers et le cours est le premier de chaque séance.

On lit dans le quotidien édité par la Bourse de Paris «*Décision et Avis*», n° 2000-2059 : «*L'assemblée générale mixte des actionnaires de la Société ALCATEL réunie le 16 mai 2000 a décidé, aux termes de sa seizième résolution, de procéder à la division du titre, en ramenant la valeur nominale des actions de 10 euros à 2 euros, le nombre de titres composant le capital sera ainsi porté de 206 648 635 actions de 10 euros nominal à 1 033 243 175 actions de 2 euros chacune, le capital demeurant inchangé. La date à partir de laquelle la division des titres deviendra effective a été fixée au 22 mai 2000. Cette opération sera effectuée d'office chez Sicovam SA par la multiplication par cinq des soldes d'actions figurant aux comptes des affiliés à l'issue de la journée comptable du 19 mai 2000 et leur inscription en actions de 2 euros nominal. À partir du 22 mai 2000, admission sur le premier marché à règlement mensuel de 1 033 243 175 actions de 2 euros nominal au lieu et place des 206 648 635 actions de 10 euros nominal actuellement admises. Le nombre d'actions de 2 euros nominal, jouissance 1er janvier 2000, de la société ALCATEL négociables sur le premier marché à règlement mensuel à la date du 22 mai 2000 est de 1 033 243 175, représentant le montant du capital social de 2 066 486 350 euros*».

1. Un téléchargement de cours sur le site d'Euronext donne une série différente de cours. Ainsi le cours du 4 janvier 1999 (téléchargé sur le site Euronext) est de 21,6 en ouverture, au lieu de 108 effectivement coté ce jour-là. Expliquez la différence.

2. Calculez les taux de rentabilité quotidiens du 17 au 24 mai 2000.
3. Quelle est la variation de cours ajustée du 4 janvier 1999 à fin mai 2000? Faites le calcul en taux discret et en taux continu.
4. Annualisez les résultats obtenus à la question précédente.
5. Calculez la capitalisation boursière d'Alcatel le 4 janvier 1999 et le 12 mai 2000.-
6. Les données téléchargeables sur le site d'Euronext tiennent-elles compte des dividendes?

Exercice 7-20 : Renault et les autres (avril 1999 à mars 2000)

Vous disposez des taux de rentabilité mensuels de 3 indices édités par Euronext (CAC40, IT50 et STOXX) et de 4 actions cotées sur Euronext-Paris. Les données couvrent la période de début avril 1999 à fin mars 2000.

Tableau 7-7 : Trois indices et 4 actions d'avril 1999 à mars 2000

	CAC40	IT 50	StoXX	FTE	Renault	Ingénico	ST Gob
01-avr-99	1,4%	-2,0%	2,4%	-12,7%	-24,8%	0,7%	2,2%
03-mai-99	6,2%	6,0%	6,1%	3,4%	21,3%	7,0%	12,5%
01-juin-99	-2,1%	2,0%	-3,9%	-3,2%	-7,3%	-5,0%	-5,5%
01-juil-99	6,6%	7,8%	5,3%	1,2%	18,3%	4,6%	3,2%
02-août-99	-6,2%	-2,6%	-5,3%	-10,9%	13,5%	-7,6%	5,1%
01-sept-99	6,6%	4,7%	3,1%	11,7%	6,1%	6,7%	9,0%
01-oct-99	-0,4%	3,3%	-2,2%	10,1%	-1,7%	2,8%	-3,4%
02-nov-99	6,2%	9,4%	7,0%	11,7%	-3,2%	-5,6%	-6,3%
01-déc-99	9,1%	30,3%	9,6%	24,8%	-11,0%	24,9%	0,9%
03-janv-00	13,3%	38,4%	12,6%	17,3%	10,4%	76,2%	13,5%
01-févr-00	-5,4%	6,7%	-3,8%	-0,1%	11,4%	43,8%	-22,2%
01-mars-00	10,0%	41,5%	6,8%	30,0%	-22,4%	152,8%	-0,8%
31-mars-00	-0,5%	-16,2%	1,4%	2,3%	2,4%	-38,9%	-6,7%

L'indice IT50 comportait principalement des entreprises technologiques cotées à Paris. Cet indice a été lancé en mars 2000, et supprimé courant 2005.

1. Calculez la moyenne des taux de rentabilité de chaque titre ou indice.
2. Calculez le taux de rentabilité d'un portefeuille composé de 20% de Renault, 40% d'Ingénico, 20% de Saint-Gobain et 20% de FTE. Même question avec une structure de poids différente : 40%, 10%, 40% et 10%. Même question avec une pondération par les capitalisations boursières respectives.

Exercice 7-21 : Apple's split, 2014

Apple annonce, fin avril 2014, une division d'actions (date ex le 9 juin 2014) à raison de 7 actions pour une anciennement détenue.

1. Quel est le coefficient correcteur ?
2. Le cours de clôture du 6, juste la veille de la date ex, est de 645,57\$, quel est le cours théorique d'ouverture du 9 ?
3. Quel est le taux de rentabilité de la séance du 9 (de la clôture du 6 à la clôture du 9 ?

4. Quelles sont les raisons avancées par Apple pour la réalisation de cette division ?
5. Si Apple n'avait jamais réalisé de divisions quel serait aujourd'hui son cours en bourse ?
6. Quelles sont les conséquences patrimoniales pour l'actionnaire qui aurait souscrit 100 actions à l'introduction sur le Nasdaq ?

Exercice 7-22 : Taux discret, taux continu et équation différentielle

On note P la trajectoire du cours. Montrez que $P'(t) = r \times P(t)$, r est le taux de rentabilité et trouvez la solution de cette équation différentielle.

Exercice 7-23 : Meriter à chef de terme

Trenchant (1557) introduit les intérêts composés et énonce (français de l'époque, retranscrit sans altération) « *L'argent qui merite à chef de terme, s'augmente par progression geometrique* » (page 302, édition de 1602).

Quel est le sens et justifiez la phrase suivante :

« *En l'an 1555, Le Roy Henry pour fes affaires de guerre, prenoit argent des banquiers à raifon de 4 pour cent par foyre : c'est meilleure condition pour eux, que 16 pour cent par an* » (page 307)

Quel est le sens de la phrase suivante (page 303) :

« *il eft fouuent befoing de calculer pour plusieurs annees les interefts, & interefts d'interefts à raifon du denier douze, c'eft de 12 faire 13, ou 8 1/3 pour 100* »

Exercice 7-24 : Option de remboursement anticipé au gré de l'emprunteur (Henri II, prêt de l'an 1555).

Trenchant (1557) écrit en français de l'époque, retranscrit sans altération « *En ce même an, auant la foyre de la Touffaincts, il reçeut auffi par les mains de certains banquiers la somme de 3954641 ecuz & plus, qu'ils apeloient le grand parti :en condition qu'il payeroit à raifon de 5 pour cent par foyres, iufques à 41 foyre ou payement qu'il demoureroit quitte de tout :affauoir laquelle de ces conditions eft meilleure pour les banquiers ?* » page 307.

Conseils de traduction : u et v inversés, f pour s parfois, i pour j !, pratique différente de l'accent, par exemple lire aussi au lieu de auffi, jusque au lieu de iufques, à savoir au lieu de affauoir !

1. Quel est le prix proposé pour l'option de remboursement anticipé ?
2. Quelle est la conclusion suggérée par Trenchant : le client doit-il choisir avec ou sans la clause de remboursement anticipé (au gré du porteur) ?
3. Que faudrait-il connaître pour évaluez l'option de remboursement anticipé au gré de l'emprunteur, à quelle condition retrouve-t-on la conclusion de Trenchant ? Comment analyse-t-on, en 2014, ce type de produit ?

2. Corrigés (partiels) des exercices

Remarque générale sur certaines propriétés utilisées dans plusieurs des exercices. En fin du chapitre 7 (Hamon, 2014), les trois premières démonstrations (page 198) rappellent les propriétés de l'opérateur espérance.

- *Données téléchargeables*

Les 9 premiers exercices de ce chapitre ne font pas appel à des données très volumineuses. Pour certains exercices, à partir du 7-10, le volume de données peut impliquer des traitements fastidieux, ces données sont regroupées dans un classeur excel téléchargeable de nom v4c7.xls (sous l'adresse <http://dauphinefinance.com/106/data106>). Ce classeur comporte différentes feuilles, dans l'ordre indiqué dans le tableau ci-après.

Feuille n°	Exercice	Données relatives à
3	7-10	Oxygène et acétylène
4	7-11	Rachat d'actions Saint Gobain
5	7-12	Atos, décisions & avis
6	7-13	Clarins, décisions & avis
7	7-14	Eurotunnel (décision & avis)
8	7-17	France télécom, données en séance
9	7-18	France Télécoms données mensuelles
10	7-19	Alcatel
11	7-20	Renault et les autres 1999-2000

Vous pouvez importer ces données en utilisant excel. Sous Mathematica l'importation des données, par exemple de la feuille n° 3, est réalisée avec la commande suivante (une ligne de commande) :

```
OX = Import["http://www.dauphinefinance.com/106/Data106/V4C7.xls", {"Data", 3}];
```

OX est une liste qui comporte, après l'exécution de la commande, toutes les données de la feuille n° 3.

Exercice 7-2 : Passage à l'euro (corrigé)

Toutes les données seront converties en euros. On associe au 3 janvier 1999 une OST avec un coefficient correcteur de 0,152 (1/6,55957) à tous les titres cotés. La correction se fait en amont de l'OST en multipliant tous les cours et les dividendes antérieurs (qui étaient exprimés en FF) par le coefficient.

Exercice 7-6 : Fonds d'investissement (corrigé)

Comment les taux de rentabilité ont-ils été calculés ? Deux hypothèses sont envisageables : des taux discret versus des taux composé en continu. La démarche s'inspire de la réflexion menée en cours sur l'évaluation de la richesse de fin de période et son lien avec les taux de rentabilité périodiques.

L'appréciation de la rentabilité peut être réalisée dans l'objectif de mesurer l'habileté du gérant. Dans ce premier cas on peut estimer la rentabilité en

agrégeants les taux de rentabilité des périodes élémentaires (cf. réponses aux questions 1 et 2, *Time Weighted Return TWR*). Mais il est également possible de prendre le point de vue de l'ensemble des investisseurs et dans ce cas il est nécessaire de prendre en compte les capitaux investis (*Dollar Weighted Return, DWR*), c'est-à-dire les apports de fonds et les retraits intermédiaires. Ce deuxième thème est traité par exemple par Radcliffe (1997, p 172-178) et développé par Feibel (2003).

Il est possible que les apports nets soient liés aux rentabilités passées. Un passé récent flateur peut inciter certains investisseurs à confier leurs économies à un gérant. Si le gérant est chanceux (plutôt qu'habile), une forte rentabilité une année donnée n'est pas une garantie de forte rentabilité l'année suivante et dans ce cas la rentabilité pondérée par les capitaux investis donnera un résultat très différent (inférieur). Une autre raison, dans l'hypothèse d'un gérant effectivement habile, est liée à un problème d'illiquidité. Une stratégie de niche (adaptée à un encours d'1 mrd) peut être complètement saturée et voir sa rentabilité s'effondrer si les montants investis augmentent.

1. Tout d'abord, on suppose (pourquoi pas ?) que ce sont des taux de rentabilité « discrets », c'est-à-dire que $r_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$. À partir d'une valeur initiale de 1 (une autre valeur ne changerait ni le raisonnement, ni le résultat), la valeur finale est estimée à 1,54308 pour le fonds A (produit de 100 par (1,16) ... (1,04)). La valeur finale sur fonds B est de 1,7172. La **moyenne géométrique** des taux de rentabilité s'exprime $\sqrt[5]{1,54308} - 1 = 0,0906$ (9,06%, fonds A) et 11,42 % (fonds B). La moyenne géométrique donne la réponse demandée (*Time Weighted Return, TWR*). Une autre hypothèse est possible. Si les taux de rentabilité communiqués sont des **taux composés en continu** (*compound return*), il convient alors de les traduire en taux discrets puis d'appliquer la démarche précédente. Le calcul des moyennes arithmétiques des taux de rentabilité (9,2% pour le fonds A et 12,6% pour le fonds B) ne donne pas ici la réponse.
2. L'estimation est obtenue par les moyennes géométriques (*Time Weighted Return, TWR*).
3. Le passé se reproduit-il? Ici l'historique est court pour une estimation fiable. Mais surtout il faudrait connaître les encours et leur évolution dans le temps. Les calculs ici supposent un encours constant, sinon il serait plus représentatif (du point de vue de l'ensemble des clients des deux fonds) de pondérer les taux de rentabilité par les encours.
4. Les encours sont supposés connus en début de période. Ainsi au début de l'année 1, le fonds A dispose de 1 milliard d'euros, la rentabilité de 16% sur un an amène une valeur de fin de période (sans retrait ni apport) de 1,16 milliard. On constate un retrait net de $1,16 - 1,1 = 0,06$ que l'on comptabilise en fin d'année 1, ou au début d'année 2. On repère ainsi les flux annuels de souscription et de retrait, en supposant qu'ils sont ponctuels et concentrés aux changements d'année (faute d'information plus précise).

$$1 - \frac{2.6}{(1 + \text{TIR})^5} - \frac{0.56}{(1 + \text{TIR})^4} + \frac{1.632}{(1 + \text{TIR})^3} - \frac{0.01}{(1 + \text{TIR})^2} - \frac{0.06}{1 + \text{TIR}}$$

Ci-dessus pour le fonds A et ci-dessous pour le fonds B

$$0.5 - \frac{3.92}{(1 + \text{TIR})^5} + \frac{1.66}{(1 + \text{TIR})^4} + \frac{0.72}{(1 + \text{TIR})^3} - \frac{1.7}{(1 + \text{TIR})^2} + \frac{2.35}{1 + \text{TIR}}$$

La valeur de TIR qui annule les polynomes ci-dessus est de 7,20759% (pour le fonds A) et de 3,73% pour le fonds B.

	Fonds A			Fonds B		
	Encours	Cap fin	Apport net	Encours	Cap fin	Apport net
0			1			0,5
1	1	1,16	-0.06	0,5	0.65	2.35
2	1,1	1,21	-0.01	3	2.7	-1.7
3	1,2	1,368	1.632	1	1.28	0.72
4	3	3,06	-0.56	2	2.34	1.66
5	2,5	2,6	-2.6	4	3.92	-3.92

Exercice 7-7 : Emprunt à 10 %, placement à moins (corrigé)

- Si le taux de 10 % est un taux continu, et que le contrat prévoit une composition en continu des intérêts dus au capital, le remboursement au bout d'un an sera de $10000 \times e^{0.10} = 11051,7$ et le taux discret dans ce cas est de 10,517 %. Si le taux de 10 % est un taux discret ou bien si le contrat prévoit (on peut rêver) le calcul des intérêts en fin de période sans composition des intérêts intermédiaires, alors la somme à rembourser est de 11 000.
- Manhattan, calculs fait en 2011, 386 années après. $P_{i,2011} = 24 \times e^{R_c \times 386}$

Taux	Valeur au bout de 386 années
0%	24
1%	1 139
2%	54 071
3%	2 566 500
4%	121 819 845
5%	5 782 221 743
6%	274 455 186 716
7%	13 027 111 872 500
8%	618 336 442 349 575

C'est une machine infernale! (le phénomène d'accumulation est étonnant mais attention ici sur 386 années, avec un risque de défaut supposé nul et des conditions régulières et constantes sur cette période qui couvre de nombreuses générations !). Mais avant d'affirmer que les indiens ont fait l'affaire du millénaire, il faut répondre à la question : « comment être absolument sûr de toucher 5 ou 6 % par an pendant 386 ans et de pouvoir les réinvestir aux mêmes conditions » ? Les coûts de gestion et de transaction (et la fiscalité) sont à considérer et la dimension de risque ne peut être ignorée sur un laps de temps aussi long.

Exercice 7-9 : Natixis, le tobogan et le petit porteur (corrigé)

- Rappel du contexte et détail des modalités de l'augmentation de capital*

Natixis est une banque d'affaires issue de la fusion entre les Caisses d'Épargne et les Banques populaires. Le prix de l'action est de 19,55 euros. Première cotation le jeudi 7 décembre 2006. Plus de 2,8 millions de particuliers souscrivent. Une OPO avec option de surallocation exercée en totalité. Code ISIN FR0000120685, mnémonique KN.

Une perte nette de 948 millions d'euros est constatée au premier semestre 2008. Natixis a enregistré 3,9 milliards d'euros de dépréciations d'actifs depuis le début de la crise financière. Une recapitalisation est annoncée mi-juillet. Une augmentation de capital de 3,6 milliards d'euros, à un prix d'émission de E=2,25 euros (1 643 729 997 actions nouvelles, 1,6 € de nominal et 0,65 € de prime d'émission). Les maisons mères de Natixis, les groupes Banque Populaire et Caisse d'Épargne (CNCE et BFBP), qui détiennent ensemble 69,8 % (du capital et 70,28 % des droits de vote), se sont engagées à souscrire à l'augmentation de capital à hauteur de leur participation par voie de compensation des créances accordées à Natixis au premier semestre. Soit à peu près 2,5 mrds € déjà dépensés (0,698 fois 3,6), il reste 1,08 mrds d'apport en numéraire attendu à supposer que tous les titres soient souscrits. Le solde (30,2 % de l'offre) de l'augmentation de capital est garanti par un syndicat bancaire dirigé par Natixis en qualité de coordinateur global et composé de Lazard Frères Banque, Crédit Suisse et Merrill Lynch. Le contrat de garantie peut être résilié sous certaines conditions. Les deux actionnaires majoritaires s'engagent dans ce cas à souscrire les actions éventuellement restantes.

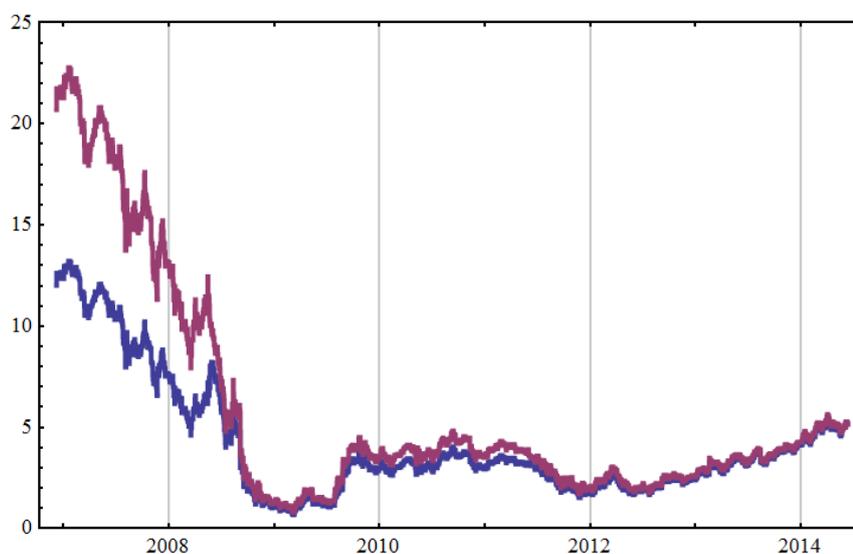
Le choix des actionnaires individuels est le suivant : soit ils ne souscrivent pas et se retrouvent dilués (le prochain bénéfice à distribuer sera divisé en un plus grand nombre de titres), soit ils souscrivent mais doivent pour ce faire déboursier le prix d'émission. Le prix d'émission des actions nouvelles représente une décote de 61 % par rapport au cours de clôture du titre de mercredi soir le 3, à C = 5,84 euros à la Bourse de Paris, mais de 41 % pour les anciens actionnaires, qui bénéficient d'un droit préférentiel de souscription dont la valeur théorique est de 2,03 euros, souligne la banque de gros de l'Ecureuil et des Banques Populaires. Chaque actionnaire actuel pourra souscrire 13 actions nouvelles pour 10 actions détenues. La souscription est organisée du 5 au 18 septembre. Les actions nouvelles sont émises le 30 septembre (ce qui correspond à la date d'assimilation). Le cours le 4 en clôture est de 5,7 €. En ouverture du 5, le cours est de 3,5 et de 3,58 en clôture.

Question 1 : représentation graphique des évolutions de cours

Le graphique ci-dessous fait apparaître la série des cours super-ajustés (courbe inférieure en bleu) et la série des cours bruts tels qu'ils ont été cotés jour après jour. Le super-ajustement tient compte des opérations de capital (le sujet de cet exercice) et d'un réinvestissement des dividendes détachés.

Pour obtenir le graphique ci-dessus plusieurs possibilités. Les données peuvent être téléchargées à partir d'un site tel que Yahoo ! La solution proposée ici utilise Mathematica. La commande suivante (à taper sur une ligne input)

```
DateListPlot[{FinancialData["PA:KN", {2006, 12, 7}],
  FinancialData["PA:KN", "RawClose", {2006, 12, 7}], Joined -> True,
  PlotRange -> {Automatic, {0, 25}}, InterpolationOrder -> 0, PlotStyle -> Thick,
  BaseStyle -> {FontFamily -> Times, Small}}
```



Suffit à mémoriser l'historique de données de Natixis (identifiée par PA:KN) à partir de son introduction en bourse jusqu'à la veille de l'exécution de la commande et à tracer le graphique.

Toutefois ici l'énoncé demande d'ajuster le cours pour tenir compte des OST mais pas de les ajuster pour tenir compte des dividendes.

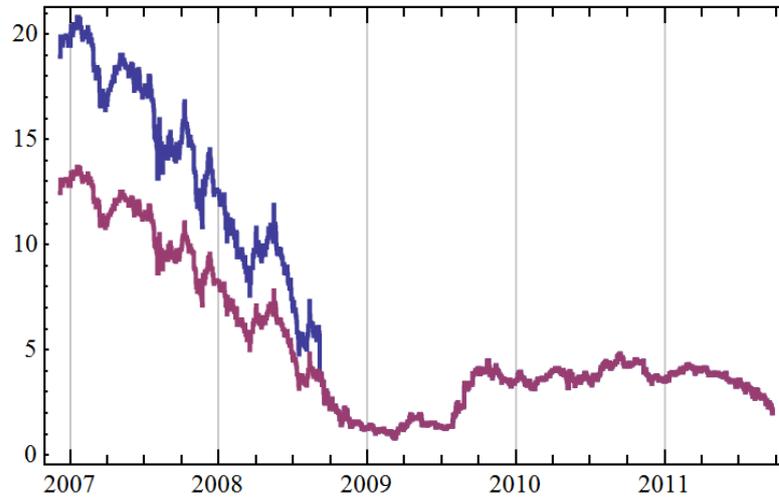
On télécharge la série non ajustée (*RawClose* ou *RawOpen*). On corrige les cours et dividendes antérieurs en les multipliant par le coefficient correcteur. Le coefficient est de 0,658 suivant le calcul détaillé ci-dessus. Euronext publie les coefficients (cf la feuille excel, onglet « PM market events », zone *Price adjustments*, intitulée *Euronext Paris factbook Paris 2008* sur son site). Sur le site Euronext les cours quotidiens de Natixis téléchargeables sont eux corrigés (le cours de clôture du 4 sept est affiché à 3,75). L'OST se produit (date ex) le 5 septembre 2008 qui est le 455^e cours après l'introduction en bourse. Sous Mathematica, on enchaîne les 5 commandes suivantes :

```

Coef = Table[0.658, {454}];
Coef = Flatten [AppendTo[Coef, Table[1, {Length[KN] - 454}]]];
CB = Transpose[KN][[2]]; Demar = Transpose[KN][[1]]; CC = CBCoef;
DateListPlot[{KN, Transpose[{Demar, CC}]}, Joined -> True,
InterpolationOrder -> 0, PlotStyle -> Thick, BaseStyle -> {FontFamily -> Times,
FontSize -> 12}]

```

Et on obtient (avec une exécution le 25 septembre 2011). On remarque qu'un seul décrochement est observé entre les deux séries à la date ex de l'OST, contrairement au graphique précédent (ou des décrochements supplémentaires étaient enregistrés aux détachements de dividendes).



La série corrigée est la série inférieure sur la partie gauche. Elle est confondue avec la série des cours effectivement cotés après l'OST, puisque la correction est réalisée en amont. Même en version corrigée, le tobogan est impressionnant. En octobre 2010 Natixis entre dans le CAC40 (!) puis en sort en septembre 2011.

Question 2

Les flux doivent être précisément identifiés. De multiples sources d'informations permettent d'obtenir ces deux dividendes et les dates associées. Pour obtenir les dividendes sous Mathematica, la commande

```
FinancialData["PA:KN", "Dividend", {2006, 9, 1}]
```

Renvoie la réponse suivante .

```
{{{2007, 5, 30}, 0.86}, {{2008, 5, 28}, 0.45}}
```

On doit gérer deux comptes : un compte titre et un compte livret (aspect espèces, encaissement des dividendes et gestion des rompus de manière à prendre en compte l'indivisibilité de l'action : l'achat porte sur 1 ou 2 mais ne peut porter sur 1,53 actions).

Le nombre d'actions achetées à l'introduction en bourse est de 613 (12 000/19,55), le solde (15,85€) est mis en livret. En janvier 2008, 398 actions supplémentaires sont achetées, le reste des 5000€ rejoint le livret. Le livret encaisse les dividendes de 2007 (527,18€) et de 2008 (454,85€).

En septembre 2008, l'actionnaire souscrit à titre irréductible 13 pour 10, soit 1 313 actions supplémentaires payées 2,25€ chacune (c'est le prix d'émission). L'actionnaire possède donc 2 324 actions Natixis fin 2009.

Question 3

La valeur du placement en actions fin 2009 est de 8 250,2 (le cours est de 3,55€). Il convient de tenir compte de l'argent accumulé sur le livret. Il y a les rompus, les dividendes encaissés, mais aussi le montant du prix d'émission qu'il a fallu décaisser en septembre 2008. Le solde est négatif fin 2009 et ressort à -1 955,86€. Au total l'investisseur a apporté 12 000 € puis 5 000 € et enfin

1 955,86 €, pour obtenir un compte titre dont la valeur (marquée au marché) est de 8 250,20 € fin 2009.

Question 4

Il semble clair que l'investisseur a perdu de l'argent, mais combien? Et quel est le taux de rentabilité annualisé? Pour répondre, il faut pondérer par le temps écoulé et par les montants investis : ce n'est pas la même somme investie en permanence de 2006 à 2009. Par ailleurs, il faut tenir compte des flux sur deux comptes : le compte titre et le compte livret.

Le tableau ci-après recense les flux et leurs dates, le temps écoulé (en années) entre chaque flux et la date initiale du placement est également reporté (fonction DaysBetween avec Mathematica).

Date	Temps écoulé	Flux (€)
{2006,12,7}	0	-11984.2
{2007,5,30}	0.47619	527.18
{2008,1,1}	1.06732	-4994.9
{2008,5,28}	1.47236	454.95
{2008,9,5}	1.74603	-2274.75
{2009,12,31}	3.06513	8250.2

Le taux de rentabilité noté r est celui qui annule la somme des flux actualisés, il est la solution de l'équation suivante :

$$-11984.15 + \frac{8250.199}{(1+r)^{3.0651}} - \frac{2274.75}{(1+r)^{1.7460}} + \frac{454.95}{(1+r)^{1.4723}} - \frac{4994.90}{(1+r)^{1.0673}} + \frac{527.18}{(1+r)^{0.4761}} = 0$$

Le taux est de (fonction Reduce sous Mathematica) $-26,91\%$. C'est un taux interne de rendement que l'on évalue ici.

Question 5.

Il n'y a pas (en 2011) de procédures d'actions de groupe (class-action) en France. Chaque actionnaire s'estimant lésé devra saisir la justice et avancer les frais notamment d'avocats. Certaines associations d'actionnaires tentent de mettre en commun certains moyens, ainsi régulièrement l'ADAM (avec Colette Neuville), ou certaines personnes tel que M. Géniteau organisent des actions en justice dont certaines ont été gagnantes.

Le reproche ici pourrait être un défaut d'information sur les risques potentiels d'un tel placement fait par par exemple quelqu'un n'ayant jamais acheté d'actios en bourse et ayant vidé son livret pour investir. Jusqu'à présent l'histoire montre que ce type de plainte a toutefois très peu de chances de prospérer devant les tribunaux français.

En ce qui concerne Natixis, suivant l'AFP, le 24 sept 2010 : *Une information judiciaire concernant l'introduction en Bourse en 2006 de Natixis a été ouverte à Paris, à la suite d'une plainte d'actionnaires s'estimant lésés. L'information a été confiée au juge du pôle financier du tribunal de grande instance de Paris et*

visé notamment les chefs de « diffusion d'informations trompeuses » et « présentation de comptes inexacts ». Introduit à un cours de 19,55 euros, le titre Natixis n'en vaut que 4,26 aujourd'hui. En mars 2009, un plus bas à 76 centimes avait été enregistré. Reportez-vous également à l'article de Libération du 18 mars 2009 intitulé « Comment les petits porteurs de Natixis se sont fait avoir ».

Exercice 7-10 : Oxygène et Acétylène I (corrigé)

Deux opérations de capital sont enregistrées sur cette période. Le coefficient correcteur est égal au rapport entre le cours théorique de l'action nouvelle et le cours de l'action ancienne.

Une division d'actions est un remodelage du capital sans social que l'on supposera sans conséquences sur la valorisation de l'entreprise. Ainsi la capitalisation boursière doit-elle être la même un instant avant et un instant après l'opération. La division est réalisée en bourse à un instant précis, en ouverture d'une séance (à la date ex). Si la capitalisation est supposée inchangée alors que le nombre d'actions change il s'en suivra une variation brutale du cours (valeur en bourse d'une action). Cette variation ne traduit pas un effet richesse, puisque la valeur du portefeuille de chaque actionnaire ne sera pas affectée.

Tableau 7-8 : Oxygène, cours et dividendes corrigés

Date	Coefficient		Cours		Dividende			P*
		produit	Coté	corrigé	net	corrigé	$\Pi[1+(D/P)]$	
31 mars 82	1	1,0000	1 508	1 508,00	0	0,00	1,000	1 508,00
30 avr 82	1	1,0000	1 600	1 600,00	0	0,00	1,000	1 600,00
28 mai 82	1	1,0000	1 680	1 680,00	0	0,00	1,000	1 680,00
18 juin 82	1	1,0000	1 699	1 699,00	0	0,00	1,000	1 699,00
21 juin 82	0,833	0,8330	1 365	1 638,66	60	72,03	1,044	1 710,68
30 juin 82	1	0,8330	1 530	1 836,73	0	0,00	1,044	1 917,47
30 juil 82	1	0,8330	1 549	1 859,54	0	0,00	1,044	1 941,28
14 nov 82	1	0,8330	1 849	2 219,69	0	0,00	1,044	2 317,26
15 nov 82	0,911	0,7589	1 750	2 306,08	0	0,00	1,044	2 407,45
20 janv 83	1	0,7589	1 581	2 083,38	0	0,00	1,044	2 174,96
30 mars 83	1	0,7589	1 960	2 582,81	0	0,00	1,044	2 696,34

Rappel (ce n'était pas demandé puisque les coefficients étaient fournis). Pour chaque opération sur titres (OST), le coefficient est égal au rapport entre le cours théorique de l'action nouvelle et le cours de l'action ancienne. C est le cours de l'action ancienne, N le nombre d'actions avant, n le nombre d'actions nouvelles et E le prix d'émission.

Pour l'incorporation de réserves, le cours théorique est $\frac{N \times C}{N+n} = \frac{5C}{5+1}$, et le coefficient correcteur est $\frac{5C}{6} \times \frac{1}{C} = \frac{5}{6} = 0,8333$.

Pour l'augmentation de capital en numéraire, le cours théorique est $\frac{N \times C + n \times E}{N+n} = \frac{9C+200}{9+1}$, et le coefficient correcteur est $\frac{9C+200}{9+1} \times \frac{1}{C}$. C est égal à 1 849

(cours la veille du détachement qui se produit toujours en ouverture de séance). D'où un coefficient égal à 0,910817.

1. Les cours corrigés et les dividendes corrigés (en aval) figurent dans le tableau ci-dessus. La présentation du tableau reproduit celle qui pourrait être adoptée dans une feuille de calcul d'un tableur. On remarque le produit des coefficients correcteurs du haut vers le bas, qui facilite une procédure de correction en aval. La valeur par défaut du coefficient est 1. Le produit des deux coefficients correcteurs est de 0,7589. De manière à ce que le cours de fin de période soit comparable à celui de mars 1982, on le divise par le produit des coefficients associés aux OST survenues entre les deux dates, soit $1\ 960/0,7589=2\ 582,81$.

2. Le taux de rentabilité sur l'année avec correction en amont des cours et dividendes s'exprime ainsi :

$$R_{82-83} = \frac{1960 + (60 \times 0,911) - (1508 \times 0,911 \times 0,833)}{1508 \times 0,911 \times 0,833} = 76,05\% .$$

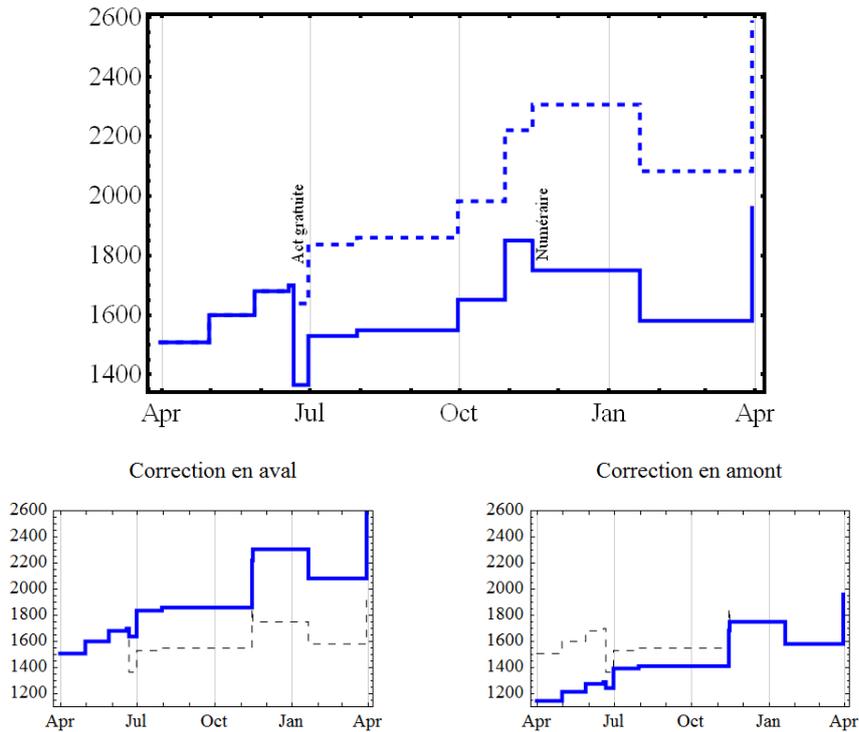
Le cours de référence est en fin de période, on ajuste tous les cours et dividendes antérieurs aux OST. Le cours de début de période est ajusté pour les deux OST. Le taux de rentabilité avec correction en aval des cours et dividendes

$$\text{s'exprime ainsi : } R_{82-83} = \frac{\frac{1960}{0,911 \times 0,833} + \frac{60}{0,833} - 1508}{1508} = 76,05\% .$$

Le cours de référence est celui du début de période. On ajuste tous les cours et dividendes postérieurs aux OST. Que la correction soit faite en amont ou en aval, le taux de rentabilité (correctement calculé) est identique. On remarque toutefois que l'application de cette démarche évalue le taux de rendement par rapport au cours de début de période et non pas par rapport au cours coté au détachement précis du dividende.

3. Sur le graphique 7-2 (trait épais les cours cotés, trait pointillé la trajectoire corrigée) on visualise les deux « décrochements » de cours associés aux deux OST. L'objectif de la correction, ici réalisée en aval, est de rendre comparables les cours avant et après.

En bleu (trait épais) la trajectoire corrigée. Elle a la même allure sur les deux graphiques, seules les valeurs d'ordonnée changent. Avec une correction en amont (graphique de droite) les valeurs les plus récentes ne sont pas rectifiées ce sont celles que le marché a affichées. Avec une correction en aval (graphique de gauche), ce sont les valeurs les plus anciennes qui ne sont pas modifiées. Les taux de rentabilité calculés à partir de l'une ou l'autre série (correction en amont ou en aval) seront identiques.

Graphique 7-2 : Oxygène en 1982-1983 (correction en aval)

4. Le cours super-ajusté prend en compte l'impact des OST et des détachements de dividendes. On suppose le dividende réinvesti à son détachement. Le dividende ajusté ou corrigé (c'est-à-dire divisé par le produit des coefficients correcteurs en date de détachement, soit 0,8330) de 72,03 représente le 21 juin 1982 une fraction de 4,4% du cours (ajusté) de l'action ex-dividende qui est de 1 638,66. On ajuste en aval de la distribution en multipliant les cours par le produit de 1 plus le taux de rendement. Et on obtient la dernière colonne du tableau.
5. Une autre démarche (non demandée dans l'énoncé) évalue le taux de rentabilité annuel, demandé à la question 2, à partir des cours ajustés pour les OST et le détachement du dividende (la série P*), on obtient $2\,696,34 / 1\,508 - 1 = 78,80\%$. Le taux de rentabilité peut également être

$$R_{82-83} = \frac{1960}{0,911 \times 0,833} \times \left(1 + \frac{60}{1365} \right) - 1 = 78,80\%$$

décomposé comme : $\frac{1960}{1508}$. Le résultat est cette fois-ci (légèrement) différent, car il suppose un réinvestissement au détachement.

Exercice 7-11 : Rachat par Saint-Gobain de ses propres actions (corrigé)

L'énoncé indique un coefficient correcteur de 0,25 le 27 juin 2002. On retrouve effectivement (internet) les caractéristiques de l'opération sur titres (OST) du 27 juin 2002 : il s'agit d'une division par 4, qui multiplie le nombre des actions en circulation sans modifier la valeur du capital. Il s'agit d'un pur effet quantité. 1 000 actions rachetées avant équivalent à 4 000 après. En mars 2001, 147 998 et en octobre 2002 178 000. L'effet est accentué par la nette baisse du cours en fin de période.

Les quantités postérieure (ou contemporaines) de l'OST sont multipliées par 0.25 pour une correction en aval. Ou bien celles antérieures sont divisées par 0.25 pour une correction en amont.

Il est important soit de raisonner en termes de quantité ajustée échangée (ou rachetée), soit en termes de valeur échangée :

Date	Cours	Qté sur NSC millions	Valeur échangée millions	Dividende	Coefficient	Nb rachat	Qté rachetée brute	Qté rachetée corrigée
30 Mar 2001	160.	6.87795	1100.47	0.	1.	9.	147998	591 992.
30 Apr 2001	170.1	5.94027	1010.44	0.	1.	6.	80 050	320 200.
31 Jul 2001	167.4	7.36379	1232.7	4.3	1.		0	0.
28 Sep 2001	156.4	10.0366	1569.73	0.	1.	1.	14 000	56 000.
31 May 2002	189.2	7.80999	1477.65	0.	1.		0	0.
28 Jun 2002	45.3	14.3698	650.953	4.5	0.25	2.	31 746	31 746
31 Jul 2002	29.8	66.168	1971.81	0.	1.	14.	2 322 000	2 322 000
30 Aug 2002	31.2	51.2714	1599.67	0.	1.	14.	1 998 363	1 998 363
30 Sep 2002	23.3	44.3793	1034.04	0.	1.	16.	777 801	777 801
31 Oct 2002	21.6	72.8958	1574.55	0.	1.	1.	178 000	178 000

Il est évidemment plus simple de raisonner en termes de valeur échangée et non pas de quantité.

Exercice 7-12 : Division d'Atos en 1999 (corrigé)

Le fait de travailler avec des données de 1999 peut être vu comme un exercice d'archéologie financière. En fait, certains thèmes restent (ici celui des divisions d'actions) ; de plus, le travail en profondeur sur historique de données le plus long possible est une préoccupation effective des gestionnaires de portefeuilles lorsqu'ils réalisent des *backtesting* de modèles ou méthodes. Dans ce cas, être capable de mettre les mains dans le cambouis des données est inévitable et utile.

Question 1 :

Les « Avis et Décisions » : ils sont repris par les quotidiens financiers, on les trouve sur le site de la SBF où ils **étaient** téléchargeables au format pdf. Ils concernent la vie des titres et l'organisation et la réglementation du marché.

- *Assemblée générale mixte* : c'est une assemblée ordinaire et extraordinaire
- *Sicovam* : société interprofessionnelle de compensation des valeurs mobilières, a fusionné en 2000 avec Euroclear
- *Le capital* mentionné est le capital social qui est égal au produit de la valeur nominale de l'action par le nombre de titres émis

- *Doublement des soldes d'actions* : les titres sont dématérialisés pour les porteurs français avec inscription obligatoire depuis 1984 en Sicovam. Chaque actionnaire a un compte titre qui est mouvementé lors des achats ventes ou ici lors de la division.
- *Compte des affiliés* : tous les actionnaires n'ont pas un compte à la Sicovam mais leurs représentants tels que les intermédiaires, banques ou sociétés de bourse.
- *Système NSC* : nouveau système de cotation, a succédé au système CAC (cotation assistée en continu) a été remplacé par UTP en 2010. C'est le logiciel qui gère à l'époque le carnet d'ordres et réalise la rencontre de l'offre et de la demande.
- *Premier marché* : le premier marché regroupe les valeurs les plus liquides et les plus fortement capitalisées cotées sur NSC. Cette distinction a disparu depuis.
- *à règlement mensuel* : le règlement mensuel est un marché avec règlement livraison en fin de mois. La liquidation marque le changement de mois boursier. Système spécifiquement français. A été modifié en septembre 2000 et remplacé par le SRD (système à règlement différé)
- *Jouissance 1er octobre 1998* : repère le début de l'exercice au titre duquel l'action nouvelle pourra percevoir son prochain dividende.
- *Code report* : les positions acheteur ou vendeur en règlement mensuel peuvent être reportées sur le mois boursier suivant. Le marché des reports est traité sur NSC et les codes report identifient chaque titre du RM pour lesquels une offre et demande pourront s'exprimer. Modifié en septembre 2000 et la mise en place du SRD.

Question 2

Quelle est la valeur du coefficient associé à cette opération? Le coefficient correcteur d'une division d'actions est égal à l'inverse du rapport de division soit ici 0,5

Question 3

A quelle date le coefficient s'applique-t-il? C'est à la date ex, ici le 24 mars 1999

Question 4

Décrivez la procédure de correction des données boursières

La correction peut être réalisée en amont de l'opération : tous les dividendes et cours antérieurs au 24 mars 1999 seront multipliés par le coefficient correcteur de 0,5

La correction peut être réalisée en aval de l'opération : tous les dividendes et les cours du 24 mars 1999 et après, seront divisés par le coefficient correcteur de 0,5

L'une ou l'autre des procédures de correction permet de rétablir la continuité dans les séries. On remarque la nécessité de corriger les dividendes car si la masse de dividendes versés (en €) reste constante après une division, le dividende par action devra être réduit.

Question 4 bis (non posée)

Les volumes de transaction devraient, *ceteris paribus*, être multipliés par deux à partir de l'opération d'Atos, dans l'hypothèse où l'opération laisse inchangée les capitaux échangés. Bien sûr dans ce cas les volumes (nombre de titres échangés dans un intervalle de temps donné) doivent aussi être corrigés.

Le site de la Bourse de Paris donne la possibilité de télécharger des données de cours : ces données sont ajustées pour tenir compte des OST avec coefficient correcteur. La procédure de correction en amont étant appliquée. La profondeur d'historique disponible ne remonte pas toutefois à 1999. Essayez Yahoo !, Mathematica ou Reuters bien sûr.

Question 5

Quelles sont les valeurs du nombre de titres avant et après cette opération?

Le capital comprend 10 603 657 actions de 10F avant et 21 207 314 actions de 5F après.

Question 6

De combien la capitalisation boursière varie-t-elle sous l'impact de cette opération : elle ne varie pas, puisque l'opération est un maquillage qui est supposé sans impact sur la richesse des actionnaires.

Exercice 7-13 : Actions gratuites de Clarins en 1999 (corrigé)**Question 1 terminologie**

- Rompu : Les actionnaires pour lesquels le nombre de titres en portefeuille avant l'opération n'est pas un multiple du dénominateur du rapport d'attribution auront des rompus. Le rapport d'attribution est de 1 pour 6. Si un actionnaire détient 5 actions seulement ou bien 7 il est en situation de rompu pour 5 actions dans le premier cas et pour une dans le second.
- Droit d'attribution : Chaque actionnaire avant l'opération est titulaire de ce droit au prorata de sa participation au capital. Le droit d'attribution est attaché à l'action ancienne, il est détaché lors de l'opération. L'acheteur de l'action après l'opération achète une action ex-droit, ou droit détaché. Le droit est coté séparément quelques séances à partir de son détachement
- Action ex-droit : L'acheteur de l'action après l'opération achète une action ex-droit, ou droit détaché. Le droit est coté séparément quelques séances à partir de son détachement
- Vendeur à découvert : Un titre négocié sur le marché à règlement mensuel peut donner lieu à des ventes à découvert c'est-à-dire un engagement de vente du titre avec livraison différée en fin de mois
- Vendeur ayant les titres sous dossier : Le vendeur à découvert n'a pas les titres au moment où il s'engage à les livrer (un peu plus tard), le vendeur ayant les titres sous dossier en revanche a les titres qu'il s'engage à livrer.
- Fixage A : Compartiment de négociation en fixing électronique sur lequel deux confrontations entre l'offre et la demande de titres sont organisées chaque séance.
- Les négociations seront garanties et compensées : La SBF (avant Euronext-Paris) offre (commission de compensation facturée aux sociétés de bourse)

le service de compensation en plus du service de négociation (commission de négociation facturée aux sociétés de bourse) sans que le choix soit explicitement offert aux investisseurs individuels. La compensation

- Les bases de conversion des obligations convertibles (...) ont été ajustées

Question 2 Actions gratuites

- *Qui bénéficie des actions gratuites?* Les détenteurs des actions avec droits d'attribution attaché ;
- *Quelle est la variation de la situation nette impliquée par cette opération?* Aucune si on ignore les frais : une partie des réserves est transformée en capital social ;
- *Quelle est la variation de la capitalisation boursière impliquée par cette opération?* Aucune ;
- *Que doit faire un actionnaire qui exerce ses droits?* Il échange ses droits d'attribution contre des actions « gratuites » dans le rapport d'attribution : pour 6 actions avec droits attachés, il garde ses 6 actions droits détachés et il obtient 1 action « gratuite » ;

Question 3 Coefficient correcteur

- Quelle est la valeur du coefficient correcteur associé à cette opération? Elle est de $6/7$ soit 0,857
- A quelle date le coefficient correcteur s'applique-t-il? À la date de détachement du droit qui est le 26 octobre 1999, en ouverture de séance

Question 4 Rompus : décrivez la situation patrimoniale et les choix offerts

- Il peut tout d'abord vendre ses droits, sur le marché des droits ouvert quelques séances à partir du 26 octobre. La valeur théorique du droit est la différence entre le cours de l'action ancienne (droit attaché) et le cours théorique de l'action nouvelle, soit ici $C - C(N/(n+N)) = C - C(6/7)$.
- Il peut exercer ses droits : contre 6 droits, il obtient 1 « gratuite ». Il lui reste 4 droits.
 - » Il vend ses 4 droits : il possède 6+1 actions et a encaissé 4 DA ;
 - » Il peut acheter les 2 droits qui lui font défaut : il décaisse 2 DA, exerce ses droits et détient 6+2=8 actions nouvelles.
- Dans tous les cas, et en supposant que les cours effectivement cotés soient égaux aux valeurs théoriques reprises ici, on s'aperçoit que la situation patrimoniale de l'actionnaire est inchangée.

Exercice 7-14 : Eurotunnel en 1993 et 1994 (corrigé)

Question 1

cf la feuille excel mentionnée en début de cette section. Eurotunnel est une société dont le capital est divisé en unités, exprimé en FF mais aussi en £.

Question 2 Définissez les termes suivants apparaissant dans ces avis :

- libérer intégralement : le souscripteur doit payer l'intégralité du prix d'émission ;
- à titre irréductible : le détenteur d'actions avec droits attaché est prioritaire pour souscrire aux actions nouvelles en payant le prix d'émission. Sa demande ne peut être exécutée partiellement ou réduite.

- admission en promesse : les actions nouvelles sont en attente d'assimilation. Attente pour différentes raisons par exemple le dépôt du certificat Kbis au Tribunal de Commerce. Les actions nouvelles n'existent pas encore de manière totalement sûre. Elles sont pourtant cotées mais sur une ligne séparée (avec un code d'identification distinct). Ce sont des promesses, c'est-à-dire des actions en devenir ou potentielles. La date d'assimilation (des promesses) intervient lorsque la promesse s'est totalement concrétisée : alors les actions nouvelles rejoignent la ligne de cotation principale et sont rayées de la cote en tant que promesses. La bourse de Paris a coté des promesses dans d'autres circonstances telle que la cotation d'actions avant l'introduction officielle en bourse. Par exemple à l'introduction d'Eurotunnel et vraisemblablement pour offrir une alternative au « marché gris » de Londres qui donnait un prix avant l'introduction « officielle ».
- souscrire au pair : le prix d'émission est égal à la valeur nominale.
- émission réservée : les actionnaires renoncent à leurs droits préférentiels de souscription et l'émission nouvelle en numéraire peut être réservée à un ou quelques actionnaires. Dans ce cas le prix d'émission sera égal (proche) du cours en bourse.

Question 3 Calculez le coefficient correcteur de l'attribution gratuite de 1993

Pour une distribution d'action gratuite le coefficient serait égal à $N/(n+N)$ soit $10/11=0,909$. Mais si les bons sont distribués « gratuitement », ils donnent la possibilité de souscrire 10 pour 1 à condition de payer 14,125 FRF. La période de souscription débute le 5 juillet 93. Le cours d'Eurotunnel est de 35,95FRF la veille. Sous l'hypothèse de souscription totale, le cours après est $(N \times C + n \times 14,125) / (N + n)$ et le coefficient de 0,945. Le coefficient reporté par Euronext est de 0,98.

Question 4 : Les opérations de 1994.

1. Le coefficient est égal à $C.N+n.E/(N+n)$, avec $C=33F$ le 1er juin, $E=22.55$ et un rapport d'émission de 3/5 soit un coefficient de 0,881.
2. Pour l'augmentation de capital en numéraire réservée à Bombardier, le coefficient est de un si l'émission est faite au cours.

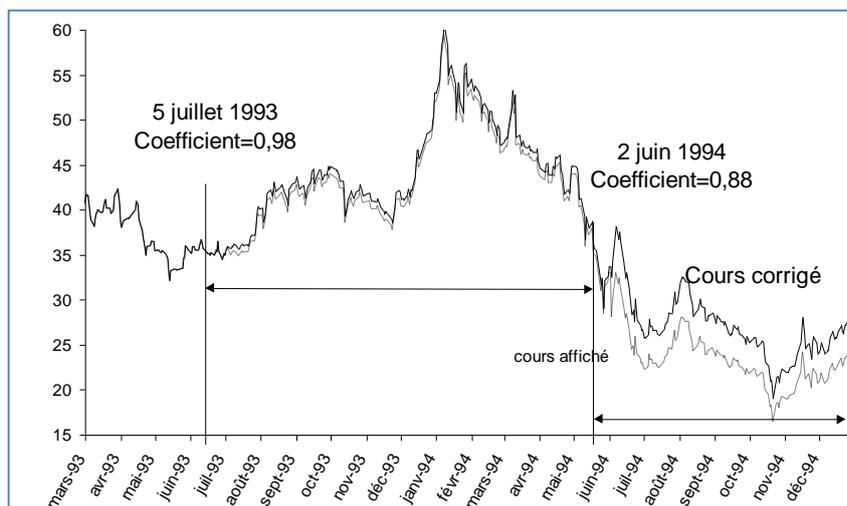
Question 5 : Calculez la capitalisation le 1er juin, le 2 juin et le 18 juillet 1994

1. Nombre de titres le 1er juin (ligne TNU) : $539807181 \times 33F$.
2. Nombre de titres le 2 juin (ligne TNU) : $539807181 \times 28.1F$, car les nouvelles sont cotées à part en promesses sur la ligne ZNU. Il semble logique de tenir compte des deux lignes auquel cas la capitalisation serait de 863691489×28.1 .
3. Nombre de titres le 18 juillet (ligne TNU) : $863691489 \times 23.1F$ les promesses ont été assimilées.

Question 6

Le 31 décembre 1996 le cours de clôture est de 7 francs, mais le cours corrigé est lui de $7/(0,98 \times 0,88) = 8,11$ FRF. Aucun dividende n'a été versé sur la période. Le 1er juillet 1991 le cours (coté en clôture) est de 45 FRF. Le taux de

rentabilité sur la période est de $\frac{7}{45} - 1 = -84\%$ calculé sur la série des cours bruts. Le taux de rentabilité est en fait supérieur si on tient compte de l'OST, il est de $\frac{8,11}{45} - 1 = -82\%$, ouf!



Question 7 (non posée)

C'est une évolution boursière qui a laissée de mauvais souvenirs à nombreux « petits porteurs » français.

Suivant le quotidien Libération du 26 juillet 1995, la COB (ancêtre de l'AMF) ouvre une procédure de sanction contre plusieurs banques pour délit et manquement d'initié. Deux banques ayant anticipé des difficultés lors du placement, alors qu'elles garantissaient le placement, auraient entrepris une opération de couverture consistant à vendre à découvert l'action Eurotunnel. L'aspect massif des ventes aurait contribué à la chute des cours constatée en 1994 et à l'insuccès de l'opération. Les banques garantes se sont retrouvées avec 357 millions de francs de titres, soit 13 % de l'émission sur les bras. Les deux banques fautives (selon la COB en 1995) auraient dégagé de fortes plus values lors des ventes à découvert puisque le cours a été divisé par deux, et n'auraient eu qu'à livrer les titres « collés » pour déboucler l'opération à terme (liée à la garantie donnée à Eurotunnel). Les informations détenues par les départements *corporate* auraient franchies la muraille de Chine vers le département *trading*, qui aurait spéculé à la baisse du cours.

En mars 1996, la COB abandonne les poursuites contre Warburg SBC. Toutefois, le juge d'instruction Dominique de Talencé instruit séparément l'affaire. Selon le quotidien Libération du 10 juillet 1997, p. 17. Renvoi en Tribunal correctionnel le 14 mars 2003, confirmation en Appel le 25 juin 2004, rejet des pourvois par arrêt de la chambre criminelle de la cour de cassation le 5 octobre 2005. Le 4 juillet 2007, le tribunal correctionnel de Paris (11^e chambre) relaxe David Wenman (ex trader de SBC) ; relaxe également l'ex coprésident André Bénard soupçonné de délit d'initié (Les Echos le 5 juillet 2007).

Exercice 7-15 : Oxygène et Acétylène (II), corrigé

1. Le nombre d'actions de la ligne de cotation principale ne change pas le 15 novembre 1982 en raison du différé d'assimilation, alors que le cours a été ajusté ! Entre le 15 nov 1982 et le 19 janvier 1983, on doit calculer la capitalisation avec le cours ajusté pour l'opération du 15 novembre.
2. La correction des cours et dividendes (dernière colonne) procède à une correction en aval
3. Le dividende de 60 F est détaché le jour de l'attribution, il doit être corrigé. C'est 72,03 (et non 60) qui est comparable à 1 508 (le cours du début de période)

Date	Cours ou div	Nombre actions	Coeff cum	Capit	Cours, div corr
31 mars 82	1 508	145 961	1,000	$1\ 508 \times 145\ 961 = 220\ 109\ 188$	1 508,00
21 juin 82	Div=60	175 153	0,833		72,03
14 nov 82	1 849	175 153	0,833	$1\ 849 \times 175\ 153 = 323\ 857\ 897$	2 219,69
15 nov 82	1 750	175 153	0,759	$1\ 750 / 0,911 \times 175\ 153 = 336\ 462\ 953$	2 305,67
20 janv 83		194 615	0,759		
30 mars 83	1 960	194 615	0,759	$1\ 960 \times 194\ 615 = 381\ 445\ 400$	2 582,35

Exercice 7-17 : Taux de rentabilité sur France Télécom (corrigé)

Question 1 Le 1^{er} mars 2000 par tranches de 15 minutes

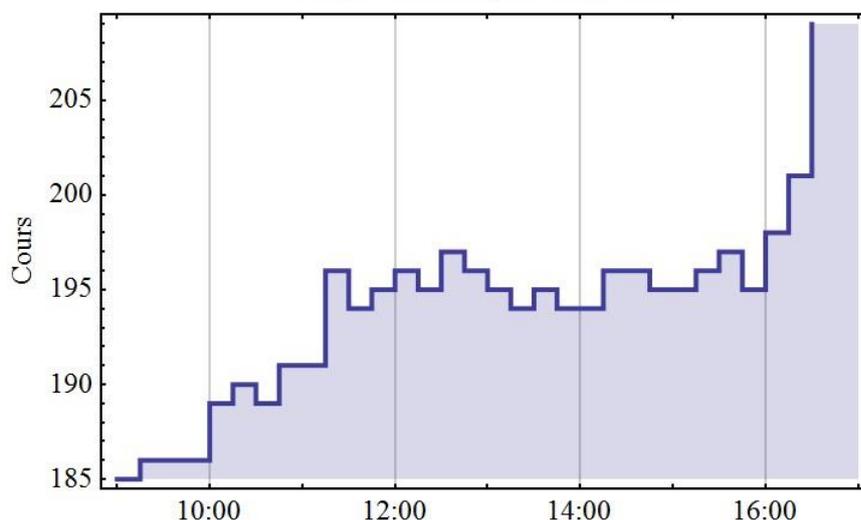
Heure	Continu	Discret	Ecart
09:00	0.0555699	0.0571429	-2.75276
09:15	0.00539085	0.00540541	-0.2693
09:30	0.	0.	Indeterminate
09:45	0.	0.	Indeterminate
10:00	0.0160003	0.016129	-0.797884
10:15	0.00527706	0.00529101	-0.263621
10:30	-0.00527706	-0.00526316	0.264085
10:45	0.0105264	0.010582	-0.525397
11:15	0.0258412	0.026178	-1.2865
11:30	-0.0102565	-0.0102041	0.513702
11:45	0.0051414	0.00515464	-0.25685
12:00	0.0051151	0.00512821	-0.255537
12:15	-0.0051151	-0.00510204	0.255973
12:30	0.0102042	0.0102564	-0.509341
12:45	-0.00508907	-0.00507614	0.254669
13:00	-0.0051151	-0.00510204	0.255973
13:15	-0.0051414	-0.00512821	0.25729
13:30	0.0051414	0.00515464	-0.25685
13:45	-0.0051414	-0.00512821	0.25729
14:00	0.	0.	Indeterminate
14:15	0.0102565	0.0103093	-0.511948

14:30	0.	0.	Indeterminate
14:45	-0.0051151	-0.00510204	0.255973
15:00	0.	0.	Indeterminate
15:15	0.0051151	0.00512821	-0.255537
15:30	0.00508907	0.00510204	-0.254238
15:45	-0.0102042	-0.0101523	0.511076
16:00	0.0152675	0.0153846	-0.761431
16:15	0.0150379	0.0151515	-0.750009
16:30	0.0485532	0.0497512	-2.40802
16:45	-0.0047506	-0.00473934	0.237718
17:00	0.0419642	0.0428571	-2.08354

Les taux de rentabilité obtenus avec les deux approches sont très similaires. L'écart entre les deux est toujours inférieur à 2.76%. L'écart augmente avec la valeur absolue du taux de rentabilité. En rythme mensuel le taux discret est davantage justifié.

Question 1 (non demandé)

France Telecom, 1er mars 2000



Les courbes en escalier représentent bien la réalité des ces données. On dispose ici d'un prix tous les quarts d'heure. Entre deux prix on se sait ce qui se passe. L'hypothèse d'interpolation linéaire faite par défaut avec les graphiques sous excel est peu adaptée. Ici en escalier on suppose que le dernier cours connu s'applique jusqu'à ce qu'un nouveau cours soit disponible et affiché.

Sous excel on peut le faire mais cela nécessite soit une réorganisation des données ou bien une programmation en VBA.

Sous Mathematica il suffit d'ajouter à la commande de construction de graphique, la directive suivante

InterpolationOrder -> 0

Le 0 crée l'escalier. D'autres schémas sont possibles (dont l'interpolation linéaire, ou diverses formes de lissage) avec d'autres valeurs de constantes.

Question 2

Le nombre de transactions est beaucoup plus important en 2000 sur FTE à Paris. Le NYSE était un marché de parquet non automatisé où les intermédiaires jouaient un rôle actif. À Paris les ordres arrivant sur le marché étaient (et sont) retransmis sans ressaisie, sans *repackaging* par les intermédiaires. Une taxe sur les transactions à Paris (impôt de bourse) qui a depuis (en 2007) été supprimée frappait certaines transactions notamment sous condition d'excéder un certain montant.

Une évolution générale (et en particulier en Europe depuis la mise en œuvre de la DMIF en novembre 2007) est liée à l'automatisation dans la formulation et la transmission des ordres. Le recours aux SORT (*smart order routing technologies*), à l'*algorithmic trading*, au *high frequency trading* ont eu plutôt tendance à réduire la taille des ordres (pratique du tranchage des ordres, *slicing*) transmis sur les différentes plateformes d'exécution. Les ordres fractionnés sont également plus facilement camouflés dans la masse, moins visibles donc.

La taille des transactions a également depuis été réduite sur New York (l'automatisation se généralise à partir de 2005) comme sur la plupart des marchés.

Exercice 7-19 : Alcatel 1999-2000 en données quotidiennes (corrigé)

1. Les données d'Euronext sont corrigées pour tenir compte de l'impact des OST avec coefficient correcteur. Le 22 mai 2000, à la division (5 pour une), est associé un coefficient correcteur de 0,2. Le cours indiqué par Euronext de 21,6 divisé par le coefficient correcteur, donne le cours effectivement coté de 108.
2. On sélectionne les cours du 16 au 24 mai, on reporte le coefficient correcteur (en fixant une valeur par défaut de 1) et le dividende (noté D, en fixant une valeur par défaut de 0).

Tableau : Taux de rentabilité d'Alcatel du 17 au 24 mai 2000

Jour	Coeffi cient	Coef produit	D	Cours ouverture	Cours + D ajustés	Cours ajusté	Tx rent D	Tx rent C
16	1	0,2	0	286,7	57,34	57,34		
17	1	0,2	0	293,8	58,76	58,76	2,476%	2,446%
18	1	0,2	2,2	286,8	57,80	57,36	-1,634%	-1,647%
19	1	0,2	0	276,3	55,26	55,26	-3,661%	-3,730%
22	0,2	1	0	53	53,00	53,00	-4,090%	-4,176%
23	1	1	0	52,5	52,50	52,50	-0,943%	-0,948%
24	1	1	0	50,4	50,40	50,40	-4,000%	-4,082%

La colonne «coef produit» représente le produit des coefficients correcteurs, en partant de la fin de la période, de manière à réaliser un ajustement en amont. La date ex est le 22 mai, ce qui signifie que l'ajustement est réalisé en ouverture de cette séance. Pour un ajustement en amont, le coefficient du 22 est de 1 et celui de la séance précédente est de 0,2. La colonne « cours ajusté » est obtenue par le produit du cours et du produit des coefficients le jour du calcul. Le cours ajusté est égal au cours coté à partir du 22 et il est inférieur avant. La colonne « Cours +D ajustés » prend en compte le dividende avant la réalisation de l'ajustement. Le taux de rentabilité discret quotidien (Tx rent D) est obtenu en

rapportant le 'cours +D ajusté' du jour à celui ajusté (sans le dividende) de la séance précédente, puis en soustrayant 1. Le taux de rentabilité continu quotidien (Tx rent C) est obtenu en prenant le logarithme népérien du rapport entre le cours avec dividende et ajusté du jour et le cours ajusté sans dividende du jour précédent. Par exemple, $Ln\left(\frac{57,8}{58,76}\right) = -1,647\%$.

3. Rappel des données :

4 jnv 1999	30 juin 1999	18 mai 1999	22 juin 2000	31 mai 2000
Cours=108 €	Div=2 €	Div=2,2 €	Coef=0,2	Cours=60 €

En ajustant en aval (pourquoi pas), le taux discret s'exprime $\frac{60/0,2 + 2 + 2,2}{108} - 1 = 181,67\%$. On obtient le taux continu, soit par calcul direct $Ln\left(\frac{60/0,2 + 2 + 2,2}{108}\right)$, ou

bien en prenant le log de (1+ le taux discret). Dans les deux cas on obtient la valeur de 103,55%. On prend le parti d'ajuster les données postérieures à l'OST, et seul le cours de fin mai 2000 nécessite alors un ajustement.

4. Mais il convient d'annualiser le résultat. Entre les deux dates, il y a 1 an et 5 mois. Le taux de rentabilité calculé au point précédent est constaté sur 17 mois. Le taux discret annualisé est la solution de l'équation suivante :

$$108 = \frac{60/0,2 + 2 + 2,2}{(1 + Rd)^{17/12}}, \text{ soit } Rd = 107,71\%. \text{ Le taux continu annualisé s'exprime :}$$

$$108 = \left(\frac{60/0,2 + 2 + 2,2}{108}\right) \times e^{-R \times \frac{17}{12}}, \text{ soit } R = 73,0979\%.$$

5. La capitalisation le 4 janvier 1999 est le produit du cours 108 € par le nombre d'actions admises en bourse 198 681 246, soit 21 457 574 568 €. La capitalisation le 12 mai 2000 est de 57 856 965 600 (280 X 206 632 020).

