

# Cours de Mécanique céleste classique

Luc Duriez

Laboratoire d'Astronomie de l'Université de Lille 1 et IMCCE de l'Observatoire de Paris

[Luc.Duriez@univ-lille1.fr](mailto:Luc.Duriez@univ-lille1.fr)  
<http://www.imcce.fr>

Dernière révision le 8 septembre 2002

[Avant propos et conseils](#)

[Chapitre 1 : Rappels de mécanique générale](#)

[Chapitre 2 : Eléments de mécanique hamiltonienne](#)

[Chapitre 3 : Le problème des 2 corps](#)

[Chapitre 4 : Interactions dans l'environnement spatial](#)

[Chapitre 5 : Variations des éléments d'orbite - Perturbations](#)

[Chapitre 6 : Le problème des  \$N\$  corps](#)

[Références et Documents liés](#)


Copyright (© LDL) 2002, Luc Duriez. Le contenu de ce document et de tous ceux qui lui sont liés peut être redistribué sous les conditions énoncées dans la [Licence pour Documents Libres](#) ci-jointe version 1.1 ou ultérieure, et sous réserve de laisser invariante chacune des pages de ces documents.

# Avant propos

Ce cours de mécanique céleste a été enseigné durant de nombreuses années à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, en tant qu'option dans la Licence de Mathématiques. Il est donc abordable par des étudiants ayant le niveau d'un DEUG de sciences physiques ou mathématiques. Diffusé ici sous la forme d'un document hypertexte, il s'adresse plus généralement aux personnes intéressées par l'étude des mouvements des planètes et de leurs satellites et curieuses des méthodes développées par les astronomes pour représenter ces mouvements.

Après quelques rappels des notions de base de mécanique générale et une introduction à la mécanique lagrangienne et hamiltonienne, on montre en détails de nombreuses propriétés du *mouvement képlérien* que suit une masse ponctuelle lorsqu'elle est attirée par une autre masse ponctuelle sous l'effet de la gravitation universelle (loi de Newton). On introduit ensuite les effets de la gravitation par une masse non ponctuelle, ou par d'autres forces subies par les satellites comme celles du frottement atmosphérique ou de la pression de radiation. Ces effets sont généralement considérés en mécanique céleste comme des *perturbations* de mouvements képlériens. On introduit donc les équations différentielles qui décrivent ces perturbations, et on montre comment, malgré la non intégrabilité des équations du problème des N corps, on peut arriver à les résoudre par approximations successives dans le cas des planètes du système solaire ou de leurs satellites.

Ce cours n'a cependant pas la prétention d'être exhaustif ; il explique les notions fondamentales de la mécanique céleste classique (mouvement képlérien et perturbations) appliquée le plus souvent aux mouvements orbitaux des corps célestes du système solaire. Les méthodes de perturbation présentées ici sont limitées à l'exploitation des équations de Lagrange et de la mécanique hamiltonienne élémentaire : par exemple, les méthodes de perturbation plus sophistiquées fondées sur les séries de Lie ne sont pas abordées, ni celles relatives aux résonances, ni encore celles concernant les mouvements de rotation des corps célestes sur eux-mêmes ; ces extensions seront sans doute accessibles plus tard par l'adjonction de chapitres supplémentaires.

 **Exercice** On trouvera aussi inclus dans le texte de ce cours un certain nombre de petits exercices d'application dont on peut visualiser l'énoncé par un double clic sur la petite icône placée comme ici dans la marge de gauche. Ces exercices sont le plus souvent placés dans le cours en vis-à-vis des notions dont ils représentent une application directe.

La particularité de ce cours est son interactivité, grâce aux liens "hypertexte" dont il est muni : La table des matières est une succession de liens vers chacune des sections et sous-sections du texte. Un index rassemble les termes spécifiques à la mécanique céleste utilisés dans le texte et renvoie à leur définition ou à leur utilisation dans le texte. Lors de la définition d'un terme, il apparaît en bleu, et lors d'une autre utilisation, il apparaît en rouge ; dans ce cas le terme en rouge est un hyperlien vers la définition de ce terme. Par ailleurs, les formules sont numérotées et sont accessibles par un hyperlien lorsqu'elles sont citées (en rouge) dans le texte.

Enfin, ce cours est associé par des liens hypertexte à plusieurs documents d'applications. Pour faciliter la navigation entre les divers fichiers (cours, applications, problèmes), ils sont tous au format PDF et on donne ci-dessous quelques conseils pour cette utilisation avec le logiciel "Acrobat Reader".

Le cours est ainsi associé à un recueil d'énoncés de problèmes de mécanique céleste qui doivent permettre au lecteur intéressé de manipuler sur des exemples plus ou moins réalistes les notions abordées dans le cours. Les manipulations exigées dans ces problèmes sont réalisables "à la main", mais peuvent aussi être étendues par l'utilisation de logiciels de calcul formel.

D'ailleurs, d'autres applications associées au cours montrent comment de nombreuses notions du cours sont manipulables avec le logiciel de calcul formel MAPLE : Chaque fois que c'est possible, des liens relient le cours à des exemples réalisés avec Maple, et ces fichiers d'exemples renvoient également au cours par des hyperliens. Bien qu'ils soient au format PDF, ces fichiers d'exemples sont directement issus de calculs effectués sous Maple (on donne les instructions maple et leur résultat). Si le lecteur a accès au logiciel Maple, il pourra par des copier-coller extraire ces instructions du fichier PDF pour les exécuter en variant éventuellement les paramètres dont elles peuvent dépendre. Il est cependant préférable d'utiliser directement les fichiers d'exemples Maple (avec

l'extension .mws) qui sont fournis avec ce cours.

Les applications ainsi mises en œuvre avec Maple rassemblent des exemples de développements analytiques des formules de mécanique céleste (problème des 2 corps, fonctions perturbatrices, équations du mouvement perturbé), ainsi qu'un exemple permettant de construire les perturbations du mouvement des planètes.

On trouvera aussi dans le cours quelques figures réalisées avec le logiciel "Cabri Géomètre" qui ont la particularité de pouvoir être animées sous forme d'applets Java, grâce au moteur "CabriJava.jar" fourni avec ce cours mais aussi réactualisable sur le site <http://www-cabri.imag.fr/cabrijava/index-f.html> Ces figures sont manipulables par l'intermédiaire d'un fichier au format "HTML", nécessitant un navigateur acceptant les applets java ; en principe, un clic sur le nom du fichier html contenant une figure ouvre ce fichier dans le navigateur internet associé à "Acrobat Reader" ; cependant, des problèmes peuvent survenir quand le navigateur ne trouve pas le fichier à cause d'une mauvaise configuration du "chemin de base". Il convient alors d'ouvrir manuellement le fichier html (indiqué par son nom dans le cours) directement à partir du navigateur.

## Conseils d'utilisation

Le fichier [CoursMCecr\\_Duriez.pdf](#) constitue la version du cours de mécanique céleste adaptée pour être consultée à l'écran (le fichier [CoursMCimpr\\_Duriez.pdf](#) est une version mieux adaptée pour être imprimée). Ces fichiers peuvent être ouverts à partir d'un navigateur internet qui lance alors le visualiseur PDF associé, en général *Acrobat Reader*. Cependant, les hyperliens entre fichiers PDF semblent alors gérés par le navigateur et n'aboutissent qu'à la première page du fichier, au lieu d'aller jusqu'au signet visé dans ce fichier. Donc, **pour profiter pleinement des facilités apportées par les hyperliens, il vaut mieux ouvrir ces fichiers PDF directement dans *Acrobat Reader* (ou *xpdf* sous linux) sans passer par le navigateur.** Cela nécessite cependant d'avoir accès à l'ensemble des fichiers PDF (qu'il faudra télécharger éventuellement). Il faut alors que

tous les fichiers visés par des hyperliens soient placés dans le même dossier. Il s'agit des fichiers : *CoursM-Cecr\_Duriez.pdf*, *PbMC\_Duriez.pdf*, *DevMC\_Duriez.pdf*, *AnxDevMC\_Duriez.pdf*, *PlaMC\_Duriez.pdf* ainsi que les fichiers d'extension *.fig* et *.html* pour les figures animées par le moteur *CabriJava.jar*.

Si vous utilisez *Acrobat Reader*, il convient de le configurer de telle sorte que dans les "préférences" l'option d'affichage *page simple* soit sélectionnée, et que l'on permette l'activation des liens externes, avec ouverture de ces liens dans la même fenêtre. L'option d'affichage *page simple* peut aussi être sélectionnée dans le menu déroulant qui s'ouvre lors d'un clic avec le bouton droit dans la page.

La bordure de chaque page est munie de plusieurs zones sensibles (en haut et en bas), délimitées à gauche par le symbole ●. Elles permettent de se diriger par un clic de souris (bouton gauche) vers les pages ● *Suivante* ou ● *Précédente*, ou vers la table des matières (● *Sommaire*), vers l'● *Index* ou vers la ● *Page d'accueil*. On peut aussi passer d'une page à la suivante ou à la précédente au clavier avec les touches *flèche haut* ou *flèche bas*, ou avec la molette si votre souris en est équipée. La commande ● *Retour* permet de parcourir dans l'ordre inverse les pages visitées jusqu'ici, et celle ● *Retour Doc* permet (éventuellement) de revenir directement au document précédent.

L'index fournit des liens hypertexte vers les termes indiqués, là où ils sont définis dans le texte ou là où ils ont une utilisation particulière. La table des matières donne des liens hypertexte vers les têtes de section ou de sous-section du cours. On peut aussi accéder à la table des matières à partir de la Page d'accueil en cliquant sur un titre de chapitre, ce qui visualise la première page du chapitre correspondant ; on y trouve alors des liens vers les sections et sous sections de ce chapitre. Lorsqu'on est dans un chapitre, un retour direct vers sa première page s'obtient en cliquant sur ● *Partie x* en haut de l'écran à droite. Un clic sur ● *section x.y.z* permet de même de revenir au début de la section correspondante

Dans le texte, toutes les **références de cette couleur** à une formule ou à un mot sont un lien vers cette formule ou vers la définition du mot dans le texte (le mot est y alors signalé en *bleu*). Un tel mot est aussi référencé dans l'index. Lorsque partant d'une certaine page, on s'est "dérouté" pour suivre un lien ou plusieurs liens successifs, on revient à la page de départ en cliquant un nombre de fois suffisant sur ● *Retour* en bas de l'écran. De même,

les [références de cette couleur](#) dirigent vers une étiquette d'un autre [fichier pdf](#), [celles de cette couleur](#) vers une [Url internet](#). La commande ● [Retour](#) permet aussi de revenir dans le fichier initial.

On trouvera aussi parfois des liens vers des applications réalisées avec Maple ou vers des problèmes. Ces liens pourront apparaître comme des balises placées dans la marge, sur lesquelles il suffit de "cliquer" pour voir le document lié, exemple :

Un clic avec le bouton droit sur la page ouvre un menu déroulant permettant aussi la navigation décrite ci-dessus, mais surtout la [recherche d'un mot](#) dans le texte.

Enfin, un clic sur ● [Page xx de nn](#) en haut de l'écran à droite ouvre une fenêtre de dialogue permettant d'indiquer un numéro de page.

Ce document hypertexte a été réalisé sous linux à partir d'un document LaTeX compilé par `pdflatex` avec les styles [hyperref.sty](#) et [pdfscreen.sty](#) Ce dernier est diffusé par C. V. Radhakrishnan sur le site <http://www.river-valley.com/download/>

Pb<sub>3</sub>

## Bibliographie et Documents liés

Documents liés :

[Développements de mécanique céleste avec Maple](#)

[Théorie du mouvement des planètes avec Maple](#)

[Problèmes de Mécanique Céleste](#)

Liens vers des sites spécialisés en Mécanique Céleste :

IMCCE, Observatoire de Paris : <http://www.imcce.fr>

A.Milani, Université de Pise : <http://copernico.dm.unipi.it/~milani/dinsis/dinsis.html>

Solar system dynamics group, Nasa, JPL : [http://ssd.jpl.nasa.gov/group\\_home.html](http://ssd.jpl.nasa.gov/group_home.html)

Pour s'initier :

A. Danjon : Astronomie générale, réédition Blanchard, Paris, 1980

J. Kovalevsky : Introduction à la Mécanique Céleste, Armand Colin, 1963

Pour en savoir plus :

C.D. Murray & S.F. Dermott : Solar System Dynamics, Cambridge University Press, 1999

Les méthodes modernes de la mécanique céleste, Ed. D. Benest & C. Froeschlé, Editions frontières, 1990

H. Goldstein : Classical Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, 1980

E. Stiefel & G. Scheifele : Linear and Regular Celestial Mechanics, Springer-Verlag, 1971

D. Brouwer & G. Clemence : Methods of Celestial Mechanics, Academic press, 1961

F. Tisserand : Traité de mécanique céleste, Gauthier-Villars, 1888, 1960

H. Poincaré : Les nouvelles méthodes de la mécanique céleste, Dover, 1892, 1957



# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>I</b> | <b>Rappels de mécanique générale</b>                       | <b>23</b> |
| <b>1</b> | <b>Repères et coordonnées</b>                              | <b>24</b> |
| 1.1      | Modélisation de l'espace, du temps, des systèmes matériels | 24        |
| 1.2      | Repères et référentiels                                    | 25        |
| 1.3      | Changement de repères d'espace                             | 27        |
| 1.4      | Éléments de trigonométrie sphérique                        | 30        |
| 1.5      | Repères astronomiques                                      | 35        |
| <b>2</b> | <b>Rappels de cinématique</b>                              | <b>38</b> |
| 2.1      | Mouvement d'un point                                       | 38        |
| 2.2      | Mouvement des repères, composition de mouvements           | 41        |
| <b>3</b> | <b>Rappels de cinétique</b>                                | <b>44</b> |
| <b>4</b> | <b>Rappels de la dynamique classique</b>                   | <b>47</b> |
| 4.1      | Principe fondamental de la mécanique newtonienne           | 48        |
| 4.2      | Principe d'opposition de l'action et de la réaction        | 50        |
| 4.3      | Théorèmes généraux   | 51        |
| 4.4      | Différents types de forces                                 | 51        |

- 4.4.1 forces réelles et forces d’inertie . . . . . 52
- 4.4.2 forces de liaison et forces de champ . . . . . 52
- 4.5 Théorème de l’énergie cinétique . . . . . 56
- 5 Mise en équations et résolution des problèmes de mécanique céleste . . . . . 58**
- II Eléments de mécanique hamiltonienne . . . . . 60**
- 6 Formulation lagrangienne des équations de la mécanique . . . . . 60**
- 7 Formulation hamiltonienne des équations de la mécanique . . . . . 67**
- 8 Transformations canoniques . . . . . 71**
- 9 Fonctions génératrices de transformations canoniques . . . . . 79**
  - 9.1 Résolution par la méthode d’Hamilton-Jacobi . . . . . 82
  - 9.2 Application à la méthode des variations des constantes arbitraires . . . . . 87
- III Le problème des 2 corps . . . . . 89**
- 10 Réduction à un problème de 1 corps . . . . . 90**

|  |            |
|--|------------|
| <b>11 Le problème de Kepler et le mouvement képlérien</b>                                | <b>92</b>  |
| 11.1 Intégrales premières du mouvement képlérien . . . . .                               | 93         |
| 11.2 Trajectoire du mouvement képlérien . . . . .  | 95         |
| 11.3 Hodographe et relations entre les intégrales premières . . . . .                    | 99         |
| 11.4 Le mouvement sur la trajectoire. . . . .  | 102        |
| <br>   |            |
| <b>12 Eléments d'orbite</b>  | <b>111</b> |
| 12.1 Définitions des éléments d'une orbite képlérienne . . . . .                         | 111        |
| 12.2 Eléments d'orbite canoniques du mouvement képlérien . . . . .                       | 117        |
| 12.2.1 Calcul de l'hamiltonien . . . . .   | 117        |
| 12.2.2 Application de la méthode d'Hamilton-Jacobi . . . . .                             | 123        |
| 12.2.3 Passage aux éléments canoniques de Delaunay . . . . .                             | 126        |
| 12.2.4 Passage aux éléments canoniques de Poincaré . . . . .                             | 128        |
| 12.3 Systèmes d'unités astronomiques . . . . .   | 130        |
| 12.4 Energie d'une orbite et vitesses cosmiques . . . . .                                | 136        |
| 12.5 Calcul des éléments d'orbite à partir de conditions initiales . . . . .             | 140        |
| 12.6 Calcul d'éphémérides à partir des éléments d'orbite . . . . .                       | 144        |
| 12.7 Calcul des éléments d'orbite à partir d'observations : Méthode de Laplace . . . . . | 147        |
| <br>   |            |
| <b>13 Développements en série du mouvement képlérien elliptique</b>                      | <b>152</b> |
| 13.1 Séries de Fourier . . . . .   | 153        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 13.2      | Inversion de l'équation de Kepler . . . . .                                     | 154        |
| 13.3      | Fonctions de Bessel de 1 <sup>ière</sup> espèce . . . . .                       | 155        |
| 13.4      | Développements de $\cos nE$ et $\sin nE$ en série de Fourier de $M$ . . . . .   | 158        |
| 13.5      | La propriété de d'Alembert . . . . .  | 163        |
| 13.6      | Développement de $(\frac{r}{a})^n \exp imw$ en coefficients de Hansen . . . . . | 166        |
| 13.7      | Développements en série entière de l'excentricité . . . . .                     | 167        |
| 13.8      | Développements limités en excentricité . . . . .                                | 171        |
| 13.9      | Développements des coordonnées en fonction de la longitude moyenne . . . . .    | 177        |
| <b>14</b> | <b>Annexe : formulaire de Brumberg pour les coefficients de Hansen</b>          | <b>180</b> |
| <b>IV</b> | <b>Les interactions dans l'environnement spatial</b>                            | <b>182</b> |
| <b>15</b> | <b>La gravitation : champs et potentiels newtoniens</b>                         | <b>183</b> |
| 15.1      | Cas d'une ou plusieurs masses ponctuelles isolées . . . . .                     | 183        |
| 15.1.1    | Potentiel de gravitation . . . . .  | 184        |
| 15.1.2    | Flux du champ de gravitation . . . . .  | 186        |
| 15.1.3    | Conséquence . . . . .   | 189        |
| 15.2      | Cas d'une répartition continue de masse . . . . .                               | 190        |
| 15.3      | Systèmes à symétrie matérielle sphérique . . . . .                              | 193        |
| 15.4      | Systèmes quelconques . . . . .  | 194        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 15.4.1    | Harmoniques sphériques . . . . .                              | 196        |
| 15.4.2    | Propriétés des fonctions de Legendre . . . . .                | 198        |
| 15.4.3    | Développement du potentiel de gravitation . . . . .           | 200        |
| 15.4.4    | Calcul du développement du potentiel de gravitation . . . . . | 201        |
| 15.5      | Potentiel de gravitation des planètes . . . . .               | 206        |
| 15.5.1    | Potentiel approché : planètes sphéroïdales . . . . .          | 206        |
| 15.5.2    | Potentiel terrestre : gravité et pesanteur . . . . .          | 207        |
| 15.5.3    | Potentiel réel de la Terre et des planètes . . . . .          | 210        |
| <b>16</b> | <b>Forces dues à la trainée atmosphérique</b>                 | <b>215</b> |
| 16.1      | Principes . . . . .   | 215        |
| 16.2      | Modélisation des forces de frottement atmosphérique . . . . . | 218        |
| 16.3      | Nature perturbative des forces de frottement . . . . .        | 220        |
| <b>17</b> | <b>Forces dues à la pression de radiation</b>                 | <b>221</b> |
| <b>18</b> | <b>Autres forces agissant sur les satellites de la Terre</b>  | <b>223</b> |
| <b>V</b>  | <b>Variations des éléments d'orbite - perturbations</b>       | <b>225</b> |
| <b>19</b> | <b>Le mouvement osculateur</b>                                | <b>226</b> |

|  |            |
|--|------------|
| <b>20 Variations des éléments osculateurs pour <math>F</math> quelconque</b>             | <b>229</b> |
| 20.1 Variations des constantes primaires osculatrices . . . . .                          | 231        |
| 20.2 Variations des éléments osculateurs elliptiques . . . . .                           | 232        |
| 20.3 Equations de Gauss . . . . .  | 236        |
| 20.4 Exemple d'application des équations de Gauss . . . . .                              | 238        |
| <b>21 Cas où <math>F</math> dérive d'un potentiel : <math>F = \text{grad}_P U</math></b> | <b>241</b> |
| 21.1 Utilisation des équations de Gauss . . . . .  | 241        |
| 21.2 Application au cas du potentiel de gravitation d'une planète . . . . .              | 243        |
| 21.3 Formulation hamiltonienne des variations des éléments d'orbite . . . . .            | 247        |
| 21.4 Equations de Lagrange pour les éléments osculateurs . . . . .                       | 251        |
| 21.5 Exemple d'application des équations de Lagrange . . . . .                           | 256        |
| <b>22 Méthodes de perturbations</b>  | <b>263</b> |
| 22.1 Méthode itérative classique . . . . .   | 265        |
| 22.1.1 Première approximation . . . . .  | 268        |
| 22.1.2 Application au cas de la perturbation par le " $J_2$ " de la Terre . . . . .      | 271        |
| 22.1.3 Deuxième approximation . . . . .  | 278        |
| 22.2 Perturbations en variables canoniques : méthode de Von Zeipel . . . . .             | 281        |
| 22.2.1 Elimination des termes à courte période . . . . .                                 | 284        |
| 22.2.2 Elimination des termes à longue période : méthode de Brouwer . . . . .            | 293        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>VI Le problème des <math>N</math> corps</b>  | <b>299</b> |
| <b>23 Mise en équations du problème des <math>N</math> corps</b>                        | <b>300</b> |
| 23.1 Intégrales premières . . . . .   | 301        |
| 23.2 Réduction à un problème de $N - 1$ corps . . . . .                                 | 303        |
| 23.3 Equations exprimées en fonction du gradient d'un potentiel . . . . .               | 305        |
| <b>24 Introduction au problème des 3 corps</b>  | <b>308</b> |
| 24.1 Positions d'équilibre – Points de Lagrange . . . . .                               | 310        |
| 24.2 Quelques propriétés du problème restreint circulaire . . . . .                     | 314        |
| 24.3 Traitement du problème des 3 corps par des problèmes de Kepler perturbés . . . . . | 320        |
| 24.3.1 cas {Soleil + 2 planètes} : $m_0 \gg m_1$ et $m_0 \gg m_2$ . . . . .             | 321        |
| 24.3.2 cas {Soleil + planète + satellite} : $m_0 \gg m_1 \gg m_2$ . . . . .             | 323        |
| 24.4 Sphère d'influence d'une planète . . . . .   | 325        |
| <b>25 Problème des <math>N</math> corps de type planétaire</b>                          | <b>329</b> |
| 25.1 Développement de la fonction perturbatrice . . . . .                               | 331        |
| 25.1.1 Développement de $1/\Delta$ en polynômes de Legendre . . . . .                   | 333        |
| 25.1.2 Développement de $r^n/r^{m+1}$ . . . . .   | 334        |
| 25.1.3 Développement de $\cos S$ et de $\frac{r^n \cos^m S}{r^{m+1}}$ . . . . .         | 336        |
| 25.1.4 Développement de $1/\Delta$ en coefficients de Laplace . . . . .                 | 345        |

25.1.5 Réduction au problème plan . . . . . 346

25.1.6 Extension aux orbites inclinées . . . . . 350

25.1.7 Remarques sur les propriétés de d'Alembert et de parité des séries . . . . . 356

**26 Perturbations du mouvement des planètes 358**

26.1 Théorie à variations séculaires : Méthode de Le Verrier . . . . . 364

    26.1.1 Solution d'ordre 0 et développements en puissances des masses . . . . . 365

    26.1.2 Equations et solution d'ordre 1 . . . . . 369

    26.1.3 Solution d'ordre 2 et d'ordres supérieurs . . . . . 374

26.2 Théorie générale du mouvement des planètes . . . . . 380

    26.2.1 Méthode d'intégration : séparation des termes périodiques . . . . . 382

    26.2.2 Solution à courtes périodes . . . . . 387

    26.2.3 Solution du système séculaire . . . . . 388



## Index

3<sup>ième</sup> loi de Kepler, 104

accélération centrale, 91

accélération normale, 39

accélération relative, 39

accélération tangentielle, 39

action, 67

angles d'Euler, 28, 42

année julienne, 132

anomalie excentrique, 104

anomalie moyenne, 104

anomalie vraie, 96

antidater, 150

apocentre, 96

apogée, 240

argument du péricentre, 113

ascension droite, 36

base locale, 40, 185

caractéristique de l'inégalité, 343

caractéristique du monôme, 343

centre de gravité, 44

centre de masse, 44

centre fixe, 92

champ à flux conservatif, 187

champ de gradient, 184

champ de gravitation, 54, 183

circulation, 184

circulation d'un champ, 184

coefficient de trainée atmosphérique, 217

coefficients de Hansen, 166

coefficients de Laplace, 347

coefficients de Pochhammer, 180, 348

commensurabilité, 372

conservatif, 57

constante de Gauss, 131

coordonnées écliptiques, 37, 116

coordonnées équatoriales, 36, 116

coordonnées de Jacobi, 307

coordonnées généralisées, 61

coordonnées sphériques, 27, 185

crochet de Lagrange, 73

déclinaison, 36

déplacement virtuel compatible, 61

déviations, 138

demi-grand axe, 97, 112

divergence, 187

diviseurs, 269, 371

déplacement virtuel, 61

développement de  $a/r$ , 172

développement de  $r/a$ , 172

développement de  $r/a \frac{\sin}{\cos} w$ , 172

développement de  $w - M$ , 172  
 développement en excentricité, 171

écliptique, 36

éléments barycentriques, 116

éléments d'orbite, 101, 111

éléments d'orbite canoniques, 126

éléments de Delaunay, 127

éléments de Poincaré, 129

éléments géocentriques, 116

éléments héliocentriques, 116

éléments moyens, 272, 379

éléments osculateurs, 227

éléments planétocentriques, 116

éléments de réduction d'un torseur, 50

énergie cinétique, 44

énergie d'une orbite, 101, 136

énergie potentielle, 57

énergie totale, 94

équation du centre, 162

équation de Barker, 108

équation de Kepler, 104, 106, 146

équations canoniques, 69

équations d'Hamilton, 69

équations de Gauss, 237

équations de Lagrange, 63

équations de Lagrange avec multiplicateur, 120

équinoxe de printemps, 36

équipotentielle, 184

espace affine, 24

espace de configuration, 40

espace physique, 24

espace vectoriel, 24

excentricité, 96, 112

exercices-chap0, 3

exercices-chap1, 26, 31, 34, 40

exercices-chap2, 62, 69, 74, 78, 79

exercices-chap3, 94, 96, 100, 101, 105, 109, 113, 125, 126, 135–139, 143, 145, 146, 150, 156, 160–162, 164, 170, 173, 175, 176, 178, 179

exercices-chap4, 185, 191, 203, 208, 209

exercices-chap5, 232, 233, 238, 258, 259, 261

exercices-chap6, 301, 307, 308, 312, 313, 322, 324, 327, 336, 338, 340, 344, 347, 355, 360

Figure A, 318

Figure B, 318

Figure C, 319

Figure D, 319

Figure E, 319

flux conservatif, 187

flux d'un champ, 186

fonction de forces, 56

fonction génératrice, 82, 123

fonctions génératrices, 80

fonction hypergéométrique de Gauss, 180, 348

fonctions associées de Legendre, 197

fonctions de Bessel, 154

fonctions harmoniques, 190

fonctions harmoniques sphériques, 195

fonctions quasi-périodiques, 371  
 force, 48  
 force d'inertie d'entraînement, 52  
 force d'inertie de Coriolis, 52  
 force, 25  
 forces d'inertie, 52  
 forces de champ, 53  
 forces de liaison, 52  
 forces extérieures, 50  
 forces généralisées, 62  
 forces intérieures, 50  
 formule d'addition des polynômes de Legendre, 199  
 formule de Bour, 43  
 formule des cotangentes, 32  
 formule des sinus, 32  
 formule fondamentale, 31  
 foyer, 96  
 fréquences fondamentales, 391  
  
 géoïde, 209  
 gradient, 184  
 gradient en  $P$ , 54  
 grand axe, 96  
 grande inégalité, 372  
  
 Hamilton-Jacobi, 82, 123  
 hamiltonien, 69  
 harmonique homogène, 195  
 harmoniques sectoriels, 210  
 harmoniques sphériques, 195

harmoniques sphériques d'ordre  $n$ , 196  
 harmoniques tesséraux, 210  
 harmoniques zonaux, 210  
 hodographe, 100  
  
 inégalité, 343  
 inégalité à longue période, 372  
 inégalité séculaire, 360  
 inégalités synodiques, 373  
 inclinaison, 113  
 inclinaison critique, 273  
 instant de passage au péricentre, 112  
 intégrale de Jacobi, 316  
 intégrale de l'énergie, 93  
 intégrale de Laplace, 95  
 intégrale des aires, 94  
 intégrale première de l'énergie cinétique, 57  
 inverse de la distance, 332  
  
 lagrangien, 65  
 Laplacien, 189  
 latitude, 113  
 latitude céleste, 37  
 ligne des nœuds, 28  
 lignes coordonnées, 40  
 loi des aires, 94  
 loi du mouvement, 38  
 loi fondamentale de la dynamique, 48  
 longitude, 113  
 longitude céleste, 37

longitude du nœud ascendant, 113  
 longitude du péricentre dans l'orbite, 115  
 longitude excentrique de  $P$ , 115  
 longitude moyenne de  $P$ , 115  
 longitude vraie de  $P$  dans l'orbite, 115  
 Lune, 211

méthode de Brouwer, 293  
 méthode de Gauss, 148  
 méthode de Laplace, 148  
 méthode de Le Verrier, 364  
 méthode de Newton, 146  
 méthode de Von Zeipel, 282  
 méthodes de perturbations, 263  
 masse, 25  
 masse des planètes, 133  
 masse des satellites des planètes, 133  
 masse du Soleil, 131  
 masse grave, 55  
 masse inerte, 49, 55  
 masse réduite, 92  
 masse volumique, 190  
 masses perturbatrices, 330  
 matrice d'inertie, 47  
 moment cinétique, 45  
 moment conjugué, 67  
 moment dynamique, 45  
 mouvement, 38  
 mouvement absolu, 91  
 mouvement direct, 114

mouvement képlérien osculateur, 227  
 mouvement képlérien tangent, 227  
 mouvement rétrograde, 114  
 mouvement relatif, 91  
 moyen mouvement, 104  
 moyen mouvement moyen, 274, 365  
 multiplicateurs de Lagrange, 64

nœud ascendant, 113

obliquité de l'écliptique, 36  
 orbite héliosynchrone, 273  
 orbites des grosses planètes, 135  
 orbites hiérarchisées, 323  
 ordre 1 des masses, 330  
 ordre 2 des masses, 374

péricentre, 95  
 période, 104  
 paramètre, 96  
 particule matérielle, 25  
 partie périodique, 362  
 partie séculaire, 269, 356  
 partie séculaire planétaire, 362, 363  
 périégée, 240  
 perturbation, 213  
 perturbation constante du demi-grand axe, 366  
 perturbation directe, 330  
 perturbation indirecte, 330  
 pesanteur, 207

petit diviseur, 372  
 plan invariable, 302  
 plan osculateur, 39  
 planète extérieure, 332  
 planète intérieure, 332  
 planètes “troyennes”, 312  
 planète Jupiter, 212  
 planète Mars, 211  
 planète Saturne, 212  
 planète Terre, 138, 211  
 planète Uranus, 212  
 point  $\gamma$ , 36  
 point lié à un repère, 42  
 point matériel, 25  
 point vernal, 36  
 points de Lagrange, 312  
 polynômes de Legendre, 197  
 potentiel de gravitation, 54  
 pression de radiation, 222  
 principe d’inertie, 48  
 principe d’universalité, 48  
 principe de causalité, 47  
 principe de relativité, 48  
 principe des travaux virtuels, 61  
 problème de Kepler, 92  
 problème de type planétaire, 323  
 problème restreint des 3 corps, 309  
 produit mixte, 24  
 produit scalaire, 24

produit vectoriel, 24  
 propriété de d’Alembert, 343, 363  
 propriété de d’Alembert de rang  $n$ , 164  
 puissance, 56, 60  
 puissance d’une force, 60  
 puissance virtuelle, 61

quantité d’accélération, 45  
 quantité de mouvement, 45  
 quasi-commensurabilité, 372

résonance d’ordre  $q$ , 372  
 résonance orbitale, 372  
 résonances séculaires, 392  
 rayon équatorial, 206  
 rayon vecteur, 92  
 relations de Gauss, 33  
 repère écliptique, 36  
 repère équatorial, 36  
 repère absolu, 48  
 repère en rotation, 41  
 repère en translation, 41  
 repère galiléen, 48  
 repère propre, 105, 107, 112, 177

série entière de  $e$ , 168  
 séries de Fourier, 152  
 satellites coorbitaux, 312  
 sphéroïdes, 206  
 sphère céleste, 36

sphère d'influence, [136](#), [325](#)  
symétrie sphéroïdale, [201](#)  
système autonome, [388](#)  
système conservatif, [57](#)  
système hamiltonien, [69](#)  
système lagrangien, [66](#)  
système matériel, [25](#)  
système séculaire, [388](#)

Tableau 1, [133](#)

Tableau 2, [133](#)

Tableau 3, [135](#)

Tableau 4, [199](#)

Tableau 5, [219](#)

Tableau 6, [328](#)

temps, [25](#)

termes à courte période, [270](#)

termes à longue période, [270](#)

termes à très longues périodes, [391](#)

termes critiques, [280](#), [292](#), [396](#)

termes mixtes, [375](#)

termes périodiques, [269](#)

termes résonnants, [292](#)

termes séculaires, [269](#), [355](#), [384](#)

théorème de Lagrange, [168](#)

théorème de Poisson, [376](#)

théorie à variations séculaires, [364](#)

théorie générale, [380](#)

torseur cinétique, [45](#)

torseur des forces, [50](#)

torseur dynamique, [46](#)

trajectoire, [38](#)

transformations canoniques, [71](#)

travail, [60](#)

travail d'une force, [60](#)

travail virtuel, [61](#)

tremplin gravitationnel, [140](#)

triangle sphérique, [31](#)

trigonométrie sphérique, [30](#), [113](#)

UA, pour Unité Astronomique, [131](#)

unité astronomique, [131](#)

variable conjuguée, [67](#)

variables angulaires, [263](#)

variables métriques, [263](#)

variations séculaires, [371](#)

vecteur accélération, [38](#)

vecteur rotation-instantanée, [41](#)

vecteur vitesse, [38](#)

vitesse, [38](#)

vitesse circulaire, [136](#)

vitesse de libération, [138](#)

vitesse parabolique, [137](#)

vitesse relative, [39](#)

vitesse virtuelle, [61](#)

## Première partie

# Rappels de mécanique générale

### 1 Repères et coordonnées

- 1.1 Modélisation de l'espace, du temps, des systèmes matériels
- 1.2 Repères et référentiels
- 1.3 Changement de repères d'espace
- 1.4 Eléments de trigonométrie sphérique
- 1.5 Repères astronomiques

### 2 Rappels de cinématique

- 2.1 Mouvement d'un point
- 2.2 Mouvement des repères, composition de mouvements

### 3 Rappels de cinétique

### 4 Rappels de la dynamique classique

- 4.1 Principe fondamental de la mécanique newtonienne
- 4.2 Principe d'opposition de l'action et de la réaction
- 4.3 Théorèmes généraux
- 4.4 Différents types de forces
- 4.5 Théorème de l'énergie cinétique

### 5 Mise en équations et résolution des problèmes de mécanique céleste

# 1. Repères et coordonnées

## 1.1. Modélisation de l'espace, du temps, des systèmes matériels

On assimile l'*espace physique* à l'*espace affine* réel euclidien orienté à 3 dimensions ; on lui associe l'*espace vectoriel* classique des vecteurs : à 2 points  $A$  et  $B$  correspond le vecteur<sup>1</sup> lié  $\mathbf{AB}$ , puis les vecteurs libres  $\mathbf{V}$  équipollents à  $\mathbf{AB}$ . On suppose connues les opérations classiques entre points, vecteurs, scalaires et leurs propriétés (associativité, commutativité, non-commutativité ... ) :

|   |    |   |    |                       |                                |
|---|----|---|----|-----------------------|--------------------------------|
| $B = A + \mathbf{AB}$                               | ou | $B = A + \mathbf{V}$                              | ou | $\mathbf{AB} = B - A$ |                                |
| $\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{W}$              |    |   |    |                       | somme de vecteurs              |
| $\lambda \mathbf{V} = \mathbf{W}$                   |    |   |    |                       | multiplication par un scalaire |
| $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \alpha$              |    |   |    |                       | produit scalaire               |
| $\sqrt{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}} =  \mathbf{V} $ |    |   |    |                       | module de $\mathbf{V}$         |
| $\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} = \mathbf{W}$         |    |   |    |                       | produit vectoriel              |
| $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}) = \beta$      | =  | $\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \wedge \mathbf{W})$ |    |                       | produit mixte                  |

On rappelle encore :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = |\mathbf{U}| |\mathbf{V}| \cos(\mathbf{U}, \mathbf{V})$$

$$\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} = -\mathbf{V} \wedge \mathbf{U} = |\mathbf{U}| |\mathbf{V}| \sin(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \mathbf{k}$$

$$(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) \wedge \mathbf{W} = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{W}) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}) \mathbf{U}$$

où  $\mathbf{k}$  est unitaire et orthogonal à  $\mathbf{U}$  et à  $\mathbf{V}$  ; le sens de  $\mathbf{k}$  est défini par la règle selon laquelle un observateur 'debout' suivant  $\mathbf{k}$  et regardant dans la direction de  $\mathbf{U}$  voit la direction de  $\mathbf{V}$  à sa gauche. L'angle  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  est alors orienté positivement dans le sens trigonométrique. Le module de  $\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}$  représente l'aire du parallélo-

<sup>1</sup>Dans tout le cours, les vecteurs seront notés par des symboles en caractères gras



gramme construit sur ces vecteurs, tandis que le produit mixte de 3 vecteurs représente le volume du parallépipède construit sur ces 3 vecteurs.

On assimile le *temps* à un réel (espace de dimension 1). Espace physique et temps sont supposés indépendants l'un de l'autre.

On assimile une *particule matérielle* à un point de l'espace physique, auquel on associe un scalaire positif appelé *masse* du point. On parle alors aussi de *point matériel*. Le mot 'particule' n'est pas pris ici dans le sens des particules élémentaires de la physique quantique : Il désigne un corps matériel suffisamment petit pour être localisé par un point, et assez gros pour qu'on n'ait pas à tenir compte des propriétés quantiques de la matière.

On assimile un *système matériel* à un ensemble de points matériels. Ces points sont en interaction (ou soumis à des forces). La *force* agissant sur un point est représentée par un vecteur lié à ce point, dirigé dans le sens de la force et de module égal à son intensité. La signification physique de la masse et des forces est donnée par les *lois de la dynamique*.

## 1.2. Repères et référentiels

En mécanique classique, les systèmes matériels sont repérés dans des référentiels, qui sont la donnée d'un repère d'espace et d'un repère de temps.

Un repère d'espace est défini par un point origine  $O$  et par une base de l'espace vectoriel associé :  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . On le note  $Oijk$ . Sauf indication contraire, les bases utilisées sont toujours orthonormées et directes (bases cartésiennes), c'est-à-dire satisfont à :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = +1 \end{aligned} \right.$$

Un repère de temps est défini par un instant initial  $t_0$  et une base de durée  $\mathbf{d}$  (unité de temps).

Dans ces repères, un point  $M$  à un instant  $t$  est défini par trois coordonnées d'espace  $(x, y, z)$  et une de temps  $(\tau)$ , telles que :

$$M = O + x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad t = t_0 + \tau \mathbf{d}$$

Etant donnés trois vecteurs  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}'$  et  $\mathbf{V}''$ , donnés par leurs coordonnées  $(x, y, z)$ ,  $(x', y', z')$  et  $(x'', y'', z'')$ , on a alors les résultats :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}' = xx' + yy' + zz'$$

$$\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}' = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$$

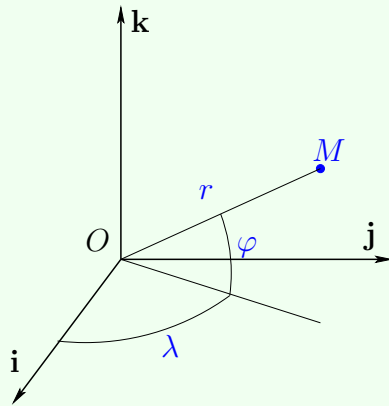
$$(\mathbf{V}, \mathbf{V}', \mathbf{V}'') = \det(\mathbf{V}, \mathbf{V}', \mathbf{V}'')$$

## Exercice



A la place des 3 coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  de  $M$ , on pourra être amené à utiliser des coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  ou sphériques  $(r, \lambda, \varphi)$ .

Donnons la définition des *coordonnées sphériques* utilisée généralement par les astronomes :



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \lambda \\ y = r \cos \varphi \sin \lambda \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

ou inversement :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & (\Rightarrow r \geq 0) \\ \varphi = \text{Arcsin}(z/r) & (\Rightarrow -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2) \\ \lambda = \text{atan2}(y, x) & (\Rightarrow 0 \leq \lambda < 2\pi) \end{cases}$$

où la fonction  $\text{atan2}(y, x)$  est définie par :  $\text{Arctg}(y/x) + \begin{cases} \pi & \text{si } x < 0 \\ 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

### 1.3. Changement de repères d'espace

Etant donnés 2 repères cartésiens  $R_1 = O_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_1$  et  $R_2 = O_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{j}_2 \mathbf{k}_2$ , un point  $M$  est donné dans chacun d'eux par trois coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} M &= O_1 + x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1 \\ &= O_2 + x_2 \mathbf{i}_2 + y_2 \mathbf{j}_2 + z_2 \mathbf{k}_2 \end{aligned}$$

Pour avoir les relations entre  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$  il faut connaître par exemple la position de  $O_2$  dans  $R_1$  et la base de  $R_2$  dans celle de  $R_1$  :

$$\begin{aligned} O_2 &= O_1 + \xi \mathbf{i}_1 + \eta \mathbf{j}_1 + \zeta \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{i}_2 &= a_{11} \mathbf{i}_1 + a_{21} \mathbf{j}_1 + a_{31} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{j}_2 &= a_{12} \mathbf{i}_1 + a_{22} \mathbf{j}_1 + a_{32} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 &= a_{13} \mathbf{i}_1 + a_{23} \mathbf{j}_1 + a_{33} \mathbf{k}_1 \end{aligned}$$

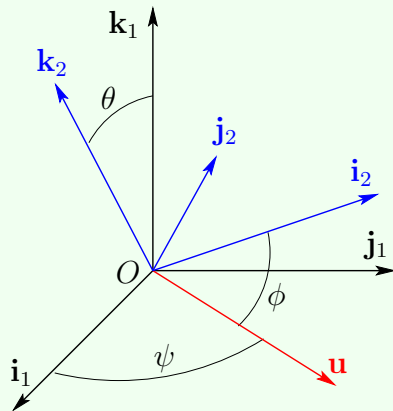
On en déduit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Les bases de  $R_1$  et  $R_2$  étant orthonormées, la matrice des  $a_{ij}$  est orthonormée : 3 seulement des 9  $a_{ij}$  sont indépendants et suffisent pour exprimer la matrice complètement ; cette propriété traduit le fait que 3 rotations suffisent généralement pour passer d'une base à une autre. On utilise le plus souvent les 3 rotations d'Euler (ou *angles d'Euler* notés  $(\psi, \theta, \phi)$ , et ainsi définis :

Si  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  ne sont pas équipollents, et  $O$  étant un point arbitraire, le plan  $(O\mathbf{k}_1, O\mathbf{k}_2)$  est défini, ainsi que sa normale  $O\mathbf{u}$  choisie dans le même sens que  $\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2$ . Alors, les angles  $\psi$  entre  $O\mathbf{i}_1$  et  $O\mathbf{u}$  (dans le plan  $O\mathbf{i}_1\mathbf{j}_1$ ),  $\theta$  entre  $O\mathbf{k}_1$  et  $O\mathbf{k}_2$  (dans le plan  $O\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2$ ) et  $\phi$  entre  $O\mathbf{u}$  et  $O\mathbf{i}_2$  (dans le plan  $O\mathbf{i}_2\mathbf{j}_2$ ), définissent les 3 rotations successives permettant d'amener la base  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$  à se superposer à la base  $(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$  ; la droite  $O\mathbf{u}$  est appelée *ligne des nœuds* des 2 plans  $O\mathbf{i}_1\mathbf{j}_1$  et  $O\mathbf{i}_2\mathbf{j}_2$ . Ces 3 rotations conduisent à définir 2 bases intermédiaires  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}_1)$

et  $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{k}_2)$  :



$$(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1) \rightarrow \begin{array}{l} \text{rotation } \psi \\ \text{autour de } O\mathbf{k}_1 \end{array} \rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}_1)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}_1) \rightarrow \begin{array}{l} \text{rotation } \theta \\ \text{autour de } O\mathbf{u} \end{array} \rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{k}_2)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{k}_2) \rightarrow \begin{array}{l} \text{rotation } \phi \\ \text{autour de } O\mathbf{k}_2 \end{array} \rightarrow (\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$$

On peut représenter chaque rotation par une matrice de rotation, et obtenir ainsi la matrice des  $a_{ij}$  comme produit des trois matrices de rotation, qui ne dépendent bien sûr chacune que d'un angle :

$$\begin{aligned} (a_{ij}) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi \cos \theta & -\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi \cos \theta & \sin \theta \sin \psi \\ \sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \phi \cos \theta & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \phi \cos \theta & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

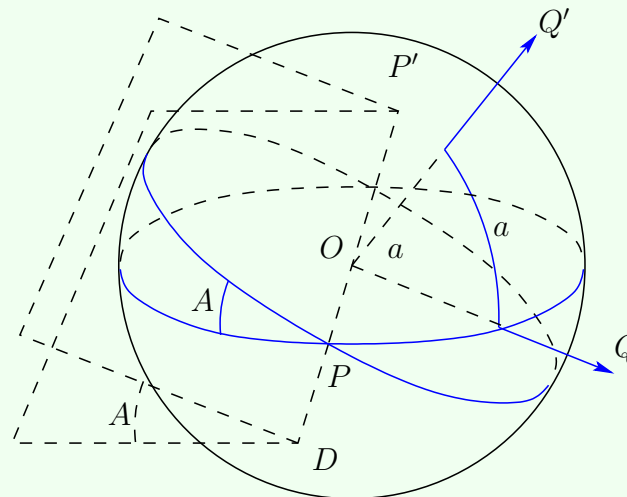
La transformation inverse s'obtiendrait à l'aide de la matrice inverse  $(a_{ij})^{-1}$ , égale ici à la transposée de  $(a_{ij})$  puisque cela revient à changer le signe des 3 angles et à inverser l'ordre des 3 rotations.

En astronomie, on rencontre souvent le cas où  $O_1$  et  $O_2$  sont confondus et où le point  $M$  est repéré dans chacun des 2 repères par des coordonnées sphériques  $(r, \lambda_1, \varphi_1)$  et  $(r, \lambda_2, \varphi_2)$ . Les relations qui expriment les angles  $\varphi_1$  et  $\lambda_1$  en fonction de  $\varphi_2$  et  $\lambda_2$  sont alors avantageusement obtenues par la trigonométrie sphérique.

### 1.4. Eléments de trigonométrie sphérique

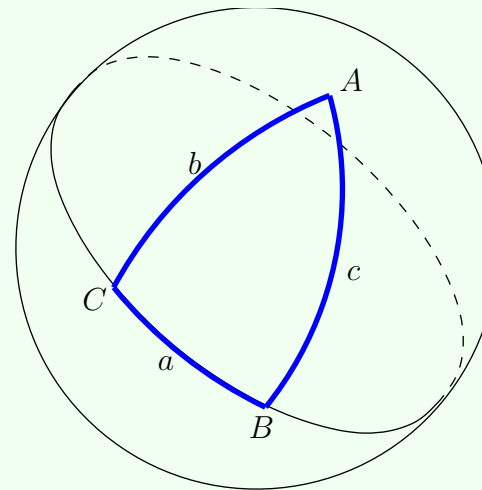
Il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des demi-droites issues d'un point  $O$  et l'ensemble des points de la surface de la sphère de centre  $O$  et de rayon 1 (sphère trigonométrique) : A une demi-droite, ou à son vecteur unitaire, correspond le point où celle-ci perce la sphère. De même, à un plan passant par  $O$  correspond le grand cercle de la sphère, intersection de celle-ci et du plan.

Alors, 2 plans qui se coupent suivant une droite  $D$  passant par  $O$  sont représentés sur la sphère par 2 grands cercles qui se coupent en 2 points  $P$  et  $P'$  diamétralement opposés ; ces points représentent les 2 directions opposées portées par  $D$ . L'angle  $A$  des 2 plans définit ce qu'on appelle l'angle des 2 grands cercles correspondants (égal aussi à l'angle des tangentes en  $P$  (ou  $P'$ ) aux 2 grands cercles).



Par 2 points distincts  $Q$  et  $Q'$  de la sphère, il passe toujours un grand cercle : Celui-ci est l'image du plan défini par les 2 demi-droites dont  $Q$  et  $Q'$  sont les images. La longueur  $a$  de l'arc de grand cercle joignant  $Q$  à  $Q'$  est égale à l'angle de ces 2 demi-droites.

3 points  $A, B, C$  de la sphère définissent un *triangle sphérique* : c'est l'une des figures dessinées sur la sphère, formée par les 3 arcs de grand cercle  $(AB)$ ,  $(BC)$  et  $(CA)$  joignant ces 3 points 2 à 2. Il n'y a pas unicité de figure car pour chaque côté  $AB$ ,  $BC$  ou  $CA$ , on a le choix entre un arc et son complément à  $2\pi$ .



Comme pour les triangles plans, on note  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les côtés opposés aux sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . On désigne aussi par  $A$ ,  $B$ ,  $C$  les angles ayant leur sommet en  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Alors, on montre que, comme pour les triangles plans, il existe des relations entre les côtés et les angles permettant de calculer l'un de ces éléments à partir de trois d'entre eux :

## Exercice



Relation 1, entre 3 côtés et 1 angle :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (\text{formule fondamentale}) \quad (1.1)$$

Relation 2, entre 2 côtés et les 2 angles opposés :

$$\boxed{\sin a \sin B = \sin b \sin A} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}} \quad (\text{formule des sinus}) \quad (1.2)$$

Relation 3, entre 2 côtés et 2 angles dont un adjacent :

$$\boxed{\sin b \cot a = \sin C \cot A + \cos b \cos C} \quad (\text{formule des cotangentes}) \quad (1.3)$$

Relation 4, entre 1 côté et 3 angles :

$$\boxed{\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a} \quad (1.4)$$

Relation 5, entre 3 côtés et 2 angles :

$$\begin{aligned} \boxed{\sin a \cos B} &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \boxed{\sin a \cos C} &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \end{aligned} \quad (1.5)$$

Relation 6, entre 2 côtés et 3 angles :

$$\begin{aligned} \boxed{\sin A \cos b} &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \\ \boxed{\sin A \cos c} &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a \end{aligned} \quad (1.6)$$

La relation (1.4) peut être déduite de (1.1) en considérant les triangles polaires : Etant donné un grand cercle, les 2 points situés à  $90^\circ$  de tous ses points sont les pôles de ce grand cercle. Aux 3 arcs de grands cercles  $(BC)$ ,  $(AC)$ ,  $(AB)$  correspondent les pôles  $P$  et  $P'$ ,  $Q$  et  $Q'$ ,  $R$  et  $R'$  respectivement. Par définition, en choisissant  $P$ ,



$Q$  et  $R$  de telle sorte que les arcs  $\widehat{PA}$ ,  $\widehat{QB}$  et  $\widehat{RC}$  soient inférieurs à  $\pi/2$ , le triangle  $PQR$  est appelé triangle polaire de  $ABC$ . Ses côtés  $p, q, r$  et ses angles  $P, Q, R$  valent alors :

$$\begin{aligned} p &= \pi - A & q &= \pi - B & r &= \pi - C \\ P &= \pi - a & Q &= \pi - b & R &= \pi - c \end{aligned}$$

C'est en portant ces expressions dans (1.1) qu'on trouve (1.4). De même, les formules (1.6) se déduisent de (1.5) par la considération des triangles polaires. Bien sûr, on en déduit aussi d'autres semblables par permutation circulaire des angles et des côtés.

En regroupant les relations (1.1), (1.2) et (1.5), ou (1.4), (1.2) et (1.6), on constitue les *relations de Gauss* :

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \sin A \sin b &= \sin B \sin a \\ \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \end{aligned} \tag{1.8}$$

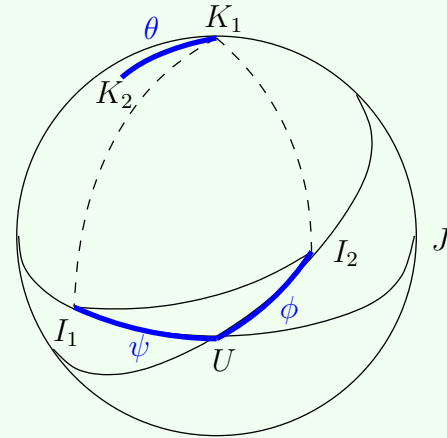
permettant de calculer sans indétermination (par leur sinus et leur cosinus) l'angle et l'arc présents dans les membres de gauche.

Notons que ces relations engendrent des relations plus simples dans les cas où un angle vaut  $\pi/2$  (triangle rectangle) ou quand un côté vaut  $\pi/2$  (triangle rectilatère). Signalons enfin que la somme des 3 angles d'un triangle sphérique ne vaut pas  $\pi$  comme dans un triangle plan :  $S$  désignant la surface du triangle  $ABC$  (exprimée

en stéradians), on a :

$$S = A + B + C - \pi$$

Avec ces éléments de trigonométrie sphérique, il est facile de calculer directement l'un quelconque des termes de la matrice  $(a_{ij})$  permettant de passer de  $O\mathbf{i}_1\mathbf{j}_1\mathbf{k}_1$  à  $O\mathbf{i}_2\mathbf{j}_2\mathbf{k}_2$  par les angles d'Euler : On place sur la sphère les points  $I_1, J_1, K_1, I_2, J_2, K_2$  et  $U$  correspondant aux vecteurs  $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$  et  $\mathbf{u}$  ; on place également les grands cercles de base dont  $K_1$  et  $K_2$  sont les pôles.



Les angles d'Euler se retrouvent alors :  $\psi$  comme arc  $\widehat{I_1U}$ ,  $\phi$  comme arc  $\widehat{UI_2}$  et  $\theta$  comme angle des deux grands cercles de base, ou encore comme arc  $\widehat{K_1K_2}$ . Par exemple, dans le triangle  $I_1UI_2$ , on obtient immédiatement, par la formule fondamentale (1.1) :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) = \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \cos(\pi - \theta) \\ &= \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi \cos \theta \end{aligned}$$

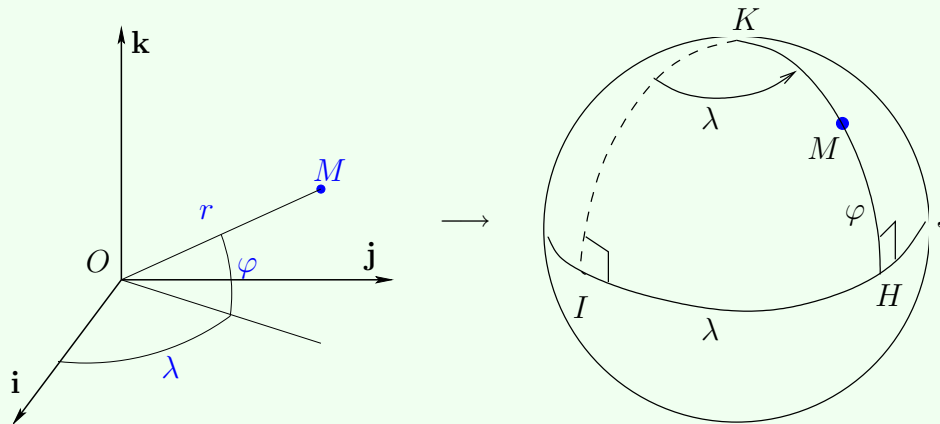
On pourra retrouver de même les autres  $a_{ij}$ .

### Exercice



### 1.5. Repères astronomiques

Etant donné un repère cartésien  $Oijk$  et les coordonnées sphériques associées  $(r, \varphi, \lambda)$ , il est commode de placer les angles  $\varphi$  et  $\lambda$  sur la sphère trigonométrique :



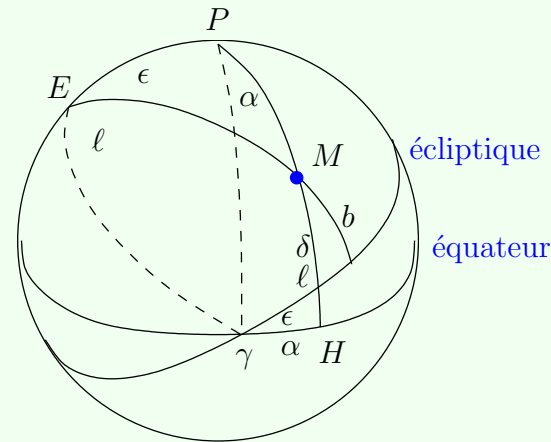
On y voit le grand cercle de base  $(IJ)$  et son pôle  $K$ , images du plan  $Oij$  et de l'axe  $Ok$ , le grand cercle origine  $(KI)$  image du plan  $Oik$  et le grand cercle  $(KM)$  image du plan "vertical" passant par l'axe  $Ok$  et par le point  $M$ . Ce dernier grand cercle coupe  $(IJ)$  en  $H$ .  $\lambda$  est l'angle des cercles  $(KI)$  et  $(KM)$ , ou l'arc  $\widehat{IH}$  mesuré sur le cercle  $(IJ)$ .  $\phi$  est la mesure de l'arc  $\widehat{HM}$ . Si  $\lambda$  et  $\phi$  représentaient des coordonnées géographiques classiques sur le globe terrestre,  $(IJ)$  serait l'équateur,  $K$  le pôle nord,  $(KI)$  le méridien origine,  $(KM)$  le méridien du point  $M$ ,  $\lambda$  la longitude de  $M$ , mesurée dans le sens direct,  $\phi$  sa latitude et  $\pi/2 - \phi$  sa colatitude ou distance polaire.

Finalement, on voit qu'un système de coordonnées sphériques est complètement défini par la donnée d'un

pôle, du cercle de base correspondant, d'un grand cercle origine contenant le pôle, d'un sens dans lequel on mesure les rotations autour de ce pôle.

En astronomie, la sphère trigonométrique représente l'ensemble des lignes de visées depuis un point  $O$ , et est appelée *sphère céleste* (elle est vue de l'extérieur). Les repères astronomiques rencontrés le plus souvent dans les applications de la mécanique céleste, sont le *repère équatorial* et le *repère écliptique*.

Le repère équatorial a pour cercle de base le grand cercle parallèle à l'équateur terrestre ayant pour pôle le pôle nord  $P$ . Les coordonnées sphériques correspondantes  $\alpha$  et  $\delta$  sont des *coordonnées équatoriales*, analogues aux longitudes et latitudes géographiques, mais s'appellant respectivement *ascension droite* et *déclinaison*.



L'ascension droite est mesurée sur l'équateur dans le sens direct, de 0 à 24 h, à partir d'un certain *point*  $\gamma$  non lié au globe terrestre, appelé aussi *point vernal* ou *équinoxe de printemps*. Ce point est défini en relation avec le repère écliptique. Ce dernier a pour cercle de base le grand cercle parallèle à l'*écliptique*, nom donné au plan de l'orbite que la Terre décrit en un an autour du Soleil ; son pôle nord est  $E$ . Sur la sphère céleste centrée sur la Terre, le Soleil décrit en un an et dans le sens direct le grand cercle de l'écliptique. Ces deux cercles se coupent en deux points  $\gamma$  et  $\gamma'$  en formant un angle  $\epsilon$  appelé *obliquité de l'écliptique* ( $\epsilon$  vaut actuellement  $23^\circ 26'$ ). Le point

$\gamma$  est à l'intersection correspondant au passage du Soleil de l'hémisphère sud à l'hémisphère nord (c'est-à-dire à l'instant du printemps, lorsque la déclinaison du Soleil s'annule en devenant positive). Les coordonnées sphériques associées au repère écliptique sont les *coordonnées écliptiques*  $\ell$  et  $b$ , appelées respectivement *longitude céleste* et *latitude céleste*.  $\ell$  est mesuré sur l'écliptique dans le sens direct, de 0 à 360° à partir du point  $\gamma$ . La déclinaison et la latitude céleste sont mesurées de  $-90^\circ$  à  $+90^\circ$  de part et d'autre de l'équateur et de l'écliptique respectivement.

Si un point  $M$  a pour coordonnées équatoriales  $(\alpha, \delta)$  et pour coordonnées écliptiques  $(\ell, b)$ , les relations de Gauss (1.7) écrites dans le triangle sphérique  $EPM$  permettent le passage d'un système de coordonnées à l'autre :

$$\begin{aligned} \sin b &= \cos \epsilon \sin \delta - \sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha \\ \cos b \cos \ell &= \cos \delta \cos \alpha \\ \cos b \sin \ell &= \sin \epsilon \sin \delta + \cos \epsilon \cos \delta \sin \alpha \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \cos \epsilon \sin b + \sin \epsilon \cos b \sin \ell \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos b \cos \ell \\ \cos \delta \sin \alpha &= -\sin \epsilon \sin b + \cos \epsilon \cos b \sin \ell \end{aligned} \tag{1.10}$$

## 2. Rappels de cinématique

### 2.1. Mouvement d'un point

- Le *mouvement* d'un point  $M$  est une application qui, à tout instant  $t$ , fait correspondre une position de l'espace notée  $M(t)$  ; cette application est continue et le plus souvent dérivable.
- La *trajectoire* de  $M$  est l'ensemble des positions géométriques prises par  $M$  lorsque  $t$  varie. On l'oriente dans un certain sens à partir d'un point origine, permettant d'y mesurer l'abscisse curviligne de  $M$ . Entre  $t$  et  $t + \delta t$ , le déplacement

$$\delta \mathbf{M} = M(t + \delta t) - M(t)$$

est un vecteur qui tend vers la tangente à la trajectoire lorsque  $\delta t$  tend vers zéro.

- La *loi du mouvement* sur la trajectoire est donnée par l'abscisse curviligne  $s(t)$ , comptée à partir d'une position initiale.
- La *vitesse* de  $M$  est  $V = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$  (dans toute la suite, la notation  $\dot{q}$  désignera la dérivée première de la quantité  $q$  par rapport au temps, et  $\ddot{q}$  désignera sa dérivée seconde).
- Le *vecteur vitesse* de  $M$  est le vecteur  $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{M}}{dt}$  tangent en  $M$  à la trajectoire, de module égal à  $|V|$  et dirigé dans le sens du mouvement. Si  $\mathbf{u}$  désigne le vecteur unitaire tangent en  $M$  à la trajectoire, on écrit aussi :

$$\mathbf{V} = \dot{s} \mathbf{u}$$

- Le *vecteur accélération* de  $M$  est le vecteur  $\mathbf{\Gamma}$ , dérivée du vecteur vitesse :

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \ddot{s} \mathbf{u} + \dot{s} \dot{\mathbf{u}}$$

$\mathbf{u}$  dépend du temps par l'intermédiaire de  $s$  et on a :  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0$ . Si  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur unitaire orthogonal à  $\mathbf{u}$  et dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire en  $M$ , et si  $R$  est rayon de courbure de la trajectoire en  $M$ , on obtient :

$$\Gamma = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \ddot{s} \mathbf{u} + \frac{\dot{s}^2}{R} \mathbf{n}$$

On y reconnaît l'*accélération tangentielle* et l'*accélération normale* ; le plan  $(\mathbf{u}, \mathbf{n})$  est le *plan osculateur* de la trajectoire (au sens de la géométrie).

● Si  $M$  est défini dans un repère  $R = O\mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k}$  par des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  fonctions de  $t$ , on peut définir la *vitesse relative* de  $M$  dans  $R$  :

$$\mathbf{V}(M/R) = \frac{d_R \mathbf{OM}}{dt} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

et l'*accélération relative* de  $M$  dans  $R$  :

$$\Gamma(M/R) = \frac{d_R \mathbf{V}(M/R)}{dt} = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

● Si  $M$  est défini dans  $R$  par des coordonnées quelconques (par exemple sphériques), notées  $q_1, q_2, \dots, q_n$  et supposées fonctions continues et dérivables de  $t$ , on pourra écrire :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OM}(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \text{puis} \quad \mathbf{V}(M/R) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Le vecteur  $\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial q_i}$  est tangent à la trajectoire que décrirait  $M$  si la coordonnée  $q_i$  variait seule et qui est, par définition, la *ligne coordonnée* relative à  $q_i$ . En se plaçant dans l'*espace de configuration*, de dimension  $2n$ , où les points sont définis par les  $2n$  coordonnées supposées indépendantes  $(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ , on peut écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{V}(M/R)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial q_i}$$

On en déduit les 'projections' des vecteurs vitesse et accélération de  $M$  sur les tangentes aux lignes coordonnées :

$$\mathbf{V}(M/R) \cdot \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.13}$$

$$\mathbf{\Gamma}(M/R) \cdot \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V^2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial V^2}{\partial q_i} \right\} \tag{1.14}$$

où  $V^2 = \mathbf{V}(M/R) \cdot \mathbf{V}(M/R)$

**Exercice** Par exemple, pour les *coordonnées sphériques*, on a  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \lambda$  et  $q_3 = \varphi$ , puis on définit  $\mathbf{u}$  par  $\mathbf{OM} = r \mathbf{u}$ .



On en déduit :

$$\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial r} = \mathbf{u} \qquad \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \lambda} = r \cos \varphi \mathbf{v} \qquad \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \varphi} = r \mathbf{w}$$

où  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  forment la *base locale* des coordonnées sphériques, directe et tangente aux trois *lignes coordonnées* passant par  $M$ . On a ensuite :

$$\mathbf{V}(M/R) = \dot{r} \mathbf{u} + \dot{\lambda} r \cos \varphi \mathbf{v} + \dot{\varphi} r \mathbf{w} \qquad \text{puis} \qquad V^2 = \dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$



et enfin :

$$\Gamma(M/R) \cdot \frac{\partial \text{OM}}{\partial r} = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial V^2}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial V^2}{\partial r} \right) = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2$$

$$\Gamma(M/R) \cdot \frac{\partial \text{OM}}{\partial \lambda} = \frac{d}{dt} (r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda})$$

$$\Gamma(M/R) \cdot \frac{\partial \text{OM}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) + r^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\lambda}^2$$

## 2.2. Mouvement des repères, composition de mouvements

Soient 2 repères  $R_1 = O_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_1$  et  $R_2 = O_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{j}_2 \mathbf{k}_2$ .  $R_2$  est dit mobile par rapport à  $R_1$  si l'une au moins de ces conditions est remplie :

- $O_2$  est mobile dans  $R_1$  (ou  $\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2 = \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2(t)$ )
- les vecteurs  $\mathbf{i}_2 \mathbf{j}_2 \mathbf{k}_2$  exprimés dans la base  $\mathbf{i}_1 \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_1$  varient en fonction du temps (ou les  $(a_{ij})$  définis précédemment sont fonctions du temps).

Si la première condition est seule remplie,  $R_2$  est en *translation* par rapport à  $R_1$ . Si la deuxième condition est seule remplie,  $R_2$  est en *rotation* par rapport à  $R_1$  autour du point  $O_2$ , fixe dans  $R_1$ . Dans le cas général, le mouvement de  $R_2$  est la somme d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation.

Quand les vecteurs de base  $\mathbf{i}_2 \mathbf{j}_2 \mathbf{k}_2$  varient, ils doivent cependant rester orthogonaux et unitaires. On montre que cela implique l'existence d'un vecteur  $\boldsymbol{\Omega}_{R_2/R_1}$  appelé *vecteur rotation-instantanée* de  $R_2$  par rapport à  $R_1$ , tel que l'on ait :

$$\frac{d\mathbf{i}_2}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \mathbf{i}_2 \qquad \frac{d\mathbf{j}_2}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \mathbf{j}_2 \qquad \frac{d\mathbf{k}_2}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \mathbf{k}_2$$

On en déduit que tout point  $M$  *lié à*  $R_2$  (ou  $M \in R_2$ ), c'est-à-dire dont les coordonnées dans  $R_2$  sont constantes, a une vitesse relative à  $R_1$  égale à :

$$\frac{d_{R_1} \mathbf{O}_2 \mathbf{M}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \mathbf{O}_2 \mathbf{M}$$

soit

$$\mathbf{V}(M \in R_2/R_1) = \mathbf{V}(O_2/R_1) + \boldsymbol{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \mathbf{O}_2 \mathbf{M} \quad (1.15)$$

On reconnaît la somme de la vitesse de translation de  $O_2$  et de la vitesse de rotation autour de  $O_2$ .

Si le mouvement de  $R_2$  par rapport à  $R_1$  est réduit à **une seule rotation** d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $O_2 \mathbf{k}_2$  supposé confondu avec  $O_1 \mathbf{k}_1$  et ainsi fixe dans  $R_1$ , il est facile de voir que  $\boldsymbol{\Omega}_{R_2/R_1}$  est le vecteur  $\dot{\alpha} \mathbf{k}_1$  porté par cet axe de rotation, dont le module est la vitesse angulaire de rotation ; pour  $M$  lié à  $R_2$ , on a alors

$$\frac{d_{R_1} \mathbf{O}_2 \mathbf{M}}{d\alpha} = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{O}_2 \mathbf{M}$$

Si le mouvement de  $R_2$  est une rotation autour du point  $O_2$  supposé fixe dans  $R_1$ , le mouvement de rotation peut souvent se décomposer en plusieurs rotations effectuées chacune autour d'un axe bien choisi (par exemple les rotations d'Euler). Le vecteur rotation-instantanée est alors la somme des vecteurs rotation correspondant chacun à l'une des rotations, portés par chacun des axes associés.