6. Non.

Exercice 7-20 : Renault et les autres (corrigé)

L'exercice peut facilement être traité sous excel, mais également à la main (les calculs sont toutefois un peu fastidieux et répétitifs). On choisit ici de montrer la solution sous *Mathematica*.

Importation des données :

```
RNO = Import["http://www.dauphinefinance.com/106/Data106/V4C7.xls", {"Data", 11}];
```

Mémorisation :

```
RNO = Delete[RNO, {{1}, {2}, {3}}]; Demar = Transpose[RNO][[1]];
RR = Delete[Transpose[RNO], {1}];
```

Commentaire : les trois premières lignes du fichier sont détruites (elles correspondent aux en-têtes de colonnes), de même la première colonne (les dates). Ce qui permet, sous le nom RR, de disposer de la matrice des taux de rentabilité mensuels de l'ensemble des titres. RR est une matrice de 7 lignes (les titres) et 13 colonnes (les données mensuelles).

Calcul des taux de rentabilité moyens pour chaque titre :

Rent = Mean/@RR

Commentaire : Rent est un vecteur qui comporte le résultat du calcul soit les moyennes de taux de rentabilité de chacun des 3 indices puis des 4 actions. Le résultat est renvoyé sous forme d'un vecteur (liste) :

{0.03459,0.09955,0.03003231,0.06586,0.009844,0.201725,0.0011726}

Définition d'un portefeuille

P1 = {0,0,0,20,20,40,20}/100.;

Commentaire : P1 est un vecteur. Ce portefeuille comporte pour 40 % de sa composition le titre n°6 soit ING.

Taux de rentabilité d'un portefeuille

P1.Rent

Commentaire : Le résultat est obtenu par produit matriciel, le symbole . (dot) est le produit matriciel. La réponse du logiciel est 0.09606608002459374.

La puissance de ce type d'approche est que l'écriture des commandes ci-dessus est largement indépendante de la taille du problème. Ici on a 7 titres, mais si le fichier de données en comportait 1000, les commandes de mémorisation et de calculs seraient inchangées. Fondamentalement les problèmes de gestion de portefeuille SONT des problèmes matriciels (deux dimensions sont privilégiées : des titres et des dates).

Taux de rentabilité d'un portefeuille équilibré

NB = Length[Rent]; P2 = Table[1/NB, {NB}]; P2.Rent

Commentaire : NB définit le nombre de titres (ici c'est 7). P2 est un vecteur de dimension NB comportant les poids. Et au final le produit matriciel qui renvoie 0,063254.

Remarquez que la ligne ci-dessus n'a pas à être changée quelle que soit la dimension du problème. Un bémol toutefois, ici on suppose qu'il n'y a pas de données manquantes (un taux de rentabilité est supposé disponible pour chaque titre et chaque mois), sinon la démarche est un peu plus compliquée.

Exercice 7-21 : Apple's split, 2014 (corrigé partiel)

La division (d'actions) d'Apple. Les dates clés :

The Record Date – June 2, 2014 - determines which shareholders are entitled to receive additional shares due to the split.

The Split Date – June 6, 2014 - shareholders are due split shares after the close of business on this date.

The Ex Date - June 9, 2014 - the date determined by NASDAQ when Apple common shares will trade at the new split-adjusted price.

If you sell shares on or after the Record Date (June 2, 2014) but before the Ex Date (June 9, 2014) you will be selling them at the pre-split price.

Sur les motivations d'un split (autour de la question 4)

<http://investor.apple.com/faq.cfm>

« We want Apple stock (AAPL) to be more accessible to a larger number of investors” (réponse à la question n° 4); mais Tim Cook disait il n’y a pas longtemps (février 2012 à l’AG) qu’une division n’apporterait rien aux actionnaires d’Apple.

L’effet sur le cours? Selon WSJ et Strategas, 9 juin, “*Since 2010, 57 companies in the S&P 500 have split their shares. Those stocks have averaged a 0.2% gain the day they started trading on a split-adjusted basis, according to New York research firm Strategas Research Partners. A month later, they have risen just 0.5%. But longer term, the average gains are more pronounced. Since 2010, these stocks have averaged a 5.4% increase three months after a split and a 28% surge one year later, Strategas says*”

This will be Apple’s fourth stock split since going public. Apple's common stock split on a 2-for-1 basis on May 15, 1987, on June 21, 2000 and also on February 18, 2005.

Comment se procurer les cours? Pour Apple c’est assez simple (Big Cap liquide et populaire), mais par défaut les cours que l’on télécharge sont des cours ajustés (pour les splits etc), voire super-ajustés (pour les détachements de dividendes). Ainsi avec Mathematica (idem Yahoo !), les cours sont disponibles en quotidien depuis le 12 décembre 1980. La commande

```
In[86]:= FinancialData["aapl", {{2014, 5, 31}, {2014, 6, 13}}]
Out[86]=
{{{2014, 6, 2}, 89.81}, {{2014, 6, 3}, 91.08},
 {{2014, 6, 4}, 92.12}, {{2014, 6, 5}, 92.48},
 {{2014, 6, 6}, 92.22}, {{2014, 6, 9}, 93.7},
 {{2014, 6, 10}, 94.25}, {{2014, 6, 11}, 93.86},
 {{2014, 6, 12}, 92.29}, {{2014, 6, 13}, 91.28}}
```

Par défaut ici ce sont les cours super ajustés qui sont récupérés. Les cours de clôture effectivement affichés au jour le jour sont obtenus ainsi :

```
In[87]:= FinancialData["aapl", "RawClose", {{2014, 5, 31}, {2014, 6, 13}}]
Out[87]=
{{{2014, 6, 2}, 628.65}, {{2014, 6, 3}, 637.54},
 {{2014, 6, 4}, 644.82}, {{2014, 6, 5}, 647.35},
 {{2014, 6, 6}, 645.57}, {{2014, 6, 9}, 93.7},
 {{2014, 6, 10}, 94.25}, {{2014, 6, 11}, 93.86},
 {{2014, 6, 12}, 92.29}, {{2014, 6, 13}, 91.28}}
```

Ou plus complet, les cours (bruts) ouverture, plus haut, plus bas et clôture (OHLC) :

```
In[88]= FinancialData["aapl", "RawOHLC", {{2014, 5, 31}, {2014, 6, 13}}]
Out[88]=
{{{2014, 6, 2}, {633.96, 634.83, 622.5, 628.65}},
 {{2014, 6, 3}, {628.46, 638.74, 628.25, 637.54}},
 {{2014, 6, 4}, {637.44, 647.89, 636.11, 644.82}},
 {{2014, 6, 5}, {646.2, 649.37, 642.61, 647.35}},
 {{2014, 6, 6}, {649.9, 651.26, 644.47, 645.57}},
 {{2014, 6, 9}, {92.7, 93.88, 91.75, 93.7}},
 {{2014, 6, 10}, {94.73, 95.05, 93.57, 94.25}},
 {{2014, 6, 11}, {94.13, 94.76, 93.47, 93.86}},
 {{2014, 6, 12}, {94.04, 94.12, 91.9, 92.29}},
 {{2014, 6, 13}, {92.2, 92.44, 90.88, 91.28}}}
```

Le cours d'ouverture (effectivement coté le 12 décembre 1980) est de 28,75. Le cours (super ajusté) du 12 décembre 1980 est de 0,45\$ et le cours du 13 juin 2014 est de 91,28. L'actionnaire qui a acheté 100 (la quotité) en 1980, et qui a réinvesti les dividendes. Cet actionnaire a investi 2875\$. Son capital s'est apprécié, il a été multiplié par $91,28/0,45=202,844$. Cet actionnaire dispose d'un capital mi juin 2014 de 583 178\$.

Il regrette de ne pas en avoir acheté davantage. Il aurait même pu ne payer que l'équivalent de 0,17 (en juillet 1982). En décembre 1984 le cours est toujours un peu en-dessous du prix d'introduction (cours super ajusté), en octobre 1985 l'action est à 25 cents (super ajusté). Il est vraisemblable que beaucoup d'actionnaires de la première heure aient vendu à perte à ce moment là, non ? Le 2 juillet 1997 ou en décembre 1997, l'achat à 45 centimes était également possible !

Exercice 7-22 : Taux discret, taux continu et équation différentielle

Suivant votre formation antérieure, ou vos goûts, la solution vous paraîtra inutilement compliquée ou au contraire éclairante. Il y a plusieurs façons de penser/pratiquer la finance, ce qui est une bonne chose non ?

Si on ignore les dividendes, et que l'on note P le cours d'un titre, la définition du taux de rentabilité entre $t-1$ et t noté r est $r = \frac{P[t]-P[t-1]}{P[t-1]}$

$$r \times P[t-1] + P[t-1] = P[t] = P[t-1] \times (1+r)$$

Plus généralement pour un intervalle Δt (au lieu de 1), en supposant un paiement des accroissements de valeur tous les Δt (Simon et Blume, 1994, p. 634)

$$r \times \Delta t = \frac{P[t]-P[t-\Delta t]}{P[t-\Delta t]} \text{ ou bien } r \times P[t-\Delta t] = \frac{P[t]-P[t-\Delta t]}{\Delta t}$$

Si $\Delta t \rightarrow 0$, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt}(t) = r \times P(t) = P'(t)$$

Qui indique que le taux de croissance instantané du cours $\left(\frac{P'(t)}{P(t)}\right)$ est égal à une constante r . La relation précédente retrace l'évolution de la valeur du placement avec l'écoulement du temps. La solution (avec Mathematica)

```
DSolve[{P'[t] == r * P[t], P[0] == 1}, P[t], t]
```

```
MatrixForm=
```

```
( P[t] -> e^{r t} )
```

Stojanovic (2003) souligne la condition initiale suivant laquelle $P(0) = 1$ (ou toute autre valeur) et débute son ouvrage « *Computational financial mathematics with mathematica* » avec cet exemple.

```
D[e^{r t}, t] (* en effet la dérivée est ...*)
```

```
e^{r t} r
```

Exercice 7-23 : Meriter à chef de terme (sic)

Retour à la renaissance. On sort de la guerre de 100 ans. L'interdit sur les taux d'intérêts² souffre certaines exceptions. Le roi tout d'abord qui a toujours besoin d'argent et aurait du mal à s'en procurer sans cela, mais aussi la concurrence étrangère à proximité du territoire français (Genève à cette époque). Déjà au 16^e siècle et un peu avant³, des financiers ont multiplié les inventions de montages permettant de pratiquer de fait les taux intérêts mais sans l'afficher (via des contrats à terme, des contrats de rente, des contrats de crédit bail). Les institutions religieuses ne sont d'ailleurs pas en reste avec les contrats à terme sur la vente de matières premières produites par des monastères ou la création des « monts de piété » (je vous assure Mr Torquemada ce n'est pas un taux d'intérêt, ce sont des frais liés au stockage et à la conservation des biens donnés en gage !).

Mais dans le présent exercice, les intérêts sont explicites (merite simple) et même les intérêts d'intérêts sont pratiqués (merite à chef de terme, *compound return*). L'ouvrage de Trenchant (1557) a été ré-édité de nombreuses fois et pourtant il est rare en bibliothèques.

- *Les foires de Lyon (15 et 16^e siècle)*

L'année était parcourue par 4 foires majeures (nombreuses péripéties au 15^e siècle). Les 4 foires sont accordées à Lyon par le roi (4 foires de 15 jours à partir de 1463, contestées puis rétablies à partir de 1487), en franchise d'impôts et taxes avec libre circulation des marchandises, des gens (sauf les anglais explicitement exclus par les édits royaux de l'époque !) et des moyens de paiements, possibilité de payer en toutes monnaies, possibilité de pratiquer les prêts à intérêt. Ces facilités qui durent le temps de la foire, au départ sont accordées pour concurrencer les foires de Genève. Les dates de début de foire : lundi après Quasimodo (Pâques, foire de printemps); b) 4^e jour d'août; c) tiers

² Au Moyen Âge, l'usurier (celui qui prête avec taux d'intérêt), 'vole le temps' qui n'appartient qu'à Dieu ! "*nummus non parit nummos*" l'argent ne fait pas d'intérêts. Les conciles de Latran au 13^e siècle et Saint Thomas d'Acquin, 1273, « Somme théologique » justifient cet interdit qui va perdurer en France jusqu'à la révolution.

³ Les cours à terme de la laine (*forward*) établis par les monastères anglais au 13^e siècle (1200-1350), mettent en évidence des taux d'intérêts implicites de 10 à 40 % (cf Bell, Brooks et Dryburgh, 2007, « Interest rates and efficiency in medieval wool forward contracts », *Journal of Banking & Finance*).

jour de novembre (foire de la Toussaint); d) premier lundi après la fête des rois (épiphanie, début janvier) ⁴. Les taxes réintroduites par François 1^{er}, feront le siècle suivant progressivement périlcliter les foires.

- *Intérêts capitalisés (merite à chef de terme)*

Trenchant (1557 ⁵) « *Meriter est bailler fes deniers pour profiter à raifon d'un tant pour cent par an, demy an, quart d'an, par moys ou autre terme accordé* » p 298 « *nous avons deux sortes de merites, l'un dit merite fimple : & l'autre, merite à chef de terme (...)* Et merite à chef de terme, est quand le proffit échu, gagne comme le principal » page 299. Sans modification du texte initial écrit au 16^e siècle !

« *En l'an 1555, Le Roy Henry⁶ pour fes afferes de guerre, prenoit argent des banquiers à raifon de 4 pour cent par foyre : c'est meilleure condition pour eux, que 16 pour cent par an.* »

« *L'argent qui merite à chef de terme, s'augmente par progrefsion geometrique* », page 302, il parle des intérêts composés (anatocisme, ou intérêt des intérêts).

« *4 pour cent par foire* » cela ne fait pas 4% par an mais plutôt 4% par trimestre. « *c'est meilleure condition que 16 pour cent par an* », parceque ce ne sont pas des intérêts simples (merite simple), mais « à chef de terme » c'est-à-dire en langage actuel, des intérêts capitalisés. A chaque foire les intérêts sont calculés et ajoutés au capital (*le proffit échu, gagne comme le principal*).

$$\ln[78] := \left(1 + \frac{4}{100}\right)^4 - 1$$

Out[78]=

0.169859

Page 309, une table des intérêts composés à 4% avec 40 échéances est donnée (pour un capital initial de 1 000 000).

In[20]:= DATA =

```
Partition[
  Flatten[
    Transpose[
      {Range[44], IntegerPart[10 000 000 Table[(1 + 0.04)^t, {t, 0, 43}]]}],
    8]; Grid[DATA, Frame -> All,
  BaseStyle -> {FontFamily -> Times, FontSize -> 12}]
```

⁴ *Privilèges des foires de Lyon*, 1649, Barbier éditeur (compilation d'édits royaux), sur Google Books.

⁵ Le texte d'introduction du livre est daté de juillet 1557. Les pages indiquées sont celles d'une (ré)édition de 1602 imprimée à Lyon, téléchargeable sur un site Californien.

⁶ Henri II, fils de François 1^{er}, roi de France de 1547 à 1559 (guerres contre Charles Quint, états généraux en 1558, endettement excessif de l'État), Henri III (1551 à 1589, roi de France à partir de 1574, fils de Catherine de Médicis, qui finance 4 guerres de religion, réunit les états généraux à Blois en 1576 pour combler les déficits budgétaires creusés par les guerres, fait assassiner le duc de Guise en 1588 et tombe lui-même sous le poignard de Jacques Clément « méchant moine, tu m'as tué ! »).

1	10 000 000	2	10 400 000	3	10 816 000	4	11 248 640
5	11 698 585	6	12 166 529	7	12 653 190	8	13 159 317
9	13 685 690	10	14 233 118	11	14 802 442	12	15 394 540
13	16 010 322	14	16 650 735	15	17 316 764	16	18 009 435
17	18 729 812	18	19 479 004	19	20 258 165	20	21 068 491
21	21 911 231	22	22 787 680	23	23 699 187	24	24 647 155
25	25 633 041	26	26 658 363	27	27 724 697	28	28 833 685
29	29 987 033	30	31 186 514	31	32 433 975	32	33 731 334
33	35 080 587	34	36 483 810	35	37 943 163	36	39 460 889
37	41 039 325	38	42 680 898	39	44 388 134	40	46 163 659
41	48 010 206	42	49 930 614	43	51 927 839	44	54 004 952

Ci-après une solution générale et paramétrable (curseurs) avec Mathematica. Vous remarquez que l'essentiel du code est développé pour des aspects d'amélioration (?) de la présentation.

```

In[33]:= Manipulate[
  NBM = 4; Cap[0] = CAPIT; PMT =  $\frac{\text{Cap}[0]}{\sum_{t=1}^{\text{NBE}} \frac{1}{(1 + \frac{\text{TxAN}}{\text{NBM}})^t}}$ ;

  Do[Cap[i] = Cap[i - 1] -  $\left(\text{PMT} - \text{Cap}[i - 1] \frac{\text{TxAN}}{\text{NBM}}\right)$ ; INT[i] = Cap[i - 1]  $\frac{\text{TxAN}}{\text{NBM}}$ ,
    {i, 1, NBE}];

  Grid[
    Append[
      Prepend[
        Table[{i, DateString[DatePlus[{2014, 07, 1}, {i, "Month"}],
          {"MonthNameShort", " ", "Year"}],
          AccountingForm[Cap[i], {12, 0}, DigitBlock -> 3,
            NumberSeparator -> " "],
          AccountingForm[PMT, {12, 2}, DigitBlock -> 3,
            NumberSeparator -> " "],
          AccountingForm[INT[i], {12, 2}, DigitBlock -> 3,
            NumberSeparator -> " "],
          AccountingForm[PMT - INT[i], {12, 2}, DigitBlock -> 3,
            NumberSeparator -> " "}], {i, 1, NBE}],
        {"n°", "Date", "Capital\nrestant", "Paielement\npériodique",
          "Intérêts", "Capital\nremboursé"}],
        {"", "", "", PMT NBE,  $\sum_{t=1}^{\text{NBE}} \text{INT}[t]$ ,  $\sum_{t=1}^{\text{NBE}} (\text{PMT} - \text{INT}[t])$ }], Frame -> All,

    Alignment -> ".", BaseStyle -> {FontFamily -> Times, FontSize -> 10}],
    {{CAPIT, 100 000, "Montant emprunté"}, 1, 500 000,
     Appearance -> "Labeled"},
    {{TxAN, 0.16, "Taux annuel"}, 0.02, 0.25, Appearance -> "Labeled"},
    {{NBE, 41, "Nb termes"}, 12, 60, 1, Appearance -> "Labeled"}]

```

Ci-après pour un emprunt de 100 mille à 4%

N°	Capital restant	Paiement périodique	Intérêts	Capital remboursé
1	98 998.	5 001.74	4 000.	1 001.74
2	97 956.	5 001.74	3 959.93	1 041.81
3	96 873.	5 001.74	3 918.26	1 083.48
4	95 746.	5 001.74	3 874.92	1 126.82
5	94 574.	5 001.74	3 829.85	1 171.89
6	93 355.	5 001.74	3 782.97	1 218.77
....
36	22 267.	5 001.74	1 048.79	3 952.95
37	18 156.	5 001.74	890.67	4 111.06
38	13 880.	5 001.74	726.23	4 275.51
39	9 434.	5 001.74	555.21	4 446.53
40	4 809.	5 001.74	377.35	4 624.39
41	(0.)	5 001.74	192.37	4 809.36
	Total	205071.	105071.	100000.

Exercice 7-24 : Option de remboursement anticipé au gré de l'emprunteur (Henri II, prêt de l'an 1555).

En l'an 1555, le roi Henry pour financer ses guerres empruntait à 4% par foire. Cette même année, une alternative de financement fut proposée

« En ce même an, auant la foyre de la Touffaincts, il reçeut auffi par les mains de certains banquiers la fomme de 3954641 ecuz & plus, qu'ils apeloyent le grand parti : en condition qu'il payeroit à raifon de 5 pour cent par foyres, iusques à 41 foyre ou payement qu'il demoureroit quitte de tout : affauoir laquelle de ces conditions est meilleure pour les banquiers ? » page 307,	Cette année là , avant la foire de la Toussaint, il reçut aussi de certains banquiers la somme de 3 954 641 écus et davantage, sous le nom de grand parti : à condition de payer 5% par foire jusqu'à la 41 ^e ou avant en cas de remboursement du principal : de ces deux possibilités de financement laquelle est la plus avantageuse du point de vue des banquiers ?
---	---

Option de remboursement anticipé au gré de l'emprunteur. Comment évaluer ces deux contrats et comment décider de l'approche la plus avantageuse ?

« est difficile, de forte que les inuenteurs d'icelle ne l'on trouuee qu'à taton & à peu pres avec vn labour inestimable » page 307	(l'évaluation du contrat) Est difficile, de sorte que les inventeurs de ce contrat ne l'on trouvée qu'à taton et approximativement au terme d'un labour inestimable
---	---

L'option de remboursement est exerçable par le client/emprunteur. Le texte n'est pas très précis, mais il semble que l'option puisse être exercée à n'importe quelle échéance intermédiaire (foire ou échéance trimestrielle). Le remboursement semble être in fine. Aux échéances intermédiaires, le client paye donc les

intérêts. Le différentiel de taux entre les deux solutions est énorme (de 16% à 25% annuel). Sans la clause c'est 4% par trimestre et avec c'est 5%. Le raisonnement de Trenchant consiste à comparer les deux. Au bout de 3 mois, les 1% payés (en plus avec la clause) reviennent à un remboursement du capital (si la solution sans l'option est retenue).

« *Tels auancements & leurs merites aioutez, faut qu'ils payent & egalét le principal 100 à chef de 41 terme, fi les conditions font egales.* » page 308.

« *fcaourir refoudre combien vn ecu & fon merite vaut en vne foyre, en deux, en trois, & confequément iufques à 41 foyre* » page 308

L'auteur présente la table actuarielle à 4% (p 309) et son utilisation (*L'usage d'icelle table*), propose un cumul des termes d'actualisation (table page 310), trouve 998 265 338 pour les 41 premiers (page 309). Un calcul précis confirme tous les chiffres sauf les deux derniers (345 au lieu de 338, la table cumulée diverge à partir du terme n° 9). Le reste de l'analyse est un peu obscur de même que la conclusion.

Actuellement ce type de clause est courant (*callable bond* si l'option est activable par l'émetteur de l'emprunt et plus rarement *putable bond* si l'option est activable par l'investisseur/banquier). Les entreprises émettant des emprunts obligataires les assortissent de clauses de rachat anticipé (au gré de l'emprunteur ou de l'émetteur de l'emprunt). Le prix de remboursement est lié à l'échéance à laquelle l'option sera exercée ⁷.

L'évaluation des options nous apprend que l'ingrédient essentiel valorisant les options est la volatilité (ici des taux d'intérêts). Du point de vue de l'émetteur de l'emprunt une forte baisse des taux rend intéressante une levée de l'option quitte à refinancer en émettant un nouvel emprunt à un taux plus bas et en revanche si les taux montent (énormément) le taux fixe de 5% devient avantageux du point de vue de l'émetteur.

L'investisseur (ou le banquier) détient un emprunt à taux fixe et un portefeuille d'options (il a vendu des options d'achat à l'émetteur de l'emprunt), les options ne sont pas indépendantes, l'activation de l'option de l'échéance t (par l'émetteur de l'emprunt qui détient les options d'achats), désactive toutes les options des échéances ultérieures. On peut considérer que ce sont des options européennes si leur exercice ne peut avoir lieu qu'à l'occasion des foires et pas à n'importe quelle date. Le risque de défaut de l'émetteur de l'emprunt doit également être pris en compte.

⁷ Voir la présentation de F. Fabozzi, 2007, *Fixed income analysis*, pages 233-240.

Chapitre 8

La volatilité d'un titre

1. Énoncés des exercices

Exercice 8-1 : Volatilité attendue et 3 scénarii

Une analyse économique couplée à un sondage vous a permis d'établir les prévisions conditionnelles suivantes à trois mois. L'espérance de rentabilité annualisée est de 32 %.

Conditions économiques	Probabilité	E(R)
Normales	1/3	4%
Croissance réelle forte	1/3	30%
Stagflation (récession et inflation)	1/3	-10%

1. Quelle est la volatilité attendue?
2. Annualisez les réponses.

Exercice 8-2 : Volatilité (Examen d'avril 2001)

Calculez la volatilité des taux de rentabilité d'un placement de 400 000 \$ dans Intel, qui dans une période récente a gagné 20% durant 80% du temps écoulé, a perdu 10% sur 10% de la période et a perdu 40% sur 10% de la période. Les taux de rentabilité de cet énoncé sont annualisés.

Vous trouverez l'énoncé et le corrigé de cet exercice dans Grinblatt et Titman, 1997, p. 113.

Exercice 8-3 : Variance des cours et variance des taux de rentabilité

Comment exprimer la variance des taux de rentabilité en fonction de la variance des cours?

Exercice 8-4 : Trajectoire

Une action a un taux de rentabilité attendu de 10 %. À chaque période de un an, soit le cours monte de 30 % soit il baisse de 10 % avec la même probabilité.

Quelle est la volatilité ?

**Exercice 8-5 : Volatilité estimée sur données quotidiennes
durant le « krach de 29 »**

Calculée à partir des données d'Ibbotson, une volatilité estimée à partir de deux années de taux de rentabilité mensuels voit sa valeur annualisée augmenter régulièrement à partir de septembre 1929 et atteindre un pic de 64,8% en septembre 1933.

1. À partir des données quotidiennes du DJIA, estimez la volatilité des entreprises fortement capitalisées de décembre 1927 à décembre 1937 en retenant 20 variations relatives d'indices dans le calcul de chaque volatilité.
2. Quelle valeur maximale de volatilité obtenez-vous ?
3. À quelle date ?
4. Comparez ces deux résultats avec ceux indiqués au début de cet énoncé.

Exercice 8-6: Axa en 1990 et 1991

La guerre du Golfe, d'août 1990 à janvier 1991, marque une période de forte volatilité dans l'histoire boursière récente. Représentez les taux de rentabilité d'Axa de début septembre 1989 à juin 1991. Calculez la volatilité sur les 20 séances et les 40 séances les plus récentes. Sur cette période, quelles sont les dates de constatation de pics de volatilité ? Quelle valeur (annualisée) la volatilité atteint-elle ? Les données de cours nécessaires peuvent être trouvées par exemple sur Datastream ou dans la base de données quotidiennes « AFFI-SBF ».

Exercice 8-7 : La volatilité du Club Med

À partir des cours cotés au plus près de la fin de chaque tranche horaire de 15 minutes, évaluez la volatilité du Club entre fin août et fin décembre 2001. On trouve les données nécessaires à cet exercice sur les CD-Roms mensuels publiés par Euronext, en particulier dans la table « Bdm1d1 ». Le code Bdm, interne à Euronext, d'identification du Club est le 4255.

Vous devez obtenir le résultat du graphique 8-8, reproduit du 11 au 13 septembre 2001. La volatilité y est annualisée sur la base de 252 séances dans l'année et 8,5 heures par jour. La volatilité maximale sur ce trimestre est-elle observée le 12 septembre ? Comparez avec les estimations en données quotidiennes du graphique 8-7.

Exercice 8-8 : Renault et les autres (avril 1999 à mars 2000)

À partir des données de l'exercice 3-22, 1) calculez les volatilités de chaque titre et indice ; 2) annualisez ; 3) critiquez cette approche.

Exercice 8-9 : Variance et carré des taux de rentabilité

Peut-on estimer la volatilité par le carré des taux de rentabilité ou plus précisément par l'espérance du carré des taux de rentabilité ?

1. Écrivez la variance en faisant apparaître l'espérance du carré.

2. À quelle condition l'estimation proposée dans l'énoncé sera-t-elle une approximation acceptable?
3. Quel est, selon vous, l'impact de la longueur de l'intervalle pris en compte dans le calcul du taux de rentabilité sur la qualité de l'approximation?

Exercice 8-10 : Moitié-moitié

Un placement en actions est caractérisé par les deux premiers moments suivants : $(\mu_s; \sigma)$. Un placement au taux sans risque est caractérisé par le taux attendu de μ_r . Exprimez l'espérance de rentabilité et la volatilité de chacune des deux stratégies suivantes :

1. Placer en permanence la moitié de son patrimoine en actions (actif risqué) et l'autre moitié en actif sans risque (stratégie dite équilibrée ou *balanced strategy*).
2. Ou bien tout placer la moitié du temps en actions et l'autre moitié dans un actif non risqué (stratégie à bascule ou *switching strategy*)?

Vous trouverez une analyse de ce problème dans Kritzman (2000, « Puzzles of finance », Wiley), chapitre 4.

Exercice 8-11 : Volatilité, ouverture et clôture

Soient les volatilités suivantes :

$\sigma(\text{fcc})$	$\sigma(\text{foo})$	$\sigma(\text{fco})$	$\sigma(\text{foc})$
2,811%	3,028%	1,563%	2,305%

Les données précédentes indiquent la volatilité estimée sur données quotidiennes de milieu de fourchette pour Eurotunnel de juillet 1991 à décembre 1996. La séance comportait 7 heures sur cette période.

On note fcc l'estimation faite sur milieu de fourchette (f) de clôture (c) à clôture (c) ou foc sur milieu de fourchette (f) d'ouverture (o) à clôture (c), etc...

1. Comment peut-on parler de volatilité à bourse fermée ($\sigma(\text{fco})$)?
2. Comment justifier que les volatilités d'ouverture à ouverture, d'une part, et de clôture à clôture, d'autre part, ne soient pas égales?

Exercice 8-12 : Volatilité et extremums

Parkinson (1980, Journal of Business, « The extreme value method etc ») a proposé d'estimer la volatilité historique en utilisant les extremums des cours observés sur un intervalle donné. Il propose un estimateur exact de la volatilité lorsque l'on connaît effectivement les valeurs extrêmes d'une trajectoire donnée. La variance de cet estimateur est plus faible que celle de l'approche historique classique. Parkinson démontre que :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{4 \times \text{Ln}(2)} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(H_i - B_i) - \overline{(H - B)} \right]^2 \text{ avec } H \text{ et } B \text{ les extrêmes de la}$$

série.

1. Pour quelles raisons cette démarche sous-estimera-t-elle la « vraie volatilité » d'une action ?
2. Le biais d'estimation sera-t-il le même pour tous les titres ?

Exercice 8-13 : Ratios de variance

Calculez les ratios de variances Hebdomadaire/quotidien, pour chacun des titres du CAC40 et pour chacun des titres du DJIA de 2007 à 2010.

Quelles sont les valeurs moyennes ?

Exercice 8-14 : Extraction de la volatilité implicite

L'objectif de cet exercice est de développer l'algorithme de Newton-Raphson permettant d'estimer la volatilité d'une action à partir des prix d'options dont elle sert de support. Il s'agit de mesurer la volatilité implicite aux prix cotés des options.

Connaissant la valeur du sous-jacent (S), la maturité de l'option (T), le prix d'exercice (K), la volatilité (σ) et le taux sans risque (r), la valeur p de l'option correspondante est donnée par la formule de Black-Scholes :

$$\text{call} \quad p = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$\text{put} \quad p = Ke^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Avec

Dans le cas qui nous intéresse, la valeur de p est connue grâce à l'observation du prix de marché de l'option. S et r sont également observés sur le marché. K et T constituent les caractéristiques définissant l'option. Reste donc σ , la volatilité utilisée par le marché pour évaluer l'option, qui n'est pas directement observable et que l'on va chercher à estimer. Le problème est que la fonction développée par Black et Scholes n'est pas inversible. Seules des méthodes numériques permettent d'extraire la valeur de σ .

1. On commence par se fixer une valeur «raisonnable» de volatilité σ_0 . Pour cette valeur de volatilité, le prix Black-Scholes de l'option est égal à $p(\sigma_0)$. Donnez l'expression du développement de Taylor d'ordre 1 de p au point σ_0 . En déduire que l'expression de σ_1 , la valeur de volatilité qui permet d'égaliser le développement effectué avec le prix de marché p_{obs} de l'option, est donnée par : $\sigma_1 = \sigma_0 + \frac{p_{obs} - p(\sigma_0)}{Vega(\sigma_0)}$. Vega(σ_0) est la dérivée

partielle de la fonction d'évaluation de Black-Scholes par rapport à la volatilité. L'expression analytique de cette dérivée est la suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{T^2(2r+\sigma^2)^2 + 4\ln(S/K)^2}{8T\sigma^2}} \times K \left(\frac{S}{K}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}} \sqrt{T}.$$

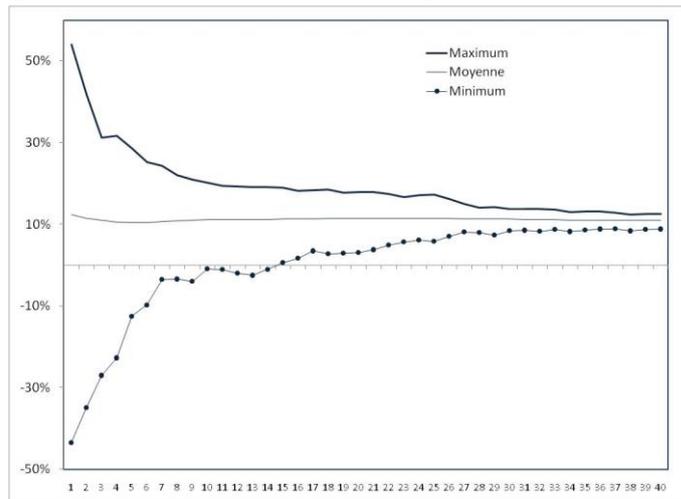
2. De façon plus générale, on a la relation de récurrence : $\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{p_{obs} - p(\sigma_n)}{Vega(\sigma_n)}$. Montrez que si cette suite converge vers une valeur finie σ_s , on a alors $p_{obs} - p(\sigma_s) = 0$.
3. En vous appuyant sur les résultats précédents, décrivez un algorithme permettant d'extraire la volatilité implicite.

4. A la date du 3 mars 1999, le put sur indice CAC40 d'échéance mars 1999 et de prix d'exercice 3 400 cote 10. Sachant que la valeur de l'indice CAC au même instant est de 4 018,08 points, et que le taux sans risque est de 4%, déterminez la volatilité implicite de l'indice CAC (on supposera que le taux de distribution de dividendes est nul). Combien d'itérations sont nécessaires pour atteindre une précision de 1.10^{-6} ? Refaites les mêmes calculs pour une option de mêmes caractéristiques mais de prix d'exercice 3 950 dont le prix observé est de 101,50. Que constatez-vous?
5. Pour les cas où l'on ne dispose pas de formule analytique pour la valeur du Véga de l'option, la valeur de celui-ci peut être approximée en calculant la valeur numérique de la dérivée du prix de l'option au point σ_0 . Détaillez une méthode permettant de calculer cette valeur et refaites les calculs de la question 4. Quel type de problème est-on susceptible de rencontrer avec cette nouvelle méthode?

Exercice 8-15: Risque et horizon de placement

Depuis 1925 jusque fin 2006, le détenteur d'un portefeuille d'actions de forte capitalisation (soit des actions appartenant à l'indice S&P500 à partir des années 60), durant un an voit les 81 rentabilités annuelles comprises entre -43,35 % (en 1931) et +53,97 (en 1933) –cf graphique suivant–.

Graphique : Taux de rentabilité annualisé (placements de durée variable)



Source : à partir des données d'Ibbotson (2007). Placement de durée comprise entre 1 et 40 ans, en actions sur le NYSE de fin 1925 à fin 2006.

Le même graphique indique que la détention sur cinq années consécutives rapporte une rentabilité moyenne annuelle entre -12,45 % et +28,55 %. Sur cette période, un placement d'une durée de 15 ans ou plus assure dans tous les cas une rentabilité positive. Avec une durée de placement portée à 20 ans, le minimum

des taux de rentabilité observé a été de +3,11 % et le maximum de +17,88 %; et pour 40 ans le minimum est de 10,99 % et le maximum de 12,5 %.

1. Ces constatations permettent-elles d'affirmer que le risque d'un placement en actions se réduit avec la durée du placement?
2. Sur longue période ne peut-on dire que les actions, non seulement sont plus rentables (cf chapitre précédent) mais aussi moins risquées?

La lecture de Kritzman (2000, p 49) ou Radcliffe (1997, p 194-203 et p 255), ou de Samuelson (1963, Scientia), peut vous aider à analyser ce problème.

Exercice 8-16 : Diffusion

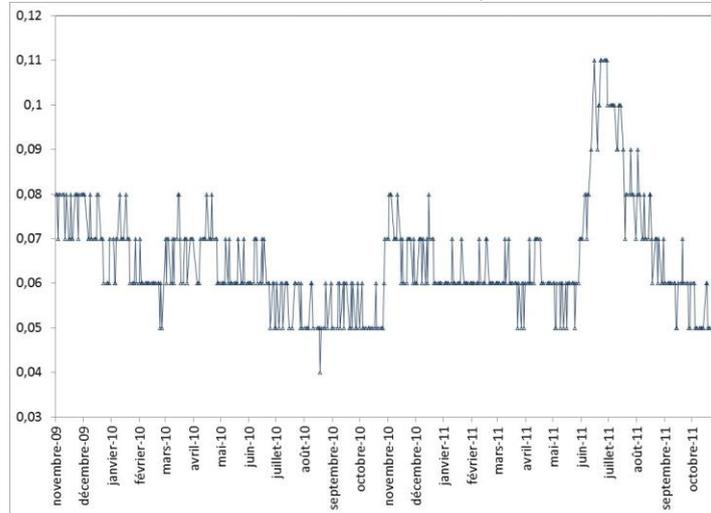
Une action a une valeur initiale de 100. Chaque période le cours peut soit monter (cours est multiplié par 1,07) soit baisser (il est multiplié par 0,93). Représentez les trajectoires possibles avec 3 périodes. Si les probabilités hausse/baisse sont identiques, quelles sont les probabilités des valeurs finales avec 3 périodes (4 dates) ?

Quelle est la variance du processus ?

Exercice 8-17 : Smalto (examen novembre 2012, apprentissage, 7 points)

Smalto est listée sur le marché libre d'Euronext. L'activité de la société est dans le prêt à porter et les sur mesures pour hommes avec ventes en magasins et sur internet. Le Conseil d'administration du 5 octobre 2011, sur délégation de l'Assemblée Générale Ordinaire et Extraordinaire des actionnaires de SMALTO NR du 23 septembre 2011, a décidé le regroupement des actions (*reverse split*) à raison de 1 action nouvelle de 0,20 € de nominal pour 10 actions anciennes de 0,02 € de nominal.

Smalto sur le marché libre d'Euronext à Paris (nov 2009 au 24 oct 2011)



L'avis de regroupement a été publié au BALO du 10/10/2011. A partir du 25/10/2011, le regroupement sera réalisé par échange des actions anciennes de

0,02 € de nominal (code ISIN FR0010647800) contre des actions nouvelles de 0,20 € de nominal (code ISIN FR0011131788), à raison de 1 action nouvelle pour 10 actions anciennes. Le nombre d'actions composant le capital de SMALTO NR après le regroupement : 20.874.997 actions de 0,20 € de nominal.

Chaque séance le plus souvent un seul cours est disponible pour Smalto. Le graphique ci-après représente l'évolution des cours quotidiens sur le marché libre d'Euronext (MTF ou SMN pour système multilatéral de négociation) depuis novembre 2009 jusqu'au 24 octobre 2011 inclus.

Cours de début de mois, Smalto

Date	Cours	Date	Cours
01/11/2010	0,07	01/06/2011	0,07
01/12/2010	0,06	01/07/2011	0,1
03/01/2011	0,06	01/08/2011	0,07
01/02/2011	0,06	01/09/2011	0,06
01/03/2011	0,06	03/10/2011	0,06
01/04/2011	0,06	1/11/2011	0,43
02/05/2011	0,06		

1. Quel est l'échelon de cotation de Smalto ? 1 point
2. Calculez les taux de rentabilité mensuels de Smalto 1 point
3. Calculez la volatilité (annualisée) de Smalto 2 points
4. Les informations sont-elles la seule source de volatilité, en particulier sur un titre comme Smalto ? 1 point
5. Selon vous quelles raisons amènent une entreprise à réaliser un regroupement d'actions ? 2 points

2. Corrigés de certains exercices

Remarque générale sur certaines propriétés utilisées dans plusieurs des exercices. En fin du chapitre 7 (Hamon, 2014), les trois premières démonstrations (page 198) rappellent les propriétés de l'opérateur espérance. En fin du chapitre 8, les deux premières démonstrations (page 224) présentent les propriétés de l'opérateur variance.

Le classeur excel V4C8.XLS comprend diverses feuilles avec des données téléchargeables. Le classeur est à l'adresse <http://dauphinefinance.com/106/data106>.

Feuille n°	Exercice	Description
1		AXA en 1990-1991
2	Livre page 203	Enquête Associés en Finance
3		Valeurs quotidiennes du DJIA de 1927 à 1937
4		Club Méditerranée données par 15 minutes du 3 septembre 2001 au 28 septembre 2001
6		Renault et les autres (1999-2000)

Exercice 8-3 : Variance des cours et variance des taux de rentabilité (corrigé)

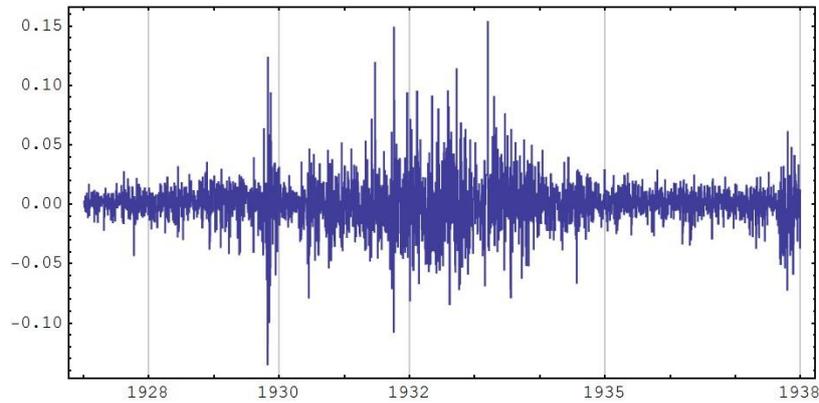
$\sigma^2(\tilde{R}) = E\left[\left[R_i - E(\tilde{R})\right]^2\right)$ correspond à la définition de la variance d'une série de taux de rentabilité R. On remplace, dans la définition de la variance ci-dessus, la définition du taux de rentabilité et de son espérance $E(\tilde{R}) = \frac{E(\tilde{P}) - P_0}{P_0}$ et on écrit

$$\sigma^2(\tilde{R}) = E\left[\left(\frac{P_i - P_0}{P_0} - \frac{E(\tilde{P}) - P_0}{P_0}\right)^2\right]. P_0 \text{ est une constante et les propriétés de l'opérateur}$$

espérance permettent d'écrire $\sigma^2(\tilde{R}) = \frac{1}{P_0^2} E\left[(P_i - E(\tilde{P}))^2\right]$, soit $\sigma^2(\tilde{R}) = \frac{1}{P_0^2} \sigma^2(\tilde{P})$.

Exercice 8-5 : Volatilité estimée sur données quotidiennes durant le « krach de 29 » (éléments de corrigé)

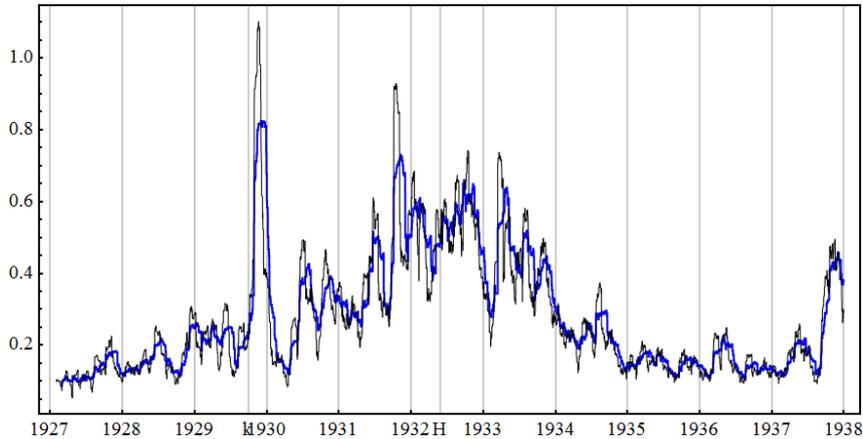
Les données sont disponibles dans une feuille excel (cf. début de section). Avec ces données il est possible de représenter les taux de rentabilité quotidiens (graphique ci-après)



Moyenne	0.000113457
Médiane	0.000800884
Volatilité	0.0201428
Volatilité an	0.321654
Mimi	-0.134719
Maxi	0.153418
Nb observations	2743
Nb obs $\geq 5\%$	46
Nb Obs $\leq -5\%$	46
Nb obs $\geq 10\%$	5
Nb Obs $\leq -10\%$	3

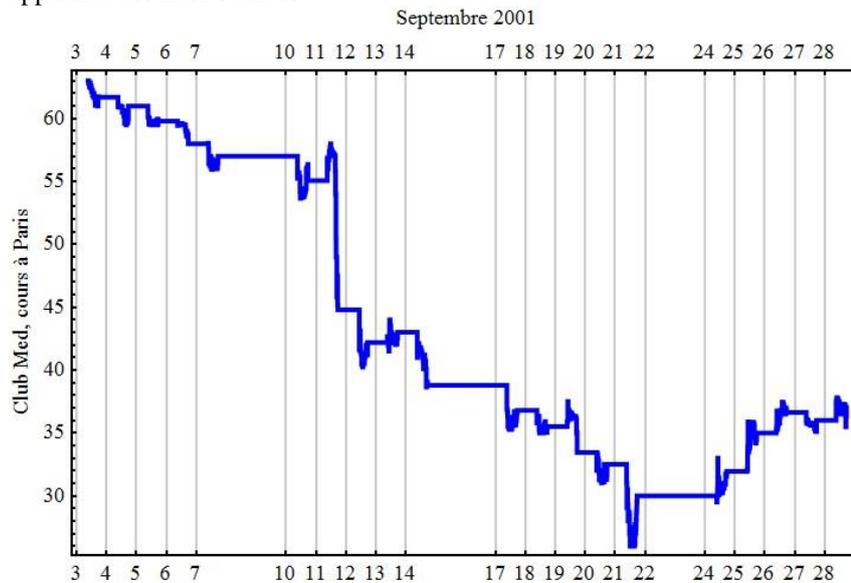
Les caractéristiques de la distribution de probabilité sur cette période sont dans le tableau ci-contre.

Calculée sur les 20 séances les plus récentes, la volatilité annualisée sur la base de 254 séances dans l'année enregistre un pic de 109% le 22 novembre 1929, au lieu du pic de 64,8% en septembre 1933 obtenu lorsque l'estimation est menée sur des données mensuelles. Le calcul en données mensuelles lisse les évolutions comme le ferait une moyenne mobile. Mais l'estimation quotidienne n'est-elle pas elle-même, lissée et décalée ? La volatilité annualisée et calculée sur une fenêtre glissante comportant pour l'une 20 séances et l'autre 40 séances est reportée sur le graphique ci-après. La plus réactive est celle calculée sur 20 séances.

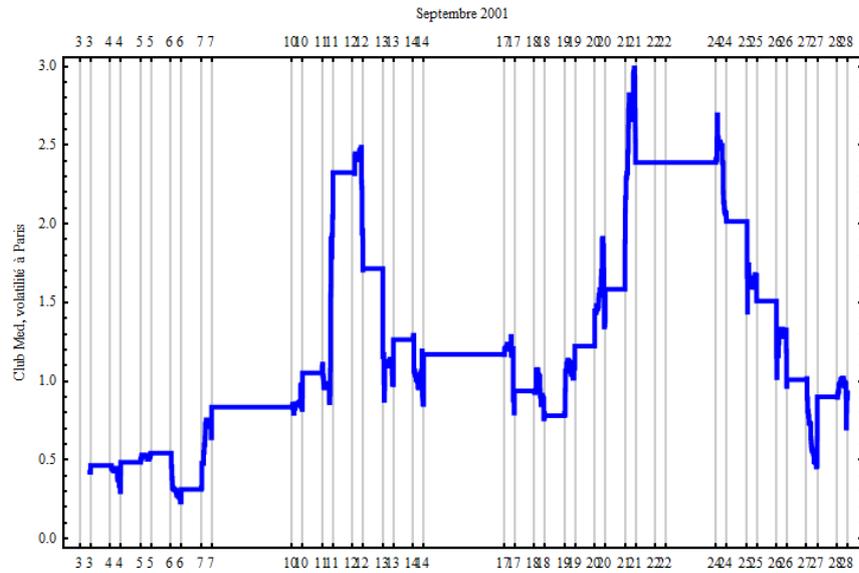


Exercice 8-7 : La volatilité du Club Med (éléments de corrigé)

Les données sont dans une feuille excel présentée en début de cette section. L'évolution du cours de Club Med en septembre est représentée sur le graphique ci-après. En abscisse une représentation strictement chronologique qui fait donc apparaître les inter-séances.



La volatilité annualisée et calculée sur 30 observations est reportée sur le graphique ci-dessus. Le début et la fin de chaque séance est repérée en abscisse suivant une échelle strictement chronologique. On remarque les poussées de volatilité le 11 septembre mais aussi le 21 (jour de l'explosion de l'usine AZF). Les marchés américains rouvrent le 14 septembre seulement. La baisse progressive de volatilité intervient à partir du 24 septembre.



Exercice 8-8 : Renault et les autres (avril 1999 à mars 2000), corrigé partiel

C'est un échantillon de 13 taux de rentabilité mensuels (cf feuille excel décrite en début de section). À partir de cet échantillon, on doit estimer la volatilité de la population. L'estimateur convergent et sans biais est

$$\sigma[R_i] = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_{i,t} - \bar{R}_i)^2}$$

Volatilité	CAC40	IT 50	StoXX	FTE	Renault	Ingénico	ST Gob
mensuelle	6,1%	16,8%	5,6%	12,7%	14,6%	48,4%	9,5%
annualisée	21,1%	58,1%	19,3%	43,9%	50,4%	167,8%	32,9%

Sous excel, la fonction 'ecartype' correspond à cet estimateur. Les résultats sont dans le tableau ci-dessus. Sur la ligne « mensuelle » figure l'estimateur calculé à partir des taux de rentabilité mensuels et sur la ligne « annualisée » on trouve l'estimation en unités annuelles demandée à la question 2.

Ci après le détail des calculs

Date	CAC40	CAC40 ²	FTE	FTE ²	RNO	RNO ²	ING	ING ²
{1999, 4, 1, 0, 0, 0,}	0.0142764	0.000203816	-0.12671	0.0160555	-0.248496	0.0617503	0.00681818	0.0000464876
{1999, 5, 3, 0, 0, 0,}	0.0623311	0.00388516	0.0340599	0.00116008	0.212746	0.045261	0.0699774	0.00489684
{1999, 6, 1, 0, 0, 0,}	-0.020536	0.000421726	-0.0316206	0.000999859	-0.0733689	0.00538299	-0.050211	0.00252114
{1999, 7, 1, 0, 0, 0,}	0.0660409	0.0043614	0.0122449	0.000149938	0.183288	0.0335944	0.0462017	0.0021346
{1999, 8, 2, 0, 0, 0,}	-0.0623619	0.00388901	-0.108871	0.0118529	0.134522	0.0180961	-0.0764331	0.00584202
{1999, 9, 1, 0, 0, 0,}	0.0660977	0.0043689	0.116893	0.013664	0.0612245	0.00374844	0.0666667	0.00444444
{1999, 10, 1, 0, 0, 0,}	-0.00390727	0.0000152667	0.100608	0.0101219	-0.0173077	0.000299556	0.0275862	0.000760999
{1999, 11, 2, 0, 0, 0,}	0.0619073	0.00383251	0.116564	0.0135873	-0.0322896	0.00104262	-0.0562081	0.00315935
{1999, 12, 1, 0, 0, 0,}	0.0908847	0.00826002	0.248352	0.0616785	-0.110212	0.0121468	0.248889	0.0619457
{2000, 1, 3, 0, 0, 0,}	0.133308	0.0177709	0.172535	0.0297684	0.103864	0.0107877	0.761566	0.579983
{2000, 2, 1, 0, 0, 0,}	-0.0537001	0.0028837	-0.000750751	5.63627 × 10 ⁻⁷	0.113856	0.0129633	0.438384	0.19218
{2000, 3, 1, 0, 0, 0,}	0.100206	0.0100412	0.299775	0.0898648	-0.22366	0.0500237	1.52809	2.33506
{2000, 3, 31, 0, 0, 0,}	-0.00484365	0.0000234609	0.0231214	0.000534599	0.0238095	0.000566893	-0.388889	0.151235
Moyenne	0.0345925	0.00461208	0.0658616	0.0191876	0.00984425	0.0196664	0.201726	0.257247

$$\sqrt{\frac{13}{12}} \sqrt{0.004612084081574482 - 0.034592489476296125^2} \quad (* \text{ volat CAC40 échantillon } *)$$

0.0608282

$$\sqrt{13} \sqrt{0.004612084081574482 - 0.034592489476296125^2} \quad (* \text{ volat AN CAC40 échantillon } *)$$

0.210715

1. L'annualisation est obtenue en multipliant la **variance** par 12.
2. Estimer la volatilité sur des données historiques des treize derniers mois suppose, pour donner des résultats satisfaisants, une stabilité de la variance dans le temps. Si la volatilité est changeante, «l'échantillon» est issu de populations différentes et le calcul fait n'a pas grande signification. Une solution consiste à raccourcir le plus possible la longueur de l'historique considéré, mais alors l'intervalle de calcul du taux de rentabilité doit être plus court que celui utilisé dans cet exercice : pourquoi ne pas utiliser les données horodatées du marché et ainsi calculer la volatilité sur données horaires ou sur tranches de quinze minutes?

Exercice 8-13 : Ratios de variance (corrigé)

Le choix ici est de présenter un corrigé sous Mathematica qui donne notamment un moyen d'accès aux données.

Définition d'une fonction VarP

$$\text{VarP}[Data_]:= \text{Module}\{\{nb = \text{Length}[Data]\}, (\frac{nb - 1}{nb}) \text{Variance}[Data]\}$$

Commentaire : la fonction permet le calcul de la variance d'une population, la fonction Variance évaluant celle d'un échantillon

Ratios de variance sur le CAC40

```

RV =
  ((VarP[
    Log[
      Ratios[
        Transpose[FinancialData[#, {{2007, 1, 1}, {2010, 12, 31},
          "Week"}]][[2]]]) /
    ((VarP[
      Log[
        Ratios[
          Transpose[FinancialData[#, {{2007, 1, 1}, {2010, 12, 31},
            "Day"}]][[2]]])]) & /@ FinancialData["^FCHI", "Members"];
Mean[RV]

```

Commentaire : vers la fin de la commande ci-dessus, ^FCHI désigne le CAC40 et avec l'argument Members ce sont chacun des titres de l'indice avec lesquels on travaille. Cette solution parfaitement correcte selon la documentation Mathematica ne fonctionne plus début 2014. Renseignement pris il s'agirait d'un problème de licence, Wolfram comme Yahoo ! s'alimentent auprès de fournisseurs de données d'indice qui n'autoriseraient plus ce type d'extraction ? Le problème serait au niveau S&P DJ mais alors on ne comprend pas bien pourquoi cela affecte apparemment tous les indices. Il est possible à la place de la commande ci-dessus (Members) de donner la liste des mnémoniques des titres de l'indice, quitte à écrire une commande allant chercher l'information sur le web (mais c'est un autre exercice).

Par exemple avec <https://finance.yahoo.com/q/cp?s=DJI> (juin 2014) on accède à la page Yahoo ! sur laquelle figure (colonne Symbol) les Mnémo courant du DJ. Et <https://finance.yahoo.com/q/cp?s=FCHI> pour le CAC40. Mais pour le S&P500 (^GSPC) cela ne fonctionne pas !

FinancialData permet l'extraction des données. L'extraction est faite en hebdomadaire (en haut, argument week) et en quotidien (en bas).

Log[Ratios etc, permet le calcul des taux de rentabilité logarithmiques.

La commande renvoie directement le résultat, à savoir pour chaque titre de l'indice le ratio des variances calculées sur la période spécifiée. La valeur moyenne, calculée avec la fonction Mean (fin de la ligne de commande), est de 5,033 pour les titres du CAC40 sur cette période.

Il est ensuite immédiat d'obtenir la moyenne des ratios pour d'autres ensemble de titres. Ainsi les titres du SBF80 (PA:PX8) ou ceux du DJIA (^DJI).

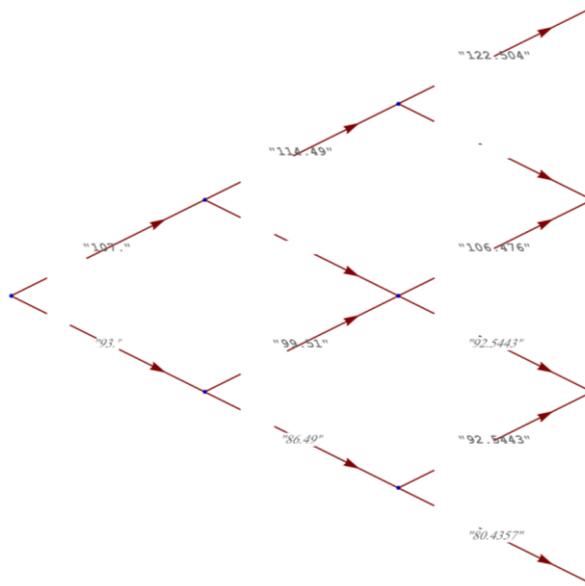
On s'attend à ce que le ratio soit plus faible (variance quotidienne plus forte) pour les titres présentant des frictions et/ou des problèmes de liquidité plus marqués (cf. le cours, section 6.3, pages 212 et suivantes).

Exercice 8-16 : Diffusion (corrigé partiel)

Avec une valeur initiale de 100, 3 périodes (et 4 dates), un mouvement à la hausse de 1,07 et à la baisse de 0,93, on obtient un arbre symétrique recombinaut avec 3+1 possibilités finales de cours.

Les valeurs finales ne sont pas équiprobables. Si les probabilités sont de 50% à la hausse et à la baisse, le cours le plus haut et celui le plus bas ont la même probabilité d'occurrence de $0.5^3 = 0,125$. Trois chemins permettent d'atteindre

les deux valeurs finales intermédiaires, par exemple up, up, down ; up, down, up et down, up, up, soit $3 \times 0,5^3 = 0,375$.



La volatilité sur les 3 périodes (l'année ?) est de 0,121244 et de 7% sur une période élémentaire (la moyenne des taux de rentabilité est nulle).

Remarque (non demandé) : Le lien entre la volatilité et les mouvements à la hausse et à la baisse est présentée par Cox, Ross et Rubinstein (1979), dans l'excellent article du *Journal of Financial Economics* qui présente l'approche binomiale dans le contexte de l'évaluation d'options, de la manière suivante (page 249) :

$$up = \text{Exp} \left[\sigma \sqrt{\frac{T}{n}} \right] \text{ et } down = \frac{1}{up}$$

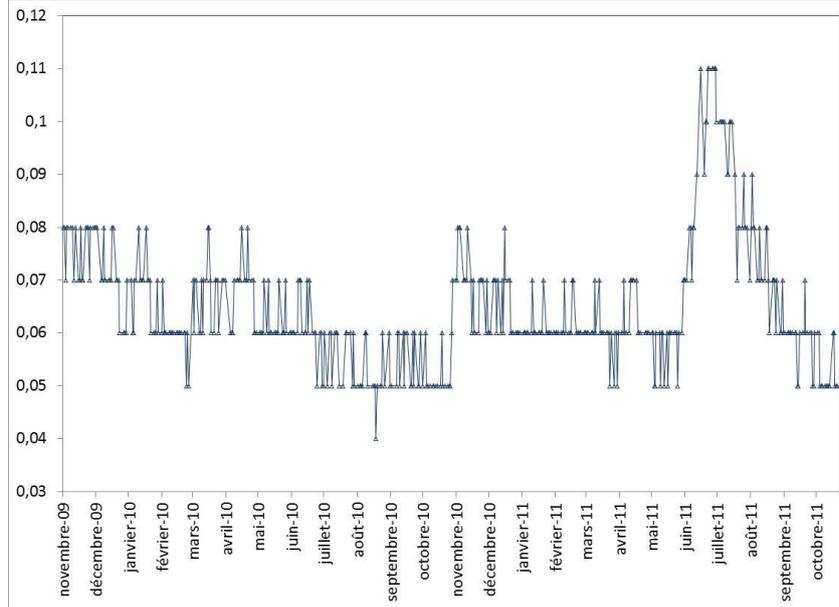
Exercice 8-17 : Smalto (examen novembre 2012, apprentissage, 7 points)

Il s'agit d'un exercice de synthèse, les questions portent essentiellement sur la volatilité d'un titre.

Cours de début de mois, Smalto

Date	Cours
01/11/2010	0,07
01/12/2010	0,06
03/01/2011	0,06
01/02/2011	0,06
01/03/2011	0,06
01/04/2011	0,06
02/05/2011	0,06

Date	Cours
01/06/2011	0,07
01/07/2011	0,1
01/08/2011	0,07
01/09/2011	0,06
03/10/2011	0,06
1/11/2011	0,43

Smalto sur le marché libre d'Euronext à Paris (nov 2009 au 24 oct 2011)**1. Quel est l'échelon de cotation de Smalto ? 1 point**

Il est de 1 centime (la grille de prix apparaît nettement en ordonnée du graphique). Le graphique d'évolution des cours montre les sauts (discontinuités) imposés par l'échelon.

Le graphique ne représente que les cours mais on voit que la fourchette est calée sur l'échelon et est de 1 centime. (non demandé)

2. Calculez les taux de rentabilité mensuels de Smalto 1 point

Le coefficient correcteur est de 10. Coef=Cours théorique action nouvelle / cours ancien. 10 fois moins d'actions après.

Une correction en aval limite les calculs. Dans le tableau c après on corrige en amont.

Taux continu ou discret au choix (ici discret)

Date	Cours	Cours corrigés	Rentab
01/11/2010	0,07	0,7	
01/12/2010	0,06	0,6	-0,1429
03/01/2011	0,06	0,6	0
01/02/2011	0,06	0,6	0
01/03/2011	0,06	0,6	0
01/04/2011	0,06	0,6	0
02/05/2011	0,06	0,6	0
01/06/2011	0,07	0,7	0,1667
01/07/2011	0,1	1	0,4286
01/08/2011	0,07	0,7	-0,3
01/09/2011	0,06	0,6	-0,1429
03/10/2011	0,06	0,6	0
01/11/2011	0,43	0,43	-0,2833

3. Calculez la volatilité (annualisée) de Smalto 2 points

Population ou échantillon admis éventuellement commentaire (non imposé ?)
 Si pop : cet ensemble d'obs constitue un ensemble cohérent de caractéristiques homogène, c'est une pop
 Si échantillon : 11 obs tirées d'un historique plus important, c'est un échantillon annualisé

		(12)
population	0,1863	64,53%
échantillon	0,1945	67,38%

4. Les informations sont-elles la seule source de volatilité, en particulier sur un titre comme Smalto ? 1 point

Non. Ici une source importante de la volatilité est réglementaire. Euronext fixe l'échelon à 1 centime ce qui est trop fort pour un niveau de cours de quelques centimes. L'échelon produit des discontinuités dans le processus de formation des cours et donc produit de la volatilité

La concurrence entre les donneurs d'ordres ne se fait plus que sur les prix, mais implique une habilité à gérer des files d'attente. Ici de fortes quantités en carnet ne sont pas (forcément) synonyme de liquidité : ce sont des files d'attente (les donneurs d'ordres font la queue avec une forte proportion d'ordres annulés). Ces comportements particuliers (éventuellement opportunistes) sont induits par la réglementation inadaptée : il suffirait de réduire l'échelon !

5. Selon vous quelles raisons amènent une entreprise à réaliser un regroupement d'actions ? 2 points

Ramener le cours dans une plage de prix de négociation acceptable (usuelle). Mais sous 1€ après l'argument ne pèse pas lourd.

Ne plus être une « penny stock » action « à quatre sous » au statut dévalorisé (mais ici on est toujours sous 1€ après !)

Réduire l'échelon (relatif) de cotation et ainsi réduire les frictions (2 points)

L'augmentation du cours permet (quelquefois) de passer au-dessus de la valeur nominale ce qui est nécessaire avant toute augmentation éventuelle de capital

Chapitre 9

Distribution de probabilité des taux de rentabilité

1. Énoncé des exercices

Exercice 9-1: Richesse finale

À partir d'une valeur initiale de 1, un placement en actions enregistre des taux de rentabilité annuels de +10 %, -20 % et +30 %, 1) quelle est la valeur du placement au bout de trois ans ? 2) Calculez la moyenne des taux de rentabilité.

Exercice 9-2 : Corrélation sérielle d'ordre un **

Fama en 1965 propose un test d'existence de la variance des taux de rentabilité des 30 actions américaines composant l'indice Dow Jones. Il propose de permuter au hasard les taux de rentabilité, puis de calculer le coefficient de corrélation, au décalage un, entre les taux de rentabilité successifs. Ce coefficient de corrélation empirique est calculé pour des échantillons de taille de plus en plus importante. La taille minimale de l'échantillon est de 5, puis augmente jusqu'à la prise en compte de toutes les informations disponibles.

1. Pourquoi permuter au hasard les taux de rentabilité ?
2. Pourquoi calculer un coefficient de corrélation sérielle et non pas une variance ?
3. Vers quelle valeur converge le coefficient de corrélation lorsque le nombre d'observations augmente indéfiniment ?
4. Reproduisez le test de Fama à partir des taux de rentabilité mensuels publiés par Ibbotson depuis 1925 pour les actions américaines, peut-on conclure à l'existence de la variance ?