Par exemple, supposons  $R_2$  repéré par rapport à  $R_1$  par les 3 **angles d'Euler** variables  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$ , correspondant aux rotations respectives autour de  $O_2 \mathbf{k}_1$ ,  $O_2 \mathbf{u}$  et  $O_2 \mathbf{k}_2$  ; tout point  $M$  lié à  $R_2$  peut alors être considéré comme fonction de ces trois angles lorsqu'on étudie son mouvement par rapport à  $R_1$  :  $\mathbf{O}_2 \mathbf{M} = \mathbf{O}_2 \mathbf{M}(\psi, \theta, \phi)$ , d'où l'on tire :

$$\mathbf{V}(M/R_1) = \frac{d_{R_1} \mathbf{O}_2 \mathbf{M}}{dt} = \frac{\partial_{R_1} \mathbf{O}_2 \mathbf{M}}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial_{R_1} \mathbf{O}_2 \mathbf{M}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial_{R_1} \mathbf{O}_2 \mathbf{M}}{\partial \phi} \dot{\phi}$$

Du résultat précédent correspondant à **une seule rotation** autour d'un axe fixe, et de la définition des angles d'Euler, on tire aussi :

$$\frac{\partial_{R_1} \mathbf{O}_2 \mathbf{M}}{\partial \psi} = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{O}_2 \mathbf{M} \qquad \frac{\partial_{R_1} \mathbf{O}_2 \mathbf{M}}{\partial \theta} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{O}_2 \mathbf{M} \qquad \frac{\partial_{R_1} \mathbf{O}_2 \mathbf{M}}{\partial \phi} = \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{O}_2 \mathbf{M}$$

On en déduit :

$$\boldsymbol{\Omega}_{R_2/R_1} = \dot{\psi} \mathbf{k}_1 + \dot{\theta} \mathbf{u} + \dot{\phi} \mathbf{k}_2$$

L'accélération d'un point  $M$  **lié à  $R_2$**  est alors :

$$\begin{aligned} \Gamma(M \in R_2/R_1) &= \frac{d_{R_1} \mathbf{V}(M/R_1)}{dt} \\ &= \Gamma(O_2/R_1) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}_{R_2/R_1}}{dt} \wedge \mathbf{O}_2 \mathbf{M} + \boldsymbol{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \mathbf{O}_2 \mathbf{M}) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Pour un point  $P$  mobile dans le repère  $R_2$  lui-même mobile par rapport à  $R_1$ , on a la formule de dérivation en repère mobile (ou *formule de Bour*) :

$$\frac{d_{R_1} \mathbf{O}_2 \mathbf{P}}{dt} = \frac{d_{R_2} \mathbf{O}_2 \mathbf{P}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \mathbf{O}_2 \mathbf{P}$$

On peut en déduire les lois de composition des vitesses et des accélérations :

$$\underbrace{\mathbf{V}(P/R_1)}_{\text{vitesse relative à } R_1} = \underbrace{\mathbf{V}(P/R_2)}_{\text{vitesse relative à } R_2} + \underbrace{\mathbf{V}(P \in R_2/R_1)}_{\text{vitesse d'entraînement de } P \text{ par } R_2} \tag{1.17}$$

$$\underbrace{\Gamma(P/R_1)}_{\text{accélération relative à } R_1} = \underbrace{\Gamma(P/R_2)}_{\text{accélération relative à } R_2} + \underbrace{\Gamma(P \in R_2/R_1)}_{\text{accélération d'entraînement de } P \text{ par } R_2} + \underbrace{2\Omega_{R_2/R_1} \wedge \mathbf{V}(P/R_2)}_{\text{accélération de Coriolis}} \tag{1.18}$$

Notons que si  $R_2$  est en translation par rapport à  $R_1$ , le vecteur  $\Omega_{R_2/R_1}$  est nul : la vitesse ou l'accélération relative de  $P$  par rapport à  $R_1$  est la somme de celle de  $P$  par rapport à  $R_2$  et de celle de tout point lié à  $R_2$  dans son mouvement par rapport à  $R_1$ .

### 3. Rappels de cinétique

Soit un système matériel ( $S$ ), composé d'un nombre fini de particules matérielles  $P_i$  de masse  $m_i$ . La masse totale de ( $S$ ) est  $m_S = \sum_i m_i$ . Le *centre de masse* ou *centre de gravité* de ( $S$ ) est le point  $G$  tel que :

$$\sum_i m_i \mathbf{GP}_i = 0 \tag{1.19}$$

soit encore  $m_S \mathbf{OG} = \sum_i m_i \mathbf{OP}_i$  quelque soit le point  $O$ .

On rapporte les points  $P_i$ , et donc le système ( $S$ ), à un repère  $R$ . Dans le mouvement de ( $S$ ) par rapport à  $R$ , on définit les quantités cinétiques suivantes :

- L'*énergie cinétique* :

$$T(S/R) = \frac{1}{2} \sum_i m_i [\mathbf{V}(P_i/R)]^2 = \frac{1}{2} m_S [\mathbf{V}(G/R)]^2 + T(S/R_G) \tag{1.20}$$

où  $R_G$  est le repère d'origine  $G$  en *translation* par rapport à  $R$ .

- La *quantité de mouvement* :

$$\mathbf{p}(S/R) = \sum_i m_i \mathbf{V}(P_i/R) = m_S \mathbf{V}(G/R) \quad (1.21)$$

- Le *moment cinétique* en un point  $O$  quelconque :

$$\mathbf{C}_O(S/R) = \sum_i m_i \mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}(P_i/R) \quad (1.22)$$

De la définition du centre de masse, on tire notamment :  $\mathbf{C}_G(S/R) = \mathbf{C}_G(S/R_G)$ . La quantité de mouvement et le moment cinétique de  $(S)$  en  $O$  sont les éléments de réduction en  $O$  du *torseur cinétique* de  $(S)$ . Par ‘transport’ de moment, on a encore :

$$\mathbf{C}_O(S/R) = \mathbf{C}_G(S/R_G) + \mathbf{OG} \wedge \mathbf{p}(S/R)$$

- La *quantité d'accélération* :

$$\mathbf{a}(S/R) = \sum_i m_i \mathbf{\Gamma}(P_i/R) = m_S \mathbf{\Gamma}(G/R) \quad (1.23)$$

- Le *moment dynamique* en un point  $O$  quelconque :

$$\mathbf{D}_O(S/R) = \sum_i m_i \mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{\Gamma}(P_i/R) \quad (1.24)$$

De la définition du centre de masse, on tire encore :  $\mathbf{D}_G(S/R) = \mathbf{D}_G(S/R_G)$ . La quantité d'accélération et le moment dynamique de  $(S)$  en  $O$  sont les éléments de réduction en  $O$  du *torseur dynamique* de  $(S)$ . Par 'transport' de moment, on a encore :

$$\mathbf{D}_O(S/R) = \mathbf{D}_G(S/R_G) + \mathbf{OG} \wedge \mathbf{a}(S/R)$$

En relation avec le moment cinétique, on a :

$$\mathbf{D}_O(S/R) = \frac{d_R \mathbf{C}_O(S/R)}{dt} + m_S \mathbf{V}(O/R) \wedge \mathbf{V}(G/R) \tag{1.25}$$

où le deuxième terme s'annule si  $O$  est fixe dans  $R$ , ou si  $O$  coïncide avec  $G$ , ou si  $O$  et  $G$  ont des vitesses parallèles.

Les expressions précédentes s'étendent à des systèmes matériels formés d'une distribution continue de points : On remplace la masse  $m_i$  d'un point  $P_i$  par la masse élémentaire  $dm(P)$  située en  $P$ , et les sommations finies sur les points  $P_i$  par des intégrales. Ainsi, pour toute quantité  $q(P)$  continue définie en chaque point  $P$ , l'intégrale  $\int_{P \in (S)} q(P) dm(P)$  vient remplacer la sommation  $\sum_i m_i q(P_i)$  dans ces définitions.

Si  $(S)$  est un système solide, les expressions de l'énergie cinétique et du moment cinétique s'expriment en fonction du vecteur rotation  $\boldsymbol{\Omega}_{S/R}$  du solide (ou vecteur rotation d'un repère lié à ce solide). Les vitesses des points  $P$  liés au solide sont en effet distribuées autour de  $G$  selon la relation  $\mathbf{V}(P/R) = \mathbf{V}(G/R) + \boldsymbol{\Omega}_{S/R} \wedge \mathbf{GP}$  ; on trouve alors notamment :

$$\mathbf{C}_G(S/R_G) = \int_{P \in (S)} \mathbf{GP} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{S/R} \wedge \mathbf{GP}) dm(P) = \mathbf{I}_G^{(S)}(\boldsymbol{\Omega}_{S/R}) \tag{1.26}$$

où  $\mathbf{I}_G^{(S)}$  est l'opérateur d'inertie de  $(S)$  en  $G$ . Dans un repère  $G\mathbf{i}j\mathbf{k}$  lié à  $(S)$ , cet opérateur, linéaire, est représenté

par une matrice symétrique :  $\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$ , dite *matrice d'inertie* où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les moments d'inertie de  $(S)$  par rapport aux axes respectifs  $G\mathbf{i}$ ,  $G\mathbf{j}$  et  $G\mathbf{k}$ , et où  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont les produits d'inertie. Si  $x, y, z$  sont les coordonnées de  $P$  dans  $G\mathbf{ijk}$  et  $dm$  la masse élémentaire en  $P$ , on a plus précisément :

$$\begin{aligned} A &= \int_{P \in (S)} (y^2 + z^2) dm & B &= \int_{P \in (S)} (x^2 + z^2) dm & C &= \int_{P \in (S)} (x^2 + y^2) dm \\ D &= \int_{P \in (S)} yz dm & E &= \int_{P \in (S)} xz dm & F &= \int_{P \in (S)} xy dm \end{aligned} \tag{1.27}$$

Pour l'énergie cinétique du solide, on trouve de même :

$$T(S/R_G) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_{S/R} \cdot \mathbf{I}_G^{(S)}(\boldsymbol{\Omega}_{S/R}) \tag{1.28}$$

## 4. Rappels de la dynamique classique

Pb<sub>1</sub>

La dynamique est la formulation mathématique du *principe de causalité* appliqué aux expériences de mécanique :

- Un point matériel ne se met pas spontanément en mouvement.
- Son mouvement est une conséquence de son *inertie* et des *forces* qui agissent sur lui.

On recherche bien sûr des lois du mouvement générales et universelles. Cependant, le mouvement est parfois une notion relative (mouvement dans un certain repère), et l'universalité supposée des lois de la mécanique ne pourra se vérifier que si le repère dans lequel on étudie un mouvement, est indépendant de tous les observateurs possibles de ce mouvement. Par exemple, il serait absurde de rechercher quelles forces physiques agissent sur le

Soleil pour expliquer son mouvement apparent vu de la Terre supposée fixe, à savoir un mouvement de rotation à raison d'un tour par jour sur une orbite de 150 millions de kilomètres de rayon !

On admet donc les principes suivants :

- Il existe un repère privilégié ou *repère absolu* dans lequel les lois du mouvement sont universelles (*principe d'universalité*).
- Dans ce repère privilégié, un point matériel *isolé* a une accélération nulle (*principe d'inertie*). Alors, dans tout repère en translation rectiligne et uniforme par rapport au repère absolu, ce point a aussi une accélération nulle. De tels repères sont appelés *repères galiléens*.
- Aucune expérience mécanique ne permet de mettre en évidence le mouvement d'un repère galiléen par rapport à un autre repère galiléen (*principe de relativité* de Galilée). Les mouvements dans un repère galiléen seront donc qualifiés d'absolus.
- Tant que la vitesse des corps matériels reste petite devant la vitesse de la lumière, on a une très bonne approximation des lois de la mécanique en supposant que le temps s'écoule de la même façon dans tous les repères galiléens.

#### 4.1. Principe fondamental de la mécanique newtonienne

Les actions mécaniques qui influent sur le mouvement des points matériels sont schématisables par des vecteurs liés en ces points et appelés *vecteurs-force* ou simplement *forces*. Les expériences de mécanique sur les corps matériels finis ont permis de dégager une *loi fondamentale de la dynamique* :

*Un point matériel  $P$  soumis à une force  $\mathbf{F}(P)$  acquiert, dans un repère galiléen  $R_a$ , une accélération  $\Gamma(P/R_a)$  proportionnelle à  $\mathbf{F}(P)$  et de même sens ; le coefficient de proportionnalité,  $m$ , ne dépend que*



de la nature physique de la particule matérielle correspondante ; c'est la **masse inerte** de la particule :

$$m \mathbf{\Gamma}(P/R_a) = \mathbf{F}(P) \quad (1.29)$$

Les propriétés d'additivité des vecteurs sont une façon d'exprimer le principe de superposition des états (additivité des forces). Dans le cas d'un système matériel composé d'un ensemble discret (ou continu) de points matériels  $P_i$  de masses  $m_i$ , on peut considérer que chaque  $P_i$  subit une certaine force  $\mathbf{F}(P_i)$ , et l'on a pour chacun :

$$m_i \mathbf{\Gamma}(P_i/R_a) = \mathbf{F}(P_i)$$

En regroupant tout ou partie des  $P_i$  dans un sous-système  $(S)$ , on peut additionner membre à membre les équations fondamentales correspondant à ces points :

$$\sum_{P_i \in (S)} m_i \mathbf{\Gamma}(P_i/R_a) = \sum_{P_i \in (S)} \mathbf{F}(P_i)$$

c'est-à-dire aussi :

$$M_S \mathbf{\Gamma}(G_S/R_a) = \mathbf{R}(S) \quad (1.30)$$

où  $M_S$  et  $G_S$  sont respectivement la masse et le centre de masse de  $(S)$ , et où  $\mathbf{R}(S)$  est la somme (ou résultante) de toutes les forces s'exerçant sur  $(S)$ .

On peut aussi additionner membre à membre les équations fondamentales après leur avoir appliqué le calcul du moment en un point quelconque  $O$  :

$$\sum_{P_i \in (S)} \mathbf{OP}_i \wedge m_i \mathbf{\Gamma}(P_i/R_a) = \sum_{P_i \in (S)} \mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{F}(P_i)$$

c'est-à-dire, en introduisant le moment dynamique de  $(S)$  en  $O$  et le moment résultant en  $O$  de toutes les forces s'exerçant sur  $(S)$  :

$$\mathbf{D}_O(S/R_a) = \mathbf{M}_O(S) \quad (1.31)$$

Les 2 vecteurs  $[\mathbf{R}(S), \mathbf{M}_O(S)]$  forment les *éléments de réduction* en  $O$  d'un torseur appelé *torseur des forces* s'exerçant sur  $(S)$ . Le principe fondamental de la dynamique peut alors aussi s'exprimer en disant que dans un repère galiléen, le torseur dynamique de  $(S)$  est égal au torseur de toutes les forces s'exerçant sur  $(S)$ . Cette formulation est surtout intéressante pour l'étude du mouvement des systèmes composés de solides.

## 4.2. Principe d'opposition de l'action et de la réaction

Lorsqu'une particule  $P_1$  exerce sur une particule  $P_2$  une force  $\mathbf{F}_{12}$ , alors  $P_2$  exerce sur  $P_1$  une force  $\mathbf{F}_{21}$  opposée à  $\mathbf{F}_{12}$  et de même module, c'est-à-dire  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ . Ces deux forces forment alors un torseur nul, à savoir :

|                           |  |
|---------------------------|--|
| résultante :              | $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$  |
| moment résultant en $O$ : | $\mathbf{OP}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{OP}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} = 0 = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{F}_{12}$ |

La dernière égalité montre aussi que la force décrivant l'interaction de deux particules  $P_1$  et  $P_2$  est colinéaire à  $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$ .

De là on peut étendre ce principe à des systèmes matériels quelconques : Dans un tel système  $(S)$ , chaque particule subit des forces d'interaction provenant de chacune des autres particules de  $(S)$  et appelée *forces intérieures* à  $(S)$ , et éventuellement des forces provenant de particules n'appartenant pas à  $(S)$  et appelées *forces extérieures* à  $(S)$ . En considérant l'ensemble des particules de  $(S)$  et en leur appliquant le principe d'opposition

de l'action et de la réaction, on montre alors que le torseur de l'ensemble de toutes les forces intérieures à  $(S)$  est un torseur nul.

### 4.3. Théorèmes généraux

Les deux principes précédents entraînent immédiatement les deux théorèmes suivants de la mécanique newtonienne :

$$M_S \Gamma(G_S/R_a) = \mathbf{R}^{(\text{ext})}(S) \quad (1.32)$$

$$\mathbf{D}_{G_S}(S/R_a) = \frac{d\mathbf{C}_{G_S}(S/R_a)}{dt} = \mathbf{M}_{G_S}^{(\text{ext})}(S) \quad (1.33)$$

où  $\mathbf{R}^{(\text{ext})}(S)$  et  $\mathbf{M}_{G_S}^{(\text{ext})}(S)$  désignent le torseur, réduit en  $G_S$ , de toutes les **forces extérieures** à  $(S)$ .

Ce torseur est nul par définition si le système  $(S)$  est **isolé** dans l'espace. Dans ce cas, le mouvement de  $G_S$  est rectiligne et uniforme, et le vecteur  $\mathbf{C}_{G_S}(S/R_a)$ , moment cinétique du système en  $G_S$ , est constant.

### 4.4. Différents types de forces

On peut classer les forces de plusieurs manières :

#### 4.4.1. forces réelles et forces d'inertie

Si l'on veut représenter le mouvement d'une particule ou d'un système dans un repère non galiléen, il faut tenir compte de forces supplémentaires dépendant du mouvement du repère. Ce sont des forces fictives, dites *forces d'inertie*. Dans un repère non galiléen, l'accélération  $\Gamma_r$  relative à ce repère s'exprime en fonction de l'accélération  $\Gamma_a$  absolue, et des accélérations d'entraînement et de Coriolis  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_c$  :  $\Gamma_r = \Gamma_a - \Gamma_e - \Gamma_c$ . En identifiant  $m \Gamma_a$  à la force réelle  $\mathbf{F}$  subie par  $P$ , on obtient :

$$m \Gamma_r = \mathbf{F} - m \Gamma_e - m \Gamma_c \quad (1.34)$$

Les quantités  $-m \Gamma_e$  et  $-m \Gamma_c$  sont la *force d'inertie d'entraînement* et la *force d'inertie de Coriolis*.

En mécanique céleste, les repères utilisés sont souvent en translation (non uniforme) par rapport aux repères galiléens. Leur vecteur rotation  $\Omega$  est alors nul, ainsi que  $\Gamma_c$ , et l'accélération d'entraînement est réduite à l'accélération d'un point de ce repère, par exemple son origine. Au contraire, lorsqu'on utilise des repères tournants, il faut tenir compte de  $\Gamma_e$  et de  $\Gamma_c$ .

#### 4.4.2. forces de liaison et forces de champ

Dès qu'un système matériel est composé de plusieurs particules, chacune d'elles est l'objet de forces provenant notamment de l'action des autres particules de ce système.

Les *forces de liaison* sont des forces qui maintiennent le système matériel selon un certain assemblage donné, l'obligeant à avoir un mouvement respectant ces liaisons. Ce peuvent être les forces de cohésion qui assurent par exemple la rigidité d'un solide, ou qui régissent ses déformations. Ce peuvent être aussi des forces intervenant au contact entre plusieurs parties du système, qui s'appliquent aux points de contact et qui disparaissent si le contact

se rompt (systèmes articulés par exemple, ou en appui sur des supports). Ces forces de liaison sont généralement difficiles à modéliser car elles dépendent souvent étroitement de la composition, de la forme ou de l'état des surfaces qui composent le système. De ce fait, elles sont le plus souvent inconnues à priori et c'est l'observation du mouvement des diverses parties du système qui permet de les mettre en évidence et de les déterminer.

Ce type de forces intervient rarement en mécanique céleste car on y étudie essentiellement des mouvements de corps solides libres de tout contact. Cependant, les mouvements des satellites artificiels peuvent être affectés par le frottement atmosphérique s'ils se rapprochent trop de la Terre, ou peuvent dépendre des mécanismes éventuellement articulés qui les composent.

Les *forces de champ* représentent au contraire des actions qui s'exercent à distance et qui sont bien connues, données par les lois de la physique (forces de gravitation, forces électromagnétiques...). En mécanique céleste, c'est essentiellement la gravitation universelle qui constitue le moteur des systèmes étudiés. On verra en §4-15.2 comment on modélise la gravitation entre des corps quelconques; examinons cependant dès maintenant le cas élémentaire de deux particules ponctuelles, dans le cadre de la mécanique classique ou newtonienne.

La loi de Newton nous dit que deux masses ponctuelles  $m_1$  et  $m_2$  situées en des points  $P_1$  et  $P_2$  s'attirent proportionnellement à leurs masses et à l'inverse du carré de leur distance. Ainsi,  $P_1$  exerce sur  $P_2$  la force :

$$\mathbf{F}_{12} = - \frac{K m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2}{r} \quad (1.35)$$

où  $r$  désigne la distance  $|\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2|$  et  $K$  la constante de la gravitation universelle. Inversement, par symétrie,  $P_2$  exerce sur  $P_1$  la force opposée :

$$\mathbf{F}_{21} = - \frac{K m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1}{r}$$

Ces deux forces n'existent que par la présence des 2 masses placées en  $P_1$  et  $P_2$ . Cependant, la modélisation de ces forces permet de dire que  $P_1$  signale sa présence dans tout l'espace environnant par 'l'émission' d'un

*champ de gravitation* dont la valeur en un point  $P$  est :

$$\mathbf{G}_1(P) = -\frac{K m_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}}{|\mathbf{P}_1 \mathbf{P}|^3} \quad (1.36)$$

C'est un champ de vecteurs tous dirigés vers  $P_1$ , dépendant de la masse  $m_1$  placée en ce point, et calculable en tout point  $P$  autre que  $P_1$ . Alors, une masse  $m_2$  est placée en un point  $P_2$ , subit la force  $m_2 \mathbf{G}_1(P_2)$ . Inversement,  $P_2$  'émet' aussi son propre champ de gravitation :  $\mathbf{G}_2(P) = -\frac{K m_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}}{|\mathbf{P}_2 \mathbf{P}|^3}$ , qui exerce sur  $m_1$  en  $P_1$  la force  $m_1 \mathbf{G}_2(P_1)$ . D'ailleurs, ces deux champs se superposent de telle sorte qu'en tout point  $P$  autre que  $P_1$  et  $P_2$ , on trouve le champ de gravitation  $\mathbf{G}_1(P) + \mathbf{G}_2(P)$ .

L'intérêt d'introduire cette notion de champ de gravitation vient de ce que ce **champ vectoriel** est représentable à partir d'un **champ scalaire**, donc plus simple, appelé *potentiel de gravitation*. En effet, on vérifie aisément que  $\mathbf{G}_1(P)$  par exemple dérive du potentiel  $U_1(P)$  :

$$U_1(P) = \frac{K m_1}{|\mathbf{P}_1 \mathbf{P}|} \quad (1.37)$$

par la relation

$$\mathbf{G}_1(P) = \mathbf{grad}_P(U_1(P)) \quad (1.38)$$

où  $\mathbf{grad}_P$  est l'opérateur *gradient en P*, qui est défini dans un repère cartésien  $Oijk$  où  $P$  a pour coordonnées  $(x, y, z)$ , par :

$$\mathbf{grad}_P = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.39)$$

De même,  $U_2(P) = \frac{K m_2}{|\mathbf{P}_2 \mathbf{P}|}$  est le potentiel de gravitation en  $P$  de la masse  $m_2$  située en  $P_2$ , et le potentiel de gravitation des deux masses au point  $P$  est la somme  $U_1(P) + U_2(P)$ .

C'est cette propriété d'additivité des champs et des potentiels qui permettra plus loin d'établir le champ et le potentiel de gravitation des corps quelconques. Il est cependant intéressant de connaître dès maintenant ce résultat : Si la répartition de la matière dans un système admet la symétrie sphérique de centre  $O$ , son champ de gravitation (et son potentiel) est le même que si toute sa masse était concentrée en  $O$ . Or c'est sensiblement le cas des planètes et du Soleil. Cela justifie le fait qu'on puisse étudier le mouvement des planètes et des satellites avec une très bonne approximation en considérant ces corps comme ponctuels.

**Remarque 1.** Les masses qui interviennent dans la loi de la gravitation universelle sont à priori différentes de la masse  $m^{(i)}$ , dite *masse inerte*, qui intervient dans la loi fondamentale :  $m^{(i)} \Gamma = \mathbf{F}$ . Les masses de la gravitation sont les *masses graves* ou masses pesantes ( $m^{(p)}$ ) qui mesurent la susceptibilité gravitationnelle des corps, tandis que la masse inerte mesure la résistance des corps aux changements de vitesse. Sur Terre, si  $\mathbf{F}$  est le poids d'un objet ( $\mathbf{F} = m^{(p)} \mathbf{g}$ ), on trouve en fait que la loi  $\Gamma = \frac{m^{(p)}}{m^{(i)}} \mathbf{g}$  est vérifiée expérimentalement avec  $\frac{m^{(p)}}{m^{(i)}} = 1$  à  $10^{-11}$  près (expériences de Eötvös). La coïncidence de ces 2 coefficients d'origine différente est inexplicable par la mécanique newtonienne. Elle constitue au contraire l'une des bases de la relativité générale d'Einstein : La gravitation y est une propriété géométrique de l'espace-temps ; tout corps, de part sa masse, provoque une distorsion de l'espace environnant ; cette courbure apparaît aux autres corps qui s'y trouvent plongés, comme une accélération. L'obéissance d'une masse à la gravitation n'est plus alors qu'une manifestation de son inertie et la distinction entre masse pesante et masse inerte disparaît. On adopte donc pour  $m^{(i)}$  et  $m^{(p)}$  une notation unique  $m$ .

**Remarque 2.** On peut penser que généralement le champ de gravitation d'un système matériel est connu ; cela dépend en fait du degré de connaissance que l'on a de la répartition de leurs masses, ce qui n'est pas toujours le cas en mécanique céleste. Si ces masses sont inconnues, ou mal connues, c'est l'observation des mouvements qui permettra éventuellement de les déterminer, par comparaison avec les mouvements théoriques déduits des équations du mouvement et dans lesquelles les masses sont laissées sous forme de paramètres indéterminés.

## 4.5. Théorème de l'énergie cinétique

Considérons le cas général d'un système ( $S$ ) composé de points  $P_i$  de masses  $m_i$  subissant un ensemble de forces  $\mathbf{F}(P_i)$ . En multipliant membre à membre l'équation fondamentale de chaque point par la vitesse de ce point, et en sommant pour tous les points de ( $S$ ), on obtient :

$$\sum_{P_i \in (S)} m_i \boldsymbol{\Gamma}(P_i/R_a) \cdot \mathbf{V}(P_i/R_a) = \sum_{P_i \in (S)} \mathbf{F}(P_i) \cdot \mathbf{V}(P_i/R_a) \quad (1.40)$$

Le membre de gauche n'est autre que la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de ( $S$ ) dans  $R_a$ , tandis que celui de droite représente la *puissance* dans  $R_a$  de toutes les forces appliquées sur ( $S$ ) aux points  $P_j$  :

$$\frac{dT(S/R_a)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{P_i \in (S)} m_i [\mathbf{V}(P_i/R_a)]^2 \right) = \sum_{P_i \in (S)} m_i \boldsymbol{\Gamma}(P_i/R_a) \cdot \mathbf{V}(P_i/R_a)$$

et

$$\mathcal{P}(\{\mathbf{F}(P_i) \mid P_i \in (S)\}/R_a) = \sum_{P_i \in (S)} \mathbf{F}(P_i) \cdot \mathbf{V}(P_i/R_a)$$

La puissance de certaines forces peut être nulle. Par exemple, on a vu que les forces intérieures à un système forment un torseur nul ; si ce système est un solide, on montre que la puissance de ces forces est nulle dans tout repère. Autre exemple : Si un système est soumis à des liaisons dites 'sans frottement' ou 'idéales', cela signifie que les forces d'interaction correspondantes ont une puissance nulle (ou ne consomment pas d'énergie).

En éliminant ainsi les forces dont la puissance est nulle, il peut arriver que les forces restantes aient une puissance dont l'expression soit la dérivée par rapport au temps d'une fonction  $W_S$ , dite *fonction de forces*,



c'est-à-dire que l'on a :

$$\sum_{P_i \in (S)} \mathbf{F}(P_i) \cdot \mathbf{V}(P_i/R_a) = \frac{dW_S}{dt}$$

On obtient alors, par intégration, l'*intégrale première de l'énergie cinétique* :

$$T(S/R_a) = W_S + h \quad (1.42)$$

où  $h$  est une constante d'intégration. La quantité  $-W_S$  est appelée *énergie potentielle* de  $(S)$ , et  $T(S/R_a) - W_S$  est l'énergie totale qui est ainsi constante ; on dit que le système conserve son énergie, ou que c'est un *système conservatif*.

Ce cas intervient par exemple si l'ensemble des forces de champ appliquées en chaque point  $P_i$  est le gradient en  $P_i$  d'une fonction  $W_S$ , fonction des coordonnées de ces points ; en effet, en notant  $x_i, y_i$  et  $z_i$  les coordonnées de  $P_i$  dans le repère galiléen  $R_a = O\mathbf{i}_0\mathbf{j}_0\mathbf{k}_0$ , on peut alors écrire :

$$\mathbf{F}(P_i) = \mathbf{grad}_{P_i} W_S = \frac{\partial W_S}{\partial x_i} \mathbf{i}_0 + \frac{\partial W_S}{\partial y_i} \mathbf{j}_0 + \frac{\partial W_S}{\partial z_i} \mathbf{k}_0$$

et en déduire :

$$\sum_{P_i \in (S)} \mathbf{grad}_{P_i} W_S \cdot \frac{d_{R_a} \mathbf{OP}_i}{dt} = \sum_{P_i \in (S)} \frac{\partial W_S}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial W_S}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial W_S}{\partial z_i} \dot{z}_i = \frac{dW_S}{dt} \quad (1.43)$$

C'est donc notamment le cas des systèmes de particules ou de solides sans contacts mutuels et en interaction gravitationnelle. De tels systèmes sont conservatifs.

**Remarque .** L'intégrale de l'énergie cinétique peut aussi exister dans des mouvements relatifs correspondant à des repères non galiléens.

## 5. Mise en équations et résolution des problèmes de mécanique céleste

La Mécanique Céleste qui nous intéressera particulièrement concerne les mouvements des divers corps du système solaire, qu'ils soient naturels ou artificiels. Avant de mettre en équations ces mouvements, il faut définir géométriquement le système, en choisissant notamment les coordonnées, ou plus généralement les variables, qui soient les mieux adaptées. On verra que ce choix est délicat car de lui dépend la plus ou moins grande complexité des équations. Il faut ensuite analyser les forces en présence et les exprimer en fonction des variables choisies. Notons que les systèmes étudiés en Mécanique Céleste sont en mouvement sous l'action presque exclusive de la gravitation et que les forces de liaison sont rarement impliquées.

On peut alors appliquer les théorèmes généraux pour chaque partie du système dont on veut étudier le mouvement en particulier, et en y distinguant bien les forces intérieures des forces extérieures. En effet, bien que l'on sache que le système solaire comprend le Soleil, les grosses planètes, les satellites de ces planètes, les petites planètes, les comètes . . . , et qu'en toute rigueur, ces corps n'étant pas des masses ponctuelles, il faille tenir compte de leur forme, la résolution globale des équations du mouvement de l'ensemble du système solaire n'est pas réaliste. On est amené à étudier séparément des sous-systèmes simplifiés, représentant une certaine approximation du système réel. Par exemple, on peut décomposer le système solaire en considérant à part le Soleil et tout ou partie des grosses planètes assimilées à des masses ponctuelles, en négligeant donc la forme des planètes et l'influence de leurs satellites ; d'un autre côté, le système des satellites d'une planète peut être étudié à part, en tenant compte de l'influence du Soleil et de la forme de la planète sur chaque satellite, et éventuellement en négligeant les attractions réciproques des satellites entre eux ou l'attraction qu'ils subissent de la part des autres planètes. Ce sont en fait les caractéristiques physiques des masses en présence (en particulier leur grandeur et leur répartition spatiale) qui permettent de simplifier plus ou moins les systèmes en négligeant les forces qui donneraient des effets non mesurables à un niveau de précision donné. On verra notamment que de nombreux systèmes sont ainsi assimilables à des systèmes de 2 corps subissant seulement des perturbations de la part des autres corps.

L'objet de ce cours sera ainsi de présenter des méthodes de résolution de problèmes simplifiés mais cependant représentatifs, à un niveau de précision donné, de mouvements réels de satellites ou de planètes. La mise en équations de ces mouvements et leur résolution pourra éventuellement être faites aussi par les méthodes hamiltoniennes décrites dans la partie 2 et qui représentent une autre façon d'utiliser les principes fondamentaux de la mécanique générale.

## Deuxième partie

# Éléments de mécanique hamiltonienne

6 Formulation lagrangienne des équations de la mécanique

7 Formulation hamiltonienne des équations de la mécanique

8 Transformations canoniques

9 Fonctions génératrices de transformations canoniques

9.1 Résolution par la méthode d'Hamilton-Jacobi

9.2 Application à la méthode des variations des constantes arbitraires

## 6. Formulation lagrangienne des équations de la mécanique

On a vu en §1-4.1 le principe fondamental de la mécanique newtonienne appliqué à un ensemble de points  $P_i$  de masses  $m_i$  subissant chacun une force  $\mathbf{F}(P_i)$ . L'équation vectorielle  $m_i \Gamma(P_i/R_a) = \mathbf{F}(P_i)$  qui donne le mouvement de chacun de ces points dans un repère galiléen, est équivalente à l'équation scalaire suivante :

$$m_i \Gamma(P_i/R_a) \cdot \mathbf{W}_i = \mathbf{F}(P_i) \cdot \mathbf{W}_i \quad \forall \mathbf{W}_i \quad (2.1)$$

Le vecteur  $\mathbf{W}_i$  doit être un vecteur **arbitraire quelconque** ; si  $\mathbf{W}_i = \delta \mathbf{P}_i$  représente un déplacement arbitraire du point  $P_i$ , le produit scalaire  $\mathbf{F}(P_i) \cdot \delta \mathbf{P}_i$  représente le *travail* de la force  $\mathbf{F}(P_i)$  dans ce déplacement ; si  $\mathbf{W}_i = \mathbf{V}_i^*$  représente une vitesse arbitraire du point  $P_i$ , le produit scalaire  $\mathbf{F}(P_i) \cdot \mathbf{V}_i^*$  représente la **puissance** de la force  $\mathbf{F}(P_i)$  dans ce mouvement. Le déplacement de  $P_i$  ainsi considéré doit être quelconque : Ce n'est pas uniquement le déplacement **réel** subi par  $P_i$  quand cette force agit pendant un temps élémentaire  $\delta t$  ; c'est un déplacement

quelconque et arbitraire que l'on qualifie de *virtuel*, et le travail correspondant est appelé *travail virtuel* de  $\mathbf{F}(P_i)$ . De même,  $\mathbf{V}_i^*$  représente une *vitesse virtuelle* et la puissance correspondante est la *puissance virtuelle* des forces.

On peut ainsi remplacer le principe fondamental de la dynamique, étendu aux systèmes de points, par le suivant appelé *principe des travaux virtuels* :

*Pour toute partie (S) d'un système matériel, le travail virtuel de toutes les forces appliquées sur les particules  $P_i$  de (S) est égal au travail virtuel des quantités d'accélération (mesurées dans un repère galiléen) :*

$$\sum_{P_i \in (S)} m_i \Gamma(P_i/R_a) \cdot \delta \mathbf{P}_i = \sum_{P_i \in (S)} \mathbf{F}(P_i) \cdot \delta \mathbf{P}_i \quad \forall \delta \mathbf{P}_i \quad (2.2)$$

*quels que soient les déplacements virtuels des particules du système.*

Les systèmes que l'on considérera en mécanique céleste sont composés d'un nombre fini de particules ou de solides. Ils sont donc représentables par un nombre fini de paramètres. Si un tel système dépend de  $n$  paramètres géométriques  $\{q_j\}_{(j=1 \dots n)}$  *indépendants*, on dit qu'il possède  $n$  degrés de liberté [par exemple, un solide a 6 degrés de liberté lorsqu'il est libre de se déplacer dans l'espace : 3 variables décrivent le mouvement de son centre de masse, et 3 autres variables donnent le mouvement de rotation autour de son centre (angles d'Euler par exemple)]. Les particules  $P_i$  du système peuvent alors être repérées à l'aide de ces  $n$  paramètres ou *coordonnées généralisées*, et un déplacement élémentaire de  $P_i$  se met sous la forme :

$$d\mathbf{P}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial q_j} dq_j$$

Si les  $n$  degrés de liberté tiennent compte de liaisons existant entre les diverses parties du système, cette expression représente un déplacement dit *compatible* avec ces liaisons. Un *déplacement virtuel compatible* avec ces

liaisons est alors donné par :

$$\delta \mathbf{P}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

où les  $\delta q_j$  sont des variations virtuelles quelconques des paramètres.

Ainsi, le principe des travaux virtuels s'exprime encore sous la forme :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{P_i \in (S)} m_i \Gamma(P_i/R_a) \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \sum_{P_i \in (S)} \mathbf{F}(P_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \forall \delta q_j$$

L'énergie cinétique absolue du système :  $T = T(S/R_a) = \frac{1}{2} \sum_{P_i \in (S)} m_i \mathbf{V}(P_i/R_a)^2$  peut être aussi exprimée en fonction des  $2n$  variables  $q_i$  et  $\dot{q}_i$ . En faisant la somme pour tous les  $P_i$  de la formules de cinématique (1.14) écrite pour chaque point, on obtient :

$$\sum_{P_i \in (S)} m_i \Gamma(P_i/R_a) \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

On peut écrire aussi :

$$\sum_{P_i \in (S)} \mathbf{F}(P_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial q_j} = \Phi_j(q_1, \dots, q_n)$$

**Exercice** où les  $\Phi_j$  sont les composantes des *forces généralisées* qui s'appliquent sur le système, exprimées elles aussi en fonction des  $q_i$  (si les forces initiales dépendaient en plus des vitesses des  $P_i$ , les fonctions  $\Phi_j$  dépendraient bien sûr aussi des  $\dot{q}_i$ ). On obtient ainsi :



Pb<sub>19</sub>

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^n \Phi_j \delta q_j \quad \forall \delta q_j \quad (2.3)$$

Comme cette égalité est vraie quels que soient les  $\delta q_j$ , et parce que les  $n$  paramètres  $q_j$  sont supposés indépendants les uns des autres, on en déduit les  $n$  équations différentielles suivantes :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \Phi_j \quad j = 1 \dots n} \quad (2.4)$$

Ces équations sont les *équations de Lagrange* du système ( $S$ ). Elles viennent d'être établies dans le cas où les  $n$  paramètres sont indépendants. Si au contraire il existe  $p$  relations de dépendance entre ces  $n$  paramètres ( $p < n$ ), soit :  $\{a_k(q_1, \dots, q_n) = 0\}_{k=1 \dots p}$ , des "déplacements" virtuels  $\delta q_j$  compatibles avec ces liaisons devront satisfaire les  $p$  contraintes :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

Les forces qui maintiennent ces liaisons développent un travail élémentaire exprimable sous la forme :

$$dW = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n \lambda_k \frac{\partial a_k}{\partial q_j} dq_j$$

où les  $\lambda_k$  sont des composantes (inconnues à priori) de ces forces. Le travail virtuel de ces efforts de liaison est alors simplement :

$$\delta W = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n \lambda_k \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \delta q_j$$

En supposant que ces efforts de liaisons n'étaient pas comptés dans les forces  $\mathbf{F}(P_i)$  qui engendraient les composantes  $\Phi_j$ , le principe des travaux virtuels est maintenant donné par :

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left[ \Phi_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \right] \delta q_j \quad \forall \delta q_j$$

Les expressions de  $T$  et des  $\Phi_j$  utilisées dans cette équation dépendent des  $n$  variables  $q_i$ , sans tenir compte des  $p$  relations de liaison existant entre elles. En fait, on considère donc ces variables comme indépendantes, et on déduit comme précédemment  $n$  équations de Lagrange, dépendant cependant de  $p$  *multipliateurs de Lagrange*  $\lambda_k$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \Phi_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \quad j = 1 \cdots n \quad (2.5)$$

Pour pouvoir résoudre (déterminer les  $q_i$  et les  $\lambda_k$ ), il faut compléter le système d'équations avec les  $p$  relations de liaison.

On obtient des équations analogues, avec multipliateurs, lorsque les contraintes dues aux liaisons sont directement de la forme  $\sum_j b_{kj} \delta q_j = 0$  sans que les  $b_{kj}$  soient les dérivées partielles de fonctions  $a_k$  par rapport à  $q_j$  ; dans (2.5), les  $b_{kj}$  viennent alors simplement remplacer les  $\frac{\partial a_k}{\partial q_j}$ . Notons encore qu'en mécanique céleste, les systèmes dynamiques sont rarement soumis à des liaisons physiques réelles de sorte que l'usage des équations "avec multipliateurs" est peu fréquent.

Dans le cas où certaines parties du système ont un mouvement imposé, donné en fonction du temps, l'énergie cinétique peut dépendre explicitement du temps, c'est-à-dire qu'on a :  $T \equiv T(q_i, \dot{q}_i, t)$ . Cela ne modifie pas les équations de Lagrange (2.4) si les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons correspondant au paramétrage du système sont faits à l'instant  $t$ , c'est-à-dire en considérant  $\delta t = 0$ . Sinon, il faut considérer  $t$



comme une  $(n + 1)^{\text{ième}}$  variable notée  $q_{n+1}$  et, en plus des  $n$  équations de Lagrange (2.4), on écrit l'équation analogue correspondant à  $j = n + 1$  ; il convient toutefois d'associer à  $q_{n+1}$  une vitesse  $\dot{q}_{n+1}$  égale à 1, mais on ne remplace  $q_{n+1}$  par  $t$  et  $\dot{q}_{n+1}$  par 1 qu'à la fin des calculs.

Dans le cas, fréquent en mécanique céleste, où les forces agissant sur le système ( $S$ ) dérivent d'un potentiel  $U$ , c'est-à-dire qu'il existe  $U$  tel que :

$$dU = \sum_{P_i \in (S)} \mathbf{F}(P_i) \cdot d\mathbf{P}_i$$

On dit encore que le travail élémentaire des forces est la différentielle totale d'une fonction  $U$ , fonction des points  $P_i$ . En exprimant  $U$  en fonction des  $q_j$ , on a par ailleurs :

$$dU = \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_j} dq_j \quad \text{et} \quad \sum_{P_i \in (S)} \mathbf{F}(P_i) \cdot d\mathbf{P}_i = \sum_{j=1}^n \Phi_j dq_j$$

de sorte qu'on identifie :

$$\Phi_j = \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

En notant  $L = T + U$ , les équations du mouvement se mettent alors sous la forme d'Euler-Lagrange :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1 \dots n} \tag{2.6}$$

$L$  est le *lagrangien* du système dynamique. Ces équations s'étendent aussi au cas où  $T$  et  $U$  dépendent explicitement du temps, de sorte qu'un lagrangien est généralement considéré comme fonction de  $2n + 1$  variables :

$L \equiv L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ . Un système dynamique vérifiant les équations (2.6) s'appelle aussi *système lagrangien*.

**Remarque .** Les équations d'Euler-Lagrange sont l'expression d'une propriété d'extrémum que l'on retrouve sous divers noms : principe de moindre action en mécanique, théorème de Fermat en optique, théorème d'Euler en mathématiques. On démontre en effet en mathématiques le résultat suivant :

Soit  $F(x, y, z)$  une fonction continue de 3 variables réelles  $x, y$  et  $z$ , dont les dérivées partielles sont continues jusqu'à l'ordre 2 au moins. Considérons alors, pour  $a$  et  $b$  fixés, l'intégrale suivante :

$$I_F(y) = \int_{x=a}^{x=b} F \left( x, y(x), \frac{dy}{dx} \right) dx$$

Cette intégrale prend des valeurs diverses suivant la fonction  $y(x)$  que l'on met dans  $F$ . Pour l'ensemble des fonctions  $y(x)$  qui prennent la même valeur en  $x = a$  et en  $x = b$  et qui diffèrent entre  $a$  et  $b$ , l'intégrale  $I_F(y)$  est extrémale si  $y(x)$  vérifie l'équation d'Euler :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

où l'on a noté  $y' = dy/dx$ .

Ce résultat se généralise d'ailleurs au cas où  $F$  est fonction de  $2n + 1$  variables :  $F(x, y_1, z_1, \dots, y_n, z_n)$ , pour lesquelles l'intégrale

$$I_F(y_1, \dots, y_n) = \int_{x=a}^{x=b} F (x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_n(x), y_n'(x)) dx$$

est extrémale si, pour tout  $i$ , on a :  $\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0$

Ainsi, dans le cas des équations de Lagrange, la trajectoire décrite par le système matériel entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ , correspond à un extrémum de l'intégrale :

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n) dt$$

La quantité  $I$  est l'*action* (dimension  $ML^2T^{-1}$ ) ; si les instants  $t_0$  et  $t_1$  sont très voisins, l'extrémum est en fait un minimum et l'on dit que les systèmes lagrangiens vérifient le *principe de moindre action*.

## 7. Formulation hamiltonienne des équations de la mécanique

Dans un système dynamique de lagrangien  $L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ , on peut encore transformer les équations d'Euler-Lagrange pour aboutir à un système d'équations mis sous une forme dite *canonique* qu'on appelle *équations d'Hamilton*.

Pour cela, à chacune des variables de position  $q_i$ , on associe une *variable conjuguée*  $p_i$  définie par la relation :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1 \dots n \quad (2.7)$$

Si  $q_i$  a la dimension d'une longueur,  $p_i$  a la dimension d'une quantité de mouvement ( $MLT^{-1}$ ) ; si  $q_i$  est une variable angulaire (sans dimension),  $p_i$  a la dimension d'un moment cinétique ( $ML^2T^{-1}$ ) et on parle dans ce cas de *moment conjugué* de  $q_i$ . Les  $n$  équations différentielles du second ordre d'Euler-Lagrange (2.6) se dédoublent alors en  $2n$  équations du premier ordre :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.8)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \text{solution de (2.7)}$$

On peut en effet interpréter les équations (2.7) comme  $n$  relations entre les  $p_i$  et les  $\dot{q}_i$  (ces relations sont d'ailleurs généralement linéaires car  $L = T + U$  est généralement, comme  $T$ , une forme quadratique des variables de vitesse). Pour pouvoir inverser le système (2.7), il suffit que le déterminant des dérivées secondes  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$  soit non nul.

En fait, on se sert de cette inversion pour exprimer en fonction des  $q_i$ , des  $p_i$  et de  $t$ , la quantité  $H$  définie par :

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \tag{2.9}$$

et ainsi transformée en  $H \equiv H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$  ; par différentiation, on a alors :

$$dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{2.10}$$

Par ailleurs, en différentiant l'expression (2.9), on obtient aussi :

$$dH = \sum_{i=1}^n \left( \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Les termes en  $d\dot{q}_i$  s'éliminent, d'après (2.7), et ensuite, par comparaison avec (2.10), on obtient les équations :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad -\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

soit encore, d'après (2.8) :  $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

On a donc finalement, à la place des  $n$  équations du second ordre que sont les équations de Lagrange,  $2n$  équations du premier ordre appelées *équations canoniques* ou *équations d'Hamilton* :

$$\boxed{\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{pour} \quad i = 1 \cdots n} \quad (2.11)$$

**Exercice**  où  $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$  est la fonction d'Hamilton ou *hamiltonien* du système dynamique. Un système dynamique régit par de telles équations (antisymétriques) est aussi appelé *système hamiltonien*.

Dans le cas des **systèmes conservatifs**, l'hamiltonien ne dépend pas du temps explicitement et représente l'énergie totale du système. En effet, si  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , la dérivée totale  $\frac{dH}{dt}$  se réduit à :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right)$$

et cette quantité est nulle d'après (2.11) ; donc  $H$  est constant.

Par ailleurs, avec  $L = T + U$  où  $U$  ne dépend que des variables  $q_i$ , les conjuguées  $p_i$  valent  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ . Or l'énergie cinétique  $T$  étant une forme quadratique des variables de vitesse  $\dot{q}_i$ , on a, d'après le théorème d'Euler sur les formes homogènes :  $\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$ . On en déduit :

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T - U = T - U$$

On reconnaît l'expression (1.42) du théorème de l'énergie cinétique, avec  $H$  représentant l'énergie totale du système et  $-U$  son énergie potentielle.

Dans le cas le plus général on peut décomposer  $L$  en  $L = L_2 + L_1 + L_0$  où  $L_2$ ,  $L_1$  et  $L_0$  sont respectivement des fonctions homogènes de degrés 2, 1 et 0 par rapport à l'ensemble des variables  $\dot{q}_i$ . En appliquant de nouveau le théorème d'Euler, on a alors  $\sum_i \frac{\partial L_k}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = kL^k$  pour  $k = 0$  à 2, de sorte que  $H$  peut se calculer ainsi :

$$H = \sum_i \frac{\partial(L_2 + L_1)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L_2 - L_1 - L_0 = L_2 - L_0$$

**Exemple :** Equations canoniques du mouvement d'un point  $P$  de masse  $m$ , mobile dans un plan fixe et attiré suivant la loi de Newton par un centre fixe  $O$  (problème de Kepler). On repère  $P$  par des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de pôle  $O$ . La force d'attraction est proportionnelle à une constante  $\mu$  et vaut :  $-m\mu/r^3 \mathbf{OP}$ . Elle dérive de la fonction  $U = m\mu/r$ . L'énergie cinétique de  $P$  est  $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ , et son énergie potentielle est  $-U$ . On en déduit le lagrangien  $L = T + U$  et l'hamiltonien :

$$H = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{m\mu}{r}$$

Les variables conjuguées  $p_r$  et  $p_\theta$  sont alors :

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

d'où l'on tire :  $\dot{r} = \frac{p_r}{m}$  et  $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$ , puis :

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{m\mu}{r}$$

On a enfin les équations canoniques du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} & \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{m\mu}{r^2} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} & \frac{dp_\theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}$$

On remarque que la dernière équation donne  $p_\theta$  constant (entraînant  $mr^2\dot{\theta} = p_\theta = \text{constante}$ , loi des aires). C'est en fait la non-présence explicite de la variable  $\theta$  dans l'hamiltonien qui induit cette intégrale première. Ainsi, lorsqu'un hamiltonien ne dépend pas explicitement de certaines variables, l'intégration des équations d'Hamilton relatives à leurs variables conjuguées devient immédiate. A la limite, si un hamiltonien ne dépend explicitement que de la moitié des variables, le système est complètement intégrable, les conjuguées de ces variables étant des constantes et ces variables elles-mêmes étant des fonctions linéaires de  $t$ . L'intérêt de la formulation canonique des équations de la mécanique vient de ce qu'il existe des règles pour changer de variables de telle sorte que les équations exprimées dans les nouvelles variables s'expriment avec un nouvel hamiltonien en conservant la forme canonique ; un tel changement de variables est appelé *transformations canoniques* ; si le système est intégrable, on peut en outre faire en sorte que la moitié des variables n'apparaissent plus explicitement dans le nouvel hamiltonien. La méthode des transformations canoniques est donc très intéressante pour la résolution des équations différentielles de la mécanique, d'autant plus que cette méthode peut être ensuite prolongée pour traiter les perturbations de systèmes intégrables.

## 8. Transformations canoniques

Considérons un système hamiltonien représenté par un jeu de variables canoniques  $(q_i, p_i)_{i=1\dots n}$  et un hamiltonien  $H(q_i, p_i, t)$ . Cela revient donc à dire que les  $q_i$  et les  $p_i$  vérifient les équations canoniques :

Pb19

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{pour} \quad i = 1 \cdots n \quad (2.12)$$

Supposons donné le changement de variables suivant, entre les anciennes variables  $(q_i, p_i)$  et les nouvelles  $(x_i, y_i)$ , explicité par  $2n$  fonctions  $f_i$  et  $g_i$  :

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n, t) \\ p_i &= g_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n, t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

On suppose aussi que ces  $2n$  équations peuvent s'inverser pour donner les  $(x_i, y_i)$  en fonction des  $(q_i, p_i)$ .

On recherche à quelles conditions ce changement de variables est canonique, c'est-à-dire conduit aussi à des équations canoniques en variables  $(x_i, y_i)$  :

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H'}{\partial y_i} \quad ; \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H'}{\partial x_i} \quad (i = 1, \cdots, n) \quad (2.14)$$

où  $H'$  est le nouvel hamiltonien (éventuellement différent de  $H$ ). On peut évaluer  $\dot{q}_i$  et  $\dot{p}_i$  à partir de (2.13), et identifier le résultat aux expressions (2.12) :

$$\dot{q}_i = \frac{df_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \dot{y}_j \right) + \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.15)$$

$$\dot{p}_i = \frac{dg_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \dot{y}_j \right) + \frac{\partial g_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.16)$$

Or, à l'aide de (2.13), on peut évaluer  $H$  en fonction des  $(x_j, y_j, t)$  ; soit  $H^*(x_j, y_j, t)$  cette expression de  $H$  :

$$H^*(x_j, y_j, t) \equiv H(q_i, p_i, t)$$



En désignant par  $\alpha$  l'une des variables  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  on peut évaluer  $\frac{\partial H^*}{\partial \alpha}$  :

$$\frac{\partial H^*}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial g_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \right)$$

Cette expression indique quelle combinaison linéaire des  $\frac{\partial H}{\partial p_i}$  et  $\frac{\partial H}{\partial q_i}$  il faut faire, en utilisant leurs expressions (2.15) et (2.16), pour calculer  $\frac{\partial H^*}{\partial \alpha}$  en fonction des  $\dot{x}_j$  et  $\dot{y}_j$  ; on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^*}{\partial \alpha} = & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial g_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \dot{x}_j + \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \frac{\partial g_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right) \dot{y}_j + \\ & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial g_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \frac{\partial g_i}{\partial t} \right) \end{aligned} \tag{2.17}$$

On appelle *crochet de Lagrange*  $[u, v]$  de la transformation définie par les  $f_i$  et  $g_i$  l'expression :

Pb<sub>19</sub>

$$[u, v] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial u} \frac{\partial g_i}{\partial v} - \frac{\partial f_i}{\partial v} \frac{\partial g_i}{\partial u} \right)$$

on a ainsi :

$$\frac{\partial H^*}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^n ([x_j, \alpha] \dot{x}_j + [y_j, \alpha] \dot{y}_j) + [t, \alpha] \tag{2.18}$$

On en déduit le théorème suivant :

**Théorème 1.** *Le changement de variables défini par les fonctions  $(f_i, g_i)$  est canonique si et seulement si les propriétés suivantes sont réunies, pour tout  $j$  et pour tout  $k$  :*

- $[x_j, y_k] = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$  (symbole de Kronecker)
- $[x_j, x_k] = 0$
- $[y_j, y_k] = 0$
- Il existe  $F^*(x_i, y_i, t)$  tel que  $[t, \alpha] = \frac{\partial F^*}{\partial \alpha}$  pour tout  $\alpha$  pris dans l'ensemble des variables  $(x_i, y_i)$

Le nouvel hamiltonien est alors :  $H'(x_i, y_i, t) = H^* - F^*$

**Remarque .** Si le changement de variables ne dépend pas explicitement de  $t$ , on a  $\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial g_i}{\partial t} = 0$  pour tout  $i$  ; les crochets  $[t, x_j]$  et  $[t, y_j]$  sont alors nuls quelque soit  $j$  et l'on peut prendre  $F^* = 0$ . Dans ce cas, l'hamiltonien conserve sa valeur :  $H' = H^* = H$

**Exercice Exemple :** On pourra vérifier que les changements de variables suivants sont canoniques et conservent la valeur de l'hamiltonien :



$$1. \begin{cases} q_i = \sqrt{2x_i} \cos y_i \\ p_i = \sqrt{2x_i} \sin y_i \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} q_1 = \sqrt{x_1/\omega_1} \cos y_1 + \sqrt{x_2/\omega_2} \cos y_2 \\ q_2 = -\sqrt{x_1/\omega_1} \cos y_1 + \sqrt{x_2/\omega_2} \cos y_2 \\ p_1 = \sqrt{x_1\omega_1} \sin y_1 + \sqrt{x_2\omega_2} \sin y_2 \\ p_2 = -\sqrt{x_1\omega_1} \sin y_1 + \sqrt{x_2\omega_2} \sin y_2 \end{cases} \quad \text{où } \omega_1 \text{ et } \omega_2 \text{ sont deux constantes}$$

Dans le cas général où le changement de variables dépend du temps, il reste cependant à trouver la fonction  $F^*$ . Le théorème suivant, qui donne une autre condition nécessaire et suffisante de canonicité d'un changement de variables, peut aider à trouver cette fonction.

**Théorème 2.** Pour qu'une transformation  $(q_i, p_i) \mapsto (x_j, y_j)$  soit canonique, il faut et il suffit qu'il existe  $F$  tel que la forme différentielle :

$$\sum_{j=1}^n (p_j dq_j - y_j dx_j) + F dt \quad (2.19)$$

soit une différentielle totale, et on a alors :  $F = H' - H^* = -F^*$

En effet, en supposant que ce soit une différentielle totale, montrons que les conditions de canonicité du théorème 1 sont satisfaites. Pour cela, exprimons d'abord la forme différentielle (2.19) en fonction des nouvelles variables (à l'aide de (2.13)) et identifions-la à la différentielle totale d'une fonction  $G(x_i, y_i, t)$  :

$$\sum_{j=1}^n g_j \left( \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f_j}{\partial y_k} dy_k \right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt \right) - \sum_{k=1}^n y_k dx_k + F dt = dG$$

Comme on a aussi :

$$dG = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial G}{\partial y_k} dy_k \right) + \frac{\partial G}{\partial t} dt$$

on obtient, en identifiant les coefficients de  $dx_k$ , de  $dy_k$  et de  $dt$  :

$$\sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial f_j}{\partial x_k} - y_k = \frac{\partial G}{\partial x_k} \quad (2.20)$$

$$\sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial f_j}{\partial y_k} = \frac{\partial G}{\partial y_k} \tag{2.21}$$

$$\sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial f_j}{\partial t} + F = \frac{\partial G}{\partial t} \tag{2.22}$$

En dérivant (2.20) par rapport à  $y_k$ , et (2.21) par rapport à  $x_k$ , puis en effectuant la différence membre à membre, on obtient :

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial g_j}{\partial y_k} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} + g_j \frac{\partial^2 f_j}{\partial y_k \partial x_k} \right) - 1 - \left( \frac{\partial g_j}{\partial x_k} \frac{\partial f_j}{\partial y_k} + g_j \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial y_k} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y_k \partial x_k} - \frac{\partial^2 G}{\partial x_k \partial y_k}$$

Si les fonctions  $f_j$  et  $G$  sont continues et à dérivées partielles continues, il reste :

$$[x_k, y_k] - 1 = 0$$

De même, si l'on dérive (2.20) par rapport à  $y_i$  (pour  $i \neq k$ ), et si l'on dérive par rapport à  $x_k$  l'équation (2.21) écrite en remplaçant  $k$  par  $i$ , on obtient :

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial g_j}{\partial y_i} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} + g_j \frac{\partial^2 f_j}{\partial y_i \partial x_k} \right) - 0 - \left( \frac{\partial g_j}{\partial x_k} \frac{\partial f_j}{\partial y_i} + g_j \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial y_i} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 G}{\partial x_k \partial y_i}$$

soit :  $[x_k, y_i] = 0$

On trouverait de la même façon :  $[x_k, x_i] = 0$  et  $[y_k, y_i] = 0$

Enfin, en soustrayant membre à membre la dérivée partielle de (2.20) [resp. (2.21)] par rapport à  $t$ , et la dérivée de (2.22) par rapport à  $x_k$  [resp.  $y_k$ ], on obtient :

$$[t, x_k] + \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{resp. } [t, y_k] + \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0)$$

D'après le **théorème 1**, ceci montre que le changement de variables est canonique et que si l'hamiltonien du système dans les anciennes variables est  $H$ , l'hamiltonien pour les nouvelles variables est  $H' = H^* + F$  (la fonction  $F^*$  du théorème 1 est donc ici égale à  $-F$ ) ; donc, la fonction  $F$  qui apparaît dans la forme différentielle (2.19) représente la différence entre le nouveau et l'ancien hamiltonien :

$$F = H' - H^* \quad \text{ou} \quad F = H' - H \quad (2.23)$$

Inversement, si le changement de variables est canonique, la forme différentielle (2.19) est une différentielle totale. Ceci résulte simplement du fait que dans un système hamiltonien, la forme différentielle  $\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt$  est déjà une différentielle totale lorsque les  $q_i$  et les  $p_i$  sont solutions des équations d'Hamilton ; on sait en effet qu'une forme différentielle  $\sum_i X_i dx_i$  est une différentielle totale si et seulement si  $\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$  quels que soient  $i$  et  $k$ . Or on a  $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0$  car les variables  $p_i$  et  $q_k$  sont indépendantes, et  $\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$  pour tout  $i$  car  $p_i$ , étant solution des équations, ne dépend que de  $t$ . De la même façon, en supposant le changement canonique,  $\sum_i y_i dx_i - H' dt$  est aussi une différentielle totale lorsque les  $x_i$  et les  $y_i$  vérifient les équations d'Hamilton avec l'hamiltonien  $H'$ . On en déduit donc que la forme différentielle (2.19) où  $F = H' - H$  est également une différentielle totale.

**Remarque .** Le fait que  $\sum_i p_i dq_i - H dt$  soit une différentielle totale peut aussi découler de la définition de l'action :  $dI = L dt$ , puisque d'après (2.9), on a aussi :  $\sum_i p_i dq_i - H dt = L dt$ .

Du **théorème 2**, on déduit encore 4 conditions équivalentes pour qu'un changement de variables soit canonique :

$$\sum_{j=1}^n (p_j dq_j - y_j dx_j) + (H' - H) dt = dG_1 \quad (2.24)$$

$$\sum_{j=1}^n (p_j dq_j + x_j dy_j) + (H' - H) dt = dG_2 \quad (2.25)$$

$$\sum_{j=1}^n (-q_j dp_j - y_j dx_j) + (H' - H) dt = dG_3 \quad (2.26)$$

$$\sum_{j=1}^n (-q_j dp_j + x_j dy_j) + (H' - H) dt = dG_4 \quad (2.27)$$

**Exercice** où les seconds membres sont les différentielles totales de fonctions différentes notées  $G_1$  à  $G_4$ . La relation (2.24) n'est autre que la condition nécessaire et suffisante (2.19). On en déduit immédiatement les suivantes, par exemple (2.25), simplement en écrivant :

$$\sum_i (p_i dq_i + x_i dy_i - x_i dy_i - y_i dx_i) + (H' - H) dt = dG_1$$

soit

$$\sum_i (p_i dq_i + x_i dy_i) + (H' - H) dt = dG_1 + d\left(\sum_i x_i y_i\right) = d\left(G_1 + \sum_i x_i y_i\right)$$

Ainsi,  $G_2$  représente  $G_1 + \sum_i x_i y_i$ . On procéderait de même pour obtenir (2.26) et (2.27).

**Exemple 1 :** Si  $A = (a_{ij})$  est une matrice carrée de rang  $n$  constante et unitaire (son inverse  $A^{-1}$  est égale à sa transposée  $A^t$ ), le changement de variables suivant est canonique :

$$q_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad ; \quad p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j$$

**Exercice** En effet, notant  $P, Q, X$  et  $Y$  les matrices colonnes des  $p_i, q_i, x_i$  et  $y_i$ , on a :  $Q = AX$  et  $P = AY$ , d'où :  $P^t Q = Y^t A^t AX = Y^t X$ , c'est-à-dire :  $\sum_i p_i q_i - \sum_i x_i y_i = 0$ . Le même calcul effectué avec des matrices  $dQ = (dq_i)$  et  $dX = (dx_i)$  aboutirait à  $P^t dQ = Y^t dX$ , c'est-à-dire :  $\sum_i (p_i dq_i - x_i dy_i) = 0$ . Cette valeur nulle est un cas particulier de différentielle totale, montrant que le changement de variables est canonique. Etant indépendant du temps, ce changement de variables ne modifie pas la valeur de l'hamiltonien.



**Exemple 2 :** Etant données trois variables  $(l, g, h)$  et leurs conjuguées  $(L, G, H)$ , on voudrait que  $x_1 = L, x_2 = L - G$  et  $x_3 = G - H$  soient des nouvelles variables ; comment déterminer  $(y_1, y_2, y_3)$  pour que ces variables soient canoniquement les conjuguées de  $(x_1, x_2, x_3)$  ?

Pour que ce changement de variables soit canonique, faisons en sorte que (2.26) soit vérifié :

$$-ldL - gdG - hdH - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 - y_3 dx_3 = 0$$

c'est-à-dire

$$ldL + gdG + hdH + y_1 dL + y_2 (dL - dG) + y_3 (dG - dH) = 0$$

En identifiant à zéro les coefficients de  $dL, dG$  et  $dH$ , on en déduit :

$$\begin{cases} l + y_1 + y_2 = 0 \\ g - y_2 + y_3 = 0 \\ h - y_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = -(l + g + h) \\ y_2 = l + g \\ y_3 = h \end{cases} \quad (2.28)$$

Donc, la transformation  $(l, g, h, L, G, H) \mapsto (L, L - G, G - H, -l - g - h, g + h, h)$  est canonique

## 9. Fonctions génératrices de transformations canoniques

Si l'on se donne un changement de variables sous la forme des  $2n$  relations (2.13), on peut savoir s'il est canonique en calculant les crochets de Lagrange de cette transformation (théorème 1). Cependant, s'il est facile

de vérifier que les crochets  $[x_j, y_k]$ ,  $[x_j, x_k]$  et  $[y_j, y_k]$  ont les valeurs nécessaires à la canonicité, il faut encore que les  $[t, x_j]$  et  $[t, y_j]$  soient les dérivées partielles d'une fonction  $F^*$  à déterminer et qui représente la façon dont sera modifié l'hamiltonien par ce changement de variables. Il est donc difficile de prévoir quelle sera cette modification au moment où l'on se fixe les fonctions  $f_i$  et  $g_i$ . Pour que cette modification aille dans le sens d'une simplification, il est préférable de rechercher quelles sont les fonctions  $f_i$  et  $g_i$  qui aboutissent à une simplification de l'hamiltonien voulue à l'avance. On peut arriver à ce résultat par la considération des fonctions génératrices, qui résultent en fait du **théorème 2** sur la canonicité d'un changement de variables.

En effet, pour qu'un changement de variables soit canonique, d'après les conditions (2.24) à (2.27), il suffit par exemple que l'on ait :

$$\sum_{j=1}^n (p_j dq_j - y_j dx_j) + (H' - H) dt = dG_1$$

ou bien

$$\sum_{j=1}^n (p_j dq_j + x_j dy_j) + (H' - H) dt = dG_2 \tag{2.29}$$

ou encore les relations analogues avec  $G_3$  ou  $G_4$ . Dans le premier cas,  $G_1$  doit être considérée comme fonction de l'ensemble des variables  $(q_j, x_j, t)$ , tandis que  $G_2$  doit s'identifier à une fonction de l'ensemble des  $(q_j, y_j, t)$ . Les fonctions  $G_1, G_2, G_3$  et  $G_4$  sont des fonctions à déterminer, appelées *fonctions génératrices* de la transformation canonique, c'est-à-dire qu'elles permettent d'établir le lien entre les anciennes et les nouvelles variables, en fonction de la modification  $H' - H$  que l'on souhaite apporter à l'hamiltonien. Prenons le cas de la fonction  $G_2(q_j, y_j, t)$  ; on a bien sûr aussi, pour une telle fonction :

$$dG_2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G_2}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial G_2}{\partial y_i} dy_i \right) + \frac{\partial G_2}{\partial t} dt \tag{2.30}$$



de sorte qu'en comparant avec (2.29), on obtient les  $2n + 1$  équations :

$$p_i = \frac{\partial G_2(q_j, y_j, t)}{\partial q_i} \quad \text{pour} \quad i = 1 \cdots n \quad (2.31)$$

$$x_i = \frac{\partial G_2(q_j, y_j, t)}{\partial y_i} \quad \text{pour} \quad i = 1 \cdots n \quad (2.32)$$

$$H'(x_i, y_i, t) - H(q_i, p_i, t) = \frac{\partial G_2(q_j, y_j, t)}{\partial t} \quad (2.33)$$

Il suffit donc de trouver la fonction  $G_2(q_j, y_j, t)$  vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$H'\left(\frac{\partial G_2(q_j, y_j, t)}{\partial y_i}, y_i, t\right) - H\left(q_i, \frac{\partial G_2(q_j, y_j, t)}{\partial q_i}, t\right) = \frac{\partial G_2(q_j, y_j, t)}{\partial t} \quad (2.34)$$

Ensuite, les  $2n$  équations (2.31) et (2.32) donnent les relations de passage entre anciennes et nouvelles variables : Comme ces  $2n$  équations dépendent des  $4n$  variables  $(q_i, p_i, x_i, y_i)$  et du temps, elles permettent, en principe, d'exprimer  $2n$  variables en fonction des  $2n$  autres variables et du temps ; ainsi la fonction  $G_2$  qui définit ces relations mérite bien le nom de fonction génératrice du changement de variables. L'équation (2.34) montre en outre que l'hamiltonien conserve sa valeur si  $G_2$  ne dépend pas explicitement de  $t$ .

**Exemples** de fonctions génératrices :

1. La fonction  $G_2 = \sum_i q_i y_i$  engendre la transformation identique puisqu'on a :

$$p_i = \frac{\partial G_2}{\partial q_i} = y_i \quad ; \quad x_i = \frac{\partial G_2}{\partial y_i} = q_i \quad ; \quad H' = H \quad \text{quel que soit } H$$

2. La fonction  $G_1 = \sum_i q_i x_i$  inverse le rôle des variables et de leur conjuguées puisqu'on a :

$$p_i = \frac{\partial G_1}{\partial q_i} = x_i \quad ; \quad y_i = -\frac{\partial G_2}{\partial x_i} = -q_i$$

Notons cependant le changement de signe pour les  $y_i$ .

### 9.1. Résolution par la méthode d'Hamilton-Jacobi

Pb<sub>4</sub>

Cette méthode propose de résoudre (si c'est possible) l'équation (2.34) dans le cas où l'on souhaite que le nouvel hamiltonien  $H'$  soit nul. La fonction génératrice  $G_2$  doit donc satisfaire l'équation dite d'*Hamilton-Jacobi* :

$$H(q_i, \frac{\partial G_2}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial G_2}{\partial t} = 0 \tag{2.35}$$

où  $G_2$  doit dépendre des  $(q_j, y_j, t)$ . Mais, comme on suppose  $H'(x_j, y_j, t) = 0$ , les nouvelles variables, solutions des équations d'Hamilton :

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H'}{\partial y_j} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{y}_j = -\frac{\partial H'}{\partial x_j} = 0$$

sont des constantes :

$$x_j = \alpha_j \quad \text{et} \quad y_j = \beta_j \quad \text{pour} \quad j = 1 \cdots n \tag{2.36}$$

Avec ces nouvelles "variables"  $x_j$  et  $y_j$ , si l'on peut trouver une fonction  $G_2$  qui soit solution de (2.35), le problème de l'intégration des équations canoniques est donc complètement résolu, et le retour aux anciennes variables peut se faire grâce aux  $2n$  équations :

$$p_i = \left[ \frac{\partial G_2(q_j, y_j, t)}{\partial q_i} \right]_{y_j = \beta_j} \tag{2.37}$$

$$x_i = \left[ \frac{\partial G_2(q_j, y_j, t)}{\partial y_i} \right]_{y_j = \beta_j} = \alpha_i \tag{2.38}$$

Comme on doit obtenir finalement  $y_j = \beta_j = \text{constante}$ , on voit qu'il suffit de trouver une solution  $G_2$  qui dépende de  $n$  constantes d'intégration arbitraires  $\beta_j$ , lesquelles seront identifiées aux valeurs constantes des variables  $y_j$ . En écrivant

$$G_2 \equiv G_2(q_j, \beta_j, t) \tag{2.39}$$

il faut cependant vérifier qu'avec cette identification, les variables  $x_j$  calculées à partir des relations  $x_j = \frac{\partial G_2}{\partial \beta_j}$  sont aussi des constantes. Or on a :

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G_2}{\partial \beta_j} \right) = \sum_k \left( \frac{\partial^2 G_2}{\partial q_k \partial \beta_j} \dot{q}_k \right) + \frac{\partial^2 G_2}{\partial t \partial \beta_j} \tag{2.40}$$

Mais comme  $G_2$  est solution de (2.35), on a aussi :

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t \partial \beta_j} = \frac{\partial}{\partial \beta_j} \frac{\partial G_2}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left( H(q_i, \frac{\partial G_2}{\partial q_i}, t) \right)$$

Or, d'après (2.39), on doit considérer les  $\beta_i$  comme indépendants des  $q_i$  et de  $t$ , et donc seul  $G_2$  dépend des

$\beta_j$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_2}{\partial t \partial \beta_j} &= - \sum_k \frac{\partial H}{\partial \left( \frac{\partial G_2}{\partial q_k} \right)} \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left( \frac{\partial G_2}{\partial q_k} \right) \\ &= - \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 G_2}{\partial \beta_j \partial q_k} \right) \quad \text{d'après (2.37)} \\ &= - \sum_k \left( \dot{q}_k \frac{\partial^2 G_2}{\partial \beta_j \partial q_k} \right) \quad \text{puisque} \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{aligned}$$

Le report de cette dernière valeur de  $\frac{\partial^2 G_2}{\partial t \partial \beta_j}$  dans (2.40) conduit à  $\frac{dx_j}{dt} = 0$  (cqfd).

**Remarque .** Aucune des constantes  $\beta_j$  ne doit être additive. En effet, si  $G_2$  est solution de (2.35),  $G_2 + \beta_1$  l'est aussi si  $\beta_1$  est une constante additive ; mais alors, la relation (2.38) correspondante :  $x_1 = \frac{\partial G_2 + \beta_1}{\partial \beta_1} = 1 = \alpha_1$  ne constitue pas une équation reliant les anciennes variables aux nouvelles ; il manquerait donc une équation pour pouvoir inverser les équations (2.38) en vue d'exprimer les  $q_i$  en fonction des  $\alpha_j$ , des  $\beta_j$  et du temps.

**Exemple :** Considérons le problème intégrable de l'oscillateur harmonique (attraction d'un point par un centre fixe, proportionnellement à sa distance). Simplifions encore en supposant le mouvement rectiligne. On a donc pour ce point une seule variable de position :  $q$  (élongation). Son énergie cinétique est  $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$  et son énergie potentielle est  $-U = \frac{1}{2}kq^2$  (la force vaut  $\text{grad } U = -kq$ ). La variable conjuguée de  $q$  est  $p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$ , et l'hamiltonien  $H = T - U$  vaut :  $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2$

La méthode d'Hamilton-Jacobi consiste à trouver  $G_2(q, \beta, t)$  tel que, pour des nouvelles variables  $x, y$ , le

nouvel hamiltonien soit nul et que l'on ait donc :

$$p = \frac{\partial G_2}{\partial q}$$

$$x = \frac{\partial G_2}{\partial \beta} = \alpha = \text{constante} \quad ; \quad y = \beta = \text{constante}$$

$$H\left(q, \frac{\partial G_2}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial G_2}{\partial t} = 0$$

Cette dernière équation vaut ici :

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial G_2}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 + \frac{\partial G_2}{\partial t} = 0$$

En recherchant une solution de la forme :  $G_2 = F_1(q, \beta) + F_2(t, \beta)$ , on obtient :

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial F_1}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 = - \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Il suffit d'identifier les deux membres de cette équation à une valeur commune notée  $\beta$  :

$$- \frac{\partial F_2}{\partial t} = \beta \quad \implies \quad F_2 = -\beta t$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial F_1}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 = \beta \quad \implies \quad F_1 = \pm \int \sqrt{m(2\beta - kq^2)} dq$$

c'est-à-dire :  $G_2 = -\beta t \pm \int \sqrt{m(2\beta - kq^2)} dq$

On en déduit :  $x = \alpha = \frac{\partial G_2}{\partial \beta} = -t \pm \int \frac{m dq}{\sqrt{m(2\beta - kq^2)}}$ , d'où l'on tire :

$$\pm \sqrt{\frac{k}{m}}(t + \alpha) = \arcsin(\sqrt{k/2\beta} q)$$

soit :

$$q = \pm \sqrt{\frac{2\beta}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}(t + \alpha)$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont ainsi les 2 constantes arbitraires qui doivent nécessairement apparaître dans la solution générale. On vérifie ensuite que :

$$p = \frac{\partial G_2}{\partial q} = \pm \sqrt{m(2\beta - kq^2)} = \pm \sqrt{2m\beta} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}(t + \alpha)$$

est bien égal à  $m\dot{q}$ . Le signe  $\pm$  doit être choisi suivant les conditions initiales, par exemple suivant le signe de la vitesse (ou signe de  $p$ ) à l'instant  $t = -\alpha$ .

**Remarque .** Dans cet exemple,  $\beta$  représente l'énergie totale du système car on a en fait :  $H = -\frac{\partial G_2}{\partial t} = \beta$ ; ceci montre que l'on aurait aussi pu rechercher des variables canoniques  $(x, y)$  ne modifiant pas la valeur de l'hamiltonien ( $H'(x, y) \equiv H(q, p)$ ) et tel que  $H'(x, y) = y$ . On vérifie bien que  $y$  est constant car alors  $\dot{y} = -\frac{\partial H'}{\partial x} = 0$  et l'on peut prendre  $y = \beta$ . On aura alors aussi :  $\dot{x} = \frac{\partial H'}{\partial y} = 1$ , soit  $x = t - t_0$ . Pour obtenir un tel hamiltonien, il suffit de trouver la fonction génératrice  $G$  indépendante de  $t$  telle que :

$$H'(x, y) - H(q, p) = 0 \quad \text{avec} \quad x = \frac{\partial G}{\partial y} \quad \text{et} \quad p = \frac{\partial G}{\partial q}$$

c'est-à-dire vérifiant l'équation :  $y - \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial G}{\partial q} \right)^2 - \frac{1}{2} k q^2 = 0$ . On retrouve l'équation écrite ci-dessus pour  $F_1$ , avec  $y = \beta$ .

Cette méthode, qui consiste ainsi à rechercher un jeu de variables dont l'une est égale au nouvel hamiltonien, convient aux systèmes conservatifs ; notons que la variable conjuguée de cette variable s'identifie au temps.

Le problème de Kepler énoncé en exemple à la **fin du paragraphe 7** peut aussi être résolu par la méthode d'Hamilton-Jacobi, mais nous reportons cette résolution en §3-12.2, après avoir étudié ce problème par la méthode vectorielle fournie par les théorèmes généraux de la mécanique. Ainsi, il sera plus facile d'interpréter les constantes données par la méthode d'Hamilton-Jacobi, en fonction des propriétés géométriques et cinématiques du mouvement képlérien obtenues par la méthode vectorielle.

## 9.2. Application à la méthode des variations des constantes arbitraires

Si l'on trouve une fonction  $G$  telle que, pour  $F$  donné, on ait

$$\sum_i (p_i dq_i + x_i dy_i) + F dt = dG$$

le changement de variables engendré par  $G$  est canonique, et s'il est appliqué à un système dont l'hamiltonien initial est  $H(q_i, p_i, t)$ , le nouvel hamiltonien, exprimé en variables  $(x_i, y_i)$ , vaut :  $H' = H + F = H + \frac{\partial G}{\partial t}$ . Ainsi, étant donné un hamiltonien  $H_0(q_i, p_i, t)$ , si on trouve  $G(q_i, \beta_i, t)$  solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi :

$$H_0\left(q_i, \frac{\partial G}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad (2.41)$$

alors le nouvel hamiltonien est :  $H' = H_0 + \frac{\partial G}{\partial t} = 0$  et les nouvelles variables, définies par  $x_i = \alpha_i = \frac{\partial G}{\partial \beta_i}$  et  $y_i = \beta_i$ , sont constantes.

Si l'on applique ce changement de variables à un système dont l'hamiltonien initial est  $H = H_0 + H_1$ , le nouvel hamiltonien est alors :  $H' = H + \frac{\partial G}{\partial t}$ , soit d'après (2.41) :  $H' = H_0 + H_1 + (-H_0) = H_1$ . Les variables canoniques  $(\alpha_i, \beta_i)$  qui étaient constantes pour  $H' = 0$ , vérifient maintenant :

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial H'_1}{\partial \beta_i} \quad \text{et} \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial H'_1}{\partial \alpha_i} \quad (2.42)$$

où  $H'_1 = H_1$  (c'est-à-dire  $H_1$  exprimé en fonction des nouvelles variables). La méthode des variations des constantes arbitraires consiste ainsi à résoudre d'abord le problème simplifié et intégrable représenté par  $H_0$ , dont la solution générale dépend de  $2n$  constantes arbitraires, puis à dire que ces constantes varient suivant les équations (2.42), en fonction du terme supplémentaire  $H_1$  que l'on ajoute à  $H_0$ .

Plus généralement, si  $G$  est solution d'une équation de la forme (2.34) écrite ici :  $H'_0 - H_0 = \frac{\partial G}{\partial t}$ , en appliquant le changement de variables engendré par  $G$  à un système d'hamiltonien  $H = H_0 + H_1$ , le nouvel hamiltonien sera  $H' = H + \frac{\partial G}{\partial t} = H_0 + H_1 + H'_0 - H_0$  c'est-à-dire :  $H' = H'_0 + H_1$  où  $H'_1 = H_1$  exprimé en fonction des nouvelles variables  $(x_i, y_i)$ . Ces variables vérifiaient initialement  $\dot{x}_i = \frac{\partial H'_0}{\partial y_i}$  et  $\dot{y}_i = -\frac{\partial H'_0}{\partial x_i}$ , elles satisfont maintenant :

$$\dot{x}_i = \frac{\partial (H'_0 + H'_1)}{\partial y_i} \quad \text{et} \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial (H'_0 + H'_1)}{\partial x_i}$$

On mettra à profit ce résultat en §5-21.3 pour exprimer les équations d'un mouvement intégrable perturbé : Les constantes du mouvement intégrable deviennent des variables dont les variations dépendent directement de la perturbation qu'on a appliqué au système intégrable.



## Troisième partie

# Le problème des 2 corps

### 10 Réduction à un problème de 1 corps

### 11 Le problème de Kepler et le mouvement képlérien

- 11.1 Intégrales premières du mouvement képlérien
- 11.2 Trajectoire du mouvement képlérien
- 11.3 Hodographe et relations entre les intégrales premières
- 11.4 Le mouvement sur la trajectoire.

### 12 Eléments d'orbite

- 12.1 Définitions des éléments d'une orbite képlérienne
- 12.2 Eléments d'orbite canoniques du mouvement képlérien
- 12.3 Systèmes d'unités astronomiques
- 12.4 Energie d'une orbite et vitesses cosmiques
- 12.5 Calcul des éléments d'orbite à partir de conditions initiales
- 12.6 Calcul d'éphémérides à partir des éléments d'orbite
- 12.7 Calcul des éléments d'orbite à partir d'observations : Méthode de Laplace

### 13 Développement en série du mouvement képlérien elliptique

- 13.1 Séries de Fourier
- 13.2 Inversion de l'équation de Kepler
- 13.3 Fonctions de Bessel de 1<sup>ère</sup> espèce
- 13.4 Développement de  $\cos nE$  et  $\sin nE$  en série de Fourier de  $M$

13.5 La propriété de d'Alembert

13.6 Développement de  $\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp imw$  en coefficients de Hansen

13.7 Développements en série entière de l'excentricité

13.8 Développements limités en excentricité

13.9 Développements des coordonnées en fonction de la longitude moyenne

#### 14 Annexe : formulaire de Brumberg pour les coefficients de Hansen

## 10. Réduction à un problème de 1 corps

Le problème des 2 corps consiste en l'étude du mouvement de 2 particules matérielles  $P_1$  et  $P_2$ , de masses  $m_1$  et  $m_2$ , en interaction gravitationnelle suivant la loi de Newton. Dans un repère galiléen  $R_a$ , la quantité d'accélération de chaque point est alors donnée par le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m_1 \Gamma(P_1/R_a) &= -K \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 & \text{où} & \quad r = |\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2| \\ m_2 \Gamma(P_2/R_a) &= -K \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $K$  représente la constante de la gravitation universelle.

Chaque particule étant repérée dans  $R_a$  par 3 coordonnées indépendantes, le problème des 2 corps a 6 degrés de liberté ; les équations différentielles (3.1) étant du second ordre, c'est un problème d'ordre 12 qui nécessite donc pour sa résolution, l'introduction de 12 constantes d'intégration arbitraires. 6 de ces constantes définissent le mouvement du point  $G$ , centre de masses des 2 particules. Le système étant supposé isolé,  $G$  décrit une droite

d'un mouvement uniforme. En effet, on a :

$$\begin{aligned} m_1\Gamma(P_1/R_a) + m_2\Gamma(P_2/R_a) &= 0 \\ &= (m_1 + m_2)\Gamma(G/R_a) \end{aligned}$$

d'où :  $G = G_0 + \mathbf{V}_0t$ . Il apparaît bien 3 constantes arbitraires pour repérer le point fixe  $G_0$ , et 3 autres pour représenter le vecteur constant  $\mathbf{V}_0$ . Ainsi, le repère  $R_G$  d'origine  $G$  en translation rectiligne et uniforme par rapport à  $R_a$  est lui-même un repère galiléen. On peut donc écrire les équations du mouvement de  $P_1$  et de  $P_2$  dans  $R_G$ , mais il suffit de résoudre celles relatives à  $P_1$  par exemple, puisque le mouvement de  $P_2$  s'en déduira par homothétie ; par définition de  $G$  on a en effet :  $\mathbf{GP}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{GP}_1$ . Donc, on est ramené à la résolution d'un problème de 1 corps, défini par l'équation :

$$m_1 \frac{d_{R_G}^2 \mathbf{GP}_1}{dt^2} = -K \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1$$

dont on déduit, avec  $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{GP}_1$  :

$$\frac{d_{R_G}^2 \mathbf{GP}_1}{dt^2} = -K \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\mathbf{GP}_1}{|\mathbf{GP}_1|^3} \tag{3.2}$$

Le *mouvement absolu* de  $P_1$  est donc un mouvement à *accélération centrale*, de centre fixe  $G$ , et cette accélération est inversement proportionnelle au carré de sa distance à  $G$ . En comparant avec (1.36), on voit que le second membre de (3.2) est analogue à un champ de gravitation, en assimilant le point attractif  $G$  à une particule matérielle de masse  $\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$ .

On peut aussi étudier le mouvement de  $P_1$  dans un repère en translation non uniforme d'origine  $P_2$  : C'est le *mouvement relatif* de  $P_1$  autour de  $P_2$ , donné par les variations dans le temps du vecteur  $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1$  que l'on peut tirer

de (3.1) :

$$\frac{d_{R_a}^2 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1}{dt^2} = \Gamma(P_1/R_a) - \Gamma(P_2/R_a) = -K \frac{m_1 + m_2}{r^3} \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \quad (3.3)$$

On a de nouveau un champ de gravitation, mais il correspond maintenant à une masse  $(m_1 + m_2)$  qui serait placée au centre attractif  $P_2$ . D’ailleurs, les mouvements absolus et relatifs sont semblables puisqu’on passe de l’un à l’autre par une translation d’origine et une homothétie :

$$\mathbf{GP}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1$$

Pour obtenir l’un ou l’autre de ces mouvements, il nous suffit donc d’étudier le problème général défini par l’équation :

$$\frac{d^2 \mathbf{OP}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{OP}}{|\mathbf{OP}|^3}$$

où  $O$  est un *centre fixe* qui attire un point  $P$  par l’intermédiaire du champ de gravitation “émis” par  $O$  avec une constante d’attraction  $\mu$  *positive*. Le rapport  $\frac{\mu}{K}$  est la *masse réduite* du point  $O$ . Ce problème est encore appelé *problème de Kepler* ou *problème képlérien*.

## 11. Le problème de Kepler et le mouvement képlérien

Notons  $\mathbf{r}$  le *rayon vecteur*  $\mathbf{OP}$  et  $r$  la distance  $|\mathbf{OP}|$ . Le problème de Kepler est défini pour tout  $r$  non nul par l’équation différentielle vectorielle :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\mu}{r} \right) \quad \text{avec} \quad \mu > 0 \quad (3.4)$$

Pb<sub>1</sub>  
Pb<sub>2</sub>  
Pb<sub>3</sub>

L'opérateur  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ , représentant le gradient en  $P$ , est appliqué au potentiel de gravitation dû à la masse réduite du point  $O$ . Dans toute la suite, on note  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}$  où  $\mathbf{u}$  est unitaire ; l'expression cinématique des vecteurs vitesse et accélération de  $P$  est alors :

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{u} + r \dot{\mathbf{u}} \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r} \mathbf{u} + 2\dot{r} \dot{\mathbf{u}} + r \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.5a)$$

On utilisera aussi les propriétés suivantes :

$$\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u} \cdot \ddot{\mathbf{u}} = -\dot{\mathbf{u}}^2 \quad (3.5b)$$

obtenues par dérivations successives de  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$ .

Le mouvement képlérien est la solution générale de l'équation (3.4). Elle dépend de 6 constantes arbitraires scalaires dont 5 sont fournies par des intégrales premières.

### 11.1. Intégrales premières du mouvement képlérien

Tout d'abord, puisque le champ de gravitation dérive d'un potentiel, l'intégrale première de l'énergie cinétique existe et introduit une constante  $h$  :

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \left( \ddot{\mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\mu}{r} \right) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - \frac{\mu}{r} \right) = 0$$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - \frac{\mu}{r} = h \quad \text{constante scalaire}} \quad (3.6)$$

$h$  représente ce qu'on peut appeler l'*énergie totale* de  $P$  (par abus de langage puisque la masse de  $P$  n'est pas en facteur du carré de sa vitesse). Si  $r$  peut devenir infini,  $2h$  représente aussi le carré de la vitesse à l'infini, notée :  $V_\infty = \sqrt{2h}$ .

L'équation (3.4) admet encore 2 intégrales premières vectorielles, qui permettent de définir complètement la trajectoire de  $P$  :

- L'une exprime l'invariance du "moment cinétique" de  $P$  au point  $O$  :

$$\mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) = 0$$

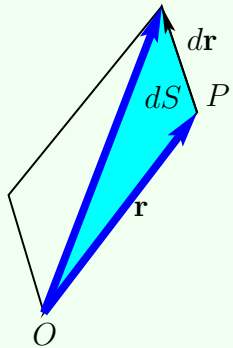
### Exercice



d'où :

$$\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{G} \quad \text{vecteur constant}$$

(3.7)



Posons  $\mathbf{G} = G\mathbf{k}$  où  $G = |\mathbf{G}|$  et  $\mathbf{k}$  unitaire. On déduit de (3.7) qu'on a, à tout instant :  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} = 0$  et  $\mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0$ . Donc, si  $G$  est non nul, le mouvement s'effectue dans le plan orthogonal en  $O$  à  $\mathbf{G}$  ; le mouvement suit en outre la *loi des aires* :  $|\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}| = 2dS = G dt$ , soit aussi :  $|r^2\dot{\mathbf{u}}| = G$ . Si  $G$  est nul, le mouvement plan est dégénéré en un mouvement rectiligne porté par la direction commune et fixe de  $\mathbf{r}$  et de  $\dot{\mathbf{r}}$ .

- L'autre découle de l'équation :

$$\ddot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{G} = -\frac{\mu}{r^2} \mathbf{u} \wedge (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}})$$

soit :

$$\frac{d(\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{G})}{dt} = -\frac{\mu}{r} \mathbf{u} \wedge [\mathbf{u} \wedge (\dot{\mathbf{r}}\mathbf{u} + r\dot{\mathbf{u}})] = \mu \dot{\mathbf{u}}$$

d'où l'existence d'un vecteur  $\mathbf{e}$  constant (*intégrale de Laplace*) :

$$\frac{\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{G}}{\mu} - \mathbf{u} = \mathbf{e} \quad \text{vecteur constant} \quad (3.8)$$

Ce vecteur  $\mathbf{e}$  n'est cependant pas tout-à-fait arbitraire car il doit manifestement vérifier :  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{G} = 0$ , et donc, si  $G$  est non nul,  $\mathbf{e}$  appartient au plan du mouvement. Si on fait tendre  $G$  vers zéro, cette expression tend vers  $\mathbf{u} = -\mathbf{e}$ ; donc  $\mathbf{u}$  est fixe et le mouvement est rectiligne, porté par la droite fixe de direction  $\mathbf{u} = -\mathbf{e}$ .

Bien sûr, il suffit de connaître la position et la vitesse de  $P$  à un instant quelconque pour en déduire la valeur des constantes  $h$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{e}$ .

## 11.2. Trajectoire du mouvement képlérien

En projetant (3.8) sur  $\mathbf{u}$  et sachant que  $(\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{G} = G^2$ , on obtient une relation entre  $r$  et  $\mathbf{u}$  qui définit la trajectoire de  $P$  :

$$r (1 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{u}) = \frac{G^2}{\mu} \quad (3.9)$$

Toutefois, si  $G = 0$ , cette relation est seulement une identité. Autrement,  $G$  étant constant, (3.9) montre que si  $\mathbf{e}$  est non nul, la distance  $r$  passe par un minimum  $q$  chaque fois que la direction de  $\mathbf{u}$  vient coïncider avec celle de  $\mathbf{e}$ . Le vecteur  $\mathbf{e}$  est ainsi dirigé vers le point de distance minimum, appelé *péricentre*.

Posons :  $\mathbf{e} = e \mathbf{u}_0$ , où  $\mathbf{u}_0$  est le vecteur unitaire tel que  $e = |\mathbf{e}| > 0$ , puis :  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_0$ . En désignant par  $w$  l'angle entre  $\mathbf{u}_0$  et  $\mathbf{u}$ , le point  $P$  est alors repéré dans le plan  $O\mathbf{u}_0\mathbf{v}_0$  par les coordonnées polaires  $(r, w)$ , et sa trajectoire est donnée par :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos w} \quad \text{avec} \quad p = G^2/\mu \quad (3.10)$$

**Exercice** C'est l'équation polaire d'une conique de *foyer*  $O$ , d'*excentricité*  $e$ , de *paramètre*  $p$  et ayant son *grand axe* (ou axe de symétrie) porté par l'axe  $O\mathbf{u}_0$ .

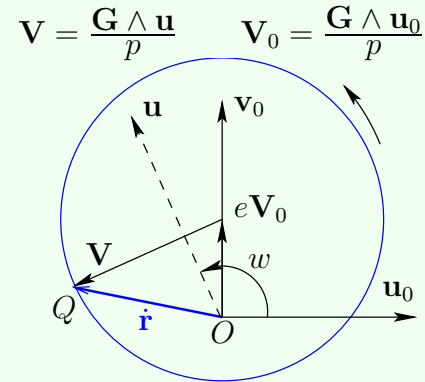
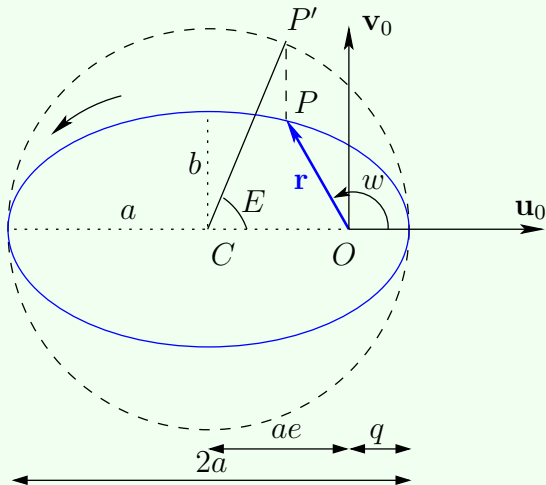
**Exercice** C'est une ellipse si  $e < 1$ , une parabole si  $e = 1$  et une hyperbole si  $e > 1$ ; cependant, si  $e = 0$ , l'ellipse est dégénérée en cercle et on peut dans ce cas choisir  $\mathbf{u}_0$  comme vecteur unitaire de n'importe quel diamètre de ce cercle. En Astronomie,  $w$ , l'angle polaire de  $P$  mesuré à partir de la direction du péricentre, est appelé *anomalie vraie*. Le péricentre correspond alors à  $w = 0$ ; sa distance au foyer est :

$$r_{\min} = q = \frac{p}{1 + e} \quad (3.11)$$

Dans le cas elliptique, la distance passe par un maximum au point appelé *apocentre* correspondant à  $w = \pi$ ; elle vaut alors  $r_{\max} = p/(1 - e)$ . Si l'on note  $2a$  la distance  $r_{\min} + r_{\max}$  entre le péricentre et l'apocentre (tous deux sur le grand axe de l'ellipse), on obtient aussi :

$$p = a(1 - e^2) \quad r_{\min} = q = a(1 - e) \quad r_{\max} = a(1 + e) \quad (3.12)$$





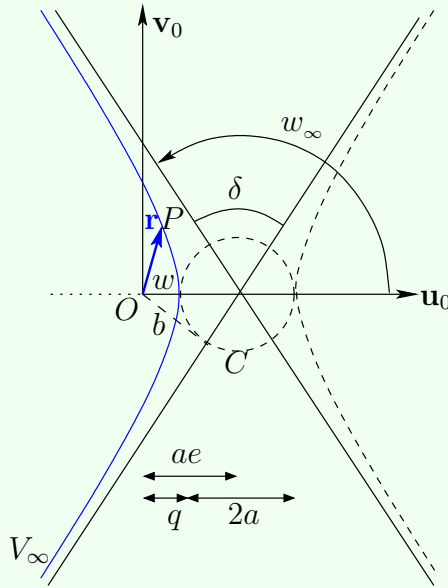
Hodographe du mouvement elliptique

$a$  est appelé *demi-grand axe* de l'ellipse. Le centre  $C$  de l'ellipse est à la distance  $ae$  du foyer  $O$  dans la direction de l'apocentre ; le demi-petit axe de l'ellipse, orthogonal en  $C$  au grand axe a pour longueur :

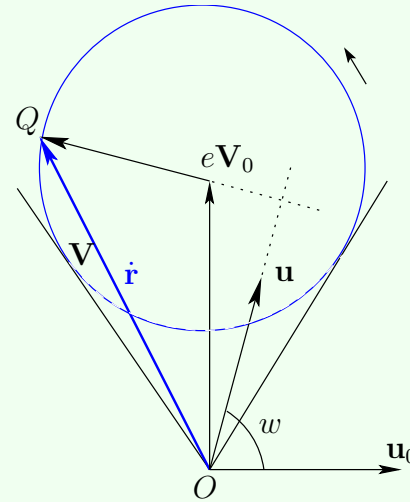
$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

Dans le cas hyperbolique, l'infini est atteint pour  $w = w_\infty = \arccos(-1/e)$ . Les valeurs  $w_\infty$  et  $2\pi - w_\infty$  définissent les directions des deux asymptotes, symétriques par rapport au grand axe et se coupant en un point  $C$

centre de symétrie des deux branches de l'hyperbole.



$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{G} \wedge \mathbf{u}}{p} \quad \mathbf{V}_0 = \frac{\mathbf{G} \wedge \mathbf{u}_0}{p}$$



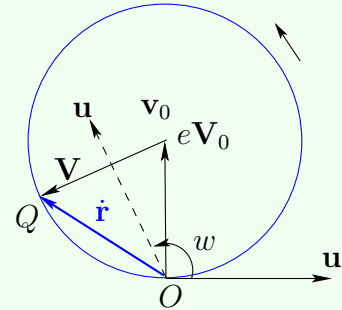
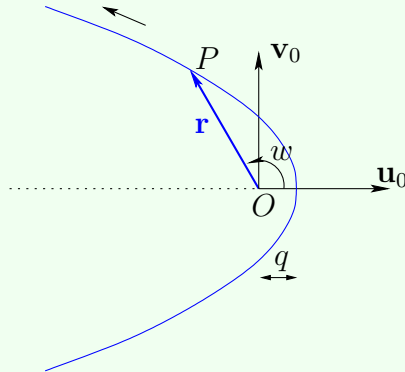
Bien sûr, comme le mouvement de  $P$  est nécessairement continu,  $P$  parcourt une seule branche de l'hyperbole, celle qui “tourne” autour du foyer  $O$  ; l’autre branche correspond à  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}$  avec  $r < 0$  et  $w_\infty < w < 2\pi - w_\infty$  (si  $\mu$  [et donc  $p$ ] était négatif,  $P$  serait repoussé par  $O$  et décrirait cette autre branche) ; cette branche contient notamment un “apocentre”, correspondant à  $w = \pi$  (et  $r < 0$ ), symétrique du péricentre par rapport à  $C$ , sur le grand axe de l'hyperbole et à la distance  $p/(e - 1)$  du foyer  $O$ . En notant encore  $2a$  la distance entre le péricentre

et cet apocentre, on obtient, pour le mouvement hyperbolique :

$$p = a(e^2 - 1) \quad \text{et} \quad r_{\min} = q = a(e - 1) \tag{3.13}$$

Le centre  $C$  est alors à la distance  $ae$  du foyer  $O$  dans la direction du péricentre et les asymptotes, qui concourent en  $C$  en faisant l'angle  $\arccos(-1/e)$  avec le grand axe, sont à la distance  $b = a\sqrt{e^2 - 1}$  du foyer  $O$ .


Dans le cas parabolique, l'infini est atteint pour  $w = w_\infty = \pi$ . Il n'y a pas d'apocentre à distance finie et donc la distance  $2a$  du péricentre à l'apocentre est infinie. On a seulement ici la relation :  $q = p/2$



### 11.3. Hodographe et relations entre les intégrales premières

En multipliant (3.8) vectoriellement à gauche par  $\mathbf{G}$ , on peut exprimer le vecteur vitesse de  $P$  (dans le cas où  $G$  est non nul) ; on obtient :

$$p \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{G} \wedge (\mathbf{u} + \mathbf{e}) \tag{3.14}$$

 **Exercice** Dans cette expression de  $\dot{r}$ , la seule quantité variable est la direction du vecteur  $\mathbf{u}$ . Ainsi, l'*hodographe* du mouvement (c'est-à-dire l'ensemble des points  $Q$  tels que, pour  $O$  fixé, on ait  $\mathbf{OQ} = \dot{\mathbf{r}}$ ) est un cercle situé dans le plan du mouvement (orthogonal à  $\mathbf{G}$ , voir [figure 1](#) ou [EllipsHodogr.html](#)), de rayon égal à  $G/p$  (égal aussi à  $\mu/G$ ), dont le centre, fixe, est placé dans la direction du vecteur  $\mathbf{v}_0$  (orthogonal à  $\mathbf{e}$ ) à la distance  $eG/p$  de l'origine  $O$ . Notons que  $O$  est à l'intérieur de l'hodographe si le mouvement est **elliptique**, sur l'hodographe s'il est **parabolique** et extérieur à lui s'il est **hyperbolique** (voir aussi [HyperbHodogr.html](#)). Dans tous les cas, lors du passage au péricentre ( $w = 0$  ou  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ ), la vitesse passe par un maximum égal à  $(1 + e)G/p$ ; la vitesse radiale est alors nulle et le vecteur vitesse est orthogonal au rayon vecteur. Dans le cas elliptique, l'hodographe est parcouru entièrement et la vitesse passe par un minimum à l'apocentre, où elle vaut :  $(1 - e)G/p$ . Dans le cas parabolique, la vitesse s'annule lorsque  $\mathbf{u}$  tend vers  $-\mathbf{e}$ , c'est-à-dire lorsque  $r$  tend vers l'infini ( $w$  tendant alors vers  $\pi$ ). Enfin, dans le cas hyperbolique, les directions des tangentes à l'hodographe issues de  $O$  correspondent aux asymptotes ; le point  $Q$  parcourt seulement l'arc d'hodographe compris entre ces tangentes et contenant le point où la vitesse est maximum.

En élevant au carré la relation (3.14), on obtient une expression du carré de la vitesse comparable à celle que l'on peut tirer de l'intégrale de l'énergie (3.6) ; de cette comparaison, on déduit que l'excentricité de la conique peut être calculée à partir de  $G$ , de  $h$  et de  $\mu$  par la relation suivante :


$$|e| = e = \sqrt{1 + 2hG^2/\mu^2} = \sqrt{1 + 2hp/\mu} = 1 + 2hq/\mu \quad (3.15)$$

Cela montre que finalement, si l'on calcule d'abord  $h$  par l'intégrale de l'énergie, le vecteur  $\mathbf{e}$  de l'intégrale de Laplace, déjà contraint à être orthogonal à  $\mathbf{G}$ , doit en plus avoir son module  $e$  fixé par les constantes  $G$  et  $h$  ; le seul arbitraire apporté par le vecteur  $\mathbf{e} = e \mathbf{u}_0$  concerne alors la direction de  $\mathbf{u}_0$ , c'est-à-dire la direction du péricentre dans le plan du mouvement. Inversement, si l'on calcule d'abord  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{e}$ , on peut en déduire l'intégrale de l'énergie et  $h$  :

$$h = (e^2 - 1) \frac{\mu^2}{2G^2} = (e^2 - 1) \frac{\mu}{2p} \quad (3.16)$$

Mais, tenant compte des expressions (3.12) et (3.13) de  $p$ , on obtient alors :

$$\begin{array}{ll} h = -\frac{\mu}{2a} & \text{dans le cas elliptique} \\ h = 0 & \text{dans le cas parabolique} \\ h = \frac{\mu}{2a} & \text{dans le cas hyperbolique} \end{array} \quad (3.17)$$

 **Exercice** Ainsi, c'est le signe de  $h$  qui caractérise aussi la nature de la conique : l'ellipse correspond à  $h < 0$ , la parabole à  $h = 0$  et l'hyperbole à  $h > 0$ . La valeur absolue de  $h$  caractérise le grand axe de cette conique, c'est-à-dire sa taille (entre l'ellipse et l'hyperbole, la parabole peut être considérée comme ayant un grand axe infini, ou comme une conique ayant son deuxième foyer rejeté à l'infini). On verra en détails en §3-12.4 comment  $a$  ou  $h$  caractérisent aussi l'*énergie d'une orbite*.

Finalement, si  $G \neq 0$ , dans tous les cas il n'y a que 5 constantes arbitraires scalaires indépendantes : 3 composantes pour  $\mathbf{G}$  et 2 composantes pour  $e$  dans le plan orbital (normal à  $\mathbf{G}$ ), ou bien 3 composantes pour  $\mathbf{G}$ ,  $h$  et un angle donnant la direction du péricentre dans le plan orbital, ou bien encore deux angles pour repérer dans l'espace la direction de  $\mathbf{G}$ , un demi-grand axe à la place de  $h$ , puis l'excentricité et un angle pour la direction du péricentre. Ces éléments géométriques sont à la base de la définition des *éléments d'orbite* que l'on verra après avoir étudié le mouvement  $P$  sur cette orbite. Si  $G = 0$ , certaines propriétés du mouvement képlérien rectiligne peuvent encore être déduites de celles obtenues pour le mouvement plan en faisant tendre  $G$  ou  $p$  vers zéro tout en maintenant  $h$  fixé : D'après (3.15), quelque soit le signe de  $h$ , l'excentricité tend alors vers 1 : si  $h < 0$ , l'ellipse dégénère en un segment de droite de longueur  $2a = -\mu/h$ , dont les extrémités sont les deux foyers de l'ellipse-limite infiniment aplatie et réduite à son grand axe ; si  $h \geq 0$ , l'hyperbole ou la parabole dégénèrent en une demi-droite issue du foyer  $O$  ; dans tous les cas, le segment ou la demi-droite support du mouvement a pour vecteur unitaire  $\mathbf{u}_0 = -\mathbf{u}$ , et l'anomalie vraie  $w$  peut être considérée comme constante, égale à  $\pi$ .

## 11.4. Le mouvement sur la trajectoire.

Pour obtenir la loi du mouvement sur la trajectoire, il existe de nombreuses méthodes qui exploitent le plus souvent la loi des aires exprimée dans le plan du mouvement :  $r^2 \frac{dw}{dt} = G \implies G(t - t_0) = \int_{w_0}^w r^2 dw$ , mais ceci suppose implicitement que  $G$  ne soit pas nul. Pour traiter simultanément tous les types de mouvements, il faut repartir des équations initiales (3.4) à (3.6) dont on tire :

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} = (\ddot{r} \mathbf{u} + 2\dot{r} \dot{\mathbf{u}} + r \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{u} = \ddot{r} - r \dot{\mathbf{u}}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\mathbf{u}}^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h$$

En éliminant  $\dot{\mathbf{u}}^2$  de ces deux expressions, on trouve l'équation :

$$r \ddot{r} + \dot{r}^2 = \frac{\mu}{r} + 2h \quad (3.18)$$

Pour régulariser cette équation en  $r = 0$ , on opère le changement de variable :

$$dt = r d\tau \quad (3.19)$$

dont on tire les opérateurs de dérivation :

$$\frac{d}{d\tau} = r \frac{d}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = r^2 \frac{d^2}{dt^2} + r\dot{r} \frac{d}{dt} \quad (3.20)$$

Appliquant ces opérateurs à la distance  $r$ , on obtient :

$$r' = \frac{dr}{d\tau} = r\dot{r} \quad \text{et} \quad r'' = \frac{d^2 r}{d\tau^2} = r^2 \ddot{r} + r\dot{r}^2 \quad (3.21)$$

De sorte que (3.18) se transforme en cette équation du second ordre régulière en  $r = 0$ , linéaire et à coefficients constants :

$$r'' - 2h r = \mu \quad (3.22)$$

Cette équation est valable pour tous les types de mouvement (plan ou rectiligne). Sa solution générale dépend du signe de  $h$ , mais contient toujours 2 constantes arbitraires  $\alpha$  et  $\beta$  :

1. pour  $h < 0$  :  $r = -\frac{\mu}{2h} + \alpha \sin \sqrt{-2h} \tau + \beta \cos \sqrt{-2h} \tau$
2. pour  $h = 0$  :  $r = \frac{\mu}{2} \tau^2 + \alpha \tau + \beta$
3. pour  $h > 0$  :  $r = -\frac{\mu}{2h} + \alpha \sinh \sqrt{2h} \tau + \beta \cosh \sqrt{2h} \tau$

En supposant  $\tau = 0$  à l'instant  $t_p$  du passage au péricentre, on pourra ensuite intégrer (3.19) en :

$$t - t_p = \int_0^\tau r d\tau$$

et calculer  $\alpha$  et  $\beta$  en tenant compte de la valeur de  $r$  et de  $r'$  à l'instant  $t_p$  :

$$r(t_p) = q = \frac{p}{1+e} \quad \text{et} \quad r'(t_p) = r \dot{r}(t_p) = 0 \quad (3.23)$$

On obtient :  $\alpha = 0$  et  $\beta = q$  si  $h = 0$ , sinon :  $\alpha = 0$  et  $\beta = q + \frac{\mu}{2h}$ . Selon la nature de l'orbite, on obtient alors les résultats suivants :

1. Pour  $h < 0$ , d'après (3.17), l'orbite est elliptique et l'on a :  $-\frac{\mu}{2h} = a$  demi-grand axe de l'ellipse et  $q = a(1 - e)$ ; en posant  $E = \sqrt{-2h} \tau$ ,  $n = \frac{\sqrt{-2h}}{a} = \sqrt{\mu/a^3}$  et  $M = n(t - t_p)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 r &= a(1 - e \cos E) = \frac{d\tau}{dt} = a \frac{dM}{dE} \\
 M &= E - e \sin E \quad (\text{équation de Kepler}) \\
 \dot{E} &= \frac{na}{r} \quad \text{et} \quad \dot{M} = n
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

L'angle  $E$  est appelé *anomalie excentrique*, et  $M$  *anomalie moyenne*; la vitesse angulaire  $n$  est appelée *moyen mouvement*;  $n$  et  $a$  sont reliés par la 3<sup>ième</sup> loi de Kepler :

$$n^2 a^3 = \mu \tag{3.25}$$

L'expression générale de  $r$  donnée en (3.11) en fonction de l'anomalie vraie  $w$  devient ici :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos w} \tag{3.26}$$

Ainsi,  $r$  est une fonction périodique de  $w$ , de  $E$  ou de  $M$ , de période  $2\pi$ . Les trois anomalies  $w$ ,  $E$  et  $M$  s'annulent en même temps, à l'instant  $t_p$  du passage au péricentre; elles augmentent toutes trois de  $2\pi$  dans le temps  $T = \frac{2\pi}{n}$  qui est la *période* du mouvement elliptique. La 3<sup>ième</sup> loi de Kepler s'exprime alors aussi :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} \tag{3.27}$$




$V_r$  et  $V_\perp$  désignant les vitesses radiales et orthoradiales, on a ensuite :

$$G = rV_\perp = r^2 \frac{dw}{dt} = \sqrt{\mu p} = na^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (3.28)$$

$$\dot{r} = V_r = \frac{nae}{\sqrt{1 - e^2}} \sin w = \frac{na^2 e}{r} \sin E \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} X &= r \cos w = a(\cos E - e) \\ Y &= r \sin w = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ r \dot{X} &= -na^2 \sin E \\ r \dot{Y} &= na^2 \sqrt{1 - e^2} \cos E \\ \tan^2 \frac{w}{2} &= \frac{1 + e}{1 - e} \tan^2 \frac{E}{2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

**Exercice**   $X$ ,  $Y$  et  $Z = 0$  sont les coordonnées cartésiennes du point  $P$  dans le *repère propre*  $O\mathbf{u}_0\mathbf{v}_0\mathbf{k}$  du mouvement képlérien. Si le mouvement est rectiligne, seul  $\mathbf{u}_0 = -\mathbf{u}$  est défini et l'on peut prendre  $\mathbf{v}_0$  et  $\mathbf{k}$  quelconques orthogonaux à  $\mathbf{u}_0$  ; avec  $e = 1$  et  $w = \pi$ , on a alors aussi  $Y = \dot{Y} = 0$ . Ces équations sont donc valables dans tous les cas, que le mouvement elliptique soit plan ou rectiligne. On peut considérer qu'une ellipse peut être déduite de son cercle principal (de centre  $C$  et de rayon  $a$ ) par une affinité de rapport  $b/a = \sqrt{1 - e^2}$  appliquée perpendiculairement au grand axe. Ainsi, le point  $P$  est le transformé d'un point  $P'$  de ce cercle par cette affinité (cf. **figure 1**). L'anomalie excentrique s'interprète alors comme étant l'angle polaire  $E = (CO, CP')$  de ce point  $P'$  vu du centre du cercle principal.  $E$  est ainsi une variable

angulaire permettant toujours de situer  $P$  sur l'ellipse, quelle soit plane ou rectiligne. Enfin,  $w$ ,  $E$  et  $M$  se confondent lorsque l'ellipse est un cercle. On pourra aussi voir avec l'applet Java contenue dans le fichier [MouvElliptKepler.html](#) comment le mouvement képlérien elliptique dépend d'une façon générale de ces 3 anomalies.

2. Pour  $h > 0$ , l'orbite est hyperbolique et l'on a :  $\frac{\mu}{2h} = a$  et  $q = a(e - 1)$  ; en posant, de façon analogue au cas elliptique,  $E = \sqrt{2h} \tau$ ,  $n = \frac{\sqrt{2h}}{a} = \sqrt{\mu/a^3}$  et  $M = n(t - t_p)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 r &= a(e \cosh E - 1) = \frac{d\tau}{dt} = a \frac{dM}{dE} \\
 M &= e \sinh E - E \quad (\text{équation de Kepler}) \\
 \dot{E} &= \frac{na}{r} \quad \text{et} \quad \dot{M} = n
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

On a de nouveau la troisième loi de Kepler :  $n^2 a^3 = \mu$ , puis :

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos w}
 \tag{3.32}$$

$w$ ,  $E$  et  $M$  s'annulent en même temps, à l'instant  $t_p$  du passage au péricentre, mais le mouvement n'est pas périodique.  $V_r$  et  $V_\perp$  désignant toujours les vitesses radiales et orthoradiales, on a ensuite :

$$G = rV_\perp = r^2 \frac{dw}{dt} = \sqrt{\mu p} = na^2 \sqrt{e^2 - 1}
 \tag{3.33}$$

$$\dot{r} = V_r = \frac{nae}{\sqrt{e^2 - 1}} \sin w = \frac{na^2e}{r} \sinh E \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} X &= r \cos w = a(e - \cosh E) \\ Y &= r \sin w = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh E \\ r \dot{X} &= -na^2 \sinh E \\ r \dot{Y} &= na^2\sqrt{e^2 - 1} \cosh E \\ \tan^2 \frac{w}{2} &= \frac{e + 1}{e - 1} \tanh^2 \frac{E}{2} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Comme dans le cas elliptique,  $X, Y$  et  $Z = 0$  sont les coordonnées cartésiennes du point  $P$  dans le repère propre  $O\mathbf{u}_0\mathbf{v}_0\mathbf{k}$  du mouvement képlérien, et ces équations sont aussi valables dans tous les cas, que le mouvement hyperbolique soit plan ou rectiligne. On voit que l'orbite hyperbolique est ici la transformée par affinité orthogonale de rapport  $b/a = \sqrt{e^2 - 1}$ , de l'hyperbole équilatère d'équation paramétrique :  $x = \pm a \cosh E$  et  $y = a \sinh E$  dans le repère décentré  $C\mathbf{u}_0\mathbf{v}_0\mathbf{k}$ . (cf. figure 3)

3. Pour  $h = 0$ , l'orbite est parabolique et l'on a directement :

$$\begin{aligned} r &= q + \frac{\mu}{2} \tau^2 = \frac{d\tau}{dt} \\ t - t_p &= q\tau + \frac{\mu}{6} \tau^3 \end{aligned} \tag{3.36}$$

puis :

$$G = rV_{\perp} = \sqrt{\mu p} \tag{3.37}$$

$$r \dot{r} = r V_r = \mu \tau \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} X &= r \cos w = \frac{1}{2} (p - \mu \tau^2) \\ Y &= r \sin w = \sqrt{\mu p} \tau \\ r \dot{X} &= -\mu \tau \\ r \dot{Y} &= \sqrt{\mu p} \end{aligned} \tag{3.39}$$

Si le mouvement est plan ( $p$  et  $q$  non nuls), en définissant de nouveau :  $M = n (t - t_p)$  mais avec  $n = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}$ , on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + \cos w} = \frac{1}{2} (p + \mu \tau^2) \implies \sqrt{\frac{\mu}{p}} \tau = \tan \frac{w}{2} \\ M &= \frac{1}{2} \tan \frac{w}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{w}{2} \quad (\text{équation de Barker}) \end{aligned} \tag{3.40}$$

puis :

$$\begin{aligned}
 X &= r \cos w = q \left(1 - \tan^2 \frac{w}{2}\right) \\
 Y &= r \sin w = p \tan \frac{w}{2} \\
 r \dot{X} &= -\sqrt{\mu p} \tan \frac{w}{2} \\
 r \dot{Y} &= \sqrt{\mu p}
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

**Remarque 1.** Les formules donnant les coordonnées  $X$  et  $Y$  de  $P$  dans le repère propre du mouvement képlérien auraient pu aussi être obtenues de façon purement vectorielle en appliquant les opérateurs de dérivation (3.20) au vecteur  $\mathbf{r}$ . En effet, on trouve alors :

$$\mathbf{r}'' = r^2 \ddot{\mathbf{r}} + r\dot{r} \dot{\mathbf{r}} = -\mu \mathbf{u} + r\dot{r} \dot{\mathbf{r}}$$

Or, en développant  $\mu \mathbf{e} = \dot{\mathbf{r}} \wedge (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) - \mu \mathbf{u}$  et en tenant compte de l'intégrale de l'énergie, on obtient  $\mu \mathbf{e} = 2h \mathbf{r} + \mu \mathbf{u} - r\dot{r} \dot{\mathbf{r}}$ , de sorte que  $\mathbf{r}$  satisfait finalement à l'équation vectorielle suivante, linéaire et à coefficients constants :

$$\mathbf{r}'' - 2h \mathbf{r} = -\mu \mathbf{e} \tag{3.42}$$

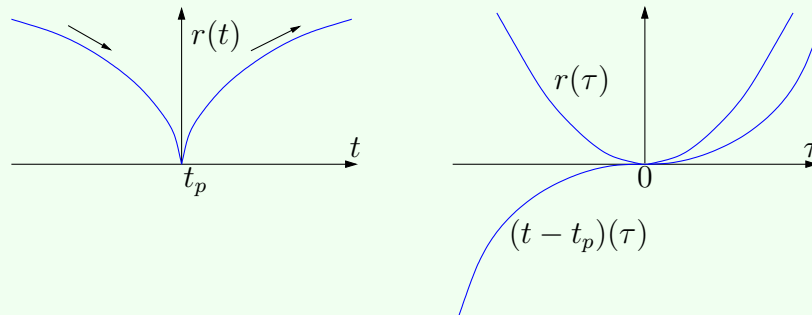
**Exercice** Les composantes  $X$  et  $Y$  de  $\mathbf{r}$  s'en déduisent aisément en fonction de  $\tau$  ou de  $E$  (suivant le signe de  $h$ ), en utilisant les conditions initiales :



$$\mathbf{r}(t_p) = q \mathbf{u}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{r}'(t_p) = r \dot{\mathbf{r}}(t_p) = \mathbf{G} \wedge \mathbf{u}_0$$

**Remarque 2.** La régularisation de l'équation (3.18) en  $r = 0$  était nécessaire surtout pour le cas où  $r$  peut devenir nul, c'est-à-dire pour le mouvement képlérien rectiligne lorsque le point  $P$  "tombe" sur le foyer  $O$ . Son

intérêt est particulièrement évident quand, en plus,  $h$  est nul, puisque la solution régularisée, polynomiale en  $\tau$  :  $r(\tau) = \frac{1}{2}\mu\tau^2$  et  $t - t_p = \frac{1}{6}\mu\tau^3$ , équivaut à la fonction  $r(t) = [(9\mu/2)(t - t_p)^2]^{1/3}$  dont le graphe présente un point de rebroussement en  $t = t_p$ .



Cependant, la régularisation n'est pas seulement une méthode intéressante pour l'intégration analytique d'équations sujettes à des singularités ; c'est aussi une technique très efficace pour intégrer numériquement de telles équations. Par exemple, pour intégrer numériquement en fonction de  $t$  les équations du mouvement képlérien dont l'une, de la forme  $\dot{r} = f(r, w)$ , est singulière en  $r = 0$ , on calcule en principe  $r(t + h)$  connaissant au moins  $r(t)$  [ $h$  est ici le "pas d'intégration"]. La méthode élémentaire fondée sur le développement de Taylor de  $r(t)$  consiste à écrire par exemple :

$$r(t + h) = r(t) + h f(r(t), w(t))$$

Cependant, si les conditions initiales conduisent à un mouvement très excentrique, tel que  $r$  devient très petit, il faut compenser les fortes variations de  $f(r, w)$  au voisinage de  $r = 0$  par des variations correspondantes du pas  $h$ , de façon à ce que  $h f(r, w)$  reste toujours "assez petit". L'utilisation d'une méthode d'intégration numérique "à pas constant" (telles les méthodes d'Adams) ne peut alors convenir. Au contraire, si après avoir changé de

variable indépendante, on cherche à intégrer numériquement les équations régularisées :  $\frac{dr}{d\tau} = r f(r, w)$  et  $\frac{dt}{d\tau} = r$ , on peut utiliser une méthode à pas constant pour la variable  $\tau$  car  $r f(r, w)$  reste maintenant fini en  $r = 0$ . A un  $\Delta\tau$  constant correspond un  $\Delta t = r \Delta\tau$  variable avec  $r$ . Une méthode à pas constant appliquée aux équations en  $\tau$  est ainsi équivalente à une méthode à pas variable qu'on appliquerait aux équations en  $t$ ; la régularisation revient donc à faire une variation automatique du pas en  $t$ . Cette façon de régulariser les équations est généralement encore applicable aux mouvements képlériens perturbés.

## 12. Eléments d'orbite

### 12.1. Définitions des éléments d'une orbite képlérienne

On a vu que tout mouvement képlérien d'un point  $P$  est caractérisé par 6 constantes d'intégration scalaires dont 5 définissent une conique dans l'espace par rapport à l'un de ses foyers  $O$ , et dont la sixième initialise le mouvement sur cette orbite en donnant par exemple l'instant  $t_p$  de passage au péricentre (modulo la période  $T$  éventuellement). Ces 6 constantes sont, au sens large, des *éléments d'orbite* du mouvement képlérien. Un tel mouvement est en outre paramétré par une septième constante,  $\mu$ , qui caractérise le centre attractif  $O$ . On peut regrouper ces 7 constantes de plusieurs façons équivalentes :

$$(\mu, \mathbf{G}, \mathbf{e}, t_p) \quad \text{ou} \quad (\mu, h, \mathbf{G}, \mathbf{u}_0, t_p) \quad \text{ou} \quad (\mu, h, p, \mathbf{k}, \mathbf{u}_0, t_p)$$

où  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{u}_0$  sont les vecteurs unitaires de  $\mathbf{G}$  et de  $\mathbf{e}$  respectivement, avec la contrainte  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{e} = 0$  (ou  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 = 0$ ). Rappelons que  $\mathbf{u}_0$  est le vecteur unitaire de l'axe de symétrie de la trajectoire et du mouvement, et qu'il est dirigé vers le péricentre, tandis que  $\mathbf{k}$  est normal au plan orbital, orienté dans le sens du produit vectoriel  $\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$ . Si le

mouvement est rectiligne,  $\mathbf{k}$  ne peut plus être défini à partir de  $\mathbf{G}$  qui est nul ; on peut alors prendre pour  $\mathbf{k}$  un vecteur unitaire quelconque orthogonal à la direction fixe  $\mathbf{u}_0 = -\mathbf{u}$ , et le mouvement rectiligne s'effectue alors aussi dans le plan normal à  $\mathbf{k}$ . Si le mouvement est circulaire, on ne peut plus définir  $\mathbf{u}_0$  à partir de  $\mathbf{e}$  qui est nul ; on peut alors prendre pour  $\mathbf{u}_0$  un vecteur unitaire quelconque fixe et orthogonal à  $\mathbf{k}$ , c'est-à-dire suivant un diamètre quelconque de l'orbite circulaire.  $t_p$  représente alors dans tous les cas l'instant où  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  (modulo  $T$  si le mouvement est périodique).

Le troisième regroupement :  $(\mu, h, p, \mathbf{k}, \mathbf{u}_0, t_p)$  a l'avantage d'explicitement un repère orthonormé direct et fixe  $R$  lié à l'orbite :  $R = O\mathbf{u}_0\mathbf{v}_0\mathbf{k}$ , où  $O$  est le foyer attractif et où  $\mathbf{v}_0$  représente  $\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_0$ . Le repère  $R$ , respectant les axes ou plans de symétrie du mouvement, est le *repère naturel* ou *repère propre* de ce mouvement képlérien. On a ainsi une représentation intrinsèque car on n'a pas eu besoin de définir comment le repère  $R$  se situe par rapport au repère galiléen de référence.

Il suffit en fait de trois éléments d'orbite pour représenter un mouvement képlérien dans son repère propre : Pour  $\mu$  fixé, les constantes scalaires  $h, p$  et  $t_p$  caractérisent la forme de l'orbite, sa dimension ou son énergie et le mouvement dans  $R$ . Cependant, sauf si l'orbite est parabolique, on préfère souvent utiliser, à la place de  $h$  et  $p$ , l'*excentricité*  $e$  et le *demi-grand axe*  $a$  qui s'en déduisent par les formules (3.15) et (3.17). Ne faisant intervenir que des modules de vecteurs, leur calcul à partir des vecteurs position et vitesse ne dépend pas du repère (fixe) dans lequel sont exprimés ces vecteurs. A la place de l'*instant de passage au péricentre*  $t_p$ , on pourrait aussi utiliser la valeur  $w_0$  ou  $M_0$  d'une des anomalies à un instant fixé  $t_0$ . A la place de  $a$ , on peut aussi utiliser le moyen mouvement  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  ou éventuellement la période  $T$  ; bien sûr, les valeurs de  $a$  et  $n$  dépendent du système d'unités adopté pour mesurer les longueurs et les temps ; elles dépendent aussi de l'unité de masse car  $\mu$  dépend de la constante de la gravitation universelle  $K$  qui elle-même en dépend. On verra en §12.3 comment les valeurs de  $a, n$  et  $\mu$  d'un mouvement képlérien particulier peuvent servir à définir un système d'unités commodes pour les besoins de l'Astronomie.

Les trois autres éléments d'orbite contenus dans la définition des vecteurs unitaires et orthogonaux  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{u}_0$



dépendent, comme ces vecteurs, du repère de référence galiléen dans lequel sont exprimés les vecteurs position et vitesse du point  $P$ . Soit  $R_0 = O\mathbf{i}_0\mathbf{j}_0\mathbf{k}_0$  ce repère de référence, utilisé avec des coordonnées sphériques  $\lambda$  et  $\phi$  appelées de manière générique *longitude* et *latitude*. Il reste à représenter  $R$  dans  $R_0$ . On utilise pour cela trois angles d'Euler  $\Omega$ ,  $i$  et  $\omega$  ainsi définis : Le sens de  $\mathbf{k}$  étant implicitement défini par le sens du vecteur  $\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$ , le produit vectoriel  $\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{k}$  définit un vecteur dirigé vers le *nœud ascendant* de l'orbite sur le plan  $O\mathbf{i}_0\mathbf{j}_0$ , c'est-à-dire vers le point où  $P$ , en mouvement sur son orbite, traverse ce plan en passant d'une latitude négative à une latitude positive. Ainsi, soit  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire de la direction  $\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{k}$  du nœud ascendant.

- $\Omega$  est l'angle de rotation mesuré autour de  $\mathbf{k}_0$  entre  $\mathbf{i}_0$  et  $\mathbf{n}$
- $i$  est l'angle de rotation mesuré autour de  $\mathbf{n}$  entre  $\mathbf{k}_0$  et  $\mathbf{k}$
- $\omega$  est l'angle de rotation mesuré autour de  $\mathbf{k}$  entre  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{u}_0$

$\Omega$  est la *longitude du nœud ascendant*,  $i$  l'*inclinaison* de l'orbite sur le plan  $O\mathbf{i}_0\mathbf{j}_0$  et  $\omega$  l'*argument du péri-centre*. La latitude  $\phi_0$  et la longitude  $\lambda_0$  de la direction du péri-centre peuvent s'en déduire par la *trigonométrie sphérique* :

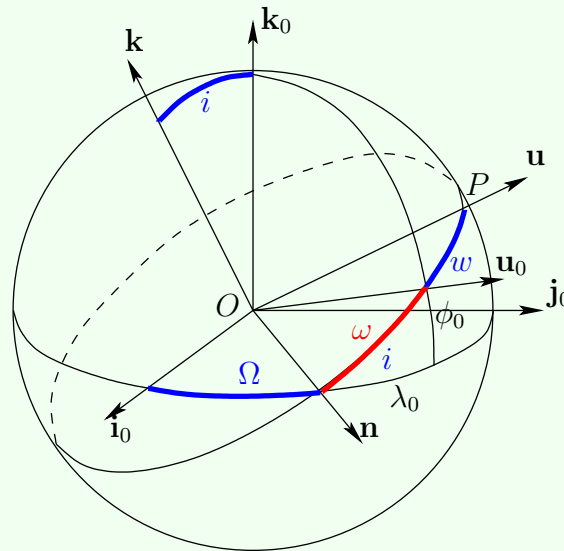
$$\sin \phi_0 = \sin i \sin \omega \quad \text{et} \quad \tan(\lambda_0 - \Omega) = \cos i \tan \omega \quad (3.43)$$

**Exercice** Le point  $P$  étant repéré dans le plan  $O\mathbf{u}_0\mathbf{v}_0$  par l'anomalie vraie  $w$ , ses coordonnées  $\phi$  et  $\lambda$  dans  $R_0$  s'en déduisent immédiatement :

$$\sin \phi = \sin i \sin(\omega + w) \quad \text{et} \quad \tan(\lambda - \Omega) = \cos i \tan(\omega + w) \quad (3.44)$$

Dans le cas d'un mouvement rectiligne, celui-ci est porté par la demi-droite issue de  $O$  de vecteur unitaire  $\mathbf{u} = -\mathbf{u}_0$ , repérable dans  $R_0$  par les coordonnées sphériques constantes  $\lambda$  et  $\phi$  du point  $P$ . Si  $O\mathbf{u}_0$  n'est pas colinéaire à  $O\mathbf{k}_0$ , définissons  $\mathbf{k}$  comme vecteur unitaire de  $\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{u}_0$  ; le vecteur  $\mathbf{n} = \mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{k}$  est alors suivant le nœud du demi-plan "vertical" normal à  $\mathbf{k}$  et contenant  $O\mathbf{k}_0$  et la demi-droite  $O\mathbf{u}$  support du mouvement ; les angles d'Euler  $\Omega$ ,  $i$  et  $\omega$  définis comme précédemment à partir de  $\mathbf{k}$  et de  $\mathbf{n}$ , vérifient :  $\Omega = \lambda$ ,  $i = \pi/2$  et  $\omega = \phi + \pi$ . Avec  $w = \pi$ , les formules (3.44) sont encore vraies. Si  $O\mathbf{u}_0$  et  $O\mathbf{k}_0$  sont colinéaires, tout plan vertical

contient la droite support du mouvement ; on peut prendre  $\Omega = \lambda$  quelconque et, comme précédemment,  $i = \pi/2$  et  $\omega = \phi + \pi$ .



**Remarque 1.** Comme tous les repères utilisés sont directs, le choix du nœud ascendant comme origine des angles dans le plan orbital entraîne que l'inclinaison  $i$  est un angle **inférieur à  $90^\circ$**  si le mouvement de  $P$  est *direct* (longitude croissante), et **supérieur à  $90^\circ$**  s'il est *rétrograde*.

**Remarque 2.** Les éléments  $\Omega$ ,  $i$  et  $\omega$  dépendent du choix de  $R_0$  : leur existence n'est pas toujours assurée, car lorsque  $i$  vaut 0 ou  $\pi$ , le nœud n'est plus défini et donc  $\Omega$  et  $\omega$  sont indéterminés. De même, lorsque l'inclinaison est très petite,  $\Omega$  et  $\omega$  sont mal déterminés. Pour éviter ce problème, on utilise souvent l'angle  $\varpi$  toujours bien

défini :

$$\boxed{\varpi = \Omega + \omega} \quad \textit{longitude du péricentre dans l'orbite}$$

De même si  $e$  est presque nul,  $\mathbf{u}_0$  est mal défini, et donc les angles  $\omega$ ,  $\varpi$ , ainsi que les anomalies  $w$ ,  $E$  et  $M$  sont mal déterminés ; pour éviter cela, on utilise les angles toujours bien définis :

$$\boxed{\ell = \varpi + w} \quad \textit{longitude vraie de P dans l'orbite}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \varpi + E} \quad \textit{longitude excentrique de P}$$

$$\boxed{L = \varpi + M} \quad \textit{longitude moyenne de P}$$

(attention : les quantités  $\varpi$ ,  $\ell$ ,  $\mathcal{E}$  et  $L$  sont improprement dénommées “longitudes” car ce sont des sommes d’angles non coplanaires).

A la place de  $t_p$ , instant de passage au péricentre lui aussi mal déterminé quand  $e$  est petit, on peut utiliser comme élément d’orbite la quantité  $L_0$ , valeur de la longitude moyenne à un instant donné  $t_0$ . On en déduit  $L$  à tout instant :  $L = L_0 + n(t - t_0)$

Ainsi, si le mouvement est elliptique, on prend souvent les éléments d’orbite parmi les ensembles suivants :

$$(a, e, i, \Omega, \omega, t_p) \quad (3.45)$$

$$(a, e, i, \Omega, \varpi, L_0 \text{ à } t = t_0) \quad (3.46)$$

Si  $e$  et  $i$  sont tous deux très petits,  $\Omega$ ,  $\omega$  et  $\varpi$  sont mal déterminés. En fait, cette mauvaise détermination est de la même nature que celle rencontrée dans des coordonnées polaires planes  $(r, \theta)$  où, lorsque  $r$  s’annule,  $\theta$  est indéterminé, tandis que les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  sont toujours bien définies, même en  $(0, 0)$ . Pour lever les indéterminations dues à la nullité éventuelle de  $i$  et de  $e$ , on utilise donc habituellement les coordonnées

cartésiennes suivantes :

$$\begin{aligned} k &= e \cos \varpi & h &= e \sin \varpi \\ q &= \sin i/2 \cos \Omega & p &= \sin i/2 \sin \Omega \end{aligned} \quad (3.47)$$

Les éléments d'orbite adaptés aux faibles excentricités et inclinaisons sont ainsi :

$$(a, k, h, q, p, L_0 \text{ à } t = t_0) \quad (3.48)$$

Parfois  $k$ ,  $h$ ,  $q$  et  $p$  sont remplacés par les variables complexes  $z$  et  $\zeta$  :

$$\begin{aligned} z &= k + \sqrt{-1} h = e \exp \sqrt{-1} \varpi \\ \zeta &= q + \sqrt{-1} p = \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1} \Omega \end{aligned} \quad (3.49)$$

**Remarque 3.** En Astronomie, on trouve divers qualificatifs pour préciser le repère dans lequel sont définis des éléments d'orbite. Ainsi, on parle d'*éléments héliocentriques* si l'origine de  $R_0$  est le centre du Soleil, d'*éléments géocentriques* ou d'*éléments planétocentriques* si c'est le centre de la Terre ou d'une planète, d'*éléments barycentriques* si c'est le centre de masses d'un ensemble de corps désignés.

Le choix de la base de  $R_0$  est aussi fonction des conditions d'observation des mouvements que l'on désire représenter. Dans le cas de mouvements dans le système solaire, on choisit souvent la base des **coordonnées écliptiques**, et pour des mouvements de satellite, la base des **coordonnées équatoriales**.  $R_0$  pourra ainsi être par exemple un repère écliptique héliocentrique ou bien écliptique barycentrique (origine au centre de masses du système solaire), ou un repère équatorial géocentrique ou encore équatorial jovicentrique si l'origine est au centre de Jupiter, etc. · · En fait, comme les plans de l'écliptique ou de l'équateur terrestre ne sont pas absolument fixes (leur intersection, le point  $\gamma$ , participe notamment à la "précession des équinoxes"), la base écliptique ou équatoriale choisie est rendue fixe en prenant celle correspondant à une date fixée (par exemple : repère

*géocentrique rapporté à l'écliptique et à l'équinoxe moyens pour J2000<sup>2</sup>)*

## 12.2. Eléments d'orbite canoniques du mouvement képlérien

Nous recherchons ici des jeux de variables canoniquement conjuguées qui soient des constantes dans le mouvement képlérien. Partant de variables canoniques associées à un certain paramétrage du point  $P$ , nous allons appliquer la méthode d'Hamilton-Jacobi pour passer de ces variables à de nouvelles variables qui soient constantes. Nous en déduiront, pour le mouvement elliptique, les éléments canoniques de Delaunay, puis ceux de Poincaré qui évitent certaines singularités présentes dans les éléments de Delaunay.