Exercice 9-3 : Devin ou hasard?

On suppose que la moyenne des taux de rentabilité est de 11% et que l'écart type est de 22%. Chaque « analyste » donne au hasard une valeur d'indice dans la distribution de probabilité.

1. Combien faut-il de «prévisions» d'analystes pour que l'on s'aperçoive 25 ans après qu'un analyste avait donné la bonne réponse (valeur effectivement constatée de l'indice) à 5% près? À 1% près ?
2. Avez-vous une idée du nombre d'analystes financiers, de journalistes financiers (professionnels à plein temps) ?

Exercice 9-4 : Manhattan

En septembre 1626, Pierre Minuit, gouverneur de la *West India Company*, acheta l'île de Manhattan aux Indiens pour la somme de 60 guilders, soit l'équivalent de 24 dollars de l'époque pour une île de 31 miles carrés (Jorion et Goetzmann, 1999). Supposons un taux de rentabilité espéré de 6 % et une volatilité de 20 % :

1. Combien d'années faut-il pour que la somme accumulée soit nécessairement positive en admettant 5% d'erreur?
2. Même question, avec la même volatilité, mais en supposant un taux de rentabilité attendu de 3%?

Exercice 9-5 : Enquête d'opinions Associés, juin 1998

Suivant le sondage d'opinion de début juin 1998 à la question « Quelle sera la performance exprimée en pourcentage, réalisée par l'indice SBF 120, par rapport à son niveau de 2 818,4 au 4 juin 1998, à la fin des deux périodes suivantes ? ». Les réponses obtenues ont permis de calculer l'espérance et l'écart type des taux de rentabilité. L'espérance du taux de rentabilité à 3 mois est de +2,17%, et à 6 mois de +5,16%. L'écart type du taux de rentabilité à 3 mois est de 4,27%, et à 6 mois de 7,04%. Par ailleurs, la trajectoire observée a amené l'indice SBF 120 à 2 496,27 en clôture du 4 septembre et à 2 530,37 en clôture du 4 décembre 1998.

1. Les prévisions sont-elles significativement différentes des réalisations?
2. Tracez, à partir du niveau atteint le 4 juin 1998 et des anticipations formulées par les sondés, une trajectoire prévisionnelle de cours avec un tunnel à 2 écarts types.

Exercice 9-6 : Probabilité de pertes

De début 1926 à fin 1998, la moyenne des taux de rentabilité annuels est de 13,17% et l'écart type de 20,26%, suivant les données d'Ibbotson. Appliquez le questionnaire de Kritzman (2000) à cet ensemble de données :

1. Quelle est la probabilité d'une perte de 10% ou plus sur une année?
2. Quelle est la probabilité d'une perte de 10% renouvelée chaque année sur plusieurs années?
3. Quelle est la probabilité d'une perte accumulée de 10% sur plusieurs années?
4. Quelle est la probabilité de perdre 10% ou plus sur n années ?
5. Quelle est la probabilité qu'une barrière donnée soit franchie durant la période d'investissement?

Exercice 9-7 : Trajectoires futures de 2000 à 2025

De décembre 1925 à décembre 1999, les rentabilités des actions fortement capitalisées du NYSE ont été caractérisées par des taux de rentabilité annualisés de 12,71% en moyenne et de 19,66% d'écart type. On admettra une hypothèse de distribution lognormale des taux de rentabilité.

1. Établissez un intervalle de confiance à 95% pour la trajectoire des cours avec l'horizon n allant de 1 à 25 ans.
2. Dessinez un intervalle de confiance pour le taux de rentabilité composé annuel, sur un horizon n avec n allant de 1 à 25 ans, et un risque d'erreur de 5% puis de 2,5%.

Exercice 9-8: Distribution de la richesse finale

Une action a aujourd'hui un cours de 100. La loi suivie par les taux de rentabilité est lognormale. Représentez graphiquement la distribution de probabilité de la valeur finale de l'action dans un an, sous les hypothèses suivantes :

3. l'espérance de rentabilité est nulle et aucun dividende n'est attendu. Testez deux hypothèses de volatilité : 10% et 100%.
4. Avec une volatilité de 100%, quelle est la probabilité à l'horizon de un an que le cours dépasse 150 ? et qu'il baisse en-dessous de 50 ?
5. l'espérance de rentabilité est de 12% et un dividende de 3 devrait être détaché dans 6 mois par l'action A. Testez deux hypothèses de volatilité : 10% et 100%.

Exercice 9-9 : Trajectoires sur Cap Gemini

Fin juin 1996, le cours de Cap Gemini est de 200 FF. L'action n'a pas versé de dividendes dans les années les plus proches. À partir des cours cotés en début d'heure depuis janvier 1995, les caractéristiques résumées des taux de rentabilité sont les suivantes : la moyenne annualisée du taux continu est estimée à +12,57 %, l'écart type annualisé est de 35,2 % depuis 1995 et de 25 % en ne prenant en compte que les 50 dernières heures de cotation. La volatilité annualisée estimée sur les 50 dernières heures a été comprise entre 17 % et 70 % au maximum depuis début 1995.

Le conseil d'administration et la direction de l'entreprise vous (cadres supérieurs) proposent un plan de souscription de *stock-options* à échéance fin janvier 2000. Le prix d'exercice des options est de 80 FF. Cette proposition vous amène à vous poser les questions suivantes, avant toute évaluation plus précise des options d'achat et du prix que vous êtes prêt à payer pour les acquérir :

1. Entre quelles bornes le cours devrait-il se situer fin janvier 2000, avec un intervalle de confiance de 90 %, de 95 % ? de 99 % ?
2. À quelle probabilité peut-on estimer que le cours passe sous 100 FF d'ici fin janvier 2000 ?
3. À quelle probabilité peut-on estimer que le cours passe sous 80 FF d'ici fin janvier 2000 ? À quelle probabilité peut-on estimer que le cours dépasse 500 FF fin janvier 2000 ? Et dépasse 1 000 FF ? Et dépasse 1 500 FF ? Et dépasse 2 200 FF fin mars 2000 ?

4. Quels ont été les cours effectivement cotés fin janvier 2000, fin mars 2000 et fin août 2002 ? Commentez.
5. Quelle est la valeur de cette option qui vous est proposée ?

Vous remarquerez que les réponses aux questions de cet exercice (et la démarche à suivre pour y répondre) devraient être maîtrisées par tout cadre susceptible de se voir offrir une telle opportunité, que sa formation initiale soit en finance ou dans d'autres disciplines.

Exercice 9-10 : Stock options sur Thalès

Le cours de l'action Thalès est de 31,72€ le 5 mars 2013 en clôture de séance à Paris. Une dirigeante de Thalès détient des *stock options*, exerçables à tout moment au prix d'exercice de 35€. Les options expirent le 2 juillet 2013. Quelle est la probabilité que les options expirent en-dedans ?

2. Corrigés de certains exercices

Exercice 9-1: Richesse finale, corrigé

Deux approches donnent la même valeur de richesse finale. 1) À partir des taux périodiques : $W_3 = W_0 \times (1 + 10\%) \times (1 - 20\%) \times (1 + 30\%) = W_0 \times 1,144$.

Les taux composés en continu sont $\text{Ln}(1,1)=9,531\%$; $\text{Ln}(0,8)=-22,314\%$; $\text{Ln}(1,3)=26,236\%$.

$$\text{On peut donc écrire } W_3 = W_0 \times e^{(9,531\% - 22,314\% + 26,236\%)} = W_0 \times 1,144.$$

La moyenne des taux de rentabilité périodiques est de 6,67% et de 4,48% pour la moyenne des taux composés en continu. La correction de la moyenne périodique, en soustrayant la moitié de la variance (l'écart type est de 20,548%), donne une moyenne ajustée de 4,56%. Le calcul direct de la moyenne géométrique du taux de rentabilité : $\sqrt[3]{\frac{1,144}{1}} - 1 = 4,586\%$.

Moment par rapport à la moyenne (cas normale) ou moment par rapport à zéro (cas log normale). V est le deuxième moment par rapport à la moyenne, soit la variance. Alors que M2 est le deuxième moment par rapport à 0.

Exercice 9-4 : Manhattan (corrigé)

1. \tilde{X} distribué suivant loi normale $\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$, $t = \frac{\mu - 0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ et $N = \left(\frac{t \times \sigma}{\mu}\right)^2$. Avec

5% d'erreur et une hypothèse de normalité, $t = -1,645$. Soit

$$N = \left(\frac{-1,645}{6\%} \times 20\%\right)^2 = 30,07.$$

2. Pour une volatilité de 20 %, le nombre d'années passe de 30,07 à 120 lorsque l'espérance de rentabilité passe de 6 % à 3 %.

Tableau 9-1 : Durée minimale du placement

	17%	18%	19%	20%	21%	22%	23%	24%	25%
1%	782	877	977	1 082	1 193	1 310	1 431	1 559	1 691
2%	196	219	244	271	298	327	358	390	423
3%	87	97	109	120	133	146	159	173	188
4%	49	55	61	68	75	82	89	97	106
5%	31	35	39	43	48	52	57	62	68
6%	22	24	27	30	33	36	40	43	47
7%	16	18	20	22	24	27	29	32	35
8%	12	14	15	17	19	20	22	24	26
9%	10	11	12	13	15	16	18	19	21
10%	8	9	10	11	12	13	14	16	17
11%	6	7	8	9	10	11	12	13	14
12%	5	6	7	8	8	9	10	11	12
13%	5	5	6	6	7	8	8	9	10
14%	4	4	5	6	6	7	7	8	9
15%	3	4	4	5	5	6	6	7	8

Note : En ligne figurent différentes hypothèses d'espérance de taux de rentabilité et en colonnes différentes hypothèses de volatilité annualisée. Le tableau donne le nombre minimal d'années de placement, de façon à ce que la somme soit positive avec 5% d'erreur.

Exercice 9-6 : Probabilité de pertes, corrigé

- Entre 1926 et 1998, on dénombre 73 taux de rentabilité annuels. Suivant "Ibbotson Yearbook, 1999", huit années sont caractérisées par une baisse de 10% ou plus (en 1930, 31, 37, 1941, 1957, 1966, 1973 et en 1974). La fréquence de ces années à perte est de $8/73=10,96\%$. Une réponse est toutefois possible sans avoir accès à cette source. En supposant une distribution lognormale des taux, l'équivalent continu d'une baisse de 10% est $\ln(1-10\%) = -10,54\%$. Les deux premiers moments centrés de la distribution des taux continus sont théoriquement de 10,73% et 18,15%. Les deux premiers moments calculés sur la série des taux continus annuels sont de 10,75% et 19,23% jusqu'en 99 et de 10,63% et 19,34% de 1926 à 1998. La valeur centrée réduite (standardized value) s'écrit $\frac{-10,54\% - \bar{x}}{\sigma} = \frac{-10,54\% - 0,1063}{0,1934} = -1,0944$. Si la série des taux continus est distribuée normalement, la valeur normée réduite donne le nombre d'écart-types entre la moyenne de la distribution et la valeur cible. La réponse à la question posée est obtenue par lecture dans une table de la loi normale et interpolation. À -1,1 on lit 13,56%; à -1,09 on lit 13,78%; soit une probabilité recherchée de 13,69% environ. Un calcul plus précis peut être réalisé par exemple sous excel où la formule **Loi.Normale.Standard(-1.0944)** renvoie la valeur **13,689%**.
- On cherche à estimer la probabilité que l'investissement se déprécie d'au moins 10% en moyenne chaque année sur une période de 10 ans. Sur un horizon de 10 ans $\frac{(-10,54\% \times 10) - (0,1063 \times 10)}{0,1934 \times \sqrt{10}} = -3,4609$. Soit 0,0269%, pour un horizon de 10 ans. La même démarche donne 0,70% pour un

horizon de 5 ans, ou 6,08% pour un horizon de 2 ans. Et bien sûr 13,689% pour un horizon de 1 an (voir question 1).

3. On s'intéresse ici à la perte cumulée sur un horizon donné. Une perte de 10% sur n ans correspond à une perte annualisée de $x\%$, avec $(1-x)^n = (1-10\%)$ et $x = 1 - \sqrt[n]{1-10\%}$. Pour $n=10$ ans, $x=1,048\%$ et $\frac{-10,54\% - (0,1063 \times 10)}{0,1934 \times \sqrt{10}} = -1,91044$. Sous Excel, la formule

Loi.Normale.Standard(-1.91044) renvoie la valeur 2,804%. Pour $n=5$, la probabilité est de 7,04% et de 10,26% pour $n=3$.

4. $\left(\frac{-10,54\% - 0,1063}{0,1934} \right)^n$ est la centrée réduite associée à un gain supérieur

à -10% chaque année pendant n années. Le complément à 1 donne la variable centrée réduite permettant le calcul de la probabilité de perdre 10% ou plus sur n années. Avec $n=10$, on obtient une probabilité de 77,04%. Si n augmente, la probabilité également augmente. Avec $n=5$, la probabilité est de 52,09% et avec $n=2$, la probabilité est de 25,50%.

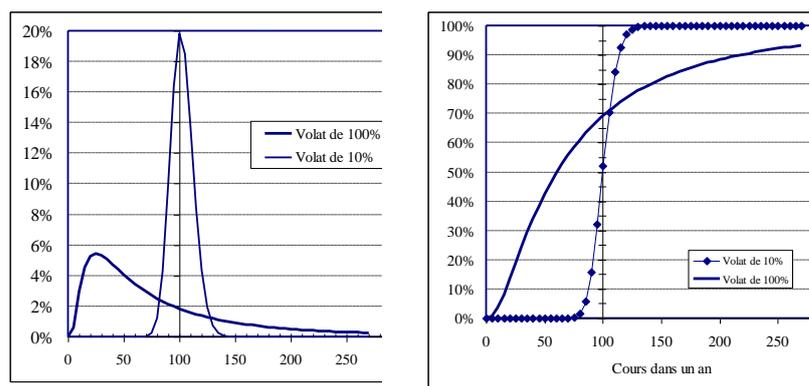
5. Supposons une gestion sur x années, mais contrainte (ou pénalisée) par tout franchissement d'une barrière (perte de 10% ou plus) à un point quelconque d'ici l'horizon fixé. La probabilité de franchissement de la barrière est égale

$$\text{à } N \left[\frac{\text{Log}_e \left(\frac{C}{S} \right) - \mu \times T}{\sigma \times \sqrt{T}} \right] + \left(\frac{C}{S} \right)^{\frac{2 \times \mu}{\sigma^2}} \times N \left[\frac{\text{Log}_e \left(\frac{C}{S} \right) + \mu \times T}{\sigma \times \sqrt{T}} \right] \quad (\text{cf Karlin et Taylor, 1975}).$$

Avec $N(\cdot)$ la distribution de probabilité cumulée de la loi normale, S la valeur de départ, C le seuil critique, T est l'horizon en nombre d'années et μ , σ les deux premiers moments (taux continus). Avec une barrière à 10% de pertes, $C=0,9$ et avec $T=10$ on obtient la probabilité de 54,94%.

Exercice 9-8 : Distribution de la richesse finale, Corrigé partiel :

Graphique 9-1: Distribution lognormale de la richesse dans un an



Le résultat demandé à la question 1 est celui du graphique ci-dessus. L'augmentation de la volatilité fait apparaître l'asymétrie de la distribution lognormale.

Avec la volatilité de 100 %, la probabilité de perdre la moitié du capital investi est d'environ 45 % et celle d'augmenter son capital de 50 % n'est que d'environ 18 %.

A l'adresse vous pouvez acquérir un ensemble de fonctions intégrables à Excel et vous permettant d'obtenir une réponse immédiate aux questions posées.

Exercice 9-9 : Trajectoires sur Cap Gemini, éléments de corrigé

On suppose une distribution du taux composé continu suivant une loi normale (et donc une distribution du taux discret suivant une loi lognormale). La distribution de probabilité du cours de fin de période est une loi normale de paramètres.

$$\ln(S_{2000}) :: \phi \left(\ln(200) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \times 3,58333; \sigma \times \sqrt{3,58333} \right)$$

La fraction d'années entre les deux dates est de 3 ans et 7 mois soit $T-t=3,58333$. En notant Vol la volatilité en base annuelle, le logarithme du cours de fin de période est distribué suivant une loi normale de paramètres $(5,29832+3,58333 \times (0,1257-0,5 \times \text{Vol}^2))$ et $0,5 \times \text{Vol}^2$.

1. Pour une loi normale centrée réduite, 95% des observations sont à + ou - 1,95996 écarts type de la moyenne et à 99% le nombre d'écarts type est de 2,57583. Le logarithme du cours s'écrit donc

$$\ln(S_{2000}) = 5,29832 + 3,58333 \times (0,1257 - 0,5 \times \text{Vol}^2) \pm 1,95996 \times 3,58333 \times \text{Vol} .$$

Le cours de fin d'horizon s'exprime donc ainsi :

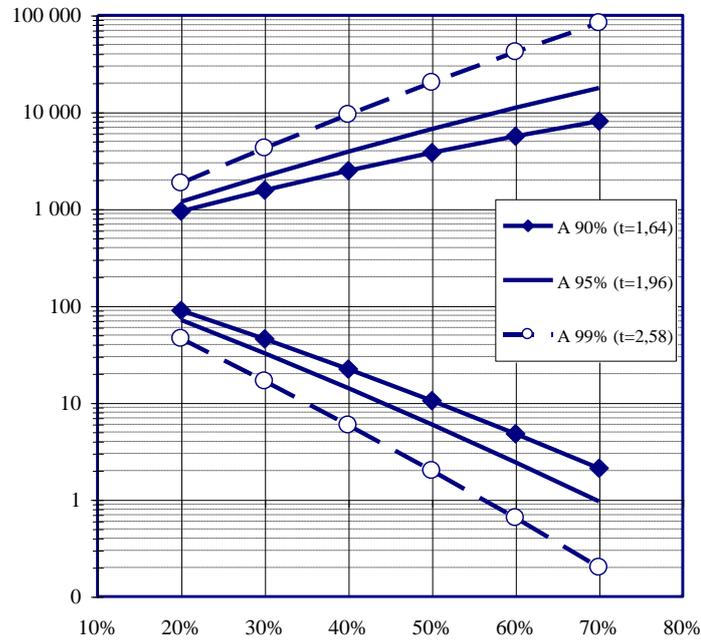
$$S_{2000} = e^{5,29832+3,58333(0,1257-0,5 \times \text{Vol}^2) \pm 1,95996 \times 3,58333 \times \text{Vol}} .$$

Suivant l'intervalle de confiance et la valeur de la volatilité (notée Vol), les bornes de cours sont indiquées dans le tableau ci après.

Tableau 9-2: Intervalles de confiance sur le cours de Cap Gemini, en janvier 2000

Vol	A 90% (t=1,64485)		A 95% (t=1,95996)		A 99% (t=2,57583)	
	Borne inférieure	Borne supérieure	Borne inférieure	Borne supérieure	Borne inférieure	Borne supérieure
20%	89,86	949,45	71,70	1 190,00	46,11	1 850,27
30%	45,57	1 565,10	32,48	2 196,12	16,75	4 257,80
40%	22,30	2 489,14	14,19	3 910,22	5,87	9 453,07
50%	10,53	3 819,39	5,98	6 717,14	1,99	20 248,80
60%	4,79	5 654,27	2,43	11 132,80	0,65	41 846,90
70%	2,11	8 076,02	0,96	17 801,80	0,20	83 438,10

Graphique 9-2 : Cours extrêmes de fin de période suivant la volatilité et un risque d'erreur de 1 à 10 %



À 90 %, les bornes définissent les valeurs extrêmes pour 90 % des cas (les triangles sur le Graphique 9-2), il reste donc 5 % de « chances » d'observer un cours inférieur au minimum et 5% d'en observer un autre au dessus du maximum indiqué dans le tableau. Les résultats du tableau appellent deux commentaires : à un niveau de volatilité donné, les bornes sont plus éloignées lorsque le pourcentage d'observations s'inscrivant entre les deux est de plus en plus important, ce qui est parfaitement logique. Pour un niveau de volatilité de 40 %, passer d'un intervalle de confiance de 90 % à un intervalle à 99 % fait passer la borne maximale de 2 489,14 FF à 9 453,07 FF. Par ailleurs, pour un intervalle de confiance donné, les bornes sont d'autant plus éloignées l'une de l'autre que la volatilité est élevée, ce qui est là encore parfaitement cohérent. On remarque qu'avec 70 % de volatilité et en admettant 1 % de possibilité de se tromper, on peut dire en juin 1996, que le cours de Cap Gemini sera en janvier 2000, entre 20 centimes et 83 438,10 FF, soit que tout (ou presque) est possible.

2. La probabilité que le cours soit inférieur ou égal à 100, à l'horizon de fin janvier 2000 dépend du niveau de volatilité retenu et du risque d'erreur accepté. Dans une première étape on calcule la valeur centrée réduite Z, elle peut être exprimée ainsi :

$$3. \quad 100 = e^{5,29832+3,58333(0,1257-0,5 \times Vol^2)+Z \times 3,58333 \times Vol} \quad \text{ou}$$

$$5,29832 + 3,58333 \times (0,1257 - 0,5 \times Vol^2) + Z \times 3,58333 \times Vol = Ln(100)$$

$$Z = \frac{Ln(100) - 5,29832 - 3,58333 \times (0,1257 - 0,5 \times Vol^2)}{3,58333 \times Vol}$$

Soit en retenant une valeur de volatilité de 50%, $Z = -0,388273$ et la fonction de probabilité cumulée de la loi normale nous dit que cela correspond à une probabilité de 34,89 % (cf tableau suivant). Tous calculs faits on obtient le tableau suivant :

Tableau 9-3 : Probabilité d'un cours sous ou au-dessus d'un objectif

Cours en janvier 2000	Volatilité		
	20%	50%	70%
Sous 80	3,54%	30,40%	42,27%
Sous 100	6,74%	34,89%	45,78%
Au dessus de 290	50,40%	41,84%	37,50%
Au dessus de 500	22,66%	30,50%	29,61%
Au dessus de 1 500	1,12%	13,07%	16,51%
Au dessus de 2 200 en jnv	0,24%	9,06%	13,00%

- Fin mars 2002 est à 3 ans et 9 mois de la date d'analyse, soit 3,75 années. Le logarithme du cours fin mars 2000, est distribué normalement avec une moyenne M de $5,29832+3,75(0,1257-0,5 \text{ Vol}^2)$ et un écart type V de $3,75 \text{ Vol}$. La valeur centrée réduite Z est $(Ln(2\ 200) - M)/V$. Avec une volatilité de 70 %, la probabilité de dépasser 2 200 fin mars est de 13,92 % ; elle est de 10,07 % avec 50 % de volatilité et de 0,38 % avec 20 % de volatilité.
- Les cours les plus élevés envisagés ci-dessus ont été effectivement atteints. Puis le cours est redescendu avec la baisse générale des valeurs technologiques et plus spécifiquement la crise de confiance envers les sociétés d'audit pour atteindre 27,36 € le 15 août 2002 (la cotation en € intervient début janvier 1999, le cours minimum équivaut à 179,47 FF alors que le titre a détaché des dividendes après 1996).

Exercice 9-10 : Stock options sur Thalès

Si le 2 juillet 2013 le cours est inférieur (ou égal) au prix d'exercice, les options ne valent rien. Le graphique 9-10 retrace l'évolution du cours de l'action Thalès depuis début 2000. La volatilité estimée sur les 30 dernières séances est de 40 % en rythme annuel. La date d'échéance de l'option est distante de 119 jours (0,30375 année). Une hausse d'au moins $Ln\left(\frac{35}{31,7}\right) = 9,9\%$ du cours est nécessaire (soit $0,09/0,30375 = 30,38\%$ en rythme annuel) pour que l'option n'expire pas en dehors.

Soit x distribué suivant une loi normale d'espérance 0 et d'écart type égal à $0,4 \times \sqrt{0,30375}$. La valeur centrée réduite impliquée par l'objectif de cours sur l'horizon donné, s'exprime :

$$\frac{0 - 0,099}{0,4 \times \sqrt{0,30375}} = -0,433597$$

$$CDF(x = -0,433597, x \sim \mathcal{N}(0,1))$$

La probabilité que x soit supérieure à 9,9%, sur l'horizon fixé, est de 33,23%. Cette probabilité est directement liée positivement à la volatilité : si la volatilité est de 20% la probabilité tombe à 19,3% et si la volatilité (en rythme annuel) augmente à 70% la probabilité d'atteindre 35€ est de 40,2%

Graphique 9-3.- Cours de l'action Thalès à Paris



En 2013, le cours de 35 est atteint le 20 mai ; le 2 juillet le cours est de 34,73 (et de 44,53 en juillet 2014).

Chapitre 10

La volatilité d'un portefeuille

1. Énoncé des exercices

Exercice 10-1: Variance des taux de rentabilité d'un portefeuille de 2 titres

Le titre A est caractérisé par un taux de rentabilité et une volatilité de 8 %. Le titre B a une volatilité et un taux de rentabilité attendu de 14 %. Représentez graphiquement le lieu des portefeuilles possibles en faisant varier le coefficient de corrélation entre les rentabilités des deux titres de -1 à $+1$ par pas de 20 % et en interdisant les ventes à découvert.

Exercice 10-2 : Variance d'un portefeuille (examen d'avril 2001)

Deux actions A et B ont respectivement des volatilités égales à 18% et à 72% (exprimées en base annuelle). Déterminez les proportions (P_a et P_b avec $P_a+P_b=1$), dans lesquelles il faut combiner les deux actions pour obtenir un portefeuille sans risque dans chacun des cas suivants :

1. Les taux de rentabilité de A et de B sont parfaitement positivement corrélés.
2. Les taux de rentabilité de A et de B sont parfaitement négativement corrélés.

Grinblatt & Titman (1997, p 122), proposent cet exercice et un corrigé.

Exercice 10-3 : Portefeuille de variance minimale (examen de juin 2001)

On considère 2 actifs risqués dont les taux de rentabilité aléatoires sont notés \tilde{R}_1 et \tilde{R}_2 . Les variances de leurs taux de rentabilité respectifs sont notées σ_1^2 et σ_2^2 , et la covariance entre leurs taux de rentabilité est notée σ_{12} .

1. Écrivez l'expression de la variance σ_p^2 des taux de rentabilité d'un portefeuille p constitué en combinant l'actif 1 et l'actif 2 dans des proportions x et $(1-x)$.
2. Quelle valeur doit prendre x pour que le portefeuille p constitué soit le portefeuille de variance minimale?

3. Calculez la valeur de la covariance de chacun des actifs 1 et 2 avec le portefeuille de variance minimale. Que constatez-vous?

Exercice 10-4 : Corrélation et dépendance

X et Y sont deux variables aléatoires, avec $Y=X^2$. Si X prend les six valeurs suivantes : -11 %, -9,5 %, -3 %, 3 %, 9.5 % et 11 %; calculez le coefficient de corrélation entre X et Y.

Une corrélation nulle entre deux variables signifie-t-elle l'absence de dépendance entre les deux variables?

Exercice 10-5 : La covariance , du taux de rentabilité au cours

Exprimer la covariance entre le titre i et un portefeuille en introduisant le cours de l'action i noté P_i .

Exercice 10-6 : Une manipulation de covariance

Écrivez la variance des rentabilités du portefeuille p en fonction des covariances du portefeuille p avec les différents titres. Plus précisément on vous demande de montrer l'équivalence entre les deux écritures suivantes :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} x_i x_j \sigma_{i,j} \quad \text{et} \quad \sigma_p = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i \times \sigma_{i,p}}{\sigma_p}$$

Exercice 10-7 : Renault et les autres en portefeuille (1999-2000)

À partir des taux de rentabilité mensuels donnés dans l'exercice 3-22.

Calculez la volatilité d'un portefeuille composé de 20 % de Renault, 40 % d'ingénico, 20 % de Saint-Gobain et 20 % de FTE.

Même question avec un portefeuille dont les poids sont respectivement 40 %, 10 %, 40 % et 10 %.

Même question avec un portefeuille pondéré par les capitalisations boursières respectives.

Exercice 10-8 : Risque marginal suivant Grinblatt et Titman (1997, p. 132)

Soit un portefeuille p contenant n actifs risqués. On souhaite modifier le poids en portefeuille de l'actif k, qui est l'un des n actifs risqués. σ_p^2 est la

variance des taux de rentabilité du portefeuille p, \tilde{r}_k le taux de rentabilité du

titre k (variable aléatoire), σ_k^2 la variance des taux de rentabilité du titre k,

$\sigma_{k,p}$ La covariance entre les taux de rentabilité du portefeuille p et du titre k.

On augmente la part de k dans le portefeuille p en investissant m Euros dans l'actif risqué k financés par un emprunt au taux sans risque (r_f).

1. Écrire l'expression du taux de rentabilité du nouveau portefeuille p' constitué à partir de p.

2. Écrire l'expression de la variance du taux de rentabilité du portefeuille p'.
3. En déduire l'expression de l'impact de la modification du poids de k sur la variance du portefeuille lorsque m est petit.

Exercice 10-9 : Variance et intervalle

À quelle(s) condition(s) la variance quotidienne multipliée par 254 est-elle égale à la variance annuelle?

Exercice 10-10 : Trois scénarii

Le tableau suivant donne les taux de rentabilité anticipés par un investisseur pour les actions X et Y en fonctions de 3 scénarii économiques.

Événement	Probabilité	Taux de rentabilité	
		Action X	Action Y
Récession	0,2	-5%	5%
Normal	0,6	10%	7%
Expansion	0,2	21%	11%

1. Calculez l'espérance et l'écart type des taux de rentabilité de l'action X.
2. Calculez l'espérance et l'écart type des taux de rentabilité de l'action Y.
3. Calculez le coefficient de corrélation entre les deux actions.

Exercice 10-11 : Portefeuille équipondéré

Les actions D, E, F ont les caractéristiques exposées dans le tableau ci-après. On vous donne par ailleurs les coefficients de corrélation des titres pris deux à deux : $\rho(D,E)=0.4$; $\rho(D,F)=0.6$; $\rho(E,F)=0.8$. Quelles sont les caractéristiques d'un portefeuille équipondéré ?

Actions	Espérance	Ecart-type
D	0,08	0,02
E	0,15	0,16
F	0,12	0,08

Exercice 10-12 : Portefeuille de deux titres

Les distributions de taux de rentabilité de deux titres A et B sont celles du tableau ci-après.

1. Calculez la moyenne et la variance des taux de rentabilité des deux titres.
2. Calculez la covariance et le coefficient de corrélation entre les taux de rentabilité des deux titres.

Probabilité	Titre A	Titre B
0,2	18%	0%
0,2	5%	-3%
0,2	12%	15%
0,2	4%	12%
0,2	6%	1%

3. Écrivez la matrice des variances covariances.
4. Calculez la volatilité d'un portefeuille composé de 30% de A et 70% de B.

Exercice 10-13 : Portefeuille de variance minimale (PVM)

Avec les données suivantes concernant 2 titres et 7 portefeuilles constitués à partir de ces deux titres :

1. Calculez la moyenne et la variance des taux de rentabilité des 7 portefeuilles.
2. Déterminez la composition du portefeuille de variance minimale (PVM).
3. Calculez la covariance entre les portefeuilles n° 3 et 5.
4. Calculez la covariance entre le portefeuille 3 et le PVM.
5. Calculez la covariance entre le portefeuille 5 et le PVM.
6. Expliquez les résultats obtenus aux questions 4 et 5.
7. Comparez les résultats obtenus aux questions 4 et 5 à la variance du portefeuille trouvé.

Définition des portefeuilles			Caractéristiques des titres		
Portefeuille	A (%)	B(%)	Probabilité	Titre A	Titre B
1	125	-25	0,2	18%	0%
2	100	0	0,2	5%	-3%
3	75	25	0,2	12%	15%
4	50	50	0,2	4%	12%
5	25	75	0,2	6%	1%
6	0	100			
7	-25	125			

Note : d'après Copeland, Weston et Shastri (2005), page 142.

Exercice 10-14 : Volatilité relative

Reuters (et d'autres, voir www.riskgrades.com) propose de rapporter la volatilité d'un titre à la volatilité d'un portefeuille de référence, c'est le « *riskgrade* ». Calculez la volatilité de Renault, FTE et les autres relativement au CAC40 puis relativement à l'indice IT50 puis relativement à l'indice Stoxx. Les données sont celles de l'exercice 3-22. Pour quelles raisons peut-on souhaiter calculer cet indicateur en termes relatifs ? Quelle est l'argumentation développée sur le site www.riskgrades.com ? Qu'en pensez-vous ?

Exercice 10-15 : Corrélation (1998-2000) avec Renault et les autres *

Téléchargez les données quotidiennes de cours pour France Telecom, Renault, Ingénico et Saint-Gobain de même que pour les indices CAC40, IT50 et STOXX, sur la période allant de janvier 1998 à fin mars 2000. À partir de ces données :

À partir des données de cours du fichier «beta99données.xls»

1. Calculez les taux de rentabilité quotidien (d'ouverture à ouverture) de janvier 1998 à fin mars 2000 pour les trois indices et les quatre actions.
2. Calculez les taux de rentabilité hebdomadaires du lundi au lundi en ouverture.
3. Évaluez les corrélations entre les sept séries de taux de rentabilité.

4. Avec quel indice France Telecom est-elle le mieux corrélée : est-ce avec l'indice technologique IT50 ?
5. Commentez la valeur de la corrélation entre le CAC40 et le STOXX50.
6. Évaluez les corrélations sérielles d'ordre un pour chaque série en données quotidiennes puis en données hebdomadaires.
7. Comparez les valeurs de corrélation obtenues : avec les données quotidiennes, puis hebdomadaires et mensuelles, commentez.
8. Quelle est la corrélation de France Telecom avec l'indice CAC40, après avoir tenu compte des variations du StoXX (on vous demande un calcul de corrélation partielle)?

Exercice 10-16 : Volatilité après fusion

Début 1996, Chemical Bank fusionne avec Chase Manhattan et Westinghouse Electric achète CBS. Le tableau ci après donne les taux de rentabilité mensuels en 1994. Les capitalisations, en million de \$, sont en dernière ligne.

Tableau 10-1 : Fusion (données de 1994)

	CBS	Chase	Chemical Bank	Westinghouse
Jan.	0,0607	0,0767	-0,0156	-0,0053
Feb.	0,0057	-0,0969	-0,057	0,0268
Mar.	-0,0041	-0,115	-0,013	-0,1652
Apr.	-0,0098	0,0646	-0,0447	-0,0313
May	-0,1372	0,1103	0,1043	0,1228
June	0,1992	0,0132	0,0132	-0,1058
July	0	-0,0255	-0,0032	0,043
Aug.	0,0284	0,0237	0,0098	0,1698
Sept.	-0,0019	-0,0828	-0,0854	-0,0796
Oct.	-0,0666	0,0516	0,0857	0,0904
Nov.	-0,0714	-0,0104	0,0428	-0,0973
Dec.	-0,0045	-0,0351	-0,0016	-0,0392
Capitalisation	\$3 387,20	\$6 090,40	\$8 771,90	\$4 370,70

Peut-on prédire les volatilités de Chase et Westinghouse après fusion?

Cet exercice est proposé par Grinblatt, Titman (1997, p 119-121) et vous y trouverez le corrigé.

Exercice 10-17 : Risque marginal, examen de novembre 2009 (6 points)

Un portefeuille x est constitué de 3 actifs (notés respectivement 1, 2 et 3) dans les proportions $x_1=0.2$, $x_2 = 0.3$ et $x_3= 0.5$. La matrice de variances-covariances des 3 actifs, notée Σ , est donnée par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.02 & -0.03 & 0.08 \\ -0.03 & 0.05 & 0.09 \\ 0.08 & 0.09 & 0.07 \end{pmatrix}$$

Questions :

1. Calculez la covariance de chaque actif avec le portefeuille x . (2 points)

2. Vous êtes autorisés à faire varier de 1% le poids de 2 actifs du portefeuille. En supposant que vous souhaitiez diminuer la variance du portefeuille x , quels sont les 2 actifs dont vous allez modifier les poids ? Pourquoi ? Quels nouveaux poids leur accordez-vous ? (2 points)
3. Utilisez la réponse à la question 1 pour déterminer quelle sera alors la variance du nouveau portefeuille. (2 points)

Questions supplémentaires (non posées en novembre 2009)

La matrice inverse de la matrice des variances covariances est (en cas de

$$\text{besoin) } \begin{pmatrix} 5.07166 & -10.2536 & 7.38699 \\ -10.2536 & 5.51268 & 4.63065 \\ 7.38699 & 4.63065 & -0.110254 \end{pmatrix}$$

4. Quelle est la composition du portefeuille de variance minimale (PVM) ?
5. Quelles sont les caractéristiques de risque et de rentabilité du PVM ?
6. Quelle est la covariance entre le portefeuille x et le PVM ?

2. Corrigés de certains exercices

Remarque générale sur certaines propriétés utilisées dans plusieurs des exercices. En fin du chapitre 7 (Hamon, 2014), les trois premières démonstrations (page 198) rappellent les propriétés de l'opérateur espérance. En fin du chapitre 8, les deux premières démonstrations (page 224) présentent les propriétés de l'opérateur variance. En fin du chapitre 10, les quatre premières démonstrations (pages 258-259) rappellent les propriétés de l'opérateur covariance.

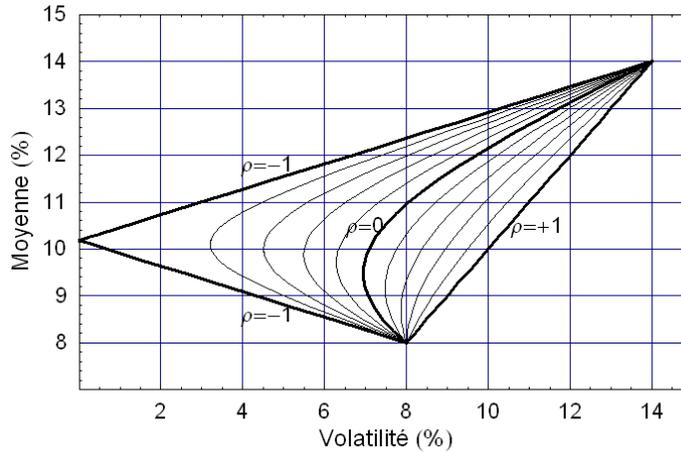
Exercice 10-1 : Variance des taux de rentabilité d'un portefeuille de 2 titres, corrigé

À partir de ces deux titres une infinité de portefeuilles peuvent être formés en faisant varier les proportions de l'un et de l'autre en portefeuille. Pour calculer la volatilité des portefeuilles résultant de ces combinaisons il est nécessaire de préciser la covariance entre les taux de rentabilité des deux titres.

Le graphique ci après localise les deux titres et les ensembles de portefeuilles obtenus en excluant les ventes à découvert et sous différentes hypothèses du coefficient de corrélation entre les deux titres. En gras trois ensembles de portefeuilles sont représentés, ils correspondent aux valeurs $+1$, 0 et -1 du coefficient de corrélation. Les autres courbes correspondent à des hypothèses intermédiaires obtenues en faisant varier le coefficient de corrélation par pas de 20 %. On remarque que, pour la plupart des valeurs du coefficient de corrélation (raisonnablement inférieur à $+1$), il est possible d'obtenir une volatilité du portefeuille inférieure à la plus petite des deux volatilités des titres mis en portefeuille, c'est-à-dire inférieure ici à 8 %.

Dans le cas extrême d'un coefficient de corrélation égal à -1 (évolutions parfaitement antagonistes des deux titres), le lieu des portefeuilles obtenus en combinant les deux titres est représenté par deux demi-droites et une valeur nulle de la volatilité est possible pour une pondération convenablement choisie des deux titres. En fait ce cas limite a peu de portée pratique puisque les coefficients de corrélation observés entre les actions sont en moyenne positifs et dans les cas où la valeur est négative, elle s'éloigne peu de zéro.

Graphique : Risque et rentabilité d'un portefeuille de deux titres



Note : Une infinité de portefeuilles sont constituables à partir de deux titres. En excluant les ventes à découvert l'ensemble des portefeuilles obtenus en faisant varier le coefficient de corrélation entre les deux titres (ρ) et la proportion des deux titres s'inscrit dans un triangle.

Exercice 10-5 : La covariance , du taux de rentabilité au cours, corrigé

$$\sigma_{i,m} = Cov(\tilde{R}_i; \tilde{R}_m) = Cov\left(\frac{\tilde{P}_{i,t} - P_0}{P_0}; \tilde{R}_m\right) \text{ OR } Cov(a\tilde{X}; \tilde{Y}) = a \times Cov(\tilde{X}; \tilde{Y}) \text{ et puisque}$$

$$Cov(a + \tilde{X}; \tilde{Y}) = Cov(\tilde{X}; \tilde{Y}), \text{ et } \sigma_{i,m} = \frac{1}{P_0} Cov(\tilde{P}_{i,t}; \tilde{R}_m).$$

Exercice 10-7 : Renault et les autres en portefeuille (1999-2000), corrigé

On évalue chaque élément de la matrice des variances covariances des 4 actions. On remarque que la matrice est carrée, d'ordre 4 et symétrique. Tous calculs faits, on obtient :

	FTE	Renault	Ingénico	ST Gob
FTE	0,0148496	-0,0041660	0,0373279	0,0014283
Renault	-0,0041660	0,0195698	-0,0195987	0,0026097
Ingénico	0,0373279	-0,0195987	0,2165534	0,0027650
ST Gob	0,0014283	0,0026097	0,0027650	0,0083044

Par exemple, au croisement de la ligne et de la colonne «Renault», du tableau ci-après, on trouve la variance des taux de rentabilité de Renault, soit :
 $E(R^2) = (0,0617523 + 0,0452626 + 0,00538316 + 0,0335952 + 0,0180956 + 0,00374789 + 0,000299636 + 0,00104264 + 0,0121462 + 0,0107869 + 0,0129641 + 0,0500238 + 0,000566916) / 13 = 0,0196667$

$E(R) = (-0,24850 + 0,21275 - 0,07337 + 0,18329 + 0,13452 + 0,06122 - 0,01731 - 0,03229 - 0,11021 + 0,10386 + 0,11386 - 0,22366 + 0,02381) / 13 = 0,00984385$.

Variance(Renault) = $E(R^2) - E(R)^2 = 0,0196667 - 0,00984385^2 = 0,0195698$.

Au croisement de la ligne «Renault» et de la colonne «FTE», on trouve la covariance entre les taux de rentabilité des deux titres soit :

$E(XY) = (0,0314874 + 0,00724627 + 0,00231996 + 0,00224347 - 0,0146452 + 0,00715601 - 0,00174156 - 0,00376372 - 0,0273707 + 0,01792 - 0,000085395 - 0,0670466 + 0,000550487) / 13 = -0,00351765$.

$E(X) = 0,00984385$ (Renault) et $E(Y) = 0,0658608$ (FTE)

$E(XY) - E(X)E(Y) = -0,00351765 - (0,00984385 \times 0,0658608) = -0,041660$.

L'évaluation de la variance des taux de rentabilité du portefeuille est ensuite

obtenue de la manière suivante $\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{i=4} \sum_{j=1}^{j=4} x_i x_j \sigma_{i,j}$ avec

Titre	i=1	i=2	i=3	i=4
Poids	0,2	0,2	0,4	0,2
Volat	12,18%	13,99%	46,54%	9,11%

Variance = $((0,2 \times 0,2 \times 0,0148496) + (0,2 \times 0,2 \times -0,0041660) + (0,2 \times 0,4 \times 0,0373279) + (0,2 \times 0,2 \times 0,0014283)) + etc$

Le résultat donne une volatilité de 19,906% (attention aux arrondis !)

Tableau 10-2 : Capitalisations et poids, fin mars 2000

	Cours	Nb Titres	Capitalisation	Poids
Renault	43	239 798 567	10 311 338 381	5,032%
Ingénico	110	12 635 690	1 389 925 900	0,678%
ST Gob	136	87 236 750	11 864 198 000	5,790%
FTE	177	1 024 614 561	181 356 777 297	88,500%

Le portefeuille a la structure de poids suivante : 10% sur le premier et le quatrième titre et 40% sur les deux titres intermédiaires. Le résultat donne une volatilité de 18,668%.

On doit disposer de la capitalisation boursière de chacune des actions, soit le cours et le nombre de titres admis en bourse à une date donnée. Le quotidien « Décisions et Avis » est une source possible. Ce calcul se fait à une date donnée par exemple fin mars 2000 (fin de la période indiquée). À partir de cette structure de poids, on calcule la volatilité du portefeuille qui est de 10,929%.

Question supplémentaire. Les calculs ont été réalisés en supposant que les données de la population étaient disponibles. On pourrait évoquer l'instabilité des paramètres dans le temps pour justifier ce choix. Si on vous demande maintenant une évaluation en supposant que les données communiquées sont un échantillon, peut-on éviter de refaire tous les calculs ?

Exercice 10-10 : Trois scénarii, corrigé

On réalise quelques calculs préalables

$$E(X) = (0,2 \times (-0,05)) + (0,6 \times 0,1) + (0,2 \times 0,21) = 0,092;$$

$$E(Y) = (0,2 \times 0,05) + (0,6 \times 0,07) + (0,2 \times 0,11) = 0,074;$$

$$E(X^2) = (0,2 \times 0,0025) + (0,6 \times 0,01) + (0,2 \times 0,0441) = 0,01532 \quad \text{et} \\ E(Y^2) = 0,00586; \quad E(XY) = 0,2(-0,05 \times 0,05) + 0,6(0,1 \times 0,07) + \\ 0,2(0,21 \times 0,11) = 0,00832.$$

On a tous les éléments pour calculer les volatilités :

$$\text{Variance } X = E(X^2) - E(X)^2 = 0,01532 - 0,092^2 = 0,006856 \quad \text{et} \\ \text{Volatilité de } X = 0,082801.$$

$$\text{Variance } Y = 0,000384 \quad \text{et} \quad \text{Volatilité de } Y = 0,0195959.$$

Puis le calcul du coefficient de corrélation nécessite en préalable celui de la covariance

$$\text{Covariance}(X, Y) = E(X \times Y) - (E(X) \times E(Y)) = 0,00832 - (0,252 \times \\ 0,074) = +0,001512. \quad \text{Et le coefficient de corrélation} = 0,001512 / \\ (0,0195959 \times 0,082801) = 0,931861.$$

Exercice 10-11 : Portefeuille équipondéré, corrigé

On écrit la moyenne et la variance sous forme matricielle (pourquoi pas !). L'espérance s'écrit :

$$E(R_p) = \begin{bmatrix} 8\% & 15\% & 12\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

La variance du portefeuille en notation matricielle est égale à :

$$\sigma^2(R_p) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,00040 & 0,00128 & 0,00096 \\ 0,00128 & 0,02560 & 0,01024 \\ 0,00096 & 0,01024 & 0,00640 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Le produit matriciel pour le calcul de la variance se fait en deux étapes. Le produit d'une matrice A (n,n) par un vecteur B(n lignes) donne un vecteur C(n lignes). Le premier élément du vecteur C, en première ligne donc, est obtenu par $(1/3) \times 0,00040 + (1/3) \times 0,0128 + (1/3) \times 0,00096 = 0,0088$. Le calcul des deux

autres éléments permet d'obtenir : $\sigma^2(R_p) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,00088 \\ 0,012373 \\ 0,005866 \end{bmatrix}$. Le

résultat du deuxième produit matriciel donne la variance égale à 0,0063733. D'où $E = 11,67\%$ et $\sigma = 7,98\%$.

3. Inversion de Matrice, méthode du pivot (Gauss-Jordan)

On présente une application de l'algorithme de Gauss-Jordan à l'inversion de la matrice de l'exemple du chapitre 10 du livre page 250. L'objectif est de calculer la composition du PVM à partir des trois titres, dont la matrice des variances-covariances est la suite :

	CAC40	Chine	Taux
CAC40	0.026244	0.0324324	-0.00196733
Chine	0.0324324	0.105625	-0.00414115
Taux	-0.00196733	-0.00414115	0.002116

La solution est directement donnée dans le chapitre 10. La matrice inverse est la suivante :

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} 62.3529 & -18.275 & 22.2066 \\ -18.275 & 15.6104 & 13.5597 \\ 22.2066 & 13.5597 & 519.773 \end{pmatrix}$$

La démarche d'inversion de matrice est classique et détaillée dans Simon et Blume (1994, chapitre 7). Voir aussi le cours de G. Legendre, Maître de Conférences à Dauphine et le document intitulé « Méthodes numériques, Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique ».

La matrice augmentée initiale est la suivante. Dans la partie gauche les données, dans la partie droite une matrice unité de dimension 3.

0.026244	0.0324324	-0.00196733	1	0	0
0.0324324	0.105625	-0.00414115	0	1	0
-0.00196733	-0.00414115	0.002116	0	0	1

Echange des lignes 1 & 2

0.0324324	0.105625	-0.00414115	0	1	0
0.026244	0.0324324	-0.00196733	1	0	0
-0.00196733	-0.00414115	0.002116	0	0	1

En haut à gauche le pivot. On divise tous les termes de la ligne par le pivot et on obtient

1.	3.25677	-0.127686	0.	30.8334	0.
0.026244	0.0324324	-0.00196733	1	0	0
-0.00196733	-0.00414115	0.002116	0	0	1

On note p la ligne du pivot (ici 1) et IP le pivot (dont la valeur est ici de 1). Les autres lignes (i de 2 à 3) sont transformées de la manière suivante : $i - IP \times p$. On obtient

1.	3.25677	-0.127686	0.	30.8334	0.
0.	-0.0530384	0.00138365	1.	-0.809191	0.
0.	0.00226599	0.0018648	0.	0.0606593	1.

L'algorithme est répété, application à la ligne 2

1.	3.25677	-0.127686	0.	30.8334	0.
0.	1.	-0.0260878	-18.8543	15.2567	0.
0.	0.00226599	0.0018648	0.	0.0606593	1.

1.	4.44089×10^{-16}	-0.0427236	61.4041	-18.8543	0.
0.	1.	-0.0260878	-18.8543	15.2567	0.
0.	4.33681×10^{-19}	0.00192392	0.0427236	0.0260878	1.

ligne 3

1.	4.44089×10^{-16}	-0.0427236	61.4041	-18.8543	0.
0.	1.	-0.0260878	-18.8543	15.2567	0.
0.	2.25416×10^{-16}	1.	22.2066	13.5597	519.773

1.	4.5372×10^{-16}	-6.93889×10^{-18}	62.3529	-18.275	22.2066
0.	1.	-3.46945×10^{-18}	-18.275	15.6104	13.5597
0.	2.25416×10^{-16}	1.	22.2066	13.5597	519.773

A cette étape, la partie gauche est constituée de la matrice unité et la partie droite correspond à l'inverse de la matrice initiale.

L'utilisation de logiciel adapté donne un résultat immédiat mais sans détailler les étapes de calcul. Par exemple avec Mathematica, si V est la matrice (une liste), alors `Inverse[V]` donne immédiatement le résultat.

Exercice 10-17 : Risque marginal, examen de novembre 2009 (6 points)

Un portefeuille x est constitué de 3 actifs (notés respectivement 1, 2 et 3) dans les proportions $x_1=0.2$, $x_2 = 0.3$ et $x_3= 0.5$. La matrice de variances-covariances des 3 actifs, notée Σ , est donnée par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.02 & -0.03 & 0.08 \\ -0.03 & 0.05 & 0.09 \\ 0.08 & 0.09 & 0.07 \end{pmatrix}$$

Questions :

1. Calculez la covariance de chaque actif avec le portefeuille x . (2 points)

En notant $X = (x_1, x_2, x_3)^T$, la covariance de chaque actif avec le portefeuille est directement donnée par $\Sigma X = \begin{pmatrix} 0.035 \\ 0.054 \\ 0.078 \end{pmatrix}$.

$$x = \{0.2, 0.3, 0.5\}; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.02 & -0.03 & 0.08 \\ -0.03 & 0.05 & 0.09 \\ 0.08 & 0.09 & 0.07 \end{pmatrix}; \quad x\Sigma = \begin{pmatrix} 0.035 \\ 0.054 \\ 0.078 \end{pmatrix}$$

In[14]= Out[14]= 0.035	Détail du calcul du premier élément du vecteur résultant
------------------------------	--

On peut sinon, de façon équivalente – mais c'est plus long - utiliser le fait que

$\text{cov}(R_i, x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3) = x_1 \text{cov}(R_i, R_1) + x_2 \text{cov}(R_i, R_2) + x_3 \text{cov}(R_i, R_3)$ et effectuer le calcul pour chaque actif i .

- 2. Vous êtes autorisés à faire varier de 1% le poids de 2 actifs du portefeuille. En supposant que vous souhaitez diminuer la variance du portefeuille x , quels sont les 2 actifs dont vous allez modifier les poids ? Pourquoi ? Quels nouveaux poids leur accordez-vous ? (2 points)**

On a établi en cours que $\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x_i} = 2\sigma_{i,p}$. Cette formule vaut pour un

changement marginal de la composition du portefeuille (c'est une dérivée) et l'on peut considérer un changement de poids de 1% comme marginal. Pour réduire la variance du portefeuille il convient donc simultanément d'augmenter de 1% le poids de l'actif présentant la covariance la plus faible et de diminuer de 1% (pour conserver un portefeuille faisable) le poids de l'actif présentant la covariance la plus forte. On va donc augmenter le poids de l'actif 1 de 1% et diminuer le poids de l'actif 3 de 1%.

- 3. Utilisez la réponse à la question 1 pour déterminer quelle sera alors la variance du nouveau portefeuille. (2 points)**

En supposant que les changements induits sont marginaux, on a pour chaque changement effectué une modification de variance $\Delta \sigma_x^2$ égale à $\Delta x_i \times 2\sigma_{i,p}$ soit un changement total de $1\% \times 2 \times (0.035 - 0.078) = -0.086\%$. La variance a donc bien été réduite grâce aux changements de poids effectués.

A titre de vérification (non demandé), le calcul direct de la variance du portefeuille avant (0.0622) et après modification (0.06133) fait ressortir une variation de -0.0867%.

Remarque (en plus)

La matrice de variances/covariances de cet exercice n'est pas définie positive. C'est-à-dire que la forme quadratique $X^T \Sigma X$ n'est pas positive quel que soit X différent de zéro (la variance pourrait être négative pour certaines valeurs de X).

En conséquences l'application de certaines des formules démontrées en cours comme la détermination de la composition du portefeuille de

variance minimale (composition donnée par $\frac{V^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1}}$, dans le cas d'une matrice définie positive) ne donnera pas de résultat correct.

Chapitre 11

Sensibilité et risque diversifiable

1. Énoncé des exercices

Exercice 11-1 : Risque de marché

Les deux propositions suivantes peuvent-elles être simultanément vraies, ou bien sont-elles contradictoires : 1) le risque total du marché des actions dans son ensemble n'a pas augmenté de manière significative dans une période récente, 2) la volatilité des actions prises individuellement a augmenté dans une période récente.

Exercice 11-2 : Calcul d'un bêta sur historiques de cours

Ci-dessous, figurent les cours de trois actions et d'un indice sur un an.

Mois	Indice	Cours		
		A	B	C
1	92	430	1 020	712
2	91	420	1 020	716
3	90	380	1 021	718
4	94	385	1 019	695
5	96	395	1 020	692
6	101	430	1 021	661
7	105	455	1 020	660
8	105	476	1 019	658
9	107	480	1 022	630
10	109	510	1 021	610
11	111	521	1 025	610
12	121	580	1 026	580

1. Calculer les β des actions A, B et C. Concluez en faisant apparaître les covariances.

- Calculez de la manière la plus simple possible le β d'un portefeuille composé de 25 % de A, 50 % de B et 25 % de C. Existe-t-il une autre méthode de calcul?
- Peut-on combiner A, B et C pour obtenir un portefeuille zéro- β ? Existe-t-il une solution unique ?

Exercice 11-3 : Bêta de portefeuille

- Dans quelles proportions faut-il combiner les titres A et B pour obtenir un portefeuille dont le taux de rentabilité espéré sera de 20 %?
- Quel sera le β d'un tel portefeuille?

Titre	Taux rentabilité espéré	β
A	15%	0,82
B	28%	1,75

Exercice 11-4 : Taux de rentabilité et bêta

Au cours des 11 dernières années, on a relevé les données ci-dessous (I l'indice; P les cours, D les dividendes, Rf le taux sans risque).

Année	$I_{m,t}$	$D_{m,t}/I_{m,t-1}$	$P_{i,t}$	$D_{i,t}/P_{i,t-1}$	$R_{f,t}$
1989	55,85		48		
1990	66,27	0,0298	49	0,05	0,03
1991	62,38	0,0337	52	0,06	0,03
1992	69,87	0,0317	74	0,05	0,03
1993	81,37	0,0301	90	0,05	0,04
1994	88,17	0,03	102	0,05	0,04
1995	85,26	0,034	87	0,05	0,04
1996	91,93	0,032	78	0,05	0,05
1997	98,7	0,0307	81	0,05	0,05
1998	97,84	0,0324	71	0,06	0,07
1999	83,22	0,0383	70	0,05	0,06

- Calculez la moyenne, la variance et l'écart type des taux de rentabilité du marché.
- Calculez la moyenne, la variance et l'écart type des taux de rentabilité du titre i.
- Calculez la covariance entre les taux de rentabilité du titre i et ceux du marché.
- Calculez le β du titre i.

Exercice 11-5 : Bêta et 4 scenarii

On dispose des observations du tableau ci-après, concernant le taux de rentabilité d'un titre i et du marché :

- Calculez $E(R_i)$, $E(R_m)$, $\sigma^2(R_i)$, $COV(R_i, R_m)$.
- Quelle est la sensibilité du titre i ?
- Définissez et indiquez pour le titre i : la valeur du risque total, la valeur du risque systématique, et la valeur du risque spécifique.

Etat	R _{m,t}	R _{i,t}
1	10%	9%
2	10%	9%
3	4%	4%
4	4%	2%

Exercice 11-6 : Risque non diversifiable

On vous donne les éléments suivants : le taux sans risque est de 8% ; le taux de rentabilité observé sur le portefeuille i égale 13% ; le risque total du portefeuille i est de 50% ; le taux de rentabilité espéré pour le marché égale 12% ; le risque total du marché est de 30% ; la covariance entre les taux de rentabilité du portefeuille i et du marché égale 0,135. Quelle est la valeur du risque non diversifiable du portefeuille i ?

Exercice 11-7 : Bêta d'Alcatel en 2002

À partir des taux de rentabilité du tableau suivant :

1. Calculez le bêta d'Alcatel.
2. Calculez le risque diversifiable d'Alcatel.
3. Le bêta sur un an est-il significativement différent de zéro ?

Le bêta calculé avec les données des 6 premiers mois est-il significativement différent de celui calculé sur la deuxième moitié de l'année 2002 ?

Taux de rentabilité hebdomadaires d'Alcatel en 2002

Date en 2002	Alcatel	CAC40	Date en 2002	Alcatel	CAC40
4-Jan.	14,42%	2,31%	12-Juil.	2,86%	-3,36%
11-Jan.	-10,47%	-3,55%	19-Juil.	4,17%	-3,76%
18-Jan.	-7,58%	-2,07%	26-Juil.	-22,22%	-10,33%
25-Jan.	-2,19%	1,55%	2-Août	-3,24%	4,46%
1-Fév.	2,99%	-0,58%	9-Août	-0,39%	4,80%
8-Fév.	-7,92%	-4,66%	16-Août	-1,38%	-0,93%
15-Fév.	2,73%	2,91%	23-Août	25,65%	6,57%
22-Fév.	-12,09%	-3,37%	30-Août	-13,88%	-6,44%
1-Mars	5,70%	4,48%	6-Sep.	-17,78%	-6,68%
8-Mars	13,08%	3,52%	13-Sep.	-8,78%	2,22%
15-Mars	-7,64%	-1,14%	20-Sep.	-38,27%	-9,68%
22-Mars	-2,74%	1,19%	27-Sep.	2,00%	1,38%
28-Mars	1,25%	0,67%	4-Oct.	0,39%	-3,52%
5-Avr.	-1,54%	-2,04%	11-Oct.	8,59%	-1,75%
12-Avr.	-9,09%	-1,91%	18-Oct.	54,68%	15,79%
19-Avr.	6,21%	2,55%	25-Oct.	-15,12%	-6,33%
26-Avr.	-5,45%	-2,11%	1-Nov.	35,62%	3,07%
3-Mai	-9,72%	-1,23%	8-Nov.	-2,02%	-1,09%
10-Mai	2,23%	-1,03%	15-Nov.	9,90%	3,18%
17-Mai	6,32%	2,48%	22-Nov.	1,31%	3,69%
24-Mai	-5,45%	-2,24%	29-Nov.	10,19%	1,15%
31-Mai	-8,31%	-2,50%	6-Déc.	-6,05%	-4,78%
7-Juin	-10,20%	-5,60%	13-Déc.	-16,99%	-1,45%
14-Juin	-10,00%	-2,74%	20-Déc.	-5,60%	-2,42%

21-Juin	-10,30%	-3,26%	27-Déc.	1,14%	-0,25%
28-Juin	-15,88%	0,59%	31-Déc.	-3,61%	-0,76%
5-Juil.	-15,66%	-2,00%			

Exercice 11-8 : Bêta mensuel, Renault et les autres

À partir des taux de rentabilité mensuels des actions Renault, Saint-Gobain, Ingénico, France Télécom (FTE) et des trois indices : CAC40, IT50 et Stoxx. Sur la période avril 1999 à mars 2000, en reprenant les données de l'exercice 3-22.

1. Calculez le bêta de FTE et de Renault avec le CAC40.
2. Calculez le bêta de FTE puis Ingénico avec le IT50.
3. Calculez le bêta de FTE, Renault puis Saint-Gobain avec le IT50.
4. Les bêtas de Renault et de FTE avec le CAC40 sont-ils significativement différents avec un risque d'erreur inférieur à 5%?

Exercice 11-9 : Bêta d'Axa en 1989-1990

Le tableau suivant donne les taux de rentabilité hebdomadaires (de vendredi à vendredi) pour Axa et le CAC40 du 29 septembre 1989 au 30 mars 1990. Vingt-six couples de taux de rentabilité sont disponibles.

Calculez le bêta d'Axa et représentez graphiquement la relation entre les rentabilités d'Axa et du marché dans son ensemble.

Taux de rentabilité d'Axa et du CAC40 d'octobre 1989 à mars 1990

Date	Axa	CAC40	Date	Axa	CAC40
06-oct-89	-0,9662%	-0,8164%	05-janv-90	-1,0471%	0,5679%
13-oct-89	-4,6366%	0,9746%	12-janv-90	-0,3515%	-0,4227%
20-oct-89	-1,0222%	-3,0070%	19-janv-90	-2,8573%	-2,9752%
27-oct-89	-8,9505%	-5,1100%	26-janv-90	-3,0160%	-2,9108%
03-nov-89	0,4484%	1,2336%	02-févr-90	-1,1266%	1,2922%
10-nov-89	-3,8773%	-0,9029%	09-févr-90	0,0755%	0,3646%
17-nov-89	-0,2328%	1,7332%	16-févr-90	-4,0822%	-2,5590%
24-nov-89	-1,3297%	0,8766%	23-févr-90	-3,3576%	-2,1843%
01-déc-89	2,2578%	2,7938%	02-mars-90	-1,6394%	0,5634%
08-déc-89	7,3448%	3,0955%	09-mars-90	4,9184%	5,5837%
15-déc-89	-3,4938%	-0,2519%	16-mars-90	0,9397%	1,3941%
22-déc-89	6,0363%	1,2736%	23-mars-90	-6,2722%	-2,0525%
29-déc-89	0,4175%	0,7042%	30-mars-90	2,0535%	0,9899%

Exercice 11-10 : Bêta de portefeuille

À partir des données du tableau suivant, concernant 24 actions en décembre 1998 (le flottant est celui publié par Associés en Finance).

Décembre 1998 à Paris

Action					
Mnémonique	Emetteur	□	Cours	Capitalisation	Flottant
IME	Immeubles France	0,22	124,83	5 193	1 402
CA	Carrefour	0,5	4 215,49	163 750	117 900
AI	Air Liquide	0,52	1 024,70	84 970	66 276
CLF	Dexia France	0,55	860,80	31 732	25 386

OR	L'Oreal	0,56	4 038,48	273 026	125 592
BN	Danone	0,62	1 599,00	117 807	93 068
PO	Promodes	0,65	4 061,42	77 749	35 765
LD	Locindus	0,77	804,42	1 638	1 065
HV	Bazar H. De Ville	0,82	779,50	1 047	346
FTE	France Télécom	0,84	443,84	454 764	140 977
CC	Ccf	0,85	518,58	37 909	26 536
MAN	Manutan	0,87	399,91	2 992	658
ML	Michelin	1,23	223,36	30 760	26 454
CSE	Cs (Cie Des Signaux)	1,28	409,75	1 884	810
RNO	Renault	1,3	250,83	60 149	32 480
UG	Peugeot Sa.	1,35	864,73	43 335	32 068
ERA	Eramet	1,35	167,83	2 616	1 177
SF	Sfim	1,36	487,76	368	92
RY	Rémy Cointreau	1,38	110,47	4 210	1 221
SYL	Sylea	1,4	308,85	1 745	855
GY	Géophysique	1,41	325,50	1 652	1 140
BUL	Bull	1,5	41,89	6 922	1 108
DS	D.M.C	1,74	65,04	507	233
MT	Metaleurop	1,85	23,08	539	275

Calculez :

1. Le bêta d'un portefeuille composé de 10% de chacune des actions suivantes : FTE, CSE, GY, BUL, SYL, SF, ML, OR, PO, CA.
2. Le bêta d'un portefeuille composé de 50 actions de chacun des titres suivants : FTE, CSE, GY, BUL, SYL, SF, ML, OR, PO, CA.
3. Le bêta d'un portefeuille composé de telle manière à ce que les poids soient proportionnels aux capitalisations des titres suivants : FTE, CSE, GY, BUL, SYL, SF, ML, OR, PO, CA.
4. Le bêta d'un portefeuille composé de telle manière que les poids soient proportionnels aux flottants des titres suivants : FTE, CSE, GY, BUL, SYL, SF, ML, OR, PO, CA.
5. Donnez l'expression, sous forme matricielle, du bêta.

Avertissement

Les exercices ci-après (noté ***) sont plus complexes et prennent plus de temps à réaliser. Ils nécessitent une programmation, surtout si les calculs sont faits sur tous les titres cotés.

Exercice 11-11 : Blume à Paris ***

La formule magique de Blume a été évaluée avec des données du marché américain. Sur la période 1990-2004, évaluez la force de rappel sur le marché français avec des bêtas évalués à partir d'une année de taux de rentabilité hebdomadaires.

1. Testez la sensibilité du résultat à la longueur de la période utilisée dans le calcul du bêta (6 mois, 1 an, 18 mois et 2 ans).
2. Utilisez un indice pondéré large (le SBF 250) puis un indice équi pondéré.

Exercice 11-12 : Corrélations sur périodes adjacentes ***

À partir des taux de rentabilité hebdomadaires sur un an, calculez le coefficient de corrélation entre les taux de rentabilité du titre et d'un indice ($\rho(R_{i,t}; R_{M,t})$). Puis évaluez $\rho(R_{i,t}; R_{M,t+H})$, avec H allant de -4 à +4 avec un pas de 1.

1. Rangez les actions en déciles suivant les valeurs de leur capitalisation boursière, et calculez les coefficients moyens de corrélation par décile.
2. Utilisez un indice pondéré large (le SBF 250) puis un indice équipondéré.
3. Commentez les résultats.

Exercice 11-13 : Bêta pour les experts ***

Le degré de stabilité des bêtas est-il amélioré à Paris lorsque l'on intègre les approches proposées par Blume et Vasicek ?

1. À partir de toutes les actions cotées à la bourse de Paris en 2003 et 2004, puis en 2001 et 2002, établissez les calculs permettant de remplir le tableau suivant, en estimant les bêtas sur taux de rentabilité hebdomadaire sur un an. Le tableau affiche les coefficients de corrélation moyens entre les bêtas calculés sur deux périodes consécutives. Les bêtas seront calculés par rapport à un indice équipondéré comprenant l'ensemble des titres cotés.
2. Renouvelez l'expérience en distinguant les titres suivant leur appartenance aux indices CAC40, SBF120, SBF250 et les autres titres. Commentez les différences.

(In) stabilité du bêta

Nombre de titres en portefeuille	Coefficient de corrélation		
	β MCO	β Blume	β Vasicek
1			
3			
5			
10			
15			
20			
30			

Exercice 11-14 : Bêta de LVMH

Calculez le bêta, relativement au CAC40, de LVMH cotée à Paris sur la période 2008-2011.

1. Calculez le bêta sur données quotidiennes, hebdomadaires et mensuelles. Commentez les résultats.
2. Le bêta évolue-t-il sur la période ? Combien d'observations sont-elles souhaitables dans le calcul du bêta ?
3. Vous devez estimer le bêta en vous limitant à six mois de données. Comment faire ? Estimez un Dimson avec 3 décalages arrière et 1 avant sur données hebdomadaires.

Exercice 11-15 : Corrélations quotidiennes et mensuelles

Pour Plastic Omnium, Bolloré, Somfy et Burelle mais aussi les indices CAC40 et CAC Small (ex CAC 90), sur la période allant de début 2007 à fin 2009.

Calculez les coefficients de corrélations sur les données quotidiennes de cours, puis sur les données mensuelles.

Si les taux de rentabilité sont indépendants, les valeurs estimées au niveau quotidien ou mensuel doivent-elles être similaires ?

Comment interpréter la différence observée éventuellement entre les valeurs estimées sur données quotidiennes et mensuelles ?

2. Corrigés de certains exercices

Un classeur excel de nom V4C11.xls à l'adresse <http://www.dauphinefinance.com/106/Data106/V4C11.xls>

Feuille n°	Exercice	
1	11-2	Calcul d'un bêta sur un historique de cours
2	11-4	Taux de rentabilité et bêta
3	11-7	Bêta d'Alcatel en 2002
4	11-9	Bêta d'AXA en 1989-1990
5	11-10	Bêta de portefeuille

Exercice 11-1 : Risque de marché, corrigé

La volatilité du marché est égale à l'agrégation des volatilités individuelles. Toutefois, d'un titre à l'autre, les séries de taux de rentabilité ne sont pas indépendantes.

Si la corrélation moyenne inter-titres a tendance à baisser, alors il n'est pas impossible d'observer à la fois une augmentation des volatilités individuelles et une stabilité (et pourquoi pas) une baisse de la volatilité du marché dans son ensemble.

Par exemple le développement de la production d'informations financières sur les titres cotés (analyse financière) peut amener une réduction des corrélations moyennes inter-titres

Exercice 11-2 : Calcul d'un bêta sur historiques de cours, corrigé**Tableau : Taux de rentabilité de l'indice (X) et du titre A (Y)**

Mois	Indice	A	X ²	XY
1				
2	-1,087%	-2,326%	0,0001181	0,025%
3	-1,099%	-9,524%	0,0001208	0,105%
4	4,444%	1,316%	0,0019753	0,058%
5	2,128%	2,597%	0,0004527	0,055%
6	5,208%	8,861%	0,0027127	0,461%
7	3,960%	5,814%	0,0015685	0,230%
8	0,000%	4,615%	0	0,000%
9	1,905%	0,840%	0,0003628	0,016%
10	1,869%	6,250%	0,0003494	0,117%
11	1,835%	2,157%	0,0003367	0,040%
12	9,009%	11,324%	0,0081162	1,020%
Somme X	28,173%			
Somme Y		31,925%		
Somme X ²			0,0161131	
Somme XY				2,128%
Bêta=	1,47273641			

- On calcule les taux de rentabilité (ci-dessus). Puis les X² et les XY. Le bêta de 1,4727 est obtenu en appliquant la formule de la démonstration n° 7, soit $\frac{11 \times 0,02128 - (0,28173 \times 0,31925)}{11 \times 0,0161131 - 0,28173^2} = 1,4727$. De même, pour le titre B, le bêta=0,00 et pour le titre C, le bêta= -0,53.
- $Bêta = 0,25 \times 1,4727 + 0,5 \times 0,0 + 0,25 \times (-0,53) = 0,24$. Plusieurs approches sont possibles et donnent le même résultat. Une très idiote consiste à calculer les taux de rentabilité du portefeuille puis à calculer le bêta entre cette série de rentabilité et celle de l'indice. On obtient le même résultat.
- Il existe de multiples solutions puisque rien dans l'énoncé ne contraint les poids qui peuvent être nuls (pas très fair play tout de même) ou négatifs (vente à découvert). Une solution avec les 3 titres et des poids non nuls est obtenue comme suit :
 - on fixe le poids de A, pourquoi pas 10% ;
 - on remarque que, quelque soit le poids sur B, cela ne change pas le bêta du portefeuille ;
 - on cherche le poids à mettre sur C, de manière à ce que $Bêta(A) \times 10\% + Bêta(C) \times X\% = 0$, et le solde est mis sur le titre B. Soit $0,53 X = 1,4727 \times 0,1$ soit $X=27,787\%$. Le poids sur B est donc $100\% - (10\% + 27,787\%) = 62,21\%$.

Exercice 11-5 : Bêta et 4 scenarii, corrigé

1. Sans précisions supplémentaires, on considère les 4 scenarii équiprobables (ou toute autre hypothèse à votre convenance, mais c'est tout de même celle retenue qui simplifie le plus les calculs !). L'espérance de rentabilité du titre

$$\text{s'écrit } E(R_i) = \frac{1}{4} \times (0,09 + 0,09 + 0,04 + 0,02) = 0,06. \text{ Celle du marché :}$$

$$E(R_M) = \frac{1}{4} \times (0,1 + 0,1 + 0,04 + 0,04) = 0,07. \text{ La variance des taux de}$$

rentabilité du marché est égale à :

$$\sigma^2(R_M) = E(R_M^2) - E(R_M)^2 = \frac{1}{4} \times (0,1^2 + 0,1^2 + 0,04^2 + 0,04^2) - 0,07^2 = 0,0009.$$

$$\sigma^2(R_i) = \frac{1}{4} \times (0,09^2 + 0,09^2 + 0,04^2 + 0,02^2) - 0,06^2 = 0,00455 - 0,06^2 = 0,00095.$$

$$\text{Cov}(R_i; R_M) = E(R_M \times R_i) - (E(R_M) \times E(R_i))$$

$$E(R_M \times R_i) = \frac{1}{4} \times (0,1 \times 0,09 + 0,1 \times 0,09 + 0,04 \times 0,04 + 0,04 \times 0,02) = 0,0051.$$

Soit $\text{Cov} = 0,0051 - (0,06 \times 0,07) = 0,0009$.

2. La sensibilité est le bêta du titre, soit $= 0,0009 / 0,0009 = 1,00$.

3. On sait que $\sigma^2(\tilde{R}_i) = \beta_i^2 \times \sigma^2(\tilde{R}_M) + \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_i)$. Le risque total est la volatilité, soit $\sigma(R_i) = 0,0308221$. Le risque systématique est égal à $\beta_i \times \sigma(\tilde{R}_M) = 0,03$. Le risque spécifique est égal à $\sigma(\tilde{\varepsilon}_i) = \sqrt{0,00095 - 0,0009} = \sqrt{0,00005} = 0,00707$.

Exercice 11-10 : Bêta de portefeuille, éléments de corrigé

Le bêta de portefeuille avec 10% du capital investi sur chaque titre est très différent de celui obtenu avec les autres systèmes de pondération. Tous calculs faits, vous devez obtenir les résultats suivants :

Portefeuille		
n°	Composition	Bêta
1	10% par titre	1,07
2	50 actions dans chaque	0,67
3	Pondéré capitalisation	0,71
4	Pondéré flottant	0,69

Exercice 11-15 : Corrélations quotidiennes et mensuelles (éléments de corrigé)

Pour Plastic Omnium, Bolloré, Somfy et Burelle mais aussi les indices CAC40 et CAC Small (ex CAC 90), sur la période allant de début 2007 à fin 2009.

Les quatre actions sont caractérisées par une liquidité plutôt modeste. Certaines des actions n'ont pas un cours chaque séance. Ce qui soulève un premier problème lorsque les taux de rentabilité sont estimés sur données

quotidiennes. Comment traiter les données manquantes ? Souvent, et c'est le choix généralement par défaut des diffuseurs de données boursières, le dernier cours coté est répété en cas de données manquantes. Bien sûr ce choix affecte la volatilité (biaisée vers 0 puisque des taux de rentabilité égaux à zéro sont introduits) et la corrélation inter titres (également biaisée vers 0)

L'illiquidité et les données manquantes permettent de prédire des niveaux de corrélation différents au niveau quotidien (plus faibles) et mensuels (plus élevés).

Tous calculs faits (ici avec Mathematica pour l'obtention des données de Yahoo !), on reproduit ci-après les matrices de corrélation sur la période 2007-2009 d'abord au niveau quotidien puis au niveau hebdomadaire et mensuel.

Corrélations quotidiennes entre 2007 et 2009

Plastic Omnium	Bolloré	Somfy	Burelle	Cac40	CAC small 90
1.	0.145763	0.107003	0.137063	0.256631	0.364365
0.145763	1.	0.0709469	0.0593506	0.372009	0.453055
0.107003	0.0709469	1.	0.0465562	0.107921	0.204834
0.137063	0.0593506	0.0465562	1.	0.0992373	0.11908
0.256631	0.372009	0.107921	0.0992373	1.	0.739257
0.364365	0.453055	0.204834	0.11908	0.739257	1.

Corrélations hebdomadaires entre 2007 et 2009

Plastic Omnium	Bolloré	Somfy	Burelle	Cac40	CAC small 90
1.	0.420793	0.371638	0.36097	0.424971	0.638747
0.420793	1.	0.244244	0.188463	0.533315	0.631898
0.371638	0.244244	1.	0.339684	0.219483	0.388484
0.36097	0.188463	0.339684	1.	0.163247	0.283271
0.424971	0.533315	0.219483	0.163247	1.	0.764123
0.638747	0.631898	0.388484	0.283271	0.764123	1.

Corrélations mensuelles entre 2007 et 2009

Plastic Omnium	Bolloré	Somfy	Burelle	Cac40	CAC small 90
1.	0.723515	0.661092	0.517866	0.802582	0.909088
0.723515	1.	0.575518	0.660145	0.732115	0.765942
0.661092	0.575518	1.	0.440974	0.398404	0.570403
0.517866	0.660145	0.440974	1.	0.551609	0.576772
0.802582	0.732115	0.398404	0.551609	1.	0.889114
0.909088	0.765942	0.570403	0.576772	0.889114	1.

Les différences sont spectaculaires et les corrélations beaucoup plus élevées au niveau mensuel. Cela traduit pour l'essentiel un problème d'estimation (de mesure) des taux de rentabilité qui impacte les corrélations mais aussi les bêtas des actions.

Les estimations mensuelles sont moins affectées par les données manquantes et les asynchronismes induits par ces ruptures de liquidité.

Une approche consiste à utiliser les données quotidiennes mais en réalisant chaque séance la moyenne de 3 taux de rentabilité en agrégeant les rentabilités observées sur les séances adjacentes. Cette approche permet d'augmenter les corrélations mais n'apparaît pas satisfaisante dans le cas de titres moins liquides.

Corrélations quotidiennes (agrégation sur 3 séances) entre 2007 et 2009

Plastic Omnium	Bolloré	Somfy	Burelle	Cac40	CAC small 90
1.	0.288265	0.205012	0.24039	0.35453	0.502296
0.288265	1.	0.190832	0.128581	0.449551	0.540004
0.205012	0.190832	1.	0.167839	0.205486	0.355088
0.24039	0.128581	0.167839	1.	0.135677	0.182233
0.35453	0.449551	0.205486	0.135677	1.	0.756509
0.502296	0.540004	0.355088	0.182233	0.756509	1.

Les conséquences sur l'estimation des bêtas est très nette. Les bêtas des 4 actions, estimés sur taux de rentabilité quotidiens sont nettement inférieurs à 1 alors que Plastic Omnium et Burelle ont un bêta nettement supérieur à l'unité sur données mensuelles. Il est également significatif d'observer l'augmentation de la corrélation (et des bêtas) entre l'indice CAC Small et le CAC40 avec le passage aux données mensuelles.

Bêtas par rapport à l'indice CAC40

	Plastic Omnium	Bolloré	Somfy	Burelle	Cac40	CAC small 90
Quotid	0.47818	0.387003	0.124033	0.193673	1.	0.427042
Q 3 séances	0.7879	0.480242	0.222926	0.271688	1.	0.562235
Hebdo	0.885327	0.48152	0.20655	0.271236	1.	0.560696
Mens	2.69773	0.95496	0.632106	1.72577	1.	1.07463

L'utilisation d'un indice affecté du même biais (CAC Small pour les small caps) permet une meilleure estimation, du moins sur données quotidiennes ou hebdomadaires. Les bêtas des small caps seront moins affectés par « l'effet d'intervalle ». Mais Burelle ou Plastic Omnium et même Somfy semblent affectées d'un biais d'illiquidité plus fort que celui en moyenne observé pour les titres de l'indice CAC90.

Bêtas par rapport à l'indice CAC Small 90

	Plastic Omnium	Bolloré	Somfy	Burelle	Cac40	CAC small 90
Quotid	1.17529	0.815899	0.407529	0.402305	1.27973	1.
Q 3 séances	1.50201	0.776202	0.518336	0.491008	1.01791	1.
Hebdo	1.81347	0.777524	0.498234	0.641416	1.04136	1.
Mens	2.52822	0.826612	0.74877	1.49299	0.735626	1.

Il est clair que si le bêta estimé pour un ensemble de small cap est faible, il s'agit d'une erreur d'estimation. Une small cap est moins diversifiée en métiers, et souvent géographiquement et davantage affectée par le cycle des affaires.

Dans le cas de Plastic Omnium (et Burelle le holding de contrôle), équipementier automobile de premier plan (réservoirs essence et carrosserie extérieure, avec doublement du chiffre d'affaires entre 2007 et 2014) avec diversification sur l'environnement (poubelles et gestion des déchets) et présent sur une trentaine de pays non seulement en vente mais aussi en production (annonce en 2014 l'ouverture de 10 usines d'ici 2016 dont 5 nouvelles en Chine), l'argument de faible diversification semble discutable. Ce sont ici également des entreprises familiales dont le flottant est limité.

Remarque : ce sont des résultats qui sont ici présentés. Comment concrètement les obtenir ? Avec Mathematica on enchaîne les étapes suivantes

a/ **mémorisation des données**, exemple des données quotidiennes

```
Période = {{2007, 1, 1}, {2009, 12, 31}};
```

```
SMALL = {{ "Plastic Omnium", "PA:POM"}, {"Bolloré", "PA:BOL"},
          {"Somfy", "PA:SO"}, {"Burelle", "PA:BUR"}, {"Cac40", "^FCHI"},
          {"CAC small 90", "^CS90"}};
```

```
CoursT = FinancialData[#, Période] & /@ Transpose[SMALL][[2]];
```

La dernière ligne permet la recherche des données sur le web et le stockage dans la variable CoursT. Elle est précédée de la définition de la période et de celle de l'univers des titres (via les mnémoniques).

b/ **les données manquantes** posent un problème délicat. Depuis la version 10 de Mathematica les commandes de traitement et de définition des séries temporelles ont été considérablement renforcées (cf. commande TemporalData). On fait le choix ici d'utiliser quelques fonctions « maison » (SYNchro qui appelle RETS) :

```
DAT = Union[Flatten[Transpose[CoursT][[#]][[1]] & /@ Range[CoursT // Length], 1];
CoursT = SYNchro[CoursT]; (* avec dates synchronisées *)
{T, n} = CoursT // Dimensions; Demar = CoursT[[All, 1]];
(* liste des dates des cours *) Cours = Transpose[CoursT[[All, 2 ;; n]]]
(* les seuls cours *);
{n, T} = Cours // Dimensions;
```

```
In[37]= RETS[Bloc_, IT_, DAT_] :=
Module[{RB}, RB = Cases[Bloc[[IT]], {#, P_} -> P] & /@ DAT;
RB = RB /. {} -> {Missing[]}; Flatten[RB, 1];
```

```
In[38]= SYNchro[Bloc_] := Module[{DAT, n, T}, n = Bloc // Length;
DAT = Union[Flatten[Transpose[Bloc][[#]][[1]] & /@ Range[n], 1]];
RET = RETS[Bloc, #, DAT] & /@ Range[n]; RET = Transpose[Prepend[RET, DAT]]]
```

L'objectif consiste à recalculer plusieurs séries sur une même (et commune) série de dates en générant éventuellement des données manquantes (valeur « Missing[] »). SYNchro reçoit un ensemble de séries de cours (ou de volume ou de n'importe quelle données, sous forme d'une matrice bloc, de dimensions n séries et T dates) chaque série ayant son propre calendrier. SYNchro établit la liste des dates apparaissant dans les différentes séries (DAT), puis fait appel à RETS de manière à caler les cours d'un titre sur le calendrier commun à

l'ensemble des titres. En cas de données manquantes, la valeur du cours sera "Missing". SYNchro renvoie une matrice (RET) qui ne comporte qu'une série de dates communes à l'ensemble des séries.

Concrètement ici le nombre de séances sans aucun cours sur la période de 3 années (2007-2009) est de 4 pour Somfy, de 12 pour Burelle et de manière plus surprenante de 16 pour le CAC40 et de 13 pour le CAC Small 90.

Si une seule transaction est conclue chaque séance (dans l'intervalle 9 heures à 17h30), un cours sera observé chaque séance mais le contenu informatif sera très différent d'un titre à l'autre et dépendra de l'instant durant la séance où la transaction est conclue.

c/ calcul des taux de rentabilité, matrice des corrélations et matrice des covariances

```
Rent = RentTAB[Cours[ [# ] ] & /@Range[n]; {n, T} = Rent // Dimensions;
COV = COVdm[Rent]; VOLAT =  $\sqrt{\text{Diagonal[COV]}}$ ;
RHO = Transpose[Transpose[COV / VOLAT] / VOLAT];
```

Cette séquence utilise deux fonctions (ci-après) qui respectivement calculent les taux de rentabilité (avec gestion des données manquantes) et la matrice des variances covariances (également en tenant compte des données manquantes).

```
In[9]:= RentTAB[lis_List] :=
Module[{lup, foo},
foo = lis /. {null -> Missing[], Null -> Missing[], 0. -> Missing[],
0 -> Missing[], "" -> Missing[]};
lup = foo /. Missing[] -> null1;
foo = (Log[Rest[lup] / Most[foo]]);
foo /. a_Log -> Missing[]]

In[10]:= missingCov[data_, ii_, jj_] := Module[{newdata, len},
newdata = Transpose[data[{{ii, jj}}]];
newdata = Transpose[DeleteCases[newdata, {_Missing, _} | {_, _Missing}]];
len = Length[newdata[[1]]];
Apply[Covariance, newdata]]

(* Calcul de matrice de variances-
covariances à partir d'une matrice pouvant comporter des données
manquantes. Programmation fonctionnelle,
remerciements à Fang Liu de Mathematica à Londres.*)

In[11]:= COVdm[data_] :=
Module[{covmat, len2 = Length[data]},
covmat = ConstantArray[0, {len2, len2}];
Do[covmat[[i, j]] = covmat[[j, i]] = missingCov[data, i, j], {j, len2}, {i,
j}];
covmat]
```

Si un cours manque une séance pour un titre, la suppression de la séance pour tous les titres permettrait de créer un échantillon parfaitement cylindré où le nombre d'observations (de cours et de taux de rentabilité) serait identique d'un titre à l'autre. Cette solution n'est pas retenue car elle entraîne un gaspillage

important de données. La suppression des séances est réalisée au niveau d'un couple de titres (fonction missingCov). Le nombre d'observations dans le calcul des covariances n'est plus forcément identique pour chaque covariance de la matrice.

d/ Affichage des corrélations

```
In[87]:= Grid[Prepend[RHO, Transpose[SMALL][[1]]], Frame -> All,
  BaseStyle -> {FontFamily -> Times, FontSize -> 10}]
  (* Coefficients de corrélation sur données quotidiennes *)
```

Ce qui permet d'obtenir le résultat du texte ci-dessus.

e/ Moyenne des données quotidiennes sur 3 séances

```
In[96]:= Rent3 = Table[(Rent[[i]][[t]] + Rent[[i]][[t - 1]] + Rent[[i]][[t + 1]]) / 3.,
  {i, 1, 6}, {t, 2, 782 - 1}] (* si Rent a n éléments, Rent3 en a n-2 *)
  Rent3 = Rent3 /. Missing[] -> 0; COV3 = COVdm[Rent3]; VOLAT3 = Sqrt[Diagonal[COV3]];
  RHO3 = Transpose[Transpose[COV3 / VOLAT3] / VOLAT3];
```

f/ Calcul et affichage des bêtas

```
In[98]:= BetaInterv[IND_, COV_, COV3_, COVH_, COVM_, SMALL_, STYL_] :=
  Module[{BetaQ, BetaH, BetaM}, BetaQ = COV[[IND]] / COV[[IND]][[IND]];
  BetaQ3 = COV3[[IND]] / COV3[[IND]][[IND]];
  BetaH = COVH[[IND]] / COVH[[IND]][[IND]];
  BetaM = COVM[[IND]] / COVM[[IND]][[IND]];
  Grid[
    Prepend[Transpose[Prepend[Transpose[{BetaQ, BetaQ3, BetaH, BetaM}],
      {"Quotid", "Q 3 séances", "Hebdo", "Mens"}]],
    Prepend[Transpose[SMALL][[1]], ""], Frame -> All, STYL /. SZ -> 9]
```

La fonction BetaInterv est appelée (ci après) deux fois et permet de générer les deux tableaux de bêtas de la page 155. L'indice CAC40 est en 5^e position de la matrice des données et l'indice CAC90 en 6^e position (suivant la définition de la variable SMALL page 156).

```
In[99]:= BetaInterv[5, COV, COV3, COVH, COVM, SMALL, STYL]
```

```
In[100]:=
```

```
BetaInterv[6, COV, COV3, COVH, COVM, SMALL, STYL]
```

Chapitre 12

L'attitude au risque et la prime de risque

1. Énoncé des exercices

Exercice 12-1 : Espérance et attitude

La valeur d'un actif risqué dans un an correspond à une variable aléatoire X dont l'espérance est de 100. Le taux sans risque sur la période est de 10%. Si les investisseurs sont adverses au risque et que X est le seul actif risqué, cochez les prix d'équilibre possibles dans la liste suivante :

Prix	30	70	92	103

Cet exercice est proposé par Roger (1999), vous y trouverez le corrigé.

Exercice 12-2 : Trois actifs risqués

Un investisseur dispose d'une richesse de 12 unités monétaires. Il a la possibilité d'acheter une unité d'actif parmi les trois actifs disponibles sur le marché. Le prix d'achat des différents actifs est de 7 unités monétaires et leur prix de vente, en fonction de l'état de la nature réalisé, est donné par le tableau ci-dessous :

Actif A		Actif B		Actif C	
Prix	Proba	Prix	Proba	Prix	Proba
5	1/3	4	1/4	1	1/5
6	1/3	7	1/2	9	3/5
9	1/3	10	1/4	18	1/5

1. Quel sera l'actif choisi si l'investisseur est neutre au risque ?
2. Idem s'il est caractérisé par la fonction d'utilité suivante : $U(W) = W - 0,5 \times W^2$.

Exercice 12-3 : Ordonner des portefeuilles

Quatre fonds d'investissement sont décrits par la distribution de probabilité du tableau suivant.

Tx rent	-1%	2%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	14%
A				40%	20%	20%	20%			
B			10%	20%	20%	20%			30%	
C	20%	20%			10%	10%		10%	10%	20%
D				40%		60%				

1. Ordonnez les fonds suivant le critère espérance/variance de la richesse (*d'après Dubois et Girerd-Potin, 2001*).
2. La fonction d'utilité de l'investisseur est de la forme $U(W) = \frac{W^a}{a}$. Analysez cette fonction.
3. Classez les fonds suivant le critère de l'espérance de l'utilité avec $a=0,5$.

Exercice 12-4.- Paradoxe de Saint-Petersbourg et utilité logarithmique

Un individu est caractérisé par une fonction d'utilité logarithmique. Quel prix est-il prêt à payer pour participer au jeu décrit par Bernoulli dans son fameux « Paradoxe de Saint-Pétersbourg »?

Exercice 12-5 : Prime de risque et utilité logarithmique

Un investisseur avec une fonction d'utilité logarithmique et un niveau actuel de richesse de 20 000 € est confronté à la situation suivante : 50% de chances de gagner ou perdre 10 €. Quelle doit être la prime de risque exigée si on considère qu'il s'agit d'un « faible » risque relativement à son niveau de richesse?

Exercice 12-6 : Modification d'un portefeuille

Un investisseur très adverse au risque envisage l'addition à un portefeuille de dix titres, de un ou deux titres supplémentaires. Le taux de rentabilité attendu des deux actions est identiquement de 15%. Toutefois l'écart-type des taux de rentabilité de l'actif noté A est de 12% alors que celui de l'actif noté B est de 8%. La corrélation de chacun des deux titres avec le portefeuille de marché est identique et de 75%. Quel actif ou quels actifs l'investisseur doit-il mettre en portefeuille ?

- a) Actif A
- b) Actif B
- c) Les deux actifs A et B
- d) Aucun des deux actifs
- e) Les données fournies ne permettent pas de répondre à la question.

Exercice 12-7 : QCM

Parmi les affirmations suivantes, laquelle vous semble la plus crédible?

- Un investisseur qui exige un taux de rentabilité plus élevé d'un investissement dont la variabilité des taux de rentabilité est la plus élevée, fait preuve d'un comportement d'aversion au risque.
- L'aversion au risque implique que l'investisseur ne diversifiera pas
- La dérivée seconde de la fonction d'utilité d'un investisseur adverse au risque doit être positive
- Toutes les affirmations précédentes de a) à c) sont incorrectes

Exercice 12-8 : Taux de rentabilité et utilité

Une fonction d'utilité est exprimée en fonction de l'espérance et de la variance des taux de rentabilité attendus, sous la forme $U = E(R) - \frac{1}{2}A \times \sigma_R^2$.

- Comment peut-on décrire le comportement d'un investisseur ayant une telle fonction d'utilité, avec $A=0$? Et $A>0$?
- A quoi correspond A ?
- Un ETF sur Cac40 a une volatilité de 25% et une espérance de rentabilité de 9%; un ETF sur emprunt d'Etat a une volatilité de 2% et une espérance de rentabilité de 5%. Quelle est la valeur de A qui rend l'investisseur indifférent aux deux possibilités d'investissement?
- Si A égale 4, quelle doit être la valeur maximale de volatilité des actions pour que les deux possibilités d'investissement soient jugées équivalentes?

Exercice 12-9.- Taux marginal de substitution entre la rentabilité et le risque

Représentez graphiquement le taux marginal de substitution entre la rentabilité et le risque.

Exercice 12-10 : AAR et niveau de richesse

Comment peut-on s'attendre voir évoluer l'aversion absolue au risque (AAR) lorsque l'investisseur s'enrichit?

Exercice 12-11 : Equivalent certain

Un placement vous laisse une chance sur deux de gagner 150 ou bien 50.

- Quelle est l'espérance mathématique de gain?
- Quelle est l'espérance d'utilité sous l'hypothèse d'une fonction logarithmique?
- Quel est l'équivalent certain sous l'hypothèse d'une fonction d'utilité de type logarithmique?

Exercice 12-12 : Le taux d'intérêt

Avec une fonction d'utilité puissance de type $u(c_t) = \frac{1}{1-\gamma} \times c_t^{1-\gamma}$.

- Exprimez l'aversion absolue au risque et l'aversion relative au risque.
- Sous l'hypothèse d'une distribution lognormale du taux de croissance de la consommation, mettez en évidence les déterminants du taux d'intérêt sans risque.

On trouve des éléments de corrigé dans Cochrane (2001, p. 13-14).

Exercice 12-13 : Coefficient d'aversion relative au risque

Un investisseur est caractérisé par la fonction d'utilité : $\frac{W^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$. Cet investisseur est engagé dans un investissement qui promet de doubler sa richesse avec une probabilité de 50% et de la diviser par deux avec une probabilité de 50%. Quel est le prix que l'investisseur pourrait être prêt à payer pour sortir de cet investissement ? Ou bien dit autrement, quelle est la prime d'assurance que l'investisseur pourrait être prêt à payer (en % du montant de l'investissement) pour couvrir les pertes éventuelles ?

Exercice 12-14 : fonction HARA (hyperbolic absolute risk aversion)

$$FI = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{aW}{1-\gamma} + b \right)^\gamma$$

Analysez cette fonction proposée par Eckhoudt et Gollier (1991, page 79).

- 1) Montrez que la tolérance (inverse de l'aversion absolue au risque) est linéaire en la richesse
- 2) Montrez que les fonctions quadratiques, logarithmique, puissance et exponentielle négative constitue des cas particuliers de cette famille, quels sont les valeurs des paramètres correspondant à chacun de ces cas ?

Exercice 12-15 : Allocation d'actifs (poids par classe d'actif et attitude au risque)

Un investisseur répartit son patrimoine initial de 12000 dans trois classes d'actifs suivant les proportions initiales de 50%, 1/3% et 1/6%, soit au départ 6000, 4000 et 2000 dans chaque classe. Si la richesse de l'investisseur double, comment doit-il composer la valeur de son portefeuille ?

Quelles sont les conséquences d'une fonction d'utilité CRRA, IRRA ou DRRA (constant, increasing, decreasing, relative risk aversion) ?

Exercice 12-16 : Moitié-moitié

Doit-on préférer, et pourquoi, l'une ou l'autre des deux stratégies suivantes :

1. Placer en permanence la moitié de son patrimoine en actions (actif risqué) et l'autre moitié en actif sans risque.
2. Ou bien tout placer la moitié du temps en actions et l'autre moitié du temps en actif non risqué ?

Une analyse de ce « puzzle » est proposée par Kritzman (2000).

Exercice 12-17 : d'après Radcliffe (1997), p 206-207.

Les données du tableau ci-dessous retracent la relation observée entre la durée de portage d'un portefeuille d'actions et la volatilité annualisée.

1. est-ce en contradiction avec l'affirmation du cours selon laquelle la variance est proportionnelle au temps écoulé ?

3. peut-on utiliser ces données pour conclure que si la durée de détention augmente le risque lié au portage d'actions baisse ?

Tableau 12

Horizon (années)	Ecart type des taux de rentabilité annualisés (volatilité)
1	21,75%
2	14,47%
3	11,55%
4	9,43%
5	6,72%
10	4,61%

Source : Radcliffe (1997), page 207

Exercice 12-18 : Moyenne géométrique

Montrez que la maximisation de la moyenne géométrique des taux de rentabilité est équivalente à la maximisation de l'espérance d'utilité d'une fonction logarithmique. Vous trouverez l'analyse de ce problème dans Elton et Gruber (1995, p. 234, note 6).

Exercice 12-19 : Questionnaire ***

Souvent un questionnaire vise à capturer les comportements avec pour objectif la détermination du degré d'hostilité au risque. Deux types de questionnaires ont été évoqués dans ce chapitre.

- 1) Les questionnaires faisant intervenir une succession de loteries. La difficulté est d'obtenir des réponses et une concentration suffisante des personnes interrogées.
- 2) Les listes de questions visant à capturer des aspects du comportement (un exemple est donné en ouverture de chapitre). Les questions sont quelquefois assez éloignées de celles que l'on peut s'attendre à voir poser pour déterminer une attitude au risque. La compréhension des questions n'est pas non plus forcément assurée. Cette deuxième démarche a par exemple pour objectif de ranger en 5 niveaux d'attitude au risque un ensemble de personnes données.

Une question complémentaire est souvent ajoutée : elle demande à l'interviewé d'apprécier son attitude au risque sur une échelle de 0 à 100. Les corrélations entre les réponses à cette question d'auto-évaluation et les réponses à chacune des autres questions permettent de définir des coefficients de pondération aux questions posées. FinaMetrica (www.finametrica.com) par exemple évalue les tolérances avec 25 questions dont une d'auto-évaluation. Reproduisez la démarche, adaptez les questions, construisez un algorithme d'agrégation des réponses.

Exercice 12-20 : Elasticité

Montrez que lorsque l'accroissement de richesse tend vers 0, l'élasticité de la dérivée première de la fonction d'utilité est égale, au signe près, à l'aversion relative au risque.

Exercice 12-21 : Risques multiplicatifs et espérance de valeur

Un investissement donne 50% de chances de multiplier son capital de départ par 1.5 et 50% de de le multiplier par 0.6

1. quelle est l'espérance de gain?
2. si l'investissement doit être répété plusieurs fois, comment analyser la décision? Un investisseur qui refuse l'investissement peut-il être amené à accepter s'il a la possibilité de répéter l'expérience plusieurs (30 ?) fois ?

Exercice 12-22 : Choix entre consommation et épargne

Un consommateur/investisseur a un niveau initial de richesse/consommation de Y . Quel est le montant optimal S qu'il peut ne pas consommer immédiatement et placer à $r\%$ ($R=1+r$), sachant que le taux d'actualisation (*subjective discount factor*) est δ ? Cet investisseur/consommateur doit résoudre le problème suivant : $Max[U(Y - S) + \delta U(S \times R)]$. La fonction d'utilité de cet investisseur/consommateur est $\frac{W^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$.

Exercice 12-23 : Critique du critère espérance/variance

Ingersoll (1987, page 115) propose le choix d'investissement suivant. L'actif risqué X peut prendre les valeurs 0 ou 4 avec les probabilités $\frac{1}{2}$. L'actif Y les valeurs 1 ou 9 avec les probabilités $\frac{7}{8}$ et $\frac{1}{8}$.

1. Suivant le critère espérance/variance quelle décision prendre ?
2. Si l'investisseur a une fonction d'utilité racine carrée, quelle décision prend-il ?

2. Corrigé de certains exercices**2.1. Critère de choix espérance/variance (et courbe d'indifférence).**

Si la satisfaction d'un investisseur ne dépend que de l'espérance de la richesse (consommation) future et de sa variance, l'utilité s'exprime ainsi :

$$U(W) = f(E(W), \sigma^2(W))$$

Si l'espérance de la richesse contribue positivement à la satisfaction de l'investisseur (ce qui est peu contesté n'est-ce pas ?), la dérivée partielle de f par rapport à $E(W)$ est strictement positive

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial E} > 0$$

La dérivée partielle de f par rapport à la variance de la consommation/richeesse future est égale à 0 dans le cas d'un investisseur neutre au risque et qui prend ses décisions sur la base du critère de l'espérance de gains. Cette dérivée est plus

généralement négative dans les cas couramment observés d'aversion au risque (et en supposant ici que toutes les dimensions du risque puissent être appréhendées par la variance)

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} \leq 0$$

Une **courbe d'indifférence décrit le taux marginal de substitution (TMS)** entre l'espérance de richesse (que l'investisseur souhaite la plus élevée possible) et la variance de la richesse (qu'il redoute s'il est hostile au risque). En d'autres termes, l'investisseur acceptera de prendre quelques risques en échange d'une contrepartie en termes d'espérance de rentabilité. La différentiation totale de f

$$TMS = -\frac{\partial E}{\partial \sigma^2} = \frac{f_2}{f_1}$$

Le taux marginal de substitution (TMS) indique de combien l'espérance de richesse doit augmenter pour compenser l'inconvénient d'une augmentation de la variance de richesse. Le signe de TMS est positif (aversion au risque).

L'écriture $E(W) - k \times \sigma^2(W)$ décrit l'utilité d'un investisseur pour lequel $f_1 = 1$ et $f_2 = -k$

2.2. Prix de vente et prime de risque.

Un investisseur hostile au risque peut-il malgré tout exiger un prix de vente positif d'une loterie (risquée) qu'il détient ? La réponse est positive, car la prime de risque (positive) implique que le prix de vente de l'investisseur hostile au risque (et donc exigeant une prime de risque) sera inférieur au prix de vente d'un autre investisseur neutre au risque (pour lequel le prix de référence sera l'espérance de gain)

2.3. Prime de risque calcul direct et approximation de Pratt

Eckhoud & Gollier (1992). Soit un investisseur caractérisé par une fonction d'utilité $U = \sqrt{W}$. Il fait face au risque suivant 80% de chances de gagner 4 et 20% de perdre 4. Sa richesse initiale est de 5.

Fonction $U = \sqrt{W}$		Résultat
Espérance de gain de la loterie	$0,2 (-4) + 0,8 \times 4$	$EG=2,4$
Espérance de gain (richesse totale)	$EG + 5$	$EGT = 7,4$
Variance de gain	$[-4^2 \times 0,2 + 4^2 \times 0,8] - EG^2$	$\sigma^2 = 10,24$
Espérance d'utilité de la richesse totale	$0,2 \sqrt{-4 + 5} + 0,8 \sqrt{4 + 5}$	$EU = 2,6$
Equivalent certain	$\sqrt{EC}=EU$	$EC = 6,76$
Prix de vente de la loterie	$PV = EC - 5$	1,76
Prime de risque	$EG - PV$	0,64
U'		$\frac{1}{2\sqrt{W}}$

U''		$-\frac{1}{4W^{3/2}}$
$-U''/U'$		$\frac{1}{2W}$
$-\frac{1}{2} \frac{U''}{U'} \sigma^2$		0,345946

L'écart important entre l'approximation de Pratt et la prime de risque est lié au montant des sommes en jeu, importants relativement au niveau de richesse

Danthine et Donaldson (2005). Soit un investisseur caractérisé par une fonction d'utilité puissance $U = \frac{c^{1-A}}{1-A}$ avec $A=3$. Il fait face au risque suivant 50% de chances de gagner 100000 et 50% de perdre 100000. Sa richesse initiale est de 500000.

Fonction $U = \frac{c^{1-A}}{1-A}$ ($A=3$)		Résultat
Espérance de gain de la loterie	$0,5(-100000) + 0,5 \cdot 100000$	$EG=0$
Espérance de gain (richesse totale)	$EG + 500000$	$EGT = 500000$
Variance de gain	$[-4^2 \times 0,2 + 4^2 \times 0,8] - EG^2$	$\sigma^2 = 100000^2$
Espérance d'utilité de la richesse totale		$EU = -2.25694 \times 10^{-12}$
Equivalent certain	$\frac{EC^{1-A}}{1-A} = EU$	$EC = \bar{7}470679$
Prix de vente de la loterie	$PV = EC - 5$	
Prime de risque	$EG - PV$	
U'		
U''		-
$-U''/U'$		$\frac{A}{W}$
$-\frac{1}{2} \frac{U''}{U'} \sigma^2$		30000

Exercice 12-4.- Paradoxe de Saint-Petersbourg et utilité logarithmique

Il s'agit ici de trouver l'équivalent certain de la loterie présentée par Bernoulli, c'est-à-dire la somme certaine à laquelle est équivalent le jeu pour un individu hostile au risque. Il faut donc trouver le prix P tel que

$$\ln(P) = \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{4} \ln(4) + \dots \quad \text{Soit} \quad \ln(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(2^n) \quad \text{ou encore}$$

$Ln(P) = Ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. On a ici une série dont le terme général est $n \cdot q^n$ avec

$|q| < 1$ et dont la limite vaut $\frac{q}{(q-1)^2}$ (soit 2). On en déduit alors que

$Ln(P) = Ln(2) \times 2 = Ln(2^2)$, soit $P=4$. Ainsi, un individu caractérisé par une fonction d'utilité logarithmique ne serait pas prêt à déboursier plus de 4 Ducats (la monnaie de l'article de Bernoulli) pour jouer au jeu décrit. Ce qui est très différent de la valeur obtenue en situation de neutralité au risque, et davantage conforme aux comportements observés.

Exercice 12-6 : Modification d'un portefeuille, corrigé

Le risque marginal lié à l'adjonction d'un titre en portefeuille est en rapport avec la covariance entre les rentabilités du titre et du portefeuille. La covariance est égale au produit des écart-types (titre et marché) et du coefficient de corrélation. Puisque les corrélations sont identiques, la covariance (et le risque marginal) est la plus faible avec l'adjonction du titre B (réponse b) (plus faible volat)

Exercice 12-7 : QCM, corrigé

a)

Exercice 12-9.- Taux marginal de substitution entre la rentabilité et le risque

Il s'agit de la pente de la tangente à une courbe d'indifférence. Sur la représentation graphique précédente, on remarque que par construction la pente de la tangente est positive. La pente augmente lorsque l'on se déplace vers la droite du graphique, c'est-à-dire lorsque le risque augmente.

Exercice 12-10 : AAR et niveau de richesse

Probablement elle baisse, car un enjeu de 1 000 € est vital pour une personne qui vit avec le RMI et n'a probablement pas (?) les mêmes conséquences pour Bill Gates. Il n'y a toutefois pas de réponses absolues à cette question, la lecture de l'Avare de Molière montre la diversité des comportements humains.

Exercice 12-11 : Equivalent certain, corrigé

1. $0,5 \times 150 + 0,5 \times 50 = 100$
2. $Ln(150) 0,5 + Log(50) 0,5 = 4,46$
3. Supposons que le placement nécessite un investissement de 100. Le résultat à la question précédente est à comparer à $Ln(100)$ soit 4,605 pour décider si oui ou non (ici c'est non) le placement est intéressant. Une autre façon de procéder est d'exprimer l'utilité en équivalent monétaire, soit ici $Exp(4,46)=86,60$. L'équivalent certain de l'investissement est de 86,60 (conditionnellement à la fonction d'utilité retenue) à comparer aux 100 à investir pour les obtenir.

Exercice 12-12 : Le taux d'intérêt, Corrigé (Cochrane, 2001, p 13-14)

1. Les dérivées première et seconde de la fonction d'utilité (par rapport au niveau de consommation) sont $U'(c) = c^{-\gamma}$ et $u''(c_t) = -\gamma \times c_t^{-1-\gamma}$.

$$\text{L'aversion absolue au risque est } ARA = -\frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} = -\frac{-\gamma \times c_t^{-1-\gamma}}{c^{-\gamma}} = \frac{\gamma}{c} \text{ et}$$

$$\text{l'aversion relative de } RRA = c \times ARA = \gamma$$

2. L'équation fondamentale d'évaluation $p_t = E_t(m_{t+1} \times x_{t+1})$ appliquée au taux sans risque permet d'écrire : $1 = E_t(m_{t+1} \times R_f) = E_t(m_{t+1}) \times R_f$, soit

$$R_f = \frac{1}{E_t(m_{t+1})}. \text{ Le « stochastic discount factor » est } m_{t+1} = \beta \times \frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}$$

Suivant la fonction d'utilité spécifiée,

$$R_f = \frac{1}{\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{\gamma}} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^{\gamma} \text{ ou}$$

$$R_f = \frac{1}{E_t \left[\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \right]}. \text{ On note } \Delta \ln(c_{t+1}) = \ln(c_{t+1}) - \ln(c_t). \text{ On sait que si } z \text{ est}$$

distribuée suivant loi normale : $E(e^z) = e^{E(z) + \frac{1}{2} \times \sigma^2(z)}$. Ce qui permet

$$\text{d'écrire } R_f = \left[\beta \times e^{-\gamma \times E_t(\Delta \ln(c_{t+1})) + \frac{\gamma^2}{2} \sigma^2(\Delta \ln(c_{t+1}))} \right]^{-1}. \text{ En notant } \beta = e^{-\delta}, \text{ il}$$

vient : $\ln(R_f) = \delta + \gamma \times E_t(\Delta \ln(c_{t+1})) - \frac{\gamma^2}{2} \sigma^2(\Delta \ln(c_{t+1}))$. Le taux d'intérêt est

élevé si

- les consommateurs/investisseurs sont impatients ;
- Le taux de croissance de la consommation est élevé ; et
- on constate qu'une forte valeur de γ amplifie (courbure de la fonction)
- une augmentation de la volatilité de la consommation provoque une **épargne de précaution** qui tire les taux d'intérêt vers le bas.

Exercice 12-13 : Coefficient d'aversion relative au risque

Cette fonction d'utilité : $\frac{W^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$ doit tout d'abord être analysée. La dérivée première est W^γ , la dérivée seconde est $-W^{-1-\gamma}\gamma$, l'aversion absolue au risque est $\frac{\gamma}{W}$ et l'aversion relative est γ . La fonction est CRRA, *constant relative risk aversion*. γ doit être strictement supérieur à 0. Avec $\gamma = 1$, on retrouve une fonction logarithme.

Soit PC le pourcentage de la richesse initiale Y que l'investisseur est prêt à abandonner pour éviter les conséquences de l'investissement. On peut voir PC également comme une prime d'assurance que l'investisseur serait prêt à payer.

$$\frac{(Y(1-PC))^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} = 0.5 \frac{(Y0.5)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + 0.5 \frac{(Y2)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$$

La valeur de PC est directement liée à γ et ne dépend pas de Y. A titre d'illustration, pour quelques valeurs du coefficient d'aversion relative au risque :

γ	PC
1.2	4,67%
1.5	11,1%
2	20%
3	31,4%
4	37,2%
5	40,6%
10	46,0%
20	48,1%

Le tableau montre que le pourcentage que l'investisseur est prêt à abandonner (ou la prime d'assurance qu'il est prêt à payer, augmente très rapidement avec γ . Si le coefficient est de 20, l'investisseur est prêt à payer 48,1% de sa richesse pour éviter d'en perdre 50% ! C'est un comportement difficilement compréhensible.

Cette fonction d'utilité a été proposée par Mehra et Prescott (1985)⁸. Dans cet article sur le thème de « l'énigme de la prime de risque » (*equity premium puzzle*), les auteurs estiment par ailleurs (à partir d'une observation de la formation des cours et des équilibres) que la valeur de la prime de risque implique un coefficient γ de l'ordre de 30. Ce qui leur fait écrire que la prime de risque (écart entre la rentabilité des actifs risqués et de l'actif sans risque) est beaucoup trop élevée et ne peut être cohérente avec les comportements observés. La conclusion de l'article débute par "*The equity premium puzzle may not be why was the average equity return so high but rather why was the average risk-free rate so low*". En effet la prime de risque est un différentiel, si on estime que la prime est trop forte soit c'est en raison des actions trop rentables ou bien du taux sans risque trop bas.

Le taux sans risque pourrait être jugé trop bas si l'aversion au risque est forte car le comportement de lissage des consommations devrait impliquer que les investisseurs/consommateurs sont prêts à emprunter pour rendre leurs consommations plus régulières ce qui devrait alors se traduire par une augmentation des taux. Les taux réels sont jugés bas sur longue période.

⁸ « The equity premium : A puzzle », Journal of Monetary Economics, p. 145-161.

Exercice 12-15 : Allocation d'actifs (poids par classe d'actif et attitude au risque)

Si l'aversion relative au risque est constante, les proportions placées sont inchangées et ne dépendent pas des montants investis (cf. le cours, voir aussi exercices 12-13 et 12-20). Est-ce un comportement courant ?

Supposons un investisseur détenant un portefeuille placé à 50% en actions et 50% en produits de taux (obligations souveraines). Si le marché des actions chute de 50%, cela suppose qu'il vende une partie de son portefeuille obligataire pour acheter des actions et restaurer la proportion de 50%. On constate souvent dans ce cas le comportement inverse (*flight to quality*, la valeur des obligations augmente et les taux exigés baissent), les investisseurs se désengagent du marché des actions.

L'hypothèse d'aversion relative au risque est pourtant souvent retenue, il est vrai que beaucoup de démonstrations sont dans ce contexte particulier plus simples.

Après une forte chute du cours des actions, trois stratégies d'allocation sont possibles : *rebalance* (conservation des poids) si *Constant RRA* ; augmentation de la proportion d'actifs risqués (*Increase RRA*) ; ne rien faire ou réduire la proportion d'actifs risqués (*Decrease RRA*).

Suivant Samuleson (1969) et Merton (1969, 1990), la stratégie optimale est inchangée dans le temps et indépendante du niveau de richesse si :

- asset distribution is iid*
- fonction d'utilité CRRA
- only investment income is considered*
- no transaction costs*
- une fonction d'utilité logarithmique, permet de relâcher la contrainte "iid assets returns" et d'adopter une stratégie de conservation des poids ;

Si l'une des conditions a) à e) n'est pas respectée, la modification des poids (*dynamic strategy*) peut être optimale.

Exercice 12-20 : Elasticité

L'élasticité de la dérivée première de la fonction d'utilité par rapport à la richesse s'exprime $ELS = \frac{\Delta U'}{U'} / \frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta U'}{\Delta W} \times \frac{W}{U'}$. Lorsque l'accroissement de richesse tend vers 0, $\frac{\Delta U'}{\Delta W}$ tend vers la dérivée seconde (U'') et $ELS = \frac{U''}{U'}$ $\times w$. Au signe près, l'aversion relative au risque est donc égale à ELS. L'aversion relative représente ainsi la façon dont l'investisseur réagit lorsque sa richesse initiale et le risque auquel il fait face sont modifiés par un facteur proportionnel identique.

Lorsque la fonction est CRRA, $\ln(U'(W))$ est égal à $-\alpha \ln(W)$. Ce qui constitue une autre façon de montrer que α correspond à l'élasticité de l'utilité marginale par rapport à la richesse (Cuthbertson et Nitzsche, , p. 18).

Supposons un investisseur caractérisé par une fonction d'utilité et une aversion relative au risque constante (soit γ cette constante), une baisse de 1% de ses consommations, augmente la valeur perçue (l'utilité) d'une consommation de 1€ de $\gamma\%$. Si un investisseur a une fonction d'utilité de type CRRA (*constant relative risk aversion*) avec une forte valeur de γ (coefficient d'aversion relative au risque), cela peut être interprété comme une volonté forte

de lisser les consommations (revenus) dans le temps : une réduction éventuelle de son budget lui inflige des désagréments beaucoup plus importants que les plaisirs procurés par une augmentation éventuelle du même montant (en valeur absolue).

Exercice 12-22 : Choix entre consommation et épargne

La condition de premier ordre, avec $R=1$ et en retenant la fonction d'utilité $\frac{W^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$, s'exprime $\partial_S[U(Y-S) + \delta U(S \times R)] = 0$. Soit $-(Y-S)^{-\gamma} + \delta \times S^{-\gamma} = 0$.

Ce qui s'écrit $(Y-S)^{-\gamma} = \delta \times S^{-\gamma}$ ou $\frac{(Y-S)^{-\gamma}}{S^{-\gamma}} = \delta$ ou bien $\left[\frac{1}{\delta}\right]^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{Y-S}{S}$. Si $\delta < 1$, lorsque γ tend vers l'infini, le terme de droite tend vers 1 et la consommation est alors identique entre les deux dates, ce qui implique $S=Y/2$. Voir aussi Danthine et Donaldson (2005, page 82 et suivantes).

Exercice 12-23 : Critique du critère espérance/variance

Les espérances de rentabilité sont égales pour X et Y à 2 ; les variances sont respectivement de 2 et de $\sqrt{7}$.

Suivant le critère espérance/variance, X est préférable puisque sa variance est la plus faible. Toutefois, si les investisseurs apprécient l'asymétrie de distribution la décision peut être inversée. Avec la fonction d'utilité racine carrée, les espérances d'utilité sont de 1 pour X et de 5/4 pour Y, le critère d'espérance d'utilité amène à préférer Y.

La distribution de Y est fortement asymétrique à droite (dans les valeurs positives appréciées des investisseurs en position longue). Si les distributions de probabilité des rentabilités sont symétriques (comme par exemple dans le cas de la loi normale) les décisions prises seraient identiques.

Chapitre 13

La diversification naïve

1. Énoncé des exercices

Exercice 13-1 : Quelle est l'utilité d'une diversification en Europe ?

Que pensez-vous du commentaire suivant : «Diversifier un portefeuille sur des zones géographiques très différentes permet peut être de réduire les risques. Ainsi on comprend que les économies de l'Asie du sud-est ne soient pas forcément en phase avec celle d'Amérique du nord, mais en revanche quel intérêt peut avoir une diversification à l'intérieur de l'Europe?»

Exercice 13-2 : Diversification et corrélation

1. Exprimez la variance des taux de rentabilité d'un portefeuille.
2. Décomposez la variance et faites apparaître la covariance moyenne.
3. Exprimez le rapport entre la variance des rentabilités du portefeuille et la variance moyenne en fonction de la corrélation moyenne entre les titres en portefeuille.
4. Commentez.

Exercice 13-3 : Asymptotes à Paris ***

Sur tous les titres cotés à la bourse de Paris, a) choisissez différentes périodes de deux ans de forte et de faible volatilité (postérieures à 1991) ; b) reproduisez l'étude de cette section sur ces données plus récentes ; c) précisez le nombre de titres permettant d'éliminer 50 %, 70 % ; 80 % et 90 % du risque éliminable par la diversification.

Exercice 13-4 : Asymptotes zone Euro ***

Sur tous les titres cotés sur les principales bourses européennes, a) identifiez des périodes de forte et faible volatilité, b) recherchez la localisation de l'asymptote par pays et pour un portefeuille constitué au hasard parmi l'ensemble des titres européens, c) l'avantage à la diversification en zone

européenne est-il différent avant et après le passage en cotation euro ? (début janvier 1999)

2. Corrigé de certains exercices

Exercice 13-1 : Quelle est l'utilité d'une diversification en Europe ? corrigé

Le Tableau 13-1 classe chaque année depuis 1986 les taux de rentabilité annuels des marchés d'actions de cinq pays européens (l'Espagne –E–, la France –F–, l'Allemagne –A–, la Hollande –H– et la Grande-Bretagne –G–).

Tableau 13-1 : Rangs de 5 marchés d'actions européens depuis 1986

Rang	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
1	E	F	A	G	H	F	H		E		F	H	E	G	A	E			
2	F	G	A	H	F	H	A		H		F	A	F	G	E	G			
3		H		F	A	E	G	E	G		A	G	A		F				
4	A	F	E	G	E	G	A	G	E	A	F	G	H	A	F	H	G	A	
5	G	A	G	E	F	A	E		F		A	F	G	E	H	A	H		

Source : Données d'indices de Morgan Stanley Capital International, en deutsche mark avant 1999. Principaux indices nationaux à partir de 2001.

Ce n'est pas le même pays qui connaît la progression de cours la plus forte systématiquement chaque année. L'Espagne connaît 4 années consécutives fastueuses, mais l'investisseur qui utilise cette information pour placer la totalité de son portefeuille en Espagne a une forte déconvenue les deux années suivantes où l'Espagne se classe en dernier (en 1999 et 2000). S'il est impossible de prévoir, la diversification est la moins mauvaise stratégie pour faire jouer une compensation des risques.

Complétez ce tableau après 2004.

Exercice 13-2 : Diversification et corrélation, corrigé

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} x_i x_j \sigma_{i,j}$$

- 1.
2. $\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \bar{\sigma}^2 + \left(\frac{n-1}{n} \right) \times \text{cov}$, en notant $\bar{\sigma}^2$ la variance moyenne et COV la covariance moyenne.
3. $\frac{\sigma_p^2}{\bar{\sigma}^2} = \frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n} \right) \times \frac{\text{cov}}{\bar{\sigma}^2} = \frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n} \right) \times \text{corr}$ en notant CORR la corrélation moyenne.
4. La variance relative à la variance moyenne s'exprime en fonction du nombre de titres en portefeuille et de la corrélation moyenne. Une diversification

naïve consiste à augmenter le nombre de titre sans sélection particulière. Avec une diversification plus réfléchie, sans augmenter le nombre de titres, on réduit le risque en sélectionnant les titres de manière à réduire la covariance moyenne.

Chapitre 14

La diversification raisonnée et la frontière efficiente

1. Énoncés des exercices

Exercice 14-1 : Minimisation du risque sous contrainte de rentabilité

Un problème équivalent à celui du tableau 10-1 consiste à minimiser le risque, sous contrainte de la définition d'un portefeuille et en fixant l'espérance de rentabilité du portefeuille à un niveau donné.

1. Formulez précisément ce problème.
2. Formulez les conditions de premier ordre.

Exercice 14-2 : Etablissement de la condition de premier ordre (variante)

Démontrez le résultat affiché par la relation **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = E(R_i) - \theta \sum_{j=1}^n x_j \sigma_{i,j} - \mu = 0 \quad (\forall i, i = 1, \dots, n)$$

Exercice 14-3 : La pente de la tangente à la frontière

Un portefeuille p est composé d'un actif sans risque et d'un actif (ou portefeuille d'actifs) risqué noté a. On définit x comme étant le pourcentage investi dans l'actif risqué.

1. Exprimez le changement dans la rentabilité attendue du portefeuille p lorsque x varie de manière infinitésimale.
2. Exprimez le changement de la volatilité du portefeuille p lorsque x varie de manière infinitésimale.
3. Dans le plan espérance de rentabilité et volatilité (en abscisse) montrez que, lorsque x varie, le lieu des portefeuilles p est une droite.

Exercice 14-4 : Taux d'emprunt supérieur au taux de placement

On a admis l'existence du taux sans risque sans distinguer les taux de prêt et de placement.

1. Que devient la frontière efficiente si le taux d'emprunt est supérieur au taux de placement? Faites une représentation graphique de la frontière.
2. Pour quels investisseurs cette situation ne change-t-elle pas la composition de leur portefeuille?

Exercice 14-5 : Portefeuilles et frontière (examen de septembre 2007)

A partir de données historiques vous avez estimé l'espérance de rentabilité du marché à 12 %, sa volatilité à 20 %. Le taux sans risque est de 4 %. Un portefeuille particulier (noté p) a par ailleurs une espérance de rentabilité de 10 % et un écart type des taux de rentabilité de 16 %. En utilisant ces données, une des affirmations suivantes est-elle correcte :

- a. On peut constituer un portefeuille de même espérance de rentabilité que p mais avec un plus faible risque
- b. On peut constituer un portefeuille de même risque que p mais avec une plus forte espérance de rentabilité
- c. On peut constituer un portefeuille à la fois moins risqué et plus rentable que p.
- d. Aucune des réponses précédentes n'est correcte

Exercice 14-6 : Position à effet de levier

Le taux sans risque est de 5 %. L'étude des données du marché vous a permis l'identification d'un portefeuille frontière qui maximise le ratio de Sharpe. Ses caractéristiques (anticipées) sont de 12 % de rentabilité et 20 % de volatilité. Vous disposez de 300 000 € de fonds propres et vous empruntez 100 000 €.

1. Quelles sont les caractéristiques de taux de rentabilité et de risque du portefeuille résultant?
2. Votre fonction d'utilité est de la forme $U = E(R) - 0,5 \times A \times \sigma_R^2$ (A étant un paramètre précisant le degré d'aversion au risque). En supposant $A = 4$, représentez l'évolution de l'utilité attendue en fonction de l'effet de levier.

Exercice 14-7 : Frontière efficiente et choix de portefeuille

Sur un marché, le domaine des portefeuilles risqués est délimité par une frontière F dont une partie est représentée par la courbe d'équation $\sigma_p^2 = 2.5E_p^2 - 37.5E_p + 150$, où E_p désigne l'espérance de rentabilité d'un portefeuille quelconque p et σ_p l'écart type des taux de rentabilité de ce même portefeuille.

1. Vérifiez que les portefeuilles p1, p2 et p3 appartiennent à la frontière du domaine. On vous donne : i) p1 avec $\sigma_{p1} = E_{p1} = 5$; ii) p2 avec $\sigma_{p2} = 5$ et $E_{p2} = 10$; iii) p3 avec $\sigma_{p3} = E_{p3} = 20$.
2. Répondez aux questions suivantes : ces trois portefeuilles sont-ils efficients ? Déterminez le portefeuille p4 appartenant à la frontière dont le risque est

- minimum. Tracez la frontière efficiente du domaine des portefeuilles risqués. Quelle partie de la courbe ci-dessus n'appartient pas à cette frontière ?
3. On considère à présent un investisseur dont les courbes d'indifférence dans l'espace (E, σ) sont de la forme C_μ tel que $E_p - \left(\frac{\sigma_p^2}{10} \right) = \mu$. Quelle est la signification de μ ? Tracez les courbes d'indifférence pour $\mu=10$, $\mu=8$ et $\mu=6$. Que peut-on dire de l'attitude de l'investisseur vis-à-vis du risque ?
4. Répondez aux questions suivantes : quel portefeuille l'investisseur choisira-t-il ? Quelles sont les caractéristiques (E, σ) de ce portefeuille ? Quel sera le niveau de satisfaction de l'investisseur pour ce choix ?
5. On introduit un actif sans risque dont la rémunération est de 10% sur le marché. Que devient la frontière efficiente ? Quel est alors le choix de l'investisseur ? Quelles seront les caractéristiques (E, σ) du portefeuille correspondant ? Quel sera le niveau de satisfaction de l'investisseur pour ce choix ?

Cet énoncé est proposé par Viviani (1997). Le lecteur y trouvera un corrigé pages 110-113.

Exercice 14-8 : Algorithme de construction de la frontière

Pour construire la frontière efficiente, on note qu'une condition nécessaire de la dominance d'un portefeuille p est que, pour tout actif i entrant dans sa composition, on doit avoir la relation $E(R_i) - \mu = \theta \text{Cov}(R_i, R_p)$. On se fixe une valeur de μ donnée μ_0 et l'on fixe arbitrairement la valeur du paramètre θ à 1.

1. Sachant que n actifs sont disponibles, écrivez le système de n équations devant être vérifié pour que p soit un portefeuille efficient.

2. On note $E(R) - \mu$ le vecteur défini par :
- $$\begin{pmatrix} E(R_1) - \mu \\ E(R_2) - \mu \\ \vdots \\ E(R_n) - \mu \end{pmatrix}$$

nécessaire pour que le portefeuille p soit efficient est qu'il existe un vecteur de pondérations des n actifs X tel que : $X = V^{-1}[E(R) - \mu]$ où V représente la matrice de variances-covariances des taux de rentabilité des actifs.

3. θ ayant été choisi de façon arbitraire, le vecteur X obtenu ne correspond pas nécessairement à un portefeuille faisable. Montrez cependant que le vecteur de poids obtenu en divisant chaque composante de X par la somme des n composantes de X conduit à un portefeuille qui, non seulement existe, mais est efficient.

Déduire des résultats précédents une procédure de construction de la frontière efficiente. Construire la frontière efficiente avec les quatre titres dont les caractéristiques sont détaillées ci-dessous (on fera varier les valeurs de μ entre $-0,36\%$ et $0,9\%$).

Mnémonique	Taux de rentabilité
A	6%
B	5%
C	7%
D	8%

Matrice de variances-covariances

	A	B	C	D
A	0,40	0,03	0,02	0,00
B	0,03	0,20	0,00	-0,06
C	0,02	0,00	0,30	0,03
D	0,00	-0,06	0,03	0,10

Source : Benninga, 1998, p. 99.

4. Puisque toute combinaison convexe de deux portefeuilles efficients est également un portefeuille efficient (exercice 10-7), en déduire une nouvelle procédure pour générer l'ensemble de la frontière efficiente.

On trouve un corrigé dans Benninga (1998) avec une application sous excel.