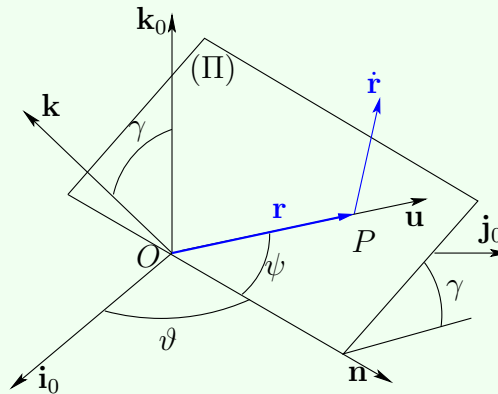
### 12.2.1. Calcul de l'hamiltonien

Soit  $R_0 = O\mathbf{i}_0\mathbf{j}_0\mathbf{k}_0$  le repère galiléen dans lequel le point  $P$  est représenté par le vecteur  $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$ . On pourrait utiliser des coordonnées cartésiennes ou des coordonnées sphériques, et définir les variables canoniques correspondantes à partir du Lagrangien. Au lieu de cela, nous préférons utiliser ici un système de coordonnées particulier qui permettra de tenir compte facilement de la propriété du mouvement képlérien d'être plan.

Considérons donc un plan  $(\Pi)$  dont les seules contraintes soient pour le moment de passer par  $O$  et par  $P$  et de couper le plan de référence  $O\mathbf{i}_0\mathbf{j}_0$ ; on suppose aussi que  $P$  et  $O$  ne sont pas confondus. Soient  $\mathbf{k}$  un vecteur unitaire normal à  $(\Pi)$ ,  $\gamma = (\mathbf{k}_0, \mathbf{k})$  l'angle des deux plans et  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire de la direction  $\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{k}$ . Notons que le plan  $(\Pi)$  n'est pas lié pour le moment au vecteur vitesse de  $P$ . Le vecteur  $\mathbf{u}$  peut alors être déduit de  $\mathbf{i}_0$  par les trois rotations suivantes correspondant à trois angles d'Euler : rotation d'angle  $\vartheta = (\mathbf{i}_0, \mathbf{n})$  autour de  $\mathbf{k}_0$ ,

<sup>2</sup> Selon l'usage des astronomes, les dates sont souvent données dans la chronologie julienne, où les jours successifs sont simplement numérotés consécutivement depuis un certain jour. Ainsi le jour julien numéro 2 451 545 débute le premier janvier 2000 à 12 heures et correspond à la date J2000.

rotation d'angle  $\gamma = (\mathbf{k}_0, \mathbf{k})$  autour de  $\mathbf{n}$  et rotation d'angle  $\psi = (\mathbf{n}, \mathbf{u})$  autour de  $\mathbf{k}$ . Soit enfin  $\mathbf{v} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{u}$ .



Nous repérons alors le point  $P$  par les 4 coordonnées  $r, \vartheta, \gamma$  et  $\psi$  qui sont supposées pouvoir varier indépendamment l'une de l'autre : Bien sûr, pour  $P$  donné, si l'on choisit arbitrairement 2 des angles, le troisième dépend des 2 premiers, mais en faisant varier les trois angles indépendamment, on peut bien décrire toute la sphère de rayon  $r$  (de façon non bijective). Dans ces conditions, la vitesse de  $P$  s'écrit :

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d(r \mathbf{u})}{dt} = \dot{r} \mathbf{u} + r (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}) \tag{3.50}$$

où  $\boldsymbol{\Omega}$  est le vecteur rotation de la base  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$  par rapport à la base  $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$  :

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\vartheta} \mathbf{k}_0 + \dot{\gamma} \mathbf{n} + \dot{\psi} \mathbf{k} \tag{3.51}$$

On en déduit les composantes de la vitesse de  $P$  dans la base  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$  :

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r (\dot{\psi} + \dot{\vartheta} \cos \gamma) \\ r (\dot{\gamma} \sin \psi - \dot{\vartheta} \sin \gamma \cos \psi) \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

puis le vecteur moment cinétique de  $P$  en  $O$  :

$$\mathbf{G} = -r^2 (\dot{\gamma} \sin \psi - \dot{\vartheta} \sin \gamma \cos \psi) \mathbf{v} + r^2 (\dot{\psi} + \dot{\vartheta} \cos \gamma) \mathbf{k} \quad (3.53)$$

et enfin l'énergie cinétique de  $P$  :

$$T = \frac{1}{2} [\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\psi} + \dot{\vartheta} \cos \gamma)^2 + r^2 (\dot{\gamma} \sin \psi - \dot{\vartheta} \sin \gamma \cos \psi)^2] \quad (3.54)$$

Si maintenant on impose au plan  $(\Pi)$  de contenir à tout instant le vecteur vitesse de  $P$ , d'après (3.52), cela revient à établir cette relation de liaison entre les paramètres primitifs :

$$\dot{\gamma} \sin \psi - \dot{\vartheta} \sin \gamma \cos \psi = 0 \quad (3.55)$$

En associant un multiplicateur  $\lambda$  à cette liaison, et en tenant compte de l'existence d'un Lagrangien  $\mathcal{L} = T + \frac{\mu}{r}$ ,

on obtient des *équations de Lagrange avec multiplicateur* :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= 0 \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= 0 \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} &= -\lambda \sin \gamma \cos \psi \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} &= \lambda \sin \psi
 \end{aligned}
 \tag{3.56}$$

Désignons par  $R, \Psi, \Theta$  et  $\Gamma$  les moments conjugués respectifs de  $r, \psi, \vartheta$  et  $\gamma$  définis par :

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \dot{r} \\
 \Psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = r^2 (\dot{\psi} + \dot{\vartheta} \cos \gamma) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{k} \\
 \Theta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = r^2 (\dot{\psi} + \dot{\vartheta} \cos \gamma) \cos \gamma - r^2 (\dot{\gamma} \sin \psi - \dot{\vartheta} \sin \gamma \cos \psi) \sin \gamma \cos \psi = \mathbf{G} \cdot \mathbf{k}_0 \\
 \Gamma &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}} = r^2 (\dot{\gamma} \sin \psi - \dot{\vartheta} \sin \gamma \cos \psi) \sin \psi = \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}
 \end{aligned}
 \tag{3.57}$$

On remarque en passant que le moment conjugué de chaque angle est la composante du moment cinétique suivant l'axe autour duquel "tourne" cet angle. En définissant l'hamiltonien  $H$  par la relation :

$$H = R\dot{r} + \Psi\dot{\psi} + \Theta\dot{\vartheta} + \Gamma\dot{\gamma} - \mathcal{L}
 \tag{3.58}$$



et en exprimant  $H$  en fonction des variables et de leurs conjuguées, on trouve :

$$H(r, \psi, \vartheta, \gamma, R, \Psi, \Theta, \Gamma) = \frac{1}{2} \left[ R^2 + \frac{\Psi^2}{r^2} + \frac{\Gamma^2}{r^2} + \frac{(\Theta - \Psi \cos \gamma)^2}{r^2 \sin^2 \gamma} \right] - \frac{\mu}{r} \quad (3.59)$$

Enfin, après avoir différentié (3.58) et en tenant compte des équations de Lagrange (3.56) et de la définition des moments conjugués, l'identification des coefficients de chaque élément différentiel dans les deux membres de  $dH$  conduit aux équations d'Hamilton "avec multiplicateurs" :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial R} & \frac{dR}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Psi} & \frac{d\Psi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \psi} \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Theta} & \frac{d\Theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} - \lambda \sin \gamma \cos \psi \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Gamma} & \frac{d\Gamma}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \gamma} + \lambda \sin \psi \end{aligned} \quad (3.60)$$

auxquelles il faut joindre la relation de liaison (3.55) qui montre, d'après (3.57), que  $\Gamma$  est nul, ainsi que  $\frac{d\gamma}{dt}$  égal à  $\frac{\partial H}{\partial \Gamma} = \frac{\Gamma}{r^2}$  ; si l'on veut que la liaison (3.55) soit vérifiée quel que soit  $\psi$ , alors il faut qu'à son tour  $\frac{d\vartheta}{dt}$  soit nul.  $\gamma$  et  $\vartheta$  sont donc constants et le plan ( $\Pi$ ) est fixe. On tire ensuite des équations d'Hamilton :

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0 = \frac{\partial H}{\partial \Theta} = \frac{\Theta - \Psi \cos \gamma}{r^2 \sin^2 \gamma} \implies \boxed{\Theta = \Psi \cos \gamma} \quad (3.61)$$

puis

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0 \implies \Psi \text{ constant, ainsi que } \Psi \cos \gamma = \Theta$$

On en déduit :  $d\Theta/dt = 0$  ; mais par ailleurs, (3.60) donne :  $\dot{\Theta} = -\lambda \sin \gamma \cos \psi$  et donc il faut  $\lambda = 0$  pour que la liaison soit réalisée quel que soit  $\psi$ . On vérifie ensuite que l'équation d'Hamilton donnant  $d\Gamma/dt$  est aussi identiquement nulle. Le multiplicateur étant nul, l'équation de liaison est réalisée de façon "naturelle", sans faire intervenir de forces pour maintenir cette liaison. On retrouve que le mouvement képlérien est plan.

$\Gamma$  étant identiquement nul et  $\gamma$  pouvant être défini par le rapport constant  $\Theta/\Psi = \cos \gamma$ , on peut enfin considérer que ces deux variables canoniquement conjuguées sont superflues ; alors, l'hamiltonien se réduit à l'expression :

$$H(r, \psi, \vartheta, R, \Psi, \Theta) = \frac{1}{2} \left[ R^2 + \frac{\Psi^2}{r^2} \right] - \frac{\mu}{r} \quad (3.62)$$

On retrouve l'hamiltonien du problème de Kepler plan obtenu dans l'exemple du paragraphe §2-7.0 en fonction de coordonnées polaires dans ce plan. Le calcul qu'on vient de faire montre que dans le problème képlérien spatial, le plan fixe dans lequel s'effectue le mouvement est défini par deux variables canoniques constantes  $\vartheta$  et  $\Theta$  où  $\vartheta$  est la longitude du nœud et où l'inclinaison est donnée par le rapport constant  $\cos \gamma = \Theta/\Psi$ . Par ailleurs, on reconnaît maintenant que  $\Psi = r^2 \dot{\psi} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{k}$  est le module  $G$  du moment cinétique défini en (3.7). Avec les notations classiques des éléments d'orbite :  $\Omega = \vartheta$ ,  $i = \gamma$  et  $G = \Psi$ , on a donc le jeu de variables canoniques suivant pour le problème de Kepler :

$$(r, \psi, \Omega, R, G, \Theta) \quad \text{avec} \quad \Theta = G \cos i \quad (3.63)$$

Avec l'hamiltonien (3.62), on écrirait bien sûr des équations canoniques d'Hamilton "sans multiplicateur". Ne dépendant pas explicitement du temps,  $H$  est constant et sa valeur représente l'énergie totale du mouvement képlérien qu'on avait notée  $h$  en (3.6).

Notons encore que l'hypothèse  $\gamma \neq 0$  était indispensable pour assurer que  $\Theta$  soit une quantité distincte de  $\Psi$  sinon, le problème aurait été dégénéré, passant d'un problème spatial à un problème plan.

### 12.2.2. Application de la méthode d'Hamilton-Jacobi

Notre but est maintenant de trouver la **fonction génératrice**  $G_2$  d'un changement de variables canoniques :

$$(r, \psi, \Omega, R, G, \Theta) \longrightarrow (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$$

tel que le nouvel hamiltonien  $H'$  soit nul, les nouvelles variables étant alors toutes des constantes. En fait, on a vu que pour un système conservatif ( $H$  constant), on peut, de manière équivalente, faire en sorte que  $H'$  ait la même valeur que  $H$  en identifiant  $H'$  à l'un des moments,  $y_1$  par exemple, lui-même égal à l'énergie  $h$  du système. Alors, avec  $H' = y_1 = H = h$ , toutes les variables  $x_i$  et  $y_i$  sont constantes, sauf  $x_1$  qui s'identifie au temps puisqu'alors  $\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial y_1} = 1$ . Dans ces conditions, la fonction génératrice  $G_2$  recherchée ne doit pas dépendre explicitement du temps ;  $G_2(r, \psi, \Omega, y_1, y_2, y_3)$  doit seulement vérifier :

$$\begin{aligned} dG_2 &= Rdr + Gd\psi + \Theta d\Omega + x_1 dy_1 + x_2 dy_2 + x_3 dy_3 \\ &= \frac{\partial G_2}{\partial r} dr + \frac{\partial G_2}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial G_2}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial G_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial G_2}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial G_2}{\partial y_3} dy_3 \end{aligned} \tag{3.64}$$

et  $H' - H = 0$ , soit encore l'équation d'**Hamilton-Jacobi** :

$$y_1 - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial G_2}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial G_2}{\partial \psi} \right)^2 \right] + \frac{\mu}{r} = 0$$

Comme les variables  $\psi$ ,  $\Omega$  et  $\Theta$  n'apparaissent pas explicitement dans  $H$ , leurs variables conjuguées respectives  $G$ ,  $\Theta$  et  $\Omega$  sont des constantes du mouvement et on peut choisir une fonction génératrice qui engendre une identité en ce qui concerne ces variables constantes. Prenant ainsi :

$$G_2 = \psi y_2 + \Omega y_3 + S(r, -, -, y_1, y_2, -) \tag{3.65}$$

et tenant compte de (3.64), on déduit en effet :

$$x_3 = \frac{\partial G_2}{\partial y_3} = \Omega \quad , \quad \Theta = \frac{\partial G_2}{\partial \Omega} = y_3 \quad \text{et} \quad G = \frac{\partial G_2}{\partial \psi} = y_2 \quad (3.66)$$

Désormais, le changement de variables peut ainsi être réduit à :

$$(r, \psi, \Omega, R, G, \Theta) \longrightarrow (x_1, x_2, \Omega, h, G, \Theta)$$

avec une fonction génératrice  $G_2 = \psi G + \Omega \Theta + S(r, -, -, h, G, -)$  où  $S$  est solution de l'équation :

$$h - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{G^2}{2r^2} + \frac{\mu}{r} = 0$$

On obtient ainsi :

$$S(r, -, -, h, G, -) = \varepsilon \int_{r_0(h,G)}^r \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}} dr \quad (3.67)$$

où l'on a admis que la constante d'intégration  $r_0$  est une fonction des 2 constantes  $h$  et  $G$  dont doit dépendre  $S$  et où  $\varepsilon = \pm 1$ .

De (3.64) on déduit ensuite :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial G_2}{\partial y_1} = \frac{\partial S}{\partial h} = \varepsilon \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}} - \varepsilon \frac{\partial r_0}{\partial h} \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r_0} - \frac{G^2}{r_0^2}} \\ &= t - t_0 \quad \text{puisque} \quad \dot{x}_1 = \frac{\partial H'}{\partial h} = 1 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Dans ce cas,  $t_0$  est l'instant où  $r$  vaut  $r_0$ , à condition toutefois que  $r_0$  soit l'une des racines de l'équation :  $2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2} = 0$  (afin d'annuler le terme en  $\frac{\partial r_0}{\partial h}$ ). Alors, comme  $\frac{dr}{dt} = \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}$  (puisque'on a à la fois  $R = \dot{r}$  et  $R = \frac{\partial S}{\partial r}$ ),  $r_0$  est aussi l'une des valeurs de  $r$  où  $dr/dt$  s'annule.  $r$  passe alors par un extremum. Prenons  $r_0$  correspondant au péricentre. On a donc  $t_0 = t_p$  instant de passage au péricentre, et la racine  $r_0$  est donnée par l'expression suivante :

$$r_0 = \frac{G^2/\mu}{1 + \sqrt{1 + 2hG^2/\mu^2}} \tag{3.69}$$

On pourra comparer cet  $r_0$  avec l'expression (3.23) de  $q$  en tenant compte de  $p = G^2/\mu$  et de l'expression de l'excentricité  $e$  donnée en (3.15). Ayant choisi  $r_0$  de la sorte, on a ensuite :

$$x_2 = \frac{\partial G_2}{\partial G} = \psi - \varepsilon \int_{r_0}^r \frac{G dr}{r^2 \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}} \tag{3.70}$$

$$= \omega \quad \text{constant puisque} \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial H'}{\partial G} = 0$$

**Exercice**  $\omega$  s'interprète donc comme la valeur de  $\psi$  lors du passage au péricentre. En posant  $u = 1/r$  l'équation (3.70) s'intègre ensuite pour donner :



$$u = \frac{1 + \sqrt{1 + 2hG^2/\mu^2} \cos(\psi - \omega)}{G^2/\mu} \tag{3.71}$$

Cette expression est comparable à (3.10), et correspond à l'équation polaire d'une conique de foyer  $O$ , d'excentricité  $e = \sqrt{1 + 2hG^2/\mu^2}$  et de paramètre  $p = G^2/\mu$ , située dans le plan de variation de  $\psi$ , c'est-à-dire dans le

plan (II). L'angle  $(\psi - \omega)$  s'interprète comme étant l'anomalie vraie. Finalement, le problème de Kepler admet donc le nouveau jeu de variables canoniques suivant :

$$(t - t_p, \omega, \Omega, h, G, \Theta) \quad (3.72)$$

dont les cinq dernières, étant des constantes, sont des *éléments d'orbite canoniques* ; l'énergie  $h$  est la variable canonique conjuguée du temps, le moment cinétique  $G$  est conjugué de l'argument du péricentre  $\omega$  et la composante  $\Theta$  du moment cinétique sur  $Ok_0$  est conjugué de la longitude du nœud  $\Omega$  ; l'hamiltonien dans ces variables vaut simplement :


$$H'(t - t_p, \omega, \Omega, h, G, H) = H'(-, -, -, h, -, -) = h \quad (3.73)$$

Il reste à terminer l'intégration de l'équation (3.68) pour exprimer  $r$  en fonction du temps. Nous le ferons dans le cas du mouvement elliptique, en introduisant les éléments de Delaunay.

### 12.2.3. Passage aux éléments canoniques de Delaunay

Dans le cas du mouvement elliptique, posons  $h = -\mu/(2a)$  et utilisons la relation  $G = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$  issue de l'expression de l'excentricité dans (3.71). Alors, le changement de variable régularisant :  $r \rightarrow E$  défini par  $r = a(1 - e \cos E)$ , permet d'intégrer (3.68) en aboutissant à l'équation de Kepler :

$$t - t_p = \sqrt{a^3/\mu} (E - e \sin E) \quad (3.74)$$

 **Exercice** Introduisant alors l'anomalie moyenne  $M = \sqrt{\mu/a^3}(t - t_p)$ , on peut faire en sorte que  $M$  soit une des variables canoniques. Il suffit de définir une transformation canonique entre  $(t - t_p, h)$  et  $(M, L)$  qui ne change ni l'hamiltonien ni les autres variables, et pour cela il suffit d'avoir :

$$(t - t_p)dh - MdL = 0$$

c'est-à-dire :

$$(t - t_p) \frac{\mu}{2a^2} da - \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_p) dL = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{dL}{da} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

On en déduit  $L = \sqrt{\mu a}$  et  $h = -\frac{\mu^2}{2L^2}$ .

C'est ainsi que l'on aboutit aux *éléments de Delaunay* ( $l, g, \vartheta, L, G, \Theta$ ) définis, avec les notations de Poincaré, par :

|                      |                       |        |
|----------------------|-----------------------|--------|
| $l = M$              | $L = \sqrt{\mu a}$    | (3.75) |
| $g = \omega$         | $G = L\sqrt{1 - e^2}$ |        |
| $\vartheta = \Omega$ | $\Theta = G \cos i$   |        |

L'hamiltonien correspondant conserve sa valeur :

$$H_1(l, g, \vartheta, L, G, \Theta) = H_1(-, -, -, L, -, -) = -\frac{\mu^2}{2L^2} \quad (3.76)$$

Les équations d'Hamilton s'en déduisent :

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial L} = \frac{\mu^2}{L^3} & \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial l} = 0 \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial G} = 0 & \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial g} = 0 \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial \Theta} = 0 & \frac{d\Theta}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta} = 0 \end{aligned} \quad (3.77)$$

Notons qu'il suffit de changer le signe de l'hamiltonien pour que chaque variable canonique apparaisse comme permutée avec son conjugué. Avec  $H_2 = -H_1 = \frac{\mu^2}{2L^2}$  on obtient évidemment :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial l} = 0 & \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial L} = \frac{\mu^2}{L^3} \\ \frac{dG}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial g} = 0 & \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial G} = 0 \\ \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial \vartheta} = 0 & \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial \Theta} = 0 \end{aligned} \tag{3.78}$$

C'est d'ailleurs sous cette dernière forme que sont souvent utilisées les variables de Delaunay  $(L, G, \Theta, l, g, \vartheta)$ , avec un hamiltonien **changé de signe** :

$$H_2(L, G, \Theta, l, g, \vartheta) = H_2(L, -, -, -, -, -) = \frac{\mu^2}{2L^2}$$

où le rôle des variables et de leurs moments conjugués est inversé.

#### 12.2.4. Passage aux éléments canoniques de Poincaré

Les variables de Delaunay ne sont pas les meilleures qui soient lorsque l'excentricité ou l'inclinaison sont très petites car elles engendrent les mêmes singularités que les éléments d'orbite définis en (3.45). Cela se manifeste ici sur les variables  $L, G$  et  $\Theta$  qui ne diffèrent alors l'une de l'autre que par des quantités de l'ordre du carré de l'excentricité ou de l'inclinaison. Ces trois variables deviennent identiques et donc indiscernables si  $e$  et  $i$  s'annulent ; dans le même temps les angles  $l, g$  et  $\theta$  deviennent indéterminés.



Pour éviter ces singularités, Poincaré a introduit des variables canoniques non singulières lorsque l'excentricité et l'inclinaison sont nulles. Ce sont les éléments suivants :

$$\begin{array}{ll}
 \Lambda = L & \lambda = l + g + \vartheta \\
 \xi = \sqrt{2(L - G)} \cos(g + \vartheta) & \eta = -\sqrt{2(L - G)} \sin(g + \vartheta) \\
 p = \sqrt{2(G - \Theta)} \cos \vartheta & q = -\sqrt{2(G - \Theta)} \sin \vartheta
 \end{array} \quad (3.79)$$

(notons que, vue la signification des éléments de Delaunay,  $\lambda$  représente la longitude moyenne,  $g + \vartheta = \varpi$  est la longitude du péricentre dans l'orbite et  $\vartheta = \Omega$  est la longitude du nœud ascendant)

Ces éléments sont tout-à-fait analogues aux variables  $k$ ,  $h$ ,  $q$  et  $p$  déjà introduites en (3.47). En effet  $\sqrt{2(L - G)} = \sqrt{2L(1 - \sqrt{1 - e^2})}$  est de l'ordre de  $e\sqrt{L}$  et  $\sqrt{2(G - \Theta)} = \sqrt{2L\sqrt{(1 - e^2)}(1 - \cos i)}$  est de l'ordre de  $\sin i \sqrt{L}$ .

Pour passer des éléments de Delaunay  $(L, G, \Theta, l, g, \vartheta)$  aux *éléments de Poincaré* on définit d'abord d'autres variables canoniques :

$$\begin{array}{lll}
 x_1 = L & p_1 = l + g + \vartheta & (= \lambda) \\
 x_2 = L - G & p_2 = -(g + \vartheta) & (= -\varpi) \\
 x_3 = G - \Theta & p_3 = -\vartheta & (= -\Omega)
 \end{array} \quad (3.80)$$

Cette transformation est canonique puisqu'elle vérifie la condition de canonicité :

$$ldL + gdG + \vartheta d\Theta - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - p_3 dx_3 = 0$$

Ensuite, il suffit de vérifier qu'une transformation du type :

$$(y, x) \longrightarrow (u, v) \quad \text{avec } u = \sqrt{2y} \cos x \text{ et } v = \sqrt{2y} \sin x \quad (3.81)$$

est aussi canonique. En effet elle vérifie  $vdu + ydx = dG_2$  avec  $G_2(x, u) = \frac{1}{2}u^2 \tan x$ . Ces deux transformations laissent l'hamiltonien inchangé, égal finalement à :

$$H_3(\Lambda, \xi, p, \lambda, \eta, q) = H_3(\Lambda, -, -, -, -, -) = \frac{\mu^2}{2\Lambda^2} \tag{3.82}$$

### 12.3. Systèmes d'unités astronomiques

Le système d'unités international MKS n'est pas adapté aux mesures astronomiques : Dans ce système, les distances ou les durées mesurées dans l'Univers sont données en mètres ou en secondes avec une faible précision par des nombres très grands (qualifiés "d'astronomiques" !). Cependant, on arrive depuis peu à obtenir, dans le système solaire, des mesures de distances par radar exprimées en mètres avec une précision de l'ordre du kilomètre ou par laser (sur la Lune) avec une précision de quelques centimètres. Ces mesures bénéficient de la très bonne précision des mesures de temps. La situation est au contraire très mauvaise en ce qui concerne la précision des mesures de masse des étoiles ou des planètes si l'on veut exprimer leurs masses en kilogrammes ; on pourrait indirectement l'améliorer si la constante de la gravitation universelle était mieux connue dans le système MKS. Les meilleures mesures de  $K$  donnent en effet seulement 5 chiffres significatifs :  $K = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ .

En fait, l'observation de mouvements képlériens elliptiques dans l'Univers permet de relier les 3 grandeurs Longueur - Masse - Temps, à condition de connaître  $K$ . Cela est notamment évident dans la troisième loi de Kepler :  $\frac{a^3}{T^2} = \frac{Km}{4\pi^2}$ , qui montre que des mesures de distance et de temps associées à une valeur de  $K$ , permettent de déterminer la masse avec la même précision que la moins précise de ces grandeurs. Comme  $K$  est mal connu dans le système MKS comparativement aux distances et aux temps, on ne détermine bien que le produit  $Km$  ; par exemple, l'observation des satellites de la Terre donne :  $Km_T = 398\,600,64 \cdot 10^9 \text{ m}^3\text{s}^{-2}$  où  $m_T$  est la masse de la Terre, mais ni  $K$  ni  $m_T$  ne sont connus avec autant de chiffres significatifs.

En fait, la difficulté de mesurer la masse des astres en kilogrammes vient de la définition même de l'unité de masse et de son caractère artificiel. Une unité "naturelle" de masse pourrait être la masse d'un atome ou d'un neutron. Mais une telle unité ne serait pas non plus adaptée à l'Astronomie. L'Astrophysique nous apprend au contraire que le comportement physique de chaque étoile est notamment fonction de sa masse totale, qui apparait ainsi comme grandeur fondamentale. Il est donc intéressant d'adopter en Astronomie une unité de masse qui soit celle d'un astre. C'est la *masse du Soleil* qui a été choisie car c'est une référence particulièrement bien observable et étudiée.

Dans ces conditions, avec cette unité de masse, pour le mouvement héliocentrique d'une particule fictive de masse négligeable qui serait soumise à la seule attraction du Soleil, on aurait la troisième loi de Kepler :  $\frac{a^3}{T^2} = \frac{K}{4\pi^2}$ . Cette relation permettrait de déterminer  $K$  avec la même précision que celle des mesures que l'on pourrait faire de  $a$  et de  $T$  dans le système solaire. En fait, si les périodes planétaires sont depuis longtemps mesurables avec précision (par exemple pour la Terre,  $T = 1$  année sidérale = 365,256 363 05 j = 31 558 149,768 s), les demi-grands axes ne sont pas encore mesurables en mètres avec la même précision.

Aussi procède-t-on autrement : On dit que **par convention**, la valeur de  $K$  est donnée par le nombre

$$k = \sqrt{K} = 0,017\,202\,098\,950\,000 \quad \text{appelé } \textit{constante de Gauss}$$

Ce nombre est donné dans un système d'unités où l'unité de masse est celle du Soleil (notée  $\odot$ ), l'unité de temps est le jour (de 86400 secondes), et l'unité de longueur est l'*unité astronomique* (notée UA). Avec cette valeur conventionnelle de  $\sqrt{K}$ , l'unité astronomique de longueur est le rayon de l'orbite circulaire qui serait décrite autour du Soleil par une planète sans masse et non perturbée par d'autres planètes, avec la période égale à :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} = 365,256\,898\,326\,3 \text{ j}$$

Cette valeur, voisine de la période de la Terre, signifie que l'unité astronomique de longueur est voisine du demi-grand axe de l'orbite terrestre ; la différence avec la période sidérale donnée précédemment vient de ce que la Terre a une masse non nulle et qu'elle subit les perturbations des autres planètes. En adoptant pour unité de temps l'*année julienne* (comprenant par définition exactement 365,25 jours de 86400 secondes), on obtient encore :

$$K = 39,476\,926\,421\,373 \text{ (UA)}^3 \odot^{-1} \text{ (an)}^{-2}$$

Dans ce système d'unités,  $K$  est ainsi voisin de  $4\pi^2$ .

A partir des constantes primaires :

– Vitesse de la lumière :  $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$

– Temps de lumière pour l'unité de distance :  $\tau_A = 499,004\,782 \text{ s}$

on déduit la valeur de l'unité astronomique en mètres :  $1 \text{ UA} = c\tau_A = 1,495\,978\,70 \cdot 10^{11} \text{ m}$ . Avec la valeur de  $K$  donnée dans le système MKS, on obtient aussi la masse du Soleil en kilogrammes :  $1\odot = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ .

On trouvera dans le **Tableau 1** les valeurs admises actuellement pour les masses des planètes rapportées à celle du Soleil, et dans le **Tableau 2**, les masses de quelques satellites naturels rapportées à la masse de leur planète. Dans le Tableau 1, la masse de chaque planète comprend la masse totale de la planète et de son cortège (éventuel) de satellites.

**Tableau 1.** Inverse de la *masse des planètes*, c'est-à-dire masse du Soleil évaluée en masses de chaque planète.

| planète      | $\odot/m$ | planète | $\odot/m$     |
|--------------|-----------|---------|---------------|
| Mercure      | 6 023 600 | Uranus  | 22 869        |
| Vénus        | 408 523,5 | Neptune | 19 314        |
| Terre + Lune | 328 900,5 | Pluton  | 130 000 000   |
| Mars         | 3 098 710 | Cérès   | 1 700 000 000 |
| Jupiter      | 1 047,355 | Pallas  | 9 100 000 000 |
| Saturne      | 3 498,5   | Vesta   | 8 300 000 000 |

**Tableau 2.** Inverse de la *masse des principaux satellites naturels* du système solaire, c'est-à-dire masse des planètes évaluée en masses de leurs satellites.

| planète | satellite | $m_{planète}/m_{satellite}$ |
|---------|-----------|-----------------------------|
| Terre   | Lune      | 81,300                      |
| Jupiter | Io        | 21 270                      |
|         | Europe    | 39 060                      |
|         | Ganymède  | 12 750                      |
|         | Callisto  | 17 800                      |
| Saturne | Titan     | 4 225,8                     |
| Neptune | Triton    | 500                         |

On constate que la masse du Soleil est vraiment prépondérante sur celle des planètes, tout comme celle de chaque planète est prépondérante sur celles de ses satellites. Jupiter, la plus massive des planètes, a une

masse inférieure au millième de la masse solaire. La Lune est parmi les satellites, celui qui a la masse la plus importante par rapport à la celle de sa planète (plus du centième). La petitesse de ces masses relatives explique que les mouvements observés des planètes ou de leurs satellites soient assez voisins de mouvements képlériens héliocentriques pour les planètes, et planétocentriques pour les satellites. Cela justifie qu'on cherche à représenter leurs mouvements par des mouvements képlériens perturbés (cf. la [Partie 5](#)).

A titre indicatif, le [Tableau 3](#) donne des éléments d'orbite héliocentrique des 9 planètes principales du système solaire, en utilisant des éléments du type (3.46). Ces éléments sont donnés avec une précision moyenne, valables sur une durée limitée à quelques dizaines d'années en relation avec l'approximation purement képlérienne de leur mouvement. On donne en outre la valeur du moyen mouvement sidéral  $N$  en secondes de degré par jour ; cette valeur n'est pas redondante avec la valeur donnée du demi-grand axe, car elle diffère légèrement de la valeur  $n$  du moyen mouvement que l'on pourrait calculer à partir de la troisième loi de Kepler :  $n^2 a^3 = K(1 + m)$ . Pour calculer une position des planètes à un instant  $t$  donné à partir des éléments fournis par le Tableau 3, il convient de calculer la longitude moyenne  $L$  par la formule  $L = N(t - t_0)$  utilisant  $N$  à la place de  $n$ .

**Tableau 3.** Eléments moyens des orbites héliocentriques des grosses planètes, rapportés à l'écliptique et l'équinoxe moyens J2000, pour la date  $t_0 = \text{J2000}$ .

|         | $a$ (UA) | $e$    | $i$   | $\Omega$ | $\varpi$ | $L_0$  | $N$ ("j <sup>-1</sup> ) |
|---------|----------|--------|-------|----------|----------|--------|-------------------------|
| Mercure | 0,38710  | 0,2056 | 7°00  | 48°33    | 77°46    | 252°25 | 14732,42                |
| Vénus   | 0,72333  | 0,0068 | 3°39  | 76°68    | 131°56   | 181°98 | 5767,67                 |
| Terre   | 1,00000  | 0,0167 | —     | —        | 102°94   | 100°47 | 3548,19                 |
| Mars    | 1,52368  | 0,0934 | 1°85  | 49°56    | 336°06   | 355°43 | 1886,52                 |
| Jupiter | 5,20260  | 0,0485 | 1°30  | 100°46   | 14°33    | 34°35  | 299,128                 |
| Saturne | 9,55491  | 0,0555 | 2°49  | 113°66   | 93°06    | 50°08  | 120,455                 |
| Uranus  | 19,2184  | 0,0463 | 0°77  | 74°01    | 173°00   | 314°05 | 42,231                  |
| Neptune | 30,1104  | 0,0090 | 1°77  | 131°78   | 48°12    | 304°39 | 21,534                  |
| Pluton  | 39,44    | 0,2485 | 17°13 | 110°7    | 224°6    | 237°7  | 14,3                    |

**Exercice** Sauf pour Mercure et Pluton, toutes les orbites planétaires ont donc des inclinaisons et des excentricités voisines de zéro. Il existe cependant de nombreuses autres petites planètes ou astéroïdes (tels Cérès, Pallas et Vesta, mais plus de 7000 autres astéroïdes sont actuellement répertoriés) dont les orbites sont en majorité situées entre celles de Mars et de Jupiter ; leurs excentricités et leurs inclinaisons sont en général plus fortes que pour les grosses planètes. Certaines ont même des excentricités supérieures à 0,6. D'autres petits corps traversent encore le système solaire de manière épisodique sur des orbites paraboliques : Ce sont les comètes. Certaines reviennent périodiquement après avoir été "capturées" par Jupiter à l'occasion d'un passage à proximité de cette grosse planète ; le mécanisme d'une telle capture est analysé dans le prochain paragraphe.


## 12.4. Energie d'une orbite et vitesses cosmiques

Pb<sub>5</sub>  
Pb<sub>6</sub>  
Pb<sub>7</sub>

En mécanique spatiale, on étudie le mouvement orbital de corps artificiels qui peuvent être des satellites d'une planète ou des sondes spatiales en transit dans le système solaire ; on peut alors toujours considérer que leur masse est négligeable devant celle de cette planète ou devant celle du Soleil. On peut même considérer qu'en première approximation, lorsqu'un tel corps est dans le "voisinage" d'une planète de masse  $m$ , il ne subit que l'attraction de celle-ci, assimilable à celle d'un point ou d'une sphère de même masse, et qu'en dehors de ce voisinage, il ne subit que l'attraction du Soleil de masse  $M$ . Ce voisinage, presque sphérique, constitue la *sphère d'influence* de la planète, dont la définition et le rayon seront précisés en §6-24.4 à propos du mouvement des  $N$  corps. Disons seulement ici que dans ce voisinage, l'influence de la planète est "supérieure" à celle du Soleil. Dans le voisinage de la planète, le mouvement du corps est donc représentable par un mouvement képlérien planétocentrique associé à une constante  $\mu = Km$ , et à l'extérieur de ce voisinage, par un mouvement képlérien héliocentrique de constante  $\mu = KM$  ; les planètes elles-mêmes peuvent être considérées comme ayant en première approximation des mouvements képlériens héliocentriques de constante  $\mu = K(M + m)$ . Dans cette approximation, tous les mouvements du système solaire sont donc képlériens, chaque corps  $P$  étant attiré à chaque instant par un seul centre  $O$  de constante  $\mu$ .

Dans le cas où  $P$  décrit autour de  $O$  une orbite elliptique de demi-grand axe  $a$ , avec  $2h = -\mu/a < 0$ , l'intégrale de l'énergie s'écrit encore :

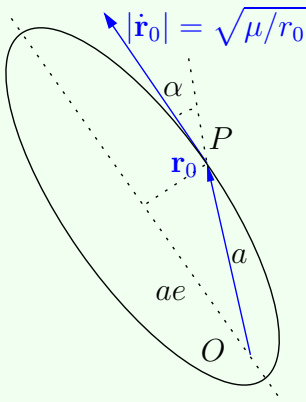
$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \quad (3.83)$$

 **Exercice** Si l'orbite est circulaire de rayon  $r = a$ , on en déduit la *vitesse circulaire* à la distance  $r$  et pour la constante d'attraction  $\mu$ , notée  $V_c(r)$  :

$$V_c(r) = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (3.84)$$



Notons qu'implicitement le vecteur vitesse est alors normal au rayon vecteur. Inversement, on peut dire que si le point  $P$  est lancé à la distance  $r$  du point  $O$  avec une vitesse égale à la vitesse circulaire à cette distance et dirigée **perpendiculairement** à  $OP$ , l'orbite de  $P$  est nécessairement circulaire.



Plus généralement, si l'orbite a une excentricité  $e$  et un demi-grand axe  $a$ , aux points de l'ellipse où  $r = a$  (c'est-à-dire aux extrémités du petit axe) on a une vitesse parallèle au grand axe et de module égal à  $\sqrt{\mu/a}$ . L'angle  $\alpha$  entre  $\mathbf{r}$  et  $\dot{\mathbf{r}}$  en ce point est tel que  $\cos \alpha = e$ . Donc, si on lance le point  $P$  à une distance  $r_0$  du point  $O$  avec une vitesse  $\sqrt{\mu/r_0}$  égale à la vitesse circulaire à cette distance mais inclinée d'un angle  $\alpha$  sur  $OP$ , l'orbite de  $P$  est elliptique avec  $e = \cos \alpha$ ,  $a = r_0$  et le grand axe de cette ellipse est parallèle à la vitesse initiale. (3.84b)

**Exercice** Dans le cas d'une orbite parabolique ( $h = 0$ ), on a seulement :



$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{2\mu}{r} \quad (3.85)$$

La vitesse correspondante est la **vitesse parabolique** à la distance  $r$  et pour la constante  $\mu$  ; notée  $V_p(r)$ , on a donc aussi :

$$V_p(r) = \sqrt{2} V_c(r) \quad (3.86)$$

Il n'y a plus ici de contrainte sur la direction de la vitesse. Donc, si on lance le point  $P$  à une distance  $r_0$  du point  $O$  avec une vitesse égale à la vitesse parabolique à cette distance, l'orbite de  $P$  est parabolique, quelle que

soit l'orientation de cette vitesse lors du lancement. L'orbite parabolique éloigne le point  $P$  du point  $O$  jusqu'à l'infini. On dit que  $V_p(r)$  est aussi la *vitesse de libération* à la distance  $r$  et pour la constante  $\mu$ . C'est la vitesse qu'il suffit juste de donner au point  $P$  pour l'éloigner à une distance infinie du point  $O$ , et pour qu'il "y arrive" avec une vitesse nulle. Ainsi, selon que la vitesse initiale donnée à la distance  $r$  est inférieure, égale ou supérieure à  $V_p(r)$ , l'orbite est nécessairement elliptique, parabolique ou hyperbolique respectivement.

**Exercice** Pour la **planète Terre**, de rayon  $R \simeq 6378$  km et de constante  $\mu = 398600$  km<sup>3</sup>s<sup>-2</sup>, la vitesse circulaire à la surface de la Terre (vitesse de satellisation) vaut 7,905 km.s<sup>-1</sup>; la vitesse de libération correspondante (à la surface de la Terre) est  $\sqrt{2}$  fois plus grande : 11,18 km.s<sup>-1</sup>. De même, dans le système solaire où la constante  $\mu$  vaut environ 39,4769 UA<sup>3</sup>.an<sup>-2</sup>, la vitesse circulaire en un point situé à 1 UA du Soleil est égale à 6,2831 UA.an<sup>-1</sup> soit 29,785 km.s<sup>-1</sup>; la vitesse de libération du système solaire à 1 UA vaut alors 42,122 km.s<sup>-1</sup>.



Dans le cas d'une orbite hyperbolique ( $2h = \mu/a = V_\infty^2 > 0$ ), on peut écrire :

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = V_p^2 + V_\infty^2 \tag{3.87}$$

A l'infini, le vecteur vitesse est porté par l'une ou l'autre des asymptotes ; sur l'une, la vitesse est dirigée vers le centre  $C$  de l'hyperbole, tandis que sur l'autre, elle éloigne  $P$  de  $C$  ; l'angle  $\delta$  entre les asymptotes orientées dans le sens du mouvement de  $P$  à l'infini, représente la *déviaton* de  $P$  due à l'attraction de  $O$  par l'intermédiaire de la constante d'attraction  $\mu$ . On a :

$$\delta = \pi - 2(\pi - w_\infty) \quad \text{avec} \quad \cos w_\infty = -1/e \quad \implies \quad \sin(\delta/2) = 1/e$$

En utilisant les relations :  $q = a(e - 1)$ ,  $b = a\sqrt{e^2 - 1}$  et  $a = \mu/V_\infty^2$ , on obtient encore :

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{qV_\infty^2}{\mu}} \tag{3.88}$$

et aussi :

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{b^2 V_\infty^4}{\mu^2}} \quad (3.89)$$

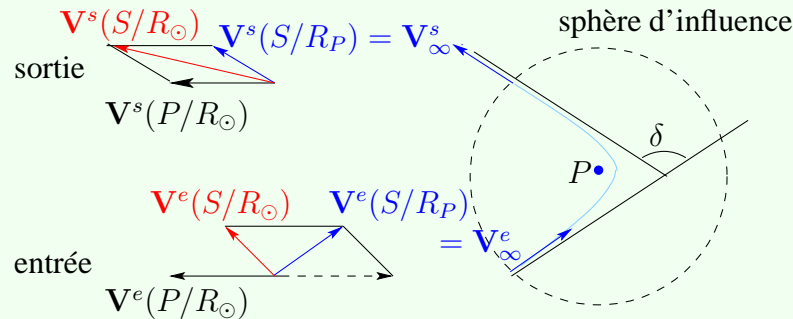
**Exercice** La première relation permet de calculer la déviation obtenue pour une vitesse donnée à l'infini, en fonction de la distance  $q$  au péricentre ; la seconde donne cette déviation en fonction de  $b$  qui représente la distance du foyer  $O$  à l'asymptote, c'est-à-dire aussi la distance au point  $O$  à laquelle  $P$  serait passé s'il n'avait pas été attiré par ce point.

Ces formules sont intéressantes pour évaluer par exemple la déviation subie par une sonde spatiale ou par une comète lorsque celle-ci, se rapprochant d'une planète, traverse sa sphère d'influence ; on peut alors considérer qu'en première approximation, dans ce voisinage, le mouvement d'une particule est uniquement dû à l'attraction de la planète (problème de deux corps). Si  $S$  désigne la sonde ou la comète, et  $P$  la planète rencontrée, leurs vitesses héliocentriques sont notées respectivement  $\mathbf{V}(S/R_\odot)$  et  $\mathbf{V}(P/R_\odot)$ . La vitesse planétocentrique de  $S$  est notée  $\mathbf{V}(S/R_P)$ , où  $R_P$  est un repère d'origine  $P$  en translation par rapport à  $R_\odot$ . La vitesse planétocentrique de  $S$  à l'entrée de la sphère d'influence de  $P$  est :

$$\mathbf{V}^e(S/R_P) = \mathbf{V}^e(S/R_\odot) - \mathbf{V}^e(P/R_\odot) = \mathbf{V}_\infty^e \quad (3.90)$$

Après avoir "contourné" la planète en passant à la distance minimale  $q$ , le point  $S$  sort de la sphère d'influence avec une vitesse planétocentrique  $\mathbf{V}_\infty^s$  déviée de l'angle  $\delta$  ( $\mathbf{V}_\infty^e$  et  $\mathbf{V}_\infty^s$  ont même module). La vitesse héliocentrique de  $S$  à cet instant est alors :

$$\mathbf{V}^s(S/R_\odot) = \mathbf{V}^s(S/R_P) + \mathbf{V}^s(P/R_\odot) = \mathbf{V}_\infty^s + \mathbf{V}^s(P/R_\odot) \quad (3.91)$$



Pb<sub>5</sub>

Si l'interaction de  $S$  avec  $P$  dure un temps négligeable, on pourra considérer que les vitesses  $\mathbf{V}^e(P/R_\odot)$  et  $\mathbf{V}^s(P/R_\odot)$  sont égales. Selon le sens de la déviation subie par  $S$  dans le repère planétocentrique, la nouvelle vitesse héliocentrique  $\mathbf{V}^s(S/R_\odot)$  peut être de module supérieur ou inférieur à celui de  $\mathbf{V}^e(S/R_\odot)$  ; il en résulte pour  $S$  un gain ou une perte d'énergie (échangée avec la planète), et donc une orbite lui permettant de s'éloigner ou de se rapprocher davantage du Soleil. C'est ce mécanisme, appelé *tremplin gravitationnel*, qui est utilisé par les sondes spatiales pour atteindre par exemple Saturne grâce à un survol adéquat de Jupiter (sondes Voyager 1 et 2), ou qui explique que de nombreuses comètes périodiques, initialement sur des orbites héliocentriques paraboliques, aient été "capturées" par Jupiter lors d'un survol de celui-ci, transformant la parabole initiale en ellipse.

### 12.5. Calcul des éléments d'orbite à partir de conditions initiales

Etant données la position  $\mathbf{r}$  et la vitesse  $\dot{\mathbf{r}}$  d'un point  $P$ , mesurées à un instant  $t_0$  par leurs composantes  $(x, y, z)$  et  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  dans un repère  $R_0 = O\mathbf{i}_0\mathbf{j}_0\mathbf{k}_0$  d'origine  $O$ , on cherche les éléments de l'orbite képlérienne

de  $P$  correspondant à un problème képlérien de foyer  $O$  et de constante d'attraction  $\mu$  :

$$F_\mu : (t_0, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \longmapsto (\Omega, i, \omega, h, p, t_p) \tag{3.92}$$

Le calcul de ces éléments, ou de ceux donnés en (3.45) à (3.49), peut être décrit par le formulaire suivant, qui utilise les notations introduites en §11. On calcule d'abord :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x \mathbf{i}_0 + y \mathbf{j}_0 + z \mathbf{k}_0 = r \mathbf{u} &\Rightarrow &\begin{cases} r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} & (\text{supposé } \neq 0) \\ \mathbf{u} = \mathbf{r}/r \end{cases} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x} \mathbf{i}_0 + \dot{y} \mathbf{j}_0 + \dot{z} \mathbf{k}_0 &\Rightarrow &r \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ h &= \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}/2 - \mu/r \\ \mathbf{G} &= \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = G \mathbf{k} &\Rightarrow &\begin{cases} G = (\mathbf{G} \cdot \mathbf{G})^{1/2} \\ \mathbf{k} = \mathbf{G}/G \end{cases} \quad (\text{si } G \neq 0) \\ \mathbf{e} &= \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{G}/\mu - \mathbf{u} \\ p &= G^2/\mu \\ e &= (1 + 2hp/\mu)^{1/2} \\ q &= p/(1 + e) \end{aligned}$$

Si  $e$  est voisin de zéro, il vaudra mieux calculer  $e$  par une autre formule pour éviter l'erreur de cancellation dans la soustraction de deux nombres voisins de 1. On trouvera cette autre formule en (3.97), dans le traitement du cas elliptique.

Si  $G$  est nul (mouvement rectiligne porté par  $\mathbf{u}$ ), on peut définir  $\mathbf{k}$  comme étant un vecteur unitaire orthogonal à  $\mathbf{u}$ , par exemple :  $\mathbf{k} = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{k}_0)/|\mathbf{u} \wedge \mathbf{k}_0|$ , ou  $\mathbf{k} = \mathbf{i}_0$  si  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{k}_0$  sont colinéaires ; en procédant ainsi, on aura un formulaire unique, valable pour les mouvement plan et rectiligne. L'inclinaison  $i$  est le seul angle qui soit défini entre 0 et  $\pi$  : les valeurs entre 0 et à  $\pi/2$  correspondent à un mouvement direct, et celles supérieures à  $\pi/2$  à un mouvement rétrograde. Les autres angles sont tous définis entre 0 et  $2\pi$  et leur calcul est organisé de façon à les

déterminer par leur sinus et par leur cosinus. Dans le formulaire qui suit, nous avons ainsi mis en évidence toutes les singularités occasionnées par  $i = 0$  ou  $\pi$  et par  $e = 0$ , en exprimant par des composantes cartésiennes, toutes les quantités susceptibles d'être indéterminées.

Pour calculer  $i$  et  $\Omega$ , on projette  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{n}$   $\sin i = \mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{k}$  sur les axes de  $R_0$  :

$$\begin{aligned} \cos i &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_0 & \Rightarrow i \\ \left. \begin{aligned} \sin i \cos \Omega &= (\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i}_0 = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}_0 \\ \sin i \sin \Omega &= (\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j}_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Omega & \text{ si } i \neq 0 \text{ ou } \pi \end{aligned} \quad (3.93)$$

Si  $i$  est voisin de zéro ou de  $\pi$ , il vaut mieux cependant calculer  $i$  par son sinus et son cosinus, avec  $\sin i = [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}_0)^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}_0)^2]^{1/2}$

Pour calculer  $\omega$ , on projette  $\mathbf{e}$  sur  $\mathbf{n}$  et sur  $\mathbf{k} \wedge \mathbf{n}$  :

$$\left. \begin{aligned} e \sin i \cos \omega &= (\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{k}_0 \\ e \sin i \sin \omega &= \mathbf{k} \wedge (\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{k}_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega & \text{ si } i \neq 0 \text{ ou } \pi \text{ et } e \neq 0 \quad (3.94)$$

On peut aussi calculer directement  $(\omega + w)$  en projetant  $\mathbf{u}$  sur  $\mathbf{n}$  et sur  $\mathbf{k} \wedge \mathbf{n}$  :

$$\left. \begin{aligned} \sin i \cos(\omega + w) &= (\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{k}_0 \\ \sin i \sin(\omega + w) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega + w & \text{ si } i \neq 0 \text{ ou } \pi \quad (3.95)$$

On a ensuite l'anomalie vraie  $w$ , puis la longitude du péricentre et la longitude vraie dans des cas particuliers :

$$\left. \begin{aligned} r e \cos w &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} \\ r e \sin w &= G r \dot{r} / \mu \end{aligned} \right\} \Rightarrow w & \text{ si } e \neq 0$$

$$\left. \begin{aligned} e \cos(\Omega + \omega) &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_0 \\ e \sin(\Omega + \omega) &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Omega + \omega & \text{ si } i = 0 \text{ et } e \neq 0$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\Omega + \omega + w) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_0 \\ \sin(\Omega + \omega + w) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{j}_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Omega + \omega + w \quad \text{si } i = 0 \text{ et } e = 0 \quad (3.96)$$

Si  $i = 0$  ou  $\pi$ , on peut adopter par convention :  $\Omega = 0$  ou toute autre valeur.

**Exercice** Pour déterminer  $t_p$ , instant de passage au péricentre (mesuré par rapport à  $t_0$ ), ou  $L_0$ , longitude moyenne à l'instant  $t_0$ , 3 cas sont à considérer :



$$1. h < 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\mu/2h \text{ et } n = \sqrt{\mu/a^3}$$

$$\left. \begin{aligned} e \cos E &= 1 - r/a \\ e \sin E &= r \dot{r}/na^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E \quad \text{si } e \neq 0$$

On peut aussi en déduire  $e$  avec précision, surtout si  $e$  est très petit :

$$e = [(1 - r/a)^2 + (r \dot{r})^2/\mu a]^1/2 \quad (3.97)$$

On a ensuite l'anomalie moyenne à l'instant  $t_0$  :

$$M_0 = n(t_0 - t_p) = E - e \sin E \quad \Rightarrow \quad t_p = t_0 - M_0/n$$

On en déduit encore la longitude moyenne  $L_0$  à cet instant :

$$L_0 = \Omega + \omega + M_0 \quad (3.98)$$

ou la longitude moyenne  $L$  à tout autre instant  $t$  :

$$L = L_0 + n(t - t_0)$$

Si  $e$  est nul,  $t_p$  n'est plus défini, mais  $\omega + w$  l'est encore ; les anomalies vraie et moyenne étant alors égales, on peut calculer  $L_0 = \Omega + \omega + w$  à partir de (3.93) et (3.95). Si  $i$  aussi est nul (ou égal à  $\pi$ ), on a directement  $L_0 = \Omega + \omega + w$  calculé par (3.96).

$$2. \quad h = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu\tau^2 = 2r - p \quad \text{et} \quad \tau = r\dot{r}/\mu \quad \text{puis :}$$

$$t_0 - t_p = \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{3}\mu\tau^2\right)\tau \quad \Rightarrow \quad t_p$$

Si  $p \neq 0$ , avec  $n = \sqrt{\mu/p^3}$ , on a encore  $M_0 = n(t_0 - t_p)$ , puis  $L_0$  par (3.98).

$$3. \quad h > 0 \quad \Rightarrow \quad a = \mu/2h \quad \text{et} \quad n = \sqrt{\mu/a^3}$$

$$\left. \begin{aligned} e \cosh E &= 1 + r/a \\ e \sinh E &= r\dot{r}/na^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exp E \quad \text{puis} \quad E$$

On a ensuite :

$$M_0 = n(t_0 - t_p) = e \sinh E - E \quad \Rightarrow \quad t_p$$

puis  $L_0$  par (3.98).

## 12.6. Calcul d'éphémérides à partir des éléments d'orbite

Inversement, étant donnés une constante d'attraction  $\mu$  et les éléments orbitaux d'un point  $P$  relatifs à un repère  $R_0$ , du type :  $(\Omega, i, \omega, h, p, t_p)$ , ou du type de ceux donnés en (3.45) à (3.49), on peut calculer la position et la vitesse de  $P$  dans ce repère à tout instant  $t$  donné :

$$F_\mu^{-1} : (t, \Omega, i, \omega, h, p, t_p \text{ ou } L_0 \text{ à } t = t_0) \longmapsto (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (3.99)$$

Avec les notations introduites en §11, on peut utiliser le formulaire suivant. On a d'abord dans tous les cas :

$$e = \sqrt{1 + 2hp/\mu} \quad (3.100)$$



**Exercice** puis, pour déterminer la position  $(X, Y, 0)$  et la vitesse  $(\dot{X}, \dot{Y}, 0)$  de  $P$  dans le repère propre  $Ou_0v_0k$ , 3 cas sont à considérer :



1.  $h < 0 \Rightarrow a = -\mu/2h$  et  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  puis  $M = n(t - t_p)$  ou bien  $M = L_0 + n(t - t_0) - \Omega - \omega$  puis :

$$\begin{aligned}
 M &= E - e \sin E \Rightarrow E \quad (\text{par inversion de l'équation de Kepler}) \\
 r &= a(1 - e \cos E) \\
 X &= a(\cos E - e) & Y &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\
 \dot{X} &= -(na^2/r) \sin E & \dot{Y} &= (na^2/r)\sqrt{1 - e^2} \cos E
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

2.  $h = 0 \Rightarrow n = \sqrt{\mu/p^3}$  si  $p \neq 0$  puis  $M = n(t - t_p)$  ou bien  $M = L_0 + n(t - t_0) - \Omega - \omega$  et, en notant  $E = \tan \frac{w}{2}$  :

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{E}{2} + \frac{E^3}{6} \Rightarrow E \quad (\text{par inversion de l'équation de Barker}) \\
 r &= p(1 + E^2)/2 \\
 X &= p(1 - E^2)/2 & Y &= pE \\
 \dot{X} &= -\sqrt{\mu p} E/r & \dot{Y} &= \sqrt{\mu p}/r
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

Si  $p = 0$ , on a plus simplement :  $\mu\tau^3/6 = t - t_p \Rightarrow \tau$  puis :

$$X = -\mu\tau^2/2 \quad Y = 0 \quad \dot{X} = -\mu\tau/r \quad \dot{Y} = 0$$

3.  $h > 0 \Rightarrow a = \mu/2h$  et  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  puis  $M = n(t - t_p)$  ou bien  $M = L_0 + n(t -$

$t_0) - \Omega - \omega$  et :

$$\begin{aligned}
 M &= e \sinh E - E \quad \Rightarrow \quad E \quad (\text{par inversion de l'équation de Kepler}) \\
 r &= a (e \cosh E - 1) \\
 X &= a (e - \cosh E) & Y &= a \sqrt{e^2 - 1} \sinh E \\
 \dot{X} &= -(na^2/r) \sinh E & \dot{Y} &= (na^2/r) \sqrt{e^2 - 1} \cosh E
 \end{aligned}
 \tag{3.103}$$

**Exercice** Notons que pour déterminer  $E$ , il faut dans tous les cas inverser l'équation de Kepler ou de Barker. Lorsqu'on recherche  $E$  numériquement, on utilise généralement la *méthode de Newton* pour sa convergence quadratique : En mettant l'équation de Kepler ou de Barker sous la forme  $f(E) - M = 0$ , si  $f'(E) \neq 0$ , il suffit d'itérer la relation :

$$E_{i+1} = E_i + \Delta E_i \quad \text{avec} \quad \Delta E_i = -\frac{f(E_i) - M}{f'(E_i)}
 \tag{3.104}$$

On démarre généralement les itérations avec  $E_0 = M$ . Dans le cas elliptique et si l'excentricité  $e$  est assez petite, on peut aussi calculer  $E$  à partir du des premiers termes du développement analytique de la solution de l'*équation de Kepler* (cf. §13) :

$$E = M + \left( e - \frac{e^3}{8} \right) \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{3e^3}{8} \sin 3M \dots$$

**Exercice** Cette expression peut aussi servir à amorcer les itérations dans un calcul numérique de  $E$  par la méthode de Newton.

Il reste finalement à appliquer les 3 rotations  $\Omega$ ,  $i$  et  $\omega$  pour obtenir la position et la vitesse de  $P$  dans  $R_o$  :

$$\begin{pmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \\ z & \dot{z} \end{pmatrix} = \mathfrak{R}_3(-\Omega) \times \mathfrak{R}_1(-i) \times \mathfrak{R}_3(-\omega) \times \begin{pmatrix} X & \dot{X} \\ Y & \dot{Y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \tag{3.105}$$

où  $\mathfrak{R}_1$  et  $\mathfrak{R}_3$  désignent les matrices de rotation :

$$\mathfrak{R}_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Remarque.** Si, à la place des coordonnées cartésiennes, on désire les coordonnées sphériques de  $P$  (distance  $r$ , latitude  $\phi$  et longitude  $\lambda$ ), on peut déterminer d'abord  $E$ , puis  $r$  et  $w$ , et utiliser les relations (3.44) qui donnent directement  $\sin \phi$  et  $\tan(\lambda - \Omega)$  en fonction de  $i$  et de  $\omega + w$ .

## 12.7. Calcul des éléments d'orbite à partir d'observations : Méthode de Laplace

Ce paragraphe concerne essentiellement des observations de planètes ou de comètes faites depuis la Terre ; leurs mouvements sont alors supposés héliocentriques, celui de la Terre étant en outre supposé connu. Ces observations donnent uniquement la direction de l'astre (mais pas sa distance). Etant donné un certain nombre de telles observations le problème de la détermination des orbites consiste à trouver une conique ayant un foyer au Soleil, telle qu'elle s'appuie sur les directions géocentriques des observations et telle qu'elle soit décrite suivant la loi des aires (en toute rigueur, les directions d'observation sont d'abord topocentriques, c'est-à-dire vues d'un point de la surface de la Terre, mais, comme les corrections de parallaxe qui donneraient des directions géocentriques ne peuvent être faites qu'en connaissant la distance de l'astre, on néglige pour le moment ces corrections, ce qui revient à négliger les dimensions de la Terre devant cette distance).

Appelons  $\rho(\tau)$  le vecteur unitaire de la ligne de visée géocentrique de l'astre observé à un instant  $\tau$ . Sa direction peut être donnée par 2 coordonnées, généralement écliptiques ou équatoriales. Chaque observation fournit donc 2 données indépendantes. Comme une orbite est définie par 6 constantes, il suffit en principe de 3 observations indépendantes pour la déterminer. Cependant, si l'astre observé a un mouvement coplanaire à

celui de la Terre (donc situé dans l'écliptique), il faut 4 observations car une orbite dans ce plan est définie par 4 constantes (par exemple :  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$ ,  $t_p$ ), et parce que chaque observation dans ce plan ne donne qu'une donnée à savoir la longitude de l'astre. Ceci permet de prévoir qu'un mouvement voisin de l'écliptique sera mal déterminé si l'on dispose de seulement 3 observations. D'une façon générale, il est d'ailleurs souhaitable d'en avoir davantage afin d'atténuer statistiquement l'effet des inévitables erreurs d'observation.

Il existe plusieurs méthodes de détermination d'orbite. Toutes cependant s'efforcent de donner d'abord, par approximations successives, la distance de la Terre à l'astre observé aux instants d'observation : La *méthode de Gauss* pour les orbites elliptiques (ou d'Olbers pour les orbites paraboliques) part de la connaissance approchée que l'on peut avoir de la constante des aires lorsqu'on dispose de 3 observations espacées de quelques semaines ; en revanche, la *méthode de Laplace* que nous allons voir, suppose qu'on ait au moins 3 observations  $\{\rho(\tau_i)\}$ , assez rapprochées dans le temps pour pouvoir déterminer les vecteurs  $\rho_0$ ,  $\dot{\rho}_0$  et  $\ddot{\rho}_0$  à un instant moyen  $\tau_0$  ; cette méthode se prête bien au calcul automatique et a l'avantage de convenir à tout type d'orbite. Son principe est de fournir les vecteurs position et vitesse héliocentrique de l'astre à l'instant  $\tau_0$ , à condition de connaître  $\rho_0$ ,  $\dot{\rho}_0$  et  $\ddot{\rho}_0$  à cet instant ; il suffit ensuite d'appliquer le formulaire décrit en §12.5 pour obtenir les éléments de l'orbite.

Pour cela, notons  $\mathbf{R}$  le rayon vecteur géocentrique du Soleil ; on le connaît à chaque instant grâce aux éphémérides du Soleil publiées chaque année par exemple dans la Connaissance des Temps. On peut donc aussi en déduire (numériquement) sa vitesse  $\dot{\mathbf{R}}$  à un instant quelconque. Soient  $\mathbf{r}$  et  $\dot{\mathbf{r}}$  les vecteurs position et vitesse héliocentriques de l'astre, inconnus au départ et que l'on cherche à déterminer pour l'instant  $\tau_0$ . Soit enfin  $\Delta$  la distance géocentrique de l'astre à cet instant, également inconnue. On a alors, à tout instant :

$$\mathbf{r} = \Delta \boldsymbol{\rho} - \mathbf{R} \quad (3.106)$$

d'où l'on tire par dérivation :

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\Delta} \boldsymbol{\rho} + \Delta \dot{\boldsymbol{\rho}} - \dot{\mathbf{R}} \quad (3.107)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\Delta} \boldsymbol{\rho} + 2\dot{\Delta} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \Delta \ddot{\boldsymbol{\rho}} - \ddot{\mathbf{R}} \quad (3.108)$$

Comme les mouvements héliocentriques de l'astre et de la Terre sont, en première approximation, des mouvements képlériens d'équation :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{R}} = -\mu \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (3.109)$$

on tire de (3.108) et de (3.106) l'équation vectorielle suivante :

$$\Delta \ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\dot{\Delta} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \left( \ddot{\Delta} + \frac{\mu \Delta}{r^3} \right) \boldsymbol{\rho} = \left( \frac{\mu}{r^3} - \frac{\mu}{R^3} \right) \mathbf{R} \quad (3.110)$$

Sauf singularité, cette équation représente 3 équations scalaires dont on peut éliminer l'inconnue  $\ddot{\Delta}$  ; il reste :

$$(\boldsymbol{\rho} \wedge \dot{\boldsymbol{\rho}}) \cdot \ddot{\boldsymbol{\rho}} \Delta = \mathbf{R} \cdot (\boldsymbol{\rho} \wedge \dot{\boldsymbol{\rho}}) \left( \frac{\mu}{r^3} - \frac{\mu}{R^3} \right) \quad (3.111)$$

$$2(\boldsymbol{\rho} \wedge \ddot{\boldsymbol{\rho}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}} \dot{\Delta} = \mathbf{R} \cdot (\boldsymbol{\rho} \wedge \ddot{\boldsymbol{\rho}}) \left( \frac{\mu}{r^3} - \frac{\mu}{R^3} \right) \quad (3.112)$$

De l'équation (3.106) on tire en outre cette relation entre les inconnues  $r$  et  $\Delta$  :

$$r^2 = R^2 + \Delta^2 - 2\Delta \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{R} \quad (3.113)$$

On utilise ces équations à l'instant  $\tau_0$  : Si le produit mixte  $(\boldsymbol{\rho}_0, \dot{\boldsymbol{\rho}}_0, \ddot{\boldsymbol{\rho}}_0)$  n'est pas nul (c'est-à-dire vecteurs non coplanaires et  $\dot{\boldsymbol{\rho}}_0 \neq 0$  et  $\ddot{\boldsymbol{\rho}}_0 \neq 0$ ), (3.111) et (3.113) permettent de calculer  $r$  et  $\Delta$  à cet instant ; en effet, en reportant dans (3.113) la valeur de  $\Delta$  donnée par (3.111) en fonction de  $r$ , on obtient une équation algébrique de degré 8 en  $r$  ; seules les racines réelles positives satisfont le problème. On pourrait montrer qu'avec  $R$  fixé à 1, il y a 3 racines réelles positives (dont celle  $r = R$  et  $\Delta = 0$ ), une racine réelle négative, et les autres sont complexes. L'ambiguïté entre les 2 racines positives possibles peut être levée par le signe de  $\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{R}$  dans le cas où ces 2 racines encadrent la racine  $r = R$  ; dans le cas contraire, il faut faire jouer des critères de vraisemblance, ou utiliser des observations supplémentaires de façon à déterminer  $\mathbf{r}$  et  $\dot{\mathbf{r}}$  à un autre instant.

**Exercice** Dès que  $r$  est ainsi déterminé, on peut calculer  $\Delta$  et  $\dot{\Delta}$  par (3.111) et (3.112), puis  $\mathbf{r}$  et  $\dot{\mathbf{r}}$  par (3.106) et (3.107), et enfin les éléments d'orbite par le formulaire décrit en §12.5.



Si le produit mixte  $(\rho_0, \dot{\rho}_0, \ddot{\rho}_0)$  est nul, il faut supposer que  $\ddot{\rho}_0$  est connu et écrire l'équation donnant  $\ddot{\mathbf{r}}$ . On pourra alors trouver de la même façon  $r$  et  $\Delta$  si le produit mixte  $(\rho_0, \dot{\rho}_0, \ddot{\rho}_0)$  est non nul.

**Remarque 1.** Les valeurs de  $\mathbf{r}$  et de  $\dot{\mathbf{r}}$  que l'on détermine par la méthode précédente sont des premières approximations des vecteurs position et vitesse héliocentriques de l'astre ; il faudrait améliorer ces valeurs approchées en tenant compte notamment du fait que le mouvement réel de la Terre ne suit pas l'équation simplifiée  $\ddot{\mathbf{R}} = -\mu\mathbf{R}/R^3$ , mais subit l'influence des autres planètes et surtout de la Lune : C'est en effet d'abord le barycentre du système Terre-Lune qui suit sensiblement un mouvement képlérien autour du Soleil ; le mouvement de ce barycentre est ensuite perturbé par les autres planètes. Dans la détermination de  $\mathbf{R}$ , il faut donc tenir compte de la position de l'observateur sur la Terre par rapport à ce barycentre en utilisant les éphémérides de la Lune.

**Remarque 2.** Les lois de la mécanique newtonienne concernent les positions géométrique des astres à un même instant ; or, les observations d'un astre  $P$  donnent la position de  $P$  à l'instant où la lumière a été émise par  $P$ . Entre cet instant et l'instant de l'observation, il s'est écoulé un temps  $\delta t = \Delta/c$  où  $c$  est la vitesse de la lumière. Si l'on veut des positions géométriques simultanées, il suffit donc d'*antidater* les position et vitesse du Soleil de  $\delta t$ . La valeur de  $\Delta$  obtenue en première approximation permet de calculer  $\delta t$  et de reprendre ensuite le calcul de  $r$  et  $\Delta$  en utilisant  $\mathbf{R}$  et  $\dot{\mathbf{R}}$  antidatés de  $\delta t$ .