2. Corrigés de certains exercices

Exercice 14-1 : Minimisation du risque sous contrainte de rentabilité

On trouvera une démonstration détaillée en notation développée dans Fama (1976), chapitre 8, p. 263 et 264. Cet excellent ouvrage, épuisé en librairie, est téléchargeable sur le site web de Fama à l'université de Chicago.

Exercice 14-2 : Etablissement de la condition de premier ordre

Démontrez le résultat affiché par la relation **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = E(R_i) - \theta \sum_{j=1}^n x_j \sigma_{i,j} - \mu = 0 \quad (\forall i, i = 1, \dots, n)$$

Corrigé :

La dérivée du lagrangien s'écrit :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial [\sum_{k=1}^n x_k E(R_k)]}{\partial x_i} + \frac{\partial \left(\frac{\theta}{2} [\sigma^2 - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k x_j \sigma_{k,j}] \right)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\mu [1 - \sum_{k=1}^n x_k])}{\partial x_i}$$

1. Le premier terme	2. $\frac{\partial [\sum_{k=1}^n x_k E(R_k)]}{\partial x_i} = E(R_i)$
3. Le troisième terme	4. $\frac{\partial (\mu [1 - \sum_{k=1}^n x_k])}{\partial x_i} = \frac{\partial (-\mu \sum_{k=1}^n x_k)}{\partial x_i} = -\mu$
5. Le deuxième terme	6. $\frac{\partial \left(\frac{\theta}{2} [\sigma^2 - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k x_j \sigma_{k,j}] \right)}{\partial x_i}$
	7. $\frac{\partial \left(-\frac{\theta}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k x_j \sigma_{k,j} \right)}{\partial x_i}$
	8. $\frac{\partial \left(-\frac{\theta}{2} \sigma_p^2 \right)}{\partial x_i}$

Les dérivées du premier et du troisième terme sont facilement obtenues (tableau ci-dessus). Le deuxième terme fait apparaître la dérivée de la variance des rentabilités d'un portefeuille par rapport au changement de poids d'un titre.

Suivant la démonstration du chapitre 10 (relation 10-13), $\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x_i} = 2 \times \sum_{j=1}^n x_j \times \sigma_{i,j}$. Ce qui permet d'exprimer le 2^e terme ainsi $-\theta \times \sum_{j=1}^n x_j \times \sigma_{i,j}$. Le regroupement des 3 termes, donne le résultat demandé.

Exercice 14-3 : La pente de la tangente à la frontière

Un portefeuille p est composé d'un actif sans risque et d'un actif (ou portefeuille d'actifs) risqué noté a. On définit x comme étant le pourcentage investi dans l'actif risqué.

4. Exprimez le changement dans la rentabilité attendue du portefeuille p lorsque x varie de manière infinitésimale. *Corrigé ci-après :*

$$\frac{\partial E[R_p]}{\partial x} = E[R_a] - R_f$$

5. Exprimez le changement de la volatilité du portefeuille p lorsque x varie de manière infinitésimale. *Corrigé ci-après :*

$$\frac{\partial \sigma[R_p]}{\partial x} = \sigma[R_a]$$

6. Dans le plan espérance de rentabilité et volatilité (en abscisse) montrez que, lorsque x varie, le lieu des portefeuilles p est une droite. *Corrigé ci-après.*

$$\frac{\frac{\partial E[R_p]}{\partial x}}{\frac{\partial \sigma[R_p]}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial E[R_p]}{\partial x}}{\frac{\partial \sigma[R_p]}{\partial x}} = \frac{E[R_a] - R_f}{\sigma[R_a]}$$

La pente de la tangente ne dépend pas de la composition du portefeuille (le poids x n'apparaît pas dans son expression), le lieu est donc une droite.

Exercice 14-5 : Portefeuilles et frontière (examen de septembre 2007)

La réponse c) correspond à a) vrai et simultanément b) vrai.

Si on ne doit cocher qu'une réponse c'est c) qui est appropriée. En effet, un positionnement, au même niveau de volatilité que le portefeuille p, mais sur le segment de droite reliant le taux sans risque et le portefeuille représentant le marché (segment de droite RfM), permettrait d'obtenir le taux de rentabilité de $4\% + (12\% - 4\%) \times (16\% / 20\%) = 10,4\%$, supérieur au taux actuellement affiché de 10%.

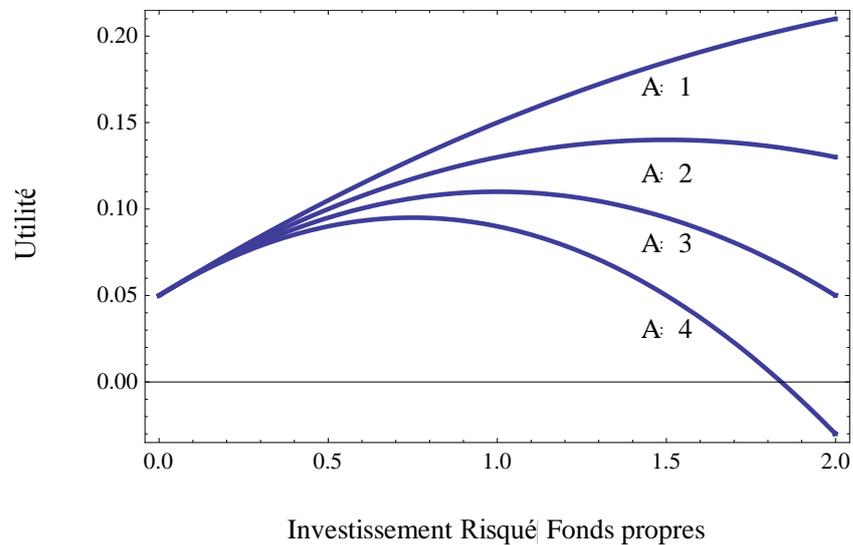
De même en calant le taux de rentabilité à 10% un positionnement sur le segment de droite RfM donne une volatilité de 15% puisque en notant Sigma la volatilité recherchée, l'équation du segment de droite est : $(10\% = 4\% + (12\% - 4\%) \times (\text{Sigma} / 20\%))$.

Exercice 14-6 : Position à effet de levier, corrigé

Sans effet de levier, la réponse est dans l'énoncé : le portefeuille risqué a une rentabilité de 12% et 20% de volatilité. Si une partie des fonds est placée au taux

sans risque et le reste en actif risqué, le taux de rentabilité prendra une valeur intermédiaire entre 5% et 12% et la volatilité sera plus faible.

1. Avec effet de levier, la rentabilité (moyenne attendue) mais aussi le risque vont augmenter. L'investissement en actif risqué sera de 400 000, soit $4/3$ des fonds propres et le poids en taux sans risque sera de $-1/3$ (on emprunte ou encore on détient une position courte en actif sans risque). Le taux de rentabilité du portefeuille espéré est de $5\%+(4/3)12\%=21\%$. La volatilité attendue est égale à $(4/3)20\%=26,67\%$.
2. Le graphique ci après représente l'évolution de l'utilité en fonction du ratio entre le montant total investi en actif risqué et le montant des fonds propres. Quatre courbes sont dessinées en retenant quatre valeurs du coefficient d'aversion au risque. Pour l'investisseur neutre au risque ($A=1$), la satisfaction croît avec l'endettement. Ce n'est pas le cas lorsque l'investisseur manifeste une aversion au risque. En particulier si $A=4$ (courbe inférieure), la courbe passe par un maximum lorsque 75% des fonds propres sont en actifs risqués et 25% placés au taux sans risque.



Chapitre 15

Le MEDAF

1. Énoncés des exercices

Exercice 15-1: Qui détient le portefeuille de marché ?

Comparez la composition du portefeuille de l'investisseur, prédite par le MEDAF et celle observée effectivement. Y a-t-il de grandes différences ? Si oui, cette constatation suffit-elle à rejeter le MEDAF ?

Exercice 15-2 : Évaluation du taux de rentabilité exigé par les actionnaires d'Eurotunnel

Depuis son introduction en bourse, Eurotunnel n'a jamais versé un seul dividende (du moins jusqu'en février 2005). Est-ce à dire que pour ce type d'entreprise le modèle d'évaluation par actualisation des dividendes attendus est inapplicable ? Comment évaluer ce type d'entreprises ?

Exercice 15-3 : 11 septembre 2001 (I)

Le cours des actions est en forte baisse. Si vous pensez qu'il n'y a aucune raison que les flux futurs des entreprises soient affectés par cet événement, alors cette baisse de cours traduit-elle une baisse de la rentabilité exigée ?

Exercice 15-4 : Compositions de portefeuilles

Les recommandations dans la composition des portefeuilles par les banquiers privés (gestion sur mesure) sont souvent liées au degré d'hostilité au risque supposé du client. C'est également le cas dans le prêt-à-porter avec par exemple les recommandations de Boursorama dans ses gestions sous mandat.

1. Ces recommandations touchent-elles l'allocation entre placements non risqués versus placements risqués?
2. Ces recommandations introduisent-elles des clivages entre différentes classes d'actifs risqués?

3. Discutez les raisons justifiant (ou non) de tels ajustements. La lecture de Canner, Mankiw et Weil (1997) est recommandée.

Exercice 15-5 : 11 septembre 2001 (II)

Une chute brutale des cours de la majorité des entreprises, *si on suppose les flux de dividendes futurs inchangés*, aura quel impact sur la pente de la DDM : on ne peut répondre, aucun impact, elle baisse ou elle augmente ?

Exercice 15-6 : Pourquoi ?

1. Explicitez et justifiez la phrase « Le taux de rentabilité d'équilibre est par définition positif ».
2. La pente de la DDM est-elle toujours positive ? Ainsi, en 2002 les rentabilités des titres risqués ont été particulièrement désastreuses, cela ne signifie-t-il pas que la pente de la DDM était négative cette année là ?
3. Le cours cible évalué avec une DDM prévisionnelle peut-il être inférieur au cours actuel ? Pourquoi ?

Exercice 15-7 : DDM et information publique

Dans la construction des axes de rentabilité et de risque, supposons que seules des informations publiques (et intégrées dans les cours) soient utilisées. L'analyse pourra-t-elle être utile en gestion de portefeuille ?

Exercice 15-8 : Dynamique de l'alpha

1. Retrouvez l'alpha de l'action Ciment Français de 1991 à 1993 et retracez l'évolution de l'alpha et du cours sur cette période.
2. Retracer l'évolution de l'alpha et du cours de Filipachi media entre 1995 et 1996.
3. Quelles sont les sources de variation de l'alpha ?

Exercice 15-9 : Révision, examen juin 2000

Le tableau ci-dessous retrace les évolutions au NYSE des cours de Coca-Cola et Exxon et les valeurs de l'indice Standard & Poor's 500 (en fin de mois) ; ainsi que les dividendes qui, aux États-Unis, sont le plus souvent distribués trimestriellement.

Tableau : Coca et Exxon en 1995

Date	Coca-Cola		Exxon		S&P500	MSCI monde
	Cours	Dividende	Cours	Dividende		
Déc 94	51,500		60,750		459,27	618,59
Janv 95	52,500		62,500		470,42	608,26
Fév 95	55,000		63,875		487,39	616,07
Mars 95	56,375	0,22	66,625	0,75	500,71	644,67
Avril 95	58,125		69,625		514,71	666,04
Mai 95	61,625		71,375		533,40	670,64
Juin 95	64,500	0,22	70,875	0,75	544,75	669,32
Juil 95	65,625		72,500		562,06	701,69

Date	Coca-Cola		Exxon		S&P500	MSCI monde
	Cours	Dividende	Cours	Dividende		
Août 95	64,250		68,750		561,88	684,96
Sept 95	69,000	0,22	72,250	0,75	584,41	699,07
Oct 95	71,875		76,375		581,50	689,90
Nov 95	75,750		77,375		605,37	714,20
Déc 95	74,250	0,22	80,500	0,75	615,93	743,30

Source : Reilly et Brown, 1997, p. 255.

1. Calculez les taux de rentabilité mensuels de Coca, Exxon et du S&P500 sur l'année 1995.
2. Estimez l'espérance de rentabilité en base mensuelle et en base annuelle de Coca, Exxon et du S&P500.
3. Estimez la volatilité, exprimée en base annuelle de Coca, Exxon et du S&P500.
4. Estimez le bêta de Coca et Exxon par rapport au S&P 500.
5. Décomposez la volatilité de Coca puis d'Exxon en faisant apparaître le risque spécifique.
6. Le coefficient de corrélation entre les taux de rentabilité mensuels de Coca et d'Exxon est de 0,392. Peut-on composer un portefeuille avec ces deux titres, tel que le bêta du portefeuille résultant soit égal à un ?
7. Le coefficient de corrélation entre l'action Coca et l'indice mondial de Morgan Stanley (MS) est de 5,41 %; la volatilité des rentabilités de l'indice MS est de 2,45 % (base mensuelle). Quel est le bêta de Coca avec l'indice MS ? Commentez.
8. Le taux sans risque est estimé à 5 % par an. Donnez l'expression de la droite de marché (DDM). Représentez graphiquement la DDM (l'indice de référence est le S&P 500) avec les deux actions Exxon et Coca.

Exercice 15-10 : Révision

La rentabilité attendue du portefeuille de marché est de 17 %. L'action A est caractérisée par une sensibilité de 1,5 et une volatilité de 35 %; le service d'analyse estime sa rentabilité à 22 %. L'action B a une sensibilité de 1,1, une volatilité de 22 % et une rentabilité anticipée de 17 %. Le taux de rendement des OAT à 10 ans est de 8,64 %. Le TJJ est de 6 %. La volatilité quotidienne de l'indice CAC 40 est de 1,26 %. Les taux de rendement sont respectivement pour les actions A et B de 2 % et 5 %. Et leur PER de 14 et de 8.

1. Quelle est l'action préférable? Pourquoi?
2. Si l'action A appartient à l'indice CAC40 et que l'action B est négociée dans la classe de capitalisation boursière la plus faible parmi les trois classes définies par Euronext à l'intérieur d'Eurolist, cela est-il susceptible de modifier votre réponse? Justifiez.
3. Quel est le risque diversifiable des actions A et B?

Deux actions A et B sont caractérisées par une espérance de rentabilité et une sensibilité respectivement de 25% et 1,0 pour le titre A et de 35% et 1,5 pour le titre B.

4. Quel est le taux sans risque? Et la rentabilité du portefeuille de marché? Quelle est la prime de risque? Justifiez, précisez les hypothèses sous-jacentes à vos calculs.

Exercice 15-11 : MEDAF et rappel

Le taux sans risque est de 6 %. On a pu évaluer que la distribution des taux de rentabilité du portefeuille de marché (R_m) et celle des taux de rentabilité d'un titre i (R_i) sont les suivantes :

Tableau 15-1

Probabilité	R_m	R_i
10%	-0,15	-0,30
30%	0,05	0,00
40%	0,15	0,20
20%	0,20	0,50

1. Calculez le taux de rentabilité espéré pour le marché.
2. Calculez la variance des taux de rentabilité pour le marché.
3. Calculez le taux de rentabilité espéré pour le titre i .
4. Calculez la variance des taux de rentabilité espérés pour le titre i .
5. Quel est le risque systématique du titre i ?
6. Quel est le risque spécifique du titre i ?
7. Quel est le taux de rentabilité espéré pour le titre i selon le MEDAF ?
8. Le titre est-il sous ou surévalué suivant le MEDAF ?

Exercice 15-12 : Espérance de rentabilité du portefeuille de marché

En janvier 1998, selon le service « droite de marché » d'Associés en Finance, la pente de la droite de marché (DDM) est de 3,27; l'ordonnée à l'origine de la DDM est de 5,83 ; le taux des OAT est de 5,12 %; le taux du marché monétaire est de 5,36 % ; le taux d'inflation prévisionnel à long terme de 3 %.

1. Quel est le taux de rentabilité du portefeuille de marché?
2. Doit-on utiliser un taux court ou un taux long pour évaluer la prime de risque?
3. Quelle est la prime de risque prévisionnelle?
4. Pourquoi l'écart entre la rentabilité des actions et le taux sans risque est-il différent de la pente de la DDM?

Exercice 15-13 : Sélection de valeurs

Tableau 15-2 : Extrait de la DDM en décembre 1996

	Cours	Alpha	Bêta	TRI
Crédit Lyonnais (YO)	133	+2,01	1,7	14,66
Sté Générale (GN)	561	+2,27	0,56	10,53
Primagaz (GZ)	611	-2,30	0,88	7,20
Moulinex (MX)	119,5	-3,42	1,79	9,58

Source : D'après les données d'Associés en Finance, service Droite de marché.

Le tableau ci-dessus reprend et précise certaines données de la droite de marché d'Associés en Finance de décembre 1996. L'indice prend la valeur de 2 315,7. L'équation de la DDM est de $y=6,92+3,69x$.

1. Commentez et décrivez ces données. Tracez une représentation graphique.
2. Parmi les quatre actions proposées, quel titre doit-on acheter ou vendre, et pourquoi ?
3. Si vous devez choisir une seule action à l'achat, laquelle parmi les quatre est préférable ?
4. Retrouvez la dynamique des cours (et des alphas) postérieurement à décembre 1996.
5. De combien le marché doit-il monter (ou baisser) en 6 mois ?

Exercice 15-14 : Sources de variation du alpha

Identifiez les sources de variation de l'alpha d'un mois à l'autre. Proposez une décomposition de l'alpha permettant d'identifier l'influence des différentes sources.

Exercice 15-15 : DDM prévisionnelle

Depuis septembre 1977, Associés en Finance diffuse mensuellement une droite de marché prévisionnelle. À partir notamment de prévisions de dividendes futurs, chaque fin de mois, chaque action est caractérisée par une espérance de rentabilité et un risque anticipé.

Tableau 15-3 : Caractéristiques de la DDM de 86 à 98

	E(Rm)	Pente	Ordonnée	OAT	TMM	Inflation
Moy 86/98	12,35	1,84	10,52	8,45	8,29	5,11
Ecart-type	1,40	1,01	1,97	1,31	1,49	1,06
Minimum	9,69	0,16	6,10	5,77	5,00	3,00
Maximum	15,92	4,75	13,12	11,78	11,78	7,00

Source : D'après les données d'Associés en Finance, service Droite de marché.

Tableau 15-4 : DDM mois par mois de janvier 1997 à février 1998

	E(Rm)	Pente	Ordonnée	OAT	TMM	Inflation
Jan. 97	9,47	3,28	6,19	5,64	5,83	3
Fév. 97	9,22	2,89	6,33	5,36	7,71	3
Mars 97	9,21	2,98	6,23	5,84	6,13	3
Avril 97	9,34	2,93	6,41	5,75	5,49	3
Mai 97	9,61	3,18	6,44	5,83	8,38	3
Juin 97	9,36	2,98	6,38	5,63	7,03	3
Juillet 97	9,09	2,53	6,56	5,46	6,55	3
Août 97	9,38	2,63	6,75	5,59	10,79	3
Sept. 97	9,2	2,45	6,75	5,47	7,68	3
Oct. 97	9,57	2,69	6,89	5,64	7,62	3
Nov. 97	9,47	2,89	6,58	5,49	10,6	3
Déc. 97	9,27	3,17	6,1	5,36	7,04	3
Jan. 98	9,1	3,27	5,83	5,12	5,36	3
Fév. 98	8,61	3,17	5,44	5	7,22	3

Le tableau ci-dessus donne diverses statistiques : la moyenne arithmétique des observations mensuelles (12,35 %), l'écart type, les valeurs minimales et maximales. Le nombre d'observations est de 132. En colonnes, de gauche à droite sont indiqués : l'espérance de rentabilité du marché dans son ensemble ($E(R_m)$) ; la pente de la droite de marché estimée suivant les moindres carrés ordinaires ; l'ordonnée à l'origine de la droite de marché ; le taux des OAT ; le taux du marché monétaire ; et le taux d'inflation anticipé. Tous les taux sont exprimés sur une base annuelle. Le tableau 11-9 détaille les données par mois sur l'année 1997 et le début de 1998.

1. Qu'est la droite de marché dans le cadre du MEDAF ?
2. Définissez la prime de risque.
3. Pourquoi, selon vous, trouve-t-on une différence entre, d'une part, la pente de la droite de marché et, d'autre part, l'écart de rentabilité entre l'espérance de rentabilité du marché dans son ensemble et le taux des OAT ?
4. Calculez la prime de risque en février 1998. Est-elle forte ou faible ? Qu'en concluez-vous ?
5. Calculez la prime de risque moyenne pour l'année 1997.
6. Comment interpréter une prime de risque proche de 0 ? Et quels enseignements en tirer en matière de gestion de portefeuille ?
7. La prime de risque est-elle toujours positive ?
8. Pourquoi, selon vous, la prime de risque n'est-elle pas constante ?

Exercice 15-16 : Allocation d'actif

Le service Droite de Marché vous transmet les données suivantes sur l'écart de rentabilité entre les actions et les obligations (cf. tableau ci-après). L'indice des actions a progressé de 6,1 % depuis trois mois.

1. Décrivez les données.
2. Que décidez-vous? Vendre toutes vos actions, ou placer tout votre patrimoine en actions et vendre toutes vos obligations?

Tableau 15-5

	OAT	Intercept	Prime risque relative		$E(R_m)$	Écart relatif	
Maximum depuis 77	17,4	21,6	6,2	33,1%	24,1	7,7	69,8%
Minimum depuis 77	8,1	9,7	0,2	1,4%	11,8	1,5	14,0%
Moyenne	12,4	14,9	2,4	13,4%	17,3	4,9	39,6%
Écart type	2,3	2,8	1,4	7,0%	3,3	1,4	10,1%
Valeur courante	10,9	11,9	0,6	4,8%	12,5	1,5	14,0%
3 mois avant	10,1	11,5	1,0	7,9%	12,5	2,4	23,8%

Exercice 15-17 : Prime de risque début 1975

Début janvier 1975, vous prenez connaissance de l'évolution boursière des cinq dernières années (données mensuelles du marché américain). On vous demande d'estimer une prime de risque pour les actions en distinguant les actions suivant leur niveau de capitalisation. Comment faire?

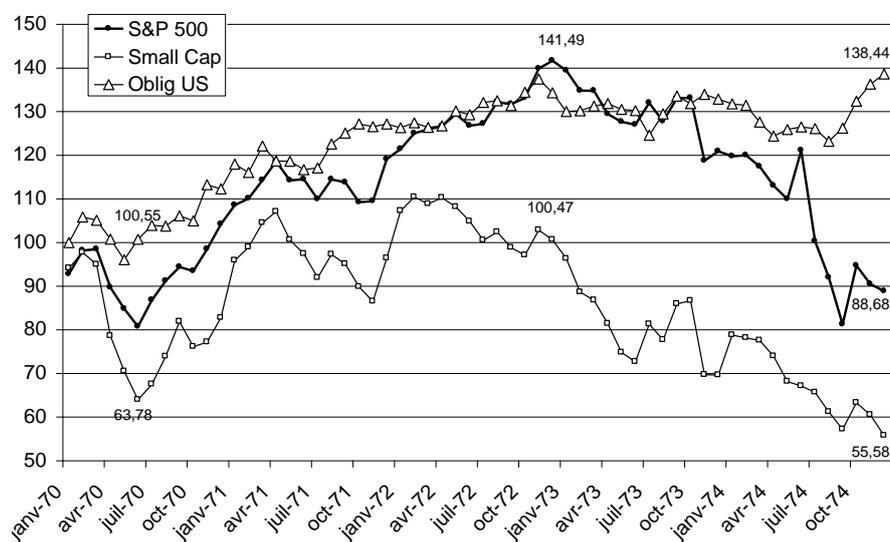
Le graphique ci-après est réalisé en base 100 fin 1969. Le tableau ci-dessous donne les taux de rentabilité annualisés (mais calculés à partir des données mensuelles).

Tableau 15-6 : Marché américain de 1970 à 1974

	Actions		Obligations à long terme		US TB	CPI
	Big	Small	État	Privées		
Moyenne	-0,61%	-8,58%	6,93%	6,86%	5,77%	6,41%
Écart type	18,92%	25,11%	9,14%	8,81%	0,50%	1,22%
Médiane	2,40%	-25,32%	2,46%	3,54%	5,82%	5,94%
Maximum	198,84%	191,04%	94,92%	106,20%	9,72%	21,72%
Minimum	-206,64%	-235,44%	-56,16%	-57,12%	3,00%	0,96%

Source : À partir des données de www.Ibbotson.com, (SBBI, 2002).

Graphique 15-1 : Indices américains avec réinvestissement, 1970-1974



Exercice 15-18 : Critique de Roll

Les données suivantes concernent les taux de rentabilité de 6 actions cotées au NYSE ainsi que ceux de l'indice S&P500 sur la période 1991-2000.

Tableau 15-7 : Compréhension de la critique de Roll

	AMR	BS	GE	HR	MO	UK	SP500
1991	-0,35052	-0,11543	-0,42462	-0,21065	-0,07585	0,23308	-0,26468
1992	0,70831	0,24715	0,37193	0,22267	0,02135	0,35688	0,37204
1993	0,73293	0,36651	0,25497	0,58149	0,12759	0,07814	0,23842
1994	-0,20337	-0,42709	-0,04901	-0,09376	0,07120	-0,27210	-0,07184
1995	0,16631	-0,04523	-0,05734	0,27508	0,13722	-0,13455	0,06560
1996	-0,26585	0,01577	0,08984	0,07927	0,02150	0,22536	0,18440
1997	0,01241	0,47512	0,33497	-0,18943	0,20022	0,36567	0,32419
1998	-0,02636	-0,20423	-0,02755	-0,74268	0,09133	0,04791	-0,04909

1999	1,06420	-0,14927	0,69682	-0,26149	0,22429	0,04560	0,21409
2000	0,19422	0,36804	0,31105	1,86823	0,20661	0,26397	0,22514

1. Calculez le taux de rentabilité moyen de chaque action, son bêta ainsi que la matrice de variances-covariances des rentabilités des différents actifs.
2. Estimez les paramètres α_0 et α_1 de la régression $\bar{R}_i = \alpha_0 + \alpha_1 \beta_i + \varepsilon_i$. À quoi doivent être égaux les coefficients α_0 et α_1 si le MEDAF est vérifié ? Commentez les résultats obtenus.
3. Une explication possible des (mauvais) résultats obtenus réside dans le fait que le portefeuille utilisé comme portefeuille de marché (ici le S&P 500) n'est pas efficient. Montrez que c'est ici le cas en construisant à partir des 6 actions disponibles un portefeuille efficient de même niveau de risque que le S&P500 (vous pouvez, par exemple, utiliser pour cela le solveur Excel).
4. Calculez les nouvelles valeurs des bêtas des différentes actions en considérant que le portefeuille de marché est celui construit à la question précédente.
5. Procédez de nouveau à l'estimation de la régression présentée à la question 2. Que constatez-vous ? Concluez.
6. Quelles sont, selon vous, les conséquences, pour la gestion de portefeuille, de l'utilisation d'un portefeuille de marché incorrectement identifié ?

Exercice 15-19 : Stock picking

En janvier 1994, le service Droite de marché d'Associés en finance indique un taux des OAT à 5,89%, une pente de la DDM de 1,65, une ordonnée à l'origine de 8,04 ; une valeur d'indice de 2 334,4. Par ailleurs, les données individuelles suivantes ont attiré votre attention :

Mnémonique	Cours actuel	Classe liquidité	TRI	TRE
EDL	35,55	3	14,92%	10,88%
GY	561	5	14,25%	10,64%

Tous les titres suivis sont répartis en 5 classes suivant leur flottant, de telle manière que les effectifs soient approximativement identiques. La classe n°1 regroupe les titres les plus liquides parmi les 120 suivis.

1. Quel est le taux de rentabilité du portefeuille de marché ?
2. À partir des données présentées, pouvez-vous établir le risque et l'alpha des actions EDL et GY ?
3. Quelle décision de sélection de valeur doit-on prendre ?
4. Précisez l'hypothèse faite dans le calcul du cours cible quant à l'évolution du marché dans son ensemble ?
4. Discutez des conséquences d'une évolution défavorable (par rapport à votre hypothèse) du marché dans son ensemble.

Exercice 15-20 : Prime de risque et market timing

Le service Droite de Marché (Associés en Finance) vous transmet les données suivantes sur l'écart de rentabilité entre les actions et les obligations et

la prime de risque. L'indice des actions a progressé de 0,2 % depuis trois mois. Que décidez-vous ? Ne rien faire, basculer tout le portefeuille en actions, basculer tout le portefeuille en bons du Trésor ?

	OAT	Ordonnée à l'origine	Prime risque		E(Rm)	Écart	
			Absolue= pente	Relative= pente/OAT		absolu: E(Rm)- OAT	Relatif : absolu/O AT
Maximum	17,4	21,6	5,4	33,1%	24,1	7,5	69,8%
Minimum	9,6	10,8	0,5	2,9%	15,3	4,2	30,3%
Moyenne	12,6	15,5	2,7	15,2%	18,2	5,6	45,4%
Écart-type	2,3	3,0	1,3	7,8%	2,6	0,7	10,1%
Valeur courante	16,0	19,1	4,4	18,7%	23,5	7,5	46,9%
3 mois avant	16,4	18,3	4,6	20,1%	22,9	6,5	39,6%

Exercice 15-21 : Allocation d'actif

Le service Droite de Marché vous transmet les données suivantes sur la prime de risque et l'écart de rentabilité entre les actions et les obligations. L'indice des actions a progressé de 23,7 % depuis un an et de 4,7 % en 3 mois.

	OAT	Ordonnée à l'origine	Prime risque		E(Rm)	Écart	
			Absolue= pente	Relative= pente/OAT		absolu: E(Rm)- OAT	Relatif : absolu/O AT
Maximum	17,4	21,6	6,2	40,5%	24,1	7,7	78,2%
Minimum	5,8	7,0	0,2	1,2%	9,7	1,5	14,0%
Moyenne	10,6	13,0	2,1	13,7%	15,1	4,5	44,2%
Écart-type	2,7	3,1	1,2	7,3%	3,5	1,2	11,8%
Valeur courante	6,7	7,0	4,8	40,5%	11,7	5,0	75,1%
3 mois avant	7,6	8,4	3,2	27,8%	11,6	4,0	53,0%

Que décidez-vous ? Ne rien faire, basculer tout le portefeuille en actions, basculer tout le portefeuille en obligations (car la hausse récente vous semble déjà très importante) ?

Exercice 15-22 : Allocation d'actif (2)

Le service Droite de Marché vous transmet les données suivantes sur la prime de risque et l'écart de rentabilité entre les actions et les obligations. L'indice des actions a progressé de 20,5 % depuis trois mois.

- Commentez les données.
- Que décidez-vous ? Ne rien faire, basculer tout le portefeuille en actions, basculer tout le portefeuille en obligations ?

	OAT	Ordonnée à l'origine	Prime risque		E(R _m)	Ecart	
			Absolute= pente	Relative= pente/OAT		absolu: E(R _m)- OAT	Relatif : absolu/O AT
Maximum	17,4	21,6	6,2	33,1%	24,1	7,7	69,8%
Minimum	9,6	10,8	0,5	2,9%	15,3	4,2	30,3%
Moyenne	13,3	16,0	3,0	15,9%	19,0	5,7	44,2%
Ecart-type	2,2	2,6	1,4	7,4%	2,7	0,8	9,1%
Valeur courante	13,6	16,4	1,4	7,7%	17,8	4,2	30,6%
3 mois avant	14,2	17,2	2,1	10,8%	19,3	5,0	35,2%

Exercice 15-23 : Allocation d'actif (3)

Le service Droite de Marché vous transmet les données suivantes sur la prime de risque et l'écart de rentabilité entre les actions et les obligations. L'indice des actions a progressé de 12,69 % durant les deux derniers mois.

- Commentez les données.
- Que décidez-vous ? Ne rien faire, basculer tout le portefeuille en actions, basculer tout le portefeuille en obligations ?

	OAT	Ordonnée à l'origine	Prime risque		E(R _m)	Ecart	
			Absolute= pente	Relative= pente/OAT		absolu: E(R _m)- OAT	Relatif : absolu/O AT
Maximum	17,40	21,60	6,20	56,3%	24,10	7,70	78,2%
Minimum	5,78	7,72	0,16	1,8%	9,69	1,53	14,0%
Moyenne	10,86	13,54	2,06	19,4%	15,59	4,66	44,3%
Ecart-type	2,56	2,90	1,25	11,7%	3,37	1,16	12,1%
Valeur courante	5,89	8,04	1,65	28,0%	9,69	3,80	64,5%
3 mois avant	6,11	7,72	2,88	47,1%	10,60	4,49	73,5%

Exercice 15-24 : Exercice de synthèse (prime de risque, examen de janvier 2009 ; Edition 4 fin chapitre 15)

Depuis septembre 1977, Associés en Finance diffuse une droite de marché prévisionnelle établie dans un premier temps à partir des données du marché français et depuis 2001 un plan de marché sur environ 350 entreprises européennes avec actualisation quotidienne.

Tableau 15-8.- Rémunération attendue des actions

Date	DJ EuroStoxx	Cac40	E(R _m)	Bund	E(R _m) - Bund	E(R _m) - Bund
						Bund
12 déc. 2008	219,7	3 213,6	13,06 %	3,30 %	9,76 %	296 %
18 sept. 2008	311,6	4 340,2	10,18 %	4,06 %	6,12 %	150 %
14 déc. 2007	414,8	5 605,4	8,36 %	4,31 %	4,06 %	94 %
Moyenne 2003-2008			8,95 %	3,90 %	5,05 %	132 %
Période 1998-2008						
Moyenne			9,17 %	4,29 %	4,88 %	118 %

Minimum		7,24 % 1 juin 2007	3,02 % 21 sept. 2005	2,72 % 31 jnv. 2000	49 % 31 jnv. 2000
Maximum		13,65 % 21 nov. 2008	5,53 % 31 jnv. 2000	10,33 % 5 déc. 2008	338 % 5 déc. 2008

Source : Associés en Finance. La colonne $E(R_m)$ donne le taux de rentabilité attendu du marché européen des actions (350 des capitalisations flottantes les plus importantes). Les **Bunds** sont des emprunts d'État à long terme (10 ans) émis par l'Allemagne.

À partir notamment de prévisions de dividendes, chaque action est caractérisée par une espérance de rentabilité, un risque anticipé et un degré d'illiquidité du marché de ses titres. Lors de la présentation aux investisseurs (Club de gestion financière) du 18 décembre 2008, les résultats suivants sont communiqués. L'écart absolu (avant dernière colonne du tableau 15-4) dépasse sa moyenne historique (depuis 1998 sur la zone Euro) plus deux écarts types dans l'été 2008 et dépasse la moyenne plus 3 écarts type fin octobre 2008. Suivant les historiques d'Associés en Finance entre 1977 et 1998 (pour les valeurs françaises) l'écart relatif (dernière colonne du tableau) a rarement dépassé 60 % et a pris ses valeurs les plus fortes en 1998 avec des pics ponctuels à 120 %.

Tableau 15-9.- Les primes

Date	Prime de risque	Prime d'illiquidité	Ordonnée à l'origine
Le 12 déc. 2008	9,84	2,77	0,45
Le 8 sept. 2008	5,66	1,42	3,10
Le 14 déc. 2007	5,63	1,51	1,22
Moyenne 2003-2008	5,44	0,65	2,86
Moyenne 1998-2008	4,58	1,06	3,53
Minimum 1998-2008	2,88 (31 août 2001)	-0,35 (17 mai 2006)	0,29 (25 nov. 2008)
Maximum 1998-2008	11,36 (21 nov. 2008)	2,83 (9 déc. 2008)	5,60 (31 oct. 2003)

Note : les données de ce tableau sont en pourcentage, 9,84 lisez 9,84 %.

Les conseils donnés aux investisseurs lors des réunions précédentes ont été les suivants. Juin 2007 : « le marché nous semble aujourd'hui significativement surévalué » ; le 14 décembre 2007 : « Selon nos différents scénarios, le potentiel de baisse des actions est compris entre 10 % et 30 %. Aucun des scénarios ne correspond à un scénario de stagflation » ; le 8 septembre 2008 : « sur la base de taux de référence revenus à 4,65 %, le potentiel de rebond des cours serait nettement réduit, voire inexistant, et ne suffirait pas à compenser un éventuel accroissement de l'aversion au risque actions » (...) « la dynamique de l'écart ramènerait l'indice CAC40 à 3500 points ».

- *Taux de rentabilité*

Suivant les données du tableau 15-4, le taux de rentabilité des actions de la zone Euro est passé de 8,36 % à 13,06 % de fin 2007 à fin 2008, alors que sur la même période les indices d'actions ont brutalement chuté (le DJ EuroStoxx est passé de 414,8 à 219,7). Comment expliquez-vous cela ?

- *Comment expliquer l'augmentation de l'écart ?*
- *Commentez la différence entre l'augmentation de l'écart et celle de l'écart relatif*
- *Au vu de ces résultats, quels conseils d'investissement (d'allocation d'actifs) un gérant peut-il donner ? Argumentez*

2. Corrigés de certains exercices

Exercice 15-1 : Qui détient le portefeuille de marché ? Corrigé

1. La détention d'un actif sans risque en portefeuille est possible (par exemple, via les OATi émises par l'État français). En revanche, il est probable que personne ne détienne le portefeuille de marché (le point M des graphiques du chapitre 15). Mieux, ce portefeuille de marché n'est probablement pas identifiable, c'est-à-dire mesurable, ainsi que Roll (1977) l'a souligné. La composition effective du portefeuille des investisseurs américains montre qu'ils détiennent en moyenne 4 actions différentes en portefeuille. De plus un biais domestique affecte les portefeuilles (ces points ont été discutés dans le chapitre 9).
2. Pour rejeter une théorie, il est nécessaire d'en avoir une autre à proposer, car sinon une vision imparfaite est probablement préférable au noir total. Les conséquences du théorème de séparation n'ont jamais été proposées comme test du MEDAF dans la littérature. Ce qui est important à comprendre c'est pourquoi les portefeuilles (réels) ne sont pas aussi diversifiés que ce que la théorie indique. Les coûts de transaction, les coûts d'information et les autres frictions des mondes réels, non prises en compte dans la version initiale du modèle, sont une voie d'explication plausible. L'apport important du MEDAF est de montrer que si les investisseurs ne détiennent qu'une partie des titres cotés, la raison n'est probablement pas à chercher du côté de l'hostilité au risque.

Exercice 15-3 : 11 septembre 2001 (I)

Non une hausse bien sûr. Ex post (on regarde le passé) il est clair que celui qui est actionnaire au moment où la baisse se produit réalise une perte (rentabilité négative donc). Ex ante (on regarde devant), si on pense que les flux futurs sont inchangés (les D_t ne sont pas révisés), alors la relation d'actualisation des flux futurs de dividendes traduit une hausse du taux de rentabilité exigé ($E(R)$) de telle manière que les flux futurs actualisés restent égaux au cours qui vient de chuter (P_0). Bien sûr, il est également possible que les exigences de taux de rentabilité soient identiques et que ce soient les flux futurs qui aient été révisés à la baisse par le marché !

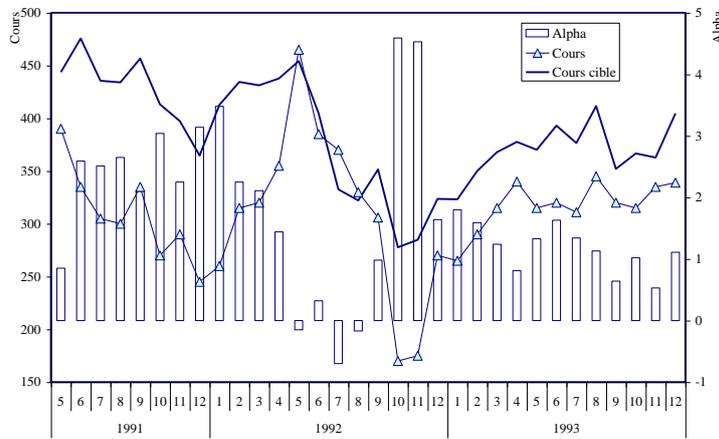
Exercice 15-7 : DDM et information publique, corrigé

Dans ce cas, on ne peut pas parler de DDM prévisionnelle. En revanche, l’outil DDM restera utile pour construire des scénarii conditionnels. Et ainsi obtenir un contexte d’analyse notamment des questions suivantes : Que se passe-t-il si les anticipations de profits sont révisées à la baisse de 5% ? Que devient dans ce cas la prime de risque de marché ? Si une baisse de cours est constatée et que l’on suppose les profits futurs inchangés, alors que peut-on dire quant à la prime de risque et à l’attitude au risque des investisseurs...

Exercice 15-8 : Dynamique de l’alpha, corrigé

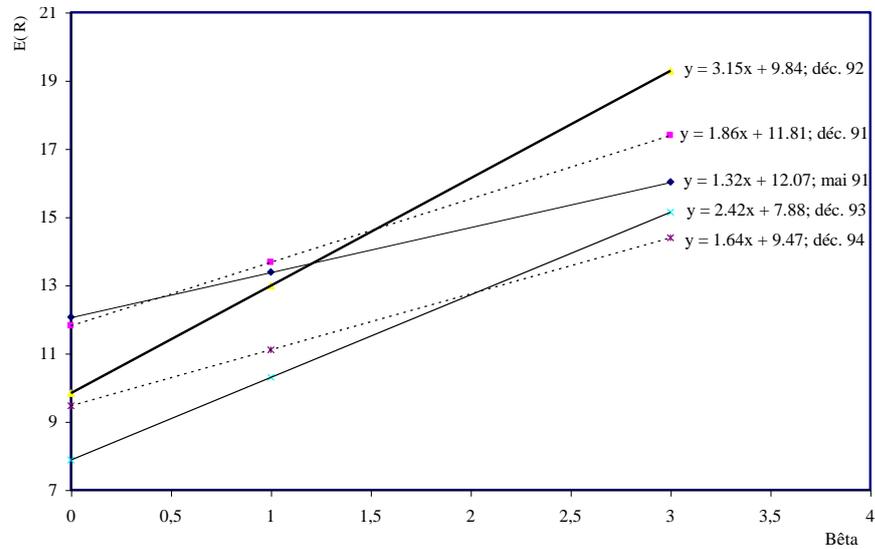
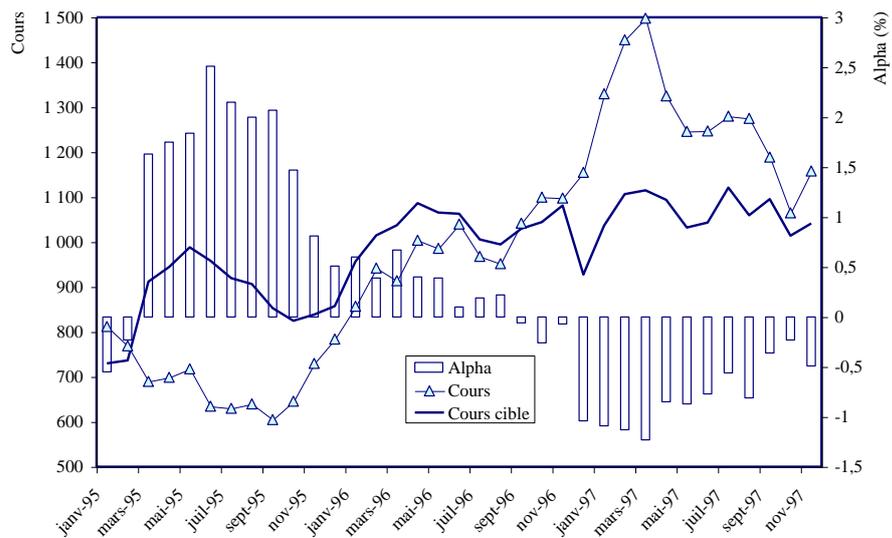
1. À partir des historiques du service droite de marché d’Associés en Finance, on établit le graphique 11-6. Sur ce graphique, les valeurs de l’alpha sont représentées sous forme d’histogramme (valeurs sur l’échelle de droite).

Graphique 15-2 : Ciments Français

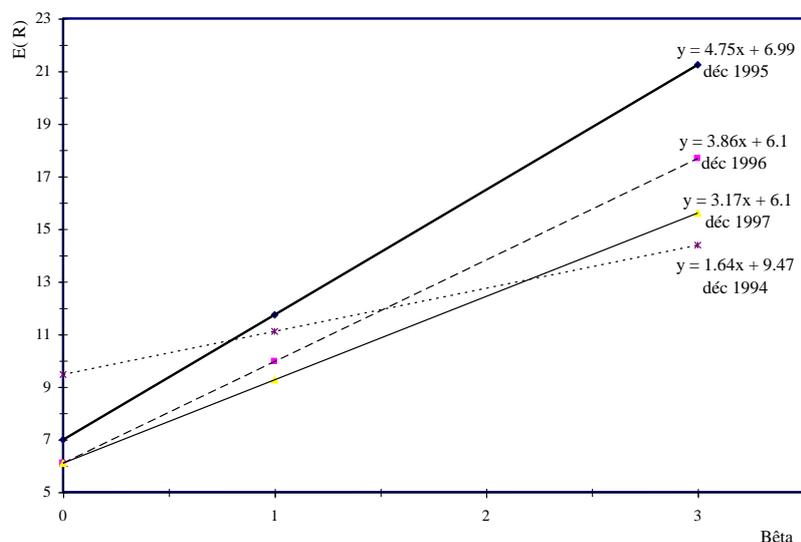


La valeur de l’alpha est positive, sauf au milieu de l’année 1992 où elle est proche de zéro ou bien négative. Suivant le modèle, une valeur positive du alpha doit être suivie d’une hausse du cours. C’est effectivement ce qui est observé à deux reprises sur ce graphique. La hausse du cours réduit la valeur du taux de rentabilité exigé et réduit l’alpha : le titre revient à l’équilibre vers le milieu de l’année 1992.

Le graphique 11-7 donne les caractéristiques de la DDM en mai 1991 puis en décembre de chaque année de 1991 à 1994. On remarque les changements importants tant de pente (la prime de risque) que d’ordonnée à l’origine.

Graphique 15-3 : La DDM entre 1991 et 1994**Graphique 15-4 : Filipachi media**

2. Le graphique 11-8 représente l'évolution du cours et du cours cible (échelle de gauche), ainsi que de l'alpha (représentation en histogramme et échelle de droite) de l'action Filipachi media de janvier 1995 à novembre 1997. Dans un premier temps l'alpha augmente, et essentiellement en raison d'une baisse du cours qui n'est pas en ligne avec les prévisions de dividendes ultérieurs.

Graphique 15-5 : La DDM entre 1995 et 1997

La valeur de l'alpha est de 2,51% mi 1995. Puis la hausse du cours intervient et l'alpha se réduit corrélativement. La situation semble proche de l'équilibre à la moitié de l'année 1996. Dans un deuxième temps, l'alpha baisse et devient négatif. Là encore une inversion du mouvement des cours est constatée. Le cours atteint un maximum en mars 1997, au moment où l'alpha prend sa valeur minimale. Vers octobre 1997, on constate une situation proche de l'équilibre.

3. D'un mois à l'autre si la valeur de l'alpha est modifiée, cela peut être dû au fait que le marché rectifie son « erreur d'évaluation » (le cours de l'action bouge « toutes choses égales par ailleurs »). Cette première raison motive la démarche de sélection de valeur (stock picking). D'autres événements modifient l'alpha, ainsi i) lorsque le taux sans risque change et, avec lui, l'ordonnée à l'origine de la DDM ; ii) lorsque la prime de risque change et, avec elle, la pente de la DDM ; iii) si le risque de l'action change ; iv) si les estimations faites des flux futurs changent.

Exercice 15-10 : Révision, corrigé

1. Suivant le MEDAF, le taux de rentabilité d'équilibre de A (sur la droite de rentabilité d'équilibre de A (sur la droite de marché) est de $8,64\% + 1,5 \times (17\% - 8,64\%)$, soit $21,18\%$; celui de B est de $17,84\%$. L'écart entre la rentabilité attendue des titres et la position d'équilibre sur la DDM que l'on appelle l'alpha est de $+0,0082$ pour A et de $-0,0084$ pour B. Le titre A est sous-évalué par le marché et B surévalué. Ceci n'est pas contredit par le ratio de Sharpe qui est de $0,382$ pour A contre $0,380$ pour B.
2. L'énoncé fait référence à un différentiel de liquidité qui peut justifier une prime du titre le moins liquide. Dans ce cas, le taux de rentabilité de B devrait être encore plus élevé et cela renforce les conclusions précédentes (à savoir ne pas investir dans B).

3. Suivant le modèle de marché $(\sigma^A)^2 = (\beta^A \times \sigma^M)^2 + (\sigma^\varepsilon)^2$. Le carré du risque total est égal au carré du risque systématique plus le carré du risque diversifiable. La volatilité du marché doit être annualisée. Avec 250 séances la volatilité est de $1,26\% \times \sqrt{250} = 19,92\%$. Pour A, le risque diversifiable (σ^ε) est de 18,22 %. Pour B, le bêta étant plus faible on trouve un très faible risque diversifiable de 1,94 %.
4. Suivant la DDM et en supposant les deux titres alignés sur la DDM c'est-à-dire l'absence d'écart d'évaluation, alors la droite passant par les deux points a une ordonnée à l'origine de 5 % (le taux sans risque), une pente de 20 % (la prime de risque du marché, énorme). Le portefeuille de marché a un bêta de 1 et sa rentabilité est donc de 25 % (énorme également).

Exercice 15-11 : MEDAF et rappel, corrigé :

$$E(\tilde{R}_m) = \sum_j P_j \tilde{R}_{m,j} = 0,1$$

1.

$$\sigma^2(R_m) = \sum_j P_j \tilde{R}_{m,j}^2 - E^2(\tilde{R}_m) = 0,01$$

2.

$$E(\tilde{R}_i) = \sum_j P_j \tilde{R}_{i,j} = 0,15$$

3.

$$\sigma^2(R_i) = \sum_j P_j \tilde{R}_{i,j}^2 - E^2(\tilde{R}_i) = 0,0525$$

4.

$$5. \quad \beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)} = \frac{E(R_i R_m) - E(R_i)E(R_m)}{\sigma^2(R_m)}$$

$$= \frac{\sum_j P_j \tilde{R}_{i,j} \tilde{R}_{m,j} - E(\tilde{R}_i)E(\tilde{R}_m)}{\sigma^2(\tilde{R}_m)} = \frac{0,0365 - 0,15 \times 0,1}{0,01} = 2,15$$

le risque systématique est $\beta_i \times \sigma(R_m) = 2,15 \times \sqrt{0,01} = 0,215$

6. le risque spécifique est l'écart type des résidus du modèle de marché. On sait que $\sigma^2(R_i) = \sigma^2(R_m) \times \beta_i^2 + \sigma^2(\varepsilon_i)$, d'où

$$\sigma(\varepsilon_i) = \sqrt{\sigma^2(R_i) - \sigma^2(R_m) \times \beta_i^2} = \sqrt{0,0525 - 0,01 \times 2,15^2} = \sqrt{0,006275} = 7,92\%$$

7.

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \beta_i [E(\tilde{R}_m) - R_f] = 6\% + 2,15 \times [10\% - 6\%] = 14,6\%$$

8.

Le titre i procure une rentabilité plus forte que celle prédite par le MEDAF. C'est un titre sous-évalué qu'il convient donc d'acheter.

Exercice 15-16 : Allocation d'actif, corrigé :

1. La description des données, par colonnes. OAT : Associés en Finance retient comme taux sans risque une obligation assimilable du Trésor d'échéance 10 ans environ. Ce choix est justifié par l'horizon pris en compte dans le modèle, qui est éloigné et implique l'actualisation de flux à plus de 20 ans. Le choix d'une OAT 10 ans résulte d'un compromis entre l'horizon et la nécessité d'une référence de taux, fréquemment cotée et liquide. Intercept : la DDM est estimée

par les moindres carrés ordinaires à partir du nuage de points défini par environ 120 actions françaises. Ici « Intercept » est l'ordonnée à l'origine de la droite qui passe à travers ce nuage de points. Suivant le MEDAF, c'est une estimation du taux sans risque. En fait on s'aperçoit que l'estimation est un peu supérieure au taux sans risque, ce qui est assez classique dans les tests empiriques du MEDAF. Pour Black (1973), c'est la rentabilité du « zero-beta portfolio » ; il montre qu'une ordonnée à l'origine supérieure au taux sans risque est cohérente sous l'hypothèse de contraintes sur l'actif sans risque telles qu'une limitation des possibilités d'emprunt. Pente : est la pente de la droite d'estimation par les MCO. Suivant le MEDAF c'est la prime de risque du marché, c'est-à-dire une estimation du prix du risque exigé par les investisseurs hostiles au risque. Le risque est le bêta. La prime de risque est ici prévisionnelle et c'est une estimation instantanée. Pente relative : la pente de la DDM relativement au taux sans risque (OAT) permet de comparer des primes de risque dans des situations où le taux sans risque est très différent. $E(R_m)$: est la rentabilité attendue du portefeuille de marché. Ici le portefeuille de marché est réduit à 120 actions françaises environ, soit au mieux un proxy du portefeuille de marché de la théorie. $E(R_m)$ est la rentabilité du portefeuille dont le bêta est égal à un. Ecart est égal à $E(R_m) - OAT$. C'est la prime de risque de marché de la théorie, égale dans la théorie à la pente de la droite de marché. Ici la pente constatée est inférieure à cet écart, ce qui est également cohérent avec les tests habituels du MEDAF comme avec l'interprétation de Black. Ecart relatif : le rapport entre l'écart et le taux des OAT. L'écart relatif permet de comparer les écarts sur des périodes longues où les taux d'intérêt ont beaucoup fluctué. Un écart (absolu) de 5 % n'a pas le même sens si le niveau des taux est de 15 % ou de 5 %.

2. L'écart de rentabilité entre les actions et les obligations à long terme prend ses valeurs historiques les plus faibles, que ce soit en valeur absolue ou en valeur relative. La prime de risque estimée est très faible par rapport à ses valeurs passées. Il apparaît que le risque est peu rémunéré. Pour un investisseur hostile au risque, la décision de gestion est de vendre les actions. Les données du tableau sont celles publiées par Associés en Finance en septembre 1987. Le fait de sortir du marché permet un gain d'opportunité important en évitant la forte correction du mois d'octobre.

Exercice 15-20 : Prime de risque et market timing, corrigé

L'écart prend la valeur absolue la plus forte sur l'historique connu depuis 1977. La décision de gestion est de placer la totalité des fonds en actions. Les données communiquées correspondent à celles diffusées en juin 1982. Après avoir connu des années de marasme, une inflation record (à plus de 10%, voyez la valeur du taux sans risque !), et une année boursière avec de grandes chutes de cours après les élections de mai 1981 et le programme de nationalisations qui est en cours. Avec de surcroît quelques ministres communistes pour la première fois depuis 1945, la décision d'investissement semble courageuse, voire traduire un goût pour l'aventure ? Pas du tout, les premières grandes hausses (depuis 1954 !) se profilent.

Exercice 15-24 : Prime de risque exercice de synthèse (exam janv 2009)

- *Taux de rentabilité*

Suivant les données du tableau 15-4, le taux de rentabilité des actions de la zone Euro est passé de 8,36 % à 13,06 % de fin 2007 à fin 2008, alors que sur la même période les indices d'actions ont brutalement chuté (le DJ EuroStoxx est passé de 414,8 à 219,7). Comment expliquez-vous cela ? **Corrigé ci-après.**

Les révisions de *free cash-flow* (ou dividendes) à la baisse ont été d'une moindre ampleur que la baisse des cours. Suivant le modèle d'estimation de la valeur de l'action par la somme actualisée des revenus futurs de l'actionnaire, on a

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1 + E(R))^t}$$

Si (cas limite) les flux futurs sont inchangés (les D) alors que le cours aujourd'hui baisse brutalement (P_0), il est nécessaire que le taux d'actualisation augmente. Ce taux d'actualisation est le taux de rentabilité attendu ou taux de rentabilité exigé par l'actionnaire. Il s'agit d'un taux ex ante (et non pas ex post). Il est bien sûr évident que la rentabilité ex post est négative si le cours baisse. La rentabilité ex ante sera positive (sinon qui investirait ?) et augmentera (le cas du tableau 15-4) suivant les révisions apportées à la chaîne des flux futurs.

Ce qui n'était pas dit dans le tableau (et que vous ne pouviez deviner et qui n'était donc pas demandé non plus) : Associés a procédé sur l'année 2008 à une révision à la baisse d'environ 12 % des flux (baisse de la valeur actuelle des flux futurs), mais la chute des cours a été beaucoup plus importante, d'où la cohérence avec la hausse du taux de rentabilité attendu.

- *Comment expliquer l'augmentation de l'écart ?*

L'augmentation de l'écart entre la rémunération des actions et des obligations d'État s'explique par l'augmentation de l'aversion au risque. Les taux de rentabilité exigés en compensation de la prise de risque sont de plus en plus élevés. De plus la fuite vers la qualité (*flight to quality*) amène les investisseurs à vendre les actions et à acheter des produits de taux (obligations émises par les États supposés, on est début 2009, à l'abri des risques). Le mouvement d'achat est fort, d'où une hausse des cours des obligations. Et puisque les flux futurs sont supposés inchangés, on constate une baisse du taux de rentabilité attendu. Ces deux aspects vont dans le sens d'un écart s'accroissant entre les deux classes d'actif.

- *Commentez la différence entre l'augmentation de l'écart et celle de l'écart relatif*

L'écart relatif permet de tenir compte du niveau du taux sans risque. Les comparaisons sur la base de l'écart relatif sont à privilégier si les taux bougent (ce qui est à peu près assuré sur longue période). L'historique d'Associés remontant à 1998 et même 1977, l'écart relatif est davantage pertinent. En décembre 2008, que ce soit l'écart absolu ou relatif, les deux donnent des valeurs

assez proches des plus hauts historiques et permettent des appréciations convergentes.

- *Au vu de ces résultats, quels conseils d'investissement (d'allocation d'actifs) un gérant peut-il donner ? Argumentez.*

Acheter des actifs risqués (car la prime de risque est exceptionnellement élevée) et illiquides (la prime d'illiquidité est également élevée). Si l'investisseur est hostile au risque, c'est lorsque les primes (anticipées) sont fortes que l'espérance de rémunération est élevée.

Ce qui suppose évidemment que l'analyse financière (qui permet la mesure des rentabilités anticipées et des risques anticipés) qui sous-tend les résultats soit correcte. À quel horizon le marché va-t-il reconnaître son erreur ? Dans la semaine où cet examen a été donné (en janvier 2009), l'indice est inférieur à la valeur observée mi-décembre 2008, (CAC40 vers 2 800). Les flux futurs vont-ils être très fortement réévalués à la baisse ? Ou bien les cours vont-ils monter ? On sait que le second scénario s'est effectivement mis en place à partir de mars 2009.

Chapitre 16

Décisions financières dans l'entreprise

1. Énoncés des exercices

Exercice 16-1 : *Décision d'investissement*

Évalué à partir de données observées sur le marché boursier, le bêta de la société X est 1,2. Pour 100 de capitaux propres, l'entreprise a 50 de dettes. Le taux sans risque est de 5 %. Suivant les publications d'Associés en Finance, la rentabilité attendue du marché des actions est de 15 %.

1. Quel est le coût du capital?
2. Un projet d'investissement a une rentabilité attendue de 12 %, doit-on le retenir ?

Exercice 16-2 : *Mutuellement exclusif (examen 1997)*

Une entreprise doit choisir entre deux projets d'investissement A et B, alternatives mutuellement exclusives. La décision est à prendre maintenant à une date notée 0. Chacun des deux projets nécessite une dépense initiale d'investissement de 1 000 à la période 0, chacun des deux projets rapporte un *cash-flow* certain de 1 500 à la période 1 (un an après). À ce *cash-flow* certain s'ajoute une composante aléatoire décrite dans le tableau ci-après :

Tableau 16-1 : Mutuellement exclusif

État de la nature		Cash-flow du projet		Taux de rentabilité	
Nom	Probabilité	A	B	Marché, R_M	entreprise
Excellent	$\frac{1}{4}$	400	500	30%	40%
Moyen	$\frac{1}{4}$	400	400	15%	10%
Médiocre	$\frac{1}{4}$	300	200	0%	0%
Catastrophique	$\frac{1}{4}$	-100	-200	-2%	-5%

Le taux sans risque est de 4 %. R_M désigne le taux de rentabilité du portefeuille de marché. Dans la dernière colonne, le taux de rentabilité attendu des actions de l'entreprise, est indiqué pour chacun des états de la nature. L'entreprise est endettée à taux fixe de 10 %, le montant d'intérêt et capital à rembourser en période 1 est de 2 000, et la valeur inscrite au bilan de l'entreprise pour cette dette est de 1 818. On considère que la dette est non risquée. Le capital social est constitué de 500 actions de 10 de valeur nominale. La situation nette est de 6 000. Le cours en bourse de l'action est de 20. Le PER de l'entreprise est estimé par I/B/E/S à 9. On supposera que la fiscalité ne change rien aux décisions à prendre.

1. Quel est le taux d'endettement de l'entreprise ?
2. Évaluez le taux de rentabilité et le risque (volatilité et sensibilité) des deux projets d'investissement.
3. Quel est le coût du capital de l'entreprise selon le MEDAF ?
4. Quel est le coût du capital de l'entreprise selon le MEDAF, dans l'hypothèse où la réalisation du projet d'investissement peut être financée par un endettement supplémentaire de 2 000 au taux de 5% ?
5. Quel est le taux de rentabilité exigé par les actionnaires de l'entreprise, selon le MEDAF ?
6. Quelle décision d'investissement doit-on prendre ? Doit-on investir ou pas, et si oui dans quel projet ?
7. Quelle relation attend-on entre le bêta d'une entreprise et son levier ?
8. Si on mesurait le bêta de l'entreprise à partir des cours en bourse avec une périodicité hebdomadaire, quelle valeur obtiendrait-on ?
9. Et si la mesure demandée à la question précédente est faite avec des données mensuelles, quelle serait la valeur du bêta ?

Exercice 16-3 : Décomposez

Décomposez le taux de rentabilité exigé par les actionnaires en faisant apparaître les primes de risque économique et financier

Exercice 16-4 : Structure financière et bêta

Une entreprise présente une structure de financement qui est de 35% de capitaux propres et 65% de dettes. Le bêta de son titre, estimé sur le marché sur la base des cours des 5 dernières années, ressort à 0.36.

1. Sachant que le taux sans risque est de 7.8% et que la prime de risque unitaire (prix du risque) est de 8.3%, calculez le taux de rentabilité attendu par l'actionnaire
2. Calculez le bêta de ses actifs
3. Calculez le taux de rentabilité que devrait exiger cette entreprise pour évaluer un projet d'investissement dont le risque serait comparable au risque de ses activités actuelles
4. Faites le même calcul en considérant que les dettes de l'entreprise ont un bêta de 0.15

Exercice 16-5 : Société multi-produits

Une société multi-productrice X comporte 3 divisions qui représentent chacune les pourcentages suivants de sa valeur totale :

Division	% de la valeur de X
Mécanique	50%
Électronique	30%
Aéronautique	20%

Elle rencontre dans chaque secteur d'activité un concurrent principal représentatif du secteur dont les caractéristiques financières sont les suivantes :

Société	b fonds propres	D/(D+CP)
A : méca	0.8	0.3
B : Elec	1.6	0.2
C : Aéro	1.2	0.4
X	?	

Par ailleurs, les dettes des sociétés sont sans risque, le taux d'intérêt sans risque est de 7% et le taux de rentabilité espéré pour le marché est de 15%

1. Déterminez le bêta des actifs de chaque division de la société X
2. Quel est le bêta des fonds propres de la société X ?
3. Quel est le coût du capital de la société X ?
4. Quel est le coût du capital de chacune des divisions de X ?

Exercice 16-6 : Comparables

En 1989, General Motors envisageait la possibilité d'acquérir la société Hughes aircraft corporation, non cotée. GM envisageait la possibilité d'évaluer Hughes à partir de la moyenne de deux sociétés cotées jugées comparables Lockheed et Northrop. Par ailleurs on anticipe, pour Hughes, un dividende de 300millions \$ en 1990, un taux de croissance des dividendes de 5%. Le taux de rentabilité attendu de GM est de 15,2% et la prime de risque de marché est de 6%.

1. Pourquoi ne pas utiliser directement le bêta de GM pour estimer le coût du capital de Hughes?
2. Calculez le coût du capital de Hughes
3. Quel est la valeur de Hughes?

	Bêta observé	Dettes/actions
GM	1,20	0,4
Lockheed	0,90	0,9
Northrop	0,85	0,7

Exercice 16-7 : Choix de diversification

L'action d'une entreprise mono-productrice est caractérisée par un bêta de 1.3. Elle vient de verser un dividende de 30€ par action et on anticipe que, toutes choses égales par ailleurs, ce dividende croîtra par la suite de 8% par an jusqu'à l'infini. Le taux sans risque est estimé à 7% par an et l'espérance de rentabilité du marché est de 13% par an. L'entreprise envisage de réduire d'un tiers sa production actuelle et, avec les ressources ainsi dégagées, de se diversifier vers une nouvelle activité dont le bêta est estimé à 0.4. Elle estime toutefois que cette stratégie aurait pour effet de réduire ses bénéfices et conduirait à ce que le taux de croissance anticipé de ses dividendes se réduise pour tomber à 6% l'an jusqu'à l'infini.

1. Quelle serait la valeur du bêta de l'entreprise ainsi diversifiée ?
2. Quel taux de rentabilité les investisseurs sont-ils en droit d'attendre d'une action de l'entreprise, avant et après la diversification ?
3. Quelle devrait être la valeur d'une action avant et après la diversification ?
4. Faut-il pratiquer la diversification ?

2. Corrigé de certains exercices**Exercice 16-1 : Décision d'investissement, corrigé**

1. La société étant endettée, il convient dans un premier temps de calculer le bêta de ses actifs à partir du bêta observé sur le marché. On sait

$$\beta_L = \frac{V_L}{V_L - D_L} \times \beta_U, \text{ soit } \beta_U = \frac{2}{3} \times 1,2 = 0,8. \text{ Le coût du capital peut être}$$

calculé de deux façons :

- 1) par la droite de marché avec le bêta des actifs, qui permet d'évaluer le taux de rentabilité exigé à $5\% + 0,8 \times (15\% - 5\%) = 13\%$;
 - 2) comme moyenne pondérée du coût des différentes sources de financement. Le taux de rentabilité exigé par les actionnaires est de $5\% + 1,2 \times (15\% - 5\%) = 17\%$ et celui des obligataires de 5%. On a alors $CMPC = 2/3 \times 17\% + 1/3 \times 5\% = 13\%$.
2. Le taux de rentabilité du projet est inférieur au coût du capital. Il apparaît que le projet n'est pas rentable du point de vue des actionnaires.

Chapitre 17

La frontière

1. Énoncés des exercices

Exercice 17-1 : Démonstration (relation 17-5)

Détaillez l'écriture de la relation (17-5). Illustrez avec 3 titres :

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Montrez en quoi cela définit un système de deux équations à n inconnues ?
Détaillez la composition de $[R \ 1]$?

Exercice 17-2 : Frontière et 3 titres (UE118, examen de sept 2009 et mai 2010)

Entre trois titres (nommés a, b et c), le coefficient de corrélation entre les titres a et b est de -20% , celui entre a et c est de 30% et celui entre b et c est de 10% . Par ailleurs, la transposée du vecteur des volatilités des trois titres est $[35\%, 12\%, 50\%]$. Et la transposée du vecteur des espérances de rentabilité est $[15\%, 6\%, 40\%]$.

1. Exprimez la matrice des variances - covariances entre les trois titres. On note V cette matrice.

Soit P la matrice telle que le produit matriciel entre P et V soit égal à la matrice unité.

$$P = \begin{pmatrix} 9.53023 & 6.45777 & -2.15633 \\ 6.45777 & 74.5218 & -3.14465 \\ -2.15633 & -3.14465 & 4.5283 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, en reprenant les notations du cours, $\mathbf{a} = [R1]^T V^{-1} [R1] = \begin{pmatrix} 0.913773 & 6.43577 \\ 6.43577 & 90.8938 \end{pmatrix}$. Et l'inverse de cette dernière matrice est égale à $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{a}^{-1} = \begin{pmatrix} 2.18299 & -0.154568 \\ -0.154568 & 0.021946 \end{pmatrix}$$

2. Quelle est la composition du PVM (portefeuille de variance minimale) ?
3. Quelles sont les coordonnées du PVM dans l'espace espérance de rentabilité/variance ?
4. Quelle est la composition d'un portefeuille frontière dont le taux de rentabilité est de 5 % ?
5. Quelle est l'équation de la courbe enveloppe ?
6. Quelle est l'équation de la « capital market line » (droite tangente passant par le taux sans risque) si le taux sans risque est de 3 % ?

Exercice 17-3 : Lieux d'investissement avec 5 titres

Les espérances de rentabilité et les volatilités de cinq titres sont dans le tableau ci-après.

Mnémo	E(R)	$\sigma(R)$
T_1	0.15	0.35
T_2	0.06	0.12
T_3	0.4	0.5
T_4	0.2	0.2
T_5	0.09	0.25

Le tableau ci après donne le triangle supérieur de la matrice des coefficients de corrélation entre les 5 titres

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
T_1	1	-0.2	0.3	0.15	0.05
T_2		1	0.1	0.2	0.02
T_3			1	-0.1	-0.01
T_4				1	0.02
T_5					1

1. Représenter graphiquement les lieux d'investissement constitués à partir de tous les couples de titres choisis parmi cinq.
2. Montrer graphiquement les conséquences de l'autorisation de positions à découvert.
3. Représentez la courbe enveloppe de Markowitz à partir de ces 5 titres
4. Quelles sont les caractéristiques du PVM ?

Exercice 17-4 : Trois ETFs (ou un peu plus) et le PVM

A partir des données du tableau 10-5 de la page 243 (Hamon, 2011) on extrait les caractéristiques des trois ETF sur les actions du cac40 de la Chine et des taux longs d'Etat sur la période 2006-2007.

1. Calculez les caractéristiques du portefeuille de variance minimale.
2. Même question avec les 3 ETF sur la période 2008-2009 et les données du tableau 10-6.
3. Calculez les caractéristiques du PVM, en prenant en compte les 9 ETFs des deux tableaux mentionnés ci-dessus.

Voir l'exercice de synthèse de la fin du chapitre 10

Exercice 17-5 : Bêta et indice équipondéré (données de Roll, 1978)

Évaluez le bêta du deuxième titre de l'exemple de Roll par rapport à l'indice équipondéré.

Exercice 17-6 : L'indice équipondéré de l'exemple de Roll est-il sur la courbe enveloppe ?**Exercice 17-7 : Calculez le bêta du 2^e titre (Roll, 1978) par rapport au portefeuille frontière dont le taux de rentabilité est celui du portefeuille équipondéré****Exercice 17-8 : courbe enveloppe, espace $E - \sigma^2$ (données de Roll, 1978)**

Avec les données de Roll (1978) établissez un graphique de la courbe enveloppe. Dans l'espace espérance/variance, superposez une droite passant par l'ordonnée 1% et le portefeuille p auquel celui de rentabilité 0 est orthogonal.

1. Que devez-vous obtenir ?
2. Superposez le PVM, que constatez-vous ?

Exercice 17-9 : courbe enveloppe, espace $E - \sigma$ (données de Roll, 1978)

Avec les données de Roll (1978) établissez un graphique de la courbe enveloppe. Dans l'espace espérance/variance, superposez une droite passant par l'ordonnée 1% et le portefeuille p auquel celui de rentabilité 0 est orthogonal.

1. Que devez-vous obtenir ?
2. Superposez le PVM, que constatez-vous ?

Exercice 17-10 : Ecrivez la composition d'un portefeuille frontière (avec actif sans risque) avec en notation le taux de rentabilité (et non pas le taux en excès)**Exercice 17-11 : point de tangence (données de Roll, 1978)**

Quelles sont les caractéristiques du point de tangence dans l'exemple de Roll (1978), avec un taux sans risque de 3 % ?

Exercice 17-12 : CAC40 (données de 1997-1998)

Les taux de rentabilité sont dans un fichier de nom CacCyl.txt (la version ici utilisée est dans un fichier excel de nom Cac1998.xls (à l'adresse www.dauphinefinance.com/118/data_118) comportant deux feuilles, la commande ci après permet (avec Mathematica) une récupération automatique sur internet de ces données).

```
idx = Import["http://www.dauphinefinance.com/118/Data%20118/Cac1998.xls", {"Data", 1}];
```

Ce fichier (la première feuille de calcul du classeur) comporte 4 colonnes de nombres pour 24 titres en données cylindrées ce qui signifie que le nombre de mois est identique d'un titre à l'autre et égal à 24. Dans l'ordre l'identifiant du titre (Code Bdm d'Euronext), l'année et mois du taux de rentabilité, le taux de rentabilité prévisionnel suivant le bureau d'études Associés en Finance, et le taux

de rentabilité constaté sur Euronext. Un deuxième fichier (la deuxième feuille de calcul du même classeur) dont le nom est CacCylID Vir.txt contient les identifiant en deux colonnes : le code Bdm puis le mnémonique (au plus 3 caractères).

Questions

- 1/ mémorisez les données
- 2/ calculez la matrice des variances covariances
- 3/ établissez l'équation de la frontière. Dessinez la frontière, projetez les titres, mettez en évidence la partie dominante de la frontière
- 4/ quelle est la composition du PVM ?
- 5/ quelle est la composition du portefeuille tangent si le taux sans risque est de $x\%$? Sur la période le taux sans risque a été compris entre X et $y\%$. Donnez les compositions.
- 6/ Entre 0% et 24% en base annuelle et avec un pas de 2% établissez la composition des portefeuilles frontière (sans taux sans risque). Identifiez le pourcentage de titres avec vente à découvert.
- 7/ Passez au lit de Procuste (shrinkage) la matrice des variances covariances. Comment choisir le facteur d'ajustement ? Donnez la composition du PVM.
- 9/ Etablissez la frontière sur la base des données prévisionnelles de taux de rentabilité
- 10/ L'indice équi pondéré à partir des données fournies est-il sur la frontière?
- 11/ Le portefeuille de référence est l'indice Cac40. Calculez les rentabilités implicites

Exercice 17-13 : Zone Euro Cac40 (données historiques)

Le classeur [www.dauphinefinance.com/118/Data 118/ZEUR2010P.xls](http://www.dauphinefinance.com/118/Data%20118/ZEUR2010P.xls) comporte 5 feuilles.

1. (Id) Identification de 60 valeurs de la zone Euro, mnémo, nom, pays et secteur
2. (Cac40) Cours ajustés mensuels de sept 2002 à juin 2010 pour 40 valeurs cotées à paris (Cac40) avec cours (CC), capitalisation (Cap) et flottant (Flo). Les cours sont ajustés pour tenir compte des opérations de capital et des dividendes distribués (92 fois 40 cours)
3. (Big) cours ajustés mensuels de 2002 à 2010 pour 10 actions de la zone euro et les plus liquides
4. (Small) cours ajustés mensuels de 2002 à 2010 pour 10 actions de la zone euro et parmi les moins liquides (tout en étant dans les 400 européennes les plus liquides)
5. A 4 dates données (début des mois sept 2002, juillet 2007, décembre 2008 et mars 2009) pour chaque titre, les données prévisionnelles d'Associés en Finance sur l'espérance de rentabilité (E(R)) et sur le risque (bêta)

Questions

1. Calculez les taux de rentabilité (à partir des données passées observées sur chacun des titres de l'indice Cac40)
2. Etablissez la matrice des variances/covariances
3. Etablissez la frontière avec les titres du Cac40 mi 2010.
4. Quelles sont les caractéristiques du PVM?

5. Avec un taux sans risque de 2%, quelles sont les caractéristiques du portefeuille tangent?
6. Localisez le portefeuille pondéré par les capitalisations. Est-il sur la frontière? Localisez le portefeuille pondéré par les flottants. Est-il sur la frontière ? Localisez le portefeuille équipondéré, est-il sur la frontière ?
7. Quelles devraient être les taux de rentabilité (implicite) de chacun des titres de manière à ce que le portefeuille de référence (par exemple celui pondéré par les capitalisations, PPC) soit sur la frontière (de Markowitz avec taux sans risque) ET ait un taux de rentabilité de 1% par mois?
8. Procédez à un ajustement (*shrinkage*) de la matrice des variances-covariances. Quels avantages ?

Exercice 17-14 : Zone Euro Cac40 (données prévisionnelles)

A partir des données décrites à l'énoncé de l'exercice 17-12,

9. Tracez la frontière (avec les données connues) en juillet 2007, en décembre 2008, puis en mars 2009.
10. En décembre 2008 quelle est la composition du portefeuille tangent dont l'orthogonal a un taux de rentabilité de 3% ?
11. Tracez la frontière en décembre 2008 avec un shrinkage de la matrice des variances covariances et le recours aux données prévisionnelles d'espérance de rentabilité. Dans ce contexte, quelle est la composition du portefeuille tangent dont l'orthogonal a un taux de rentabilité de 3% ?
12. En décembre 2008, quelle est la composition d'un portefeuille frontière dont le taux de rentabilité espéré (données prévisionnelles) est de 9% ? Comparez l'évolution de valeur de ce portefeuille sur l'année suivante, relativement à l'indice Cac40 (avec réinvestissement des dividendes)

Exercice 17-15 : Zone Euro

A partir des données décrites à l'énoncé de l'exercice 17-12, en vous positionnant en fin de période

1. Calculez les taux de rentabilité des titres des deux portefeuilles européens Big et Small
2. Représentez l'évolution de la valeur des deux portefeuilles européens Small et Big
3. Calculez le poids en capitalisation des 10 premiers titres européens. Comparez aux 40 titres de l'indice cac40.
4. Évaluez la frontière euro avec les 10 bigs.
5. Évaluez une frontière en prenant en compte également (en plus) les 10 titres européens 'small'

Exercice 17-16 : Vente à découvert (examen de septembre 2011)

Un investisseur décide de placer sa richesse en 4 actifs financiers risqués. Les caractéristiques de ces actifs sont les suivantes :

	rentabilité	Variance
Actif A	0.6	10
Actif B	0.7	20
Actif C	0.8	40

Actif D	0.9	60
---------	-----	----

Afin de déterminer la composition optimale de son portefeuille, il résout le problème de maximisation suivant :

$$\begin{aligned} & \underset{w}{\text{Max}} R_{P1} \\ & \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Var}(R_{P1}) = \sigma_1^2 \\ \sum_i w_i = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

La composition de son portefeuille est donnée dans le tableau ci après. Un deuxième investisseur compose un portefeuille avec les mêmes actifs et les poids indiqués dans le tableau ci après.

Premier investisseur			Deuxième investisseur		
	Actif A	-5		Actif A	-2.5
	Actif B	1		Actif B	0.5
	Actif C	2		Actif C	1
	Actif D	3		Actif D	2

1. Calculez la rentabilité des deux portefeuilles et expliquez pourquoi elles diffèrent.
2. Qu'en déduisez-vous quant à l'aversion au risque du second investisseur ?
3. Qu'est-ce qui diffère dans le programme de maximisation des deux investisseurs ?

Considérez maintenant le programme de maximisation suivant :

$$\begin{aligned} & \underset{w}{\text{Max}} R_{P1} \\ & \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Var}(R_{P1}) = \sigma_1^2 \\ \sum_i w_i = 1 \\ w_i \in [0,1] \end{array} \right. \end{aligned}$$

4. En quoi diffère-t-il du programme précédent ?
5. Comment cela se répercute-t-il sur la composition des portefeuilles des deux investisseurs ?
6. Plus généralement, quelles sont les conséquences que l'on peut attendre d'une interdiction des ventes à découvert ? Peut-on attendre un impact sur les volumes de transaction ? Peut-on attendre un impact sur le niveau des cours ?
7. Qu'entend on par vente à découvert nue (*naked short selling*) ?

Exercice 17-17 : Démontrez que l'équation de la frontière peut être

$$\text{réécrite ainsi } \frac{\sigma_p^2}{1/c} - \frac{(R_p - B/C)^2}{(AC - B^2)/c^2} = 1$$

Exercice 17-18 : Taux de rentabilité attendu et Markowitz (examen de mai 2009)

L'entreprise A distribue un dividende de 10. Elle n'entreprend pas de nouveaux investissements. Le cours observé aujourd'hui de l'action A est 50. L'entreprise B a un bénéfice par action initial de 20. Elle utilise 50% de son BPA

pour entreprendre de nouveaux investissements. Les dividendes ont un taux de croissance de 15%. Le cours observé aujourd'hui pour l'action B est 100.

1. Calculez le taux de rentabilité exigé par les actionnaires des deux entreprises.
2. Quelles sont les principales hypothèses sous-jacentes à vos calculs ?

Supposez que la volatilité du taux de rentabilité de l'action A est de 20% et que la volatilité du taux de rentabilité de l'action B est de 50%. Le coefficient de corrélation entre les rentabilités des deux titres est 0,5. Un investisseur souhaite déterminer les poids optimaux d'un portefeuille composé des deux actions.

3. Ecrivez le problème de minimisation qui permet de résoudre ce problème.
4. Y a-t-il une autre formulation qui est équivalente à celle que vous avez écrite dans la question précédente ? Si oui, indiquez là.
5. Déterminez les conditions de premier ordre du problème de minimisation.
6. Donnez l'expression de la composition du portefeuille et des coefficients de Lagrange.

Exercice 17-19 : PVM, Markowitz et les ventes à découvert

Dans son ouvrage de 1959 au chapitre 7, Markowitz propose le problème suivant. La matrice de variances/covariances entre les taux de rentabilité de trois titres notés a, b, et c, est la suivante. Les taux de rentabilité attendus des trois titres sont respectivement de 6,2%, 14,6% et 12,8%.

a	b	c
0.0146	0.0187	0.0145
0.0187	0.0854	0.0104
0.0145	0.0104	0.0289

1. Quelle est la composition du portefeuille de variance minimale ?
2. Retrouvez-vous la solution proposée par H. Markowitz qui est 98,50% sur le titre a, et 1,492% sur le titre c, le solde étant sur le titre b ?
3. En fait, H. Markowitz interdit les ventes à découvert ce qui limite le poids du titre a en portefeuille. Formulez le problème ainsi posé par Markowitz. Comment le résoudre ?

Exercice 17-20 : SBBI et la frontière depuis 1925 jusque fin 2012

A partir des données d'Ibbotson, SBBI (2013) qui donne les taux de rentabilité mensuels pour 5 classes d'actifs et l'inflation depuis fin 1925 aux Etats-Unis.

1. Tracez la frontière et projetez les 5 classes d'actifs. Les calculs seront réalisés en taux de rentabilité réelle.
2. Excluez les bons du Trésor, que devient la frontière ? Donnez la composition du PVM ?
3. Calculez la composition du portefeuille frontière ayant le même niveau

- de rentabilité que le S&P500 (classe des actions fortement capitalisées)
4. Fin 1999, établissez la frontière, recherchez la composition du portefeuille frontière dont le taux de rentabilité est celui du S&P500 ? Puis analysez le comportement de ce portefeuille de 2000 à 2012 ? En particulier comparez le risque et la rentabilité relativement au S&P500 observé.

Exercice 17-21 : Bhatti long-only

Exercice 17-22 : SBBI sans ventes à découvert

On reprend les données de l'exercice 17-19 mais on interdit cette fois-ci les ventes à découvert.

Exercice 17-23 : Gestion active avec un portefeuille de référence

A partir des taux de rentabilité mensuels de chacun des titres de l'indice CAC40 depuis 2002.

1. On se positionne fin 2008
2. Shrinkage de la matrice des variances-covariances
3. Formulez le problème tirant profit de la connaissance des taux de rentabilité prévisionnels d'Associés en Finance (publiés en décembre 2008), avec comme portefeuille de référence l'indice CAC40 (pondération par les capitalisations flottantes). Le portefeuille est géré activement et sa composition peut s'écarter de celle de l'indice de référence si les couples rentabilité/risque le justifient. On interdit les ventes à découvert sur le portefeuille géré. On contraint le poids maximum mis sur un titre à être inférieur à 20%, de manière à respecter la contrainte définissant les fonds indiciels UCITS.

2. Corrigé de certains exercices

Exercice 17-1 : Démonstration (relation 17-5)

$$\text{On note } \bar{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{W}^T R = (w_1 \ w_2 \ w_3) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3$$

$$\bar{W}^T \mathbf{1} = (w_1 \ w_2 \ w_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = w_1 + w_2 + w_3$$

Le système de deux équations à n (ici $n=3$) inconnues mentionné dans le texte (page 359) peut être réécrit :

$$\begin{aligned} r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3 &= R_p \\ w_1 + w_2 + w_3 &= 1 \end{aligned}$$

Un système d'équations peut être écrit sous forme matricielle

$$[R \ I]W = \begin{bmatrix} R_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

La notation matricielle $[R \ I]$ correspond à une matrice de 2 lignes et n colonnes.

$$[R \ 1] = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17-3 : Lieux d'investissement avec 5 titres

On propose une solution sous Mathematica de cet exercice⁹. Remarquez ici que les modifications sont marginales si on doit travailler non plus avec 5 titres mais beaucoup plus.

On appelle Rho la matrice (triangle supérieur) des coefficients de corrélation, ER la vecteur des taux de rentabilité, Mnémo le vecteur des mnémoniques et Volat le vecteur des volatilités (toutes ces données sont définies dans l'énoncé).

La définition des données :

```
In[36]:= ER = {0.15, 0.06, 0.4, 0.2, 0.09}; Volat = {0.35, 0.12, 0.5, 0.2, 0.25};
Mnémo = Table[Ti, {i, 1, 5}];
Rho = SparseArray[{{1, 2} -> -0.2, {1, 3} -> 0.3, {1, 4} -> 0.15, {1, 5} -> 0.05,
{2, 3} -> 0.1, {2, 4} -> 0.2, {2, 5} -> 0.02, {3, 4} -> -0.1, {3, 5} -> -0.01,
{4, 5} -> 0.02, {Length[ER], Length[ER]} -> 1}];
Rho = Normal[Rho];
```

La représentation de la matrice donnée :

```
In[38]:= Grid[MapThread[Prepend, {Prepend[Rho, Mnémo], Prepend[Mnémo, ""]}],
Frame -> All, BS]
```

Ce qui permet d'obtenir la présentation ci-après

	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅
T ₁	0	-0.2	0.3	0.15	0.05
T ₂	0	0	0.1	0.2	0.02
T ₃	0	0	0	-0.1	-0.01
T ₄	0	0	0	0	0.02
T ₅	0	0	0	0	1

Seul le triangle supérieur est correctement rempli. La commande ci-après complète la matrice des coefficients de corrélation.

```
In[40]:= Rho = UpperTriangularize[Rho, 1] + LowerTriangularize[Transpose[Rho], -1] +
IdentityMatrix[5];
```

La commande ci-dessus complète la matrice des coefficients de corrélation en ne retenant que le triangle supérieur qui est répliqué et en définissant la diagonale. Une matrice symétrique est identique à sa transposée.

La matrice des variances/covariances est obtenue par la commande suivante :

```
In[78]:= Var = Transpose[Transpose[Rho Volat] Volat];
Grid[MapThread[Prepend, {Prepend[Var, Mnémo], Prepend[Mnémo, ""]}], Frame -> All, BS]
```

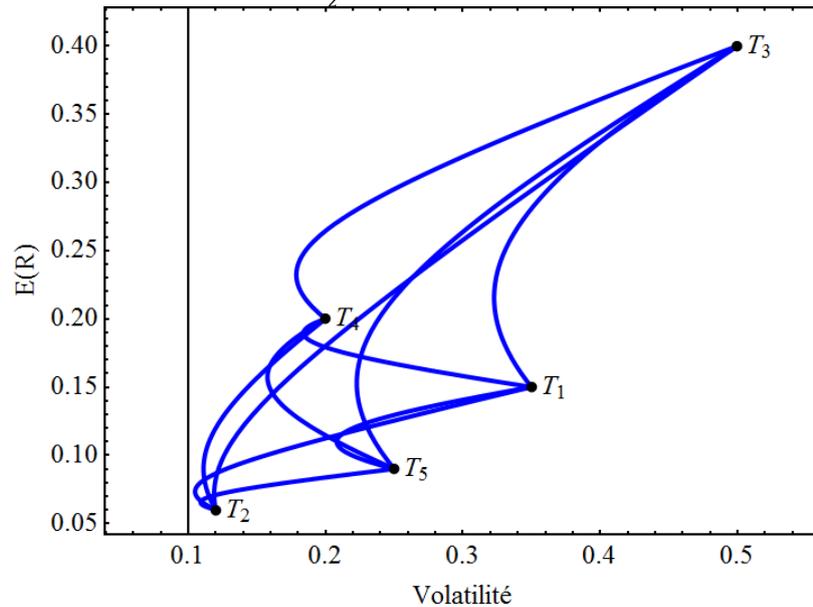
⁹ Le corrigé peut également être réalisé sous excel sans programmation en VBA. Dans ce cas toutefois la réalisation du même exercice avec 7 titres au lieu de 5 entrainera de nombreuses modifications, contrairement à la solution ici proposée. Essayez !

	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅
T ₁	0.1225	-0.0084	0.0525	0.0105	0.004375
T ₂	-0.0084	0.0144	0.006	0.0048	0.0006
T ₃	0.0525	0.006	0.25	-0.01	-0.00125
T ₄	0.0105	0.0048	-0.01	0.04	0.001
T ₅	0.004375	0.0006	-0.00125	0.001	0.0625

Représentation graphique

Avec n titres, le nombre de lieux d'investissement constitués à partir de portefeuilles de deux titres, est égal au nombre d'éléments de la matrice triangulaire au-dessus de la diagonale, soit ici 10 (avec le Cac40 cela en ferait ...

780) ou plus généralement $\frac{n^2-n}{2}$. Le résultat souhaité est le suivant :



Pour l'obtenir, la commande ci-après est la même quel que soit le nombre de titres qui est égal à la dimension du vecteur de taux de rentabilité (Length[ER]). Pour un couple de titres i et j , le tracé du lieu des investissements (en faisant varier les poids entre 0 et 1, c'est-à-dire en ignorant les ventes à découvert) est obtenu avec ParametricPlot. On reconnaît la variance ($W \cdot \text{Var} \cdot W$, W étant le produit matriciel). On stocke les courbes dans la variable GR.

```
GR = {}; Do[W = Table[0, {Length[ER]}]; W[[i]] = x; W[[j]] = (1 - x);
AppendTo[GR, ParametricPlot[{Sqrt[W.Var.W], ER.W}, {x, 0, 1},
PlotStyle -> {Blue, Thick}], {i, 1, Length[ER] - 1}, {j, i + 1, Length[ER]}]
La projection des mnémoniques est obtenue par appel à la fonction LabLPlot (du
package Markowitzv7) :
Points = LabLPlot[Transpose[{Sqrt[Diagonal[Var]], ER, Mnémo}]]];
```

Le dessin est composé avec la commande Show :

```
In[56]:= Show[{GR, Points}, PlotRange -> {{0.05, 0.55}, {0.05, 0.42}}, Frame -> True,
  FrameLabel -> {StyleForm["Volatilité", FontSize -> 12],
    StyleForm["E(R)", FontSize -> 12]},
  BaseStyle -> {FontFamily -> Times, FontSize -> 12}]
```

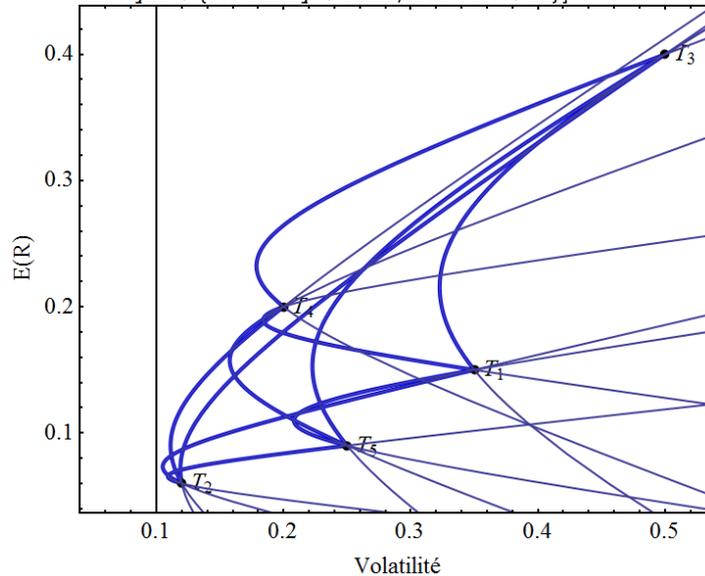
3. Ventes à découvert autorisées

La modification à apporter à la séquence précédente est minime. Il suffit de modifier la plage de définition de X.

```
In[61]:= GRD = {}; Do[W = Table[0, {Length[ER]}]; W[[i]] = X; W[[j]] = (1 - X);
  AppendTo[GRD, ParametricPlot[{Sqrt[W.Var.W], ER.W}, {X, -2, 3}],
    {i, 1, Length[ER] - 1}, {j, i + 1, Length[ER]}]
```

Au lieu d'être contrainte entre 0 et 1, on fixe la valeur par exemple entre -2 et +3. L'ensemble ainsi défini est placé dans la variable GRD de façon à obtenir une mise en forme différente (ici le trait sera par défaut et fin).

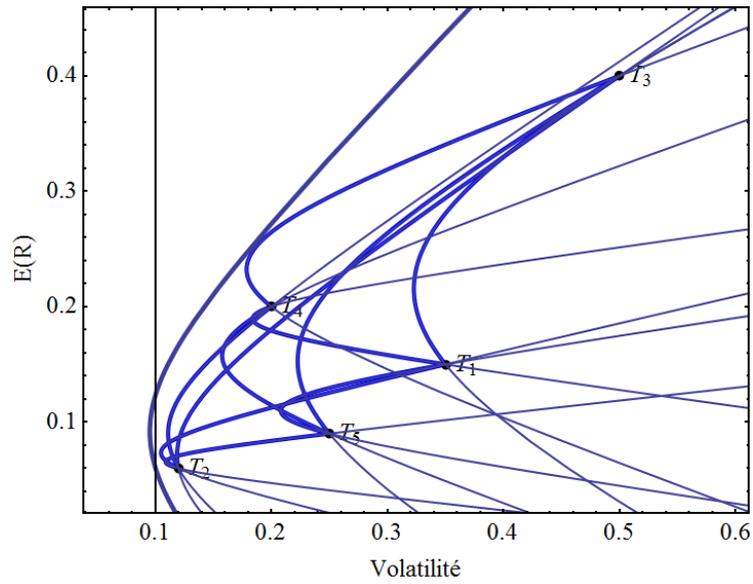
```
In[63]:= Show[{GR, Points, GRD}, PlotRange -> {{0.05, 0.53}, {0.045, 0.43}}, Frame -> True,
  FrameLabel -> {StyleForm["Volatilité", FontSize -> 12],
    StyleForm["E(R)", FontSize -> 12]},
  BaseStyle -> {FontFamily -> Times, FontSize -> 12}]
```



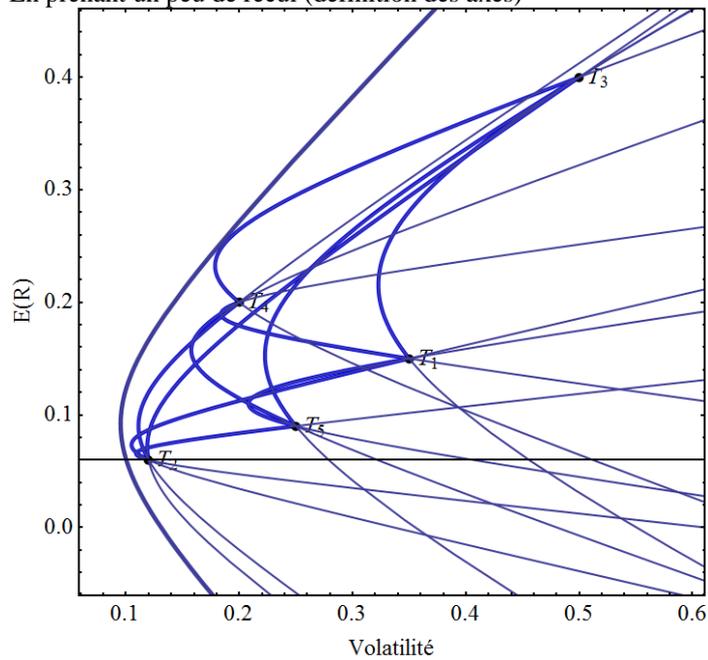
4. Courbe enveloppe

Appel à la fonction CourbeEnveloppe (bibliothèque Markowitzv7)

```
In[75]:= CE = CourbeEnveloppe[Var, ER, Mnémo, True];
In[79]:= Show[{GR, CE, GRD}, PlotRange -> {{0.05, 0.6}, {0.03, 0.45}}, Frame -> True,
  FrameLabel -> {StyleForm["Volatilité", FontSize -> 12],
    StyleForm["E(R)", FontSize -> 12]},
  BaseStyle -> {FontFamily -> Times, FontSize -> 12}]
```



En prenant un peu de recul (definition des axes)



5. Le PVM

On sait que les coordonnées du PVM sont $(B/C$ et $1/C$ dans l'espace variance).
Ci après on établit la matrice a (carrée d'ordre 2)

```

In[98]:= Un = Table[1, {5}]; R1 = {ER, Un}; a = R1.Inverse[Var].Transpose[R1];
Unprotect[C]; {{A, B}, {B, C}} = a;
a // MatrixForm

Out[98]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1.97601 & 10.1052 \\ 10.1052 & 110.03 \end{pmatrix}$$

In[103]:=
Transpose[{{{"B/C" =, "1/C" =, "sqrt(1/C) ="}, {B/C, 1/C, sqrt(1/C)}}}] // MatrixForm

Out[103]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{B}{C} = & 0.0918407 \\ \frac{1}{C} = & 0.00908842 \\ \sqrt{\frac{1}{C}} = & 0.0953332 \end{pmatrix}$$

On sait que la composition du PVM est
In[33]:= 
$$\frac{\text{Inverse[Var].Un}}{C} // \text{MatrixForm}$$


Out[33]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.100826 \\ 0.641712 \\ 0.00530319 \\ 0.121805 \\ 0.130354 \end{pmatrix}$$


```

6. Equation de la courbe enveloppe

```

In[36]:= Enveloppe[Var, ER, Rp] // MatrixForm

Out[36]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.0202256 - 0.0436559 \text{Rp} + 0.0427809 \text{Rp}^2 \\ -0.016192 + 0.211735 \text{Rp} \end{pmatrix}$$


```

Exercice 17-4 : Trois ETFs (ou un peu plus) et le PVM

La question non traitée au chapitre 10

<<à faire>>

Exercice 17-5 : Bêta et indice équipondéré (données de Roll, 1978)

Les données de Roll 1978

$$\{\text{Mnémo}, \text{Rent}, V\} = \text{Roll1978};$$

Corrigé avec Mathematica

```

In[47]:= Un = Table[1, {i, Length[Rent]}]; (* Vecteur unité *)
R1 = Transpose[{Rent, Un}]; (* [R 1] matrice n,2*)
a = Transpose[R1].Inverse[V].R1; n = Length[Rent];
(* a = [R 1]^T V^-1 [R 1] *)
In[50]:= TitreB = Table[0, {n}]; TitreB[[2]] = 1; (* le 2è titre *)
In[51]:= Pm = Table[1/n, {n}]; (* Portef équi pondéré *)
Vm = Pm.V.Pm; Rm = Mean[Rent];
(* caractéristiques de Pm : variance et taux de rentab *)

```

On sait que le bêta d'un titre s'exprime $\frac{\text{Cov}(\text{Pm}, \text{TitreB})}{\sigma_{\text{Pm}}^2}$. Le bêta par rapport à l'indice équipondéré est :

$$\text{In[53]} := \frac{\text{TitreB.V.Pm}}{\text{Pm.V.Pm}} // \text{N} (* \text{ le bêta } *)$$

Out[53]=
0.593407

Exercice 17-6 : L'indice «équipondéré de l'exemple de Roll est-il sur la courbe enveloppe ?

On sait que le bêta d'un titre j par rapport à un portefeuille efficient s'exprime

$$\beta_j = \frac{[R_j 1] a^{-1} [R_p 1]^T}{\sigma_p^2}$$

Toutefois ici les deux expressions donnent des résultats différents.

```
In[54]:= TitreB.R1.Inverse[a].{Rm, 1} == TitreB.V.Pm
```

Out[54]=
False

Ce qui signifie que le portefeuille équipondéré n'est pas sur la courbe enveloppe !

Exercice 17-7 : Calculez le bêta du 2^e titre (Roll, 1978) par rapport au portefeuille frontière dont le taux de rentabilité est celui du portefeuille équipondéré

Les données de l'exemple de Roll sont supposées mémorisées

```
{Mnémo, Rent, V} = Roll1978;
n = Length[Rent]; Un = Table[1, {n}]; R1 = {Rent, Un};
a = R1.Inverse[V].Transpose[R1]; Unprotect[C]; {{A, B}, {B, C}} = a;
a // MatrixForm
```

```
Out[57]//MatrixForm=
( 0.000633897  0.00930433 )
( 0.00930433  0.141349 )
```

La première étape consiste à identifier le portefeuille sur la frontière et dont le taux de rentabilité est celui du portefeuille équipondéré (Rm). Soit PmF la composition de ce portefeuille :

```
PmF = Inverse[V].Transpose[R1].Inverse[a].{Rm, 1};
(* composition de portefeuille frontière *)
```

```
In[62]:= RmF = PmF.Rent; VmF = PmF.V.PmF;
```

```
(* rentab et variance du Port frontière *)
```

```
In[63]:= TitreB = Table[0, {n}]; TitreB[[2]] = 1; (* le 2e titre *)
```

La covariance est ci après évaluée avec trois des relations démontrées. A gauche avec un portefeuille frontière à droite quel que soit le portefeuille. Ici les deux sont identiques ce qui signifie que l'on utilise bien un portefeuille frontière.

```
In[65]:= TitreB.Transpose[R1].Inverse[a].{RmF, 1} == TitreB.V.PmF
```

Out[65]=
True

TitreB.V.PmF == {Rent[[2]], 1}.Inverse[a].{RmF, 1}

True

La valeur du bêta est :

In[66]:= (TitreB.V.PmF) / VmF // N

(* le bêta est de 0.805 contre les 0.593 avec l'équi-pondéré *)

Out[66]=

0.805486

Exercice 17-16 : Démontrez que l'équation de la frontière peut être

$$\text{réécrite ainsi } \frac{\sigma_p^2}{1/C} - \frac{(R_p - B/C)^2}{(AC - B^2)/C^2} = 1$$

On sait que $\sigma_p^2 = \frac{A - 2 \times B \times R_p + C \times R_p^2}{AC - B^2}$. On note $D = (AC - B^2)$, le déterminant de la matrice a. On développe

$$\sigma_p^2 = \frac{A}{D} - \frac{2 \times B \times R_p}{D} + \frac{C \times R_p^2}{D}$$

On montre que $\frac{1}{C} + \frac{B^2}{D C} = \frac{A}{D}$. D'où $\sigma_p^2 = \frac{1}{C} + \frac{B^2}{D \times C} - \frac{2 \times B \times R_p}{D} + \frac{C \times R_p^2}{D}$.

On met 1/C en facteur $\sigma_p^2 = \frac{1}{C} \left[1 + \frac{B^2}{D} - \frac{2 \times B \times C \times R_p}{D} + \frac{C^2 \times R_p^2}{D} \right]$

On divise (numérateur et dénominateur) par C^2 :

On repère l'identité remarquable

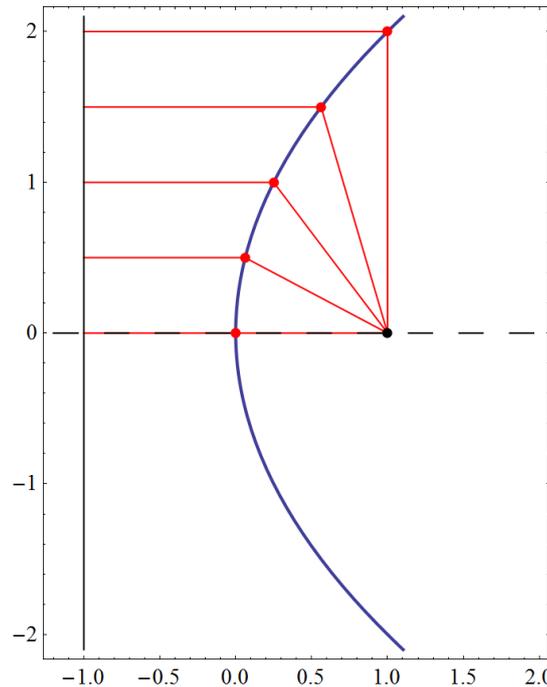
D'où $\frac{\sigma_p^2}{1/C} - \frac{(R_p - B/C)^2}{(AC - B^2)/C^2} = 1$ (Huang et Litzenberger, 1989, p 66)

L'avantage de cette dernière écriture est de montrer que la courbe enveloppe est une parabole (dans l'espace variance) et de donner les coordonnées du sommet de la parabole qui correspond au portefeuille de variance minimale (PVM). La variance du PVM est 1/C et son espérance de rentabilité est B/C.

Une parabole est un lieu tel que tout point appartenant à ce lieu est équidistant entre le focus (point de coordonnées 0,5/0 sur la figure ci-après) et la directrice (droite verticale à gauche du graphique). La parabole est le lieu d'intersection entre une surface et un cône¹⁰. L'équation d'une parabole est $\frac{x-x_0}{a^2} - \frac{y-y_0}{b^2} = 1$.

Une parabole a un sommet qui correspond dans notre problème au PVM. a^2 est le point d'abscisse repérant le sommet de la parabole.

¹⁰ Cf. <http://mathworld.wolfram.com/Parabola.html>, et en particulier le notebook "Parabola.nb" d'Eric W. Weisstein.



Note : le sommet de la parabole est aux coordonnées 0-0.

3. Inversion de Matrice, méthode du pivot (Gauss-Jordan)

On présente une application de l'algorithme de Gauss-Jordan à l'inversion de la matrice de l'exemple de Roll (1978) qui est utilisé en cours au chapitre 17. La démarche est classique et détaillée dans Simon et Blume (1994, chapitre 7). Voir aussi le cours de G. Legendre, Maître de Conférences à Dauphine et le document intitulé « Méthodes numériques, Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique ».

3.1 Application à Roll (1978)

La matrice augmentée initiale est la suivante. Dans la partie gauche les données de Roll, dans la partie droite une matrice unité de dimension 4 (les quatre titres risqués de l'exemple).

10	2	4	5	1	0	0	0
2	20	4	1	0	1	0	0
4	4	40	10	0	0	1	0
5	1	10	60	0	0	0	1

En haut à gauche le pivot. On divise tous les termes de la ligne par 10 et on obtient

1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
2	20	4	1	0	1	0	0
4	4	40	10	0	0	1	0
5	1	10	60	0	0	0	1

On note p la ligne du pivot (ici 1) et IP le pivot (dont la valeur est ici de 1). Les autres lignes (i de 2 à 4) sont transformées de la manière suivante : $i - IP \times p$. Soit pour le premier élément de la 2^e ligne : $2 - 1 \times 2 = 0$, etc. On obtient

1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
0	$\frac{98}{5}$	$\frac{16}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	1	0	0
0	$\frac{16}{5}$	$\frac{192}{5}$	8	$-\frac{2}{5}$	0	1	0
0	0	8	$\frac{115}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1

L'algorithme est répété, application à la ligne 2

1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0	1	0	$\frac{18}{49}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{49}$	$-\frac{1}{98}$	0	0
0	1	$\frac{8}{49}$	0	$-\frac{1}{98}$	$\frac{5}{98}$	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{98}$	$\frac{5}{98}$	0	0
0	$\frac{16}{5}$	$\frac{192}{5}$	8	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	$\frac{1856}{49}$	8	$-\frac{18}{49}$	$-\frac{8}{49}$	1	0
0	0	8	$\frac{115}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	0	0	8	$\frac{115}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1

ligne 3

1	0	$\frac{18}{49}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{49}$	$-\frac{1}{98}$	0	0	0	1	0	0	$\frac{49}{116}$	$\frac{49}{464}$	$-\frac{1}{116}$	$-\frac{9}{928}$	0
0	1	$\frac{8}{49}$	0	$-\frac{1}{98}$	$\frac{5}{98}$	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{29}$	$-\frac{1}{116}$	$\frac{3}{58}$	$-\frac{1}{232}$	0
0	0	1	$\frac{49}{232}$	$-\frac{9}{928}$	$-\frac{1}{232}$	$\frac{49}{1856}$	0	0	0	1	0	$\frac{49}{232}$	$-\frac{9}{928}$	$-\frac{1}{232}$	$\frac{49}{1856}$	0
0	0	8	$\frac{115}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	0	0	0	0	$\frac{3237}{58}$	$-\frac{49}{116}$	$\frac{1}{29}$	$-\frac{49}{232}$	1

ligne 4

1	0	0	$\frac{49}{116}$	$\frac{49}{464}$	$-\frac{1}{116}$	$-\frac{9}{928}$	0	1	0	0	0	$\frac{5635}{51792}$	$-\frac{115}{12948}$	$-\frac{839}{103584}$	$-\frac{49}{6474}$
0	1	0	$-\frac{1}{29}$	$-\frac{1}{116}$	$\frac{3}{58}$	$-\frac{1}{232}$	0	0	1	0	0	$-\frac{115}{12948}$	$\frac{335}{6474}$	$-\frac{115}{25896}$	$\frac{2}{3237}$
0	0	1	$\frac{49}{232}$	$-\frac{9}{928}$	$-\frac{1}{232}$	$\frac{49}{1856}$	0	0	0	1	0	$-\frac{839}{103584}$	$-\frac{115}{25896}$	$\frac{5635}{207168}$	$-\frac{49}{12948}$
0	0	0	1	$-\frac{49}{6474}$	$\frac{2}{3237}$	$-\frac{49}{12948}$	$\frac{58}{3237}$	0	0	0	1	$-\frac{49}{6474}$	$\frac{2}{3237}$	$-\frac{49}{12948}$	$\frac{58}{3237}$

A cette étape, la partie gauche est constituée de la matrice unité et la partie droite correspond à l'inverse de la matrice initiale.

3.2 La fonction GaussJordan

L'utilisation d'un logiciel adapté donne un résultat immédiat mais sans détailler les étapes de calcul. Par exemple avec Mathematica, si V est la matrice (une liste), alors Inverse[V] donne immédiatement le résultat.

Pour obtenir l'affichage des résultats intermédiaires (les tableaux ci-dessus)

```
PGJ[A_, p_, OPT_, CAS_] := Module[{n, m, DEC}, {n, m} = Dimensions[A];
  Which[CAS == 1, Print["Matrice augmentée initiale"],
    CAS == 2, Print["Echange lignes, p=", OPT[[2]], ", k=", OPT[[1]]],
    CAS == 3, Print["Transformation après échange, ligne", p],
    CAS == 4, Print["Tr i=i-(i,p)p et i≠p; avec ligne p=", p]];
  If[m == 2 n, DEC = -(n + 1), DEC = -2];
Print[
  Grid[A, Dividers -> {{1 -> True, -1 -> True, DEC -> True},
    {1 -> True, -1 -> True}},
  Background -> {None, {OPT[[2]] -> LightBlue, OPT[[1]] -> LightGray}},
  Frame -> {None, None, {{p, p} -> True}},
  BaseStyle -> {FontFamily -> Times, FontSize -> Small}]]]

GaussJordan[A0_] :=
Module[{A = A0, i, k, p, n = Length[A0]}, PGJ[A0, 0, {0, 0}, 1];
For[p = 1, p ≤ n, p++,
  For[k = p + 1, k ≤ n, k++,
    If[Abs[A[[k, p]]] > Abs[A[[p, p]]],
      A[[{p, k}]] = A[[{k, p}]]; PGJ[A, p, {k, p}, 2]; ]];
  A[[p]] =  $\frac{A[[p]]}{A[[p, p]]}$ ; PGJ[A, p, {k, p}, 3];
  For[i = 1, i ≤ n, i++,
    If[i ≠ p,
      A[[i]] = A[[i]] - A[[i, p]] A[[p]]; ]];
  PGJ[A, p, {0, 0}, 4]; ]
```

Si V est la matrice des variances covariances, la fonction GaussJordan est appelée de la manière suivante :

GaussJordan[Transpose[Join[Transpose[V], IdentityMatrix[3]]]]

Avec l'exemple de Roll, on obtient
Matrice augmentée initiale

0.026244	0.0324324	-0.00196733	1	0	0
0.0324324	0.105625	-0.00414115	0	1	0
-0.00196733	-0.00414115	0.002116	0	0	1

Echange lignes, p=1; k=2

0.0324324	0.105625	-0.00414115	0	1	0
0.026244	0.0324324	-0.00196733	1	0	0
-0.00196733	-0.00414115	0.002116	0	0	1

Transformation après échange, ligne1

1.	3.25677	-0.127686	0.	30.8334	0.
0.026244	0.0324324	-0.00196733	1	0	0
-0.00196733	-0.00414115	0.002116	0	0	1

Tr $i=i-(i,p)p$ et $i \neq p$; avec ligne p=1

1.	3.25677	-0.127686	0.	30.8334	0.
0.	-0.0530384	0.00138365	1.	-0.809191	0.
0.	0.00226599	0.0018648	0.	0.0606593	1.

Transformation après échange, ligne2

1.	3.25677	-0.127686	0.	30.8334	0.
0.	1.	-0.0260878	-18.8543	15.2567	0.
0.	0.00226599	0.0018648	0.	0.0606593	1.

Tr $i=i-(i,p)p$ et $i \neq p$; avec ligne p=2

1.	4.44089×10^{-16}	-0.0427236	61.4041	-18.8543	0.
0.	1.	-0.0260878	-18.8543	15.2567	0.
0.	4.33681×10^{-19}	0.00192392	0.0427236	0.0260878	1.

Transformation après échange, ligne3

1.	4.44089×10^{-16}	-0.0427236	61.4041	-18.8543	0.
0.	1.	-0.0260878	-18.8543	15.2567	0.
0.	2.25416×10^{-16}	1.	22.2066	13.5597	519.773

Tr $i=i-(i,p)p$ et $i \neq p$; avec ligne p=3

1.	4.5372×10^{-16}	-6.93889×10^{-18}	62.3529	-18.275	22.2066
0.	1.	-3.46945×10^{-18}	-18.275	15.6104	13.5597
0.	2.25416×10^{-16}	1.	22.2066	13.5597	519.773

Chapitre 18

Arbitrage et modèles plurifactoriels

1. Énoncés des exercices

Exercice 18-1 : Définitions

Définissez les termes suivants : *hedge strategy*, *leverage*, *market neutral strategy*, *dollar neutral strategy*, *beta neutral strategy*

Exercice 18-2 : Portfeuille immunisé (*Market neutral portfolio*)

On considère deux portefeuilles A et B dont les taux de rentabilité attendus sont décrits par les relations suivantes

$$\begin{aligned}r_A &= \beta_A r_M + \varepsilon_A \\ r_B &= \beta_B r_M + \varepsilon_B\end{aligned}$$

1. Construisez un portefeuille combinant A et B et de telle manière à ce que son exposition au risque de marché soit nulle (portfeuille immunisé dit *market neutral*)
2. Décrivez les différences entre les stratégies dites '*long-short*', '*market neutral*' et '*Euro neutral*'
3. Peut-on envisager une stratégie combinant les deux titres et permettant une meilleure réduction des risques?

Exercice 18-3 : Covariance

Les taux de rentabilité attendus de deux titres A et B sont expliqués par les relations suivantes.

$$\begin{aligned}r_A &= 10\% + 2F + \varepsilon_A \\ r_B &= 15\% + 3F + \varepsilon_B\end{aligned}$$

On suppose que le facteur (F) représente la variation du taux de croissance du PNB. Les termes résiduels des deux actions (ε) sont supposés non corrélés entre eux et non corrélés avec le facteur. La variance du facteur est estimée à 0,0001.

Quelle est la covariance entre les taux de rentabilité des deux actions?
Vous trouverez le corrigé dans Grinblatt et Titman (1997, p 207).

Exercice 18-4 : Deux facteurs (F_1 & F_2) non corrélés

Les taux de rentabilité de trois titres (A, B et C) sont expliqués par les relations suivantes. On suppose que les facteurs F_1 & F_2 ne sont pas corrélés entre eux ni bien sûr avec le terme résiduel.

$$\begin{aligned} r_A &= 3.5\% + 2F_2 + \varepsilon_A \\ r_B &= 4\% + 1.5F_1 + F_2 + \varepsilon_B \\ r_C &= 5\% + 0.5F_1 + 3F_2 + \varepsilon_C \end{aligned}$$

Par ailleurs la variance de F_1 est de 0.002 et celle de F_2 est de 0.003. Les risques résiduels des titres A, B et C sont respectivement de 10%, 25% et 40%.

1. Exprimez les taux de rentabilité d'un portefeuille équilibré constitué des 3 titres.
2. Évaluez la covariance entre les taux de rentabilité des actions prises deux à deux
3. Calculez le risque systématique
4. Calculez le risque spécifique de chacun des titres
5. Calculez la variance des taux de rentabilité des actions.

Corrigé dans la 5^e édition, page 401 à 402.

Exercice 18-5 : Pure factor portfolios

On suppose que les rentabilités obéissent à un modèle à 3 facteurs notés F_1, F_2 et F_3 . Les ordonnées à l'origine et les sensibilités de quatre portefeuilles de titres bien diversifiés sont données dans le tableau ci après :

Portefeuille	Ordonnée	β_1	β_2	β_3
A	8%	2	3	1,5
B	10%	3	2	-0,5
C	10%	3	5	3
D	7%	2	1	2

1. Comment construire des portefeuilles dont le bêta est de 1 avec un facteur donné et de 0 avec chacun des autres facteurs (*pure factor portfolio*).
2. Donnez l'expression de la rentabilité des trois *pure factor portfolios*.
3. Quelles sont les primes de risque?

Exercice 18-6 : Deux facteurs non corrélés (II)

Les taux de rentabilité attendus de trois titres A, B, et C sont expliqués par les relations suivantes.

$$\begin{aligned} r_A &= 3\% + F_1 - 4F_2 + \varepsilon_A \\ r_B &= 5\% + 3F_1 + 2F_2 + \varepsilon_B \\ r_C &= 10\% + 1,5F_1 + 0F_2 + \varepsilon_C \end{aligned}$$

On suppose que les facteurs (F_1 et F_2) ne sont pas corrélés entre eux, ni avec le terme résiduel ε .

Par ailleurs la variance de chacun des deux facteurs est de 0,0001. Et on suppose que $\sigma^2(\varepsilon_A)=0,0003$; $\sigma^2(\varepsilon_B)=0,0004$; $\sigma^2(\varepsilon_C)=0,0005$.

1. Comment peut-on décrire les rentabilités attendues d'un portefeuille équi pondéré et constitué des trois actions?
2. Évaluez la covariance entre les taux de rentabilité des actions prises deux à deux
3. Calculez le risque systématique (*factor risk*)
4. Calculez le risque spécifique de chacune des actions
5. Calculez la variance des taux de rentabilité de chacune des actions

Exercice 18-7 : Prime de risque dans un modèle pluri-factoriel (examen sept 2009)

Soit un ensemble de 3 portefeuilles de titres (a, b et c) bien diversifiés et deux facteurs notés F_1 et F_2 avec

$$R_a = 4\% + 0.5F_1 + 2F_2$$

$$R_b = 6\% + 1.5F_1 + 1F_2$$

$$R_c = 7\% + 2.5F_1 + 0.5F_2$$

Le taux sans risque est de 2%. On vous demande :

1. De déterminer les caractéristiques des portefeuilles exposés sur un seul facteur (*pure factor portfolio*). Expliquez ce que vous faites.
2. De déterminer la ou les primes de risque

Exercice 18-8 : Matrice des variances covariances des facteurs (examen mai 2011)

Une action A est caractérisée par des sensibilités de 0,5 et de 0,75 (factor exposure) dans un modèle à deux facteurs. La matrice des variances covariances des deux facteurs est:

$$\begin{bmatrix} 0.0625 & 0.0225 \\ 0.0225 & 0.1024 \end{bmatrix}$$

Le carré du risque spécifique de l'action A est de 0,0123. Par ailleurs, les sensibilités d'une action B sont de 0,75 et 0,5.

Questions : (d'après Vidyamurthy, 2004)

1. Quelle est la volatilité de l'action A?
2. Quelle est la covariance entre les rentabilités des deux actions?

Corrigé dans la 5^e édition, page 403.

2. Corrigés de certains exercices

Exercice 18-1 : Définitions, corrigé

Cf. www.barra.com/newsletter

1. *Hedge strategy involves the inclusion of both long and short positions in a portfolio.*
2. *Leverage is an absolute exposure to risky assets which is greater than 100% of invested capital. A strategy's leverage can be expressed as a ratio;*

for example, a strategy that is long two dollars and short one dollar for every dollar of invested capital has a leverage of 3:1.

3. Market neutral hedge strategy takes long and short positions in such a way that the impact of the overall market is minimized.
4. Dollar neutral strategy has zero net investment (i.e., equal dollar amounts in long and short positions).
5. Beta neutral strategy targets a zero total portfolio beta (i.e., the beta of the long side equals the beta of the short side). Beta neutrality better defines a strategy uncorrelated with the market return.

Exercice 18-2 : Portefeuille immunisé (Market neutral portfolio), corrigé

Le modèle d'évaluation proposé ne comporte qu'un seul facteur. On peut l'assimiler au MEDAF, si on suppose que les taux de rentabilité sont exprimés en excès du taux sans risque. Le portefeuille ARB consiste à acheter une unité de B et à vendre à découvert Q unités de A. Le taux de rentabilité du portefeuille ARB est :

$$\begin{aligned} r_{ARB} &= r_B - Q \times r_A \\ r_{ARB} &= (\beta_B r_M + \varepsilon_B) - Q \times (\beta_A r_M + \varepsilon_A) \\ r_{ARB} &= \beta_B r_M + \varepsilon_B - Q \beta_A r_M - \varepsilon_A \\ r_{ARB} &= (\beta_B - Q \beta_A) \times r_M + (\varepsilon_B - \varepsilon_A) \end{aligned}$$

La sensibilité du portefeuille ARB est $\beta_B - Q \beta_A$. Ce qui est égal à zéro si $Q = \frac{\beta_B}{\beta_A}$.

Pour répondre à la deuxième question, le terme 'market neutral' fait clairement référence à une non exposition au marché (un seul facteur commun aux titres est ici envisagé). La stratégie de placement est également dite non directionnelle. Ici le modèle jugé pertinent n'a qu'un seul facteur que l'on peut interpréter comme étant un indice. r_M étant le taux de rentabilité de cet indice de référence en excès du taux sans risque. Le fait d'être neutre assure qu'une variation positive ou négative de la rentabilité de l'indice de référence sera sans impact sur la rentabilité du portefeuille ARB. Une stratégie 'long-short' est plus générale, puisqu'un portefeuille admettant des ventes à découvert n'est pas forcément neutre quand aux évolutions d'un indice de référence. Enfin une stratégie 'Euro neutral' est une stratégie autofinancée, qui ne nécessite donc aucun apport de fonds. Il n'y a donc pas forcément équivalence entre ces trois concepts. Pour un approfondissement lisez <http://www.barra.com/Newsletter/nl169/marketneutral169.aspx>.

Pour répondre à la troisième question, on oublie les bêtas. Pour immuniser un portefeuille p donné par rapport aux évolutions d'un indice M donné, on vend à découvert Q unités de l'indice de référence M. Le taux de rentabilité du portefeuille résultant est

$$r_{ARB} = r_p - Q \times r_M$$

Puis on cherche la valeur de Q qui minimise le risque du portefeuille ainsi constitué :

$$\sigma^2(r_{ARB}) = \sigma^2(r_p - Q \times r_M)$$

On sait que $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

$$\sigma^2(r_{ARB}) = \sigma^2(r_p) + Q^2 \times \sigma^2(r_M) - 2 \times Q \times \sigma_{r_p; r_M}$$

On cherche la valeur de Q qui minimise la variance des taux de rentabilité. On dérive par rapport à Q

$$\frac{\partial \sigma^2(r_{ARB})}{\partial Q} = 2Q \times \sigma^2(r_M) - 2 \times \sigma_{r_p; r_M} = 0$$

$$Q = \frac{\sigma_{r_p; r_M}}{\sigma^2(r_M)}$$

Le ratio de couverture, permettant de minimiser la variance des taux de rentabilité du portefeuille est le bêta du portefeuille p. Si la couverture est assurée par la vente de contrats *futures* sur indice, le ratio de couverture devra être calculé par rapport au *futures*. On s'expose à un risque de corrélation qui est d'autant plus important lorsque la composition du portefeuille p s'éloigne de celle de l'instrument de couverture.

Exercice 18-3 : Covariance, corrigé

En fin du chapitre 7, les trois premières démonstrations (page 198) rappellent les propriétés de l'opérateur espérance. En fin du chapitre 8, les deux premières démonstrations (page 224) présentent les propriétés de l'opérateur variance. En fin du chapitre 10, les quatre premières démonstrations (pages 258-259) rappellent les propriétés de l'opérateur covariance. En application de ces propriétés, on écrit

$$\text{Cov}(r_A; r_B) = \text{Cov}(10\% + 2F + \varepsilon_A; 15\% + 3F + \varepsilon_B)$$

Les constantes (10% et 15%) peuvent être ignorées

$$\text{Cov}(r_A; r_B) = \text{Cov}(2F; 3F) + \text{Cov}(2F; \varepsilon_B) + \text{Cov}(\varepsilon_A; 3F) + \text{Cov}(\varepsilon_A; \varepsilon_B)$$

Suivant l'énoncé « *Les termes résiduels des deux actions (ε) sont supposés non corrélés entre eux et non corrélés avec le facteur.* », d'où

$$\text{Cov}(r_A; r_B) = 2 \times 3 \times \text{Cov}(F; F) = 6\sigma^2(F) = 0,0006$$

Exercice 18-4 : Deux facteurs non corrélés, Corrigé

Représentation des données avec Mathematica. On définit (pourquoi pas) F comme facteur et y et z comme sensibilités aux facteurs. Le terme résiduel en epsilon et l'ordonnée à l'origine en x.

$$r_A = x_A + y_A F_1 + z_A F_2 + \varepsilon_A;$$

$$r_B = x_B + y_B F_1 + z_B F_2 + \varepsilon_B;$$

$$r_C = x_C + y_C F_1 + z_C F_2 + \varepsilon_C;$$

$$\{r_A, r_B, r_C\} // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} x_A + F_1 y_A + F_2 z_A + \varepsilon_A \\ x_B + F_1 y_B + F_2 z_B + \varepsilon_B \\ x_C + F_1 y_C + F_2 z_C + \varepsilon_C \end{pmatrix}$$

En lettres majuscules on définit les vecteurs X, Y, Z et R

$$X = \{x_A, x_B, x_C\}; Y = \{y_A, y_B, y_C\}; Z = \{z_A, z_B, z_C\}; R = \{r_A, r_B, r_C\};$$

Il est ainsi possible de représenter le système d'équations avec 3 titres et deux facteurs comme étant R (une matrice)

En reprenant les données de cet exercice (stockées dans Data)

$\text{Data} = \{x_A \rightarrow 0.035, y_A \rightarrow 0, z_A \rightarrow 2, x_B \rightarrow 0.04, y_B \rightarrow 1.5, z_B \rightarrow -1, x_C \rightarrow 0.05, y_C \rightarrow 0.5, z_C \rightarrow 3\};$

Ainsi, la représentation de R avec les données de l'exercice s'exprime :

`In[12]:= R /. Data // MatrixForm`

`Out[12]//MatrixForm=`

$$\begin{pmatrix} 0.035 + 2 F_2 + \varepsilon_A \\ 0.04 + 1.5 F_1 - F_2 + \varepsilon_B \\ 0.05 + 0.5 F_1 + 3 F_2 + \varepsilon_C \end{pmatrix}$$

1. Exprimez les taux de rentabilité d'un portefeuille équilibré constitué des 3 titres.

On définit P (vecteur) le système de poids du portefeuille équilibré :

$P = \{1/3, 1/3, 1/3\};$

(* Portefeuille équi pondéré *)

Le taux de rentabilité d'un équilibré (3 titres et deux facteurs) s'écrit (le . désigne le produit matriciel)

$P.R$

`Out[21]//MatrixForm=`

$$\frac{1}{3} (x_A + F_1 y_A + F_2 z_A + \varepsilon_A) + \frac{1}{3} (x_B + F_1 y_B + F_2 z_B + \varepsilon_B) + \frac{1}{3} (x_C + F_1 y_C + F_2 z_C + \varepsilon_C)$$

Avec les données de cet exercice :

`In[22]:= P.R /. Data`

`Out[22]=`

$$\frac{1}{3} (0.035 + 2 F_2 + \varepsilon_A) + \frac{1}{3} (0.04 + 1.5 F_1 - F_2 + \varepsilon_B) + \frac{1}{3} (0.05 + 0.5 F_1 + 3 F_2 + \varepsilon_C)$$

`In[25]:= r_p = P.X + P.Y F_1 + P.Z F_2 /. Data`

`Out[25]=`

$$0.0416667 + 0.666667 F_1 + \frac{4 F_2}{3}$$

`In[26]:= Cte = P.X /. Data; Beta1 = P.Y /. Data;`

`Beta2 = P.Z /. Data;`

$r_p = \text{Cte} + \text{Beta1 } F_1 + \text{Beta2 } F_2$

$$0.0416667 + 0.666667 F_1 + \frac{4 F_2}{3}$$

2. Évaluez la covariance entre les taux de rentabilité des actions prises deux à deux

Évaluation d'une covariance. Entre les titres A & B

$$\text{Cov}(r_A; r_B) = \text{Cov}(3.5\% + 2F_2 + \varepsilon_A; 4\% + 1.5 F_1 + F_2 + \varepsilon_B)$$

Dans le contexte du portefeuille équilibré, $\text{Cov}(\frac{1}{3}r_A; \frac{1}{3}r_B)$

1/ les constantes isolées peuvent être éliminées (car la Covariance entre une variable et une constante est nulle)

2/ on multiplie les deux expressions, on développe

$$\left(\frac{2 F_2}{3} + \frac{\varepsilon_A}{3} \right) \left(0.5 F_1 - \frac{F_2}{3} + \frac{\varepsilon_B}{3} \right) // \text{Expand}$$

$$0.333333 F_1 F_2 - \frac{2 F_2^2}{9} +$$

$$0.166667 F_1 \varepsilon_A - \frac{F_2 \varepsilon_A}{9} + \frac{2 F_2 \varepsilon_B}{9} + \frac{\varepsilon_A \varepsilon_B}{9}$$

3/ les produits (de deux variables différentes) sont remplacés par une covariance. Les produits de deux variables identiques sont remplacés par une variance

$$0.333 \text{Cov} (F_1 ; F_2) - \frac{2}{9} \text{Var} (F_2) + 0.166 \text{Cov} (F_1 ; \varepsilon_A) -$$

$$\frac{1}{9} \text{Cov} (F_2 ; \varepsilon_A) + \frac{2}{9} \text{Cov} (F_2 ; \varepsilon_B) + \frac{1}{9} \text{Cov} (\varepsilon_A ; \varepsilon_B) = -\frac{2}{9} \text{Var} (F_2)$$

La plupart des termes sont égaux à 0 (cf énoncé). Il reste

$$-\frac{2}{9} 0.003$$

$$-0.000666667$$

Entre A & C : 0,002

Entre B & C : -0,0008333

3. Calculez le risque systématique

Ou factor risk. Si les facteurs sont non corrélés alors, la variance des taux de rentabilité d'un titre s'écrit (ci après pour le titre A)

$$\ln[31]:= \sigma_A^2 = \sigma^2 (r_A) = \sigma^2 (x_A + F_1 y_A + F_2 z_A + \varepsilon_A)$$

$$\ln[32]:= \sigma_A^2 = F_1^2 \sigma^2 (y_A) + F_2^2 \sigma^2 (z_A) + \sigma^2 (\varepsilon_A)$$

$$\ln[36]:= FR_A =$$

$$0.002 \times 0 +$$

$$0.003 \times 2^2 (* \text{ le coef de F1 est 0 et celui de F2 est 2 } *)$$

$$\text{Out}[36]=$$

$$0.012$$

$$\ln[37]:= FR_B = 0.002 \times 1.5^2 + 0.003 \times 2^2$$

$$\text{Out}[37]=$$

$$0.0165$$

$$\ln[38]:= FR_C = 0.002 \times .5^2 + 0.003 \times 3^2$$

$$\text{Out}[38]=$$

$$0.0275$$

4. Calculez le risque spécifique de chacun des titres

Les risques résiduels des trois actions sont donnés. La réponse est immédiate (10, 25 et 40%)

5. Calculez la variance des taux de rentabilité des actions.

Pour chaque titre, la somme des deux composantes ci – dessus, soit

$$FR_A + 0.1^2$$

$$FR_C + 0.4^2$$

$$0.022$$

$$0.1875$$

$$FR_B + 0.25^2$$

$$0.079$$

Exercice 18-5 : Pure factor portfolios (4 titres et 3 facteurs)

Il est recommandé de travailler d'abord l'exercice un peu plus simple (3 titres et deux facteurs) qui est proposé dans la 5^e édition et corrigé pages 392-394.