**Remarque 3.** Les calculs décrits précédemment supposent connus  $\rho_0$ ,  $\dot{\rho}_0$  et  $\ddot{\rho}_0$  (et parfois  $\ddot{\rho}_0$ ) à un instant  $\tau_0$  ; en réalité, on observe seulement des directions  $\rho(\tau_i)$  à plusieurs instants  $\tau_i$  et l'on doit procéder à une dérivation numérique de la fonction  $\rho(t)$ . En écrivant le développement de Taylor :

$$\rho(\tau_i) = \rho_0 + \dot{\rho}_0 (\tau_i - \tau_0) + \frac{1}{2} \ddot{\rho}_0 (\tau_i - \tau_0)^2 + \frac{1}{6} \ddot{\rho}_0 (\tau_i - \tau_0)^3 + \dots$$

On voit que 3 observations permettent de déterminer les 3 vecteurs  $\rho_0$ ,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  dans l'équation tronquée :

$$\rho(\tau_i) = \rho_0 + \rho_1 (\tau_i - \tau_0) + \frac{1}{2} \rho_2 (\tau_i - \tau_0)^2$$

Ces vecteurs sont seulement des approximations de  $\rho_0$ ,  $\dot{\rho}_0$  et  $\ddot{\rho}_0$ . Ces approximations seraient meilleures si, avec davantage d'observations, on introduisait dans le calcul des dérivées supplémentaires de  $\rho$ . On peut cependant montrer que si l'on prend pour  $\tau_0$  la moyenne arithmétique des dates  $\tau_i$ , l'erreur due à la troncature du développement de Taylor à un certain degré, est du même ordre de grandeur que celle qu'on aurait avec  $\tau_0$  quelconque et une troncature au degré immédiatement supérieur.

**Remarque 4.** La méthode de Laplace exposée ici pour des observations de planètes, pourrait être transposée au cas des satellites artificiels de la Terre : Il faut seulement remplacer le mouvement du Soleil (soit  $\mathbf{R}$ ) par la loi du mouvement de l'observateur entraîné par la rotation de la Terre sur elle-même.

## 13. Développements en série du mouvement képlérien elliptique

Pb<sub>9</sub>

Etant donné un point  $P$  animé d'un mouvement képlérien elliptique autour d'un foyer  $O$ , on cherche à représenter ses coordonnées dans le repère propre  $O\mathbf{u}_0\mathbf{v}_0$  du plan de son mouvement, sous forme de fonctions explicites du temps, du demi-grand axe et de l'excentricité. On rappelle que ces coordonnées, cartésiennes ou polaires, sont déjà connues en fonction de l'anomalie vraie  $w$  et de l'anomalie excentrique  $E$  :

$$\begin{aligned} X &= r \cos w = a (\cos E - e) \\ Y &= r \sin w = a \sqrt{1 - e^2} \sin E \\ r &= \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos w} = a (1 - e \cos E) \\ w &= 2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.114)$$

Pour exprimer ces quantités en fonction de  $t$ , ou de manière équivalente en fonction de l'anomalie moyenne  $M = n(t - t_p)$ , il faut inverser l'équation de Kepler :

$$E - e \sin E = M \quad \Longrightarrow \quad E = f(e, M)$$

On se propose de construire  $f(e, M)$  puis les quantités (3.114) sous forme de développements en série des "variables"  $e$  et  $M$ . Pour cela, on utilise la propriété des quantités  $X$ ,  $Y$ ,  $r$ ,  $E - M$  et  $w - M$  d'être des fonctions périodiques de  $w$ , de  $E$  ou de  $M$ , de période  $2\pi$ . Ces quantités sont donc notamment développables en **séries de Fourier** de  $M$  ; on va montrer que ces coefficients sont des fonctions de l'excentricité  $e$ , eux-même développables en séries entières de  $e$ . Ensuite, sous certaines conditions, on peut changer l'ordre des termes dans ces séries en sommant d'abord sur  $e$ , et obtenir ainsi des séries entières en  $e$  à coefficients périodiques. Chacune de ces représentations a son intérêt. Voyons d'abord la représentation en séries de Fourier.



### 13.1. Séries de Fourier

Soit  $f(x)$  une fonction périodique de période  $2\pi$ , à variations bornées pour tout  $x$  ; on suppose que  $f$  est intégrable ainsi que les produits  $f(x) \sin nx$ ,  $f(x) \cos nx$  ou  $f(x) \exp inx$  pour tout  $n$  (où  $i^2 = -1$ ). Alors, les séries :

$$S_1 = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$S_2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp ikx$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \qquad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp -ikx dx \qquad (3.115)$$

convergent vers la valeur de  $f(x)$  si  $f$  est continue en  $x$ , et sinon vers la valeur moyenne  $(f(x_{+0}) + f(x_{-0}))/2$ . Si  $f$  est continue dans un intervalle, les séries précédentes convergent uniformément vers  $f(x)$  dans cet intervalle.

On a en outre les propriétés utiles :

- Si  $f$  est impaire, on a :  $a_k = 0$     et     $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad \forall k$
- Si  $f$  est paire, on a :  $b_k = 0$     et     $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad \forall k$

## 13.2. Inversion de l'équation de Kepler

La dérivée  $\frac{dM}{dE} = 1 - e \cos E$  est une fonction paire et périodique de  $E$ , de période  $2\pi$ . Comme les anomalies  $w$ ,  $E$  et  $M$  s'annulent en même temps (modulo  $2\pi$ ) et ont la même période,  $dM/dE$  est aussi une fonction paire de  $w$  ou de  $M$ , de période  $2\pi$ . Il en est de même de son inverse  $dE/dM$  égal par ailleurs à  $a/r$  (cf. (3.24)). Si l'on développe  $a/r$  en série de Fourier de  $M$ , on en déduira, par intégration,  $E$  en fonction de  $M$ , c'est-à-dire qu'on aura inversé l'équation de Kepler. On a :

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} dM + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{a}{r} \cos kM dM \right) \cos kM$$

Or, avec  $(a/r)dM = dE$ , le terme constant de ce développement vaut 1, et avec  $M = E - e \sin E$ , on obtient :

$$\frac{a}{r} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos k(E - e \sin E) dE \right) \cos kM$$

Par ailleurs, les *fonctions de Bessel* de première espèce d'indice  $k$ , notées  $J_k(x)$ , sont définies par :

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp i(x \sin u - ku) du \quad (3.116a)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(ku - x \sin u) du - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(ku - x \sin u) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(ku - x \sin u) du \quad (3.116b) \end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

$$\frac{a}{r} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 J_k(ke) \cos kM \tag{3.117}$$

puis par intégration de  $dE = (a/r)dM$  :

$$E = M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} J_k(ke) \sin kM \tag{3.118}$$

On a aussi immédiatement  $\sin E = (E - M)/e$ , soit :

$$\sin E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{ke} J_k(ke) \sin kM \tag{3.119}$$

Pour exprimer  $\cos E$  en fonction de  $M$ , il est utile de voir auparavant quelques unes des propriétés des fonctions de Bessel de première espèce.

### 13.3. Fonctions de Bessel de 1<sup>ière</sup> espèce

L'expression (3.116a) qui définit les fonctions de Bessel, mise sous la forme

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp i(x \sin u) \exp(-iku) du$$

est comparable à (3.115), montrant que  $J_k(x)$  est le coefficient de Fourier  $c_k$  dans le développement en série de Fourier en  $u$  de la fonction  $\exp i(x \sin u)$  :

$$\exp i(x \sin u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) \exp iku$$

En posant  $z = \exp iu$ , on a aussi :  $i \sin u = \frac{1}{2}(z - 1/z)$ , puis :

$$\exp \frac{x}{2}(z - 1/z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) z^k \tag{3.120}$$

Or, on a aussi :

$$\exp \frac{x}{2}(z - 1/z) = \exp \frac{xz}{2} \times \exp \frac{-x}{2z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{xz}{2}\right)^m \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2z}\right)^n$$

Exercice En identifiant le coefficient de  $z^k$  dans ces 2 expressions de  $\exp \frac{x}{2}(z - 1/z)$ , on obtient :



$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2n} \quad \text{si } k \geq 0$$

(3.121)

et

$$J_{-h}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+h} \frac{1}{m!(m+h)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{h+2m} \quad \text{si } k = -h \leq 0$$

soit

$$J_{-h}(x) = (-1)^h J_h(x) \quad (3.122)$$

On a en particulier :

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{x^n}{n! 2^n} \right)^2 \quad (3.123)$$

L'identification des coefficients de  $z^k$  est légitime car les développements des deux exponentielles étant absolument convergents, leur produit est une série double absolument convergente. Le développement (3.121) de  $J_k(x)$  converge donc pour tout  $x$ . On pourrait même montrer qu'on a pour tout  $x$  :

$$|J_0(x)|^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad |J_k(x)|^2 \leq \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad k \neq 0$$

De ces développements, on tire les propriétés suivantes :

- Pour tout  $k$  non nul, on a :  $J_k(0) = 0$  ; pour  $k = 0$ , on a :  $J_0(0) = 1$
- Le terme de degré le plus bas de  $J_k(x)$  vaut  $\frac{x^k}{2^k k!}$  ; les termes suivants ont des exposants croissant de 2 en 2. Si  $x$  est petit devant 1, on a ainsi  $J_k(x) \approx \frac{x^k}{2^k k!}$
- La parité de  $J_k(x)$  en tant que fonction de  $x$  est la même que celle de  $k$  :

$$J_k(-x) = (-1)^k J_k(x) = J_{-k}(x) \quad (3.124)$$

- En dérivant (3.120) par rapport à  $z$  :  $\frac{x}{2} \left( 1 + \frac{1}{z^2} \right) \sum_k J_k(x) z^k = \sum_k k J_k(x) z^{k-1}$  et en identifiant les

termes en  $z^{k-1}$ , on obtient une relation de récurrence entre 3 fonctions de Bessel d'indices successifs :

$$k J_k(x) = \frac{x}{2} (J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x)) \quad (3.125)$$

– En dérivant (3.120) par rapport à  $x$ , on obtient de la même façon :

$$\frac{d}{dx} J_k(x) = \frac{1}{2} (J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x)) \quad (3.126)$$

On a en particulier :  $\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x)$

En utilisant (3.125) et (3.126), on pourrait encore montrer que  $J_k(x)$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2}{dx^2} J_k(x) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_k(x) + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right) J_k(x) = 0$$

### 13.4. Développements de $\cos nE$ et $\sin nE$ en série de Fourier de $M$

On obtient ces développements simultanément en cherchant le développement en série de Fourier de la fonction complexe  $\exp inE$  :

$$\exp inE = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k^{(n)} \exp ikM \quad \text{avec} \quad c_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp inE \exp -ikM dM$$

Avec  $M = E - e \sin E$  et  $dM = [1 - \frac{1}{2}e(\exp iE + \exp -iE)] dE$ , on obtient :

$$c_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp i[(n - k)E + ke \sin E] (1 - \frac{e}{2}(\exp iE + \exp -iE)) dE$$

$$= J_{k-n}(ke) - \frac{e}{2} (J_{k-n-1}(ke) + J_{k-n+1}(ke)) \quad \text{d'après (3.124)}$$

Pour  $k = 0$  on a :

$$c_0^{(0)} = 1 \quad ; \quad c_0^{(1)} = -e/2 \quad ; \quad c_0^{(n)} = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} n \neq 0 \\ n \neq 1 \end{cases}$$

Pour  $k \neq 0$  on a, d'après (3.125) :

$$\frac{ke}{2} (J_{k-n-1}(ke) + J_{k-n+1}(ke)) = (k - n) J_{k-n}(ke)$$

d'où l'expression plus simple de  $c_k^{(n)}$  :

$$c_k^{(n)} = \frac{n}{k} J_{k-n}(ke) \quad \text{pour} \quad k \neq 0$$

On en déduit aussi :  $c_{-k}^{(-n)} = c_k^{(n)}$

En décomposant  $\exp inE$  en parties réelle et imaginaire, on a enfin, d'abord :

$$\cos nE = c_0^{(n)} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{n}{k} J_{k-n}(ke) \cos kM$$

soit :

$$\cos nE = \begin{cases} -e/2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{k} (J_{k-n}(ke) - J_{k+n}(ke)) \cos kM \quad (3.127)$$

puis, de la même façon :

$$\sin nE = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{k} (J_{k-n}(ke) + J_{k+n}(ke)) \sin kM \quad (3.128)$$

Pour  $n = 1$ , ces expressions permettent de calculer les coordonnées du point  $P$  en séries de Fourier de  $M$  :

$$\frac{X}{a} = \frac{r}{a} \cos w = \cos E - e = -\frac{3e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)) \cos kM$$

soit, d'après (3.126) :

$$\frac{r}{a} \cos w = -\frac{3e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \left[ \frac{d}{dx} J_k(x) \right]_{x=ke} \cos kM \quad (3.129)$$

$$\frac{Y}{a} = \frac{r}{a} \sin w = \sqrt{1-e^2} \sin E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-e^2}}{k} (J_{k-1}(ke) + J_{k+1}(ke)) \sin kM$$

Exercice soit, d'après (3.125) :



$$\frac{r}{a} \sin w = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{1-e^2}}{ke} J_k(ke) \sin kM \quad (3.130)$$



$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E = 1 + \frac{e^2}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e}{k} (J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)) \cos kM \quad (3.131)$$

**Exercice** Cette dernière expression montre que la valeur moyenne de  $r$  sur une période du mouvement vaut  $a(1 + e^2/2)$ ; le demi-grand axe n'est donc pas la valeur moyenne de la distance  $r$ .



Pour obtenir enfin l'anomalie vraie  $w$  en fonction de l'anomalie moyenne  $M$ , il faut d'abord exprimer  $w$  en fonction de  $E$  en résolvant l'équation

$$\tan(w/2) = \sqrt{(1+e)/(1-e)} \tan(E/2)$$

puis utiliser les développements qui expriment  $E$ ,  $\cos nE$  et  $\sin nE$  en séries de Fourier de  $M$ . En posant  $p = \sqrt{(1+e)/(1-e)}$ , cette équation s'écrit encore :

$$\frac{\exp iw - 1}{\exp iw + 1} = p \frac{\exp iE - 1}{\exp iE + 1}$$

soit, avec  $q = \frac{p-1}{p+1} = (1 - \sqrt{1-e^2})/e$  :

$$\exp iw = \frac{(1-p) + (1+p) \exp iE}{(1+p) + (1-p) \exp iE} = \exp iE \frac{1 - q \exp -iE}{1 - q \exp iE} \quad (3.132a)$$

On vérifie que  $q$  est inférieur à 1, tout comme  $e$ , et que si  $e$  est petit devant 1,  $q$  est de l'ordre de  $e/2$ . En passant aux logarithmes, on obtient :

$$iw = iE + \ln(1 - q \exp -iE) - \ln(1 - q \exp iE)$$

Or, pour  $|x| < 1$ , on a  $\ln(1-x) = -\int \frac{dx}{1-x} = -\sum_{k=0}^{\infty} \int x^k dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ . On en déduit le développement absolument convergent pour  $q < 1$  :

$$iw = iE + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} (\exp inE - \exp -inE)$$

soit :

$$w = E + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \sin nE \tag{3.132b}$$

**Exercice** De (3.118) et de (3.128), on déduit finalement le développement de l'équation du centre  $w - M$  :



$$w - M = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin kM + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^n}{k} (J_{k-n}(ke) + J_{k+n}(ke)) \sin kM \tag{3.133}$$

**Remarque 1.** En permutant  $E$  et  $w$  et en changeant  $p$  en  $1/p$ , la méthode précédente donne  $E$  en fonction de  $w$  ; la quantité  $q$  est alors changée en  $-q$  :

$$E = w + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q)^n}{n} \sin nw$$

**Remarque 2.** Les quantités  $X/a, Y/a, r/a, w - E, w - M$ , étant des fonctions continues de  $M$ , leurs développements en série de Fourier de  $M$  sont uniformément convergents pour tout  $M$ . Les coefficients de ces séries de Fourier sont des fonctions de l'excentricité calculables à partir des fonctions de Bessel. D'après (3.121), ces

coefficients peuvent être calculés au moyen de développements en série entière de  $e$ . Notons que d'un point de vue numérique, le calcul des fonctions de Bessel par leur développement en série entière de  $e$ , n'est efficace que pour des excentricités modestes : Si  $e$  est trop grand, la série étant alternée, la convergence est fort lente ; il vaut mieux alors utiliser une représentation numérique des fonctions de Bessel issue du calcul numérique direct de l'intégrale (3.116b). Si  $e$  est assez petit, la série (3.121) est rapidement convergente et le nombre de termes utiles peut être relativement petit. Cependant, ce ne sont pas forcément les premiers termes du développement de Fourier qui sont prépondérants ; l'identification des termes importants de ces séries est facilitée par la considération de la propriété dite "de d'Alembert" que vérifient ces séries.

### 13.5. La propriété de d'Alembert

D'après (3.121),  $J_k(x)$  est d'ordre  $k$  en  $x$  ; cela signifie que si  $x$  est une quantité suffisamment petite,  $J_k(x)$  est assimilable au terme de plus bas degré en  $x$  dans son développement en série entière, c'est-à-dire au terme en  $x^k$  ; plus précisément :

$$J_k(x) \approx \frac{x^k}{2^k k!} (1 - O(x^2)) \quad \text{pour} \quad k \geq 0$$

$$J_k(x) \approx (-1)^{|k|} \frac{x^{|k|}}{2^{|k|} |k|!} (1 - O(x^2)) \quad \text{pour} \quad k < 0$$


Dans toutes les séries de Fourier en  $M$  trouvées précédemment, on observe que le coefficient de chaque terme en  $\sin kM$  ou  $\cos kM$  (correspondant à l' "harmonique"  $k$ ) dépend d'une ou de plusieurs fonctions de Bessel dont les indices sont  $k \pm n$  où  $n$  est une constante. Ce coefficient est donc au moins de degré  $p$  en excentricité, où  $p = \min(|k - n|, |k + n|)$ . Lorsque l'excentricité est faible, il est alors assez facile de reconnaître le terme prépondérant dans chacune de ces séries de Fourier ; c'est en général celui dont le coefficient contient

une fonction  $J_0$ . Par exemple, dans le développement de  $\cos nE$ , le terme prépondérant est celui en  $\cos kM$  avec  $k = n$  puisqu'alors, dans son coefficient,  $J_{k-n}(ke)$  s'identifie à  $J_0(ne)$ ; ce terme est d'ordre 0 en excentricité. On remarque aussi que les termes "voisins" de ce terme, c'est-à-dire les termes en  $\cos(n-1)M$  et en  $\cos(n+1)M$  contiennent les fonctions  $J_{-1}$  et  $J_1$  respectivement; ils sont donc d'ordre 1 en excentricité. Plus généralement, les termes situés à la "distance"  $p$  de  $\cos nM$ , c'est-à-dire les termes en  $\cos(n-p)M$  et  $\cos(n+p)M$ , contiennent  $J_{-p}$  et  $J_p$  respectivement, et sont donc d'ordre  $p$  en excentricité. On a la même propriété avec les termes voisins de  $\sin nM$  dans le développement de Fourier de  $\sin nE$ .

On dira qu'une série de Fourier vérifie la *propriété de d'Alembert de rang  $n$* , si le terme prépondérant de cette série correspond à l'harmonique  $n$ . Les développements de  $\cos nE$  et de  $\sin nE$  vérifient donc la propriété de d'Alembert de rang  $n$ .

Ainsi, d'une façon générale, une série de Fourier vérifiant la propriété de d'Alembert de rang  $n$  est de la forme suivante :

$$A_n(e, M) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{|n-k|} a_k(e) \exp ikM$$

**Exercice**  où  $a_k(e)$  est d'ordre 0 en excentricité. On pourra s'assurer que les développements en série de Fourier de  $r/a$ , de  $a/r$ , de  $E - M$  et de  $w - M$  vérifient la propriété de d'Alembert de rang zéro, tandis que ceux de  $\frac{r}{a} \cos w$  et de  $\frac{r}{a} \sin w$  vérifient celle de rang 1.

**Propriété :** Si l'on fait le produit de deux séries de Fourier vérifiant, l'une, la propriété de d'Alembert de rang  $n$ , et l'autre, celle de rang  $m$ , le résultat est une série de Fourier vérifiant la propriété de d'Alembert de rang  $(n + m)$ .

En effet, le produit de la série  $A_n(e, M)$  ci-dessus par la série

$$B_m(e, M) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{|m-j|} b_j(e) \exp ijM$$

donne :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{|n-k|+|m-j|} a_k(e) b_j(e) \exp i(k+j)M$$

soit :

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{|n+j-h|+|m-j|} a_{h-j}(e) b_j(e) \exp ihM$$

Comme on a  $|n+j-h| + |m-j| \geq |n+j-h+m-j| = |n+m-h| \forall j$  on pourra factoriser  $e^{|n+m-h|}$  dans le terme d'harmonique  $h$ , et donc la série de Fourier vérifie la propriété de d'Alembert de rang  $(n+m)$ .

**Application :** On aura besoin par la suite de calculer les développements de Fourier en  $M$  des diverses puissances de  $r/a$ , de  $a/r$ , de  $\cos w$  ou de  $\sin w$ , et plus généralement, ceux de  $\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp imw$  où  $n$  et  $m$  sont des entiers relatifs. On peut donc déjà prévoir que les diverses puissances de  $r/a$  et de  $a/r$  vérifient la propriété de d'Alembert de rang zéro, tandis que  $\exp iw$  vérifie, comme  $\sin w$  et  $\cos w$ , celle de rang 1 (en écrivant  $\sin w = \frac{r}{a} \sin w \times \frac{a}{r}$ ); le développement de Fourier de  $\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp imw$  vérifiera donc la propriété de d'Alembert de rang  $m$ .

### 13.6. Développement de $(\frac{r}{a})^n \exp imw$ en coefficients de Hansen

On pourrait calculer ce développement en multipliant entre elles les puissances convenables des développements de  $a/r$ , de  $r/a$  et de  $(r/a) \exp iw$ . On peut aussi écrire ce développement directement sous la forme :

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp imw = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^{n,m}(e) \exp ikM \tag{3.134}$$

Les fonctions  $X_k^{n,m}(e)$  sont les *coefficients de Hansen*, fonctions de l'excentricité dont les principales propriétés sont :

- $X_k^{n,m}(e) = X_{-k}^{n,-m}(e)$  (il suffit d'exprimer le conjugué de  $(\frac{r}{a})^n \exp -imw$ )
- $X_k^{n,m}(e) = e^{|m-k|} Y_k^{n,m}(e^2)$  où la fonction  $Y_k^{n,m}(e^2)$  est paire et d'ordre zéro en excentricité. Ceci traduit simplement la propriété de d'Alembert de rang  $m$  et découle de la forme du développement des fonctions de Bessel.

Voir aussi comment calculer ces *coefficients de Hansen avec Maple*

On calcule les coefficients de Hansen grâce au théorème de Fourier :

$$X_k^{n,m}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \exp imw \exp -ikM \frac{a}{r} dM$$

Or, avec :  $q = (1 - \sqrt{1 - e^2})/e$ , soit aussi :  $e = 2q/(1 + q^2)$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \exp iw &= \exp iE(1 - q \exp -iE)(1 - q \exp iE)^{-1} && \text{d'après (3.132a)} \\ \frac{r}{a} &= 1 - e \cos E = 1 - \frac{q}{1 + q^2}(\exp iE + \exp -iE) = \frac{1}{1 + q^2}(1 - q \exp iE)(1 - q \exp -iE) \end{aligned}$$

En utilisant encore  $M = E - e \sin E$  et  $(a/r)dM = dE$ , il résulte :

$$X_k^{n,m}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+q^2)^{n+1}} (1 - q \exp -iE)^{n+m+1} (1 - q \exp iE)^{n-m+1} \times \exp i[(m-k)E + ke \sin E] dE$$

En développant chaque parenthèse par la formule du binôme, on trouve :

$$X_k^{n,m}(e) = \frac{1}{(1+q^2)^{n+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} (-q)^{l+h} C_{l,h}^{n,m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp i[(m-k-l+h)E + ke \sin E] dE$$

avec :

$$C_{l,h}^{n,m} = \binom{n+m+1}{l} \binom{n-m+1}{h} \quad \text{où} \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Si  $(n+m+1)$  est positif, la série en  $l$  est en fait un polynôme ; même chose pour la série en  $h$  si  $(n-m+1)$  est positif. On trouve finalement, après avoir réordonné les termes de cette série absolument convergente :

$$X_k^{n,m}(e) = (1+q^2)^{-n-1} \sum_{p=0}^{\infty} (-q)^p \sum_{h=0}^p C_{p-h,h}^{n,m} J_{k-m+p-2h}(ke) \tag{3.135}$$

On vérifie que  $X_k^{n,m}(e)$  est du même ordre minimal que le terme de degré le plus bas :  $J_{k-m}$ , c'est-à-dire de l'ordre de  $e^{|k-m|}$ .

### 13.7. Développements en série entière de l'excentricité

Les séries de Fourier trouvées précédemment ont toutes des coefficients qui s'expriment sous forme de séries entières de l'excentricité. En permutant l'ordre des sommations et en réorganisant l'ordre des termes de façon

à regrouper les termes correspondant à une même puissance de l'excentricité, on obtient une série entière de  $e$ , à coefficients périodiques (sous réserve de la validité de ce réarrangement). La propriété de d'Alembert montre qu'on a alors, en facteur de chaque puissance de  $e$ , un nombre fini de termes périodiques. Par exemple, en développant les fonctions de Bessel dans l'expression (3.118) de  $E - M$ , on trouve le développement de Fourier :

$$\begin{aligned} E - M &= \left( e - \frac{e^3}{8} + \frac{e^5}{192} + \dots \right) \sin M \\ &+ \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{6} + \frac{e^6}{48} + \dots \right) \sin 2M \\ &+ \left( \frac{3e^3}{8} - \frac{28e^5}{128} + \dots \right) \sin 3M + \dots \end{aligned}$$

ou la *série entière de  $e$*  :

$$E - M = e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{e^3}{8} (-\sin M + 3 \sin 3M) + \dots$$

Il importe de remarquer que la convergence uniforme des séries de Fourier pour tout  $M$  et quel que soit  $e < 1$ , n'entraîne pas la convergence pour tout  $e$  des séries entières en excentricité qui leur correspondent. En fait, cette convergence n'est assurée que si l'on a :  $e < 0,6627434\dots$  Pour le montrer, rappelons d'abord le *théorème de Lagrange* :

Etant donnée une fonction complexe  $\phi(z)$  de la variable complexe  $z$ , on considère l'équation suivante :  $z = a + \varepsilon\phi(z)$  où  $a$  et  $\varepsilon$  sont également donnés. Si  $\phi(z)$  est fonction analytique de  $z$  à l'intérieur du contour ( $C$ ) du plan complexe entourant le point  $a$  et défini par :  $|\varepsilon\phi(z)| \leq |z - a|$ , alors l'équation  $z = a + \varepsilon\phi(z)$  a une racine



développable dans  $(C)$  en série entière de  $\varepsilon$  :

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [\phi(z)]^n \right]_{z=a} \quad (3.136)$$

En outre, toute fonction  $f$  analytique dans  $(C)$  peut aussi être développée dans  $(C)$  en série entière de  $\varepsilon$  sous la forme :

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( \frac{df}{dz} [\phi(z)]^n \right) \right]_{z=a} \quad (3.137)$$

**Remarque 1.** L'équation de Kepler :  $E = M + e \sin E$  est de la forme indiquée dans le théorème de Lagrange ; le contour  $(C)$  correspondant à cette équation —contour qu'il faut déterminer— définit le domaine de convergence du développement en série entière de  $e$  de toutes les fonctions de  $E$ , par exemple :  $E - M$ ,  $r/a$ ,  $a/r$ ,  $\sin nE$ ,  $\cos nE$ , ...

**Remarque 2.** Les formules (3.136) et (3.137) permettent de retrouver quelques développements classiques, par exemple :

- Si  $\phi(z) \equiv z$ , le développement (3.136) donne le développement de  $z = \frac{a}{1 - \varepsilon}$ .
- Si  $\phi(z) \equiv 1$ , le développement (3.137) donne le développement de  $f$  en série de Laurent (ou celui de Taylor en variable réelle).

**Remarque 3.** Avec  $\phi(z) \equiv 1 + z^2$ , on peut poser l'équation :  $z = 0 + \frac{e}{2}(1 + z^2)$ , qui a notamment comme solution :  $z = (1 - \sqrt{1 - e^2})/e$  [notée  $q$  dans les paragraphes précédents]. Le théorème de Lagrange permet alors d'obtenir le développement en série entière de  $e$  des fonctions  $f(z) = z^n$  [présentes sous la forme de  $q^n$

dans (3.133) et (3.135)]. On trouve :

$$q^n = n \left(\frac{e}{2}\right)^n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^{2i} \frac{(2i+n-1)!}{i!(n+i)!} \quad (3.138)$$

## Exercice



Pour appliquer le théorème de Lagrange à l'équation de Kepler, il faut donc rechercher le contour défini par  $|e \sin E| \leq |E - M|$  pour  $e$  et  $M$  fixés, puis le contour "le plus grand" convenant à toutes les valeurs de  $M$  dans l'intervalle réel  $[0, 2\pi]$ .

Supposant  $E$  complexe et  $M$  réel, posons  $E = M + \rho \exp i\theta$  où les réels  $\rho$  et  $\theta$  (avec  $\rho \geq 0$ ) définissent un complexe quelconque ; on a alors  $|E - M| = \rho$ , et :

$$\begin{aligned} \sin E &= \sin(M + \rho \cos \theta + i\rho \sin \theta) \\ &= \sin(M + \rho \cos \theta) \cosh(\rho \sin \theta) + i \cos(M + \rho \cos \theta) \sinh(\rho \sin \theta) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} |\sin E|^2 &= \sin^2(M + \rho \cos \theta) \cosh^2(\rho \sin \theta) + \cos^2(M + \rho \cos \theta) \sinh^2(\rho \sin \theta) \\ &= \cosh^2(\rho \sin \theta) - \cos^2(M + \rho \cos \theta) \end{aligned}$$

Pour avoir  $|e \sin E| = e |\sin E| \leq \rho$ , il suffit que l'on ait  $e \leq \frac{\rho}{|\sin E|}$ . Le cas le plus défavorable correspond au maximum de  $|\sin E|$ , c'est-à-dire aux conditions :

$$|\rho \sin \theta| \quad \text{maximum et} \quad M + \rho \cos \theta = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} \theta = \pm \pi/2 \\ M = \pm \pi/2 \end{cases}$$

On a alors :

$$|\sin E|_{\max} = \cosh \rho \quad \text{et ainsi,} \quad \forall M : e \leq \frac{\rho}{\cosh \rho}$$

On peut chercher à ce que  $\frac{\rho}{\cosh \rho}$  soit le plus grand possible ; or cette fonction de  $\rho$  passe par un maximum pour  $\rho = \rho_0$  racine de l'équation  $\cosh \rho_0 - \rho_0 \sinh \rho_0 = 0$ , à savoir :  $\rho_0 = 1,1996784 \dots$  On en déduit la plus grande valeur de l'excentricité :  $e_{\max} = \frac{\rho_0}{\cosh \rho_0} = 0,66274341 \dots$

Ainsi, pour  $e \leq e_{\max}$ , on peut écrire :

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}}(\sin^n M)$$

$$\cos kE = \cos kM + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}}(-k \sin kM \sin^n M)$$

$$\sin kE = \sin kM + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}}(k \cos kM \sin^n M)$$

Ces séries convergent pour tout  $M$  si  $e \leq 0,66274341 \dots$

### 13.8. Développements limités en excentricité

Si l'excentricité est assez petite, les développements en série entière précédents convergent rapidement de sorte que, d'un point de vue pratique, ils peuvent être tronqués à un certain degré : on ne conserve pour le calcul que les termes de degré inférieur à un degré maximum  $\delta$  appelé ordre du *développement en excentricité*. Cet

ordre dépend bien sûr de la précision souhaitée dans l'évaluation de la série. Par exemple, pour une excentricité de 0,1, des développements limités à l'ordre 6 permettent d'assurer une précision de  $10^{-6}$  environ, tandis que pour la même précision, avec une excentricité de 0,2, il faut pousser les développements à l'ordre 10 au moins.

On donne ci-dessous les développements limités à l'ordre 5 des principales quantités représentatives des coordonnées du point  $P$ , et réarrangées sous forme de développements trigonométriques : On pourra aussi voir comment réaliser ces [développements avec Maple](#)

$$\frac{a}{r} = 1 + \left( e - \frac{1}{8} e^3 + \frac{1}{192} e^5 \right) \cos M + \left( e^2 - \frac{1}{3} e^4 \right) \cos 2M + \left( \frac{9}{8} e^3 - \frac{81}{128} e^5 \right) \cos 3M + \frac{4}{3} e^4 \cos 4M + \frac{625}{384} e^5 \cos 5M + O(e^6) \quad (3.139)$$

$$w = M + \left( 2e - \frac{1}{4} e^3 + \frac{5}{96} e^5 \right) \sin M + \left( \frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4 \right) \sin 2M + \left( \frac{13}{12} e^3 - \frac{43}{64} e^5 \right) \sin 3M + \frac{103}{96} e^4 \sin 4M + \frac{1097}{960} e^5 \sin 5M + O(e^6) \quad (3.140)$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2} e^2 - \left( e - \frac{3}{8} e^3 + \frac{5}{192} e^5 \right) \cos M - \left( \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{3} e^4 \right) \cos 2M - \left( \frac{3}{8} e^3 - \frac{45}{128} e^5 \right) \cos 3M - \frac{1}{3} e^4 \cos 4M - \frac{125}{384} e^5 \cos 5M + O(e^6) \quad (3.141)$$

$$\begin{aligned}
\frac{r}{a} \cos w &= -\frac{3}{2} e + \left(1 - \frac{3}{8} e^2 + \frac{5}{192} e^4\right) \cos M + \\
&+ \left(\frac{1}{2} e - \frac{1}{3} e^3 + \frac{1}{16} e^5\right) \cos 2M + \left(\frac{3}{8} e^2 - \frac{45}{128} e^4\right) \cos 3M \\
&+ \left(\frac{1}{3} e^3 - \frac{2}{5} e^5\right) \cos 4M + \frac{125}{384} e^4 \cos 5M + \frac{27}{80} e^5 \cos 6M + O(e^6)
\end{aligned}
\tag{3.142}$$

$$\begin{aligned}
\frac{r}{a} \sin w &= 0 + \left(1 - \frac{5}{8} e^2 - \frac{11}{192} e^4\right) \sin M + \\
&+ \left(\frac{1}{2} e - \frac{5}{12} e^3 + \frac{1}{24} e^5\right) \sin 2M + \left(\frac{3}{8} e^2 - \frac{51}{128} e^4\right) \sin 3M \\
&+ \left(\frac{1}{3} e^3 - \frac{13}{30} e^5\right) \sin 4M + \frac{125}{384} e^4 \sin 5M + \frac{27}{80} e^5 \sin 6M + O(e^6)
\end{aligned}
\tag{3.143}$$

**Exercice Remarque 1.** Bien qu'ils apparaissent comme des débuts de séries de Fourier, les développements ci-dessus sont en fait des séries entières en  $e$  tronquées à l'ordre 5, lesquelles sont valables seulement pour  $e \leq e_{\max} = 0,66274341 \dots$ . Ces développements limités ne doivent donc pas être utilisés pour des excentricités supérieures à cette limite, et pratiquement, il vaut mieux ne les utiliser que pour des excentricités voisines de zéro. Pour décrire des mouvements képlériens voisins d'une excentricité  $e_0$  quelconque, il vaut mieux utiliser d'autres développements des fonctions de Bessel, effectués au voisinage de  $e_0$  plutôt qu'au voisinage de zéro.

**Remarque 2.** Si un développement en série de Fourier vérifie la propriété de d'Alembert de rang zéro, on peut exprimer le développement limité en excentricité qui lui correspond, au voisinage de 0, sous la forme d'un polynôme en variables complexes. En posant en effet :

$$X = e \exp iM \quad \text{et son conjugué} \quad \bar{X} = e \exp -iM \tag{3.144}$$

Dev.2.2

on a l'avantage d'utiliser des variables régulières de même nature que celles définies en (3.49), et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} e \cos M &= \frac{1}{2}(X + \bar{X}) & , & \quad e^2 \cos 2M = \frac{1}{2}(X^2 + \bar{X}^2) & , & \quad \dots \\ ie \sin M &= \frac{1}{2}(X - \bar{X}) & , & \quad ie^2 \sin 2M = \frac{1}{2}(X^2 - \bar{X}^2) & , & \quad \dots \\ e^2 &= X\bar{X} & , & \quad e^4 = X^2\bar{X}^2 & , & \quad \dots \end{aligned}$$

Par exemple, le développement limité (3.139) de  $a/r$  à l'ordre 5 devient alors le polynôme en  $X$  et  $\bar{X}$  :


$$\begin{aligned} \frac{a}{r} = & 1 + (X + \bar{X}) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{16} X\bar{X} + \frac{5}{384} X^2\bar{X}^2 \right) + (X^2 + \bar{X}^2) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} X\bar{X} \right) + \\ & + (X^3 + \bar{X}^3) \left( \frac{9}{16} - \frac{81}{256} X\bar{X} \right) + \frac{2}{3} (X^4 + \bar{X}^4) + \frac{625}{768} (X^5 + \bar{X}^5) + O(e^6) \end{aligned} \tag{3.145}$$

L'intérêt d'une telle formulation vient de ce qu'il est toujours plus facile de manipuler des polynômes que des développements trigonométriques ; ceci est encore plus vrai si l'on veut construire ces développements sur ordinateur de manière automatique en utilisant un manipulateur de formules. Ainsi, si l'on dispose de la seule expression de  $a/r$  donnée ci-dessus, on peut reconstruire le développement limité à l'ordre 5 de n'importe laquelle des fonctions  $\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp im(w - M)$  (pour  $n$  et  $m$  quelconques), simplement en effectuant des produits et des sommes de polynômes de degré 5, ce qui permet d'éviter le calcul des coefficients de Hansen par la formule (3.135).

En effet, notons  $a/r = 1 + R$  où  $R$  est le polynôme des deux variables  $X$  et  $\bar{X}$  réécrit de façon à classer ses

termes par degrés croissants :

$$\begin{aligned}
 R = & \frac{1}{2} (X + \bar{X}) + \frac{1}{2} (X^2 + \bar{X}^2) + \frac{1}{16} (9 X^3 - X^2 \bar{X} - X \bar{X}^2 + 9 \bar{X}^3) + \\
 & + \frac{1}{6} (4 X^4 - X^3 \bar{X} - X \bar{X}^3 + 4 \bar{X}^4) + \\
 & + \frac{1}{768} (625 X^5 - 243 X^4 \bar{X} + 2 X^3 \bar{X}^2 + 2 X^2 \bar{X}^3 - 243 X \bar{X}^4 + 625 \bar{X}^5) + O(e^6)
 \end{aligned}$$


 **Exercice** On peut en déduire  $r/a = 1/(1 + R) = 1 - R + R^2 - R^3 + R^4 - R^5 + O(e^6)$  où chaque  $R^k$  est calculé en ne conservant que les termes de degré global inférieur ou égal à 5. On peut ensuite calculer n'importe quelle puissance positive de  $(a/r)$  ou de  $(r/a)$ , toujours en limitant le degré global à 5.

De même, de la loi des aires :  $r^2 dw/dt = na^2 \sqrt{1 - e^2}$  et de  $dM = n dt$ , on peut tirer :

$$dw/dM = (a/r)^2 \sqrt{1 - X\bar{X}} = (1 + 2R + R^2) \left(1 - \frac{1}{2} X\bar{X} - \frac{1}{8} X^2 \bar{X}^2 + O(e^6)\right)$$

Une fois exprimée sous forme de polynôme, on peut ensuite intégrer cette expression par rapport à  $M$  sachant que, pour  $j \neq k$ , on a :  $\int X^j \bar{X}^k dM = -i X^j \bar{X}^k / (j - k)$  (pour  $j = k$  on a  $X^j \bar{X}^k = (X\bar{X})^j = e^{2j}$  qui ne dépend pas de  $M$ , mais ces termes n'existent pas dans le développement de  $dw/dM$ ). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
 i(w - M) = & X - \bar{X} + \frac{1}{8} (5 X^2 - 5 \bar{X}^2) + \frac{1}{24} (13 X^3 - 3 X^2 \bar{X} + 3 X \bar{X}^2 - 13 \bar{X}^3) \\
 & + \frac{1}{192} (103 X^4 - 44 X^3 \bar{X} + 44 X \bar{X}^3 - 103 \bar{X}^4) \\
 & + \frac{1}{1920} (1097 X^5 - 645 X^4 \bar{X} + 50 X^3 \bar{X}^2 - 50 X^2 \bar{X}^3 + 645 X \bar{X}^4 - 1097 \bar{X}^5) + O(e^6)
 \end{aligned}$$

 **Exercice** Ensuite, pour calculer  $\exp i(w - M)$  à l'ordre 5, il suffit de construire la somme des premières puissances de ce polynôme suivant l'expression :

$$\exp i(w - M) = 1 + \sum_{k=1}^5 \frac{[i(w - M)]^k}{k!} + O(e^6)$$

Pour obtenir  $\exp im(w - M)$ , il reste alors à élever ce polynôme à la puissance  $|m|$  puis d'en prendre le conjugué si  $m$  est négatif. Ceci constitue une méthode efficace pour calculer le développement limité des coefficients de Hansen puisqu'on peut aussi écrire le développement suivant, qui est une série de Fourier vérifiant la propriété de d'Alembert de rang zéro :

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \exp im(w - M) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^{n,m}(e) \exp i(k - m)M \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k^{n,m}(e^2) e^{|k-m|} \exp i(k - m)M \\ &= \sum_{k \geq m} Y_k^{n,m}(X\bar{X}) X^{k-m} + \sum_{k < m} Y_k^{n,m}(X\bar{X}) \bar{X}^{m-k} \end{aligned} \quad (3.146)$$

Ainsi, dans le développement polynomial en  $X$  et  $\bar{X}$  de  $\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp im(w - M)$ , la partie  $Y_k^{n,m}(e^2)$  de chaque coefficient de Hansen s'identifie avec le polynôme que l'on peut mettre en facteur de  $X^{k-m}$  (ou de  $\bar{X}^{m-k}$  selon le signe de  $k - m$ ).



### 13.9. Développements des coordonnées en fonction de la longitude moyenne

Jusqu'ici, les développements recherchés étaient ceux des coordonnées de  $P$  dans le repère propre  $O\mathbf{u}_0\mathbf{v}_0$  du mouvement képlérien. Ces développements ont été exprimés en fonction des 3 éléments  $a$ ,  $e$  et  $M$ . On peut aussi avoir besoin d'exprimer, en fonction du temps, les coordonnées sphériques de  $P$  (latitude  $\phi$  et longitude  $\lambda$ ) dans le repère de référence  $O\mathbf{i}_0\mathbf{j}_0\mathbf{k}_0$  ; il faut donc introduire les 3 autres éléments : la longitude du nœud  $\Omega$ , l'inclinaison  $i$  et l'argument du péricentre  $\omega$ .

Lors de la définition de ces éléments en §3-12.1, on a déjà vu les relations (3.44) :

$$\tan(\lambda - \Omega) = \cos i \tan(\omega + w) \quad \text{et} \quad \sin \phi = \sin i \sin(\omega + w)$$

La première relation est de la forme  $\tan y = p \tan x$  et, en §3-13.4, on a déjà développé la racine  $y$  d'une telle équation en fonction de  $x$  dans le cas où  $p$  est voisin de 1 ; par simple transposition de l'expression (3.132b), on obtient :

$$\lambda - \Omega = \omega + w + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{\cos i - 1}{\cos i + 1} \right)^k \sin 2k(\omega + w)$$

Ce développement converge pour  $\frac{1 - \cos i}{1 + \cos i} = \tan^2(i/2) < 1$ , soit  $i \neq \pi/2$ . On peut y introduire la longitude moyenne :  $L = \Omega + \omega + M$  de la façon suivante :

$$\lambda = L + (w - M) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \tan^{2k}(i/2) \sin[2k(L - \Omega) + 2k(w - M)]$$

où l'équation du centre  $(w - M)$  s'exprime comme on vient de le voir, en fonction de  $e$  et de  $M = L - \Omega - \omega =$


$L - \varpi$ . En transposant l'expression (3.133) de  $(w - M)$ , on obtient :

$$\lambda = L + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( J_k(ke) + \sum_{n=1}^{\infty} q^n (J_{k-n}(ke) + J_{k+n}(ke)) \right) \sin k(L - \varpi) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \frac{\sin^{2k}(i/2)}{(1 - \sin^2(i/2))^k} \times (\sin 2k(L - \Omega) \cos 2k(w - M) + \cos 2k(L - \Omega) \sin 2k(w - M)) \tag{3.147}$$

où  $q^n$  peut être calculé par (3.138) et où les sinus et cosinus de  $2k(w - M)$  s'expriment en fonction de coefficients de Hansen (voir par exemple (3.146) avec  $n = 0$  et  $m = \pm 2k$ ).

Cependant, si l'excentricité et l'inclinaison sont petites devant 1, il vaut mieux utiliser des variables régulières en  $e = 0$  et  $i = 0$  et faire un développement en série entière de  $e$  et de  $\sin(i/2)$  au voisinage de ces valeurs. En posant, avec  $\iota^2 = -1$  :

$$\begin{aligned} X &= e \exp \iota(L - \varpi) [ \equiv e \exp \iota M ] & \bar{X} &= e \exp -\iota(L - \varpi) \\ Y &= \sin(i/2) \exp \iota(L - \Omega) & \bar{Y} &= \sin(i/2) \exp -\iota(L - \Omega) \end{aligned} \tag{3.148}$$

**Exercice**  on voit aisément que l'on peut obtenir (3.147) sous forme d'une série entière des 4 variables complexes  $X, \bar{X}, Y$  et  $\bar{Y}$  (on développe  $(1 - \sin^2(i/2))^{-k} = (1 - Y\bar{Y})^{-k}$  par la formule du binôme). Cette série est de degré pair par rapport à l'ensemble des variables  $Y$  et  $\bar{Y}$ . En la tronquant aux termes de degrés utiles,  $\lambda - L$  devient un polynôme de ces 4 variables. En fait, on peut construire ce polynôme par des manipulations de polynômes

analogues à celles décrites au paragraphe précédent. Au degré 3 en excentricité et inclinaison, on obtient :

$$\begin{aligned} \iota(\lambda - L) = & X - \bar{X} + \frac{5}{8} X^2 - \frac{5}{8} \bar{X}^2 - \frac{1}{2} Y^2 + \frac{1}{2} \bar{Y}^2 + \frac{13}{24} X^3 - \frac{1}{8} X^2 \bar{X} \\ & + \frac{1}{8} X \bar{X}^2 - \frac{13}{24} \bar{X}^3 + \bar{X} Y^2 - X Y^2 + \bar{X} \bar{Y}^2 - X \bar{Y}^2 + O(4) \end{aligned} \quad (3.149)$$

On peut aussi revenir à un développement de Fourier en  $L$  (tronqué au même degré en  $e$  et  $i$ ) en utilisant les relations :

$$X = \bar{z} \exp \iota L, \quad \bar{X} = z \exp -\iota L, \quad Y = \bar{\zeta} \exp \iota L, \quad \bar{Y} = \zeta \exp -\iota L \quad (3.150)$$

où  $z$  et  $\zeta$  sont les éléments complexes définis en (3.49). On trouve :

$$\begin{aligned} \iota(\lambda - L) = & (\bar{z} - \frac{1}{8} z \bar{z}^2 + z \bar{\zeta}^2) \exp \iota L - (z - \frac{1}{8} z^2 \bar{z} + \bar{z} \zeta^2) \exp -\iota L \\ & + (\frac{5}{8} \bar{z}^2 - \frac{1}{2} \bar{\zeta}^2) \exp 2\iota L - (\frac{5}{8} z^2 - \frac{1}{2} \zeta^2) \exp -2\iota L \\ & + (\frac{13}{24} \bar{z}^3 - \bar{z} \bar{\zeta}^2) \exp 3\iota L - (\frac{13}{24} z^3 - z \zeta^2) \exp -3\iota L \end{aligned} \quad (3.151)$$

**Exercice** On procéderait de manière analogue pour obtenir  $\sin \phi$ , ou d'autres coordonnées telles que  $\frac{r}{a} \cos \lambda$  et  $\frac{r}{a} \sin \lambda$ .



On écrirait par exemple :

$$\begin{aligned} \sin \phi = \sin i \sin[(L - \Omega) + (w - M)] = & -\iota \sin(i/2) \sqrt{1 - \sin^2(i/2)} \times \\ & (\exp \iota(L - \Omega) \exp \iota(w - M) - \exp -\iota(L - \Omega) \exp -\iota(w - M)) \end{aligned}$$

puis on pourrait développer en utilisant de nouveau les variables (3.148) et (3.150).

## 14. Annexe : formulaire de Brumberg pour les coefficients de Hansen

D'un point de vue pratique, il vaut mieux calculer les coefficients de Hansen  $X_k^{n,m}(e)$  définis en (3.134) avec le formulaire suivant, dû à Brumberg, plutôt que par l'expression générale donnée en (3.135). Ce formulaire utilise la *fonction hypergéométrique de Gauss*  $F(a, b, c; x)$  et des polynômes  $P_s^{(n,m)}(x)$ .

Les fonctions hypergéométriques sont définies par :

$$F(a, b, c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!} \tag{3.152}$$

dépendant des *coefficients de Pochhammer* définis par :

$$(a)_0 = 1 \quad \text{et} \quad (a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1) = (a+k-1)(a)_{k-1} \tag{3.153}$$

On a en particulier :  $(1)_k = k!$

Si on a  $c - a - b > -1$ , la série (3.152) converge pour  $|x| < 1$  et sinon, on utilise cette formule due à Euler qui met en évidence le pôle de la fonction hypergéométrique :

$$F(a, b, c; x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c; x) \tag{3.154}$$

Pour  $s$  entier positif ou nul, les polynômes  $P_s^{(n,m)}(x)$  sont définis par :

$$P_s^{(n,m)}(x) = \sum_{r=0}^{r^*} \frac{(-n+m-1)_r}{(1)_r} \frac{x^{s-r}}{(1)_{s-r}} \tag{3.155}$$

où la borne supérieure  $r^*$  est donnée par :

$$r^* = \begin{cases} \min\{s, n-m+1\} & \text{si } n-m+1 \geq 0 \\ s & \text{si } n-m+1 < 0 \end{cases}$$

Dev2.2.8

Alors, suivant les valeurs de  $k$  et en posant toujours :  $q = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$ , les coefficients de Hansen se calculent ainsi :

- Pour  $k = 0$  , on distingue deux cas :  
 - si  $n \geq -1$  , on a :

$$X_0^{n,m}(e) = (-1)^{|m|} \frac{(n+2)_{|m|}}{(1)_{|m|}} q^{|m|} (1+q^2)^{-n-1} F(-n-1, -n+|m|-1, 1+|m|; q^2) \quad (3.156)$$

- si  $n < -1$  , on a :

$$X_0^{n,m}(e) = (-1)^{|m|} \frac{(n+2)_{|m|}}{(1)_{|m|}} \left(\frac{e}{2}\right)^{|m|} (1-e^2)^{n+3/2} \times F\left(\frac{n+|m|+2}{2}, \frac{n+|m|+3}{2}, 1+|m|; e^2\right) \quad (3.157)$$

- Pour  $k \neq 0$  , en posant  $\nu = \frac{k}{1+q^2}$  , on a :

$$X_k^{n,m}(e) = q^{|m-k|} (1+q^2)^{-n-1} \sum_{s=0}^{+\infty} P_{s+\max\{0,k-m\}}^{(n,m)}(\nu) P_{s+\max\{0,m-k\}}^{(n,-m)}(-\nu) q^{2s} \quad (3.158)$$

## Quatrième partie

# Les interactions dans l'environnement spatial

### 15 La gravitation : champs et potentiels newtoniens

- 15.1 Cas d'une ou plusieurs masses ponctuelles isolées
- 15.2 Cas d'une répartition continue de masse
- 15.3 Systèmes à symétrie matérielle sphérique
- 15.4 Systèmes quelconques
- 15.5 Potentiel de gravitation des planètes

### 16 Forces dues à la trainée atmosphérique

- 16.1 Principes
- 16.2 Modélisation des forces de frottement atmosphérique
- 16.3 Nature perturbative des forces de frottement

### 17 Forces dues à la pression de radiation

### 18 Autres forces agissant sur les satellites de la Terre

La gravitation universelle est depuis longtemps considérée comme la cause essentielle des mouvements observés dans le système solaire. Il convient toutefois d'étendre la loi de Newton au cas de masses quelconques et non ponctuelles. Par ailleurs, l'observation très précise du mouvement des satellites artificiels a permis de mettre en évidence d'autres forces, souvent très faibles mais particulièrement sensibles sur ces objets de faible masse : Ce sont principalement les forces dues au frottement atmosphérique, actives dans le voisinage immédiat des planètes pourvues d'une atmosphère, et les forces dues à la pression de radiation, actives sur les satellites ou sur les poussières interplanétaires dans toutes les régions de l'espace où ces objets sont éclairés par le Soleil ou

par une planète. C'est après avoir modélisé ces quelques forces que l'on pourra comparer leur importance sur le mouvement d'un satellite artificiel. Signalons encore que des forces supplémentaires, d'origine complexe et non gravitationnelle, doivent encore être invoquées pour rendre compte de la dérive du mouvement de certaines comètes ; disons simplement qu'elles sont dues à des altérations de la composition physico-chimique du noyau de ces comètes, celui-ci émettant de la matière par dégazage lorsque la comète se réchauffe en se rapprochant du Soleil.

## 15. La gravitation : champs et potentiels newtoniens

### 15.1. Cas d'une ou plusieurs masses ponctuelles isolées

On sait qu'une masse ponctuelle  $m$  située en un point  $O$ , engendre dans tout l'espace un **champ de gravitation** qui vaut en un point  $P$  :

$$\mathbf{G}(P) = -\frac{Km}{|\mathbf{OP}|^2} \mathbf{u} = -\frac{Km}{r^2} \mathbf{u} \quad (4.1)$$

avec  $\mathbf{OP} = r \mathbf{u}$  et  $|\mathbf{u}| = 1$ . Pour mesurer ce champ, il suffit d'observer la force de Newton  $m' \mathbf{G}(P)$  que subit une particule de masse  $m'$  lorsqu'on la place en  $P$ . Le champ engendré par plusieurs masses ponctuelles est la somme vectorielle des champs engendrés par chacune. On va montrer que ce champ vérifie 2 propriétés fondamentales : D'abord, il dérive d'un potentiel, ensuite il est à flux conservatif partout sauf aux points où sont placées les masses.

### 15.1.1. Potentiel de gravitation

Soit  $\mathbf{g}(P)$  un champ vectoriel continu et dérivable des points de l'espace. On dit qu'il dérive d'un potentiel si et seulement si il existe une fonction scalaire  $U(P)$ , continue et dérivable, telle que sa différentielle totale  $dU$  évaluée dans un déplacement quelconque  $d\mathbf{P}$  du point  $P$  soit égale à la *circulation* élémentaire du champ entre  $P$  et  $P + d\mathbf{P}$  :

$$dU = \mathbf{g}(P) \cdot d\mathbf{P} \quad (4.2)$$

$\mathbf{g}(P)$  est alors appelé **gradient** de  $U$  en  $P$  :  $\mathbf{g}(P) = \mathbf{grad}_P U(P) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}}$ , et l'on dit que c'est un *champ de gradient*. Evidemment, la somme de plusieurs champs de gradient est un champ de gradient dont le potentiel résultant est la somme des potentiels correspondants.

Donc, si  $\mathbf{g}$  est un champ de gradient, sa circulation élémentaire en tout point est une différentielle totale, et sa circulation le long d'une courbe quelconque joignant deux points  $A$  et  $B$  ne dépend pas de ce trajet mais seulement des points de départ et d'arrivée :

$$\int_A^B \mathbf{g}(P) \cdot d\mathbf{P} = \int_A^B dU = U(B) - U(A)$$

Ainsi, la circulation est nulle si  $A$  et  $B$  se trouvent sur une même *équipotentielle* du champ scalaire  $U(P)$ , c'est-à-dire sur une surface telle qu'en tous ses points  $P$  on ait :  $U(P) = C^{te}$ . On en déduit aussi que  $\mathbf{grad}_P U(P)$  est orthogonal en  $P$  à l'équipotentielle du champ passant par  $P$

La définition qu'on vient de donner du gradient ne fait intervenir aucun repère ni système de coordonnées : Le vecteur gradient est indépendant de tout repère ; seule l'expression de ses composantes dans une base dépend du choix de cette base et du choix du système de coordonnées utilisé pour y repérer le point  $P$ . Dans un repère orthonormé  $Oijk$ , en coordonnées cartésiennes, si  $P$  est repéré par  $(x, y, z)$ , le potentiel  $U(P)$  est représenté par



une fonction  $U_1(x, y, z)$ . On a alors :

$$d\mathbf{P} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

$$dU_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x} dx + \frac{\partial U_1}{\partial y} dy + \frac{\partial U_1}{\partial z} dz$$

dont on déduit l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{grad}_P U_1(x, y, z) = \frac{\partial U_1}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U_1}{\partial z} \mathbf{k} \quad (4.3)$$

De même, en **coordonnées sphériques**,  $P$  étant repéré par  $(r, \lambda, \varphi)$ , le potentiel  $U(P)$  est une fonction  $U_2(r, \lambda, \varphi)$  dont la différentielle vaut :

$$dU_2 = \frac{\partial U_2}{\partial r} dr + \frac{\partial U_2}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} d\varphi$$

Dans  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ , **base locale** des **coordonnées sphériques** en  $P$ , on a par ailleurs :

$$d\mathbf{P} = dr \mathbf{u} + r \cos \varphi d\lambda \mathbf{v} + r d\varphi \mathbf{w}$$

On en déduit l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{grad}_P U_2(r, \lambda, \varphi) = \frac{\partial U_2}{\partial r} \mathbf{u} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial U_2}{\partial \lambda} \mathbf{v} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \mathbf{w} \quad (4.4)$$

**Exercice** Dans le cas d'une masse  $m$  placée en  $O$ , origine du repère de définition des coordonnées sphériques, le champ de gravitation défini en (4.1) dérive du potentiel de gravitation  $U(P)$  représenté en coordonnées sphériques



de centre  $O$  par la fonction :  $U_2(r, -, -) = \frac{Km}{r} + C^{te}$  (en coordonnées cartésiennes, ce serait la fonction  $U_1(x, y, z) = \frac{Km}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C^{te}$ ). La constante additive, arbitraire, est le plus souvent choisie égale à zéro pour que le potentiel de gravitation d'une masse ponctuelle soit nul à l'infini. Le champ  $\mathbf{G}$  est central et possède la symétrie sphérique de centre  $O$ . Le potentiel de gravitation ne dépend que de  $r$  et admet la même symétrie ; les équipotentielles sont des sphères de centre  $O$ . Dans le cas de plusieurs masses ponctuelles  $m_i$  situées en des points  $O_i$ , le potentiel de gravitation en un point  $P$  vaut :

$$U(P) = \sum_i \frac{Km_i}{|O_i P|}$$

### 15.1.2. Flux du champ de gravitation

Soit  $V$  le volume d'un domaine connexe de l'espace, limité par une surface fermée  $S$  et soit  $P$  un point de cette surface. Soit  $d\mathbf{S}$  le vecteur normal à un élément de surface  $dS$  contenant  $P$ , de module égal à l'aire de  $dS$  et orienté vers l'extérieur du volume  $V$ . Le flux élémentaire d'un champ de vecteurs  $\mathbf{g}$  traversant l'élément  $dS$  au point  $P$ , est le scalaire :  $d\Phi = \mathbf{g}(P) \cdot d\mathbf{S}$ . Le flux de  $\mathbf{g}$  sortant de la surface  $S$  est alors :

$$\Phi(S) = \iint_{P \in S} \mathbf{g}(P) \cdot d\mathbf{S}$$

Cette fonction dépend en général de la surface traversée.

On démontre que si le champ  $\mathbf{g}$  est dérivable et à dérivées partielles continues, et si l'on fait tendre  $S$  et  $V$  vers zéro de façon à ce que le domaine contenu dans  $S$  tende vers un point  $Q$ , alors, le rapport entre le flux sortant de  $S$  et le volume  $V$  contenu dans  $S$  tend vers une limite qui ne dépend que du point  $Q$ . Cette limite —  $\frac{d\Phi}{dV}$  — est

par définition la *divergence* du champ  $\mathbf{g}$  au point  $Q$  et l'on écrit :

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = \frac{d\Phi}{dV}$$

Le théorème de Gauss ou de Green montre que l'on a :

$$\Phi(S) = \iiint_{Q \in V} \operatorname{div} \mathbf{g} \, dV = \iint_{P \in S} \mathbf{g}(P) \cdot d\mathbf{S}$$

Le champ  $\mathbf{g}$  est dit à *flux conservatif* dans un domaine  $D$  de l'espace si en tout point  $Q$  de  $D$  on a :  $\frac{d\Phi}{dV} = 0$ , ou de façon équivalente :  $\operatorname{div} \mathbf{g} = 0$  ; on dit encore que le flux sortant de toute surface incluse dans  $D$  est nul.

La notion de flux étant indépendante de tout repère, la divergence d'un champ en un point  $Q$  est aussi indépendante de tout repère ; seule la façon de la calculer dépend du repère et du système de coordonnées utilisé pour repérer  $Q$ . Dans un repère  $O\mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k}$ , en coordonnées cartésiennes,  $Q$  étant défini par  $(x, y, z)$ , et  $\mathbf{g}(Q)$  par 3 composantes  $(g_i(x, y, z), g_j(x, y, z), g_k(x, y, z))$ , en calculant le flux sortant de l'élément de surface fermée cubique de côtés  $dx, dy$  et  $dz$  situé entre les points  $Q = (x, y, z)$  et  $Q + d\mathbf{Q} = (x + dx, y + dy, z + dz)$ , et en divisant ce flux par le volume  $dx dy dz$  de ce cube, on obtient l'expression de la divergence en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = \frac{\partial g_i}{\partial x} + \frac{\partial g_j}{\partial y} + \frac{\partial g_k}{\partial z} \tag{4.5}$$

De même, en coordonnées sphériques, dans la base locale  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ , le champ  $\mathbf{g}$  est représenté par les 3 composantes :  $(g_u(r, \lambda, \varphi), g_v(r, \lambda, \varphi), g_w(r, \lambda, \varphi))$  ; on obtient alors l'expression de la divergence en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cos \varphi g_u) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (r g_v) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \cos \varphi g_w) \right]$$

soit :

$$\text{div } \mathbf{g} = \frac{\partial g_u}{\partial r} + \frac{2}{r} g_u + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial g_v}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial g_w}{\partial \varphi} - \frac{\tan \varphi}{r} g_w \quad (4.6)$$

Alors, le champ de gravitation  $\mathbf{G}(P)$  émis par une masse  $m$  placée en  $O$  est à flux conservatif en tout point  $P$  différent de  $O$  puisque, pour tout  $r \neq 0$ , on obtient :

$$\text{div} \left( -\frac{Km}{r^2} \mathbf{u} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{Km}{r^2} \right) + \frac{2}{r} \frac{-Km}{r^2} = 0$$

On peut aussi trouver directement cette propriété en calculant le flux sortant d'une surface fermée **ne contenant pas** le point  $O$  : En fait, faisons ce calcul pour une petite surface élémentaire fermée contenant le volume compris dans un cône de sommet  $O$  et d'angle solide  $d\Omega$  et entre deux sphères de centre  $O$  de rayons  $R$  et  $R+dR$  ; les deux petites surfaces sphériques correspondantes ont alors pour aires :  $R^2 d\Omega$  et  $(R+dR)^2 d\Omega$ . Le flux de  $\mathbf{G}$  sortant des faces coniques de la surface est nul puisque le champ est radial ; le flux sortant de la surface sphérique de rayon  $R$  :  $\frac{-Km}{R^2} \times (-R^2 d\Omega)$  est compensé par celui sortant de l'autre surface sphérique :  $\frac{-Km}{(R+dR)^2} \times (R+dR)^2 d\Omega$ . Le flux sortant total est donc nul. Or, tout domaine de l'espace peut être ainsi décomposé en petits éléments de volumes limités par un cône et deux sphères, et quand deux tels éléments sont en contact par une de ces surfaces, le flux qui sort de l'un par cette surface rentre dans l'autre par la même surface, donnant un flux global nul. Donc, le flux de  $\mathbf{G}$  sortant de toute surface fermée ne contenant pas  $O$  est nul.

En revanche, si on prend une surface  $S$  fermée contenant  $O$ , on peut isoler à l'intérieur du volume contenu dans  $S$ , une sphère de centre  $O$  et de rayon  $\varepsilon$  aussi petit que l'on veut ; le flux qui sort de cette sphère, de surface  $4\pi\varepsilon^2$ , vaut  $-\frac{Km}{\varepsilon^2} \times 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi Km$ . Le reste du volume contenu dans  $S$  est maintenant limité par cette sphère et par  $S$ , mais le point  $O$  ne faisant pas partie de ce volume, le flux sortant de ce volume par  $S$  et par la sphère est

nul. Donc, globalement, le flux sortant de toute surface contenant une masse  $m$  vaut  $-4\pi Km$ . Ce flux ne dépend pas de la position de  $m$  à l'intérieur de  $S$ .

On peut généraliser cette propriété au cas de plusieurs masses  $m_i$  placées en des points distincts  $O_i$  : Chaque  $m_i$  engendre un champ de gravitation dont le flux sortant est nul à travers toute surface ne contenant pas  $O_i$ , et dont le flux est égal à  $-4\pi Km_i$  à travers toute surface contenant ce point. L'ensemble de ces masses crée un champ de gravitation égal à la somme des champs engendrés par chaque masse. Le flux de ce champ résultant sortant d'une surface ne contenant aucune des masses est donc nul, et celui qui sort d'une surface contenant une ou plusieurs de ces masses ne dépend que de ces masses et non de leur position à l'intérieur de cette surface. On en déduit encore que le champ de gravitation d'une ou plusieurs masses ponctuelles est à flux conservatif partout sauf aux points  $O_i$

### 15.1.3. Conséquence

En appliquant l'opérateur "divergence" à l'opérateur "gradient", on obtient un opérateur appelé *Laplacien* et noté  $\Delta$  :

$$\Delta U = \text{div grad } U$$

Suivant que  $P$  est repéré en coordonnées cartésiennes ou sphériques, on utilisera le Laplacien en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta U_1(x, y, z) = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} \quad (4.7)$$

ou en coordonnées sphériques :

$$\Delta U_2(r, \lambda, \varphi) = \frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} - \frac{\tan \varphi}{r^2} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \quad (4.8)$$

On vient de voir que le champ de gravitation d'une ou plusieurs masses ponctuelles  $m_i$  en  $O_i$  dérive d'un potentiel  $U$  et qu'il est à flux conservatif partout sauf en  $O_i$ ; donc, partout sauf en  $O_i$ , le potentiel de gravitation vérifie l'équation suivante, appelée équation de Laplace :

$$\Delta U(P) = 0 \quad \forall P \neq O_i \quad (4.9)$$

En chacun des points  $O_i$ , on a au contraire :  $\Delta U(O_i) = -4\pi K m_i$ .

Le cas  $\Delta U = 0$  est fort intéressant car les fonctions  $U$  qui vérifient cette équation forment l'ensemble des *fonctions harmoniques*. On montre que de telles fonctions possèdent les propriétés suivantes : si  $\Delta F = 0$  dans un domaine  $E$  des points de l'espace, en tout point  $P$  de  $E$ , la fonction  $F(P)$  est finie, continue et indéfiniment dérivable, et égale à sa valeur moyenne sur toute sphère  $S_a(P)$  de centre  $P$  et de rayon  $a$  incluse dans  $E$  :

$$F \text{ harmonique} \quad \iff \quad F(P) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{Q \in S_a(P)} F(Q) dS$$

On utilisera plus loin cette propriété de  $U$  d'être une fonction harmonique, en cherchant à représenter le potentiel de gravitation dans une base de fonctions harmoniques.

## 15.2. Cas d'une répartition continue de masse

Une masse étendue dans un domaine  $D$  de l'espace est définie en chaque point  $Q$  de  $D$  par une fonction scalaire positive et bornée  $\rho(Q)$  représentant la *masse volumique* en ce point. Un élément de volume  $dV$  au point

$Q$  contient par définition la masse  $dm = \rho(Q) dV$ . La masse totale  $M$  incluse dans  $D$  est alors donnée par l'intégrale :

$$M = \int_{Q \in D} \rho(Q) dV$$

On considérera toujours que le domaine  $D$  est fini dans ses trois dimensions. La masse  $M$  sera donc toujours supposée finie, tout comme la fonction  $\rho$ .

La masse élémentaire  $dm$  située au point  $Q$  crée dans tout l'espace le champ élémentaire de gravitation :

$$d\mathbf{G}(P) = -\frac{K dm}{|\mathbf{QP}|^3} \mathbf{QP} \quad \text{dérivant du potentiel :} \quad dU(P) = \frac{K dm}{|\mathbf{QP}|}$$

Ce champ est à flux conservatif partout sauf en  $Q$

La somme vectorielle de tous les champs engendrés par toutes les masses contenues dans  $D$  constitue le champ de gravitation de la masse étendue correspondante :

$$\mathbf{G}(P) = - \int_{Q \in D} \frac{K \mathbf{QP}}{|\mathbf{QP}|^3} dm \quad (4.10)$$

Exercice Il dérive du potentiel :



$$U(P) = \int_{Q \in D} \frac{K}{|\mathbf{QP}|} dm \quad (4.11)$$

Ces deux intégrales convergent, même à l'intérieur de  $D$ , car la masse volumique  $\rho$  est supposée bornée. En effet, lorsque  $P$  est à l'intérieur de  $D$ , on peut toujours isoler autour de  $P$  une sphère  $S_\varepsilon(P)$  de centre  $P$  et de

rayon  $\varepsilon$ , et écrire :

$$U(P) = \int_{Q \in S_\varepsilon(P)} \frac{K}{|\mathbf{QP}|} dm + \int_{Q \in D - S_\varepsilon(P)} \frac{K}{|\mathbf{QP}|} dm$$

La deuxième intégrale converge puisque la masse totale est finie et que  $|\mathbf{QP}|$  n'est jamais nul dans le domaine d'intégration. La première intégrale converge également car on a, dans la sphère  $S_\varepsilon(P)$  :

$$\frac{K dm}{|\mathbf{QP}|} = \frac{K \rho(Q) dV}{|\mathbf{QP}|} \leq \frac{K \rho_{\max} \times 4\pi r^2 dr}{r} \quad \text{avec} \quad r = |\mathbf{QP}|$$

On en déduit :

$$\int_{Q \in S_\varepsilon(P)} \frac{K}{|\mathbf{QP}|} dm \leq 4\pi K \rho_{\max} \int_{r=0}^{\varepsilon} r dr = 2\pi K \rho_{\max} \varepsilon^2$$

On montrerait de même que l'intégrale (4.10) converge en tout point, même à l'intérieur de  $D$ .

Chaque champ élémentaire  $d\mathbf{G}(P)$  est à flux conservatif partout sauf au point  $Q$  de  $D$  qui l'engendre. Par extension des résultats obtenus pour une répartition discrète de masses, on a encore les propriétés suivantes : La somme de ces champs,  $\mathbf{G}(P)$ , est à flux conservatif partout sauf en tout point intérieur à  $D$  ; c'est équivalent de dire que le flux sortant de toute surface fermée ne contenant aucune partie de  $D$  (ne contenant donc pas de matière) est nul. Hors de la matière, on a donc l'équation de Laplace :

$$\forall P \notin D \quad \Delta U(P) = 0 \quad \text{avec} \quad U(P) = \int_{Q \in D} \frac{K}{|\mathbf{QP}|} dm \quad (4.12)$$

et le potentiel de gravitation d'une masse quelconque en un point extérieur à celle-ci est une fonction harmonique.

Au contraire, à l'intérieur de la matière, le potentiel de gravitation n'est plus une fonction harmonique car  $\Delta U$  n'est plus nul mais vaut  $-4\pi K \rho$ . En effet, lorsqu'un champ dérive d'un potentiel  $U$ , le flux sortant de



toute surface fermée  $S$  contenant un volume  $V$ , est donné par le théorème de Gauss :

$$\Phi(S) = \iiint_{Q \in V} \Delta U(Q) dV$$

On a donc aussi  $\Delta U = \frac{d\Phi}{dV}$  ; or le flux  $d\Phi$  sortant d'une surface quelconque contenant **uniquement** un point  $Q$  de masse  $dm = \rho(Q) dV$ , vaut  $-4\pi K \rho(Q) dV$  ; la conservation du flux montre que le même flux traverse la surface élémentaire qui limite le volume  $dV$  entourant le point  $Q$  ; à la limite, au point  $Q$ , on a donc  $\frac{d\Phi}{dV} = -4\pi K \rho(Q)$ . On en déduit aussi que le flux sortant de toute surface contenant une masse répartie  $M$  vaut  $\iiint -4\pi K \rho(Q) dV = -4\pi K M$  et ne dépend pas de la répartition de la matière dans le volume considéré, mais seulement de sa masse totale.

Finalement, on peut donc dire qu'en tout point de l'espace, intérieur ou extérieur à la matière, on a l'équation suivante, dite équation de Poisson :

$$\Delta U = -4\pi K \rho \quad \text{avec} \quad \rho = 0 \quad \text{hors des masses}$$

Bien sûr, c'est essentiellement le potentiel de gravitation à l'extérieur des masses qui intéresse la mécanique céleste, le potentiel intérieur servant surtout aux études sur la dynamique interne des corps. L'intérêt d'étudier le potentiel plutôt que le champ est évident : Le potentiel est une fonction scalaire, plus facile à construire directement que les 3 composantes du champ, lesquelles se déduisent d'ailleurs simplement du potentiel par un calcul de gradient.

### 15.3. Systèmes à symétrie matérielle sphérique

Un tel système possède par définition un centre de symétrie géométrique, soit  $O$ , et en plus, la masse volumique en tout point  $P$  est uniquement fonction de sa distance  $r$  au point  $O$  : en coordonnées sphériques on a

$\rho \equiv \rho(r)$ . Un tel système est ainsi composé de couches sphériques d'égale densité et a la forme sphérique.

Alors, par raison de symétrie, le champ et le potentiel de gravitation de ce système possèdent aussi la symétrie sphérique de centre  $O$  et ne dépendent que de  $r$  ; les équipotentielles sont des sphères centrées en  $O$ , et le champ (gradient du potentiel) est central, normal à ces sphères ; notons ce champ :  $\mathbf{g}(r) = g(r) \mathbf{u}$ . Le flux de ce champ sortant de l'équipotentielle de rayon  $r$  vaut :  $4\pi r^2 g(r)$ . Ce flux vaut aussi  $-4\pi K M$  où  $M$  est la masse totale contenue dans l'équipotentielle considérée. On en déduit :

$$g(r) = -\frac{KM}{r^2}$$

Donc le champ s'écrit :  $\mathbf{g}(r) = -\frac{KM}{r^2} \mathbf{u}$ , et c'est le même que celui d'une masse ponctuelle  $M$  placée en  $O$ . Ainsi, l'effet gravitationnel d'un système à symétrie sphérique est le même que si toute sa masse était concentrée en son centre.

En première approximation, on considère généralement que le Soleil et les planètes sont des sphères dont la matière est disposée en couches homogènes sphériques : Cela explique qu'on les considère alors comme des masses ponctuelles. Cependant, il convient maintenant de tenir compte de la forme réelle (non sphérique) de ces corps.

## 15.4. Systèmes quelconques

Lorsqu'on s'éloigne indéfiniment d'un corps matériel étendu mais **fini**, son potentiel tend vers celui d'une masse ponctuelle puisqu'alors ses dimensions deviennent négligeables devant sa distance ; dans le même temps, ce potentiel tend vers zéro, comme pour une masse ponctuelle. On se propose de déterminer le potentiel d'un corps quelconque sous forme d'un développement qui soit valable à l'extérieur de ce corps, et qui puisse se réduire, à l'infini, au potentiel d'une masse ponctuelle.

Soient  $S$  ce corps (pas forcément solide),  $D$  l'espace (ou volume) qu'il occupe,  $\rho(Q)$  la masse volumique en  $Q$  (l'un de ses points),  $M$  sa masse totale,  $G$  son centre de masse. Soit  $Oijk$  un repère attaché à  $S$  et dans lequel on pourra repérer aussi bien les particules  $Q$  qui le composent, que le point extérieur  $P$  où l'on désire calculer son potentiel de gravitation. Le point  $O$  est à priori quelconque mais choisi dans le voisinage de  $S$  et sera généralement confondu avec  $G$ ; de même la base  $ijk$  est pour le moment quelconque. En repérant  $P$  par des coordonnées sphériques  $(r, \lambda, \varphi)$  dans  $Oijk$ , on recherche le potentiel sous forme d'un développement convergent en puissances de  $1/r$ , c'est-à-dire de la forme :

$$U(P) = U_2(r, \lambda, \varphi) = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W_n(\lambda, \varphi)}{r^n} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \quad \text{avec} \quad V_n = \frac{W_n(\lambda, \varphi)}{r^{n+1}} \quad (4.13)$$

Ainsi, à condition que les fonctions  $W_n$  soient toutes bornées, lorsque  $r$  est assez grand, le développement de  $U(P)$  sera assimilable à son premier terme :  $\frac{W_0}{r}$ . Il suffit donc de prendre  $W_0 = KM$  pour que le potentiel de  $S$  se réduise à celui d'un point de masse  $M$ .

On doit avoir  $\Delta U = 0$  quelque soit  $r$  assez grand (pour être à l'extérieur de  $S$ ); il faut donc que l'on ait  $\sum_n \Delta V_n = 0$ . Cependant, comme  $V_n$  est par définition une fonction de degré  $(-n - 1)$  par rapport à  $r$ , le Laplacien  $\Delta V_n$  est de degré  $(-n - 3)$  et la somme  $\sum_n \Delta V_n$  ne pourra être nulle **quelque soit  $r$**  que si chaque  $\Delta V_n$  est identiquement nul. Donc chaque  $V_n$  est une fonction harmonique, dite *harmonique homogène* de degré  $(-n - 1)$  par rapport à  $r$ . Les fonctions  $W_n$ , indépendantes de  $r$ , sont des fonctions *harmoniques sphériques*, restrictions de  $V_n$  à la sphère de rayon 1.

**Remarque.** Les fonctions  $V_n$  sont qualifiées d'homogènes car, en les exprimant en coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , elles deviennent homogènes, c'est-à-dire formées de monômes d'un même degré par rapport à l'ensemble des  $(x, y, z)$ . Alors, comme il y a un nombre fini de monômes de 3 variables et de degré donné, il y a aussi un nombre fini de fonctions harmoniques homogènes d'un même degré donné; on verra bientôt que  $V_n$  peut être décrit par  $2n + 1$  monômes. La forme générale de  $V_n$  est ainsi un polynôme homogène de ces trois

variables, combinaison linéaire de ces  $2n + 1$  monômes. En revenant aux coordonnées sphériques,  $V_n$  peut ainsi s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire de  $2n + 1$  fonctions  $W_n^{(p)}(\lambda, \varphi)$  qui sont les fonctions *harmoniques sphériques d'ordre  $n$*  :

$$V_n = \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{p=-n}^{+n} a_p W_n^{(p)}(\lambda, \varphi)$$

Voyons comment les obtenir.

### 15.4.1. Harmoniques sphériques

D'après (4.8), l'équation  $\Delta V_n = \Delta \left( \frac{W_n(\lambda, \varphi)}{r^{n+1}} \right) = 0$  devient :

$$n(n + 1) W_n + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 W_n}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 W_n}{\partial \varphi^2} - \tan \varphi \frac{\partial W_n}{\partial \varphi} = 0 \tag{4.14}$$

Comme le potentiel en  $P$  est une fonction périodique de  $\lambda$  de période  $2\pi$ , il en est de même de chaque  $W_n(\lambda, \varphi)$  ; on recherche donc cette fonction sous la forme d'un développement en série de Fourier en  $\lambda$  :

$$W_n(\lambda, \varphi) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_n^{(p)}(\varphi) \exp ip\lambda \tag{4.15}$$

On en déduit :

$$\sum_p \left[ \left( n(n + 1) - \frac{p^2}{\cos^2 \varphi} \right) C_n^{(p)} - \tan \varphi \frac{dC_n^{(p)}}{d\varphi} + \frac{d^2 C_n^{(p)}}{d\varphi^2} \right] \exp ip\lambda = 0$$

Devant être nulle quelque soit  $P$ , donc quelque soit  $\lambda$ , cette somme est nécessairement nulle terme à terme ; c'est donc le facteur de  $\exp ip\lambda$  qui est nul pour chaque valeur de  $n$  et de  $p$ . En posant  $s = \sin \varphi$  et  $P_n^{(p)}(s) = C_n^{(p)}(\varphi)$ , ce facteur nul devient l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\left( n(n+1) - \frac{p^2}{1-s^2} \right) P_n^{(p)} - 2s \frac{dP_n^{(p)}}{ds} + (1-s^2) \frac{d^2 P_n^{(p)}}{ds^2} = 0 \quad (4.16)$$

Manifestement, on a :  $P_n^{(p)} = P_n^{(-p)}$ . On montre que les solutions normalisées de (4.16) sont les *fonctions associées de Legendre*, ainsi définies :

$$P_n^{(p)}(s) = \frac{(1-s^2)^{p/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+p}}{ds^{n+p}} (s^2-1)^n \quad \text{pour } p \geq 0 \quad (4.17)$$

On voit que ces fonctions sont nulles pour  $p > n$ . Pour  $p = 0$ , ces fonctions sont des polynômes de degré  $n$  en  $s$ , appelés *polynômes de Legendre* :

$$P_n(s) = P_n^{(0)}(s) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{ds^n} (s^2-1)^n \quad (4.18)$$

Il y a donc  $2n + 1$  fonctions  $P_n^{(p)}$  non nulles, et corrélativement,  $2n + 1$  fonctions harmoniques sphériques indépendantes d'ordre  $n$  :

$$P_n(\sin \varphi), P_n^{(1)}(\sin \varphi) \cos \lambda, P_n^{(1)}(\sin \varphi) \sin \lambda, \dots, P_n^{(n)}(\sin \varphi) \cos n\lambda, P_n^{(n)}(\sin \varphi) \sin n\lambda$$

### 15.4.2. Propriétés des fonctions de Legendre

Les fonctions associées de Legendre interviennent dans les développements en puissances de  $t$  suivants :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2st + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(s) t^n \quad (4.19)$$

$$\frac{(2p)!(1 - s^2)^{p/2} t^p}{2^p p! (1 - 2st + t^2)^{p+1/2}} = \sum_{n=p}^{\infty} P_n^{(p)}(s) t^n \quad (4.20)$$

Les expressions des membres de gauche sont les fonctions génératrices des fonctions de Legendre. On peut vérifier en effet, en dérivant deux fois ces expressions par rapport à  $s$  et par rapport à  $t$ , que les coefficients de  $t^n$  vérifient l'équation différentielle (4.16) pour tout  $n$ . On déduit aussi, par dérivation de ces fonctions génératrices, que les fonctions de Legendre vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$(n + 1 - p) P_{n+1}^{(p)}(s) - (2n + 1) s P_n^{(p)}(s) + (n + p) P_{n-1}^{(p)}(s) = 0 \quad (4.21)$$

$$P_n^{(p+2)}(s) - \frac{2(p + 1) s}{\sqrt{1 - s^2}} P_n^{(p+1)}(s) + (n - p)(n + p + 1) P_n^{(p)}(s) = 0 \quad (4.22)$$

Il suffit donc de connaître  $P_0, P_1, P_0^{(1)}$  et  $P_1^{(1)}$  pour en déduire tous les autres  $P_n^{(p)}$ . En fait, ces 4 fonctions peuvent être aisément calculées par l'expression (4.17) ; on obtient :

$$P_0^{(0)}(s) = 1 \quad P_0^{(1)}(s) = 0 \quad P_1^{(0)}(s) = s \quad P_1^{(1)}(s) = \sqrt{1 - s^2}$$

puis les autres fonctions  $P_n^{(p)}(s)$  par récurrence ; celles dont on pourra avoir besoin sont présentées dans le **Tableau 4**.

Dev4.3.1

**Tableau 4.** Polynômes et fonctions associées de Legendre  $P_n^{(p)}(s)$ , avec  $s = \sin \varphi$  et  $c = \cos \varphi = \sqrt{1 - s^2}$ . Les polynômes de Legendre  $P_n(s)$  correspondent à la valeur  $p = 0$ .

| $n \backslash p$ | 0   | 1                                     | 2                                       | 3          | 4        | ... |
|------------------|---|---------------------------------------|---|------------|----------|-----|
| 0                | 1   | 0                                     |   |            |          |     |
| 1                | $s$   | $c$                                   | 0                                       |            |          |     |
| 2                | $\frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}$                    | $3s c$                                | $3c^2$                                  | 0          |          |     |
| 3                | $\frac{5}{2}s^3 - \frac{3}{2}s$                   | $(\frac{15}{2}s^2 - \frac{3}{2}) c$   | $15s c^2$                               | $15c^3$    | 0        |     |
| 4                | $\frac{35}{8}s^4 - \frac{15}{4}s^2 + \frac{3}{8}$ | $(\frac{35}{2}s^3 - \frac{15}{2}s) c$ | $(\frac{105}{2}s^2 - \frac{15}{2}) c^2$ | $105s c^3$ | $105c^4$ |     |
| ⋮                |   |                                       |   |            |          |     |

On peut montrer que dans l'intervalle  $|s| \leq 1$ , on a :  $|P_n(s)| \leq 1$  pour tout  $n$  ; alors, le développement (4.19) est absolument convergent pour  $|t| < 1$ .

On pourrait encore établir cette relation intéressante, dite *formule d'addition des polynômes de Legendre* :

$$P_n(\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \lambda) = \sum_{p=0}^n \alpha_{np} P_n^{(p)}(\sin \theta) P_n^{(p)}(\sin \phi) \cos p\lambda \tag{4.23}$$

où

$$\alpha_{np} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ 2 \frac{(n-p)!}{(n+p)!} & \text{si } p \neq 0 \end{cases}$$

### 15.4.3. Développement du potentiel de gravitation

Finalement, le développement du potentiel de gravitation d'un corps quelconque en un point  $P$  extérieur à ce corps et exprimé en fonction des coordonnées sphériques de  $P$ , admet la forme générale suivante :

$$U_2(r, \lambda, \varphi) = K \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} P_n^{(p)}(\sin \varphi) [c_{np} \cos p\lambda + s_{np} \sin p\lambda] \quad (4.24)$$

où les coefficients  $c_{np}$  et  $s_{np}$  dépendent de la répartition des masses dans ce corps. La convergence de ce développement n'est pas toujours assurée si  $r$  est trop petit ; cela peut dépendre de la forme du corps. Il convient en fait très bien pour représenter le potentiel de gravitation des planètes ou des satellites dont la forme est voisine d'une sphère ; le développement converge alors généralement jusqu'à la surface du corps.

Si la répartition de matière a la symétrie sphérique autour de  $O$ , le développement doit se réduire à un seul terme : seul  $c_{00}$  est non nul et vaut  $M$ .

Si la répartition de matière admet la symétrie de révolution autour d'un axe, en choisissant  $Ok$  suivant cet axe, la coordonnée  $\lambda$  mesure alors une longitude autour de l'axe de révolution, et donc le potentiel, qui admet la même symétrie de révolution, ne doit pas dépendre de  $\lambda$ . Seul les coefficients  $c_n = c_{n0}$  sont alors différents de zéro et le potentiel est de la forme :

$$U_2(r, -, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{P_n(\sin \varphi)}{r^{n+1}} \quad (4.25)$$

Si, en plus de la symétrie de révolution, le corps admet un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de révolution, le centre de masse  $G$  est situé à l'intersection de ce plan et de cet axe ; en prenant  $O$  en  $G$ , le plan  $Oij$  dans



ce plan et  $O\mathbf{k}$  suivant cet axe, le potentiel devient une fonction paire de la latitude  $\varphi$  ; vue la parité des polynômes de Legendre, il ne subsiste alors dans le développement (4.25) que les termes correspondant à  $n$  pair. Ce type de symétrie est la *symétrie sphéroïdale* ; on verra **plus loin** que les planètes sont généralement très proches de sphéroïdes.

#### 15.4.4. Calcul du développement du potentiel de gravitation

Pour traiter le cas d'un corps quelconque  $S$ , cherchons d'abord le potentiel élémentaire  $dU$  d'une masse ponctuelle  $dm$  placée en un point  $Q$  de  $S$  ; soient  $\varrho$ ,  $\ell$  et  $\theta$  les coordonnées sphériques de  $Q$  dans le repère  $Oijk$ .

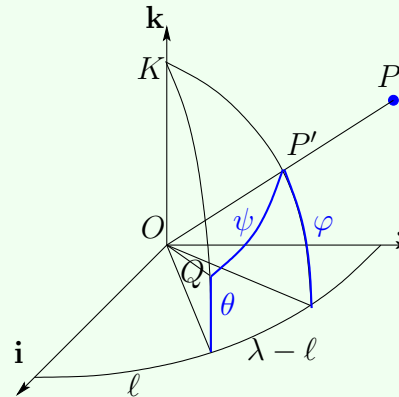
Le potentiel engendré par la masse  $dm$  en un point  $P$  de coordonnées sphériques  $(r, \lambda, \varphi)$  sera alors :

$$dU(P) = \frac{K dm}{|\mathbf{QP}|}$$

soit, d'après (4.19) :

$$dU_2(r, \lambda, \varphi) = \frac{K dm}{\sqrt{r^2 - 2r\varrho \cos \psi + \varrho^2}} = \frac{K dm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n P_n(\cos \psi)$$

où  $\psi$  représente l'angle  $\widehat{QOP}$ . Ce développement converge absolument pour  $r > \varrho$ . Or, dans le triangle sphérique  $KQP'$ , on a :  $\cos \psi = \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos(\lambda - \ell)$ , et ainsi on obtient, d'après la formule d'addition des polynômes de Legendre (4.23) :



$$dU_2(r, \lambda, \varphi) = \frac{K dm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n \alpha_{np} \frac{P_n^{(p)}(\sin \varphi)}{r^n} (\varrho^n P_n^{(p)}(\sin \theta)) \cos p(\lambda - \ell)$$

Il faut maintenant intégrer pour tous les point  $Q$  de  $S$  ; en intégrant le développement terme à terme, on obtient :

$$U_2(r, \lambda, \varphi) = \frac{K}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n \alpha_{np} \frac{P_n^{(p)}(\sin \varphi)}{r^n} \left[ \cos p\lambda \int_{Q \in S} \varrho^n P_n^{(p)}(\sin \theta) \cos p\ell dm + \sin p\lambda \int_{Q \in S} \varrho^n P_n^{(p)}(\sin \theta) \sin p\ell dm \right] \tag{4.26}$$

Il reste alors à calculer des intégrales de la forme :

$$a_{np} = \int_{Q \in S} \varrho^n P_n^{(p)}(\sin \theta) \cos p\ell dm \quad \text{et} \quad b_{np} = \int_{Q \in S} \varrho^n P_n^{(p)}(\sin \theta) \sin p\ell dm$$



**Exercice** Les fonctions à intégrer sont des fonctions harmoniques des coordonnées sphériques de  $Q$ ; ce sont aussi des polynômes homogènes des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  de  $Q$ . Effectuons le calcul des coefficients  $a_{np}$  et  $b_{np}$  pour  $n = 0, 1$  et  $2$ , en prenant l'expression des  $P_n^{(p)}(\sin \varphi)$  dans le **Tableau 4**.

- $n = 0$  et donc :  $p = 0$ ; on a :  $a_{00} = \int dm = M$  masse totale de  $S$ .
- $n = 1$  et donc :  $p = 0$  et  $1$ ; on obtient :

$$\begin{aligned}
 a_{10} &= \int \varrho \sin \theta \, dm &= \int z \, dm &= M Z_G \\
 a_{11} &= \int \varrho \cos \theta \cos \ell \, dm &= \int x \, dm &= M X_G \\
 b_{11} &= \int \varrho \cos \theta \sin \ell \, dm &= \int y \, dm &= M Y_G
 \end{aligned}$$

Ces coefficients dépendent donc des coordonnées  $(X_G, Y_G, Z_G)$  du centre de masse  $G$  dans  $Oijk$ . Ils seraient donc nuls si l'origine  $O$  du repère était prise en  $G$ .

- $n = 2$  et donc :  $p = 0, 1$  et  $2$ ; on trouve :

$$\begin{aligned}
 a_{20} &= \int \varrho^2 \left( \frac{3}{2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \right) dm &= \frac{3}{2} \int z^2 \, dm - \frac{1}{2} \int (x^2 + y^2 + z^2) \, dm \\
 a_{21} &= \int \varrho^2 (3 \sin \theta \cos \theta) \cos \ell \, dm &= 3 \int xz \, dm \\
 a_{22} &= \int \varrho^2 (3 \cos^2 \theta) (2 \cos^2 \ell - 1) \, dm &= 6 \int x^2 \, dm - 3 \int (x^2 + y^2) \, dm \\
 b_{21} &= \int \varrho^2 (3 \sin \theta \cos \theta) \sin \ell \, dm &= 3 \int yz \, dm \\
 b_{22} &= \int \varrho^2 (3 \cos^2 \theta) (2 \sin \ell \cos \ell) \, dm &= 6 \int xy \, dm
 \end{aligned}$$

Avec les notation classiques des moments et produits d'inertie :

$$\begin{aligned} A &= \int (y^2 + z^2) dm & D &= \int yz dm \\ B &= \int (x^2 + z^2) dm & E &= \int xz dm \\ C &= \int (x^2 + y^2) dm & F &= \int xy dm \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} a_{20} &= \frac{1}{2}(A + B) - C & a_{21} &= 3E & a_{22} &= 3(B - A) \\ & & b_{21} &= 3D & b_{22} &= 6F \end{aligned}$$

Tenant compte de la valeur des coefficients  $\alpha_{np}$  définis en (4.23), le développement général du potentiel (4.26) est ainsi, jusqu'à l'ordre  $n = 2$  :

$$\begin{aligned} U_2(r, \lambda, \varphi) &= \frac{KM}{r} + \frac{KM}{r^2} (X_G \cos \varphi \cos \lambda + Y_G \cos \varphi \sin \lambda + Z_G \sin \varphi) \\ &+ \frac{K}{r^3} \left[ \left( \frac{A+B}{2} - C \right) \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 3 \sin \varphi \cos \varphi (E \cos \lambda + D \sin \lambda) \right. \\ &\quad \left. + 3 \cos^2 \varphi \left( \frac{B-A}{4} \cos 2\lambda + \frac{F}{2} \sin 2\lambda \right) \right] \\ &+ \dots \end{aligned} \tag{4.27}$$

Le calcul des termes correspondant à  $n > 2$  montrerait que s'introduisent, pour chaque valeur de  $n$ , les moments d'inertie d'ordre  $n$  (c'est-à-dire des intégrales de la forme  $\int x^i y^j z^k dm$  où  $i + j + k = n$  avec  $i \geq 0, j \geq 0$  et  $k \geq 0$ )

L'expression (4.27) se simplifie si le corps est un solide et si le repère  $Oijk$  a son origine confondue avec  $G$ , centre de masse, et est orienté de façon à être principal d'inertie en ce point (c'est alors un repère central d'inertie) : Les produits d'inertie  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont alors nuls ; si en outre l'ellipsoïde d'inertie est de révolution autour de  $Ok$ , les moments d'inertie  $A$  et  $B$  sont égaux et il ne reste alors de l'expression (4.27) que les termes :

$$U_2(r, -, \varphi) = \frac{KM}{r} + \frac{K}{r^3} (A - C) \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) + \dots \quad (4.28)$$

Si le corps est un solide admettant 3 plans de symétrie orthogonaux 2 à 2, en prenant les axes  $Oi$ ,  $Oj$  et  $Ok$  suivant les intersections de ces plans, on obtient un repère central d'inertie dans lequel, par raison de symétries, tous les moments d'inertie d'ordre impair sont nuls : il ne reste donc que les termes correspondant à  $n$  pair. Comme  $U$  est alors aussi fonction périodique et paire de  $\lambda$ , de période  $\pi$ , on ne trouve dans  $U$  que des termes en  $\cos 2k\lambda$  :

$$U(r, \lambda, \varphi) = \frac{KM}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{A + B - 2C}{2M} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) + \frac{3(B - A)}{4M} \cos^2 \varphi \cos 2\lambda \right] + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{a_{2m,2k}}{M} \frac{1}{r^{2m}} P_{2m}^{(2k)}(\sin \varphi) \cos 2k\lambda \right\} \quad (4.29)$$

## 15.5. Potentiel de gravitation des planètes

### 15.5.1. Potentiel approché : planètes sphéroïdales

Les corps non ponctuels que l'on considère en Mécanique Céleste sont essentiellement les planètes que l'on assimile le plus souvent à des *sphéroïdes* solides et en rotation autour d'un axe (rappelons qu'un sphéroïde est un corps possédant un axe de révolution et un plan de symétrie orthogonal à cet axe); l'axe de révolution est souvent très proche de l'axe de rotation, et le plan de symétrie est appelé plan équatorial de la planète. Il s'agit donc d'un cas particulier de corps ayant 3 plans de symétrie orthogonaux 2 à 2, mais cette fois, si le repère  $Oijk$  respecte les symétries, le potentiel ne dépend pas de  $\lambda$ . En désignant par  $a_e$  le *rayon équatorial* de la planète, le potentiel est alors souvent présenté sous la forme suivante :

$$U(r, -, \varphi) = \frac{KM}{r} \left( 1 - J_2 \frac{a_e^2}{r^2} P_2(\sin \varphi) - J_4 \frac{a_e^4}{r^4} P_4(\sin \varphi) - \dots - J_{2n} \frac{a_e^{2n}}{r^{2n}} P_{2n}(\sin \varphi) - \dots \right) \quad (4.30)$$

Les coefficients  $J_{2n}$  sont sans dimension ; par exemple :  $J_2 = \frac{C - A}{Ma_e^2}$ . Dans les applications,  $r$  est la distance du point  $P$  au centre de la planète : cette distance est généralement bien supérieure à  $a_e$ . Comme on le verra **plus loin**, la quasi-sphéricité des planètes fait que les coefficients  $J_2, J_4, etc.$  sont très petits,  $J_2$  étant en outre prépondérant sur tous les autres. Si en plus le rapport  $a_e/r$  est petit, les termes du développement (4.30) décroissent rapidement et on peut se contenter le plus souvent des 2 ou 3 premiers termes.

Cependant, les valeurs de  $J_2, J_4, etc.$  ne sont pas évidentes à déterminer avec précision car, ne connaissant pas la répartition des masses à l'intérieur des planètes, on ne peut pas calculer les moments d'inertie par des

intégrales. Il faut donc utiliser des méthodes indirectes. Pour la Terre, les coefficients  $J_2$  et  $J_4$  ont été évalués pour la première fois par Clairaut au dix-huitième siècle en associant l'étude de la forme de la Terre à celle de son champ de pesanteur. Ce n'est qu'avec l'avènement des satellites artificiels que l'on a pu déterminer avec précision un grand nombre de coefficients  $J_n$ , par l'analyse des perturbations leur mouvement, observées sous forme d'écart à un pur mouvement képlérien. Pour les autres planètes, c'est aussi l'analyse des mouvements observés dans leur voisinage (satellites naturels ou sondes spatiales) qui nous renseigne sur les écarts entre leur potentiel de gravitation et celui d'une masse ponctuelle.

### 15.5.2. Potentiel terrestre : gravité et pesanteur

Quand on mesure l'attraction de la Terre depuis sa surface par la gravimétrie, on n'obtient pas la valeur du champ de gravitation mais celle du champ  $\mathbf{g}$  de la *pesanteur* : celui-ci résulte de l'attraction gravitationnelle proprement dite, et de la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre sur elle-même. Si  $O$  désigne le centre de la Terre, on a ainsi en un point  $P$  :

$$\mathbf{g}(P) = \mathbf{grad}_P U(P) - \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{OP})$$

où  $\omega$  est le vecteur rotation de la Terre ( $|\omega| = \omega = 2\pi/86164 \text{ s}^{-1}$ ). Le deuxième terme, axifuge, dérive aussi d'un potentiel ; en prenant le repère  $Oijk$  de façon à ce que  $Ok$  soit colinéaire à  $\omega$ , on obtient le potentiel de pesanteur  $U_p$ , en coordonnées sphériques :

$$U_p(r, \lambda, \varphi) = U(r, \lambda, \varphi) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi \quad (4.31)$$

Si la Terre est assimilée à un sphéroïde, la fonction  $U$  est de la forme (4.30), où  $a_e$  représente le rayon équatorial terrestre ( $a_e = 6\,378\,140 \text{ m}$ ). Notons que  $U_p$  n'est pas une fonction harmonique car on a :  $\Delta(\omega^2 r^2 \cos^2 \varphi) \neq 0$ .

Dans la base locale des coordonnées sphériques, on a ainsi :

$$\mathbf{g} = \mathbf{grad} U_p = \begin{cases} -\frac{KM}{r^2} (1 - 3 \frac{a_e^2}{r^2} J_2 P_2(\sin \varphi) + \dots) + \omega^2 r \cos \varphi & \text{suivant } \mathbf{u} \\ -3 \frac{KM}{r^2} \frac{a_e^2}{r^2} J_2 \sin \varphi \cos \varphi + \dots - \omega^2 r \sin \varphi \cos \varphi & \text{suivant } \mathbf{w} \end{cases}$$

La verticale d'un lieu, parallèle à  $\mathbf{g}$ , ne passe donc pas par le centre de la Terre, sauf aux pôles ( $\varphi = \pm\pi/2$ ) et à l'équateur ( $\varphi = 0$ ). Manifestement, les équipotentielles du champ de pesanteur ne sont pas sphériques.

Dans l'hypothèse où l'on assimile la surface de la Terre à une équipotentielle du champ de pesanteur, on peut trouver une relation entre les coefficients  $J_2, J_4$  etc. et les paramètres  $\alpha$  et  $c$  qui caractérisent la forme de la Terre et sa rotation et qui sont ainsi définis : Si  $b$  représente le rayon polaire de la Terre, la quantité  $\alpha = (a_e - b)/a_e$  représente l'aplatissement géométrique de la Terre ; par ailleurs, la quantité  $c = \omega^2 a_e^3 / KM$  exprime le rapport entre l'accélération centrifuge à l'équateur due à la rotation de la Terre ( $\omega^2 a_e$ ), et l'accélération principale due à la gravitation ( $KM/a_e^2 \approx g_e$ , valeur de  $g$  à l'équateur).

En exprimant que le potentiel de pesanteur prend la même valeur aux pôles et à l'équateur, et limitant l'expression du potentiel de gravitation de la Terre à sa partie en  $J_2$  :

$$U(r, \lambda, \varphi) = \frac{KM}{r} \left( 1 - J_2 \frac{a_e^2}{r^2} P_2(\sin \varphi) \right)$$

Exercice on obtient cette relation, due à Clairaut :




$$3J_2 = 2\alpha - c \tag{4.32}$$

$\alpha$  peut être obtenu à partir des mesures géodésiques faites en divers points de la Terre, qui ont donné la courbure de la Terre en ces points et  $\alpha = 1/298, 257$  ; on a alors  $b = 6\,356\,755$  m. Avec  $c = 1/288, 90$ , on obtient :  $J_2 = 1/927, 72 = 0, 0010814$ . Donc, le premier terme du potentiel de gravitation de la Terre, qui manifeste sa non-sphéricité, est environ mille fois plus petit que le terme principal.



A l'ordre suivant, on prend le potentiel de gravitation jusqu'au terme en  $J_4$ , et on fait l'hypothèse supplémentaire que l'équipotentielle du champ de pesanteur passant par l'équateur (surface appelée *géoïde*) est un ellipsoïde de révolution de demi-grands axes  $a_e$  et  $b$ ; alors, en remplaçant  $r^2$  dans  $U_p$  par  $1/(\cos^2 \varphi/a_e^2 + \sin^2 \varphi/b^2)$  et en exprimant que le potentiel sur le géoïde est indépendant de  $\varphi$ , on trouve cette relation entre  $J_4$ ,  $J_2$  et  $c$ :

$$J_4 = - \left( \frac{9}{5} J_2^2 + \frac{12}{35} c J_2 - \frac{3}{35} c^2 \right) \quad (4.33)$$

**Exercice**  qui conduit à la valeur :  $J_4 = -0,000\,0024$ . Ce coefficient est encore mille fois plus petit que  $J_2$ . On constate que la convergence est apparemment très bonne.

Les hypothèses précédentes reviennent à supposer que la Terre est en équilibre hydrostatique; on verra qu'elles conduisent, surtout pour  $J_2$ , à une valeur très proche de la réalité. En fait, actuellement, c'est en analysant les observations du mouvement des satellites artificiels que l'on détermine les coefficients du potentiel de gravitation de la Terre, indépendamment de toute hypothèse sur sa constitution interne. Les modèles de constitution interne que l'on peut faire doivent alors s'efforcer de redonner les mêmes coefficients que ceux obtenus à partir des satellites.

### 15.5.3. Potentiel réel de la Terre et des planètes

Dans un repère principal d'inertie **lié** à la Terre ou à une planète, le potentiel de gravitation réel, c'est-à-dire celui que l'on détermine par les satellites, est de la forme :

$$U(r, \lambda, \varphi) = \frac{KM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \left\{ -J_n P_n(\sin \varphi) + \sum_{p=1}^n P_n^{(p)}(\sin \varphi) [c_{np} \cos p\lambda + s_{np} \sin p\lambda] \right\} \right] \quad (4.34)$$

Les termes en  $J_n$ , qui ne dépendent que de la latitude  $\varphi$  du point  $P$ , sont les harmoniques **zonaux**. Pour  $n$  fixé, les  $2n - 2$  termes en  $c_{np}$  et  $s_{np}$  pour  $p \neq 0$  et  $p \neq n$  sont les harmoniques **tesséraux** d'ordre  $n$ , et les 2 termes en  $c_{nn}$  et  $s_{nn}$  sont les harmoniques **sectoriels** d'ordre  $n$ ; ces harmoniques dépendent à la fois de  $\varphi$  et de  $\lambda$ ; les termes en  $c_{22}$  et  $s_{22}$  sont par exemple représentatifs d'une certaine ellipticité de l'équateur de la planète (rappelons que l'on a :  $c_{22} = (B - A)/4Ma_e^2$ ).

On utilise aussi parfois, à la place des  $J_n$ ,  $c_{np}$  et  $s_{np}$ , les notations équivalentes  $J_{np}$  et  $\lambda_{np}$ , ce qui donne :

$$U(r, \lambda, \varphi) = \frac{KM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_e^n}{r^n} \sum_{p=0}^n J_{np} P_n^{(p)}(\sin \varphi) \cos p(\lambda - \lambda_{np}) \right] \quad (4.35)$$

Voici les valeurs admises pour les principaux coefficients du potentiel de gravitation de quelques planètes et satellites :

Pour la *planète Terre* :

|  |                                |   |
|--|--------------------------------|---|
| $KM = 3,986\,005\,10^{14}\, \text{m}^3\text{s}^{-2}$ | $a_e = 6\,378\,140\, \text{m}$ | $\omega = 360^\circ,985\,612\, \text{j}^{-1}$ |
| $J_2 = 0,001\,082\,625$                              | $c_{22} = 0,000\,001\,571$     | $s_{22} = -0,000\,000\,903$                   |
| $J_3 = -0,000\,002\,534$                             | $c_{31} = 0,000\,002\,190$     | $s_{31} = 0,000\,000\,272$                    |
| $J_4 = -0,000\,001\,623$                             |                                |   |

Les autres coefficients sont inférieurs en module à  $10^{-6}$  ; on possède des modèles de potentiel terrestre développés jusqu'à  $n = 20$  pour les harmoniques zonaux, et  $n = 10$  pour les harmoniques tesséraux.

Pour la *Lune* :

|  |                                |  |
|--|--------------------------------|--|
| $KM = 4,902\,794\,10^{12}\, \text{m}^3\text{s}^{-2}$ | $a_e = 1\,738\,000\, \text{m}$ | $\omega = 13^\circ,176\,581\, \text{j}^{-1}$ |
| $J_2 = 0,000\,202\,7$                                | $c_{22} = 0,000\,022\,3$       |  |
| $J_3 = 0,000\,006$                                   | $c_{31} = 0,000\,029$          | $s_{31} = 0,000\,004$                        |
|  | $c_{32} = 0,000\,005$          | $s_{32} = 0,000\,002$                        |
|  | $c_{33} = 0,000\,002$          | $s_{33} = -0,000\,001$                       |

Pour la *planète Mars* :

|   |                                |   |
|---|--------------------------------|---|
| $KM = 4,282\,82\,10^{13}\, \text{m}^3\text{s}^{-2}$ | $a_e = 3\,397\,200\, \text{m}$ | $\omega = 350^\circ,891\,983\, \text{j}^{-1}$ |
| $J_2 = 0,001\,964$                                  | $c_{22} = -0,000\,055$         | $s_{22} = 0,000\,031$                         |
| $J_3 = 0,000\,036$                                  |                                | $s_{31} = 0,000\,026$                         |

Pour la *planète Jupiter* :

$$\begin{array}{ll}
 KM = 1,267\,12\,10^{17}\, \text{m}^3\text{s}^{-2} & a_e = 71\,398\,000\, \text{m} \\
 J_2 = 0,014\,75 & \omega = 870^\circ,536\, \text{j}^{-1} \\
 J_4 = -0,000\,58 &
 \end{array}$$

Pour la *planète Saturne* :

$$\begin{array}{ll}
 KM = 3,793\,41\,10^{16}\, \text{m}^3\text{s}^{-2} & a_e = 60\,000\,000\, \text{m} \\
 J_2 = 0,016\,45 & \omega = 810^\circ,794\, \text{j}^{-1} \\
 J_4 = -0,001\,0 &
 \end{array}$$

Pour la *planète Uranus* :

$$\begin{array}{ll}
 KM = 5,794\,55\,10^{15}\, \text{m}^3\text{s}^{-2} & a_e = 25\,400\,000\, \text{m} \\
 J_2 = 0,003\,346\,1 & \omega = -554^\circ,913\, \text{j}^{-1} \\
 J_4 = -0,000\,032\,1 &
 \end{array}$$

On note les valeurs relativement importantes du  $J_2$  pour Jupiter et Saturne, qui correspondent au fort aplatissement de leur globe dû à leur rotation rapide (1 tour en 10 heures environ).

De l'expression (4.35) du potentiel, on déduit les composantes du champ de gravitation, dans la base locale

uvw des coordonnées sphériques (pour un corps non tournant) :

$$\text{grad } U = \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{KM}{r^2} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \frac{a_e^n}{r^n} \sum_{p=0}^n J_{np} P_n^{(p)}(\sin \varphi) \cos p(\lambda - \lambda_{np}) \right] \\ \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \lambda} = -\frac{KM}{r^2} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_e^n}{r^n} \sum_{p=1}^n p J_{np} \frac{P_n^{(p)}(\sin \varphi)}{\cos \varphi} \sin p(\lambda - \lambda_{np}) \right] \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{KM}{r^2} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_e^n}{r^n} \sum_{p=0}^n J_{np} \frac{dP_n^{(p)}(\sin \varphi)}{d\varphi} \cos p(\lambda - \lambda_{np}) \right] \end{cases} \quad (4.36)$$

Notons que dans la deuxième composante,  $\cos \varphi$  disparaît finalement du dénominateur car, pour  $p > 0$ ,  $P_n^{(p)}(\sin \varphi)$  contient toujours  $\cos \varphi$  en facteur (cf. [Tableau 4](#) ou la formule (4.17)).

Avec les valeurs de  $J_2, J_3$  etc. vues précédemment pour les planètes, l'accélération réelle due à la gravitation reste toujours assez voisine de l'accélération principale képlérienne en  $\frac{KM}{r^2}$  ; cependant, l'accélération réelle n'étant plus exactement centrale, la loi des aires est seulement approchée et l'orbite d'un satellite n'est généralement plus confinée dans un plan. On verra dans la Partie 5 (en (5.31) par exemple) comment les termes non képlériens perturbent le mouvement des satellites. Avant cela, il est déjà intéressant d'évaluer le rapport  $A_1/A_0$  entre  $A_1$ , le plus gros des termes non képlériens (celui en  $J_2$ ), et  $A_0$ , le terme képlérien ( $A_0 = KM/r^2$ ). On trouve, quelque soit  $\varphi$  :

$$\left| \frac{A_1}{A_0} \right| \leq 3 J_2 \frac{a_e^2}{r^2}$$

Ce rapport caractérise l'ordre de grandeur de la *perturbation* qui est engendrée par la non-sphéricité de la planète. On voit que ce rapport diminue très rapidement lorsque  $r$  augmente ; par exemple, voici l'influence de la non-

sphéricité de la Terre sur divers objets proches :

| influence de la forme de la Terre sur : | un satellite proche<br>( $r \approx a_e$ ) | un satellite géostationnaire<br>( $r = 6,6 a_e$ ) | la Lune<br>( $r = 60 a_e$ ) | Vénus<br>( $r = 6000 a_e$ ) |
|---|--|---|-----------------------------|-----------------------------|
| $\left  \frac{A_1}{A_0} \right  \leq$   | $3 \cdot 10^{-3}$                          | $7 \cdot 10^{-5}$                                 | $9 \cdot 10^{-7}$           | $9 \cdot 10^{-11}$          |

Des évaluations analogues faites pour d'autres planètes montrent la légitimité de considérer les planètes comme ponctuelles lorsqu'on s'intéresse à leurs interactions mutuelles ; la forme des planètes n'intervient sensiblement que dans leur voisinage immédiat, essentiellement pour leurs propres satellites. C'est d'ailleurs dans ce voisinage immédiat que se manifestent aussi d'autres forces, non gravitationnelles, que nous allons voir maintenant.

## 16. Forces dues à la trainée atmosphérique

Pb<sub>8</sub>  
Pb<sub>11</sub>

### 16.1. Principes

Un objet en mouvement dans une atmosphère subit le choc des particules qui la composent. Dans le milieu raréfié où évoluent les satellites, le libre parcours moyen de ces particules est grand (quelques kilomètres) par rapport aux dimensions du satellite et il est alors possible d'étudier ce choc de la façon suivante, qui correspond à un écoulement moléculaire libre où la pression ne joue aucun rôle direct :

Considérons un satellite  $S$  de masse  $m$ , animé de la vitesse absolue  $\dot{\mathbf{r}}$  dans un milieu de masse volumique  $\rho$  possédant une vitesse absolue moyenne  $\mathbf{V}_a$  (vitesse d'ensemble des particules) ;  $\mathbf{V}_a$  pourra être de la forme  $\omega \wedge \mathbf{r}$  si le mouvement d'ensemble de l'atmosphère est une rotation analogue à celle de la planète. En fait, on considérera que toutes les particules  $p$  qui viennent frapper le satellite ont la même vitesse  $\mathbf{V}_p$ , égale à  $\mathbf{V}_a$ .

Pendant le temps  $\Delta t$ , le satellite  $S$  balaye un volume  $\Delta V$  d'atmosphère égal à :

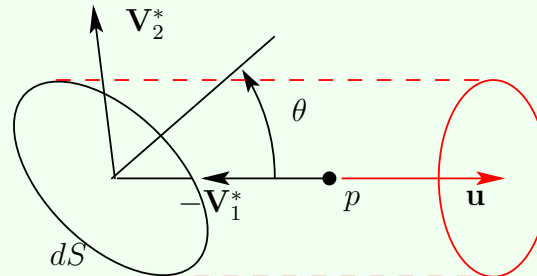
$$\Delta V = A |\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{V}_a| \Delta t$$

où  $A$  est l'aire de la section de choc du satellite, orthogonale à la vitesse relative  $\mathbf{V}^*$  du satellite par rapport à l'atmosphère :  $\mathbf{V}^* = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{V}_a$  ; cette aire est considérée comme constante pendant le temps  $\Delta t$ . Les chocs ont pour effet de modifier la quantité de mouvement du satellite, ainsi que celle de toutes les particules heurtées, mais la quantité de mouvement de l'ensemble reste inchangée. En notant  $m\delta\dot{\mathbf{r}}$  la variation de quantité de mouvement de  $S$  et  $\mu_p\delta\mathbf{V}_p$  celle d'une particule  $p$  de masse  $\mu_p$ , on a donc :

$$m\delta\dot{\mathbf{r}} + \sum_p \mu_p\delta\mathbf{V}_p = 0$$

où la sommation s'étend à toutes les particules présentes dans  $\Delta V$ . Le changement  $\delta\mathbf{V}_p$  dans la vitesse des

particules dépend de l'angle d'incidence de celles-ci sur les parois du satellite et de la nature de ces parois, conduisant soit à une réflexion, soit à une diffusion plus ou moins parfaite.



Soit  $dS$  un petit élément de paroi, dont la normale (dirigée vers l'extérieur du satellite) fait l'angle  $\theta$  avec le vecteur vitesse relative du satellite par rapport aux particules. Notons  $\mathbf{V}_1^* = V_1^* \mathbf{u}$  cette vitesse. On peut aussi considérer que les particules viennent frapper le satellite avec la vitesse  $-\mathbf{V}_1^*$ . Supposons une surface parfaitement réfléchissante. Après le choc, la vitesse des particules,  $\mathbf{V}_2^*$ , fait l'angle  $2\theta$  avec  $\mathbf{u}$ , mais son module est inchangé. Les particules subissent donc la variation de vitesse :  $\delta \mathbf{V}_p = \mathbf{V}_2^* - (-\mathbf{V}_1^*)$ . En projection sur  $\mathbf{u}$ , on obtient :

$$\delta \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{V}_1^*|(1 + \cos 2\theta)$$

Le nombre des particules qui frappent ainsi  $dS$  dans le temps  $\Delta t$  est égal à :  $\frac{\rho}{\mu_p} \Delta V = \frac{\rho}{\mu_p} dS \cos \theta |\mathbf{V}_1^*| \Delta t$ . L'ensemble des particules présentes dans le volume  $\Delta V$  balayé par le satellite subit donc le changement de quantité de mouvement suivant, en projection sur  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{u} \cdot \sum_p \mu_p \delta \mathbf{V}_p = \left[ \int_S \rho |\mathbf{V}_1^*|^2 \cos \theta (1 + \cos 2\theta) dS \right] \Delta t$$



Si le satellite est symétrique par rapport à l'axe  $G\mathbf{u}$  (où  $G$  est le centre de masse du satellite), il n'y a pas d'autre composante ; dans le cas contraire, l'autre composante, orthogonale à  $\mathbf{u}$ , est généralement très petite et n'affecte pratiquement pas le mouvement de  $G$  (elle affecterait plutôt le mouvement de rotation du satellite sur lui-même autour de  $G$ , c'est-à-dire l'*attitude* du satellite). En supposant donc une seule composante suivant  $\mathbf{u}$ , on obtient :

$$m\delta\dot{\mathbf{r}} = - \left[ \int_S \cos\theta(1 + \cos 2\theta) dS \right] \rho |\mathbf{V}_1^*| \mathbf{V}_1^* \Delta t$$

En faisant tendre  $\Delta t$  vers zéro,  $m\frac{\delta\dot{\mathbf{r}}}{\Delta t}$  tend vers  $m\Gamma_f$ , qui représente la force due au frottement atmosphérique :

$$m\Gamma_f = - \left[ \int_S \cos\theta(1 + \cos 2\theta) dS \right] \rho |\mathbf{V}_1^*| \mathbf{V}_1^* \tag{4.37}$$

Cette force est opposée à la vitesse relative du satellite par rapport à l'atmosphère.

Si le satellite est sphérique, de rayon  $R$ , on obtient :

$$m\Gamma_f = -\pi R^2 \rho |\mathbf{V}_1^*| \mathbf{V}_1^*$$

où l'on reconnaît  $A = \pi R^2$ , section de choc de la sphère.

Par analogie, si le satellite est de forme quelconque et si les propriétés reflectives des parois sont également quelconques, on adopte la loi du frottement suivante :

$$m\Gamma_f = -\frac{C_D}{2} A \rho |\mathbf{V}^*| \mathbf{V}^* \tag{4.38}$$

Le coefficient  $C_D$  caractérise l'aérodynamisme du satellite dans la direction de  $\mathbf{V}^*$  et les qualités de réflexion ou de diffusion de ses parois ( $C_D$  pour "Drag Coefficient", ou *coefficient de trainée atmosphérique*). Pour une sphère parfaitement réfléchissante, on a  $C_D = 2$ .

## 16.2. Modélisation des forces de frottement atmosphérique

On pourrait penser que l'expression (4.38) permette de calculer facilement l'effet du frottement atmosphérique à tout instant. Ce serait vrai si l'on connaissait parfaitement les paramètres  $C_D$ ,  $A$ ,  $\rho$  et  $\mathbf{V}^*$  à tout instant. En pratique, il est nécessaire de passer par une modélisation de ces paramètres, opération délicate si l'on désire une grande précision.

Tout d'abord,  $C_D$  est très difficile à modéliser : Il dépend de la géométrie externe du satellite, des propriétés réfléchissantes et émissives des différentes surfaces qui forment ses parois, ainsi que de la température et de la densité du milieu ambiant qui conditionnent le type d'écoulement des particules et leur interaction avec le satellite. Dans les modèles simples, lorsque les dimensions du satellite restent faibles devant le libre parcours moyen des particules, on adopte une valeur moyenne, voisine de 2.

La section de choc  $A$  dépend quant-à-elle de la position du satellite sur son orbite et de son attitude : Cette section varie généralement si le satellite tourne sur lui-même, mais devient quasi-constante si l'attitude est stabilisée par rapport à la Terre et si l'orbite est quasi circulaire. On adopte en général une valeur moyenne pour  $A$ , calculée suivant la forme du satellite et en tenant compte du mouvement orbital et du mouvement en attitude.

Quant-à la masse volumique de l'atmosphère,  $\rho$ , c'est le paramètre le plus complexe car susceptible de variations très grandes et très rapides. Il dépend essentiellement de l'altitude du satellite dans l'atmosphère, mais aussi de la latitude du lieu survolé, de la température de l'atmosphère, elle-même fonction de sa position par rapport au Soleil et à la Terre (éclairage), de la saison, de l'activité solaire. En fait, ce sont les satellites eux-mêmes qui ont permis la mesure de  $\rho$  en diverses circonstances. Le **Tableau 5** donne ainsi les valeurs extrêmes de  $\rho$  observées en fonction de l'altitude ; elles représentent essentiellement les variations de  $\rho$  lorsque la température varie entre 500 K et 2000 K.

**Tableau 5.** Valeurs extrêmes de la masse volumique  $\rho$  de l'atmosphère terrestre en fonction de l'altitude  $h$ ; la quantité  $a$  représente la distance géocentrique :  $a = R + h$  où  $R$  est le rayon de la Terre.

| altitude $h$<br>km | $\rho_{\min}$<br>$\text{kg m}^{-3}$ | $\rho_{\max}$<br>$\text{kg m}^{-3}$ | $a \rho_{\max}$<br>$\text{kg m}^{-2}$ |
|--------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 2000               | $10^{-16}$                          | $5 \cdot 10^{-14}$                  |                                       |
| 1000               | $10^{-15}$                          | $5 \cdot 10^{-12}$                  | $4 \cdot 10^{-5}$                     |
| 600                | $10^{-14}$                          | $3 \cdot 10^{-11}$                  |                                       |
| 400                | $10^{-13}$                          | $5 \cdot 10^{-10}$                  | $3,4 \cdot 10^{-3}$                   |
| 300                | $10^{-12}$                          | $1 \cdot 10^{-10}$                  |                                       |
| 200                | $10^{-10}$                          | $2 \cdot 10^{-9}$                   |                                       |
| 150                | $10^{-9}$                           | $5 \cdot 10^{-8}$                   | 0,32                                  |
| 120                | $3 \cdot 10^{-7}$                   | $3 \cdot 10^{-7}$                   |                                       |

Il faut surtout noter les variations importantes de  $\rho$  avec l'altitude, et une moindre dépendance de  $\rho$  vis-à-vis de la température à  $h$  fixé lorsque l'altitude diminue.

Enfin, la vitesse relative  $V^*$  du satellite par rapport à l'atmosphère est sans doute le paramètre le mieux connu si le satellite est suivi régulièrement. On suppose généralement que la vitesse de l'atmosphère est celle due à l'entraînement par la Terre :  $V_a = \omega \wedge \mathbf{r}$  où  $\omega$  est le vecteur rotation de la Terre (1 tour par jour). Celle-ci est faible, comparée à  $\dot{\mathbf{r}}$ , vitesse du satellite : Elle vaut  $540 \text{ m s}^{-1}$  à 1000 km d'altitude, pour une vitesse orbitale de l'ordre de  $8000 \text{ m s}^{-1}$  à cette altitude. En conséquence, la force  $m\Gamma_f$  est souvent considérée comme directement opposée à la vitesse orbitale du satellite. On en verra les conséquences exactes dans la partie 5 (en (5.27) par exemple). On peut cependant déjà voir que si on applique une force opposée à la vitesse, l'énergie du satellite diminue ; la constante de l'énergie du mouvement képlérien,  $-\frac{KM}{a}$ , devient encore plus négative sous l'effet du frottement, ce qui correspond à une diminution du demi-grand axe  $a$  et à la chute du satellite vers la Terre.

Finalement, on devine la complexité du modèle si l'on désire une grande précision dans la prédiction du mouvement d'un satellite (surtout à basse altitude, en dessous de 200 km). Seule l'intégration numérique de l'équation du mouvement :  $\ddot{\mathbf{r}} = \text{grad}U + \mathbf{\Gamma}_f$ , permet d'utiliser un modèle complexe des forces de frottement. L'étude analytique du mouvement n'est réalisable qu'avec un modèle simplifié où, pratiquement, les paramètres  $C_D$  et  $A$  (et éventuellement  $\rho$ ) sont remplacés par leur valeur moyenne.

### 16.3. Nature perturbative des forces de frottement

Comme pour les effets dus à la non-sphéricité des planètes, on peut évaluer le rapport  $A_1/A_0$  entre la force due au frottement et celle due à la gravitation. En considérant, pour simplifier, que l'orbite est sensiblement circulaire de rayon  $a$ , la composante principale de l'attraction vaut :  $A_0 = \frac{KM}{a^2}$ . On a donc :

$$\left| \frac{A_1}{A_0} \right| = \frac{|\mathbf{\Gamma}_f| a^2}{KM} = \frac{1}{KM} \frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} a^2 \rho V^{*2}$$

En assimilant  $V^{*2}$  à  $\frac{KM}{a}$ , comme pour un mouvement képlérien circulaire, on obtient :

$$\left| \frac{A_1}{A_0} \right| = \frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} a \rho$$

On voit que c'est le rapport  $\frac{A}{m}$  qui caractérise en partie la perturbation : Avec  $A$  de l'ordre du mètre carré et  $m$  de l'ordre de la tonne,  $\frac{A}{m}$  est de l'ordre de  $10^{-3} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$  ; ainsi, un satellite compact et massif est moins sensible au frottement atmosphérique qu'un autre ressemblant à un ballon pour lequel  $\frac{A}{m}$  peut être de l'ordre de l'unité !

Avec  $\frac{A}{m} = 10^{-3} \text{ m}^2\text{kg}^{-1}$  et les valeurs de  $a \rho_{\text{max}}$  données dans le **Tableau 5**, on voit que  $\left| \frac{A_1}{A_0} \right|$  est compris entre  $10^{-4}$  et  $10^{-8}$  lorsque l'altitude passe de 150 km à 1000 km. Ces valeurs montrent bien que le frottement peut être considéré comme une perturbation du mouvement képlérien.

## 17. Forces dues à la pression de radiation

On peut introduire ce type de forces par un raisonnement analogue à celui fait pour le frottement atmosphérique :

Un élément de surface  $dS$  exposé à une source de rayonnement située dans une direction  $\mathbf{u}$  faisant l'angle  $\theta$  avec la normale à  $dS$ , reçoit l'énergie  $E dS \cos \theta \Delta t$  dans le temps  $\Delta t$  ; la quantité  $E$  représente l'éclairement, exprimé par exemple en Watts par  $\text{m}^2$ . L'énergie d'un photon, associé au rayonnement de fréquence  $\nu$ , vaut  $h\nu$  où  $h$  est la constante de Planck. Se déplaçant avec la vitesse  $c$ , ce photon a une masse équivalente  $\mu$  qui peut être définie par :  $h\nu = \mu c^2$  ; il a une quantité de mouvement  $\mu c$ , c'est-à-dire  $-\mu c \mathbf{u}$  si il participe à l'éclairement de  $dS$ . S'il est parfaitement réfléchi par  $dS$ , la variation de sa quantité de mouvement, en projection sur  $\mathbf{u}$ , est  $\mu c (1 + \cos 2\theta)$ . Le nombre de photons reçus par  $dS$  pendant le temps  $\Delta t$  étant égal à  $\frac{2E dS \cos \theta \Delta t}{\mu c^2}$ , la conservation de la quantité de mouvement totale permet alors d'écrire :

$$m \delta \dot{\mathbf{r}} + \int_S \frac{2E dS \cos \theta}{\mu c^2} \mu c (1 + \cos 2\theta) \Delta t \mathbf{u} = 0$$

d'où l'on déduit la force due au choc des photons sur toute la surface éclairée :

$$m \mathbf{\Gamma}_{pr} = -\frac{2E}{c} \int_S \cos \theta (1 + \cos 2\theta) dS \mathbf{u}$$

La quantité  $\frac{E}{c}$  représente une pression, appelée *pression de radiation*.

Dans le cas d'une surface quelconque, dont l'aire projetée dans la direction du rayonnement est  $A$ , on a ainsi :

$$m\Gamma_{pr} = -\frac{kE}{c} A \mathbf{u}$$

où  $k$  est un coefficient dépendant de la nature de l'interaction des photons sur la surface du satellite (réflexion, diffusion ou absorption) ;  $k$  est de l'ordre de l'unité.

Dans le cas d'un éclairage par le Soleil, dans le voisinage de la Terre, on a un éclairage global (toutes fréquences confondues) égal à :  $E_0 = 1380 \text{ W m}^{-2}$  ; avec  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ , on obtient une pression égale à  $\frac{E_0}{c} = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ N m}^{-2}$ . C'est la constante solaire de pression de radiation au voisinage de la Terre. Or, l'éclairage d'un objet situé à une distance  $r$  d'une source varie en  $1/r^2$ . Donc, un satellite éclairé par le Soleil et situé à la distance  $r$  de celui-ci subit la force suivante, due à la pression de radiation :

$$m\Gamma_{pr} = -\frac{kE_0}{c} \frac{r_0^2}{r^2} A \mathbf{u}$$

où  $r_0$  représente la distance Terre-Soleil.

Pour un satellite de la Terre, le calcul de  $\left| \frac{A_1}{A_0} \right|$ , rapport entre l'accélération due à la pression de radiation solaire et celle d'un mouvement képlérien, donne une valeur de l'ordre de  $10^{-8}$  en supposant  $\frac{A}{m} = 10^{-3}$ . Il s'agit bien encore d'une perturbation. Dans certains cas exigeant une très grande précision, on tient compte en outre de la pression de radiation due aux rayonnements renvoyés par la Terre et par la Lune. Les effets sont d'autant plus importants que  $\frac{A}{m}$  est plus grand, par exemple sur des satellites apparentés aux ballons, ou sur les objets de très faible masse comme les poussières interplanétaires.

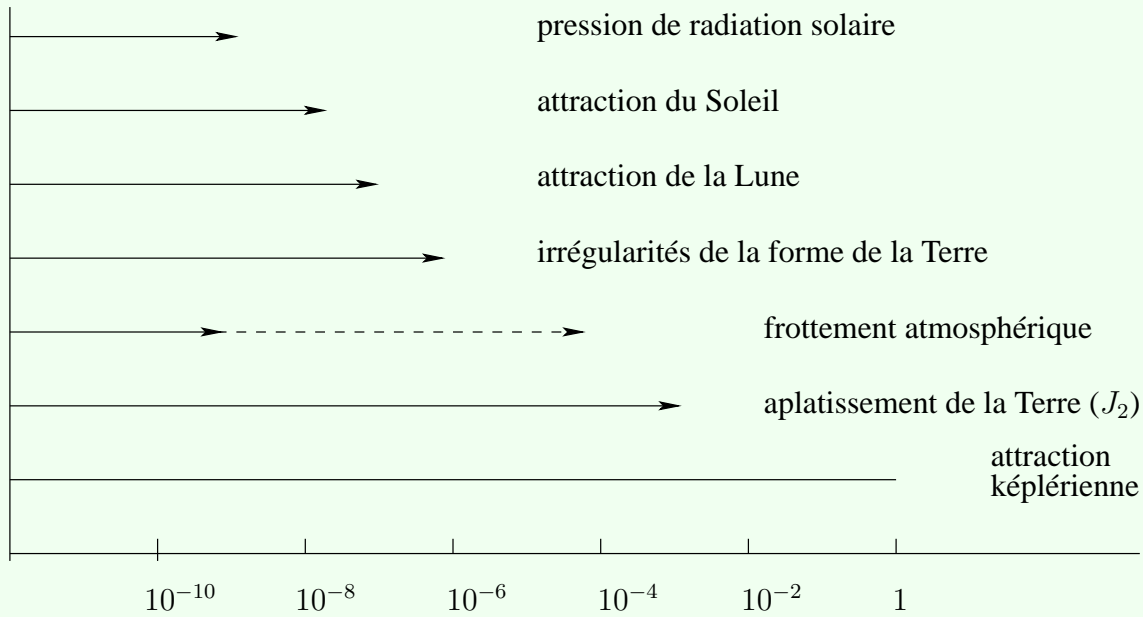
Si le satellite a une forme simple et des propriétés bien connues quant-à la réflectivité de ses surfaces, les forces de pression de radiation sont assez bien modélisables. Cependant, ces forces peuvent être des fonctions discontinues du temps si le satellite a un mouvement qui le fait passer dans le cône d'ombre de la Terre par exemple. Dans ce cas, c'est par l'intégration numérique des équations du mouvement que l'on peut tenir compte de la pression de radiation.

## 18. Autres forces agissant sur les satellites de la Terre

Ce sont essentiellement des forces gravitationnelles dues au Soleil et à la Lune. On verra à propos du problème des 3 corps (en (6.18) puis (6.34)) que les perturbations d'un satellite par l'un de ces astres sont assimilables à des accélérations dont le module est de l'ordre de  $\frac{K m' r}{r'^3}$ , où  $m'$  désigne la masse de l'astre perturbateur,  $r'$  la distance de cet astre à la Terre et  $r$  celle du satellite à la Terre. Comparée à l'accélération principale képlérienne  $\frac{KM}{r^2}$ , on obtient un rapport  $\left| \frac{A_1}{A_0} \right|$  de l'ordre de :  $\frac{m'}{M} \frac{r^3}{r'^3}$ .

Pour le Soleil, on a  $\frac{m'}{M} = 330\,000$ , mais  $\frac{r}{r'}$  est compris entre  $5 \cdot 10^{-5}$  et  $3 \cdot 10^{-4}$  pour des satellites compris entre une orbite basse de 7000 km de rayon et l'orbite géostationnaire (42000 km). Pour ces orbites,  $\left| \frac{A_1}{A_0} \right|$  varie donc entre  $4 \cdot 10^{-8}$  et  $8 \cdot 10^{-6}$ . Par sa proximité, la Lune a une influence plus importante que le Soleil malgré sa faible masse ( $m_L = M/81,3$ ). Pour ces mêmes satellites,  $\left| \frac{(A_1)_{Lune}}{A_0} \right|$  varie entre  $6 \cdot 10^{-8}$  et  $1,6 \cdot 10^{-5}$ .

On peut ainsi récapituler les différents effets perturbateurs sur un satellite de la Terre ayant une altitude comprise entre 150 et 1000 km :



Dans tous les cas, on peut manifestement considérer les forces autres que l'attraction centrale képlérienne comme des perturbations de cette dernière.



## Cinquième partie

# Variations des éléments d'orbite - perturbations

### 19 Le mouvement osculateur

### 20 Variations des éléments osculateurs pour $F$ quelconque

- 20.1 Variations des constantes primaires osculatrices
- 20.2 Variations des éléments osculateurs elliptiques
- 20.3 Equations de Gauss
- 20.4 Exemple d'application des équations de Gauss

### 21 Cas où $F$ dérive d'un potentiel : $F = \text{grad}_p U$

- 21.1 Utilisation des équations de Gauss
- 21.2 Application au cas du potentiel de gravitation d'une planète
- 21.3 Formulation hamiltonienne des variations des éléments d'orbite
- 21.4 Equations de Lagrange pour les éléments osculateurs
- 21.5 Exemple d'application des équations de Lagrange

### 22 Méthodes de perturbations

- 22.1 Méthode itérative classique
- 22.2 Perturbations en variables canoniques : méthode de Von Zeipel

## 19. Le mouvement osculateur

Considérons un point  $P$  repéré par rapport à un point  $O$  par le vecteur  $\mathbf{r} = \mathbf{OP} = r \mathbf{u}$ , et supposons son mouvement accéléré selon la loi suivante, somme de deux accélérations, l'une képlérienne de centre  $O$  et de constante  $\mu$ , et l'autre quelconque :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F} \quad \text{avec} \quad \mu > 0 \quad (5.1)$$

$\mathbf{F}$  est un vecteur quelconque, généralement variable, représentant l'accélération non képlérienne de  $P$  ; ce peut être une perturbation de  $P$ , mais pour le moment considérons que c'est une certaine fonction donnée de la position de  $P$ , de sa vitesse et du temps :  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  ; l'équation (5.1) représente alors une équation différentielle pour  $\mathbf{r}(t)$ .

Si  $\mathbf{F}$  est identiquement nul à tout instant, on sait, d'après la partie 3 (§3-11), que  $P$  décrit un mouvement képlérien représentable par 6 constantes ou éléments, par exemple  $(p, e, i, \Omega, \omega, t_p)$  ; on peut calculer ces éléments à un instant  $t_0$  quelconque à partir des vecteurs position et vitesse de  $P$  exprimés à cet instant dans un certain repère d'origine  $O$ , et inversement, ces éléments permettent de calculer la position et la vitesse de  $P$  à tout instant. Rappelons les quelques formules permettant de calculer les constantes d'intégration "primaires" du mouvement képlérien, directement à partir de la position et de la vitesse à un instant quelconque :

$$\mathbf{G} = \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{G}}{\mu} - \mathbf{u} \quad (5.3)$$

$$h = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{\mu}{r} \quad (5.4)$$

Le calcul de l'instant de passage au péricentre,  $t_p$ , nécessite quelques intermédiaires, rappelés ici dans le cas d'un mouvement elliptique :

$$\begin{aligned} a &= -\mu/2h & \text{et} & & n &= \sqrt{\mu/a^3} \\ e \cos E &= 1 - r/a & \text{et} & & e \sin E &= \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}/na^2 \\ n(t - t_p) &= E - e \sin E = M(t) = M_0 + n(t - t_0) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Dans la dernière relation, on a rappelé qu'à la place de la constante  $t_p$ , on utilise volontiers  $M_0$ , anomalie moyenne à un instant  $t_0$  donné.