1. Comment construire des portefeuilles dont le bêta est de 1 avec un facteur donné et de 0 avec chacun des autres facteurs (pure factor portfolio).

Il est possible d'écrire à partir des données de l'énoncé (en application de la définition d'un « pure factor portfolio ») :

$$\begin{aligned} 2X_c + 3X_g + 3X_s + 2X_t &= 1 \\ 3X_c + 2X_g + 5X_s + X_t &= 0 \\ 1.5X_c - 0.5X_g + 3X_s + 2X_t &= 0 \\ X_c + X_g + X_s + X_t &= 1 \end{aligned}$$

Sous forme matricielle le problème s'écrit de manière équivalente

```
In[9]:= COEF = {{2, 3, 3, 2}, {3, 2, 5, 1}, {1.5, -0.5, 3, 2}, {1, 1, 1, 1}};
VAR = {Xc, Xg, Xs, Xt};
CTE = {1, 0, 0, 1};
```

```
In[10]:= Print[COEF // MatrixForm, VAR // MatrixForm, "=", CTE // MatrixForm]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1.5 & -0.5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_c \\ X_g \\ X_s \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solution est obtenue par produit matriciel entre le vecteur de constante (à gauche) et la matrice inverse des coefficients

```
In[12]:= Inverse[COEF] // MatrixForm
Out[12]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1.29412 & 0.411765 & -0.352941 & 2.88235 \\ 0.470588 & -0.0588235 & -0.235294 & -0.411765 \\ 0.529412 & 0.0588235 & 0.235294 & -1.58824 \\ 0.294118 & -0.411765 & 0.352941 & 0.117647 \end{pmatrix}$$

In[14]:= Inverse[COEF].CTE // MatrixForm
Out[14]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1.58824 \\ 0.0588235 \\ -1.05882 \\ 0.411765 \end{pmatrix}$$

```

On se reportera à la section 4, même chapitre, pour un détail de la solution utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan.

Alternativement, (avec un logiciel adapté, ici Mathematica)

```
Solve[{2 Xc + 3 Xg + 3 Xs + 2 Xt == 1, 3 Xc + 2 Xg + 5 Xs + Xt == 0,
1.5 Xc - 0.5 Xg + 3 Xs + 2 Xt == 0, Xc + Xg + Xs + Xt == 1}, {Xc, Xg, Xs, Xt}]
{{Xc -> 1.58824, Xg -> 0.0588235, Xs -> -1.05882, Xt -> 0.411765}}
```

```
Solve[{2 Xc + 3 Xg + 3 Xs + 2 Xt == 0, 3 Xc + 2 Xg + 5 Xs + Xt == 1,
 1.5 Xc - 0.5 Xg + 3 Xs + 2 Xt == 0, Xc + Xg + Xs + Xt == 1}, {Xc, Xg, Xs, Xt}]
{{Xc -> 3.29412, Xg -> -0.470588, Xs -> -1.52941, Xt -> -0.294118}}
```

```
Solve[{2 Xc + 3 Xg + 3 Xs + 2 Xt == 0, 3 Xc + 2 Xg + 5 Xs + Xt == 0,
 1.5 Xc - 0.5 Xg + 3 Xs + 2 Xt == 1, Xc + Xg + Xs + Xt == 1}, {Xc, Xg, Xs, Xt}]
{{Xc -> 2.52941, Xg -> -0.647059, Xs -> -1.35294, Xt -> 0.470588}}
```

2. Donnez l'expression de la rentabilité des trois pure factor portfolios.

En application de la définition des taux de rentabilité (énoncé)

```
1.58824 (0.08 + 2 F1 + 3 F2 + 1.5 F3) +
 0.0588235 (0.1 + 3 F1 + 2 F2 - 0.5 F3) - 1.05882 (0.1 + 3 F1 + 5 F2 + 3 F3) +
 0.411765 (0.07 + 2 F1 + 1 F2 + 2 F3) // Simplify
0.0558831 + 1.00002 F1 + 0.000032 F2 + 0.00001825 F3
```

```
3.29412 (0.08 + 2 F1 + 3 F2 + 1.5 F3) +
 -0.470588 (0.1 + 3 F1 + 2 F2 - 0.5 F3) - 1.52941 (0.1 + 3 F1 + 5 F2 + 3 F3) -
 0.294118 (0.07 + 2 F1 + 1 F2 + 2 F3) // Simplify
0.0429415 + 0.00001 F1 + 1.00002 F2 + 8. × 10-6 F3
```

```
2.52941 (0.08 + 2 F1 + 3 F2 + 1.5 F3) +
 -0.647059 (0.1 + 3 F1 + 2 F2 - 0.5 F3) - 1.35294 (0.1 + 3 F1 + 5 F2 + 3 F3) +
 0.470588 (0.07 + 2 F1 + 1 F2 + 2 F3) // Simplify
0.0352941 - 1. × 10-6 F1 - 8.88178 × 10-16 F2 + 1. F3
```

3. Quelles sont les primes de risque?

Les primes de risques peuvent être calculées conditionnellement à une valeur de taux sans risqué et relativement à la constante de l'expression du taux de rentabilité de chacun des pure factors portfolios, soit

Facteur 1 : $0,0558831 - Rf$

Facteur 2 : $0,0429415 - Rf$

Facteur 3 : $0,0352941 - Rf$

Exercice 18-6 : Deux facteurs non corrélés (II), Corrigé

En fin du chapitre 7 (Hamon, 2014), les trois premières démonstrations (page 198) rappellent les propriétés de l'opérateur espérance. En fin du chapitre 8, les deux premières démonstrations (page 224) présentent les propriétés de l'opérateur variance. En fin du chapitre 10, les quatre premières démonstrations (pages 258-259) rappellent les propriétés de l'opérateur covariance.

Vous trouverez le corrigé dans Grinblatt et Titman (1997, p 206-210), qui proposent cet exercice.

- $r_p = 6\% + 1,833F_1 - 0,667F_2 + \varepsilon_p$. En effet $\frac{1}{3}3\% + \frac{1}{3}5\% + \frac{1}{3}10\% = 6\%$. De même $\beta_{p,1} = \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}3 + \frac{1}{3}1,5 = 1,833$ et $\beta_{p,2} = -\frac{1}{3}4 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}0 = -\frac{2}{3}$.

2. $\text{Cov}(r_A; r_B) = \text{Cov}(3\% + F_1 - 4F_2 + \varepsilon_A; 5\% + 3F_1 + 2F_2 + \varepsilon_B) = \text{Cov}(F_1 - 4F_2; 3F_1 + 2F_2) = 3\sigma^2(F_1) - 8\sigma^2(F_2) = -0,0005$. De même, $\text{Cov}(r_A; r_C) = 1,5\sigma^2(F_1) = 0,00015$ et $\text{Cov}(r_B; r_C) = 4,5\sigma^2(F_1) = 0,00045$.
3. Puisque les deux facteurs sont indépendants, la variance des taux de rentabilité s'écrit : $\sigma^2(R_i) = \beta_{i,1}^2 \sigma^2(r_1) + \beta_{i,2}^2 \sigma^2(r_2) + \sigma^2(\varepsilon_i)$. Le carré du risque systématique est la somme des deux premiers termes à droite du signe égal. Pour A : $0,0001(1+16) = 0,0017$; pour B : $0,0001(9+4) = 0,0013$; pour C : $0,0001(2,25)$
4. On sait que $\sigma^2(\varepsilon_A) = 0,0003$; $\sigma^2(\varepsilon_B) = 0,0004$; $\sigma^2(\varepsilon_C) = 0,0005$. Le risque spécifique est l'écart-type des termes résiduels.
5. La variance des taux de rentabilité, est la somme du carré du risque systématique et du carré du risque résiduel, soit pour A : $0,002$; pour B : $0,0017$ et pour C : $0,000725$.

3. Méthode d'élimination de Gauss-Jordan appliquée à la résolution d'un système d'équations

La démarche est détaillée à partir des données de l'exercice 18-5 et la détermination des « *pure factor portfolios* ». Les données permettent de formuler le problème suivant, pour le premier facteur :

$$\begin{aligned} 2X_c + 3X_g + 3X_s + 2X_t &= 1 \\ 3X_c + 2X_g + 5X_s + X_t &= 0 \\ 1.5X_c - 0.5X_g + 3X_s + 2X_t &= 0 \\ X_c + X_g + X_s + X_t &= 1 \end{aligned}$$

Matrice augmentée initiale

2	3	3	2	1
3	2	5	1	0
1.5	-0.5	3	2	0
1	1	1	1	1

L'échange de lignes augmente l'efficacité. Ici les lignes 1 et 2 seront permutées de manière à débiter avec le pivot ayant la valeur absolue la plus élevée (colonne 1) de la matrice augmentée initiale

3	2	5	1	0
2	3	3	2	1
1.5	-0.5	3	2	0
1	1	1	1	1

En haut à gauche le pivot. On divise tous les termes de la ligne par 3 et on obtient, ci après à gauche la matrice

On note p la ligne du pivot (ici 1) et IP le pivot (dont la valeur est ici de 1). Les autres lignes (i de 2 à 4) sont transformées de la manière suivante : $i - IP \times p$. Soit pour le premier élément de la 2^e ligne : $2 - 1 \times 2 = 0$, etc. On obtient

Ligne 1 :

1	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
2	3	3	2	1	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1
1.5	-0.5	3	2	0	0.	-1.5	0.5	1.5	0.
1	1	1	1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Ligne 2 :

1	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$
0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
0.	-1.5	0.5	1.5	0.	0.	0.	0.2	2.7	0.9
0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

Permutation des lignes 3 et 4

1	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$
0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$
0.	0.	0.2	2.7	0.9

Ligne 3 :

1	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	0	0	1	2
0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$
0.	0.	0.2	2.7	0.9	0.	0.	0.	2.83333	1.16667

Ligne 4 :

1	0	0	1	2	1.	0.	0.	0.	1.58824
0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0.	1.	0.	0.	0.0588235
0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0.	0.	1.	0.	-1.05882
0.	0.	0.	1.	0.411765	0.	0.	0.	1.	0.411765

A la dernière étape, dans la partie gauche on obtient la matrice unité. Les poids définissant le portefeuille permettant d'être exposé totalement au premier facteur et pas du tout aux deux autres, sont obtenus dans la partie droite de la matrice.

Chapitre 19

Introduction à la gestion de portefeuille

1. Énoncé des exercices

Exercice 19-1 : Passif et actif

À partir des données mensuelles d'Ibbotson de 1926 à 2012,

1. Retrouvez certains résultats du chapitre 19 (Hamon, 2014). Notamment calculez la moyenne, la médiane et l'écart type de la valeur finale associée à une stratégie active avec 70 % de bons signaux (30% d'erreurs de décision donc) et en supposant 1 % de coûts de transaction supportés lors des réallocations. Une programmation par exemple en VBA sous excel ou access, ou sous Mathematica, permet d'obtenir le résultat et justifie l'étoile donnée à cet exercice.
2. Le résultat associé à une stratégie active sans frais et sans erreur de prévision serait-il supérieur, inférieur ou similaire si l'horizon de prévision, au lieu d'être de 1 mois, était de 1 séance ?
3. Si une telle simulation est menée sur le DJIA, doit-on s'attendre à un résultat similaire, inférieur ou supérieur ?

Exercice 19-2 : *Prévision parfaite à un mois sur le CAC40*

Depuis fin décembre 1987 à partir des données de l'indice Cac40 avec réinvestissement des dividendes,

1. Quelle la valeur d'un capital initial de 1€, fin 2013 ?
2. En supposant une prévision parfaite à un mois, sans erreur et sans frais, Quelle la valeur d'un capital initial de 1€, fin 2013 ?
3. En supposant une prévision parfaite à un mois, sans erreur avec des frais de 0,2% à 1,6%, Quelle la valeur d'un capital initial de 1€, fin 2013 ?
4. En supposant que certaines erreurs puissent être commises et avec un taux d'erreur entre 10% et 50%, que devient la valeur du capital initial fin 2013 ?

Exercice 19-3 : *Qu'est un « fonds monétaire » ?*

1. Du point de vue réglementaire?
2. Du point de vue des arguments de commercialisation (marketing)
3. Du point de vue économique (couple rentabilité / risque)

2. Corrigé de certains exercices

Chapitre 20

L'efficacité informationnelle

1. Énoncé des exercices

Exercice 20-1 : Octobre 1987

Le 19 octobre 1987, le NYSE a chuté de 22% en une séance sans information particulière, n'est-ce pas LA preuve que le marché est inefficace? D'ailleurs, de nombreux commentaires ont été faits dans ce sens, ainsi :

1. *Efficient market theory (EMT) was « the most remarkable error in the history of economic theory », R. Shiller, 1984, “Stock prices and social dynamics”, Brookings Papers on Economic Activity”, p. 459. Affirmation reprise dans le Wall Street Journal peu après le choc d'octobre 1987.*
2. EMT is « a failure », Business Week.
3. « *the efficient market hypothesis (...) crashed along with the rest of the market on October 19, 1987* », L. Summers.
4. Tanous (1997) pose la question suivante à Fama : *Another question that comes up frequently is if markets are correctly priced, how do you explain crashes when they go down twenty percent in one day?*
Que répondez-vous ? Discutez l'affirmation ci-dessus.

Exercice 20-2 : Ajustement et efficacité

1. En combien de temps le marché ajuste-t-il dans un marché efficace?
2. Sous l'hypothèse d'équilibre totalement révélateur, quel est le délai d'ajustement des cours lorsqu'une information parvient sur le marché ?

Exercice 20-3 : Anticipations et efficacité

1. Pour un investisseur formant des anticipations rationnelles, peut-on dire que le cours d'aujourd'hui est la meilleure estimation du cours de demain?

2. Peut-on dire que l'hypothèse des anticipations rationnelles permet de tenir compte du comportement anticipé des autres ? Si oui, de quelle manière cela intervient-il dans la formulation des anticipations ?

Exercice 20-4 : L'histoire se répète-t-elle ?

Le journal *Le Monde* en date du dimanche 19 et lundi 20 octobre 1997 fait un parallèle entre les évolutions boursières de 1926-1929; 1984-1987 et 1994-1997. *Le Monde* fait l'hypothèse d'une similitude entre 1929 et 1997, constatée dans certaines salles de marché. La question de l'évolution est alors posée : est-on à la veille d'un krach ?

1. Que s'est-il passé le lundi 27 octobre 1997 ?
2. À partir des données quotidiennes du DJIA, retracez les évolutions boursières 3 ans avant les dates mentionnées.
3. Retracez les évolutions postérieures dans chacun des trois cas.
4. Et le lundi 16 octobre 1989, qu'a-t-on observé sur la plupart des places boursières ?

Exercice 20-5 : Consensus

Le consensus est une agrégation des prévisions individuelles d'analystes, relatives au BPA. Le consensus publié est évalué en utilisant une moyenne arithmétique des prévisions individuelles. Quelles autres approches sont-elles envisageables et avec quelle justification ?

Exercice 20-6 : Investissement en actions de 2001 à 2010



De début janvier 2001 au 6 sept 2010 le graphique représente la trajectoire de 4 investissements :

1. 100% dans le STOXX 600 Euro avec dividendes (noir épais)
2. 100% dans une sicav monétaire (BNP) en vert
3. 70/30 et 30/70, deux stratégies mélangeant les deux premiers

Un placement monétaire n'apparaît-il pas plus rentable ET moins risqué? N'est-ce pas en contradiction avec l'hypothèse d'efficience?

Exercice 20-7 : Super-bowl*

Lorsque l'équipe qui gagne le Super Bowl (vers fin janvier) appartient à la "Old American" (cote est) la bourse baisse sur l'année! Lorsque le résultat du SuperBowl est connu, le lundi la bourse en moyenne réagit. Krueger et Kennedy (1990) ne constatent que deux erreurs de classement en 1970 et 1978, deux années où le DJIA connaît des variations faibles.

CNN markets affiche le 26 janvier 1998 « *Despite AFC's Super Bowl win, S&P futures recover losses on mega deal* » ou l'Agéfi, le 1^{er} février 1993, qui commente l'évolution boursière du jour « *alors que les Cow-Boys de Dallas battent la veille les Bills de Buffalo, le marché monte* ».

Moneywatch.bnet.com, le 7 fév 2010 « *Saints' Super Bowl win predicts bull stock market* ». Ou encore Forbes, 30 juin 2011, « *The most bizarre investing strategies* ».

Mettez à jour ces résultats jusque fin 2013. Commentez.

Références à lire

Krueger TM et WF Kennedy, 1990, An examination of the super bowl stock market predictor, *Journal of Finance*, Vol 45, n° 2, p. 691-697.

Morel C., 2004, L'anomalie du Super-Bowl, *Banque et Marchés*,

Kester G.W., 2010, What happened to the super bowl stock market predictor?, *Journal of Investing*, spring, p. 82-87

Exercice 20-8 : Sell in may and go away

Ce vieux dicton connaît plusieurs variantes. Par exemple avec un retour sur le marché à Halloween (plutôt version américaine, cf. Bouman et Jacobsen, 2002), ou « come back to the Derby day » en version anglaise avec un retour plus rapide. En français on entend aussi « qui n'encaisse pas en mai est plumé avant l'été »

À partir des données quotidiennes du DowJones depuis mai 1896, comparez les taux de rentabilité : 1/ d'une stratégie passive ; 2/ d'une stratégie de vente début mai et de rachat début novembre suivant.

Quel recul critique peut-on exprimer par rapport à ce test rapide ?

Suggestions de lectures

Bouman et Jacobsen, 2002, The halloween indicator, « sell in may and go away », *American Economic Review*, Vol 92, n° 5, p. 1617-1635.

Jacobsen et Zhang, 2010, Are monthly seasonals real? A three century perspective, SSRN

Exercice 20-9 : RQ

La recommandation d'un analyste sur une action X est « acheter ». Dans l'année qui suit le cours passe de 30 à 40 et l'indice CAC40 de 4 100 à 5 500.

Remarque : la société AQ (www.aqresearch.com) proposait (elle n'existe plus en 2014, on a supprimé le passage dans le 5^e édition mais on garde ici la présentation des deux indicateurs et l'exercice) une démarche d'évaluation des analystes via deux indicateurs. Le premier (AQ) mesure la qualité du processus d'estimation des BPA, le deuxième (RQ) mesure la qualité des recommandations d'achat et de vente des titres.

La note AQ est comprise entre 0 et 100. Elle est attribuée à chaque analyste en fonction de la précision de ses estimations de BPA. La note est d'autant plus forte que la prévision est proche du chiffre final annoncé, que l'analyste révisé peu fréquemment et que les révisions sont de faible ampleur. Le premier critère a un poids de 50% et les deux autres de 25% chacun. Un historique de cinq ans de prévisions (2 exercices encadrant l'exercice courant) est pris en compte en affectant un poids plus faible aux prévisions les plus anciennes ou éloignées. Un analyste prévoyant sans erreur deux ans avant l'annonce le BPA aurait une note proche de 100 ; alors qu'un autre révisant très fréquemment ses prévisions, à la hausse comme à la baisse, tout en ayant une prévision finale éloignée du chiffre annoncé aurait une note proche de 0.

La note RQ peut prendre n'importe quelle valeur et même être négative. Elle est attribuée à chaque analyste en fonction de la qualité de ses recommandations d'achat et de vente. La variation relative de cours du titre sur la durée de vie de la recommandation (entre deux changements donc) est multipliée par un coefficient compris entre -1,25 (vente) et +1,25 (renforcer) suivant le libellé de la recommandation. Un analyste ayant émis une recommandation maximale (renforcer) suivie d'un doublement du cours aura un RQ de 125. Le RQ pourra être négatif si la même recommandation est suivie d'une baisse.

1. Quel est le RQ de l'analyste (en absolu puis relatif) si sur le même intervalle sa recommandation est inchangée ?
2. Quel est son RQ (en absolu puis relatif) si au bout de 6 mois le cours est de 37 et que la recommandation est changée en « neutre » ?

Exercice 20-10 : Ajustement

Pinault-Printemps-Redoute (PPR) publie un communiqué en date du 4 novembre 2003 qui annonce le départ programmé d'ici avril 2004 de Tom Ford et Domenico Del Sole de la direction de Gucci.

1. Quel est l'impact sur les cours (quotidiens) de Gucci (cotée à Amsterdam), de PPR (cotée à Paris) ? Justifiez et détaillez la démarche retenue.
2. Précisez les délais de réaction sur PPR avec une étude par tranche de 15 minutes.
3. Comment expliquez-vous la faible réaction des actionnaires de Gucci ?

Exercice 20-11 : Les cygnes noirs et les cygnes dorés

Popper (1935) remarque que l'affirmation « tous les cygnes sont blancs » ne peut être démontrée mais qu'elle peut être falsifiée par l'observation d'un cygne noir (non encore faite, mais justement parce que l'animal est très rare !). En bourse en revanche les cygnes noirs (mais aussi certains cygnes dorés) sont périodiquement rencontrés. À partir des données quotidiennes du DJIA (téléchargeable) depuis 1896 :

1. Identifiez les dix séances de variations extrêmes (positives et négatives) de la valeur de l'indice.
2. Quelle part de rentabilité ces séances extrêmes concentrent-elles (relativement à l'ensemble des séances)? Un investissement de 1 \$ le 26 mai 1896 vaut 12 650 \$ le 31 janvier 2008, en ignorant les dividendes. Quelle est

la valeur finale si on ignore les dix séances les pires ? Et les dix meilleures ? (sur les 27 970 séances)

3. Reprenez la question précédente, mais en excluant les 20 pires et les 20 meilleures.
4. Les séances extrêmes sont-elles réparties aléatoirement, ou bien les cygnes volent-ils en groupes ?
5. Quels enseignements en tirez-vous en matière de gestion de portefeuille ?

Exercice 20-12 : Fundamental indexing

Supposons que certains puissent prévoir (de manière profitable), mais pas vous. Vous restez donc adepte de la gestion passive de portefeuille. Toutefois, le fait que vous soyez persuadé que les marchés ne sont pas efficaces informationnellement, doit-il changer votre démarche d'investissement ? La lecture de Treynor (2005), peut vous aider à répondre aux questions suivantes :

1. Les indices pondérés par les capitalisations sont-ils dans ce cas de bonnes références (*benchmark*) ? Pourquoi ?
2. Comment définir des références appropriées ?
3. Donnez des exemples de fonds d'investissement et d'indices qui s'appuient sur ce raisonnement.

Exercice 20-13 : Burelle du Plastic Omnium à moitié prix

Les Echos le 26 octobre 2009 titre ainsi et précise « Cette société, détenue à 76,2 % par la famille Burelle, possède 53,2 % de l'équipementier automobile Plastic Omnium. A côté de cet actif central, Burelle SA possède, au travers de la filiale Sofiparc, un patrimoine immobilier dont le principal actif est un immeuble de 13.200 m² à Levallois où se trouve le siège administratif de Plastic Omnium. Le groupe a également développé une activité de capital-investissement via Burelle Participations. »

1. Comparez les valeurs de Plastic Omnium et de Burelle
2. Comment évolue la décote postérieurement à octobre 2009 ?
3. Un arbitrage est-il envisageable ?
4. Une telle décote peut-elle avoir une justification ?

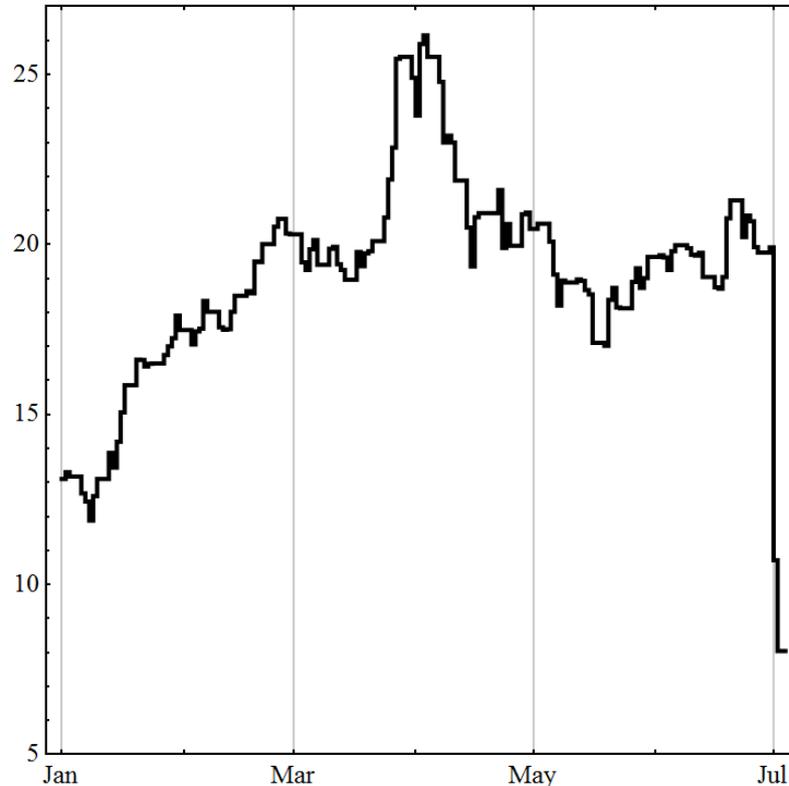
Exercice 20-14 : Gotham City Research

Gotham City Research (GCR) produit et publie des analyses financières sur certains titres cotés. Le Financial Times du 23 avril 2014 (Henri Mance) lui consacre un article « *it's the Muddy Waters model – go short then go public* ». GCR prend également semble-t-il des positions (de vente à découvert) sur le marché des titres. Sur les forums, à la même époque, on peut lire des commentaires du type « GCR est une bouilloire inversée, il vend puis dénigre pour faire baisser les cours ».

Le mardi 1er juillet 2014, GCR publie une analyse de 93 pages sur Let's Gowex (ALGOW) qui est une société espagnole cotée sur Euronext notamment (éligible au PEA-PMI) et dont le métier est dans l'équipement en wi-fi de certains lieux (métros, villes), permettant d'offrir un service gratuit de connexion avec un financement par certaines collectivités locales (dont New York) ou

certaines gestionnaires de métros (à Paris). Suivant GCR « *price target : €0.0 per share* » en résumé la société ne vaut rien.

Graphique : Cours de Let's Gowex en 2014 sur Euronext Paris



Source : FinancialData["PA: ALGOW", {{2014}}], avec Mathematica.

« A la Bourse de Paris (le titre est également coté à Madrid et New York), cette note a eu un effet dévastateur sur le titre : il s'est effondré de 46,2 % mardi, puis encore de 24,93 % mercredi. Une véritable purge qui a réduit l'action à 8,04 euros, son plus bas niveau depuis octobre 2013. En deux jours, quelques 860 millions d'euros de capitalisation boursière sont partis en fumée... » Les Echos le 7 juillet 2014.

1. Est-ce du dénigrement de la diffamation ou de l'analyse financière ?
2. Y a-t-il une situation de conflit d'intérêt pour GCR ? Expliquez ?
3. Quels sont les arguments de GCR ?
4. Le fondateur et PDG de Let's Gowex publie un communiqué le dimanche 6 juillet à 11h. Est-ce pour annoncer des poursuites en justice contre CGR ? Ou bien pour confirmer qu'il a maquillé les comptes de sa société ?
5. Comment sont auditées les comptes des sociétés cotées sur Euronext ? Quelles sont les conditions d'admission en bourse ?

2. Corrigé de certains exercices

Exercice 20-2 : Ajustement et efficacité, corrigé

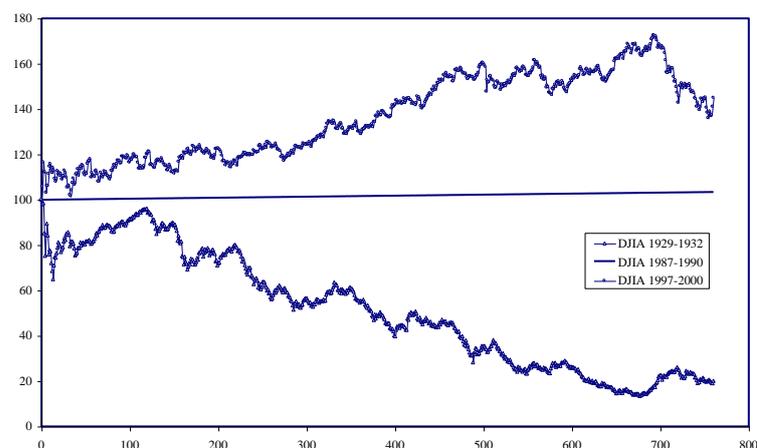
1. Le délai doit être tel qu'il ne soit pas possible d'en tirer profit.
2. Le délai est nul.

Exercice 20-4 : L'histoire se répète-t-elle ? corrigé

1. En ouverture du 27 à Paris, le marché baisse un peu à 2 811,17, contre 2 849,3 en clôture le vendredi précédent. Le DJIA est davantage perturbé : 7 715,4 en clôture le vendredi 24, 7 161,1 le lundi et 7 498,3 le mardi en clôture.
2. Trois dates de référence sont sélectionnées, le 23 octobre 1929, le 19 octobre 1987 et le 27 octobre 1997 : elles correspondent à une chute importante en une séance. La valeur du DJIA est fixée arbitrairement à 100 ces séances-là et recalculée sur les 760 séances précédentes (approximativement trois ans). Le résultat montre une similitude des évolutions entre 1927-1929 et 1995-1997. La période 1985-1987 a en revanche un profil d'évolution des cours quasi horizontal sur le graphique 13-2 (en haut).
3. Les trois années suivant les dates retenues, le parallélisme entre les évolutions de 1997 et 1929 n'est plus observé. Les évolutions sont plutôt antagonistes (graphique 13-2, en bas).
4. Une sorte de réplique du krach d'octobre 1987.

Graphique 20-1 : DJIA





Exercice 20-7 : Super-bowl, corrigé

Jusqu'en 1970, les deux regroupements d'équipes se dénomment AFL et NFL (American ou National, Football League); puis AFC et NFC (Conference).

Certaines équipes (*Baltimore Colts*, *Pittsburg Steelers*) ont changé de groupe depuis 1967. Quel classement retenir ? Celui de 1967 ou bien le classement en cours ?

D'autres équipes (6, *Baltimore Ravens*, *Buccaneers Tampa Bay*, *Carolina Panthers* & *Seattle Seahawk*) ont été ajoutées après 1970; si on retient le classement de 1967, elles n'existent pas.

Quelle référence indicelle retenir? DJIA ou S&P500 les progressions de février à la fin de l'année ne sont pas exactement les mêmes et de petites variantes seront observées.

De 1967 à 1997 (tableau 1), l'indicateur « se trompe » 8 fois sur 31. Entre 1998 et 2011, l'indicateur « se trompe » 10 fois sur 14. Le hasard a été généreux pour l'indicateur jusqu'en 1997, ce qui a amené certains commentateurs à établir une liaison de cause à effet entre deux phénomènes sans rapport.

Tableau 1 : SuperBowl de 1967 à 2011

Année	Gagnant	ConfG	TX Rent	Passif	SB1	SB1 Indice
1967	Green Bay Packers	NFC	8.27%	1.09	8.27%	1.09
1968	Green Bay Packers	NFC	5.56%	1.15	5.56%	1.15
1969	New York Jets	AFC	-14.27%	1.00	14.27%	1.32
1970	Kansas City Chiefs	AFC	5.94%	1.06	-5.94%	1.25
1971	Baltimore Colts	AFC	4.88%	1.11	-4.88%	1.19
1972	Dallas Cow-Boys	NFC	11.29%	1.24	11.29%	1.33
1973	Miami Dolphins	AFC	-18.68%	1.03	18.68%	1.60
1974	Miami Dolphins	AFC	-31.00%	0.76	31.00%	2.19
1975	Pittsburgh Steelers	AFC	26.47%	0.98	-26.47%	1.68
1976	Pittsburgh Steelers	AFC	6.26%	1.05	-6.26%	1.58
1977	Oakland Raiders	AFC	-17.17%	0.88	17.17%	1.87

Année	Gagnant	ConfG	TX Rent	Passif	SBI	SBI Indice
1978	Dallas Cow Boys	NFC	4.22%	0.92	4.22%	1.95
1979	Pittsburgh Steelers	AFC	0.03%	0.92	-0.03%	1.95
1980	Pittsburgh Steelers	AFC	9.94%	1.02	-9.94%	1.77
1981	Oakland Raiders	AFC	-7.05%	0.95	7.05%	1.90
1982	San Francisco 49 ers	NFC	21.66%	1.18	21.66%	2.35
1983	Washington Redskins	NFC	15.71%	1.38	15.71%	2.76
1984	Los Angeles Raiders	AFC	-2.68%	1.34	2.68%	2.83
1985	San Francisco 49 ers	NFC	20.39%	1.64	20.39%	3.47
1986	Chicago Bears	NFC	20.95%	2.03	20.95%	4.28
1987	New York Giants	NFC	-8.33%	1.87	-8.33%	3.94
1988	Washington Redskins	NFC	10.90%	2.08	10.90%	4.39
1989	San Francisco 49 ers	NFC	21.60%	2.58	21.60%	5.45
1990	San Francisco 49 ers	NFC	3.10%	2.66	3.10%	5.62
1991	New York Giants	NFC	17.71%	3.18	17.71%	6.71
1992	Washington Redskins	NFC	1.85%	3.24	1.85%	6.83
1993	Dallas Cow-Boys	NFC	11.92%	3.65	11.92%	7.70
1994	Dallas Cow-Boys	NFC	-3.68%	3.52	-3.68%	7.42
1995	San Francisco 49 ers	NFC	28.92%	4.70	28.92%	9.91
1996	Dallas Cow-Boys	NFC	19.52%	5.71	19.52%	12.05
1997	Green Bay packers /	NFC	17.17%	6.78	17.17%	14.30
1998	Denver Broncos	AFC	17.43%	8.07	-17.43%	12.01
1999	Denver Broncos	AFC	20.72%	9.93	-20.72%	9.77
2000	San Louis Rams	NFC	-1.41%	9.79	-1.41%	9.63
2001	Baltimore Ravens	AFC*	-6.57%	9.16	0.00%	9.63
2002	New England Patriots	AFC	-14.95%	7.89	14.95%	11.18
2003	Buccaneers Tampa Bay	NFC*	26.88%	10.33	0.00%	11.18
2004	New England Patriots	AFC	2.67%	10.61	-2.67%	10.89
2005	New England Patriots	AFC	0.02%	10.61	-0.02%	10.89
2006	Pittsburgh Steelers	AFC	14.34%	12.24	-14.34%	9.43
2007	Indianapolis Colts	AFC	4.65%	12.83	-4.65%	9.00
2008	New York Giants	NFC	-36.44%	8.91	-36.44%	6.25
2009	Pittsburg Steelers	AFC	27.30%	11.70	-27.30%	4.76
2010	New Orleans Saints	NFC	15.57%	13.68	15.57%	5.56
2011	Green Bay Packers	NFC	-1.17%	13.52	-1.17%	5.50
2012						
2013						
2014						

Note : la rentabilité est celle du DJIA du lundi suivant la finale jusque la fin de l'année civile. Les * repèrent des équipes pour lesquelles la ligue d'appartenance est problématique (changement en cours de période).

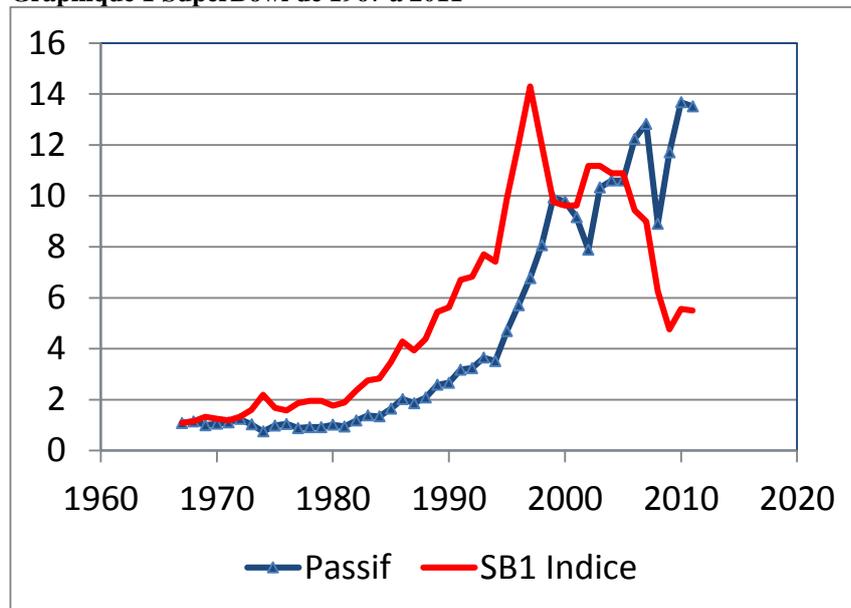
Les contre-performances de l'indicateur correspondent à une baisse le reste de l'année alors que l'équipe qui remporte le SuperBowl appartient à la NFC. Le cas le plus remarquable est celui de l'année 2008 (mais aussi 1987, 1994, 2000

notamment). Un deuxième cas de figure correspond à une hausse de l'indice le reste de l'année alors que l'équipe gagnante appartient à l'AFC. Le cas le plus remarquable est celui de l'année 2009, mais aussi 1975, 1999, 1998, 2006, 1980 etc.

Le tableau 1 donne les valeurs de deux indices. Le premier réplique une stratégie passive sur l'indice DJIA : un investissement de 1 en 1967 vaut 13,52 fin 2011 (avec le DJIA on ignore les dividendes). Le deuxième indice réplique la stratégie « SuperBowl » : la valeur finale de l'indice est de 5,5. La lecture des résultats du tableau suscite les commentaires suivants :

1. Il est amusant de voir l'indice « SuperBowl » dominer la stratégie de placement passive dans l'indice jusqu'au tournant des années 2000
2. Les contre-performances des années 2008 et surtout 2009 (la stratégie SuperBowl est en vente à découvert) renvoient l'indice « SuperBowl » loin derrière la stratégie passive.
3. L'indice DJIA ne prend pas en compte les dividendes, ce qui pénalise la stratégie passive puisque par définition elle les encaisse tous, ce qui n'est pas le cas de la stratégie « SuperBowl » en particulier les années de vente à découvert.
4. La non prise en compte des coûts de transaction pénalise la stratégie passive. La stratégie « SuperBowl » implique par définition davantage de transactions, donc de frais, surtout si des positions de vente à découvert sont implémentées.

Graphique 1 SuperBowl de 1967 à 2011



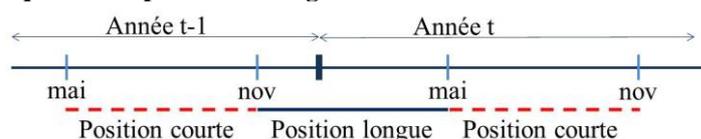
Le classeur excel SB2011Data.xls comporte deux feuilles. La feuille SuperBowl donne les résultats des finales depuis 1967 et la feuille DJIA les valeurs quotidiennes de l'indice depuis 1967. A partir de ces données, vous pouvez

retrouver les résultats ici présentés (sans programmation VBA). Le classeur avec le corrigé se dénomme SB2011Corrigé.xls (les deux fichiers sont à l'adresse www.dauphinefinance.com/106/Fichiers_xls_106/, le deuxième fichier s'ouvre avec un mot de passe donné en cours).

Exercice 20-8 : *Sell in may and go away*

Ne pas être en position longue entre début mai et début novembre, voire être en position courte (cf graphique 1)

Graphique 1 : tempo de la stratégie



En 2011 on échappe à la baisse d'août

En 2008 à Lehman Brothers (gain de +29% au lieu d'une perte de 37,6%)

Tableau 1 : Stratégie « Sell in may and go away » en 2008

Année	Indice DJIA (début)		Taux de rentabilité		Sell in may...	Passive
	Mai	Novembre	Nov t - 1 à Mai t	Mai t à Nov t		
2007	13136.14	13567.87				
2008	13010.00	9319.83	-4.20%	-33.36%	29.16%	-37.56%

Entre début mai 2008 et début novembre 2008, le taux de rentabilité de l'indice DJIA est $\ln\left(\frac{9319,83}{13010}\right) = -0,3336$. Y échapper, et encore mieux avoir une position de vente à découvert apparaît (a posteriori) très astucieux. De début novembre 2007 jusqu'à début mai 2008, la stratégie implique une position longue (-4,20%). La stratégie « Sell in may ... » sur l'année 2008 (en fait de début novembre 2007 à début novembre 2008) procure un taux de rentabilité de +29,16% (soit -4,2% + 33,36%, dans l'hypothèse d'une vente à découvert de mai à novembre). La stratégie passive est appliquée pour l'année 2008 de novembre 2007 à novembre 2008, soit $\ln\left(\frac{9319,83}{13567,87}\right) = \ln\left(\frac{13010}{13567,87}\right) + \ln\left(\frac{9319,83}{13010}\right) = -0,3756$. Les taux de rentabilité logarithmiques sont additifs ce qui est ici très pratique.

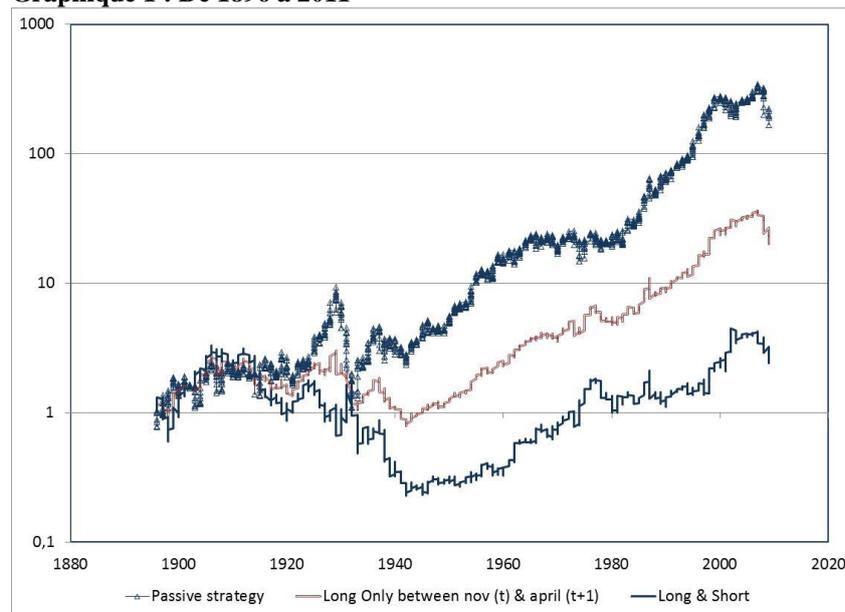
Les meilleures années (du *sell in may*) sont, par taux de rentabilité décroissant : 1930 (gain de 45,64% au lieu d'une perte de 32,93% !), 1907, 1903, 2008, 1931, 1917, 1937, 1974, 1929. Les contre-exemples sont également nombreux : 1938, 1904, 1925, 1935, 1919, 1897, 2009, 1936, 1942. Mais si, chaque année cette stratégie de sortie du marché de mai à début novembre est appliquée de manière systématique, quels sont les résultats obtenus ?

Le fichier « DJIA Mois data.xls » à l'adresse www.dauphinefinance.com/106/fichiers xls 106 comporte les données mensuelles du DJIA depuis début juin 1896. Une simulation de la stratégie sur longue période est ainsi possible.

Le premier objectif est de constituer divers indices représentatifs des stratégies appliquant l'évitement entre mai et novembre, deux versions sont envisageables : une simple sortie du marché des actions ou bien une vente à découvert. Ces indices (Long Only et Long & Short) seront comparés à une stratégie de référence passive (de type buy and hold) qui consiste à resté investi en actions sans discontinuité.

Les taux de rentabilité sont calculés en continu (rentabilité logarithmique). Ainsi pour la stratégie passive (buy-and-hold) un indice peut également être reconstitué avec un rebasage à un en début de période. Entre les valeurs d'indice et les taux de rentabilité, la relation suivante est vérifiée : $\frac{IND_t}{IND_1} = e^{\sum_{x=1}^t R_x}$ (car $R_x = \ln\left(\frac{IND_x}{IND_{x-1}}\right)$).

Graphique 1 : De 1896 à 2011



Le graphique 1 montre, sur longue période, la supériorité de la stratégie passive. La valeur finale de l'indice est de 214,81 contre 22,96 pour la stratégie Long Only (entre novembre t et début mai t+1) et 2,4549 pour la stratégie Long & Short.

La prise en compte des coûts de transaction creuserait encore un peu plus les écarts, de même la prise en compte des dividendes. Ces résultats peuvent être assez rapidement obtenus avec excel et sans programmation, y compris pour les données antérieures à l'année 1900. Le fichier « DJIA Mois.xls » à l'adresse www.dauphinefinance.com/106/fichiers xls 106 détaille un corrigé (l'ouverture du fichier nécessite un mot de passe qui sera donné en cours).

Cet exercice peut être prolongé en appliquant les stratégies sur des séries différentes de cours et avec prise en compte d'un réinvestissement des dividendes. Par exemple sur l'indice CAC40 avec réinvestissement des dividendes depuis fin 1987 ou bien sur les indices avec réinvestissement des dividendes publiés par Ibbotson depuis fin 1925 aux Etats-Unis. Les résultats que vous devez obtenir figurent au tableau 2. On peut toujours appliquer la même approche pour obtenir ces résultats, il est en fait ici plus efficace de programmer un peu, ce qui permet de tester rapidement différentes variantes d'une même stratégie. Les résultats du tableau ont été obtenus en VBA sous Access (access est adapté à la manipulation d'ensembles de données).

Tableau 2 : Sell in may and go away

Indice	variantes	Stratégie		
		Long Only	Long Short	Passive
Cac40 (depuis 1987)	Sans Div	8.10%	10.84%	5.37%
	Avec Div	8.45%	9.39%	7.52%
DJIA	1896 à 2010	3.67%	2.67%	4.67%
SBBI Big	1925 à 2010	6.12%	2.82%	9.42%
SBBI Small	1925 à 2010	9.89%	8.41%	11.37%

Le tableau 2 montre la nécessité de tester les stratégies (surtout annuelles comme ici) sur des séries longues. Avec l'indice CAC40 on dispose de moins de 25 années de données, ce qui est constitué un échantillon de petite taille si les distributions de probabilité des taux de rentabilités ne suivent pas une loi normale. Les résultats obtenus sur ces séries doivent être interprétés avec la plus grande prudence.

Remarquez l'impact de la prise en compte des dividendes. Avec prise en compte des dividendes les rentabilités des différentes stratégies augmentent, mais l'augmentation est nettement plus sensible pour les stratégies passives qui par définition encaissent tous les dividendes (comparez les lignes avec et sans dividendes à partir du CAC40).

Depuis 1925 aux Etats-Unis, les séries d'Ibbotson confirment les résultats obtenus avec le DJIA depuis 1896.

Chapitre 21

Les coûts de transaction et la gestion de portefeuille

1. Énoncé des exercices

Exercice 21-1 : L'impôt de bourse existe-t-il à Paris ?

Précisez le dispositif supprimé en ... 2008.

Un projet d'impôt de bourse (taxe sur les transactions financières) est discuté début 2012 et entre en vigueur dans l'été. Un projet européen de « taxe sur les transactions financières » est en gestation début 2014.

Présentez les caractéristiques des différents dispositifs et détaillez les différences avec l'ancien dispositif supprimé en 2008.

Exercice 21-2 : Risque d'implémentation

Démontrez que lorsque le nombre d'exécutions sur un intervalle donné augmente indéfiniment, l'écart type associée à la stratégie d'exécution tend vers $X \times \sigma \times \sqrt{\frac{t}{3}}$. La démonstration est dans Kissell et Glantz, 2003, p. 323-324.

Exercice 21-3 : Diversification, gestion active et coûts de transaction

À partir des données mensuelles d'Ibbotson de 1926 à 2004,

1. Constituez un portefeuille début 1926 avec 60% d'actions et 40% d'obligations d'État à long terme. Quelle est la valeur du portefeuille fin 2004 ? Comparez les volatilités de ce portefeuille et des portefeuilles investis uniquement en actions ou en obligations. Quelle est la proportion d'actions en portefeuille en fin de période ?
2. Vous décidez de réviser la composition du portefeuille périodiquement de manière à maintenir la proportion de chacun des deux types d'actifs. Quelles sont les valeurs finales, les taux de rentabilité, les volatilités des portefeuilles

sous l'hypothèse d'une révision tous les mois, tous les ans, tous les 2 ans, tous les 5 ans ? Les calculs seront faits avec des coûts de transaction de 0,5 %, 1 % et 1,5 %.

3. La composition du portefeuille n'est révisée que si le poids des actions excède 75 % ou tombe en-dessous de 45 %. Avec les hypothèses de coûts de la question précédente, quelles sont les valeurs finales, les taux de rentabilité, les volatilités des portefeuilles ? Combien de révisions seront-elles entreprises ?

Exercice 21-4 : Les frais et commissions peuvent-ils être négatifs ?

Exercice 21-5 : Frontière efficiente et coûts de transaction

Pour trois classes d'actifs, on vous donne les caractéristiques du tableau suivant :

	Espérance de rentabilité brute	Volatilité	Coûts de transaction
Actions fortement capitalisées	10%	20%	1,1%
Actions de petites capitalisation	13%	33%	2,2%
Obligations d'État	4%	5%	0,3%

1. Évaluez la frontière efficiente à partir de ces trois classes d'actifs sans coûts de transaction.
2. Évaluez la frontière efficiente à partir de ces trois classes d'actifs avec coûts de transaction.

Exercice 21-6 : Capture de volatilité réglementaire

Qu'entend-on par volatilité réglementaire (induite par la réglementation). Suggérez quelques exemples.

En Europe l'échelon de cotation (pas de cotation ou tick) est déterminé par chaque plateforme de négociation et ne fait pas l'objet de réglementation centralisée ni au niveau d'un pays (AMF) ni à celui de l'union (ESMA). Détaillez les conséquences de cette configuration en particulier sur les dynamiques de fourchettes de prix.

Si l'échelon est contraint par la réglementation, les quantités en carnet correspondent-elles à de la profondeur ? sont-elles un indicateur de liquidité du marché ?

Sur un tel marché une stratégie simultanée d'achat et de vente de titres obéit à quelles fins ?

2. Corrigés de certains exercices

Exercice 21-1 : L'impôt de bourse existe-t-il à Paris ?

L'ancien dispositif, supprimé en 2008 : En mars 2005, un impôt forfaitaire de 0,3 % est prélevé à l'achat et à la vente d'actions lorsque la transaction est inférieure ou égale à 153 000 € et de 0,15 % au delà avec un montant plafonné à 610 €, une perception minimum de 1 € et un abattement de 23 € ! Des exonérations sont prévues, suivant la taille de la transaction, le type de titre, le marché de cotation, la capitalisation de la valeur cotée et des motifs historiques. L'impôt ne s'applique qu'au delà de 7 668€ de transaction. Toutefois, le fractionnement d'un ordre pour échapper à l'impôt est interdit. Sont exonérés les bons du Trésor, les obligations cotées sur la bourse de Paris, les titres participatifs, les parts émises par les fonds communs de créances, les SICAV et FCP. Sont exonérées les transactions sur les valeurs anciennement cotées en province (alors même que les bourses de province n'existent plus !). Étaient exonérées les transactions sur titres du Nouveau Marché, du marché libre. Depuis la suppression de ces marchés en 2005, un nouveau dispositif exonère les transactions sur les titres de moins de 150 millions d'€ de capitalisation. Un impôt de bourse est perçu ailleurs. Il est ainsi de 0,5 % à l'achat en Grande-Bretagne et de 0,21 % à la vente au Japon.

L'impôt de bourse est totalement supprimé en ... 2008.

Taxe sur les transactions financières, votée sous la présidence Sarkozy appliquée en été 2012 uniquement sur les actions avec un taux qui passe de 0,1 à 0,2% (présidence Hollande).

Taxe sur les transactions financières au niveau européen (en gestation en 2014 : quel taux ? quel périmètre ?). L'exclusion des dérivés du périmètre et du marché des changes est paradoxal. A l'origine, la discussion de J. Tobin portant uniquement sur le marché des changes.

Exercice 21-4 : Frais de transaction négatifs

Différents intermédiaires américains payent les investisseurs qui leurs confient leurs ordres (*payment for order flow*), ce qui correspond bien à des frais de transaction négatifs. L'intermédiaire rétrocède au donneur d'ordre une partie du gain qu'il espère réaliser sur la transaction. Cette pratique est ancienne et règlementairement possible sur les marchés américains. L'intermédiaire n'accepte pas tout type d'ordres à ces conditions, mais tente d'isoler ceux émis par des investisseurs qui a priori ne détiennent pas d'informations : seuls les ordres à exécution immédiate (de type 'au marché') et pour une quantité maximale donnée sont ainsi admis. Le rabais, qui a été jusqu'à 3 *cents* par action il y a quelques années, a eu tendance à se réduire. Au 4^e trimestre 2001, *Knight Group* a rétrocédé ainsi à *E*Trade* au plus 1,5 *cent* par action échangée sur le NASDAQ, ou 2,25 *cents* sur le NYSE. La publication de ces données par chaque intermédiaire est obligatoire et disponible sur le web (suivant la règle 11Act-6, dite 'dash 6', cf. Parlour et Rajan, 2002). Typiquement l'arrangement intervient entre un *dealer* (ici Knight) et un *broker* (ici E*Trade).

La facturation inversée se développe en Europe depuis 2007.

Chapitre 22

La gestion passive

1. Énoncé des exercices

Exercice 22-1 : Erreur de poursuite (*tracking error*) examen de mai 2011

Le fonds d'investissement SICOR pratique une rotation sectorielle, l'indice de référence est le S&P500. La gestion est conçue en référence à cet indice et en mettant en portefeuille exclusivement des ETF (fonds indiciels cotés) sectoriels déclinés à partir des indices de S&P (cf. Tableau 1)

Tableau 1 : Les secteurs de S&P (gamme Select Sector SPDRs, cf. www.sectorspdr.com)

<i>Consumer Discretionary</i>	<i>Industries such as automobiles and components, consumer durables, apparel, hotels, restaurants, leisure, media, and retailing</i>
<i>Consumer Staples</i>	<i>companies involved in the development and production of consumer products that cover food and drug retailing, beverages, food products, tobacco, household products, and personal products.</i>
<i>Energy</i>	<i>Energy companies in this Index primarily develop and produce crude oil and natural gas</i>
<i>Financial</i>	<i>from investment management to commercial and investment banking.</i>
<i>Health Care</i>	<i>Companies include health care equipment and supplies, health care providers and services, biotechnology, and pharmaceuticals industries.</i>
<i>Industrial</i>	<i>Industries include aerospace and defense, building products, construction and engineering, electrical equipment, conglomerates, machinery, commercial services and supplies, air freight and logistics, airlines,</i>

	<i>marine, road and rail, and transportation infrastructure companies.</i>
<i>Materials</i>	<i>Companies involved in such industries as chemicals, construction materials, containers and packaging, metals and mining, and paper and forest products.</i>
<i>Technology</i>	<i>internet software and service companies, IT consulting services, semiconductor equipment and products, computers and peripherals, diversified telecommunication services, and wireless telecommunication services</i>
<i>Utilities</i>	<i>companies that produce, generate, transmit or distribute electricity or natural gas.</i>

Le gérant du fonds SICOR, affiche une volatilité de 20%, une erreur de poursuite de 10% avec le S&P500. Sur la même période vous estimez la volatilité du S&P 500 à 25%. Sur la dernière période, l'indice S&P500 a progressé de 8% et le fonds SICOR de 9% net.

1. Définissez l'erreur de poursuite
2. Quelle est la valeur du coefficient de corrélation entre le fonds SICOR et le S&P500 ?
3. Quel est le coefficient bêta du fonds relativement à l'indice S&P500 ?
4. Quelle est la valeur du risque diversifiable ?
5. Quelle est la valeur du ratio d'information du fonds SICOR ?
6. Qu'entend-t-on par rotation sectorielle ?
7. Quels sont les secteurs à privilégier en période de reprise économique ?
8. Quel est le secteur qui a enregistré les meilleures rentabilités sur un an ?
Et les pires ?

Exercice 22-2 : Buy and hold en 2008

Début 2008, vous répartissez votre portefeuille sur deux ETF de Lyxor Asset Management, à raison de 60 % sur l'ETF EuroMTS 10/15 (obligation d'Etat) et le reste sur l'ETF Cac40. Les données correspondantes peuvent être téléchargées sur le site <http://www.lyxoretf.fr/>.

1. Représentez l'évolution de la valeur du portefeuille en fonction de la valeur de l'indice Cac40 sur l'année 2008.
2. Quelle est la valeur minimale de votre portefeuille quoiqu'il arrive?
3. Quelle est la répartition en fin d'année du portefeuille entre les deux classes d'actifs?

Idem début 2009 avec un horizon de un an

Idem début 2011 avec un horizon de un an

Exercice 22-3 : Rebalancing en zone euro

De janvier 2001 à septembre 2010 en données quotidiennes, le fichier http://www.dauphinefinance.com/106/Fichiers_XLS_106/StoxxCM.csv, contient les données suivantes : en première ligne le nom des champs, les valeurs de deux fonds avec l'indice STOXX avec dividendes réinvestis (SXXT) et un FCP trésorerie géré par BNP Paribas (BNP).

Questions

1. Composez un portefeuille 70/30 début 2001 (gestion dynamique avec réallocation)
2. Composez un portefeuille 30/70 début 2001 (gestion dynamique avec réallocation)
3. Représentez graphiquement l'évolution de la valeur des deux stratégies ainsi que celles passives et totalement investies soit en monétaire, soit en actions de la zone euro
4. Quelle est la hiérarchie de valeur des 4 portefeuilles?
5. En supposant un coût de transaction de 0,5% sur les actions et 0,1% sur le monétaire, quelle est la hiérarchie de valeur des 4 portefeuilles?
6. En supposant un décalage d'une séance entre le signal de réallocation et l'exécution de l'ordre sur le marché
7. En supposant une réallocation dès que la part des actions s'écarte de 5% de l'objectif? Calculez l'erreur de poursuite.

Exercice 22-4 : Buy and hold strict

Vous répliquez l'indice S&P500 en 1957. Mais à la différence du propriétaire de l'indice, vous ne modifiez pas sa composition.

1. la composition de portefeuille est-elle très différente fin 2003?
2. fin 2003, la valeur de votre portefeuille est-elle supérieure, inférieure ou la même que celle du S&P500?
3. fin 2003, même question par rapport à un portefeuille répliquant sur la période le S&P500?

Exercice 22-5 : Buy and hold depuis 1950

En 1950 un portefeuille d'actions (big cap) est constitué à partir de valeurs cotées aux Etats-Unis. Ce portefeuille comporte alors 50% d'actions et 50% d'obligations d'Etat. 50 ans plus tard, quelle est la composition du portefeuille si on réinvestit les revenus dans le même support ?

Exercice 22-6 : Asset allocation puzzle

Une clé de répartition entre classes d'actifs en fonction de l'attitude au risque est proposée, par exemple, en banque privée. Suivant l'attitude au risque du client le banquier propose des répartitions par classes d'actifs différentes.

Le conseil est relayé par des fonds d'investissement classiques qui proposent des produits "adaptés au profil des investisseurs" (Fidelity Conservative avec 20 % actions ; *Moderate* avec 40 % et *Agressive* avec 65 %, dans Canner, Mankiw et Weil, 1997). Ou bien www.fidelityvie.fr propose de déterminer son profil d'épargnant, qui aboutit à un classement prudent/équilibré ou dynamique (cf. <https://guidance.fidelity.com/building-wealth/how-can-i-diversify-my-portfolio>).

Dans le même ordre d'idée, souvent l'idée d'une clé de répartition fonction de l'âge de l'épargnant est avancée. Le conseil (à la louche) suivant lequel la part en actions doit être égale à $100 - \text{l'âge}$ de l'investisseur (pour certains c'est toutefois $120 - \text{âge}$ (cf. <http://www.nodebtplan.net/2008/08/12/the-120-minus-your-age-stock-allocation-formula>)). La capacité d'épargne et le profil de

consommation (effet cliquet des consommations) pour un individu donné sont probablement liés à son âge.

C'est également un argument régulièrement avancé pour souligner la spécificité des fonds de pension. La clé de répartition dépendrait de l'âge de l'investisseur. La création de fonds spécifiques ciblant une cohorte (*target fund* *life cycle fund*, ou en français sous le nom de fonds à horizon, de fonds à gestion pilotée) illustre également le développement (ou le maintien) de ce type de pratique de gestion.

Questions

1. Qu'en pensez-vous?
2. Suivant une approche de type Markowitz, comment analyser ces questions?
3. Canner, Mankiw et Weil (1997) comparant les pratiques et la théorie standard énoncent le '*asset allocation puzzle*'. Exposez cette énigme.

Exercice 22-7 : CAC40, la gestion indicielle et les frictions

La composition de l'indice Cac40 le 23 janvier 2009 figure dans un fichier à l'adresse suivante [http:// www.dauphinefinance.com/118/Data_118/Cac40_20090123 C.txt](http://www.dauphinefinance.com/118/Data_118/Cac40_20090123_C.txt).

1. Mesurez l'importance de ce phénomène de rompu?
2. Comment l'impact des rompus évolue-t-il lorsque le montant investi augmente? (pour un montant total investi entre 10 000€ et 1 200 000€)
3. Évaluez la concentration de l'indice. Le 23 janvier 2009, combien de titres suffisent à représenter 90% de la capitalisation flottante de l'indice ?
4. Quel est le poids des 10 titres plus importants ?
5. Même question le 14 janvier 2011? (Cac4020110114.xls)

Exercice 22-8 : Stansky's monster

Le fonds *Fidelity* de Magellan a été géré de nombreuses années par Peter Lynch avec des performances annuelles répétées qui ont marqué les esprits (voir par exemple plusieurs interviews dans Tanous, 1997). Un investissement de 10 000 \$ en 1977 valait 280 000 \$ 13 ans plus tard.

P. Lynch se retire en 1990 après 13 ans de gestion. Lui succèdent M. J. Smith (1990-1991), puis J. N. Vinik (1992-1995) et R.E. Stansky. Ce dernier de juin 1996 à novembre 2005. Lisez Petajisto (2005) et Miller (2007) pour vous aider à répondre aux questions suivantes :

1. L'objectif de gestion affiché par Magellan à ses clients était-il celui d'un fonds indiciel ?
2. Les frais de gestion pratiqués, permettent-ils d'assimiler Fidelity à un fonds indiciel ?
3. Comment évolue au cours du temps le R^2 entre les variations de valeurs de Magellan et du S&P500 ? Quelle interprétation en donner ?
4. Définissez ce que l'on entend par '*closet indexer*'
5. Définissez une '*tenbagger stock*'
6. Définissez la '*active share*'

Exercice 22-9 : Cosinus' law & tracking error

Représentez les triangles des risques avec le risque systématique, le risque spécifique et l'erreur de poursuite.

Exercice 22-10 : Gestion indicielle et efficience informationnelle

J.C. Bogle fonde Vanguard en 1975. Le 18 octobre 2013 dans Wall Street Journal, Bogle écrit : « *I didn't even learn of Eugene Fama's "efficient market hypothesis" (EMH) until a decade after my creation of the 500 Index Fund. Rather, I was inspired by another Nobel laureate, economist Paul Samuelson, who in his 1974 essay in the Journal of Portfolio Management demanded "brute evidence" that active money managers could beat the market index. Such evidence has yet to be produced.*

De quand date le premier fond indiciel?

2. Corrigés de certains exercices**Exercice 22-3 : Rebalancing en zone euro**

Il s'agit d'appliquer une stratégie "constant mix" avec clé de répartition constante entre deux classes d'actifs ce qui suppose une reallocation périodique des fonds investis. On choisit ici de présenter un corrigé avec Mathematica.

Première étape, mémorisation des données :

```
In[8]:= IND =
  Import[
    "http://www.dauphinefinance.com/106/Fichiers%20XLS%20106/StoxxCM
    .csv", "csv"]; INDn = IND[[1]];
  IND = Delete[IND, {{1}, {2}}]; IND = Sort[IND, #1[[8]] < #2[[8]] &];
  (* Mémorisation via téléchargement et tri *)
```

Les données sont stockées dans une matrice de nom IND (2525 lignes et 8 colonnes). Elles sont triées chronologiquement (champ n° 8 intitulé n°). Les entêtes de colonnes sont Demar (la date), SSXE, SSXT, Eonia, BNP, Stoxxr, RfR et n°.

Le programme suivant (RBsansF) réalise le travail demandé. Il est paramétrable. Deb repère le début de la période d'observation, P1 et P3 les proportions investies respectivement en actions et en actif sans risque et LIBel le libellé qui figurera sur le graphique produit par ce programme.

Port3 est un vecteur, pour chaque séance il contient le taux de rentabilité d'un portefeuille comportant P1% d'actions et (1-P1%) de placement monétaire. P3 est un indice calculé à partir des taux de rentabilité du portefeuille Port3.