Il est bien sûr plus commode de décrire le mouvement par l'intermédiaire de 6 constantes : alors que dans l'espace  $\mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$  des position-vitesse (de dimension 6), la trajectoire de  $P$  est représentée par une conique de foyer  $O$  et par un cercle-hodographe, dans l'espace  $\mathcal{K}_\mu$  des mouvements képlériens de foyer  $O$  et de constante  $\mu$  (également de dimension 6), elle est représentée par un point fixe (défini par exemple par  $(p, e, i, \Omega, \omega, t_p)$ , sauf singularité ou dégénérescence éventuelle).

Si  $\mathbf{F}$  n'est plus nul, le mouvement de  $P$  n'est plus képlérien, mais il existe, à tout instant, un *mouvement képlérien tangent* au mouvement réel : c'est le mouvement képlérien instantané défini par  $\mathbf{r}$  et  $\dot{\mathbf{r}}$  à cet instant. C'est aussi le mouvement képlérien que décrirait  $P$  si, à partir de cet instant,  $\mathbf{F}$  demeurerait nul. Ce mouvement instantané est appelé *mouvement képlérien osculateur* ; les éléments d'orbite correspondants sont des *éléments osculateurs*. On se propose d'établir la façon dont ils varient en fonction de  $\mathbf{F}$ .

Tant que  $\mathbf{F}$  n'est pas nul, entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , la vitesse  $\dot{\mathbf{r}}$  varie d'une façon différente de celle d'un mouvement képlérien car dans ce cas on aurait :

$$(\dot{d\mathbf{r}})_{\text{képlérien}} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} dt \quad \text{alors qu'on a :} \quad d\dot{\mathbf{r}} = \left( -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F} \right) dt$$

Le mouvement képlérien osculateur associé aux valeurs de  $\mathbf{r}$  et  $\dot{\mathbf{r}}$  à l'instant  $t + dt$ , est alors représenté par des éléments  $\mathbf{G}$ ,  $e$ ,  $t_p$  ou  $M_0$  différents de ceux qu'on avait à l'instant  $t$  : les éléments d'orbite que l'on peut calculer

à chaque instant à partir de  $\mathbf{r}$  et  $\dot{\mathbf{r}}$  sont ainsi des fonctions du temps. Autrement dit, dans l'espace  $\mathcal{K}_\mu$ , le point représentant le mouvement de  $P$  n'est plus fixe mais décrit une courbe en fonction du temps. Cependant, l'intérêt d'étudier les variations des éléments d'orbite n'est justifié que si ces variations sont d'une certaine façon plus faibles que celles de  $\mathbf{r}$  et de  $\dot{\mathbf{r}}$ .

En fait, l'utilisation des éléments osculateurs se justifie surtout dans le cas où  $\mathbf{F}$  représente une perturbation, c'est-à-dire une accélération petite par rapport à l'accélération képlérienne : on verra en effet que les variations des éléments d'orbite sont alors petites ou lentes, et qu'elles restent finalement bornées dans un intervalle de temps suffisamment grand. Ainsi, bien que le formulaire que l'on va établir soit valable quelque soit  $\mathbf{F}$ , on ne l'utilisera que pour des perturbations du mouvement képlérien ; par ailleurs, comme la majorité des applications pratiques concerne des perturbations de mouvements képlériens elliptiques, on supposera que les éléments osculateurs restent de type elliptique quelque soit  $t$ . Les éléments osculateurs dont on se propose de rechercher les variations en fonction de  $t$  seront donc ceux du mouvement elliptique, par exemple  $(a, e, i, \Omega, \omega, M_0)$ , ou d'autres qui s'en déduisent comme en (3.45) à (3.49). Notons cependant qu'avec  $M_0 = M(t_0)$ , comme on fait  $t_0 = t$  à chaque instant, il reste  $M_0 = M(t)$  : l'anomalie moyenne est ainsi considérée comme un élément osculateur.

On va d'abord exprimer les variations des éléments osculateurs dans le cas général où  $\mathbf{F}$  est un vecteur quelconque, puis dans le cas particulier, mais fréquent en Mécanique Céleste, où  $\mathbf{F}$  dérive d'un potentiel.

**Remarque 1.** Même dans le cas où  $\mathbf{F}$  est une perturbation, la description du mouvement de  $P$  par une suite continue de mouvements képlériens osculateurs n'est pas toujours la meilleure représentation du mouvement réel. Par exemple, on peut imaginer ce cas simple d'un mouvement réel circulaire représenté à chaque instant par un mouvement osculateur képlérien elliptique : il suffit de considérer une accélération radiale du type  $\mathbf{F} = F(r) \mathbf{u}$ . Le mouvement circulaire uniforme est alors une des solutions possibles de l'équation (5.1) car alors le mouvement est plan et, dans ce plan, en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , on a la loi des aires  $r^2 \dot{\theta} = C$  et  $\dot{\theta}$  constant pour  $r$  constant ; de l'accélération radiale  $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\mu/r^2 + F(r)$  où  $\ddot{r} = 0$ , on déduit la vitesse constante  $V$  sur ce cercle :  $V^2 = r^2 \dot{\theta}^2 = \mu/r - rF(r)$ . Or dans le mouvement circulaire képlérien de foyer  $O$  et de constante  $\mu$ ,

la vitesse “circulaire”  $V_c$  à la distance  $r$  vérifie :  $V_c^2 = \mu/r$ . Comme la vitesse réelle est différente de cette vitesse circulaire, l’orbite képlérienne osculatrice n’est pas un cercle : suivant le signe de  $F(r)$ , la vitesse réelle  $V$  est inférieure ou supérieure à  $V_c$  mais sa direction est toujours orthogonale au rayon vecteur ; si  $F$  est positif (c’est-à-dire  $V < V_c$ ),  $P$  est alors à l’apocentre d’une ellipse osculatrice de foyer  $O$ , de constante  $\mu$ , d’excentricité  $e$  telle que  $V^2 = V_c^2(1 - e)$  et de demi-grand axe  $a$  tel que  $a(1 + e) = r$  ; comme cette situation est permanente, c’est que la direction du grand axe de cette orbite osculatrice tourne autour de  $O$  à la même vitesse  $\dot{\theta}$  que le point  $P$ . Ainsi, le mouvement réel circulaire est ici représenté par un mouvement osculateur elliptique d’excentricité et de demi-grand axe constants et cette ellipse tourne avec  $P$  de telle sorte que  $P$  se trouve en permanence à l’apocentre : l’anomalie moyenne osculatrice est alors constante et égale à  $\pi$ , et la longitude du péricentre varie à vitesse constante, comme  $\theta$ . On a un résultat analogue si  $F$  est négatif : l’orbite osculatrice n’est plus forcément une ellipse, mais  $P$  se retrouve en permanence au péricentre d’une conique osculatrice de foyer  $O$ , de constante  $\mu$ , d’excentricité et de paramètre constants (donnés par  $V^2 = V_c^2(1 + e)$  et  $p = r(1 + e)$ ), et dont l’axe tourne autour de  $O$  à la même vitesse que  $P$ .

**Remarque 2.** L’orbite osculatrice képlérienne n’est pas en général située dans le plan osculateur de la trajectoire au sens des mathématiciens, ce dernier étant le plan passant par  $P$  et contenant les vecteurs  $\dot{\mathbf{r}}$  et  $\ddot{\mathbf{r}}$ . Au contraire, comme on le voit avec la formule (5.2), le plan du mouvement képlérien osculateur est celui passant par  $P$  et contenant les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\dot{\mathbf{r}}$ .

## 20. Variations des éléments osculateurs pour $F$ quelconque

Les constantes d’intégration du mouvement képlérien sont exprimables sous une forme plus ou moins explicite des vecteurs position et vitesse, comme en (5.2) à (5.5). En notant  $\sigma$  l’une quelconque de ces constantes, on

peut donc condenser le formulaire définissant cette constante dans la notation :

$$\sigma = S(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

Dans un mouvement képlérien on a naturellement :  $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ , c'est-à-dire aussi :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial S}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial S}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3}\right) = 0$$

Dans un mouvement képlérien perturbé par  $\mathbf{F}$  on aura alors<sup>3</sup> :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial S}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}\right) = \frac{\partial S}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \mathbf{F}$$

Cette façon de procéder revient à considérer pour chaque variable deux sortes de variations : une variation képlérienne et une autre non képlérienne. Ainsi, dans le mouvement réel, la vitesse  $\dot{\mathbf{r}}$  a comme variation :

$$\left(\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt}\right)_{r\acute{e}el} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}$$

Elle est décomposée en variations képlérienne et non képlérienne :

$$\left(\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt}\right)_K = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt}\right)_{nK} = \mathbf{F}$$

Au contraire, la variation non képlérienne de  $\mathbf{r}$  est nulle car le mouvement osculateur est défini à partir des mêmes vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\dot{\mathbf{r}}$  que dans le mouvement réel :

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{r\acute{e}el} = \dot{\mathbf{r}} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_K \quad \implies \quad \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{nK} = 0$$

---

<sup>3</sup>Si  $(x, y, z)$  sont les composantes cartésiennes d'un vecteur  $\mathbf{V}$ , la notation  $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{V}}$  représente le vecteur de composantes  $(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z})$ .

Dans la suite, on posera :  $\frac{\delta}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{nK}$ . L'opérateur  $\delta$  correspond donc aux variations non képlériennes, c'est-à-dire à celles provoquées par la présence de  $\mathbf{F}$ . On aura ainsi :

$$\boxed{\frac{\delta \dot{\mathbf{r}}}{dt} = \mathbf{F}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\delta \mathbf{r}}{dt} = 0} \quad (5.6)$$

Avec  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}$ , cela implique encore :  $\frac{\delta r}{dt} = 0$  et  $\frac{\delta \mathbf{u}}{dt} = 0$

Quant aux constantes d'intégration du mouvement képlérien, leur variabilité ne peut provenir que de  $\mathbf{F}$  ; pour celles-ci ou pour les éléments d'orbite on a donc :

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{\text{réel}} = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_K + \frac{\delta\sigma}{dt} = 0 + \frac{\delta\sigma}{dt}$$

Pour ces constantes, on aura donc l'identité :  $\frac{d\sigma}{dt} \equiv \frac{\delta\sigma}{dt}$ .

### 20.1. Variations des constantes primaires oscultrices

Appliquons l'opérateur  $\delta$  aux expressions (5.2) à (5.4) ; tenant compte de (5.6), on obtient :

$$\frac{\delta \mathbf{G}}{dt} = \frac{\delta}{dt}(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \wedge \frac{\delta \dot{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} \quad \implies \quad \boxed{\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}} \quad (5.7)$$

puis :

$$\frac{\delta(\mu \mathbf{e})}{dt} = \frac{\delta}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{G} - \mu \mathbf{u}) = \frac{\delta \dot{\mathbf{r}}}{dt} \wedge \mathbf{G} + \dot{\mathbf{r}} \wedge \frac{\delta \mathbf{G}}{dt} - \mu \frac{\delta \mathbf{u}}{dt} = \mu \frac{d\mathbf{e}}{dt}$$

soit :

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\mathbf{e}}{dt} &= \mathbf{F} \wedge (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) + \dot{\mathbf{r}} \wedge (\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}) \\ &= 2\mathbf{r} (\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{F} (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \end{aligned} \tag{5.8}$$

et enfin :

$$\frac{\delta h}{dt} = \frac{\delta}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{\mu}{r} \right) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\delta \dot{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dh}{dt} \implies \frac{dh}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \tag{5.9}$$

**Exercice** Avec  $G^2 = \mu p = \mathbf{r} \cdot (\mu \mathbf{e} + \mu \mathbf{u})$ , on en déduit encore les relations suivantes :



$$\mu \frac{dp}{dt} = 2\mathbf{G} \cdot \frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mu \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{e}}{dt} = 2r^2 \frac{dh}{dt} - 2r^2 \dot{r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) \tag{5.10}$$

Ces expressions sont valables quelque soit la nature du mouvement osculateur, qu'il soit elliptique ou hyperbolique.

## 20.2. Variations des éléments osculateurs elliptiques

Nous nous intéressons aux éléments  $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ . Parmi eux,  $(\Omega, i, \omega)$  sont les angles d'Euler permettant de passer d'un repère galiléen de référence  $R_0 = O\mathbf{i}_0\mathbf{j}_0\mathbf{k}_0$ , au repère propre du mouvement osculateur  $R_1 = O\mathbf{u}_0\mathbf{v}_0\mathbf{k}$  (avec  $\mathbf{e} = e \mathbf{u}_0$  et  $\mathbf{G} = G \mathbf{k}$ , cf. §3-12.1). Ces angles étant maintenant des variables, leurs variations définissent le vecteur rotation instantané de  $R_1$  par rapport à  $R_0$  :

$$\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} = \frac{d\Omega}{dt} \mathbf{k}_0 + \frac{di}{dt} \mathbf{n} + \frac{d\omega}{dt} \mathbf{k} \tag{5.11}$$



où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire de la direction du nœud ascendant. Dans la suite, on utilisera aussi la base locale orthonormée directe ( $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{k}$ ).

Les variations de  $i$  et  $\Omega$  proviennent de celles de la normale au plan osculateur, c'est-à-dire de celles de  $\mathbf{G}$ . Or on peut écrire :

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{dG}{dt} \mathbf{k} + \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{G}$$

En identifiant cette expression à celle trouvée en (5.7) et en projetant successivement sur les vecteurs unitaires  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{k} \wedge \mathbf{n}$  et  $\mathbf{k}$ , on obtient :

$$G \sin i \frac{d\Omega}{dt} = r \sin(\omega + w) (\mathbf{F} \cdot \mathbf{k}) \tag{5.12}$$

$$G \frac{di}{dt} = r \cos(\omega + w) (\mathbf{F} \cdot \mathbf{k}) \tag{5.13}$$

$$\frac{dG}{dt} = r (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \tag{5.14}$$

Les variations de  $e$  et de  $\omega$  proviennent de celles du vecteur  $\mathbf{e}$ . Or on peut écrire :

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{de}{dt} \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{e} \tag{5.15}$$

**Exercice** En identifiant cette expression à celle trouvée en (5.8) et en projetant successivement sur les vecteurs unitaires  $\mathbf{u}_0$  et  $\mathbf{v}_0$ , on obtient :

$$\mu \frac{de}{dt} = 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_0)(\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}_0)(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0)(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \tag{5.16}$$



$$\mu e \left( \frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) = 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0)(\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_0)(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_0)(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \quad (5.17)$$

Quant aux variations de  $a$ , elles se déduisent facilement de celles de  $h$  obtenues en (5.9) puisque dans le mouvement osculateur tout le formulaire du mouvement képlérien reste vrai :

$$a = -\frac{\mu}{2h} \quad \implies \quad \frac{da}{dt} = \frac{\mu}{2h^2} \frac{dh}{dt} = \frac{2a^2}{\mu} \frac{dh}{dt} \quad \implies \quad \frac{\mu}{a^2} \frac{da}{dt} = 2 \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (5.18)$$

Enfin, les variations de l'anomalie moyenne  $M$  proviennent de deux parties :

$$\frac{dM}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right)_K + \frac{\delta M}{dt} = n + \frac{\delta M}{dt}$$

$n$  est ici le moyen mouvement osculateur, c'est-à-dire lié à chaque instant au demi-grand axe par la troisième loi de Kepler :  $n^2 a^3 = \mu$ . Il est donc variable, tout comme  $a$ , et ses variations sont données par :

$$\frac{2}{n} \frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a} \frac{da}{dt} \quad (5.19)$$

$n$  est alors une simple notation venant à la place de  $\sqrt{\mu/a^3}$  ; sa valeur à l'instant  $t$ , résulte de celle de  $a$  ; si  $n = n_0$  à un instant  $t_0$ , on obtient  $n(t)$  en intégrant les variations de  $a$  jusqu'à l'instant  $t$  :

$$n(t) = n_0 + \int_{t_0}^t dn = n_0 - \frac{3}{2} \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} dt \quad (5.20)$$

Les variations non képlériennes de  $M$  sont plus compliquées à calculer. Appliquons d'abord l'opérateur  $\delta$  à l'expression (5.5) :

$$\frac{\delta M}{dt} = \frac{\delta}{dt}(E - e \sin E) = (1 - e \cos E) \frac{\delta E}{dt} - \sin E \frac{\delta e}{dt} = \frac{r}{a} \frac{\delta E}{dt} - \sin E \frac{de}{dt} \quad (5.21)$$

On a par ailleurs :

$$\frac{\delta r}{dt} = 0 = \frac{\delta}{dt}(a(1 - e \cos E)) = \frac{r}{a} \frac{da}{dt} - a \cos E \frac{de}{dt} + ae \sin E \frac{\delta E}{dt}$$

En reportant dans cette expression la quantité  $\frac{\delta E}{dt}$  tirée de (5.21), il vient d'abord :

$$e \sin E \frac{\delta M}{dt} = \left( \frac{r}{a} \cos E - e \sin^2 E \right) \frac{de}{dt} - \frac{r^2}{a^3} \frac{da}{dt}$$

puis :

$$e \sin w \frac{\delta M}{dt} = \sqrt{1 - e^2} \left( \cos w \frac{de}{dt} - \frac{r}{a^2} \frac{da}{dt} \right) \quad (5.22)$$

car, d'après (3.29) on a  $\sin E = \frac{r}{a} \frac{\sin w}{\sqrt{1 - e^2}}$ , et d'après (3.30) on peut écrire :

$$\frac{r}{a} \cos E - e \sin^2 E = (1 - e \cos E) \cos E - e \sin^2 E = \cos E - e = \frac{r}{a} \cos w$$

Or, d'après (5.10) on a aussi :

$$\mu \mathbf{u} \cdot \frac{de}{dt} - 2r \frac{dh}{dt} = -2r\dot{r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u})$$

soit, en tenant compte de (5.15), de (5.18) et de  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_0 = \cos w$  :

$$\cos w \frac{de}{dt} - \frac{r}{a^2} \frac{da}{dt} + e \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{u}_0) = -\frac{2r\dot{r}}{\mu} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u})$$

Comme on a enfin :  $\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{u}_0) = \sin w (\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \cdot \mathbf{k}) = \sin w \left( \frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right)$ , l'expression (5.22) devient :

$$e \sin w \frac{\delta M}{dt} = -\sqrt{1-e^2} \left( e \sin w \left( \frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) + \frac{2r\dot{r}}{\mu} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) \right)$$

Enfin, avec  $\mu = n^2 a^3$  et sachant que d'après (3.29) on a :  $\dot{r}\sqrt{1-e^2} = nae \sin w = \frac{\mu}{na^2} e \sin w$ , il reste :

$$\boxed{\frac{\delta M}{dt} = -\frac{2r}{na^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) - \sqrt{1-e^2} \left( \frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right)} \quad (5.23)$$

### 20.3. Equations de Gauss

Il s'agit simplement d'une réécriture des équations précédentes en y remplaçant  $\mathbf{F}$  et  $\dot{\mathbf{r}}$  par leurs composantes dans la base locale en  $P$  :

$$\mathbf{F} = R \mathbf{u} + S \mathbf{v} + W \mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{G}{p} \mathbf{k} \wedge (\mathbf{e} + \mathbf{u}) \quad \implies \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{G} (e \sin w \mathbf{u} + (1 + e \cos w) \mathbf{v})$$

La première expression de  $\dot{r}$  vient de la description de l'hodographe du mouvement képlérien vue en (3.14) Les éléments osculateurs  $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$  vérifient alors les équations suivantes, appelées *équations de Gauss* :

$$\begin{aligned}
 G \frac{da}{dt} &= 2a^2 [Re \sin w + S(1 + e \cos w)] \\
 G \frac{de}{dt} &= p [R \sin w + S (\cos w + \cos E)] \\
 G \frac{di}{dt} &= r W \cos(\omega + w) \\
 G \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= r W \sin(\omega + w) \\
 Ge \frac{d\omega}{dt} &= -p R \cos w + (r + p) S \sin w - Ge \cos i \frac{d\Omega}{dt} \\
 \frac{dM}{dt} &= n(t) - \frac{1}{\sqrt{\mu a}} [2r R + G (\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt})]
 \end{aligned}
 \tag{5.24}$$

Pour utiliser ce système d'équations différentielles, il faut encore y remplacer  $G$  par  $\sqrt{\mu p}$  et  $p$  par  $a(1 - e^2)$ , puis exprimer les quantités képlériennes variables  $r, w$  et  $E$  en fonction des éléments osculateurs eux-mêmes ; si  $\mathbf{F}$  dépend de la position et de la vitesse de  $P$ , il faut utiliser le formulaire de passage des position-vitesse aux éléments d'orbite pour exprimer aussi  $R, S$  et  $W$  en fonction de ces éléments. Ces transformations peuvent se faire analytiquement si l'expression de  $\mathbf{F}$  n'est pas trop compliquée et si l'excentricité est suffisamment petite pour permettre d'utiliser les développements du mouvement képlérien vus en §3-13.4 et exprimés en fonction de l'anomalie moyenne. Le plus souvent, les équations de Gauss sont utilisées pour intégrer numériquement le mouvement de  $P$  dans les cas de forte excentricité ou de forte inclinaison (par exemple pour des petites planètes du système solaire, ou pour des satellites très excentriques) ou quand  $\mathbf{F}$  n'a pas une expression simple.

Cependant, il peut être parfois plus efficace de faire l'intégration numérique directe de l'équation initiale (5.1) plutôt que celle des équations de Gauss, puisqu'il est toujours possible de calculer ensuite les éléments d'orbite osculateurs aux instants où la position et la vitesse de  $P$  sont connus.

Notons que les équations donnant  $\frac{d\Omega}{dt}$ ,  $\frac{d\omega}{dt}$  et  $\frac{dM}{dt}$  sont singulières lorsque  $e$  ou  $i$  s'annulent, ce qui est normal puisqu'alors ces angles deviennent indéterminés. Pour avoir des équations régulières, il faut prendre des éléments réguliers comme la longitude moyenne  $L = \Omega + \omega + M = \varpi + M$ , ou comme les variables complexes  $z = e \exp \sqrt{-1}\varpi$  et  $\zeta = \sin(i/2) \exp \sqrt{-1}\Omega$ . Les équations (5.24) permettent de déduire les variations de ces éléments réguliers. On trouve par exemple :

$$Ge \frac{d\varpi}{dt} = -pR \cos w + (r + p)S \sin w + e \tan(i/2) r W \sin(\omega + w) \tag{5.25}$$

$$\frac{dL}{dt} = n(t) - \frac{2rR}{\sqrt{\mu a}} + \frac{1}{G} \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e} (-pR \cos w + (r + p)S \sin w) + \tan(i/2) r W \sin(\omega + w) \right\} \tag{5.26}$$

**Exercice** Dans cette dernière expression, le facteur  $\frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}$  n'est pas singulier en  $e = 0$  puisqu'il se comporte comme  $e/2$  quand  $e$  tend vers zéro.



### 20.4. Exemple d'application des équations de Gauss

Utilisons les équations de Gauss pour exprimer les variations des éléments orbitaux d'un satellite sous l'effet d'une accélération perturbatrice opposée à la vitesse. L'équation suivante modélise ainsi de façon simplifiée

Pb<sub>8</sub>  
Pb<sub>11</sub>  
Pb<sub>12</sub>

l'effet du frottement atmosphérique sur un satellite tournant autour d'une planète sphérique :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} - T \mathbf{t}$$

où  $\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire de la vitesse de  $P$  :

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{\mathbf{v} + e \mathbf{v}_0}{|\mathbf{v} + e \mathbf{v}_0|} = \frac{(e \sin w) \mathbf{u} + (1 + e \cos w) \mathbf{v}}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos w}}$$

On en tire les composantes  $R$ ,  $S$  et  $W$  de  $\mathbf{F}$  :

$$R = \frac{-Te \sin w}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos w}} \quad S = \frac{-T(1 + e \cos w)}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos w}} \quad W = 0$$

Donc,  $\frac{di}{dt}$  et  $\frac{d\Omega}{dt}$  sont nuls et l'orbite reste dans un plan fixe ; les autres éléments varient suivant les équations :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{da}{dt} &= -\frac{2T}{na\sqrt{1-e^2}} \sqrt{1+e^2+2e \cos w} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{2T\sqrt{1-e^2}}{na} \frac{e + \cos w}{\sqrt{1+e^2+2e \cos w}} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{2T\sqrt{1-e^2}}{nae} \frac{\sin w}{\sqrt{1+e^2+2e \cos w}} \\ \frac{dM}{dt} &= n + \frac{2T(1-e^2)}{nae} \frac{(1+e^2+e \cos w) \sin w}{(1+e \cos w)\sqrt{1+e^2+2e \cos w}} \end{aligned} \tag{5.27}$$

Dans le cas du frottement atmosphérique, en posant  $b = \frac{C_D}{2} \frac{A}{m}$ , on a encore :

$$T = b \rho(r) \dot{\mathbf{r}}^2 = b \rho(r) \frac{n^2 a^2}{1 - e^2} (1 + e^2 + 2e \cos w)$$

On trouve notamment que le demi-grand axe et l'excentricité diminuent ; l'orbite se circularise, prenant la forme d'une spirale de rayon décroissant. On obtient ces caractéristiques globales du mouvement en examinant comment, tour après tour, les éléments osculateurs évoluent **en moyenne**. Pour calculer des variations sur un tour, on calcule le terme "constant" (indépendant de  $M$ ) du développement en série de Fourier de  $M$  de chaque second membre des équations (5.27). Cependant il peut être plus intéressant d'exprimer ces équations, non pas en fonction du temps ou de  $M$ , mais en fonction de l'anomalie excentrique  $E$  : on fait alors le changement de variable :  $n dt = \frac{r}{a} dE$  et on exprime toutes les fonctions de  $r$  et de  $w$  en fonction de  $E$  grâce au formulaire du mouvement képlérien. On peut alors développer en série de Fourier de  $E$  au lieu de  $M$ . Les équations donnant les variations de l'**apogée**  $Q = a(1 + e)$  et du **périgée**  $q = a(1 - e)$ , permettent d'analyser comment évoluent les altitudes du périgée et de l'apogée. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dE} &= -2ba^2 (1 - e)(1 - \cos E) \sqrt{\frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}} \rho(r) \\ \frac{dQ}{dE} &= -2ba^2 (1 + e)(1 + \cos E) \sqrt{\frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}} \rho(r) \end{aligned} \tag{5.28}$$

où la masse volumique  $\rho(r)$  reste à modéliser ; un modèle simple consiste à prendre une loi de la forme :  $\rho(r) = \rho_0 e^{-K(r-r_0)}$ . On trouve notamment que tour après tour, les altitudes du périgée et de l'apogée diminuent mais que cette diminution est moins forte pour le périgée que pour l'apogée.



## 21. Cas où $F$ dérive d'un potentiel : $F = \text{grad}_P U$

On peut envisager deux façons d'obtenir les variations des éléments osculateurs : la première consiste à utiliser les équations de Gauss en exprimant d'abord les composantes du gradient dans la base correspondant aux coordonnées utilisées pour repérer  $P$ , puis en projetant ces composantes dans la base locale  $uvk$  de façon à obtenir  $R$ ,  $S$  et  $W$  ; il reste alors à exprimer ces composantes en fonction des éléments osculateurs. La deuxième consiste à exprimer d'abord  $U$  en fonction des éléments osculateurs, puis à écrire de nouvelles équations, issues de la formulation hamiltonienne et qui expriment les variations de ces éléments en fonction du gradient de  $U$  dans l'espace  $\mathcal{K}_\mu$  des éléments osculateurs.

### 21.1. Utilisation des équations de Gauss

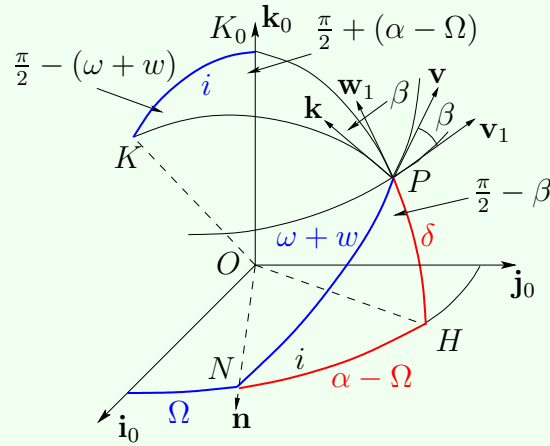
On va supposer que  $U$  est exprimé en fonction des coordonnées sphériques  $(r, \alpha, \delta)$  de  $P$  dans le repère  $R_0 = O\mathbf{i}_0\mathbf{j}_0\mathbf{k}_0$ . Les éléments osculateurs considérés sont les mêmes que ceux définis en §5-20.2, avec notamment les angles d'Euler  $\Omega$ ,  $i$  et  $\omega + w$  entre  $R_0$  et le repère  $Ouvk$  mobile avec  $P$ . Dans la base locale des coordonnées sphériques en  $P$ , notée ici  $uv_1w_1$ , les composantes du gradient sont données par les expressions :

$$R = \frac{\partial U}{\partial r} \quad S_1 = \frac{1}{r \cos \delta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \quad W_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \delta}$$

Si  $\beta$  désigne l'angle entre  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}$  (ou entre  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{k}$ ), on a alors :

$$S = S_1 \cos \beta + W_1 \sin \beta \quad \text{et} \quad W = -S_1 \sin \beta + W_1 \cos \beta \quad (5.29)$$

Pour exprimer  $R$ ,  $S$  et  $W$  en fonction des éléments osculateurs, il faut notamment d'établir les relations entre  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\beta$  et les éléments képlériens  $\Omega$ ,  $i$  et  $\omega + w$ .



Dans les triangles sphériques  $NHP$  (rectangle en  $H$ ) et  $KPK_0$  (rectilatère selon  $KP$ ), on peut écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sin \delta &= \sin i \sin(\omega + w) \\
 \cos \delta \cos(\alpha - \Omega) &= \cos(\omega + w) \\
 \cos \delta \sin(\alpha - \Omega) &= \cos i \sin(\omega + w) \\
 \cos \delta \cos \beta &= \cos i \\
 \cos \delta \sin \beta &= \sin i \cos(\omega + w)
 \end{aligned}
 \tag{5.30}$$

Les trois premières relations représentent encore les égalités entre deux expressions différentes des coordonnées cartésiennes de  $P$  dans le repère  $Ok_0n(k_0 \wedge n)$  ; les deux dernières représentent aussi les égalités entre deux expressions des coordonnées de  $K_0$  suivant les axes  $Ok$  et  $Ov$ .

## 21.2. Application au cas du potentiel de gravitation d'une planète

On considère un satellite  $P$  de masse négligeable, en mouvement autour d'une planète de centre  $O$  et de masse  $M$ , et on suppose qu'il est perturbé par la non-sphéricité de cette planète. Pour simplifier, on réduit ici le potentiel perturbateur au terme en  $J_2$ ; l'équation du mouvement de  $P$  s'écrit alors ainsi :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{grad} \left( -\mu J_2 \frac{a_e^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \right) \quad \text{où} \quad \mu = KM \quad (5.31)$$

Il convient de faire attention à la nature des coordonnées utilisées dans une telle équation : En principe, l'expression du potentiel de gravitation est donnée en fonction de coordonnées sphériques  $(r, \lambda, \varphi)$  définies dans un repère  $R$  lié à la planète, tandis que l'équation du mouvement de  $P$  telle qu'elle est écrite ci-dessus est vraie seulement dans un repère  $R_0$  galiléen. Il faut donc d'abord faire les transformations pour que les coordonnées utilisées soient relatives à un repère galiléen.

Supposons d'abord que l'origine  $O$  soit fixe ou animée d'un mouvement rectiligne et uniforme : cela revient à négliger ici le mouvement de la planète autour du Soleil et à considérer que le système étudié est isolé dans l'espace.

Si la planète tourne sur elle-même autour d'un axe de direction fixe, soit  $Ok_0$  cet axe et  $\theta$  l'angle de rotation, autour de cet axe, de  $R$  par rapport au repère  $R_0$  (on suppose bien sûr que le troisième axe de  $R$  est aussi confondu avec cet axe fixe). Alors, les coordonnées sphériques  $(r, \alpha, \delta)$  de  $P$  dans  $R_0$  sont reliées aux coordonnées  $(r, \lambda, \varphi)$  du même point dans  $R$  par les relations :  $\alpha = \theta + \lambda$  et  $\delta = \varphi$ .

Ici, comme le potentiel perturbateur  $U_{J_2}$  ne dépend pas de la coordonnée  $\lambda$ , cette transformation est très simple à faire : il suffit d'y remplacer  $\varphi$  par  $\delta$ . On obtient alors  $U_{J_2} = -\mu J_2 \frac{a_e^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \delta - \frac{1}{2} \right)$ , puis les composantes  $R$ ,

$S_1$  et  $W_1$  du gradient :

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{\partial U_{J_2}}{\partial r} = 3\mu J_2 \frac{a_e^2}{r^4} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \delta - \frac{1}{2} \right) \\
 S_1 &= \frac{1}{r \cos \delta} \frac{\partial U_{J_2}}{\partial \alpha} = 0 \\
 W_1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial U_{J_2}}{\partial \delta} = -3\mu J_2 \frac{a_e^2}{r^4} \sin \delta \cos \delta
 \end{aligned}
 \tag{5.32}$$

Tenant compte des relations (5.29) et (5.30), on en déduit les composantes  $R$ ,  $S$  et  $W$  :

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{3}{2} \mu J_2 \frac{a_e^2}{r^4} (3 \sin^2 i \sin^2(\omega + w) - 1) \\
 S &= W_1 \sin \beta = -3\mu J_2 \frac{a_e^2}{r^4} \sin^2 i \sin(\omega + w) \cos(\omega + w) \\
 W &= W_1 \cos \beta = -3\mu J_2 \frac{a_e^2}{r^4} \sin i \cos i \sin(\omega + w)
 \end{aligned}
 \tag{5.33}$$

Les seconds membres des équations de Gauss (5.24) font apparaître les quantités  $R \cos w - S \sin w$  et  $R \sin w +$

$S \cos w$  (composantes de  $\mathbf{F}$  sur  $\mathbf{u}_0$  et  $\mathbf{v}_0$ ) ; exprimées en fonction des multiples de  $\omega$  et de  $w$ , on trouve :

$$R \cos w - S \sin w = \frac{3}{2} \mu J_2 \frac{a_e^2}{r^4} \left[ \left( \frac{3}{2} \sin^2 i - 1 \right) \cos w - \frac{1}{4} \sin^2 i (5 \cos(2\omega + 3w) + \cos(2\omega + w)) \right]$$

$$R \sin w + S \cos w = \frac{3}{2} \mu J_2 \frac{a_e^2}{r^4} \left[ \left( \frac{3}{2} \sin^2 i - 1 \right) \sin w - \frac{1}{4} \sin^2 i (5 \sin(2\omega + 3w) - \sin(2\omega + w)) \right]$$

En remplaçant encore dans les équations de Gauss :  $G$  par  $na^2\sqrt{1-e^2}$ ,  $p$  par  $a(1-e^2)$  et  $p \cos E$  par  $r(\cos w + e)$ , et en changeant  $\mu$  en  $n^2a^3$  dans  $R$ ,  $S$  et  $W$ , on obtient finalement les équations suivantes :

$$\frac{di}{dt} = -n \frac{3J_2}{2\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{a_e}{a} \right)^2 \left( \frac{a}{r} \right)^3 \sin i \cos i \sin(2\omega + 2w) \tag{5.34}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -n \frac{3J_2}{2\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{a_e}{a} \right)^2 \left( \frac{a}{r} \right)^3 \cos i (1 - \cos(2\omega + 2w)) \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} = n \frac{3J_2}{8} \sqrt{1-e^2} \left( \frac{a_e}{a} \right)^2 \left( \frac{a}{r} \right)^4 \times \\ \left[ -4 \sin w + \sin^2 i (6 \sin w + \sin(2\omega + w) - 5 \sin(2\omega + 3w)) \right] \\ - n \frac{3J_2}{4\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{a_e}{a} \right)^2 \left( \frac{a}{r} \right)^3 \sin^2 i \left[ \sin(2\omega + w) + \sin(2\omega + 3w) + 2e \sin(2\omega + 2w) \right] \end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} = n \frac{3J_2}{8} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^4 \times \left[ 4 \cos w - \sin^2 i (6 \cos w - \cos(2\omega + w) - 5 \cos(2\omega + 3w)) \right] - n \frac{3J_2}{4e\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin^2 i \left[ \cos(2\omega + w) - \sin(2\omega + 3w) \right] \quad (5.37)$$

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = n \frac{3J_2}{4\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^4 \left[ -4e \sin w - 4 \sin^2 i \sin(2\omega + 2w) + e \sin^2 i (6 \sin w + \sin(2\omega + w) - 5 \sin(2\omega + 3w)) \right] \quad (5.38)$$

$$\frac{dM}{dt} = n + 3n J_2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left[ 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i (1 - \cos(2\omega + 2w)) \right] - \sqrt{1-e^2} \left( \frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) \quad (5.39)$$

Il reste à développer les seconds membres de ces équations en séries de Fourier de l'anomalie moyenne  $M$  en utilisant les résultats obtenus en §3-13.4; pour cela, voyant que ces seconds membres font intervenir les quantités  $\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mw$  et  $\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mw$  où  $n$  vaut -3 et -4 et où  $m$  est compris entre 0 et 3, on pourra utiliser les développements en coefficients de Hansen vus en (3.134) ou les méthodes aboutissant à l'expression (3.146).

Notons que la relation (3.134) peut encore se décomposer en parties réelle et imaginaire pour donner :

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mw &= X_0^{n,m}(e) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( X_k^{n,m}(e) + X_k^{n,-m}(e) \right) \cos kM \\ \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mw &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( X_k^{n,m}(e) - X_k^{n,-m}(e) \right) \sin kM \end{aligned} \quad (5.40)$$

On verra en §5-22.1.2 comment tirer de ces équations certaines propriétés du mouvement des satellites artificiels. Auparavant, voyons comment obtenir des équations analogues directement à partir du développement de  $U$  en fonction des éléments d'orbite.

### 21.3. Formulation hamiltonienne des variations des éléments d'orbite

En §2-9.2, nous avons montré comment un changement de variables canoniques construit par la méthode d'Hamilton-Jacobi abouti à la méthode de variation des constantes arbitraires. Rappelons simplement ici que, si on a trouvé une fonction  $G(q_i, y_i, t)$  vérifiant, pour  $F$  donné :

$$\sum_i (p_i dq_i + x_i dy_i) + F dt = dG$$

le changement de variables  $(q_i, p_i) \mapsto (x_i, y_i)$  engendré par  $G$  est canonique ; si on applique ensuite ce changement de variables à un hamiltonien  $H$ , le nouvel hamiltonien  $H'$  a pour valeur :  $H' = H + F = H + \frac{\partial G}{\partial t}$  et les nouvelles variables satisfont aux équations d'Hamilton :

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H'}{\partial y_i} \quad \text{et} \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H'}{\partial x_i}$$

En particulier, si  $F$  est nul (ce qui correspond à  $G$  indépendant de  $t$ ), le changement de variables modifie l'expression de l'hamiltonien mais pas sa valeur.

Or, en §3-12.2.2, on a appliqué une variante de la méthode d'Hamilton-Jacobi pour résoudre le problème de Kepler, représenté par l'hamiltonien  $H$  suivant :

$$H = \frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r}$$

exprimé en fonction des variables canoniques  $(r, \psi, \vartheta, R, G, \Theta)$ . En cherchant un changement de variables canoniques qui ne change pas la valeur  $h$  de l'hamiltonien, on a alors trouvé cette fonction  $G_2(r, \psi, \vartheta, h, G, \Theta)$ , indépendante de  $t$  :

$$G_2 = \psi G + \vartheta \Theta + \varepsilon \int_{r_0(h,G)}^r \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}} dr$$

Cette fonction engendre le jeu de variables canoniques :  $(t - t_p, g, \vartheta, h, G, \Theta)$  et, dans ces variables, le nouvel hamiltonien vaut  $H'(-, -, -, h, -, -) = h$  ; les équations d'Hamilton montrent que  $(t_p, g, \vartheta, h, G, \Theta)$  sont alors des constantes ; rappelons que, hormis  $t - t_p$  et  $h$ , ces éléments canoniques sont ceux de Delaunay, avec des notations propres aux variables canoniques mais qui s'interprètent en fonction des éléments d'orbite elliptique classique :  $\vartheta$  est la longitude du nœud ascendant, mesurée dans le plan  $Oi_0j_0$  à partir de l'axe  $Oi_0$ , tandis que  $g$  est l'argument du péricentre mesuré dans le plan orbital depuis ce nœud ( $\vartheta \equiv \Omega$  et  $g \equiv \omega$ ) ; leurs conjuguées  $G$  et  $\Theta (= G \cos i)$  sont respectivement le module du moment cinétique et sa projection sur l'axe  $Ok_0$ , avec  $i$  inclinaison du plan orbital sur  $Oi_0j_0$  (cf. (3.75)).

Si maintenant on considère le problème képlérien perturbé défini par l'équation (5.1) où  $\mathbf{F} = \text{grad } U$ , il lui correspond l'intégrale première de l'énergie cinétique :

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \left( \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \right) = 0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r} - U \right) \implies \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r} - U = C^{te}$$



Cette constante exprime la conservation de l'énergie totale du système et, en formulation hamiltonienne, l'hamiltonien est égal à cette constante ; en utilisant les mêmes variables canoniques  $(r, \psi, \vartheta, R, G, \Theta)$  qu'en §3-12.2, on obtient alors cette expression de l'hamiltonien du problème perturbé :

$$H_1 = \frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - U = H - U$$

Alors, en appliquant à cet hamiltonien le changement de variables canoniques engendré par  $G_2$ , on obtient un nouvel hamiltonien  $H'_1$  qui a la même valeur que l'ancien :

$$H'_1 = H_1 = H - U \implies H'_1(t - t_p, g, \vartheta, h, G, \Theta) = h - U(t - t_p, g, \vartheta, h, G, \Theta)$$

où  $U$  doit maintenant être exprimé en fonction des nouvelles variables. La transformation canonique  $(t - t_p, h) \mapsto (l, L)$  qu'on a fait ensuite en §3-12.2.3, pour aboutir aux variables de Delaunay conserve la valeur de cet hamiltonien, qui devient :

$$H''_1(l, g, \vartheta, L, G, \Theta) = -\frac{\mu^2}{2L^2} - U(l, g, \vartheta, L, G, \Theta)$$

où  $U$  est cette fois exprimé en variables de Delaunay. Enfin, pour éviter les signes "moins", on change le signe de l'hamiltonien, ce qui revient à permuter le rôle des variables et de leurs conjuguées :

$$H''_2(L, G, \Theta, l, g, \vartheta) = \frac{\mu^2}{2L^2} + U(l, g, \vartheta, L, G, \Theta) \tag{5.41}$$

Les variables de Delaunay du problème képlérien perturbé vérifient donc finalement les équations d'Hamilton

suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial H_2''}{\partial l} & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial H_2''}{\partial L} \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial H_2''}{\partial g} & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial H_2''}{\partial G} \\ \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{\partial H_2''}{\partial \vartheta} & \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{\partial H_2''}{\partial \Theta} \end{aligned}$$

c'est-à-dire encore :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial l} & \frac{dl}{dt} &= \frac{\mu^2}{L^3} - \frac{\partial U}{\partial L} \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial g} & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial G} \\ \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta} & \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial \Theta} \end{aligned}} \tag{5.42}$$

Avec les variables canoniques régulières de Poincaré  $(\Lambda, \xi, p, \lambda, \eta, q)$  définies en (3.79), on aurait de même l'hamiltonien du problème képlérien perturbé :

$$\boxed{H_3''(\Lambda, \xi, p, \lambda, \eta, q) = \frac{\mu^2}{2\Lambda^2} + U(\Lambda, \xi, p, \lambda, \eta, q)} \tag{5.43}$$

où  $U$  doit ici être exprimé en fonction des variables de Poincaré ; ces variables vérifient les équations d'Hamilton :

$$\begin{array}{ll}
 \frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \lambda} & \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\mu^2}{\Lambda^3} - \frac{\partial U}{\partial \Lambda} \\
 \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \eta} & \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} \\
 \frac{dp}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q} & \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial p}
 \end{array} \tag{5.44}$$

### 21.4. Equations de Lagrange pour les éléments osculateurs

Pb<sub>17</sub>  
Pb<sub>18</sub>

Ce sont les équations donnant, comme les équations de Gauss, les variations des éléments osculateurs elliptiques classiques :  $a, e, i, \Omega, \omega$  et  $M$ , mais exprimées en fonction des dérivées partielles de  $U$  par rapport aux éléments eux-mêmes. Reprenant la signification des éléments de Delaunay :

$$\begin{array}{ll}
 l = M & L = \sqrt{\mu a} = na^2 \\
 g = \omega & G = L\sqrt{1 - e^2} \\
 \vartheta = \Omega & \Theta = G \cos i
 \end{array}$$

on peut différentier ces relations puis utiliser les équations (5.42) pour calculer les variations de  $a, e, i, \Omega, \omega$  et  $M$ . On a en effet :

$$\begin{array}{ll}
 \mu a = L^2 & \implies \mu da = 2L dL \\
 e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2} & \implies e de = \frac{G^2}{L^3} dL - \frac{G}{L^2} dG \\
 \cos i = \frac{\Theta}{G} & \implies \sin i di = \frac{\Theta}{G^2} dG - \frac{1}{G} d\Theta
 \end{array}$$

On en déduit successivement :

$$\left. \frac{da}{dt} = \frac{2L}{\mu} \frac{dL}{dt} = \frac{2L}{\mu} \frac{\partial U}{\partial l} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial U}{\partial M}} \quad (5.45)$$

$$\left. \begin{aligned} e \frac{de}{dt} &= \frac{G^2}{L^3} \frac{dL}{dt} - \frac{G}{L^2} \frac{dG}{dt} \\ &= \frac{G^2}{L^3} \frac{\partial U}{\partial l} - \frac{G}{L^2} \frac{\partial U}{\partial g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left( \sqrt{1-e^2} \frac{\partial U}{\partial M} - \frac{\partial U}{\partial \omega} \right)} \quad (5.46)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin i \frac{di}{dt} &= \frac{\Theta}{G^2} \frac{dG}{dt} - \frac{1}{G} \frac{d\Theta}{dt} \\ &= \frac{\Theta}{G^2} \frac{\partial U}{\partial g} - \frac{1}{G} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} = \frac{1}{na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \left( \cos i \frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \Omega} \right)} \quad (5.47)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial \Theta} \\ &= -\frac{\partial U}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial \Theta} \\ &= \frac{1}{G \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial U}{\partial i}} \quad (5.48)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial G} \\ &= -\frac{\partial U}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial G} - \frac{\partial U}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial G} \\ &= \frac{G}{eL^2} \frac{\partial U}{\partial e} - \frac{\Theta}{G^2 \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left( \frac{\partial U}{\partial e} - \frac{e \cos i}{(1-e^2) \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} \right)} \quad (5.49)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{\mu^2}{L^3} - \frac{\partial U}{\partial L} \\ -\frac{\partial U}{\partial L} &= -\frac{\partial U}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial L} - \frac{\partial U}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial L} \\ &= -\frac{2L}{\mu} \frac{\partial U}{\partial a} - \frac{G^2}{eL^3} \frac{\partial U}{\partial e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial U}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial U}{\partial e}} \quad (5.50)$$

Le caractère antisymétrique de ces équations n'est plus aussi apparent que dans les équations d'Hamilton, mais il existe toujours car, en formulation matricielle et en posant  $\varphi = \sqrt{1 - e^2}$ , on a en effet :

$$\begin{pmatrix} \frac{da}{dt} \\ \frac{dM}{dt} \\ \frac{de}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{di}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{na^2} \begin{pmatrix} 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2a & 0 & -\frac{\varphi^2}{e} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varphi^2}{e} & 0 & -\frac{\varphi}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varphi}{e} & 0 & -\frac{\cos i}{\varphi \sin i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos i}{\varphi \sin i} & 0 & -\frac{1}{\varphi \sin i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varphi \sin i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial a} \\ \frac{\partial U}{\partial M} \\ \frac{\partial U}{\partial e} \\ \frac{\partial U}{\partial \omega} \\ \frac{\partial U}{\partial i} \\ \frac{\partial U}{\partial \Omega} \end{pmatrix}$$

On peut en déduire des équations de Lagrange pour les éléments osculateurs  $a, e, i, \Omega, \varpi (= \Omega + \omega)$  et

$L (= \varpi + M)$ . Il faut pour cela d'abord écrire :

$$\left. \begin{array}{l} L = \Omega + \omega + M \\ \varpi = \Omega + \omega \\ \Omega_1 = \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{\partial U}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial M} = \frac{\partial U}{\partial L} \\ \frac{\partial U}{\partial \omega} = \frac{\partial U}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial \omega} + \frac{\partial U}{\partial \varpi} \frac{\partial \varpi}{\partial \omega} = \frac{\partial U}{\partial L} + \frac{\partial U}{\partial \varpi} \\ \frac{\partial U}{\partial \Omega} = \frac{\partial U}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial \Omega} + \frac{\partial U}{\partial \varpi} \frac{\partial \varpi}{\partial \Omega} + \frac{\partial U}{\partial \Omega_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \Omega} = \frac{\partial U}{\partial L} + \frac{\partial U}{\partial \varpi} + \frac{\partial U}{\partial \Omega_1} \end{array} \right.$$

On obtient ensuite, en conservant la notation  $\Omega$  plutôt que  $\Omega_1$  :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial U}{\partial L} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\varphi}{na^2 e} \left( \frac{\partial U}{\partial \varpi} + (1 - \varphi) \frac{\partial U}{\partial L} \right) \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2 \varphi \sin i} \left( \frac{\partial U}{\partial \Omega} + (1 - \cos i) \left( \frac{\partial U}{\partial \varpi} + \frac{\partial U}{\partial L} \right) \right) \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \varphi \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{1}{na^2} \left( \frac{\varphi}{e} \frac{\partial U}{\partial e} + \frac{1 - \cos i}{\varphi \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} \right) \\ \frac{dL}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\varphi(1 - \varphi)}{na^2 e} \frac{\partial U}{\partial e} + \frac{1 - \cos i}{na^2 \varphi \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} \end{aligned} \tag{5.51}$$

On voit que seules les équations donnant  $\frac{da}{dt}$  et  $\frac{dL}{dt}$  sont régulières en  $e = 0$  et  $i = 0$ . Pour obtenir des équations

toutes régulières, il faut utiliser d'autres éléments, par exemple les variables complexes  $z = e \exp \sqrt{-1} \varpi$  et  $\zeta = \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1} \Omega$ . Pour cela, on écrit d'abord :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{de}{dt} \exp \sqrt{-1} \varpi + \sqrt{-1} e \exp \sqrt{-1} \varpi \frac{d\varpi}{dt} = z \left( \frac{1}{e} \frac{de}{dt} \right) + \sqrt{-1} z \frac{d\varpi}{dt}$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial e} &= \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial e} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial e} = \frac{1}{e} \left( z \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial \varpi} &= \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varpi} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \varpi} = \sqrt{-1} \left( z \frac{\partial U}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned}$$

On écrit des relations analogues entre  $\zeta, \bar{\zeta}, i$  et  $\Omega$ . On obtient, mais avec cette fois  $\varphi = \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{1 - z\bar{z}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial U}{\partial L} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\sqrt{-1} \varphi}{na^2} \left[ 2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + \frac{\sqrt{-1}}{(1 + \varphi)} z \frac{\partial U}{\partial L} + \frac{z}{2\varphi^2} \left( \zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \bar{\zeta} \frac{\partial U}{\partial \bar{\zeta}} \right) \right] \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{\sqrt{-1}}{2na^2 \varphi} \left[ \frac{\partial U}{\partial \bar{\zeta}} + \sqrt{-1} \zeta \frac{\partial U}{\partial L} - \zeta \left( z \frac{\partial U}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right) \right] \\ \frac{dL}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\varphi}{na^2(1 + \varphi)} \left( z \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{1}{2na^2 \varphi} \left( \zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \bar{\zeta} \frac{\partial U}{\partial \bar{\zeta}} \right) \end{aligned} \tag{5.52}$$

Les équations donnant  $\frac{d\bar{z}}{dt}$  et  $\frac{d\bar{\zeta}}{dt}$  sont évidemment les conjuguées de celles donnant  $\frac{dz}{dt}$  et  $\frac{d\zeta}{dt}$ . On vérifie que toutes les équations (5.52) sont bien régulières en  $e = 0$  et en  $i = 0$ .

Dev5.1

## 21.5. Exemple d'application des équations de Lagrange

Pb<sub>9</sub>  
Pb<sub>11</sub>  
Pb<sub>17</sub>

Reprenons l'exemple donné en (5.31) relatif au satellite perturbé par le terme en  $J_2$  du potentiel de gravitation de sa planète. La fonction  $U_{J_2}$  correspondante, exprimée en coordonnées sphériques  $r, \alpha, \delta$  dans le repère galiléen considéré, est donc :

$$U_{J_2} = -\mu J_2 \frac{a_e^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \delta - \frac{1}{2} \right)$$

Il s'agit d'abord d'exprimer  $U_{J_2}$  en fonction des éléments osculateurs  $a, e, i, \Omega, \omega$  et  $M$ . En utilisant la première des relations (5.30), on obtient :

$$U_{J_2} = -\mu J_2 \frac{a_e^2}{a^3} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left( \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \cos(2\omega + 2w) \right) \quad (5.53)$$

Il reste à exprimer  $a/r$  et  $w$  en fonction de  $e$  et de  $M$ , c'est-à-dire à développer ces quantités en séries de Fourier par rapport à  $M$ , avec des coefficients fonctions de  $e$ . On a déjà vu ces développements dans la partie 3 en (3.146), associés aux coefficients de Hansen ; en effet, il suffit ici de prendre les développements de  $(a/r)^3$ , de  $(a/r)^3 \cos 2w$  et de  $(a/r)^3 \sin 2w$ . Avec la définition des coefficients de Hansen rappelée en (5.40), on obtient :

$$U_{J_2}(a, e, i, \Omega, \omega, M) = \mu J_2 \frac{a_e^2}{a^3} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) \left( X_0^{-3,0}(e) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{-3,0}(e) \cos kM \right) \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \sin^2 i \left( X_0^{-3,2}(e) \cos 2\omega + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{-3,2}(e) \cos(2\omega + kM) \right) \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{-3,-2}(e) \cos(2\omega - kM) \right\} \quad (5.54)$$



Les coefficients de Hansen  $X_k^{n,m}(e)$  se calculent en utilisant le formulaire de Brumberg (cf. (3.156) à (3.158)); cependant pour  $k = 0$ , il est ici plus commode de les calculer directement comme termes indépendants de  $M$  dans les développements en série de Fourier des fonctions  $(a/r)^3$  et  $(a/r)^3 \cos 2w$ . En utilisant le changement de variable  $dM = (1 - e^2)^{-1/2} (\frac{r}{a})^2 dw$  issu de la loi des aires ( $r^2 dw = na^2 \sqrt{1 - e^2} dt$ ), on obtient en effet :

$$\begin{aligned} X_0^{-3,0}(e) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 dM \\ &= (1 - e^2)^{-1/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} dw = (1 - e^2)^{-3/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos w) dw \\ &= (1 - e^2)^{-3/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_0^{-3,2}(e) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2w dM \\ &= (1 - e^2)^{-1/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} \cos 2w dw \\ &= (1 - e^2)^{-3/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos w) \cos 2w dw \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, le terme en  $\cos 2w$  disparaît de l'expression (5.54), et la partie  $\bar{U}_{J_2}$  indépendante de  $M$  est donc réduite à :

$$\bar{U}_{J_2}(a, e, i, -, -, -) = \mu J_2 \frac{a_e^2}{a^3} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) (1 - e^2)^{-3/2} \tag{5.55}$$

Plus généralement, on procéderait de la même façon pour calculer le terme indépendant de  $M$  dans la partie

en  $J_n$  du développement du potentiel (4.34) ; en effet, ce terme a en facteur  $(a/r)^{n+1}$  avec  $n > 0$ , et, après avoir développé  $P_n(\sin i \sin(\omega + w))$ , son terme indépendant de  $M$  dépend du calcul des coefficients  $X_0^{-n-1,m}(e)$  pour  $m = n, n - 2, n - 4, \dots, -n + 2, -n$ . Pour cela on écrit :

$$\begin{aligned}
 X_0^{-n-1,m}(e) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cos mw \, dM \\
 &= (1 - e^2)^{-1/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^{n-1} \cos mw \, dw \\
 &= (1 - e^2)^{-n+1/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos w)^{n-1} \cos mw \, dw \\
 &= (1 - e^2)^{-n+1/2} \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} C_i^{n-1} e^i \int_0^{2\pi} \cos^i w \cos mw \, dw
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

Pour intégrer, il reste à exprimer les diverses puissances de  $\cos w$  en fonction des cosinus des multiples de  $w$ . Par exemple, pour le potentiel correspondant au terme en  $J_4$  :

$$\begin{aligned}
 U_{J_4} &= -\mu J_4 \frac{a_e^4}{a^5} \left(\frac{a}{r}\right)^5 \left\{ \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{8} \sin^2 i + \frac{105}{64} \sin^4 i\right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{15}{8} \sin^2 i - \frac{35}{16} \sin^4 i\right) \cos(2\omega + 2w) + \frac{35}{64} \sin^4 i \cos(4\omega + 4w) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

**Exercice** on trouve les coefficients de Hansen :



$$X_0^{-5,0} = \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) (1 - e^2)^{-7/2} \quad ; \quad X_0^{-5,2} = \frac{3}{4}e^2 (1 - e^2)^{-7/2} \quad ; \quad X_0^{-5,4} = 0$$


d'où l'expression du terme indépendant de  $M$  dans le développement de Fourier de  $U_{J_4}$  :

$$\begin{aligned} \overline{U}_{J_4}(a, e, i, -, \omega, -) = & -\mu J_4 \frac{a_e^4}{a^5} (1 - e^2)^{-7/2} \times \\ & \left\{ \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{8}\sin^2 i + \frac{105}{64}\sin^4 i\right) + \frac{3}{4}e^2 \left(\frac{15}{8}\sin^2 i - \frac{35}{16}\sin^4 i\right) \cos 2\omega \right\} \end{aligned} \quad (5.58)$$

Notons que contrairement à  $\overline{U}_{J_2}$ , cette expression dépend de  $\omega$ .

Revenons à la forme générale du potentiel perturbateur en  $J_2$  exprimé en fonction des éléments osculateurs :

$$\begin{aligned} U_{J_2}(a, e, i, -, \omega, M) = & \mu J_2 \frac{a_e^2}{a^3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sin^2 i\right) \left( (1 - e^2)^{-3/2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{-3,0}(e) \cos kM \right) \right. \\ & + \frac{3}{4}\sin^2 i \left( \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{-3,2}(e) \cos(2\omega + kM) \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{-3,-2}(e) \cos(2\omega - kM) \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.59)$$

 **Exercice** Notons que  $\Omega$  n'apparaît pas dans cette expression, et donc  $\frac{\partial U_{J_2}}{\partial \Omega} = 0$ . On en déduirait assez facilement les dérivées partielles de  $U_{J_2}$  par rapport à  $a, i, \omega$  et  $M$ . Au contraire, la dérivée partielle par rapport à  $e$  est plus difficile à obtenir ; on peut en fait expliciter la dérivée des coefficients de Hansen en fonction d'autres coefficients de Hansen par la formule :

$$\begin{aligned} \frac{d}{de} X_k^{n,m}(e) = & \frac{1}{2}(m - n) X_k^{n-1,m+1}(e) - \frac{1}{2}(m + n) X_k^{n-1,m-1}(e) \\ & + \frac{m}{2(1 - e^2)} (X_k^{n,m+1}(e) - X_k^{n,m-1}(e)) \end{aligned} \quad (5.60)$$

Cette expression s'obtient en dérivant par rapport à  $e$  l'expression définissant les coefficients de Hansen :

$$X_k^{n,m}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^n \exp \sqrt{-1} m w \exp -\sqrt{-1} k M dM$$

et sachant que le formulaire du mouvement képlérien permet de trouver les dérivées de  $r$  et de  $w$  par rapport à  $e$  ; on a en effet d'abord :

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{a} = 1 - e \cos E &\implies \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{r}{a}\right) = -\cos E + e \sin E \frac{\partial E}{\partial e} \\ M = E - e \sin E &\implies 0 = (1 - e \cos E) \frac{\partial E}{\partial e} - \sin E \\ \frac{r}{a} \cos w = \cos E - e & \end{aligned} \right\} \implies \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{r}{a}\right) = -\frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} = -\cos w$$


On a ensuite, en prenant la dérivée logarithmique de la relation  $\tan^2 \frac{w}{2} = \frac{1+e}{1-e} \tan^2 \frac{E}{2}$  :

$$\frac{dw}{\sin w} = \frac{dE}{\sin E} + \frac{de}{1-e^2} \implies \frac{\partial w}{\partial e} = \frac{\sin w}{1-e^2} + \frac{\sin w}{\sin E} \frac{\partial E}{\partial e} = \sin w \left( \frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2} \right)$$

Si l'excentricité  $e$  reste assez petite on peut développer les coefficients de Hansen en séries entières de  $e$  et tronquer ces séries à un certain degré. Le calcul de ces développements polynomiaux en  $e$  peut se faire en variables complexes  $X$  et  $\bar{X}$  (où  $X = e \exp \sqrt{-1} M$ ) et en utilisant la méthode vue en §3-13.8. En revenant ensuite aux variables  $e$  et  $M$ , on obtient le résultat suivant, au degré 3 en  $e$  :

Dev4.1

$$\begin{aligned}
 U_{J_2}(a, e, i, -, \omega, M) = \mu J_2 \frac{a_e^2}{a^3} \times \\
 \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) \left( (1 - e^2)^{-3/2} + \left( 3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \cos M \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{9}{2} e^2 \cos 2M + \frac{53}{8} e^3 \cos 3M + O(e^4) \right) \right. \\
 \left. + \frac{3}{4} \sin^2 i \left( \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 \right) \cos(2\omega + 2M) + \left( -\frac{e}{2} + \frac{e^3}{16} \right) \cos(2\omega + M) \right. \right. \\
 \left. \left. + \left( \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos(2\omega + 3M) + \frac{17}{2} e^2 \cos(2\omega + 4M) \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{e^3}{48} \cos(2\omega - M) + \frac{845}{48} e^3 \cos(2\omega + 5M) + O(e^4) \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

 **Exercice** Ayant obtenu le développement de  $U_{J_2}$  en fonction des éléments osculateurs classiques, il est ensuite facile d'en déduire d'autres expressions de  $U_{J_2}$  dans d'autres variables, par exemple  $(a, e, i, \Omega, \varpi, L)$  ou les variables canoniques de Delaunay  $(L, G, \Theta, l, g, \vartheta)$ . Ainsi, avec  $\omega = \varpi - \Omega$  et  $M = L - \varpi$ , le développement (5.61) devient :

$$\begin{aligned}
 U_{J_2}(a, e, i, \Omega, \varpi, L) = \mu J_2 \frac{a_e^2}{a^3} \times \\
 \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) \left( (1 - e^2)^{-3/2} + \left( 3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \cos(L - \varpi) \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{9}{2} e^2 \cos(2L - 2\varpi) + \frac{53}{8} e^3 \cos(3L - 3\varpi) + O(e^4) \right) \right. \\
 \left. + \frac{3}{4} \sin^2 i \left( \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 \right) \cos(2L - 2\Omega) + \left( -\frac{e}{2} + \frac{e^3}{16} \right) \cos(L + \varpi - 2\Omega) \right. \right. \\
 \left. \left. + \left( \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos(3L - \varpi - 2\Omega) + \frac{17}{2} e^2 \cos(4L - 2\varpi - 2\Omega) \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{e^3}{48} \cos(L - 3\varpi + 2\Omega) + \frac{845}{48} e^3 \cos(5L - 3\varpi - 2\Omega) + O(e^4) \right) \right\} \quad (5.62)
 \end{aligned}$$

Notons que ce développement est moins simple que le précédent puisqu'il dépend de toutes les variables, mais il est plus "régulier" : en facteur d'un  $\cos(jL + k\varpi + l\Omega)$  on trouve au moins  $e^{|k|} \sin^{|l|} i$ , et l'on a toujours  $j + k + l = 0$  (cf. **propriété de d'Alembert**).

De même, pour exprimer  $U$  en éléments de Delaunay, il suffit de remplacer  $a$  par  $L^2/\mu$ ,  $e$  par  $\sqrt{1 - G^2/L^2}$ ,  $\sin^2 i$  par  $(1 - \Theta^2/G^2)$ ,  $\omega$  par  $g$  et  $M$  par  $l$ . Ainsi, par exemple, la partie  $\overline{U}_{J_2}$  indépendante de l'anomalie moyenne devient :

$$\overline{U}_{J_2}(L, G, \Theta, -, -, -) = \mu^4 J_2 \frac{a_e^2}{L^3 G^3} \left( -\frac{1}{4} + \frac{3\Theta^2}{4G^2} \right) \quad (5.63)$$

On va maintenant utiliser ces diverses expressions du potentiel dans les équations de Lagrange ou d'Hamilton, et introduire à leur propos des méthodes d'intégration par approximations successives, appelées encore méthodes de perturbations ; on en profitera pour découvrir les principales particularités du mouvement d'un satellite perturbé par l'aplatissement de sa planète.

## 22. Méthodes de perturbations

Ayant exprimé le potentiel perturbateur  $U$  en fonction d'éléments osculateurs, il est assez facile d'en déduire les variations de ces éléments par les équations de Lagrange relatives à ces éléments (cf. (5.45) à (5.50), ou (5.51)). Ces équations montrent qu'il faut distinguer entre *variables angulaires* et *variables métriques*, un peu comme on le fait pour les variables et leurs conjuguées dans les équations canoniques (5.42) : avec les éléments osculateurs classiques, les variables métriques sont  $a$ ,  $e$  et  $i$ , tandis que  $M$ ,  $\omega$  et  $\Omega$  (ou  $L$ ,  $\varpi$  et  $\Omega$ ) sont les variables angulaires. Cette distinction provient de ce que les variations de  $a$ ,  $e$  et  $i$  ne dépendent que des dérivées partielles de  $U$  par rapport à  $M$ ,  $\omega$  et  $\Omega$  (ou à  $L$ ,  $\varpi$  et  $\Omega$ ), et qu'inversement, les variations des variables angulaires ne dépendent que des dérivées partielles de  $U$  par rapport aux variables métriques. Les variables angulaires n'interviennent d'ailleurs dans  $U$  qu'à travers les arguments de fonctions cosinus, sous forme de combinaisons linéaires entières de ces angles (par exemple, dans (5.61) :  $jM + 2\omega$ , ou dans (5.62) :  $jL + k\varpi + l\Omega$ ). Pour représenter les équations (5.45) à (5.50) de manière compacte, il est donc intéressant de regrouper les variables métriques dans une matrice colonne  $\mathbf{x}_1$  et les variables angulaires dans une matrice colonne  $\mathbf{x}_2$  :

$$\mathbf{x}_1 = (x_1^j)_{j=1..3} = \begin{pmatrix} a \\ e \\ i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_2 = (x_2^j)_{j=1..3} = \begin{pmatrix} M \\ \omega \\ \Omega \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

Pb<sub>9</sub>  
Pb<sub>10</sub>

Alors, la fonction perturbatrice  $U$  peut être écrite sous la forme :

$$U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \varepsilon \left( U_0(\mathbf{x}_1) + \sum_{\mathbf{k}} U_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_1) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_2) \right) \quad (5.65)$$

où  $\mathbf{k}$  représente une matrice ligne composé de 3 entiers  $(j, k, l)$  de telle sorte que le produit scalaire  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_2)$  soit égal à l'argument  $jM + k\omega + l\Omega$ . Dans (5.65),  $\varepsilon$  est le petit paramètre représentatif de la perturbation : on fera par exemple  $\varepsilon = J_2$ , mais dans  $U$  on pourra mettre aussi les autres termes en  $J_n$  de la fonction perturbatrice (bien qu'ils soient alors au moins de l'ordre de  $\varepsilon^2$ ) ; quant aux termes en  $J_{np}$ , leurs arguments étant de la forme  $p\theta + jM + k\omega + l\Omega$  où  $\theta$  est l'angle de rotation de la planète sur elle-même, on pourra aussi les inclure dans  $U$  en supposant que  $\mathbf{k}$  est alors un quadruplet d'entiers.

On a séparé dans  $U$  la partie  $U_0$  indépendante des variables angulaires ; le reste de  $U$  ne contient que des termes périodiques dont les arguments sont des combinaisons de variables angulaires et dont les coefficients ne dépendent que des variables métriques : on suppose donc que l'ensemble des triplets  $\mathbf{k}$  ne contient pas l'élément  $(0, 0, 0)$ .

En appliquant les équations de Lagrange et en notant  $\mathbf{n}$  la matrice colonne de composantes  $(n, 0, 0)$  où  $n$  représente le moyen mouvement osculateur tel que  $n^2 a^3 = \mu$ , les équations du mouvement perturbé se présentent sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} &= \varepsilon \sum_{\mathbf{k}} n \mathbf{P}_{1\mathbf{k}}(\mathbf{x}_1) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_2) \\ \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} &= \mathbf{n} + \varepsilon \left( n \mathbf{S}(\mathbf{x}_1) + \sum_{\mathbf{k}} n \mathbf{P}_{2\mathbf{k}}(\mathbf{x}_1) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_2) \right) \end{aligned} \quad (5.66)$$

Notons que le terme  $\mathbf{S}(\mathbf{x}_1)$  provient des dérivées partielles de  $U_0$  par rapport aux variables métriques, et que ce terme n'existe que dans les variations des variables angulaires. On aurait bien sûr obtenu les mêmes équations en



partant des équations de Gauss, et donc, comme dans les équations (5.34) à (5.39), on a fait ressortir le facteur  $n$  présent dans chaque équation. Par ailleurs, la forme des équations serait la même si  $\mathbf{x}_2$  représentait les angles  $L$ ,  $\varpi$  et  $\Omega$ , ou même si  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  représentaient les éléments de Delaunay :  $\mathbf{x}_1 = (L, G, \Theta)$  et  $\mathbf{x}_2 = (l, g, \vartheta)$ . Cependant, avec des variables canoniques, on utilise volontiers des méthodes de perturbation “canoniques”, spécifiques à ce type de variables. Avant de voir l’une de ces méthodes, on va développer une méthode plus classique, valable pour l’étude du mouvement d’un satellite artificiel perturbé par la non-sphéricité de sa planète, et basée sur des équations exprimées sous la forme (5.66).