```

ln[9]= RBSansF[INDL_, Deb_, P1_, P2_, LIBel_] :=
Module[{NB = Length[INDL], IND, INDD, StoxxR, RfR, NUM, Act,
  Port3, P3, Port7, P7, Stoxx, BNP, GGraph, NbObs, TAB1},
  IND = INDL[[Deb ;; NB]]; INDD = Transpose[IND][[1]];
  StoxxR = Transpose[IND][[6]]; RfR = Transpose[IND][[7]];
  NUM = Transpose[IND][[8]]; Act = P1;
  Port3 = Act StoxxR + (1 - Act) RfR;
  P3 = Delete[FoldList[Times, 1, (1 + Port3)], 1]; Act = P2;
  Port7 = Act StoxxR + (1 - Act) RfR;
  P7 = Delete[FoldList[Times, 1, (1 + Port7)], 1];
  Stoxx = Delete[FoldList[Times, 1, (1 + StoxxR)], 1];
  BNP = Delete[FoldList[Times, 1, (1 + RfR)], 1];
  Off[DateList::ambig];
  GGraph = DateListPlot[{Transpose[{INDD, Stoxx}],
    Transpose[{INDD, P7}], Transpose[{INDD, P3}],
    Transpose[{INDD, BNP}]},
    PlotStyle -> {{Black, Thick}, Blue, Blue, {Green, Thick}},
    Frame -> True, AspectRatio -> 0.4, Joined -> True,
    InterpolationOrder -> 0,
    BaseStyle -> {FontFamily -> Times, FontSize -> 12}];
  NbObs = Length[IND];
  TAB1 =
  Grid[
    Transpose[{LIBel, {"", Stoxx[[NbObs]], BNP[[NbObs]],
      P3[[NbObs]], P7[[NbObs]]}], Frame -> All,
    BaseStyle -> {FontFamily -> Times, FontSize -> 12}]; {GGraph, TAB1}

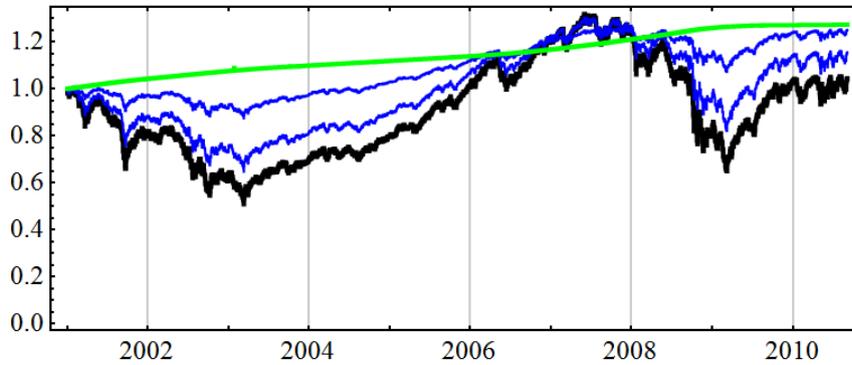
```

Une exécution du programme sur toute la période avec 70/30 donne :

```

ln[10]= Lib = {"Janv 2001 à Sept 2010", "Actions 100%", "Monétaire 100%",
  "Actions 30/ Monétaire70", "Actions 70/ Monétaire 30"};
RBSansF[IND, 1, 0.3, 0.7, Lib]
(* toute période *)

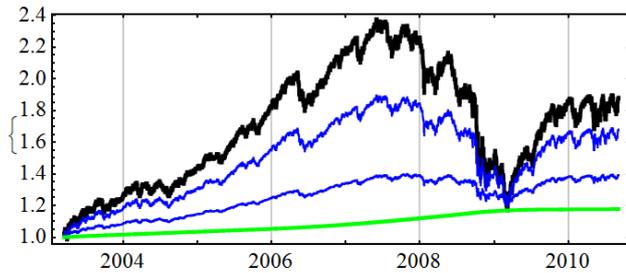
```



Janv 2001 à Sept 2010	
Actions 100%	1.04461
Monétaire 100%	1.27371
Actions 30/ Monétaire70	1.25053
Actions 70/ Monétaire 30	1.15516

Les résultats sont très dépendants de la période choisie. Par exemple pour une période d'investissement débutant en mars 2003 :

```
Lib = {"17 mars 2003 à Sept 2010", "Actions 100%",
      "Monétaire 100%", "Actions 30/ Monétaire70",
      "Actions 70/ Monétaire 30"}; RBSansF[IND, 575, 0.3, 0.7, Lib]
(* mars 2003 à sept 2010 *)
```



17 mars 2003 à Sept 2010	
Actions 100%	1.88093
Monétaire 100%	1.17759
Actions 30/ Monétaire70	1.3925
Actions 70/ Monétaire 30	1.67935

Exercice 22-4 : Buy and hold strict

L'indice S&P 500 est une référence indicielle incontournable aux Etats-Unis. Siegel et Schwartz (2006) évaluent la valeur d'un portefeuille constitué à partir de 500 valeur composant cet indice à sa création en mars 1957 (il remplace un indice qui ne comportait que 90 titres, se dénommait le Composite Index et existait depuis 1923). En 1957 les 500 valeurs représentaient 85% de la capitalisation de toutes les actions listées sur le NYSE. En 1976 un changement important dans la composition de l'indice intervient avec l'introduction de 40 financières, une réduction du poids des industrielles et des 'utilities'. En moyenne chaque année une vingtaine d'entreprise entrent dans l'indice (60 nouvelles en 1976). Fin 2003, 125 entreprises de l'échantillon d'origine étaient toujours cotées en bourse (dont 94 toujours dans l'indice). Mais d'autres ont fait faillite ou ont été nationalisées (30); d'autres ont été démembrées (113 spin offs), d'autres ont fusionnées (92) et d'autres enfin ont fait le choix de quitter la cote (74, private). En décembre 2003, 341 entreprises de l'échantillon d'origine existent toujours. Siegel et Schwartz (2006) montrent que le ratio de Sharpe des entreprises issues de l'échantillon d'origine est supérieur à celui du S&P500 sur la période 1957-2003. Ils avancent différentes hypothèses pour expliquer la moins bonne performance des entreprises introduites postérieurement à 1957 dont le choix des titres à forte capitalisation boursière (on mettra des technologiques en 1999).

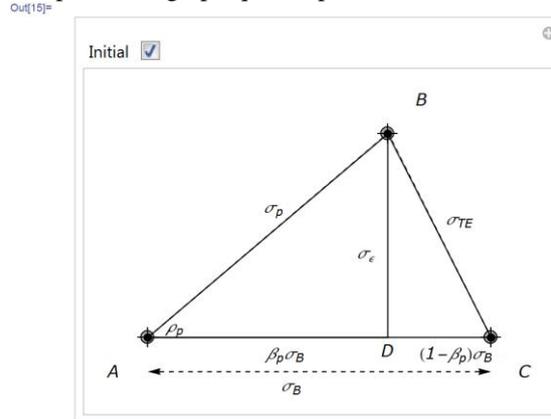
Exercice 22-5 : Buy and hold depuis 1950

Plaxco et Arnott (2002) à partir des données d'Ibbotson posent cette question.

La réponse (fin 1999) est 98% en actions et 2% en obligations. Au bout de 50 ans ce portefeuille a une performance proche de celle d'un portefeuille exclusivement en actions (en rentabilité mais aussi en risque). À partir des données d'Ibbotson, quelle est la répartition du même portefeuille fin 2011 ?

Exercice 22-9 : Cosinus' law & tracking error

On se propose ici de reproduire les graphiques du cours. Le dessin est ici présenté avec Mathematica. En s'inspirant de C. Boucher, *The law of cosines*, Wolfram demonstration project (pour l'aspect programmation). Le programme suivant produit le graphique ci après



```

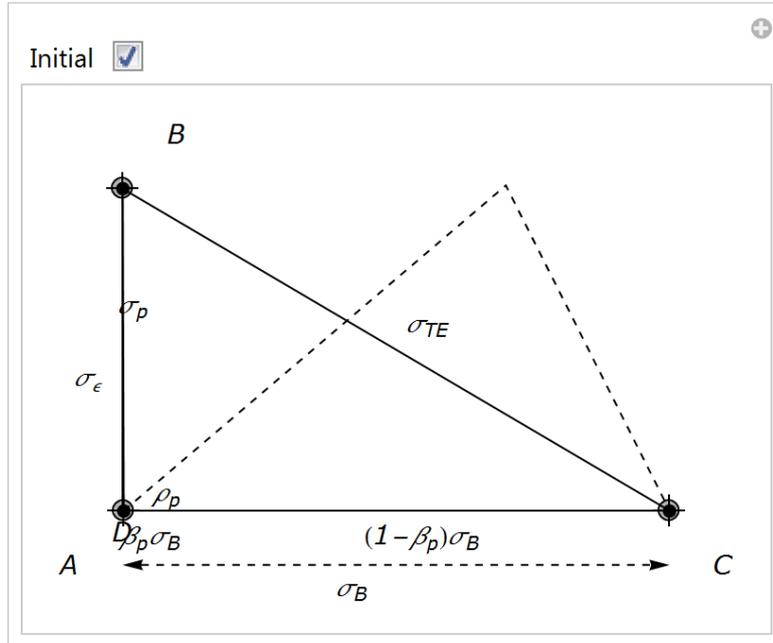
In[15]:= POINT[Etiq, a_, Marge_] :=
Module[{}, Text[Style[Etiq, "Label", 14, Italic], a + Marge]];
Manipulate[
Graphics[{{PointSize[.02], Point[a]},
{PointSize[.02], Point[b]}, {PointSize[.02], Point[c]},
Line[{a, b, c, a}], Line[{a, {b[[1]], -2}, b}],
If[Initial, {Dashed, Line[{{-2, -2}, {1.5, 1}, {3, -2}]}],
{Dashed, Arrowheads[{- .03, .03}],
Arrow[{{Min[a[[1]], b[[1]], a[[2]] - .5},
{Max[c[[1]], b[[1]], c[[2]] - .5}]}],
POINT["A", a, {- .5, - .5}], POINT["B", b, {.5, .5}],
POINT["C", c, {.5, - .5}], POINT["D", {b[[1]], -2}, {.0, - .2}],
POINT["sigma_TE", (b + c) / 2, {.3, .25}],
POINT["sigma_e", (b + {b[[1]], -2}) / 2, {- .3, - .25}],
POINT["beta_p sigma_B", (a + {b[[1]], -2}) / 2, {.25, - .25}],
POINT["(1 - beta_p) sigma_B", (c + {b[[1]], -2}) / 2, {.25, - .25}],
POINT["sigma_p", (a + b) / 2, {.1, .4}], POINT["rho_p", a, {.4, .15}],
POINT["sigma_B", (a + c) / 2, {- .4, - .7}]}],
{{a, {-2, -2}}, {-5, -5}, {5, 5}, Locator},
{{b, {1.5, 1}}, {-5, -5}, {5, 5}, Locator},
{{c, {3, -2}}, {-5, -5}, {5, 5}, Locator}, {Initial, {True, False}}]

```

Aux 3 sommets du triangle (points notés A, B et C), figurent des points de contrôle. On place le curseur de la souris sur le point B et on le déplace, on obtient (dynamiquement) par exemple le graphique suivant, où la totalité du

risque est spécifique. Dans ce cas l'erreur de poursuite et le risque spécifique sont confondus. En pointillés apparaît la configuration initiale du triangle.

Si la case « Initial » est décochée, la configuration initiale ne sera plus apparente lorsque l'on modifie le triangle. Tout ça dans le « petit programme » ci-dessus !



Exercice 22-10 : Gestion indicielle et efficience informationnelle

La référence citée dans l'énoncé est P. Samuelson, 1974, *Challenge to judgment*, Journal of Portfolio Management, Fall, p. 17-19. Cet article remet en cause la gestion active "most portfolio decision makers should go out of business –take up plumbing, teach Greek etc ». Sans mentionner Fama, Samuelson évoque l'hypothèse "efficient market", mais ses références sont plutôt sur la marche au hasard (random walk). Il évoque également l'expérience à Wells Fargo (p. 18). Dans le même numéro du JPM, d'autres articles sur le même thème dont un signé F. Black.

John A. McQuown est recruté en 1964 à San Francisco à la Wells Fargo's Management Sciences Division par R. Cook pour créer et animer un groupe de réflexion « Investment Decision Making » (équipe comportant jusqu'à 36 personnes et qui a vu passer notamment Black, Fisher, Fama, Jensen, Scholes, Sharpe, Markowitz, Lorie etc). Une des propositions fut la gestion passive (tout cet argent dépensé pour ce résultat ! se serait exclamé J. Vertin, directeur du « Financial Analysis Department »).

K. Shwayder de la famille propriétaire de Samsonite était au début des années 1970 assistant professor of accounting à Chicago (Business School). Il constate que le fonds de pension de Samsonite est placé dans différents mutual funds et

cherche à améliorer la décision d'allocation. Les professeurs de finance de Chicago le mettent en rapport avec Wells Fargo (et J. McQuown) et un premier fonds (en 1971, *Samsonite Luggage Fund*) de 6 millions de \$ « diversified portfolio that spanned the market » (le terme indexed fund n'était pas encore inventé) est créé et utilise certains outils d'analyse développés à Wells Fargo depuis 1964.

Selon P. L. Bernstein, 1992, « *Capital ideas, the improbable origins of modern Wall Street* », Free Press.

Chapitre 23

Production d'information : le futur et l'espérance

1. Énoncé des exercices

Exercice 23-1 : *Dividende et plus-value*

Dans Le Monde, le 12 octobre 2001, page 18, on peut lire : «Ceux qui achètent des actions lors de leur émission reçoivent une part des profits sous forme de dividendes. Est-il normal qu'ils espèrent être rémunérés deux fois, une fois sous forme de dividendes, et une autre fois sous la forme de plus values des titres achetés?». Que répondez-vous à I. Joshua, auteur de cet extrait ?

Exercice 23-2 : *Baisse de prime de risque et impact sur les cours*

On suppose que les dividendes futurs croissent à un taux constant g à partir d'une prochaine valeur égale à D_1 . La prime de risque est de 8%. Le taux sans risque de 5%. Le taux de croissance des dividendes de 5%.

1. À partir d'un niveau actuel donné, quel coefficient multiplicatif doit-on appliquer aux cours pour obtenir le niveau atteint sous l'hypothèse d'une baisse de 3% de la prime de risque?
2. Que devient le résultat précédent si le taux de croissance des dividendes est de 3% (avant et après le changement de prime de risque)?

Exercice 23-3 : *Taux de croissance*

Pour un indice, le dividende normalisé des actions est de 112, le taux de croissance à long terme de 8%, la valeur de l'indice de 4 000. Quelle est la rentabilité exigée par les actionnaires?

Exercice 23-4 : Vu dans une banque française

Les trois prochains dividendes sont connus et égaux à 12 FRF, 10 FRF et 15 FRF. Des années 4 à 14 le dividende croît à taux décroissant : d'une valeur initiale de 10%, le taux de croissance tombe à 5% l'année 14. Il reste à ce niveau de croissance jusqu'en année 50, horizon du modèle où la valeur de l'action est supposée nulle. Le cours observé aujourd'hui est de 100. Quel est le taux exigé par les actionnaires?

Exercice 23-5 : Rachat d'actions, BPA et cours

Le rachat de ses propres actions par une entreprise, entraîne-t-il mécaniquement une augmentation du bénéfice par action et du cours?

1. Que pensez-vous du commentaire lu dans *Libération* du 29 octobre 1997 : *"c'est la mode aux États-Unis : augmenter les dividendes par actions en réduisant la part du gâteau"*, article signé V.d.F., R.L., L.L., F.A., et C.P. en page 2 ;
2. Le rachat d'actions est-il suivi de hausses systématiques de cours ? Discutez et justifiez votre point de vue. Que pensez-vous du commentaire suivant : *"pratique (...) qui assure, de façon purement mécanique, une appréciation de leurs titres en quelques mois"* à la une de l'Agefi, 21 avril 1998.

Exercice 23-6 : Distribuer les années paires

Soit deux entreprises Plate et Dentdescie. Les deux entreprises sont identiques sur tous les aspects (dont les décisions d'investissement) et ne diffèrent qu'en matière de distribution des dividendes. L'entreprise Plate projette de distribuer un dividende de 10 par action et par an et l'entreprise Dentdescie un dividende de 21,5 les années paires et de zéro les années impaires. Si le taux de rentabilité exigé par les actionnaires est de 15 %, quelle est la différence de valeur entre les deux entreprises? Si le taux d'actualisation est de 20 %, quel doit être le dividende versé une année sur deux par l'entreprise Dentdescie, de manière à ce que les deux entreprises aient exactement la même valeur ?

Exercice 23-7 : Croissance nulle ou forte

Les actions émises par les entreprises dont le chiffre d'affaires augmente fortement (on pense aux BRICs par exemple) sont-elles forcément de bonnes affaires pour l'actionnaire ? Quel est le moteur de création de valeur pour l'actionnaire ?

Dans la première édition de Bodie et Merton (1998, p 102). Deux entreprises sont opposées. L'entreprise Nulle verse un dividende égal au bénéfice réalisé, réalise des investissements tout juste suffisants à assurer le remplacement du capital productif. Ses investissements nouveaux sont nuls. Le BPA initial est de 15, il est supposé constant sur un horizon infini. Le taux de rentabilité exigé par ses actionnaires est de 15 %. L'entreprise Forte a un BPA initial de 15. Mais elle réinvestit 60 % de ses bénéfices dans de nouveaux projets d'investissement (pour accroître donc les capacités de production). Le taux de rentabilité des investissements nouveaux est de 20 %, soit 5 % de mieux que ce que ses actionnaires exigent. Le dividende en début de période est donc de 40 % de 15

soit 6 par action. En début de période le montant investi est $Inv = 9$. Les dividendes ne seront pas constants mais croîtront à un taux constant g .

1. Déterminez les cours des deux entreprises aujourd'hui
2. Quels sont les PER des deux entreprises?
3. Expliquez les différences d'évaluation entre les deux et l'origine de ces différences

Exercice 23-8 : Création de valeur

L'exercice 23-7 est ici prolongé avec une analyse de sensibilité et une programmation via Mathematica. La séquence de programmation ci après introduit les différentes définitions. Les paramètres de l'analyse de sensibilité sont le bénéfice initial (BN1), le premier dividende (D1), le taux de rentabilité exigé par les actionnaires (TRI) et le taux de rentabilité des capitaux propres (ROE ou h).

TxD est le taux de distribution, TR le taux de rétention, g le taux de croissance du bénéfice, INVM1, le montant initial des investissements nouveaux (au-delà des investissements de remplacement), VAOI est la valeur actuelle des opportunités de croissance, FPA est la valeur par action des fonds propres. Ces notations sont celles de Hamon (2014), pages 512 à 515, cf. tableau 23-3.

Exercice 23-9 : Alcatel en septembre 1998

Description des données du tableau de l'énoncé. L'objectif est de retrouver les résultats présentés dans Hamon (2014, chapitre 23, p. 528-532).

Rappel des données. La prévision est faite fin août 1998 (Mois $g = 8$) à un instant où le cours est 955 (Cours=955). L'année 0 est 1998. Le prochain dividende est attendu en juin (Distmo=6), donc en 1999. L'année 1 est en 1999 etc ...

La date de glissement actuellement prévue est juin 1999. En juillet 1999 le prochain dividende sera celui de 2000. Bien sûr si l'entreprise avance ou retarde son dividende, cela changera la date de glissement. Si le dividende est supprimé, le glissement a lieu : on garde la date habituelle de distribution et le dividende prend une valeur nulle. Le schéma fiscal pris en compte sera la transparence fiscale avec récupération de l'avoir fiscal, soit $Af1 = 50$; $Tx1 = 0$.

La période de prévision comporte 5 années ($N1=5$) et les prévisions de free-cash-flows sont les suivantes : $Div(1)=13,5$; $Div(2)=16,5$, $Div(3)=19,5$, $Div(4)=23$, $Div(5)=26$. En fin de période de prévision, $Dfin = Div(5) = 26$; et le BPA est de 80 ($Bnfin = 80$); En début de période de prévision, le taux de croissance en volume du BPA est estimé à 5% ($CRVOL=5$).

La date de maturité est dans $Nmat=12$ années et durera donc $Nmat-N1=12-5=7$ années. A la date de maturité (à l'année $Nmat=12$), le taux de distribution des bénéfices est anticipé à 65% ($Pomat = 65$). A la date de maturité le taux de croissance du BPA en volume est prévu à 1% ($Volmat = 1$); et le taux de croissance du BPA en prix est prévu à 1,5% ($Crprix = 1.5$).

La longueur de la période de modélisation est de 20 ans ($N2 = 20$). L'année de fin de la période de modélisation est en $N1+N2$ soit $5+20=25$ ans (soit $1998+25=2023$). A cette date le taux de croissance du BPA est estimé à 2,5% ($G3 = 2.5$), soit à peu près le taux d'inflation de l'économie estimé à cette date.

Exercice 23-10 : Evaluation et risque de taux

Ci-après les paramètres prévisionnels d'Usinor et d'Altran Technologies, fin décembre 1998, estimés par Associés en Finance pour le service « droite de marché » :

Tableau 23-1 : Usinor et Altran technologies en décembre 1998

Nom variable	Valeur Usinor	Valeur Altran	Commentaire
N1	5	5	La longueur en année de la période dite de prévision
N2	20	20	L'horizon au delà de N1
Moisg	12	12	Car on évalue en décembre
Distmo	7	9	Le mois anticipé du versement du prochain dividende.
Cours	62,02	1347,25	Le cours observé de l'action au moment de l'évaluation
Div (1)	3,28	4,98	Le prochain dividende anticipé (en 1999 donc)
Div (2)	3,47	5,90	
Div (3)	3,80	7,08	
Div (4)	4,13	8,39	
Div (5)	4,39	9,97	
Bnfin	12,5219	50,55	Le dividende anticipé en N1. On le note également Dfin.
			La valeur anticipée du bénéfice par action (BPA) en année N1
Volmat	1	2	
Pomat	50	75	Le taux de distribution anticipé à maturité (lire 50% ou 75%)
Nmat	8	15	La date de maturité à partir de N1
Crprix	0,5	1	Le taux de croissance en prix du BPA
Crvol	1	10	Le taux de croissance en volume du BPA à maturité (lire 1% ou 10%)
Af1	50	50	Taux d'avoir fiscal (lire 50%)
Tx1	0	0	Taux d'imposition (lire 0%)
G3		2	Taux d'inflation anticipé en période de bouclage du modèle
W_mois	6		
Dinfl	-1,5		
Actif	119,974		Actif net par action
PER1	6,3		
BN1	10,82		

1. Évaluez les flux attendus de dividendes d'Usinor et d'Altran.
2. Évaluez l'impact d'une variation de 1% du taux d'actualisation sur la valeur de chaque action.
3. Précisez l'apport de la convexité.

Exercice 23-11 : Stock option

Pour quelles raisons une rémunération de dirigeants avec des *stocks options* n'a-t-elle pas forcément un rôle incitatif, c'est-à-dire n'amène-t-elle pas systématiquement les dirigeants à maximiser la création de valeur pour leurs actionnaires?

La distribution d'actions « gratuites » sous conditions de performance, a-t-elle des caractéristiques différentes ?

Exercice 23-12 : Valeurs de croissance

Qui a écrit et quand le passage suivant : « *in recent years at least two developments have exerted their influence in the opposite direction. The first of these is the rapid stepping up of technological change. This has created opportunities for spectacular growth of profit for many companies, but it has also threatened the position of many others which have fallen behind in the technological race (...) The second development relates to the shift of investment emphasis from values established by the past record to values to be achieved solely by future growth...* »

Exercice 23-13 : Equilibre de marché en octobre 1999 (exercice de synthèse)

Les données sont à l'adresse <http://www.dauphinefinance.com/118/Data/118/DDM199910.csv> "

1. Évaluez les flux anticipés pour chacun des titres (TRI)
2. Établissez la droite de marché fin octobre 1999
3. Évaluez les alphas des titres
4. Calculez les cours cibles correspondant
5. Affichez les titres dont l'alpha est supérieur x fois l'écart-type des alphas de tous les titres
6. Proposez un portefeuille de type 'long-short'
7. Calculez les durations, les durations relatives

Exercice 23-14 : Rentabilité espérée et Markowitz, examen de sept 2009 (exercice de synthèse)

L'entreprise A distribue un dividende de 10. Elle n'entreprend pas de nouveaux investissements. Le cours observé aujourd'hui de l'action A est 50. L'entreprise B a un bénéfice par action initial de 20. Elle utilise 50% de son BPA pour entreprendre de nouveaux investissements. Les dividendes ont un taux de croissance de 15%. Le cours observé aujourd'hui pour l'action B est 100.

1. Calculez le taux de rentabilité exigé par les actionnaires des deux entreprises.
2. Quelles sont les principales hypothèses sous-jacentes à vos calculs ?

Supposez que la volatilité du taux de rentabilité de l'action A est de 20% et que la volatilité du taux de rentabilité de l'action B est de 50%. Le coefficient de corrélation entre les rentabilités des deux titres est 0,5. Un investisseur souhaite déterminer les poids optimaux d'un portefeuille composé des deux actions.

3. Écrivez le problème de minimisation qui permet de résoudre ce problème.
4. Y a-t-il une autre formulation qui est équivalente à celle que vous avez écrite dans la question précédente ? Si oui, indiquez là.
5. Déterminez les conditions de premier ordre du problème de minimisation.
6. Donnez l'expression de la composition du portefeuille et des coefficients de Lagrange.

Exercice 23-15 : Croissance (examen mai 2010)

Goldman Sachs (l'équipe d'analystes comprenant entre autres Jim O'Neill) en novembre 2009 publie quelques résultats actualisés de l'étude de 2001 sur les BRICs. Une projection des taux de croissance actuels amène à estimer que le produit intérieur brut des BRICs sera égal à la moitié de celui des pays du G7 en 2020 et l'égalera entre 2030 et 2050. Ils remarquent en particulier que la crise récente accélère le réalignement des économies (dans un document intitulé *The BRICs nifty 50 : the EM & DM winners*)

Goldman Sachs propose les données du tableau 1 suivant avec à droite l'indice mondial. En avant dernière colonne un indice 'Emerging markets'. Les deux colonnes précédentes vers la gauche correspondent à deux indices de 50 actions proposés par Goldman Sachs. Un indice constitué d'entreprises des BRICs (EM, pour emerging market) et un autre indice constitué d'entreprise de pays dits développés (DM, pour developed market) mais exposées aux BRICs (dont par exemple LVMH ou EADS comme seules valeurs 'françaises'). En lignes divers ratios prévisionnels sur les exercices 2009 à 2011. Le tableau 2 donne quelques estimations de risque. Dans les années 1960, les nifty-fifty désignait un petit (fifty) groupe d'entreprises américaines. Nifty synonyme de ingenious, clever. On désignait ainsi des valeurs de fonds de portefeuille ou 'one-decision stocks' On les mettait en portefeuille 'et puis c'est tout'.

Tableau 1 : BRICs et les autres

Metric	Period	BRIC DM 50 (GSSTDM50)	BRIC EM 50 (GSSTEM50)	MSCI EM	MSCI World
P/E (x)	2009E	17.7	19.1	16.4	17.0
	2010E	14.2	13.7	12.5	13.0
	2011E	11.8	10.7	10.5	10.8
P/B (x)	2009E	2.2	2.6	1.9	1.6
	2010E	2.1	2.3	1.8	1.5
	2011E	1.8	2.0	1.6	1.4
ROE (%)	2009E	12.9	0.5	NM	9.9
	2010E	15.0	17.9	15.0	12.1
	2011E	16.3	20.1	15.9	13.5
EPS growth (%)	2009E	-15.5	-13.4	-6.0	-12.6
	2010E	24.2	39.8	31.1	30.6
	2011E	20.7	27.9	19.4	20.4

Tableau 2 : les risques

	Beta	Volatility
EM Nifty 50	1.45	38.39
DM Nifty 50	1.26	29.32
MSCI EM	1.25	30.08
MSCI World	1	24.00

1. Les BRICs, mais qu'est-ce donc ? Cela désigne ou fait référence à quoi ?(moins de 2 lignes) 1 point

2. Souvent la constatation ci-dessus relative à la forte croissance des BRICs est utilisée pour justifier une réallocation des portefeuilles vers les pays/économies qui devraient connaître une forte croissance économique, qu'en pensez-vous ? Entre d'autres termes, le moteur de rentabilité pour l'actionnaire est-il en soi la croissance des entreprises, si non, alors quel est-il ? (moins de 5 lignes) 2 points
3. Suivant les données prévisionnelles de Goldman Sachs (tableaux 1 & 2), comment justifier une réallocation vers les BRICs ? (moins de 5 lignes) (1 point)
4. La prise en compte du risque modifie-t-elle l'analyse ? Quelle démarche proposez-vous pour en tenir compte ? (moins de 5 lignes) (1 point)

Exercice 23-16 : Les nifty fifty (ou la croissance sans fin ?)

Dans les années 70 un petit groupe d'entreprise dont faisait partie IBM était nommé les « *Nifty Fifty* » par les gérants de portefeuille. Ces actions étaient également nommées les « *one-decision stocks* » car une fois achetées pourquoi les vendre ? Elles étaient de plus devenues conventionnelles, car perdre (éventuellement en cas de chute de cours) de l'argent avec IBM ne pouvait attirer les foudres de la profession (ou des investisseurs) tant l'investissement était devenu convenable. Cela n'aurait pas été considéré comme de l'imprudence.

Tableau 1 : Nifty Fifty

Action	PER 1972	PER 1980	PER 1990	PER 2000	PER 2010
Sony	92	17			
Polaroid	90	16			
McDonald's	83	9			
Intl Flavors	81	12			
Walt Disney	76	11			
Hewlett-Packard	65	18			
IBM					
DJIA (moyenne)					

Leur grande liquidité favorisait leur inclusion dans un portefeuille d'investisseur institutionnel. Complétez le tableau suivant :

1. Que signifie « nifty fifty » ?
2. Quel est le moteur de la croissance du cours en bourse ?
3. Que se passe-t-il dans les années 1970 ?

Exercice 23-17 : Evaluation d'E-Bay mi 1999

N'utilisez **que les informations disponibles mi 1999**.

Suivant les quotidiens "La Tribune" du 1er Juin 1999, dans un article de C. Nijdam intitulé "Les valeurs internet, un véritable Las vegas en ligne", et Libération du lundi 1er février 1999. Commissaire-priseur électronique, e-Bay propose des logiciels d'enchères graduées respectant les prix de réserve indiqués par ses clients : début 1999 environ 2,3 millions d'objets sont ainsi disponibles. e-Bay a été introduite sur le NASDAQ le 24 septembre 1998 à 8 dollars l'action, le cours est à 50\$ fin septembre, à 277,62\$ le 29 janvier 1999 (capitalisation de 11,18 milliards de \$, soit 8 fois celle de Sotheby's). En avril 1999 le cours est de 234 dollars, soit une capitalisation de 21 milliards de dollars (70% de celle de l'entreprise française de distribution Carrefour). Le nombre d'employés est de 198 salariés (110.000 pour Carrefour).

Chaque client mettant un objet aux enchères doit payer un droit inscription de 0,25 à 2 \$ par objet mis en vente, en cas de vente une commission dégressive est perçue par e-Bay entre 5% et 1,25%. Le nombre de ventes enchères a été de 289.000 en 1996 et de 33,7 millions en 1998. Le volume d'affaires a été de 745 millions de \$, le chiffre d'affaires de 47,4 millions de \$ en 1998 (environ 6 % du volume d'affaires et 0,4 % du chiffre d'affaires de Carrefour). Le chiffre d'affaires au 1er trimestre 1999 ressort à 34 millions. On estime les frais commerciaux à environ 40 % du CA. Le bénéfice a été de 2,4 millions au dernier trimestre 1998, pour un CA de 19,5 millions et de 5,9 millions au 1er trimestre 1999. Le cours augmenta de 37 % lors de cette dernière annonce. Le flottant de e-Bay change de main chaque semaine.

Quelle est la valeur de l'action e-Bay? Vous trouverez les informations nécessaires sur le Web (Edgar de la SEC...)

2. Corrigés de certains exercices**Exercice 23-2 : Baisse de prime de risque et impact sur les cours**

$$P_0 = \frac{D_1}{k - g}$$

Soit avec un taux exigé par les actionnaires de 13% (8+5), $P_0 = \frac{D_1}{13\% - 5\%}$. Si le taux exigé passe à 10% le cours s'exprime $P_0 = \frac{D_1}{10\% - 5\%}$. Le rapport entre le cours avant et le cours après est égal à $\frac{13\% - 5\%}{10\% - 5\%} = 1,6$.

Ce rapport est indépendant du prochain dividende mais est positivement lié au taux de croissance du dividende. Si le taux de croissance est de 3% (au lieu de 5%) le rapport est égal à $\frac{13\% - 3\%}{10\% - 3\%} = 1,43$.

Voir B. Cornell, 1999, The equity risk premium, Wiley frontiers in finance

Exercice 23-3 : Taux de croissance

$$P_0 = \frac{D_1}{TRI - g}, \text{ d'où } TRI = \frac{D_1}{P_0} + g = \frac{112}{4000} + 8\% = 10,8\%.$$

Exercice 23-5 : Rachat d'actions, BPA et cours

Le soit disant "effet relatif" n'est pas automatique. Les actions rachetées ne sont pas forcément annulées. Ensuite, les actions rachetées sont payées et tout dépend du prix payé par rapport à la valeur.

D'autres considérations peuvent intervenir : si l'entreprise est bénéficiaire et s'endette pour racheter, le rachat permet des économies d'impôts.

En ignorant la fiscalité, le rachat est neutre. Voir par exemple Masulis (1980, p 317-318), Oded et Michel (2008), ou Copeland et Weston (1983, p 522).

Exercice 23-6 : Distribuer les années paires

Ce qui différencie les deux entreprises ce sont simplement deux politiques de distribution différentes. Suivant Miller et Modigliani (1961) cela ne devrait pas avoir d'impact sur la valeur

$$P_{plate} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{10}{(1+0.15)^t} = 66,667$$

Le montant de dividende à verser les années paires est un peu plus du double, car l'actionnaire doit attendre un peu avant de toucher son premier dividende. L'actionnaire de l'entreprise Plate touche 10 dès la première année, il place à 15% (c'est le taux de rentabilité exigé de l'exemple) ce qui lui procure $10 \times (1 + 0.15) - 10 = 1,5$. On vérifie que Somme $\left[\frac{21.5}{(1+0.15)^t}, \{t, 2, \infty, 2\} \right] = 66,667$.

Exercice 23-7 : Croissance nulle ou forte**Question 1**

$$\frac{15}{0.15} \text{ (* le cours de l'entreprise Nulle *)}$$

100.

$$\text{TXD} = 0.4 \text{ (* le taux de distribution de l'entreprise Forte *)}$$

On sait que

$$g = (1 - \text{TXD}) h$$

$$g = 0.6 \times 0.2 \text{ (* taux de croissance des bénéfices et des dividendes de l'entreprise Forte *)}$$

0.12

$$\frac{6}{0.15 - 0.12} \text{ (* le cours de l'entreprise Forte *)}$$

200.

La valeur actuelle des opportunités de croissance (pour Forte) est donc de $200 - 100 = 100$

Question 2

Les PER sont

$$\frac{100}{15} // \mathbf{N} (* \text{ pour l'entreprise Nulle } *)$$

6.66667

$$\frac{200}{15} // \mathbf{N} (* \text{ pour l'entreprise Forte } *)$$

13.3333

Question 3

La différence de cours en bourse entre les deux entreprises n'est pas due à la croissance, mais au fait que la seconde entreprise (Forte) réinvestit une partie de son bénéfice dans de nouveaux projets encore plus rentables. Bien évidemment si la rentabilité des nouveaux projets était alignée sur celle des anciens, la valeur de l'entreprise serait inchangée quel que soit son taux de distribution. Si la rentabilité des investissements nouveaux était de 15% pour Forte (au lieu de 20%) la valeur de l'entreprise serait

$$g = 0.6 \times 0.15 (* \text{ le taux de croissance n'est plus le même } *)$$

0.09

Et le cours devient

$$\frac{6}{0.15 - 0.09} (* \text{ le nouveau cours de l'entreprise Forte } *)$$

100.

Dans cette nouvelle situation, la valeur actuelle des opportunités de croissance est nulle (ou dit autrement il n'y a pas de création de richesse pour les actionnaires)

Exercice 23-8 : Création de valeur

Cet exemple est ici prolongé avec une analyse de sensibilité et une programmation via Mathematica. La séquence de programmation ci après introduit les différentes définitions. Les paramètres de l'analyse de sensibilité sont le bénéfice initial (BN1), le premier dividende (D1), le taux de rentabilité exigé par les actionnaires (TRI) et le taux de rentabilité des capitaux propres (ROE ou h).

TxD est le taux de distribution, TR le taux de rétention, g le taux de croissance du bénéfice, INVM1, le montant initial des investissements nouveaux (au-delà des investissements de remplacement), VAOI est la valeur actuelle des opportunités de croissance, FPA est la valeur par action des fonds propres. Ces notations sont celles des pages 509 à 510, cf. tableau 23-3.

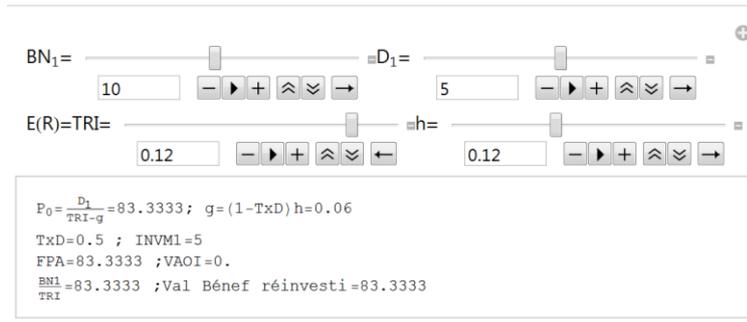
```
In[12]= Manipulate [TxD = D1 / BN1 ; TR = 1 - TxD ; g = h TR ; INVM1 = TR BN1 ;
Column [ { Row [ { "P0 =  $\frac{D1}{TRI - g}$  =", Row [ {  $\frac{D1}{TRI - g}$  } ] , " ; g = (1 - TxD)h =", g } ,
Alignment -> Center ] ,
Row [ { "TxD =", Row [ { TxD // N } ] , " ; INVM1 =", INVM1 } ,
Alignment -> Center ] ,
Row [ { "FPA =", BN1 / h , " ; VAOI =",  $\frac{TR BN1 h - INVM1}{TRI - g}$  } ] ,
Row [ { " $\frac{BN1}{TRI}$  =", BN1 / TRI , " ; Val Bénef réinvesti =",  $\frac{BN1 TR}{TRI - g}$  } ] ] ,
Row [ { Control [ { {BN1} , 10 , "BN1="} , 1 , 20 , 0.1 , Appearance -> Tiny } ] ,
Control [ { {D1} , 5 , "D1="} , 0 , BN1 , 0.1 , Appearance -> Tiny } ] ] ,
{ {TRI , 0.12 , "E (R) = TRI="} , 0.01 , 0.14 , 0.005 , Appearance -> Tiny } ,
{ {h , 0.14 , "h="} , 0.09 , 0.17 , 0.005 , Appearance -> Tiny } ]
```

Les valeurs par défaut des différents paramètres (voir les curseurs ci après) sont fixées aux valeurs données pour l'exercice. Une contrainte a été introduite de manière à ce que D1 soit inférieur ou au plus égal à BN1. On obtient :

BN1= 10 D1= 5
E(R)=TRI= 0.12 h= 0.14

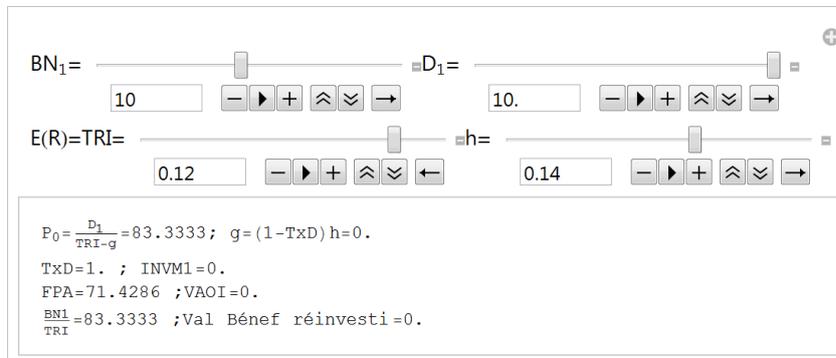
$P_0 = \frac{D_1}{TRI - g} = 100.$; $g = (1 - TxD)h = 0.07$
TxD=0.5 ; INVM1=5
FPA=71.4286 ; VAOI=16.6667
 $\frac{BN1}{TRI} = 83.3333$; Val Bénef réinvesti = 100.

L'encadré de la partie inférieure, reproduit les résultats demandés et les justifie en rappelant les définitions. On retrouve ici les résultats du tableau 23-3. Le taux de distribution est de $TxD = 50\%$. Le taux de croissance du dividende est de $g = 7\%$. La valeur actuelle de l'action est $P_0 = 100$. Le montant des investissements nouveaux en année 1 $INVM1=5$. La valeur actuelle du bénéfice de l'année 1, sous l'hypothèse de juste conservation des capacités de production, est 83,333 (actualisation sur un horizon infini). Les investissements supplémentaires créent de la valeur (car $h > TRI$) : la valeur actuelle des opportunités de croissance est de 16,6667. La somme des deux derniers éléments permet de retrouver la valeur actuelle de l'action de 100.



Un déplacement des curseurs permet d'observer l'impact sur les résultats. On déplace le curseur sur h à 12 % (valeur de TRI). Qu'observe-t-on ? (ci-dessus) La valeur actuelle des opportunités de croissance est égale à zéro et la valeur de l'action n'est plus que 83,333. Le taux de croissance des dividendes est de 6 % et le bénéfice de départ, comme le dividende sont les mêmes. **Le moteur de la création de valeur c'est le différentiel entre h et TRI.** Et si h est inférieure à TRI, la valeur actuelle des opportunités de croissance est négative : les nouveaux investissements détruisent de la valeur du point de vue de l'actionnaire.

On repositionne h à 14 % (ci après). On augmente le dividende en première année, on le cale à sa valeur la plus forte ici 10. Cette situation ne permet plus d'investir mais juste de conserver l'entreprise telle qu'elle est actuellement. La valeur de l'action est de 83,3333 et la valeur actuelle des opportunités de croissance est bien sûr égale à 0. Le dividende versé (toute de suite) à l'actionnaire, réduit les bénéfices futurs et donc la valeur actuelle de l'entreprise.



Réduisez maintenant le dividende, en-dessous de 5. Une limite est rencontrée, plus le dividende initial est réduit et plus le taux de croissance du dividende (g) augmente ($D_1 = 3$ implique $g = 9,8\%$; $D_1 = 2$ implique $g = 11,2\%$). Lorsque le taux de croissance du dividende (sur un horizon infini $= (1 - D_1/BN_1)h$) atteint le taux de rentabilité exigé par les actionnaires ($TRI = 12\%$), on bascule au pays d'Alice (les cours deviennent négatifs).

Exercice 23-9 : Alcatel en septembre 1998

Description des données du tableau de l'énoncé.

La prévision est faite fin août 1998 (Moisg = 8) à un instant où le cours est 955 (Cours=955). L'année 0 est 1998. Le prochain dividende est attendu en juin (Distmo=6), donc en 1999. L'année 1 est en 1999 etc ...

La date de glissement actuellement prévue est juin 1999. En juillet 1999 le prochain dividende sera celui de 2000. Bien sûr si l'entreprise avance ou retarde son dividende, cela changera la date de glissement. Si le dividende est supprimé, le glissement a lieu : on garde la date habituelle de distribution et le dividende prend une valeur nulle. Le schéma fiscal pris en compte sera la transparence fiscale avec récupération de l'avoir fiscal, soit $Af1 = 50$; $Tx1 = 0$.

La période de prévision comporte 5 années ($N1=5$) et les prévisions de free-cash-flows sont les suivantes : $Div(1)=13,5$; $Div(2)=16,5$, $Div(3)=19,5$, $Div(4)=23$, $Div(5)=26$. En fin de période de prévision, $Dfin = Div(5) = 26$; et le BPA est de 80 ($Bnfin = 80$); En début de période de prévision, le taux de croissance en volume du BPA est estimé à 5% ($CRVOL=5$).

La date de maturité est dans $Nmat=12$ années et durera donc $Nmat-N1=12-5=7$ années. A la date de maturité (à l'année $Nmat=12$), le taux de distribution des bénéfices est anticipé à 65% ($Pomat = 65$). A la date de maturité le taux de croissance du BPA en volume est prévu à 1% ($Volmat = 1$); et le taux de croissance du BPA en prix est prévu à 1,5% ($Crprix = 1.5$).

La longueur de la période de modélisation est de 20 ans ($N2 = 20$). L'année de fin de la période de modélisation est en $N1+N2$ soit $5+20=25$ ans (soit $1998+25=2023$). A cette date le taux de croissance du BPA est estimé à 2,5% ($G3 = 2.5$), soit à peu près le taux d'inflation de l'économie estimé à cette date.

On propose une solution avec Mathematica.

1. **La première étape**, consiste à établir les flux annuels (prévisionnels). On utilise pour ce faire la fonction FluxAEF du package DDM.m. Le package 'DDM' (*discount dividend model*) est supposé implanté dans le répertoire 'perso' (cf document premiers pas avec Mathematica). Le package DDM est téléchargeable sur le site www.dauphinefinance.com.

```
Off [General :: spell1]
```

```
(* Evite l'affichage des messages débutant par  
spell1 *)
```

```
Needs ["Perso`DDM`"]
```

```
(* appel à la bibliothèque spécialisée *)
```

Les paramètres d'appel de la fonction FluxAEF :

```
? FluxAEF
```

```
{Div,Divg}={Crvol, Crprix, Divid, Dfin, Bnfin,  
Pomat, Volmat, Nmat, N1, N2, G3, Moisg, Distmo}
```

```

Div = {13.5, 16.5, 19.5, 23, 26}; Num = Table[i, {i, 26}];
Ia = Num + 1998;
{Fcf, Fcfn} = FluxAEF[5, 1.5, Div, 26, 80, 65, 1, 12,
  5, 20, 2.5, 8, 6];
(* FluxAEF[Crvol_, Crprix_, Div_, Dfin_, Bnfin_,
  Pomat_, Volmat_, Nmat_, N1_, N2_, G3_, Moisg_, Distmo_] *)
Affichage des free cash-flows avant et après impôts :
Text@
Grid[
  Prepend[
    Transpose[{Num, Ia, SetAccuracy[Fcf, 3],
      SetAccuracy[Fcfn, 3]}],
    {"t", "Année", "Free Cash-flow", "Global"}],
  Alignment -> {{Left, Right, {Right}}},
  ItemSize -> {{2, 3, 5, 5}}, Frame -> All, ItemStyle -> 10]

```

t	Année	Free Cash- flow	Global
1	1999	13.50	13.50
2	2000	16.50	23.25
3	2001	19.50	27.75
4	2002	23.00	32.75
5	2003	26.00	37.50
6	2004	30.28	43.28
7	2005	34.99	50.12
8	2006	40.18	57.67
9	2007	45.91	66.00
10	2008	52.25	75.20
11	2009	59.28	85.40
12	2010	67.08	96.72
13	2011	68.76	102.30
14	2012	70.48	104.86
15	2013	72.24	107.48
16	2014	74.05	110.17
17	2015	75.90	112.93
18	2016	77.80	115.75
19	2017	79.74	118.64
20	2018	81.74	121.61
21	2019	83.78	124.65
22	2020	85.87	127.76
23	2021	88.02	130.96
24	2022	90.22	134.23
25	2023	92.48	137.59
26	2024	94.79	141.03

2. La **deuxième étape** consiste modifier les paramètres (simulation) de manière à constater l'impact sur les cours (valeur actuelle des flux futurs). On appelle Taux le taux de rentabilité exigé par les actionnaires. Le programme :

```

In[10]:= Manipulate [Div = {13.5, 16.5, 19.5, 23, 26};
  {FcF, FcFN} = FluxAEF [Crvol, Crprix, Div, 26, 80,
    65, 1, 12, 5, 20, 2.5, 8, 6]; Distmo = 6; Moisg = 8;
  If [Moisg < Distmo, Frac = (Distmo - Moisg - 1) / 12,
    Frac = ((12 - Moisg) + Distmo - 1) / 12];

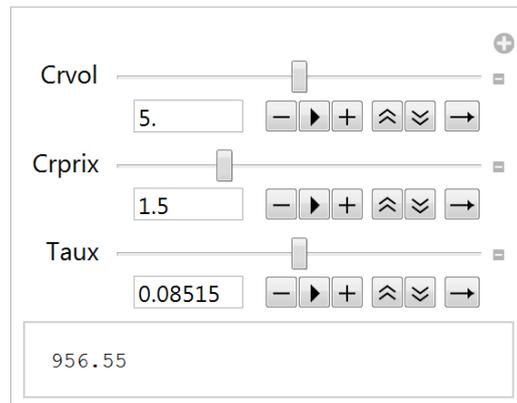
  Cours = 
$$\sum_{t=1}^{25} \frac{FcFN[[t]]}{(1 + Taux)^{t-1+Frac}} + \frac{FcFN[[26]]}{(1 + Taux)^{25+Frac} \frac{Taux - 2.5}{100}}$$

  {Crvol, 3, 7, 0.5, Appearance -> Tiny},
  {Crprix, 0.5, 4, 0.5, Appearance -> Tiny},
  {Taux, 0.05, 0.12, Appearance -> Tiny}]

```

Avec les valeurs par défaut (CRVOL à 5% et CRPRIX à 1,5%) il faut fixer le taux de rentabilité exigé à environ 8,52% pour retrouver le cours affiché fin août de 955.

Out[11]=



L'appel à la fonction TriAEF permet d'obtenir des résultats numériquement plus précis (mais est-ce utile ?)

```

TriAEF [955, FcFN, G3 = 2.5, N1 = 5, N2 = 20, Nmat = 12,
  Moisg = 9, Distmo = 6]

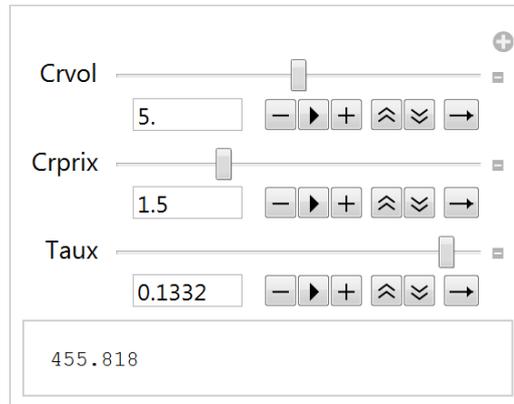
```

(* avec un cours à 955 (fin août), le TRI est à ?... 8,557% réponse attendue *)

0.0855701

3. Toutes choses égales par ailleurs quant aux flux, on retrouve le cours observé le 17 septembre en augmentant le taux exigé par les actionnaires à environ 13,3%

Out[12]=



4. **Quel abattement systématique** sur les flux futurs permet-il de retrouver le cours du 17 septembre (en supposant que le taux de rentabilité exigé par les actionnaires reste au niveau de celui constaté au mois d'août ?). La réponse (ci après) est 47,5772%.

```
In[20]= Off[FindRoot::nlnum, ReplaceAll::reps]
(* pour éviter quelques messages pénibles *)
```

```
In[21]= FindRoot [
  TriAEF [455, FcFN Koef, G3 = 2.5, N1 = 5, N2 = 20,
    Nmat = 12, Moisg = 9, Distmo = 6] == 0.0855,
  {Koef, 0.9}]
```

Out[21]=

```
{Koef → 0.475772}
```

Et si on pratique un abattement de 7/9 (cf annonce de Tchuruk le 17 sept) sur chacun des flux futurs, ce qui semble excessivement pessimiste, tout en en gardant l'espérance de rentabilité de fin août, quel serait le cours ?

```
In[26]= FindRoot [
  TriAEF [Cours, FcFN 7 / 9, G3 = 2.5, N1 = 5, N2 = 20,
    Nmat = 12, Moisg = 9, Distmo = 6] == 0.0855,
  {Cours, 800}]
```

Out[26]=

```
{Cours → 743.821}
```

Questions non posées

5. Suivant le MEDAF, ce qui justifie la rentabilité (anticipée) c'est le risque. L'aversion au risque intervient également mais au niveau de l'équilibre du marché et a un impact via la pente de la droite de marché. Ici l'équilibre de marché suivant Associés en Finance (140 valeurs sur Paris) est décrit dans le tableau suivant en fin de mois :

1998	Rf	Ordonnée	Pente
Août	4.38%	4.74%	3.92
Septembre	4.14%	4.25%	4.82

On s'aperçoit qu'en septembre 1998, la pente de la droite de marché augmente significativement (après le défaut Russe en août et la dénonciation unilatérale de contrats à terme sur le MICEX, en septembre c'est notamment le défaut du fonds LTCM avec renflouement organisé par la FED). La période est incertaine et l'aversion au risque augmente.

Suivant Associés en Finance le risque anticipé d'Alcatel est de 1,08 fin août et de 1,21 fin septembre. Compte tenu de ce niveau de niveau et de l'équation de la droite de marché, le taux de rentabilité d'équilibre (TRE) d'Alcatel fin août devrait être de 8,97% (ci après)

$$4.74 + 1.08 \times 3.92$$

$$8.9736$$

Soit une valeur supérieure au taux de rentabilité exigé (8,55%) évalué ci-dessus. Ce qui signifie que le titre est sous la droite de marché en août (son alpha est de -0,42). Fin septembre, le taux de rentabilité d'équilibre est de 10,08 (ci après)

$$\text{In}[13]= 4.25 + 1.21 \times 4.82$$

$$\text{Out}[13]=$$

$$10.0822$$

Si on suppose un alpha à zéro fin septembre (ce qui correspond à un titre à l'équilibre sur la droite de marché), le cours devrait être de 724,96 et non pas 955 (ci après)

```
In[24]= FindRoot [
  TriAEF [COURS, FcFN, G3 = 2.5, N1 = 5, N2 = 20,
    Nmat = 12, Moisg = 9, Distmo = 6] == 0.1008,
  {COURS, 800}]
```

Out[24]=

```
{COURS → 724.963 }
```

6. Ci après on pratique **abattement perpétuel de 7/9 en retenant le taux de rentabilité exigé fin septembre** (qui tient compte de l'augmentation de l'aversion au risque et également de l'augmentation du risque d' Alcatel)

```
FindRoot [
  TriAEF [Cours, FcFN 7 / 9, G3 = 2.5, N1 = 5, N2 = 20,
    Nmat = 12, Moisg = 9, Distmo = 6] == 0.1008,
  {Cours, 800}]
```

```
{Cours → 563.86 }
```

On se rapproche du cours du 17 septembre ! L'estimation reste toutefois au-dessus du cours constaté. Le cours à partir de septembre semble intégrer la méfiance suscitée par « l'erreur de communication » autour de l'offre publique conclue par Alcatel en août aux Etats-Unis.

On constate donc que l'on arrive à rationaliser le cours observé. Il n'est pas nécessaire d'avoir recours à des bruiteurs ou de méchants spéculateurs (sûrement des concurrents étrangers) s'attaquant à un fleuron national (Alcatel est l'héritier de la Compagnie Générale d'Electricité, privatisée dans les années 80).

7. L'estimation du **risque prévisionnel** est réalisée par appel à la fonction DurAEF du même package :

```
In[27]:= {Dur, Sensib, Conv, Var} =
          DurAEF[12, 5, 20, 2.5, 9, 6, FcFN, 955] (* Alcatel *)
Out[27]=
          {16.4083, -15.1149, 298.008, -0.166049}
```

La duration est de 16,4 années. Une augmentation de 1% du taux d'actualisation provoque un choc attendu de -16,60% (à l'ordre deux) sur le cours.

Chapitre 24

Gestion active et arbitrage

1. Énoncé des exercices

Exercice 24-1 : *Pairs trading*

Examinez les évolutions des couples de titres suivants : d'une part DaimlerBenz et Valéo et de l'autre Total et ENI.

1. Quelle est la valeur du coefficient de corrélation de la paire impliquant Total sur la période d'une année allant de mai 2003 à mai 2004? Et sur la période de un an finissant en juin 2005 pour le couple impliquant Valéo?
2. Deux titres fortement corrélés sur une période donnée sont-ils de bons candidats pour une stratégie de mise en position en couple (pairs trading)? Proposez un critère.
3. Comment construire et gérer les positions?
4. Comment organiser la simulation d'une stratégie sur des données historiques? (*backtesting*)
5. Quel est le résultat obtenu pour ces deux couples sur la période de 6 mois suivant la période de calcul du coefficient de corrélation?

Pour répondre à ces questions vous pouvez vous inspirer de l'article de Gatev, William et Rouwenhorst (2006) qui présente un test sur données américaines.

Exercice 24-2 : *Rémunération des gérants*

Précisez les modalités de rémunération des gérants de *hedge funds*. Donnez quelques exemples.

Définissez les termes suivants : commission de performance (*incentive fee*), taux de *gate*, *high water mark*, *hurdle rate*, *lock-up*. En quoi sont-ils (ou pas) liés à la question de la rémunération des gérants ?

Exercice 24-3 : Indices de *hedge fund*

Parmi les producteurs d'indices, Hedge Fund Research Investment (https://www.hedgefundresearch.com/hfrx_reg/index.php?fuse=login_bd) compile et diffuse (une inscription sur le site est nécessaire) différents indices.

Retrouvez ces valeurs d'indices et montrez les évolutions sur la période 1990 à 2011 des stratégies « merger & acquisition » « market neutral » et comparez avec les indices actions (big d'une part et small de l'autre) sur les marchés américains (avec réinvestissement des dividendes). L'objectif est de reproduire (et compléter) les graphiques de Hamon (2014), pages 555 et 556.

2. Corrigés de certains exercices

Chapitre 25

Gestion et produits structurés

1. Questions

2. Énoncé des exercices

Exercice 25-1 : *VIX et VCAC*

Retrouver les valeurs des indices VIX et VCAC en 2008 et en 2011

Exercice 25-2 : *Reverse collar de volatilité*

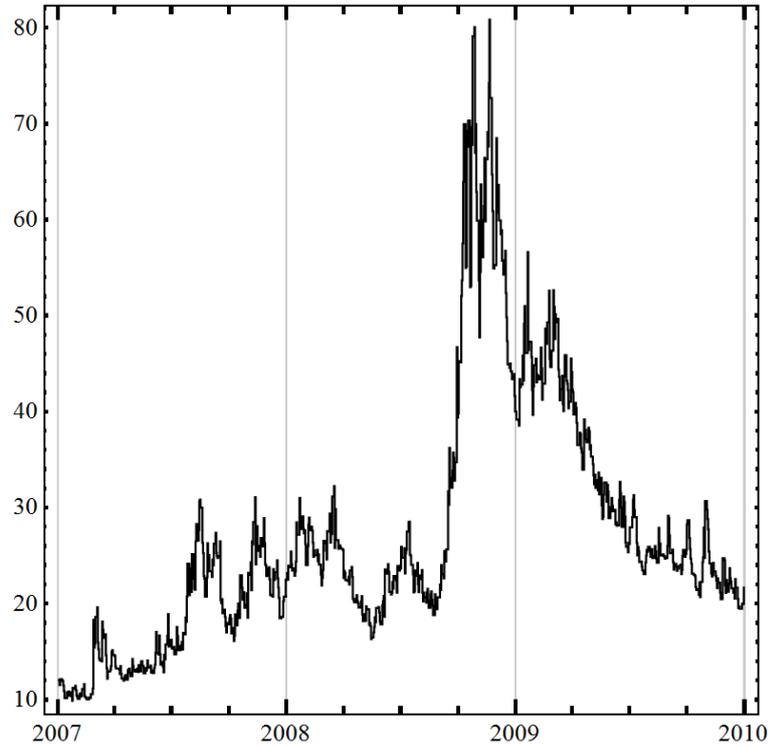
3. Corrigés (de quelques) exercices

Exercice 25-1 : *VIX et VCAC*

Les données sont téléchargeables par exemple sur le site web du CBOE pour le VIX et d'Euronext pour le VCAC. Ici avec Mathematica les données sont téléchargées et on enchaîne avec une représentation graphique. L'exécution de la commande suivante suppose une connexion avec internet.

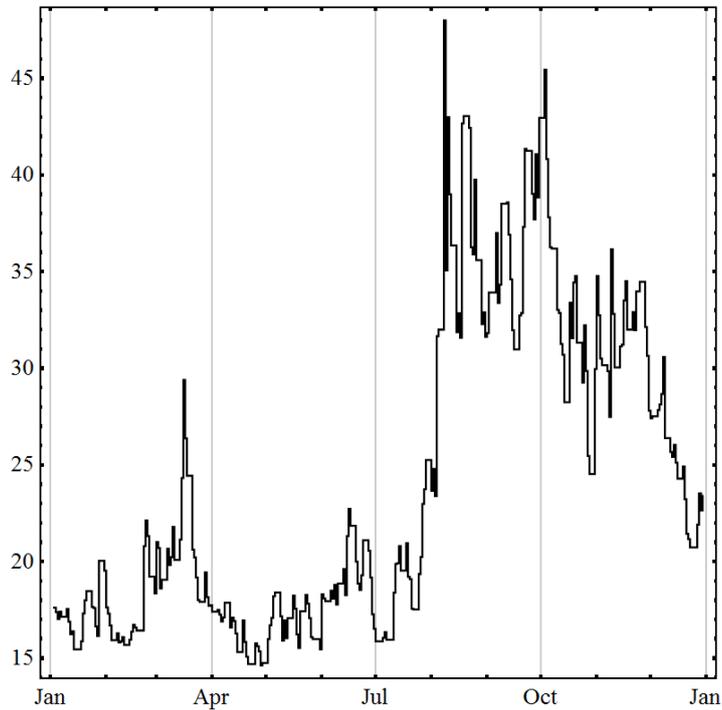
In[92]:=

```
DateListPlot[
  {FinancialData["^VIX", {{2007, 1, 1}, {2009, 12, 31}}]},
  Joined -> True, InterpolationOrder -> 0,
  PlotRange -> {All, All},
  PlotStyle -> {{Black, Thickness[0.003]}, {Black, Thin}},
  FrameTicksStyle -> Thick,
  BaseStyle -> {FontFamily -> Times, FontSize -> 12},
  AspectRatio -> 1]
```



En 2011 la volatilité va également augmenter sans atteindre les niveaux de fin 2008.

```
DateListPlot[
  {FinancialData["^VIX", {{2011, 1, 1}, {2011, 12, 31}}]},
  Joined -> True, InterpolationOrder -> 0,
  PlotRange -> {All, All},
  PlotStyle -> {{Black, Thickness[0.003]}, {Black, Thin}},
  DateTicksFormat -> {"MonthNameShort"},
  FrameTicksStyle -> Thick,
  BaseStyle -> {FontFamily -> Times, FontSize -> 12},
  AspectRatio -> 1]
```



Quelques identifiants d'indices :

Identifiant	Indice
^FCHI	Indice Cac40
PA : PX1 PA : PX1NR	Indice Cac40, NR pour net return
NX : VCAC	Indice de volatilité sur Cac40
^CS90 (PA : CACS, PA : CACSR ?)	Small Cac (ex Cac90)
^MS190	Cac Mid & Small 190
PA : CN20 ou ^CN20	Indice Cac Next 20
PA : PX4 (^SBF120)	Indice SBF 120
PA : PX8 (^SBF80)	Indice Sbf 80
PA : PX5 (^SBF250)	Indice SBF 250
^DJI	Dow Jones
^NDX	Nasdaq100
^MID	S & P Midcap 400
^VIX	Indice de volatilité du CBOE
SP500 ou ^SPX ou ^GSPC	Indice S & P 500
SP100	Indice S & P 100
USD / EUR	qté € pour 1 \$
EUR / USD	qté \$ pour 1 €
FTSE100	Indice FTSE 100
^STOXX50E	Euro STOXX 50
^STOXX	STOXX

Avec « NX:VCAC » à la place de « ^VIX », les commandes ci-dessus renvoient les représentations graphiques de l'indice de volatilité du CAC40 d'Euronext.