### 22.1. Méthode itérative classique

On se propose de montrer que l’on peut exprimer une solution des équations (5.66) sous la forme :

$$\mathbf{x}_i(t) = \bar{\mathbf{x}}_i(t) + \Delta\mathbf{x}_i(t) \quad \text{avec} \quad i = 1 \text{ et } 2 \quad (5.67)$$

c’est-à-dire qu’on pourra aussi écrire :

$$\begin{pmatrix} a \\ e \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} + \Delta a \\ \bar{e} + \Delta e \\ \bar{i} + \Delta i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} M \\ \omega \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{M} + \Delta M \\ \bar{\omega} + \Delta\omega \\ \bar{\Omega} + \Delta\Omega \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

Les fonctions  $\Delta\mathbf{x}_i$  sont supposées être de l’ordre de  $\varepsilon$ , bornées quelque soit  $t$  et assez petites devant  $\bar{\mathbf{x}}_i$  pour que les fonctions de  $\mathbf{x}_1$  et de  $\mathbf{x}_2$  présentes dans (5.66) admettent des développements de Taylor au voisinage de  $\bar{\mathbf{x}}_1$  et  $\bar{\mathbf{x}}_2$  qui soient rapidement convergents. On verra à *posteriori* que ces conditions sont généralement remplies, les  $\Delta\mathbf{x}_i(t)$  étant alors en moyenne nuls dans le temps et les  $\bar{\mathbf{x}}_i$  représentant la valeur moyenne de la solution. En

utilisant cette forme de solution, les équations deviennent alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{x}}_1}{dt} + \frac{d\Delta\mathbf{x}_1}{dt} &= \varepsilon \sum_{\mathbf{k}} (\bar{n} + \Delta n) \mathbf{P}_{1\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}_1 + \Delta\mathbf{x}_1) \sin(\mathbf{k} \cdot (\bar{\mathbf{x}}_2 + \Delta\mathbf{x}_2)) \\ \frac{d\bar{\mathbf{x}}_2}{dt} + \frac{d\Delta\mathbf{x}_2}{dt} &= \bar{\mathbf{n}} + \Delta\mathbf{n} + \varepsilon \left[ (\bar{n} + \Delta n) \mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}_1 + \Delta\mathbf{x}_1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mathbf{k}} (\bar{n} + \Delta n) \mathbf{P}_{2\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}_1 + \Delta\mathbf{x}_1) \cos(\mathbf{k} \cdot (\bar{\mathbf{x}}_2 + \Delta\mathbf{x}_2)) \right] \end{aligned} \quad (5.69)$$

Dans ces équations, conformément à (5.20), le moyen mouvement  $n(t) = \bar{n}(t) + \Delta n(t)$  est relié au demi-grand axe  $a(t) = \bar{a}(t) + \Delta a(t)$  par la troisième loi de Kepler. On a donc :

$$\bar{n}^2 \left(1 + \frac{\Delta n}{\bar{n}}\right)^2 \bar{a}^3 \left(1 + \frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^3 = \bar{n}^2 \bar{a}^3 \left(1 + \frac{2\Delta n}{\bar{n}} + \frac{3\Delta a}{\bar{a}} + \dots\right) = \mu \quad (5.71)$$

En développant les seconds membres en séries de Taylor, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{x}}_1}{dt} + \frac{d\Delta\mathbf{x}_1}{dt} &= \varepsilon \left( \sum_{\mathbf{k}} \bar{n} \mathbf{P}_{1\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}_1) \sin(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \right) \\ &\quad + \varepsilon \left[ \sum_{\mathbf{k}} \left( \Delta n \mathbf{P}_{1\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}_1) + \bar{n} \left( \frac{\partial \mathbf{P}_{1\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{x}_1} \right)_0 \cdot \Delta\mathbf{x}_1 \right) \sin(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mathbf{k}} \bar{n} (\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{x}_2) \mathbf{P}_{1\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}_1) \cos(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \right] + \dots \end{aligned} \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{\mathbf{x}}_2}{dt} + \frac{d\Delta\mathbf{x}_2}{dt} = & \bar{\mathbf{n}} + \Delta\mathbf{n} + \varepsilon \left( \bar{n} \mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}_1) + \sum_{\mathbf{k}} \bar{n} \mathbf{P}_{2\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}_1) \cos(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \right) \\
 & + \varepsilon \left[ \Delta n \mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}_1) + \bar{n} \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{x}_1} \right)_0 \cdot \Delta \mathbf{x}_1 \right. \\
 & + \sum_{\mathbf{k}} \left( \Delta n \mathbf{P}_{2\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}_1) + \bar{n} \left( \frac{\partial \mathbf{P}_{2\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{x}_1} \right)_0 \cdot \Delta \mathbf{x}_1 \right) \cos(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \\
 & \left. - \sum_{\mathbf{k}} \bar{n} (\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{x}_2) \mathbf{P}_{2\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}_1) \sin(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

Dans ces expressions, une quantité telle que  $\left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{x}_1} \right)_0 \cdot \Delta \mathbf{x}_1$  représente la somme :  $\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}_1)}{\partial \bar{x}_1^j} \Delta x_1^j$ . On n'a écrit ici que les premiers termes du développement de Taylor, correspondant finalement aux ordres 1 et 2 en  $\varepsilon$  si l'on considère que les quantités  $\Delta \mathbf{x}_i$  sont elles-mêmes d'ordre 1 en  $\varepsilon$ .

On utilise maintenant la forme de ces équations pour séparer, dans chaque  $\mathbf{x}_i$ , une solution moyenne  $\bar{\mathbf{x}}_i$  et des variations périodiques  $\Delta \mathbf{x}_i$  autour de cette moyenne.

### 22.1.1. Première approximation

Dans les équations précédentes, on ne conserve que les parties d'ordre 1 en  $\varepsilon$  en faisant l'hypothèse que  $\Delta \mathbf{x}_i$  est lui-même d'ordre 1. Alors, on identifie d'abord :

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}_1}{dt} = 0 \implies \boxed{\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_1 &= \bar{\mathbf{x}}_{10} \\ &= (a_0, e_0, i_0) \text{ constant} \end{aligned}} \quad (5.74)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}_2}{dt} = \bar{\mathbf{n}} + \varepsilon \bar{\mathbf{n}} \mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}_1) = \mathbf{n}_{x_2} \text{ constant} \implies \boxed{\bar{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{n}_{x_2} t + \bar{\mathbf{x}}_{20}}$$

$\bar{n}$  est ici une constante  $n_0$ , déduite de  $\bar{a} = a_0$ , de façon à avoir  $\bar{n}^2 \bar{a}^3 = n_0^2 a_0^3 = \mu$ . Alors, la relation (5.71) impose qu'à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  on ait :

$$\Delta n = -\frac{3}{2} \frac{\bar{n}}{\bar{a}} \Delta a \quad (5.75)$$

La matrice  $\mathbf{n}_{x_2}$  comporte maintenant 3 composantes non nulles que l'on notera pour la suite ( $n_M, n_\omega, n_\Omega$ ) : la première est d'ordre zéro, comme  $\bar{n}$ , tandis que les deux autres (vitesses angulaires de  $\omega$  et de  $\Omega$ ) sont de l'ordre de  $\varepsilon$ . On identifie ensuite :

$$\frac{d\Delta \mathbf{x}_1}{dt} = \varepsilon \sum_{\mathbf{k}} \bar{n} \mathbf{P}_{1\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}_1) \sin(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2)$$

$$\frac{d\Delta \mathbf{x}_2}{dt} = \Delta \mathbf{n} + \varepsilon \sum_{\mathbf{k}} \bar{n} \mathbf{P}_{2\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}_1) \cos(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \quad (5.76)$$

Vue la nature des solutions  $\bar{\mathbf{x}}_1$  et  $\bar{\mathbf{x}}_2$ , ces deux équations s'intègrent facilement terme à terme, et, comme on a déjà introduit des constantes d'intégration dans  $\bar{\mathbf{x}}_1$  et  $\bar{\mathbf{x}}_2$ , une solution particulière suffit (on n'ajoute donc plus

de nouvelle constante) :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_1(t) &= -\varepsilon \sum_{\mathbf{k}} \frac{\bar{n}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_{x_2})} \mathbf{P}_{1\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}_1) \cos(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \\ \Delta \mathbf{x}_2(t) &= \int \Delta \mathbf{n} dt + \varepsilon \sum_{\mathbf{k}} \frac{\bar{n}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_{x_2})} \mathbf{P}_{2\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}_1) \sin(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \end{aligned} \tag{5.77}$$

Dans cette dernière expression, seule la première composante de  $\Delta \mathbf{n}$  est non nulle et égale à :  $-\frac{3\bar{n}}{2\bar{a}} \Delta a$  (où  $\Delta a = \Delta x_1^1$ ). Dans  $\Delta x_2^1$  (c'est-à-dire dans  $\Delta M$ ), on a donc des termes intégrés deux fois :

$$\int \Delta n dt = \frac{3}{2\bar{a}} \varepsilon \sum_{\mathbf{k}} \frac{\bar{n}^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_{x_2})^2} P_{1\mathbf{k}}^1(\bar{\mathbf{x}}_1) \sin(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \tag{5.78}$$

En résumé, la solution ainsi obtenue comporte une partie  $\bar{\mathbf{x}}_i$  constante ou linéaire en  $t$  et appelée *partie séculaire* ; elle est d'ordre zéro en  $\varepsilon$ . La partie  $\Delta \mathbf{x}_i$  est une somme de *termes périodiques*, donc nulle en moyenne sur un temps infini. Alors, dans les équations (5.66) et (5.67), les termes  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{P}_{i\mathbf{k}}$  sont aussi appelés respectivement *termes séculaires* et *termes périodiques*.

**Remarque.** On constate que les solutions  $\Delta \mathbf{x}_i$  ont toutes  $\varepsilon$  en facteur ; elles sont donc bien de l'ordre de  $\varepsilon$  à condition qu'en facteur de cet  $\varepsilon$  on n'ait pas une quantité de l'ordre de  $1/\varepsilon$ . Or, l'intégration des termes trigonométriques fait intervenir les *diviseurs*  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_{x_2}) = jn_M + kn_\omega + ln_\Omega$  ; bien sûr, il faut que ces diviseurs soient tous différents de zéro, et même plus, si l'on veut que  $\Delta \mathbf{x}_i$  soit de l'ordre de  $\varepsilon$ , il faut que, quelque soit  $\mathbf{k}$ , les produits  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_{x_2})$  soient grands devant  $\varepsilon \bar{n}$ . En outre, comme certains termes subissent une double intégration, donc avec des diviseurs élevés au carré, il faut même avoir  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_{x_1}) \gg \sqrt{\varepsilon} \bar{n}$ . Comme on a exclu le triplet

$\mathbf{k} = (0, 0, 0)$ , cela revient à dire qu'aucune des combinaisons possibles ( $jn_M + kn_\omega + ln_\Omega$ ) ne doit être très petite par rapport à  $\bar{n}$ . Cependant, il peut *a priori* exister des triplets non nuls engendrant des combinaisons de l'ordre de  $\varepsilon \bar{n}$  : il suffit que  $j$  soit nul et alors  $kn_\omega + ln_\Omega$  est bien de l'ordre de  $\varepsilon \bar{n}$ . Ces termes à basse fréquence, dont l'argument ne dépend pas de  $M$ , sont appelés *termes à longue période*, tandis que ceux dépendant de  $M$  sont par définition des *termes à courte période*. En les intégrant comme en (5.77), les termes à longue période donneraient donc des termes d'ordre zéro dans les solutions  $\Delta \mathbf{x}_i$  (notons cependant que de tels termes ne peuvent apparaître dans la partie intégrée deux fois car, étant indépendants de  $M$ , ils sont automatiquement absents de l'équation donnant  $\frac{da}{dt}$  (égal à  $\frac{2}{na} \frac{\partial U}{\partial M}$ ) et de sa solution  $\Delta a$ ). Pour qu'ils n'apparaissent pas dans  $\Delta \mathbf{x}_i$ , on devrait donc exclure les termes à longue période des seconds membres de (5.76) et les remplacer, avec les termes séculaires, dans les équations (5.74) donnant  $\frac{d\bar{\mathbf{x}}_i}{dt}$ .

En fait, dans le cas de la perturbation par  $J_2$ , le seul terme à longue période qu'on pourrait avoir dans  $U_{J_2}$  est celui dont l'argument est  $2\omega$ , mais on a vu qu'il est identiquement nul. Donc, le schéma d'intégration proposé ci-dessus convient et il n'y a pas de terme à longue période dans cette première approximation si l'on réduit les perturbations à la seule partie en  $J_2$ . Cependant, si en plus de cette partie on considérait la partie correspondant au  $J_4$ , on trouverait un terme en  $\cos 2\omega$  (cf. (5.58)); toutefois, comme  $J_4$  est généralement de l'ordre de  $J_2^2$  (donc de l'ordre de  $\varepsilon^2$ ) et comme  $n_\omega$  est de l'ordre de  $\varepsilon \bar{n}$ , l'intégration du terme  $\bar{n} J_4 P(\bar{\mathbf{x}}_1) \cos 2\bar{\omega}$  donne  $\frac{\bar{n} J_4}{2n_\omega} P(\bar{\mathbf{x}}_1) \sin 2\bar{\omega}$ , c'est-à-dire finalement une quantité de l'ordre de  $\varepsilon$ . Donc, là encore, le schéma d'intégration convient, mais il faut noter qu'en général, un terme à longue période en facteur de  $\varepsilon^p$  dans les seconds membres des équations, se retrouve en facteur de  $\varepsilon^{p-1}$  dans la solution.

Avant de voir la deuxième approximation, il convient d'examiner l'ordre de grandeur des perturbations pour justifier l'hypothèse faite sur la petitesse des termes périodiques par rapport aux termes séculaires. Nous ferons cette justification d'un point de vue pratique, en appliquant la première approximation trouvée ci-dessus au cas d'un satellite artificiel de la Terre perturbé uniquement par les termes en  $J_2$  du potentiel de gravitation.

### 22.1.2. Application au cas de la perturbation par le “ $J_2$ ” de la Terre

Pb<sub>10</sub>  
Pb<sub>12</sub>

La partie  $\bar{U}_{J_2}$  trouvée en (5.55) s’identifie au terme  $U_0(a, e, i)$  dans (5.65). La partie séculaire des équations (5.66) et (5.67) provient des dérivées partielles de  $U_0$  par rapport à  $a$ ,  $e$  et  $i$ , conformément aux équations de Lagrange (5.45) à (5.50). Reprenons les équations (5.74) avec les notations complètes des éléments osculateurs (5.68b), et remplaçons dans  $U_0$  les éléments par leur valeur moyenne :

$$U_0 = U_0(\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}, -, -, -) = \mu J_2 \frac{a_e^2}{\bar{a}^3} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 \bar{i} \right) (1 - \bar{e}^2)^{-3/2}$$

On en déduit les équations de Lagrange “moyennées” :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= \frac{2}{\bar{n}\bar{a}} \frac{\partial U_0}{\partial \bar{M}} = 0 \\ \frac{d\bar{e}}{dt} &= \frac{1 - \bar{e}^2}{\bar{n}\bar{a}^2\bar{e}} \frac{\partial U_0}{\partial \bar{M}} - \frac{(1 - \bar{e}^2)^{1/2}}{\bar{n}\bar{a}^2\bar{e}} \frac{\partial U_0}{\partial \bar{\omega}} = 0 \\ \frac{d\bar{i}}{dt} &= \frac{1}{\bar{n}\bar{a}^2 \sin \bar{i} (1 - \bar{e}^2)^{1/2}} \left( \cos \bar{i} \frac{\partial U_0}{\partial \bar{\omega}} - \frac{\partial U_0}{\partial \bar{\Omega}} \right) = 0 \end{aligned} \tag{5.79}$$

puis :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{M}}{dt} &= \bar{n} - \frac{2}{\bar{n}\bar{a}} \frac{\partial U_0}{\partial \bar{a}} + \frac{1 - \bar{e}^2}{\bar{n}\bar{a}^2\bar{e}} \frac{\partial U_0}{\partial \bar{e}} = \bar{n} + \frac{3}{4} \bar{n} J_2 \frac{a_e^2}{\bar{a}^2} \frac{(2 - 3 \sin^2 \bar{i})}{(1 - \bar{e}^2)^{3/2}} \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \frac{(1 - \bar{e}^2)^{1/2}}{\bar{n}\bar{a}^2\bar{e}} \frac{\partial U_0}{\partial \bar{e}} - \frac{\cos \bar{i} (1 - \bar{e}^2)^{-1/2}}{\bar{n}\bar{a}^2 \sin \bar{i}} \frac{\partial U_0}{\partial \bar{i}} = \frac{3}{4} \bar{n} J_2 \frac{a_e^2}{\bar{a}^2} \frac{(4 - 5 \sin^2 \bar{i})}{(1 - \bar{e}^2)^2} \\ \frac{d\bar{\Omega}}{dt} &= \frac{(1 - \bar{e}^2)^{-1/2}}{\bar{n}\bar{a}^2 \sin \bar{i}} \frac{\partial U_0}{\partial \bar{i}} = -\frac{3}{2} \bar{n} J_2 \frac{a_e^2}{\bar{a}^2} \frac{\cos \bar{i}}{(1 - \bar{e}^2)^2} \end{aligned} \tag{5.80}$$

Les variables métriques sont donc constantes en moyenne :

$$\bar{a} = a_0 \text{ et } \bar{n} = n_0 \text{ avec } n_0^2 a_0^3 = \mu \quad \bar{e} = e_0 \quad \bar{i} = i_0 \quad (5.81)$$

et les variables angulaires sont des fonctions linéaires de  $t$  :

$$\bar{M} = M_0 + n_M t \quad \text{avec} \quad n_M = n_0 + \frac{3}{4} n_0 J_2 \frac{a_e^2}{a_0^2} \frac{(2 - 3 \sin^2 i_0)}{(1 - e_0^2)^{3/2}} \quad (5.82)$$

$$\bar{\omega} = \omega_0 + n_\omega t \quad \text{avec} \quad n_\omega = \frac{3}{4} n_0 J_2 \frac{a_e^2}{a_0^2} \frac{(4 - 5 \sin^2 i_0)}{(1 - e_0^2)^2} \quad (5.83)$$

$$\bar{\Omega} = \Omega_0 + n_\Omega t \quad \text{avec} \quad n_\Omega = -\frac{3}{2} n_0 J_2 \frac{a_e^2}{a_0^2} \frac{\cos i_0}{(1 - e_0^2)^2} \quad (5.84)$$

Ce sont les *éléments moyens* de l'orbite du satellite (à l'ordre 1 en  $J_2$ ). Pour la Terre, avec  $J_2 \approx 10^{-3}$ , on voit que les vitesses angulaires du nœud et du périégée sont environ mille fois plus petites que  $n_0$ , vitesse angulaire du satellite sur son orbite. Pour un satellite qui fait 15 tours par jour, le nœud et le périégée tournent donc d'environ  $5^\circ$  par jour, ce qui n'est pas du tout négligeable. Pour fixer les idées, pour un satellite terrestre situé à 800 km d'altitude ( $a_0 = 7178$  km),  $n_0$  est égal à  $5125,2$  par jour tandis que la quantité  $\frac{3}{2} n_0 J_2 \frac{a_e^2}{a_0^2}$  vaut  $6,567$  par jour. C'est aussi la valeur de  $(n_M - n_0)$  ou de  $n_\omega/2$  ou de  $-n_\Omega$  pour  $e_0 = 0$  et  $i_0 = 0$ . Il est alors facile d'en déduire  $n_\Omega$ ,  $n_\omega$  et  $n_M$  pour d'autres valeurs de  $a_0$ , de  $e_0$  ou de  $i_0$ .

**Remarque 1.** Pour des valeurs fixées de  $e_0$  et de  $i_0$ , ces vitesses diminuent très rapidement lorsqu'on augmente  $a_0$ . En effet, elles varient comme  $n_0/a_0^2$ , et donc, pour une autre orbite de demi-grand axe  $a'_0$ , avec  $n_0^2 a_0^3 = \mu =$



$n_0'^2 a_0'^3$  on a :

$$\frac{n_0'}{a_0'^2} = \frac{n_0}{a_0^2} \left(\frac{a_0}{a_0'}\right)^{7/2} = \frac{n_0}{a_0^2} \left(\frac{n_0'}{n_0}\right)^{5/3}$$

Donc, doubler le demi-grand axe revient à diviser ces vitesses par  $2^{7/2} = 11,3$ . On voit bien ici que la forme de la Terre a de l'influence essentiellement sur les satellites proches. Pour un satellite géostationnaire ( $a_0 = 6,6 a_e$ ), on calcule que  $n_\Omega$  est de l'ordre de  $-50''$  par jour tandis que pour la Lune ( $a_0 = 60 a_e$ ), il vaut seulement  $-7'',5$  par an ! (ce très petit mouvement du nœud de la Lune est d'ailleurs masqué par des perturbations analogues provenant de l'action du Soleil et qui atteignent  $-190''$  par jour)

**Remarque 2.** Les vitesses du nœud et du périégée sont inversement proportionnelles au carré du paramètre moyen de l'orbite :  $a_0(1 - e_0^2)$

**Remarque 3.** Suivant le signe de  $n_\Omega$ , le nœud moyen ( $\bar{\Omega}$ ) rétrograde ou avance : il rétrograde pour  $i_0 < 90^\circ$ , est fixe pour  $i_0 = 90^\circ$  et avance pour  $i_0 > 90^\circ$ . La vitesse de rétrogradation du nœud est maximum pour  $i_0 = 0$ , mais alors le nœud est lui-même indéterminé ! C'est donc au voisinage de  $i_0 = 0$  que le nœud est le plus sensible à la perturbation par  $J_2$ . Pour des orbites basses, lorsque l'inclinaison  $i_0$  est voisine de  $100^\circ$ , le nœud avance de 1 tour par an, tout comme le Soleil autour de la Terre : de tels satellites sont sur une orbite dite *orbite héliosynchrone*.

**Remarque 4.** Le périégée avance par rapport au nœud si  $i_0 < i_1 = 63^\circ 26'$  ou si  $i_0 > 180^\circ - i_1 = 116^\circ 34'$  (racines de l'équation :  $4 - 5 \sin^2 i = 0$ ). Il est fixe par rapport au nœud pour  $i_0 = i_1$  ou  $180^\circ - i_1$  ; il rétrograde si  $i_0$  est compris entre ces deux valeurs. La valeur  $i_1 = 63^\circ 26'$  ou son supplément est appelée *inclinaison critique* car au voisinage de cette valeur,  $n_\omega$  peut être de l'ordre de  $J_2^2$ , de sorte que si l'on intégrait le terme  $\bar{n} J_4 P(\bar{x}_1) \cos 2\bar{\omega}$  évoqué plus haut comme un terme à courte période, cela donnerait un terme d'ordre zéro en  $\varepsilon$ . On pourrait rétorquer que ce terme en  $J_4$  est hors de propos puisqu'on s'intéresse ici aux perturbations par le  $J_2$ , mais on verra que même avec le seul  $J_2$ , à la deuxième approximation on trouvera des termes en  $\bar{n} J_2^2 \cos 2\bar{\omega}$  ; ceux-ci ne peuvent être traités sans tenir compte en même temps du terme analogue provenant du  $J_4$ . La méthode développée ci-dessus ne doit donc pas être appliquée dans le voisinage de l'inclinaison critique : il est nécessaire

dans ce cas de traiter les termes à longue période avec les termes séculaires et non avec les termes à courte période.

**Remarque 5.** Le moyen mouvement  $n_M$  est égal à  $n_0$  pour  $i_0 = 54^\circ 44'$  ou  $125^\circ 16'$  (racines de l'équation :  $2 - 3 \sin^2 i = 0$ ). Il est plus petit ou plus grand que  $n_0$  suivant que  $i_0$  est ou non entre ces racines. Cependant, comme le moyen mouvement ne s'annule jamais, il n'y a pas ici d'inclinaison critique.

**Remarque 6.** La longitude moyenne "moyenne" :  $\bar{L} = \bar{\Omega} + \bar{\omega} + \bar{M}$  est bien sûr aussi une fonction linéaire de  $t$  :  $\bar{L} = L_0 + n_L t$ , avec

$$n_L = n_0 \left[ 1 + \frac{3J_2}{4} \frac{a_e^2}{a_0^2} \left( \frac{2 - 3 \sin^2 i_0}{(1 - e_0^2)^{3/2}} + \frac{4 - 5 \sin^2 i_0 - 2 \cos i_0}{(1 - e_0^2)^2} \right) \right] \quad (5.85)$$

La quantité  $n_L$  est appelée *moyen mouvement moyen*.

Evaluons maintenant les termes à courte période provenant des perturbations par le  $J_2$  et donnés en première approximation par les expressions (5.77) et (5.78), solutions des équations (5.76). Ces dernières proviennent en fait de l'application des équations de Lagrange sur la partie "périodique" de  $U$ , c'est-à-dire dépendant explicitement des variables angulaires. D'après (5.59), cette partie s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{J_2} = \mu J_2 \frac{a_e^2}{a^3} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) X_k^{-3,0}(e) \cos kM + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \sin^2 i \left( X_k^{-3,2}(e) \cos(kM + 2\omega) + X_k^{-3,-2}(e) \cos(kM - 2\omega) \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.86)$$

En appliquant les équations de Lagrange (5.45) à (5.50) à  $\tilde{U}_{J_2}$ , et en y remplaçant  $\mu$  par  $n_0^2 a_0^3$  et les éléments osculateurs par leur valeur moyenne obtenue en (5.81) à (5.84), on trouve alors, par exemple pour les équations

relatives à  $a$  et à  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0} \frac{d\Delta a}{dt} &= -n_0 J_2 \frac{a_e^2}{a_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left( 2 - 3 \sin^2 i_0 \right) k X_k^{-3,0}(e_0) \sin k\bar{M} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3k}{2} \sin^2 i_0 \left( X_k^{-3,2}(e_0) \sin(k\bar{M} + 2\bar{\omega}) + X_k^{-3,-2}(e_0) \sin(k\bar{M} - 2\bar{\omega}) \right) \right\} \\ \frac{d\Delta\Omega}{dt} &= \frac{n_0 J_2}{(1 - e_0^2)^{1/2}} \frac{a_e^2}{a_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -3 \cos i_0 X_k^{-3,0}(e_0) \cos k\bar{M} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \cos i_0 \left( X_k^{-3,2}(e_0) \cos(k\bar{M} + 2\bar{\omega}) + X_k^{-3,-2}(e_0) \cos(k\bar{M} - 2\bar{\omega}) \right) \right\} \end{aligned}$$

puis les solutions :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta a}{a_0} &= J_2 \frac{a_e^2}{a_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left( 2 - 3 \sin^2 i_0 \right) X_k^{-3,0}(e_0) \frac{n_0}{n_M} \cos k\bar{M} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \left( X_k^{-3,2}(e_0) \frac{kn_0 \cos(k\bar{M} + 2\bar{\omega})}{kn_M + 2n_\omega} + X_k^{-3,-2}(e_0) \frac{kn_0 \cos(k\bar{M} - 2\bar{\omega})}{kn_M - 2n_\omega} \right) \right\} \end{aligned} \tag{5.87}$$

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \frac{J_2}{(1 - e_0^2)^{1/2}} \frac{a_e^2}{a_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -3 \cos i_0 X_k^{-3,0}(e_0) \frac{n_0}{kn_M} \sin k\bar{M} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \cos i_0 \left( X_k^{-3,2}(e_0) \frac{n_0 \sin(k\bar{M} + 2\bar{\omega})}{kn_M + 2n_\omega} + X_k^{-3,-2}(e_0) \frac{n_0 \sin(k\bar{M} - 2\bar{\omega})}{kn_M - 2n_\omega} \right) \right\} \end{aligned} \tag{5.88}$$

On constate sur ces exemples que les termes à courte période sont de l'ordre de  $J_2$  et décroissent avec la distance comme  $a_0^{-2}$ . Les résultats seraient analogues pour les autres variables. En développant les coefficients

de Hansen en puissances de l'excentricité et en tronquant ces développements au degré 1, il resterait :

$$\frac{\Delta a}{a_0} = J_2 \frac{a_e^2}{a_0^2} \left\{ \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \right) 3e_0 \frac{n_0 \cos \bar{M}}{n_M} + \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \left( \frac{2n_0 \cos(2\bar{M} + 2\bar{\omega})}{2n_M + 2n_\omega} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{e_0}{2} \frac{n_0 \cos(\bar{M} + 2\bar{\omega})}{n_M + 2n_\omega} + \frac{7e_0}{2} \frac{3n_0 \cos(3\bar{M} + 2\bar{\omega})}{3n_M + 2n_\omega} \right) + O(e^2) \right\} \quad (5.89)$$

$$\Delta \Omega = \frac{J_2}{(1 - e_0^2)^{1/2}} \frac{a_e^2}{a_0^2} \left\{ -\frac{9}{2} e_0 \cos i_0 \frac{n_0 \sin \bar{M}}{n_M} + \frac{3}{2} \cos i_0 \left( \frac{n_0 \sin(2\bar{M} + 2\bar{\omega})}{2n_M + 2n_\omega} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{e_0}{2} \frac{n_0 \sin(\bar{M} + 2\bar{\omega})}{n_M + 2n_\omega} + \frac{7e_0}{2} \frac{n_0 \sin(3\bar{M} + 2\bar{\omega})}{3n_M + 2n_\omega} \right) + O(e^2) \right\} \quad (5.90)$$

On obtiendrait aussi directement ces expressions en utilisant les équations de Lagrange avec le développement tronqué de  $U_{J_2}$  donné en (5.61). Pour un satellite à 800 km d'altitude, on trouve que l'amplitude du plus gros terme de  $\Delta a/a_0$  est de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-3} e_0$ , tandis que dans  $\Delta \Omega$ , il est de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-4} \cos i_0$  soit une centaine de secondes de degré. On trouverait des ordres de grandeur analogues dans les autres solutions. La petitesse de ces termes à courte période justifie bien les développements de Taylor effectués dans les équations (5.72) et (5.73) et permet de penser qu'en reportant dans ces équations les solutions  $\Delta \mathbf{x}_i$  que l'on vient de déterminer, on pourra amorcer un processus d'itérations rapidement convergent.

**Remarque.** On peut aussi exprimer sous une forme non développée cette première approximation des perturbations dues au  $J_2$  : on dispose en effet des expressions (5.34) à (5.39), issues des équations de Gauss, et qui sont des équations rigoureuses car on n'y a pas développé  $a/r$  ou  $w$  en fonction de  $M$ . Or, on sait maintenant qu'en première approximation on peut assimiler  $a$ ,  $e$ ,  $i$  et  $\omega$  à des constantes  $a_0$ ,  $e_0$ ,  $i_0$  et  $\omega_0$  (en négligeant les variations de ces éléments, qui sont de l'ordre de  $J_2$ ). Alors, en remplaçant dans ces équations  $a$ ,  $e$ ,  $i$  et  $\omega$  par ces constantes, leurs seconds membres ne sont plus que des fonctions de  $r$  et de  $w$ , où  $r$  est lui-même fonction de  $w$  par le formulaire du mouvement képlérien. La loi des aires permet ensuite de considérer  $w$  comme variable

indépendante à la place de  $t$ , en écrivant :  $r^2 dw = n_0 a_0^2 (1 - e_0^2)^{1/2} dt$ . Par exemple, l'équation (5.35) relative à  $\Omega$  devient :

$$\frac{d\Omega}{dw} = -\frac{3}{2} \frac{J_2}{1 - e_0^2} \left(\frac{a_e}{a_0}\right)^2 \frac{a_0}{r} \cos i_0 (1 - \cos(2\omega_0 + 2w))$$

En y remplaçant  $\frac{a_0}{r}$  par  $\frac{1 + e_0 \cos w}{1 - e_0^2}$ , on obtient ensuite :

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dw} = -\frac{3}{2} \frac{J_2}{(1 - e_0^2)^2} \left(\frac{a_e}{a_0}\right)^2 \cos i_0 & \left(1 + e_0 \cos w - \cos(2\omega_0 + 2w) + \right. \\ & \left. - \frac{e_0}{2} \cos(2\omega_0 + w) - \frac{e_0}{2} \cos(2\omega_0 + 3w)\right) \end{aligned}$$

et on peut intégrer par rapport à  $w$  :

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_0 - \frac{3}{2} \frac{J_2 \cos i_0}{(1 - e_0^2)^2} \left(\frac{a_e}{a_0}\right)^2 w + \\ - \frac{3}{2} \frac{J_2 \cos i_0}{(1 - e_0^2)^2} \left(\frac{a_e}{a_0}\right)^2 \left(e_0 \sin w - \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 + 2w) + \right. \\ \left. - \frac{e_0}{2} \sin(2\omega_0 + w) - \frac{e_0}{6} \sin(2\omega_0 + 3w)\right) \end{aligned} \quad (5.91)$$

On retrouve la rétrogradation séculaire du nœud obtenue en (5.84), et l'ordre de grandeur des perturbations périodiques (il faudrait développer  $w$  en fonction de  $e$  et  $M$  pour retrouver exactement l'expression (5.90)). On pourrait procéder de la même façon avec les autres équations (5.34) à (5.39) pour trouver les perturbations d'ordre 1 des autres éléments dues au  $J_2$  et exprimées sous forme finie en fonction de  $w$  ; cependant, cette façon de procéder ne marche qu'à l'ordre 1 ; elle ne peut pas être itérée et on ne peut donc pas trouver les perturbations d'ordre supérieur exprimées sous forme finie en fonction de  $w$ .

### 22.1.3. Deuxième approximation

Disposant de la première approximation des solutions  $\Delta \mathbf{x}_i$ , exprimées en (5.77) et (5.78), on les reporte dans les développements des équations initiales (5.72) et (5.73). On obtient des expressions de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{x}}_1}{dt} + \frac{d\Delta \mathbf{x}_1}{dt} = & \varepsilon \left( \sum_{\mathbf{k}} \bar{n} \mathbf{P}_{1\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}_1) \sin(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \right) + \\ & + \varepsilon^2 \left[ \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\bar{n}}{(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{n}_{x_2})} \mathbf{P}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}_1) \sin(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \cos(\mathbf{k}' \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) + \right. \\ & \left. + \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\bar{n}}{(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{n}_{x_2})} \mathbf{P}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}_1) \cos(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \sin(\mathbf{k}' \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \right] + \dots \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{x}}_2}{dt} + \frac{d\Delta \mathbf{x}_2}{dt} = & \bar{\mathbf{n}} + \Delta \mathbf{n} + \varepsilon \left( \bar{n} \mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}_1) + \sum_{\mathbf{k}} \bar{n} \mathbf{P}_{2\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}_1) \cos(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \right) + \\ & + \varepsilon^2 \left[ \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\bar{n}}{(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{n}_{x_2})} \mathbf{P}_{\mathbf{k}'}^{(3)}(\bar{\mathbf{x}}_1) \cos(\mathbf{k}' \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) + \right. \\ & + \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\bar{n}}{(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{n}_{x_2})} \mathbf{P}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(4)}(\bar{\mathbf{x}}_1) \cos(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \cos(\mathbf{k}' \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) + \\ & \left. + \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\bar{n}}{(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{n}_{x_2})} \mathbf{P}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(5)}(\bar{\mathbf{x}}_1) \sin(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \sin(\mathbf{k}' \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \right] + \dots \end{aligned} \quad (5.93)$$

Les points de suspension représentent des termes de l'ordre de  $\varepsilon^3$  au moins, issus des termes non explicités du développement de Taylor initial. Rappelons que dans ces sommations, les triplets  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$  sont différents de zéro.

Tenant compte des relations :

$$\begin{aligned} \sin(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \cos(\mathbf{k}' \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) &= \frac{1}{2} [\sin((\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) + \sin((\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \bar{\mathbf{x}}_2)] \\ \cos(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \cos(\mathbf{k}' \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) &= \frac{1}{2} [\cos((\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) + \cos((\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \bar{\mathbf{x}}_2)] \\ \sin(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) \sin(\mathbf{k}' \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) &= \frac{1}{2} [\cos((\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \bar{\mathbf{x}}_2) - \cos((\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \bar{\mathbf{x}}_2)] \end{aligned} \tag{5.94}$$

on voit que la substitution des  $\Delta x_i$  dans les équations provoque des combinaisons d'arguments, engendrant soit des termes séculaires, soit des termes périodiques suivant que le triplet  $(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}')$  est nul ou non. Cependant, dans l'équation (5.92), comme les termes dépendent du sinus des arguments, les combinaisons associées à un triplet nul donnent des termes nuls : tout comme à l'ordre 1, il n'y a donc pas de terme séculaire dans cette équation à l'ordre 2 et on peut montrer qu'il n'y en aurait pas non plus aux ordres supérieurs. On peut donc séparer de nouveau l'équation :

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}_1}{dt} = 0 \quad \implies \quad \boxed{\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_1 &= \bar{\mathbf{x}}_{10} \\ &= (a_0, e_0, i_0) \text{ constants} \end{aligned}} \tag{5.95 a}$$

et identifier le second membre de (5.92) à  $\frac{d\Delta \mathbf{x}_1}{dt}$ .

Au contraire, l'équation (5.93) étant une expression en cosinus des arguments, les triplets  $(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}')$  nuls engendrent des termes séculaires d'ordre 2 qui viennent s'ajouter à ceux qui existaient déjà à l'ordre 1. On peut montrer qu'aux ordres supérieurs on obtient encore d'autres termes séculaires dans cette équation. On peut donc écrire formellement :

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}_2}{dt} = \bar{\mathbf{n}} + \varepsilon \bar{n} \mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}_1) + \varepsilon^2 \bar{n} \mathbf{S}_2(\bar{\mathbf{x}}_1) + \dots = \mathbf{n}_{x_2} \text{ constant} \implies \boxed{\bar{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{n}_{x_2} t + \bar{\mathbf{x}}_{20}} \tag{5.95 b}$$

où  $\varepsilon^2 \bar{n} \mathbf{S}_2(\bar{\mathbf{x}}_1)$  représente l'ensemble des termes d'ordre 2 correspondant à un triplet nul. Les vitesses angulaires  $(n_M, n_\omega, n_\Omega)$  obtenues à l'ordre 1, sont donc légèrement modifiées par des termes d'ordres supérieurs.  $n_M$  est encore de l'ordre de  $\bar{n}$ , tandis que  $n_\omega$  et  $n_\Omega$  demeurent de l'ordre de  $\varepsilon \bar{n}$ . Les autres termes du second membre de (5.93), correspondant à des triplets non nuls, sont ensuite identifiées à  $\frac{d\Delta \mathbf{x}_2}{dt}$ .

$\bar{\mathbf{x}}_1$  étant constant, et  $\bar{\mathbf{x}}_2$  étant fonction linéaire du temps, l'intégration des expressions identifiées à  $\frac{d\Delta \mathbf{x}_1}{dt}$  et  $\frac{d\Delta \mathbf{x}_2}{dt}$  peut s'effectuer comme à l'ordre 1, sans ajouter de constante d'intégration, pour donner uniquement des termes périodiques. Dans  $\frac{d\Delta \mathbf{x}_2}{dt}$ , il convient toutefois de calculer  $\int \Delta n dt$  avec une expression de  $\Delta n$  tirée du développement de (5.71) non limité à l'ordre 1 :

$$\Delta n = -\frac{3}{2} \bar{n} \frac{\Delta a}{a} + \frac{15}{8} \bar{n} \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \dots \tag{5.96}$$

Parmi les termes périodiques engendrés par combinaisons d'arguments, certains vont être à longue période : ce sont ceux pour lesquels on a  $(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}') = (0, k, l)$ . Ces termes d'ordre 2 vont donc s'intégrer avec un diviseur  $kn_\omega + ln_\Omega$  de l'ordre de  $\varepsilon \bar{n}$ . Les termes à longue période obtenus à l'ordre 2 dans les équations donnent donc de nouveaux termes d'ordre 1 dans leur solution ; leur amplitude est alors du même ordre de grandeur que les termes à courte période obtenus à la première approximation. S'ils sont suffisamment petits, ces termes à longue période ne nuisent pas à la convergence du processus itératif que l'on a amorcé, et que l'on peut poursuivre en reportant de nouveau dans les équations (5.72) et (5.73), la solution obtenue dans cette deuxième approximation. Si certains termes à longue période sont importants au point de rompre la convergence du processus, et c'est le cas s'il existe par exemple  $k$  et  $l$  tels que  $(kn_\omega + ln_\Omega)$  soit de l'ordre de  $\varepsilon^2 \bar{n}$ , ces termes sont appelés *termes critiques* et il faut changer la façon de séparer les termes dans les équations : on identifie d'une part  $\frac{d\bar{\mathbf{x}}_i}{dt}$  à l'ensemble des termes séculaires et critiques, et d'autre part  $\frac{d\Delta \mathbf{x}_i}{dt}$  à l'ensemble de tous les autres termes périodiques. La



manière d'intégrer ces équations est alors plus complexe car  $\frac{d\bar{x}_1}{dt}$  n'étant plus nul,  $\bar{x}_1$  n'est plus constant, et son expression dépend de la nature des termes critiques.

**Remarque 1.** Dans le cas des perturbations par  $J_2$ , la deuxième approximation engendre dans toutes les équations sauf dans  $\Delta a$ , des termes à longue période en  $J_2^2$  associés à l'argument  $2\omega$ ; ces termes ne deviennent critiques qu'au voisinage de l'inclinaison critique. Le fait qu'ils soient absents de  $\Delta a$  est intéressant car cela évite que ces termes à petit diviseur soient intégrés deux fois dans la solution  $\Delta M$  (donc avec des petits diviseurs élevés au carré), ce qui compromettrait la convergence des itérations. Pour traiter convenablement ces termes à longue période en  $J_2^2$ , il faut considérer aussi les termes analogues issus du  $J_4$  et qui sont du même ordre de grandeur.

**Remarque 2.** La méthode itérative présentée ici est applicable à de nombreux problèmes de Mécanique Céleste, dans lesquels on retrouve généralement les distinctions entre termes séculaires, termes périodiques à longue ou à courte période. Alors, si les termes à courte période d'ordre 1 sont obtenus à la première approximation, les termes à longue période d'ordre 1 ne sont donnés qu'à l'approximation suivante. Si les termes à longue période sont d'ordre 0, il faut les traiter avec les termes séculaires; c'est ce qu'on verra par exemple à propos des perturbations mutuelles de plusieurs planètes ou de plusieurs satellites d'une planète (problème des  $N$  corps).

## 22.2. Perturbations en variables canoniques : méthode de Von Zeipel

Considérons un système dynamique perturbé à 3 degrés de liberté, décrit par 3 variables canoniques  $(x_1, x_2, x_3)$  et leurs conjuguées  $(y_1, y_2, y_3)$ ; notant globalement ces variables par  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , ce système est représenté par un hamiltonien  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . C'est par exemple le cas d'un satellite perturbé par les harmoniques zonaux du potentiel de sa planète : en variables de Delaunay, on pourrait identifier :  $\mathbf{x} = (L, G, \Theta)$  et  $\mathbf{y} = (l, g, \vartheta)$ , et l'hamiltonien

serait alors :

$$H = \frac{\mu^2}{2L^2} + U_{J_2}(L, G, \Theta, l, g, -) + U_{J_4}(L, G, \Theta, l, g, -) + \dots \tag{5.97}$$

Le premier terme de  $H$  représente la partie képlérienne de l'hamiltonien (cf. (5.41)).

On peut généraliser l'expression (5.97) en supposant que l'hamiltonien est développé selon les puissances d'un petit paramètre  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= H^{(0)}(\mathbf{x}, -) + \sum_{i>0} \varepsilon^i H^{(i)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= H^{(0)}(\mathbf{x}, -) + \sum_{i>0} \varepsilon^i \sum_{\mathbf{k}} H_{\mathbf{k}}^{(i)}(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) \end{aligned} \tag{5.98}$$

$H^{(0)}$  représente l'hamiltonien d'un problème intégrable, et l'on suppose que chacune des fonctions perturbatrices  $H^{(i)}$  est développée en série de termes trigonométriques dont les arguments sont des combinaisons linéaires entières des variables angulaires composant le vecteur  $\mathbf{y}$ . Le vecteur  $\mathbf{k}$  parcourt l'ensemble des triplets d'entiers relatifs  $(k_1, k_2, k_3)$  (en fait, dans la suite, on raisonnera souvent en supposant que  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  représentent les variables de Delaunay). Les équations canoniques s'écrivent alors vectoriellement sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \qquad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \tag{5.99}$$

Elles ne s'intègrent immédiatement que pour  $\varepsilon = 0$ , devenant alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \mathbf{y}} = 0 \quad \implies \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\frac{\partial H^{(0)}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{n}^0(\mathbf{x}) \text{ constant} \quad \implies \quad \mathbf{y} = \mathbf{n}^0(\mathbf{x})t + \mathbf{y}_0 \end{aligned} \tag{5.100}$$

Alors, on voit que le problème sera ramené à un cas intégrable si l'on peut transformer l'hamiltonien complet  $H$  par des changements de variables canoniques, de façon à ce que l'hamiltonien final ne dépende plus des variables angulaires, tout comme  $H^{(0)}$  : c'est le but de la méthode de Von Zeipel.

Le principe de cette méthode est de ainsi de construire, par approximations successives, la fonction génératrice d'un changement de variables canoniques  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$  de telle sorte :

- que ce soit une identité à  $\varepsilon$  près,
- qu'il conserve la valeur de l'hamiltonien,
- que le nouvel hamiltonien  $H'$  ne dépende plus d'une ou plusieurs des variables angulaires, au moins jusqu'à un certain ordre en  $\varepsilon$ .

Dans la méthode proposée par Von Zeipel en 1916, on élimine ainsi les variables angulaires “rapides” qui, comme l'anomalie moyenne, ont une variation d'ordre 0 en  $\varepsilon$  ; cela revient à faire en sorte que le nouvel hamiltonien ne contienne plus de terme à courte période : on obtient un hamiltonien “moyennisé” contenant uniquement des termes séculaires et à longues périodes, et qui permet donc l'étude des mouvements lents ou à longues périodes. Brouwer a montré en 1959 que l'on peut, sous certaines conditions, répéter l'opération pour éliminer de l'hamiltonien les variables angulaires restantes (variables “lentes” comme l'argument du péricentre et la longitude du nœud qui ont des variations de l'ordre de  $\varepsilon$ ), le rendant finalement intégrable. Remarquons que dans le cas de l'hamiltonien (5.97), la longitude du nœud étant déjà absente, après l'anomalie moyenne, il ne resterait à éliminer que l'argument du péricentre. Pour revenir aux variables initiales, il reste alors à reprendre dans l'ordre inverse les changements de variables successifs qu'on a généré.

Dans ce qui suit, on va supposer que  $y_1$  est une variable “rapide” que l'on va éliminer, et que  $y_2$  et  $y_3$  sont des variables “lentes”. Cela revient à supposer que  $H^{(0)}$  ne dépend en fait que de la seule variable  $x_1$  :

$$H^{(0)}(\mathbf{x}, -) \equiv H^{(0)}(x_1, -, -, -, -, -)$$

En effet d'après (5.100), seule la variable  $y_1$  est alors une variable “rapide” car possédant une variation d'ordre

0 en  $\varepsilon$  (une variable lente aurait une variation d'ordre 1 au moins en  $\varepsilon$ ). On notera donc en particulier :

$$n_1^0(x_1) = -\frac{\partial H^{(0)}}{\partial x_1} \tag{5.101}$$

et les autres composantes de  $\mathbf{n}^0(\mathbf{x})$  sont nulles.

### 22.2.1. Elimination des termes à courte période

Soit  $G(\mathbf{x}', \mathbf{y})$  la fonction génératrice recherchée ; elle est indépendante du temps (car on veut  $H' = H$ ) et doit vérifier, d'après (2.25) :

$$\sum_{j=1}^3 (x_j dy_j + y'_j dx'_j) = dG$$

soit encore, avec des notations évidentes de produits scalaires :

$$\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} + \mathbf{y}' \cdot d\mathbf{x}' = dG = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{y}} \cdot d\mathbf{y} + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}'} \cdot d\mathbf{x}' \tag{5.102}$$

On a vu, parmi les exemples du §2-9, que la transformation identique peut être engendrée par la fonction  $G_I = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}'$ . Recherchons donc une fonction  $G$  voisine, développée en puissances de  $\varepsilon$ , sous la forme :

$$G = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}' + \sum_{i>0} \varepsilon^i G_i(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \tag{5.103}$$

Compte tenu de (5.102), en différenciant cette expression de  $G$  on obtient les relations :

$$\mathbf{x} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{x}' + \sum_{i>0} \varepsilon^i \frac{\partial G_i}{\partial \mathbf{y}} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}' = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{y} + \sum_{i>0} \varepsilon^i \frac{\partial G_i}{\partial \mathbf{x}'} \tag{5.104}$$

Par ailleurs, l'expression du nouvel hamiltonien est inconnue, mais doit satisfaire l'équation :  $H'(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . On recherche  $H'$  sous la forme suivante, développée comme  $H$  en puissances de  $\varepsilon$  :

$$H'(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j H'^{(j)}(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$$

On peut alors écrire l'identité :

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j H'^{(j)}(\mathbf{x}', \mathbf{y} + \sum_{i > 0} \varepsilon^i \frac{\partial G_i}{\partial \mathbf{x}'}) &\equiv H^{(0)}(x'_1 + \sum_{i > 0} \varepsilon^i \frac{\partial G_i}{\partial y_1}, -, -, -, -, -) \\ &+ \sum_{j > 0} \varepsilon^j H^{(j)}(\mathbf{x}' + \sum_{i > 0} \varepsilon^i \frac{\partial G_i}{\partial \mathbf{y}}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Développant ces fonctions en série de Taylor au voisinage de  $\mathbf{y}' = \mathbf{y}$  ou de  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  et tenant compte de la forme

de  $H$  précisée en (5.98), on obtient, jusqu'à l'ordre 2 en  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned}
 & \left[ H^{(0)}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \right]_{\mathbf{y}'=\mathbf{y}} + \\
 & + \varepsilon \left[ \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \mathbf{y}'} \cdot \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{x}'} \right]_{\mathbf{y}'=\mathbf{y}} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \mathbf{y}'} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{x}'} \right]_{\mathbf{y}'=\mathbf{y}} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left[ \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \mathbf{y}'} \cdot \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{x}'} \right]_{\mathbf{y}'=\mathbf{y}}^{(2)} + \dots \\
 & + \varepsilon \left[ H^{(1)}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \right]_{\mathbf{y}'=\mathbf{y}} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \mathbf{y}'} \cdot \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{x}'} \right]_{\mathbf{y}'=\mathbf{y}} + \dots \\
 & + \varepsilon^2 \left[ H^{(2)}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \right]_{\mathbf{y}'=\mathbf{y}} + \dots \\
 & \equiv \left[ H^{(0)}(x_1, -, -, -, -, -) \right]_{x_1=x'_1} + \\
 & + \varepsilon \left[ \frac{\partial H^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} \right]_{x_1=x'_1} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial H^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial G_2}{\partial y_1} \right]_{x_1=x'_1} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left[ \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial G_1}{\partial y_1} \right)^2 \right]_{x_1=x'_1} + \dots \\
 & + \varepsilon \sum_{\mathbf{k}} \left[ H_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} + \varepsilon^2 \sum_{\mathbf{k}} \left[ \frac{\partial H_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{y}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} + \dots \\
 & + \varepsilon^2 \sum_{\mathbf{k}} \left[ H_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} + \dots
 \end{aligned} \tag{5.105}$$

où  $\left[ \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \mathbf{y}'} \cdot \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{x}'} \right]_{\mathbf{y}'=\mathbf{y}}^{(2)}$  représente la somme :  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[ \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial y'_i \partial y'_j} \frac{\partial G_1}{\partial x'_i} \frac{\partial G_1}{\partial x'_j} \right]_{\mathbf{y}'=\mathbf{y}}$

L'identification des termes d'ordre 0 en  $\varepsilon$  donne :

$$H^{(0)}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = H^{(0)}(x'_1, -, -, -, -, -) \quad (5.106)$$

$H^{(0)}$  ne dépend donc pas des variables angulaires et, en conséquence, la deuxième ligne dans l'expression (5.105) est identiquement nulle.

Ensuite, tenant compte de cette remarque, on identifie, à l'ordre 1 :

$$H^{(1)}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \frac{\partial H^{(0)}(x'_1)}{\partial x'_1} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} + \sum_{\mathbf{k}} H_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x}') \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})$$

Pour que  $H^{(1)}$  ne dépende pas de la variable  $y_1$ , il suffit d'identifier  $H^{(1)}$  aux termes qui, dans la somme de droite, ne dépendent pas de cette variable : ces termes correspondent aux triplets  $\mathbf{k}$  de la forme  $(0, k_2, k_3)$  ; notant  $n_1^0(x'_1) = -[\frac{\partial H^{(0)}}{\partial x'_1}]_{x_1=x'_1}$ , on sépare alors ces deux équations :

$$H^{(1)}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k} \in \{(0, k_2, k_3)\}} H_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x}') \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) \quad (5.107)$$

$$n_1^0(x'_1) \frac{\partial G_1}{\partial y_1} = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \{(k_1, k_2, k_3)\} \\ k_1 \neq 0}} H_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x}') \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})$$

On en déduit  $G_1$  par une intégration terme à terme :

$$G_1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \{(k_1, k_2, k_3)\} \\ k_1 \neq 0}} \frac{H_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x}')}{k_1 n_1^0(x'_1)} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) \quad (5.108)$$

Il est inutile d'ajouter à cette solution une fonction arbitraire indépendante de  $y_1$ . Ainsi,  $H^{(1)}$  ne contient pas de termes à courte période, tandis que  $G_1$  ne contient que des termes à courte période.

Les fonctions  $H^{(1)}$  et  $G_1$  étant ainsi déterminées, on peut calculer  $H^{(2)}$  et  $G_2$  à partir des termes d'ordre 2 de l'expression (5.105) :

$$\begin{aligned} H^{(2)}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) &= \frac{\partial H^{(0)}}{\partial x'_1} \frac{\partial G_2}{\partial y_1} + \sum_{\mathbf{k}} H_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}') \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial H_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'} \cdot \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{y}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) + \\ &+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial x_1'^2} \left( \frac{\partial G_1}{\partial y_1} \right)^2 - \frac{\partial H^{(1)}(\mathbf{x}', \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{x}'} \end{aligned}$$

Sachant que  $G_1$  [resp.  $H^{(1)}$ ] est somme de termes en  $\sin(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{y})$  [resp.  $\cos(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{y})$ ], chaque produit dans le second membre de cette équation se développe en  $\cos((\mathbf{k} \pm \mathbf{k}') \cdot \mathbf{y})$ , donnant des termes indépendants de  $y_1$  chaque fois que  $(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}')$  est de la forme  $(0, k_2, k_3)$ . Appelons  $F_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}')$  le coefficient qui regroupe tous les termes



correspondant au même argument  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}$  ; l'équation précédente s'écrit alors :

$$H^{(2)}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \frac{\partial H^{(0)}}{\partial x'_1} \frac{\partial G_2}{\partial y_1} + \sum_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}') \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})$$

Comme à l'ordre 1, on identifie  $H^{(2)}$  aux termes indépendants de la variable  $y_1$ , ce qui revient à séparer de nouveau cette équation en deux parties :

$$H^{(2)}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k} \in \{(0, k_2, k_3)\}} F_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}') \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) \tag{5.109}$$

$$n_1^0(x'_1) \frac{\partial G_2}{\partial y_1} = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \{(k_1, k_2, k_3)\} \\ k_1 \neq 0}} F_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}') \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})$$

On en déduit alors, comme en (5.108) :

$$G_2(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \{(k_1, k_2, k_3)\} \\ k_1 \neq 0}} \frac{F_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}')}{k_1 n_1^0(x'_1)} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) \tag{5.110}$$

On procéderait de la même façon pour déterminer  $H^{(i)}$  et  $G_i$  jusqu'à un ordre  $p$  suffisamment élevé pour que les ordres supérieurs puissent être considérés comme négligeables. A ce stade du calcul, le nouvel hamiltonien

se présente sous la forme :

$$\begin{aligned}
 H'(\mathbf{x}', \mathbf{y}') &= \sum_{i=0}^p \varepsilon^i [H'^{(i)}(x'_1, x'_2, x'_3, -, y_2, y_3)]_{\mathbf{y}=\mathbf{y}'} \\
 &= H'^{(0)}(x'_1) + \sum_{i=1}^p \varepsilon^i \sum_{\mathbf{k} \in \{(0, k_2, k_3)\}} F_{\mathbf{k}}^{(i)}(\mathbf{x}') \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}')
 \end{aligned}
 \tag{5.111}$$

où les fonctions  $F_{\mathbf{k}}^{(i)}(\mathbf{x}')$  désignent, à l'ordre  $i$ , le coefficient correspondant à l'argument  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}'$  (on a en particulier  $F_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x}') = H_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x}')$ ). Cet hamiltonien ne dépend donc plus de la variable  $y'_1$  au moins jusqu'à l'ordre  $p$ . Dans le même temps, on a construit une fonction génératrice qui dépend de  $y_1$  jusqu'à l'ordre  $p$  :

$$G(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^p \varepsilon^i \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \{(k_1, k_2, k_3)\} \\ k_1 \neq 0}} \frac{F_{\mathbf{k}}^{(i)}(\mathbf{x}')}{k_1 n_1^0(x'_1)} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})
 \tag{5.112}$$

En utilisant les expressions (5.104), on obtient les variables initiales sous forme implicite :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \mathbf{x}' + \sum_{i=1}^p \varepsilon^i \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \{(k_1, k_2, k_3)\} \\ k_1 \neq 0}} \mathbf{k} \frac{F_{\mathbf{k}}^{(i)}(\mathbf{x}')}{k_1 n_1^0(x'_1)} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) \\
 \mathbf{y} &= \mathbf{y}' - \sum_{i=1}^p \varepsilon^i \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \{(k_1, k_2, k_3)\} \\ k_1 \neq 0}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \left( \frac{F_{\mathbf{k}}^{(i)}(\mathbf{x}')}{k_1 n_1^0(x'_1)} \right) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})
 \end{aligned}
 \tag{5.113}$$

Dans ces expressions,  $\mathbf{x}'$  et  $\mathbf{y}'$  sont solutions des équations d'Hamilton relatives à l'hamiltonien  $H'$ , indépendant de  $y'_1$ , donné en (5.111).

**Remarque 1.** Dans le cas des perturbations d'un satellite artificiel (hamiltonien (5.97) avec  $\varepsilon = J_2$ ), on aboutirait à un hamiltonien  $H'$  ayant une structure particulière :

$$H'(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = H^{(0)}(x'_1) + \varepsilon S^{(1)}(x'_1, x'_2, x'_3, -, -, -) + \sum_{i=2}^p \varepsilon^i \sum_{\mathbf{k} \in \{(0, k_2, k_3)\}} F_{\mathbf{k}}^{(i)}(\mathbf{x}') \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}') \quad (5.114)$$

où l'on a bien mis en évidence que la partie d'ordre 1,  $\varepsilon S^{(1)}$ , est de nature "séculaire" car elle ne dépend d'aucune des variables angulaires. Cette partie s'identifie en effet à l'expression de  $\bar{U}_{J_2}$  donnée en (5.63) en fonction des variables de Delaunay et on a montré que cette partie de  $U_{J_2}$ , indépendante de l'anomalie moyenne, est aussi indépendante de l'argument du péricentre. De plus, comme l'hamiltonien initial ne dépend pas de la longitude du nœud, aux ordres supérieurs on a  $k_3 = 0$  dans chaque terme, soit  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}' \equiv k_2 y'_2$  où  $y'_2$  représente l'argument du péricentre.

**Remarque 2.** La méthode de Von Zeipel peut s'étendre au cas où l'hamiltonien initial dépend de plusieurs variables "rapides" (comme avec le problème des  $N$  corps de type planétaire cf. §6-25) : elle permet alors d'éliminer tous les termes à courte période dépendant de ces variables. C'est par exemple le cas où l'hamiltonien d'ordre 0 ne dépend que de deux variables  $x_1$  et  $x_2$  ; leurs conjuguées  $y_1$  et  $y_2$  sont alors des variables rapides, dont les variations sont au moins d'ordre 0 :  $n_1^0 = -\frac{\partial H^{(0)}}{\partial x_1}$  et  $n_2^0 = -\frac{\partial H^{(0)}}{\partial x_2}$  avec  $H^{(0)} \equiv H^{(0)}(x_1, x_2, -, -, -, -)$  (en supposant que l'on ait toujours 3 degrés de liberté).

Pour éliminer  $y_1$  et  $y_2$ , on cherche une fonction génératrice de la même forme qu'en (5.103), on exprime que le nouvel hamiltonien est égal à l'ancien comme en (5.105), et on identifie ordre par ordre ; à l'ordre 1, à la place

de (5.107), on obtient :

$$H^{(1)}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k} \in \{(0,0,k_3)\}} H_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x}') \cos(k_3 y_3) \tag{5.115}$$

$$n_1^0 \frac{\partial G_1}{\partial y_1} + n_2^0 \frac{\partial G_1}{\partial y_2} = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \{(k_1,k_2,k_3)\} \\ k_1 \neq 0 \text{ ou } k_2 \neq 0}} F_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x}') \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})$$

On en déduit alors, par intégration terme à terme :

$$G_1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \{(k_1,k_2,k_3)\} \\ k_1 \neq 0 \text{ ou } k_2 \neq 0}} \frac{F_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x}')}{k_1 n_1^0 + k_2 n_2^0} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) \tag{5.116}$$

On procéderait de la même façon aux ordres supérieurs. Cependant cette séparation des termes à courte période ne pourra pas se faire s'il existe des entiers  $k_1$  et  $k_2$  tels que le diviseur  $k_1 n_1^0 + k_2 n_2^0$  soit si petit que l'amplitude du terme correspondant :  $\varepsilon F_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x}') / (k_1 n_1^0 + k_2 n_2^0)$  se retrouve être d'ordre 0 en  $\varepsilon$  ; de tels termes sont appelés *termes résonnants* ou *termes critiques* ; comme on ne peut pas les retenir dans  $G_1$  qui doit être d'ordre 1, ils doivent être inclus dans  $H^{(1)}$ , non intégrés, avec les termes de (5.115) pour lesquels  $k_1$  et  $k_2$  sont tous deux nuls. Ainsi, la méthode de Von Zeipel permet toujours d'éliminer les termes à courte période, qui sont non résonnants, mais les éventuels termes critiques se retrouvent finalement dans le nouvel hamiltonien avec les termes séculaires et ceux à longue période. Le traitement ultérieur de cet hamiltonien est plus ou moins complexe, suivant la nature de la résonance.

### 22.2.2. Elimination des termes à longue période : méthode de Brouwer

Dans le cas où l'hamiltonien  $H'(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$  a la forme particulière (5.114), on peut appliquer de nouveau les principes de la méthode de Von Zeipel pour éliminer cette fois les termes à longue période, c'est-à-dire ceux dépendant de  $y'_2$  et  $y'_3$ . Cependant il faut alors modifier légèrement la façon de faire les identifications ordre par ordre car les variations de  $y'_2$  et  $y'_3$  sont au moins d'ordre 1 en  $\varepsilon$  : jusqu'à l'ordre 1, on peut en effet écrire les équations d'Hamilton :

$$\begin{aligned} \frac{dy'_2}{dt} &= -\varepsilon \frac{\partial S'^{(1)}}{\partial x'_2} = \varepsilon n_2^1(x'_1, x'_2, x'_3) \\ \frac{dy'_3}{dt} &= -\varepsilon \frac{\partial S'^{(1)}}{\partial x'_3} = \varepsilon n_3^1(x'_1, x'_2, x'_3) \end{aligned} \tag{5.117}$$

où les  $x'_i$  sont constants puisqu'on a aussi, à cet ordre,  $\frac{dx'_i}{dt} = 0$ . Les termes à longue période que l'on veut éliminer n'interviennent dans  $H'$  qu'à partir de l'ordre 2.

On cherche donc un nouveau changement de variables  $(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \mapsto (\mathbf{x}'', \mathbf{y}'')$ , par l'intermédiaire d'une fonction génératrice  $G'(\mathbf{x}'', \mathbf{y}')$  telle que l'on ait :

$$\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{y}' + \mathbf{y}'' \cdot d\mathbf{x}'' = dG'$$

On va montrer que l'on peut déterminer  $G'$  de telle sorte que le nouvel hamiltonien  $H''$  soit égal à l'ancien et ne dépende plus d'aucune des variables angulaires :

$$H''(x''_1, x''_2, x''_3, -, -, -) = H'(x'_1, x'_2, x'_3, -, y'_2, y'_3) \tag{5.118}$$

Pour cela, on développe  $H''$  et  $G'$  en puissances de  $\varepsilon$  et on cherche  $G'$  de manière analogue à  $G$  :

$$G' = \mathbf{y}' \cdot \mathbf{x}'' + \sum_{i>0} \varepsilon^i G'_i(\mathbf{x}'', \mathbf{y}')$$

On a alors :

$$\mathbf{x}' = \frac{\partial G'}{\partial \mathbf{y}'} = \mathbf{x}'' + \sum_{i>0} \varepsilon^i \frac{\partial G'_i}{\partial \mathbf{y}'} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}'' = \frac{\partial G'}{\partial \mathbf{x}''} = \mathbf{y}' + \sum_{i>0} \varepsilon^i \frac{\partial G'_i}{\partial \mathbf{x}''} \quad (5.119)$$

Tenant compte de la forme particulière recherchée pour  $H''$  et de celle de  $H'$  donnée en (5.114), le développement de Taylor de  $H'$  au voisinage de  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}''$  donne, à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} & H''^{(0)}(\mathbf{x}'', -) + \varepsilon H''^{(1)}(\mathbf{x}'', -) + \varepsilon^2 H''^{(2)}(\mathbf{x}'', -) + \dots \\ \equiv & \left[ H'^{(0)}(x'_1, -, -, -, -) \right]_{x'_1=x''_1} + \\ & + \varepsilon \left[ \frac{\partial H'^{(0)}}{\partial x'_1} \frac{\partial G'_1}{\partial y'_1} \right]_{x'_1=x''_1} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial H'^{(0)}}{\partial x'_1} \frac{\partial G'_2}{\partial y'_1} \right]_{x'_1=x''_1} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left[ \frac{\partial^2 H'^{(0)}}{\partial x'^2_1} \left( \frac{\partial G'_1}{\partial y'_1} \right)^2 \right]_{x'_1=x''_1} + \dots \\ & + \varepsilon \left[ S'^{(1)}(\mathbf{x}', -) \right]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}''} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial S'^{(1)}(\mathbf{x}', -)}{\partial \mathbf{x}'} \cdot \frac{\partial G'_1}{\partial \mathbf{y}'} \right]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}''} + \dots \\ & + \varepsilon^2 \sum_{\mathbf{k} \in \{(0, k_2, k_3)\}} \left[ F_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}') \cos(k_2 y'_2 + k_3 y'_3) \right]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}''} + \dots \end{aligned} \quad (5.120)$$

A chaque ordre, on identifie  $H''^{(i)}$  aux termes du second membre qui sont indépendants de  $y'_2$  et  $y'_3$  ; les autres

termes servent à déterminer les fonctions  $G'_i$ . On obtient successivement :

$$\begin{aligned} H''^{(0)}(\mathbf{x}'', -) &= H'^{(0)}(x''_1, -, -, -, -) \\ H''^{(1)}(\mathbf{x}'', -) &= S'^{(1)}(x''_1, x''_2, x''_3, -, -, -) \end{aligned} \tag{5.121}$$

$$\frac{\partial H'^{(0)}}{\partial x'_1} \frac{\partial G'_1}{\partial y'_1} = 0 \tag{5.122}$$

Cette dernière équation montre que  $G'_1$  est indépendant de  $y'_1$ . Tenant compte de cette remarque, on a alors à l'ordre 2 :

$$H''^{(2)}(\mathbf{x}'', -) = \left[ F_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}'') \right]_{\mathbf{k}=(0,0,0)} \tag{5.123}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S'^{(1)}(\mathbf{x}'')}{\partial x''_2} \frac{\partial G'_1}{\partial y'_2} - \frac{\partial S'^{(1)}(\mathbf{x}'')}{\partial x''_3} \frac{\partial G'_1}{\partial y'_3} &= \frac{\partial H'^{(0)}}{\partial x''_1} \frac{\partial G'_2}{\partial y'_1} \\ &+ \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \{(0, k_2, k_3)\} \\ \mathbf{k} \neq (0,0,0)}} F_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}'') \cos(k_2 y'_2 + k_3 y'_3) \end{aligned} \tag{5.124}$$

On peut prendre  $G'_2$  indépendant de  $y'_1$  puisque tous les autres termes de cette dernière équation sont eux-mêmes indépendants de  $y'_1$ . Tenant compte de (5.117), on a alors :

$$n_2^1(\mathbf{x}'') \frac{\partial G'_1}{\partial y'_2} + n_3^1(\mathbf{x}'') \frac{\partial G'_1}{\partial y'_3} = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \{(0, k_2, k_3)\} \\ \mathbf{k} \neq (0,0,0)}} F_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}'') \cos(k_2 y'_2 + k_3 y'_3) \tag{5.125}$$

$G'_1$  s'en déduit par intégration terme à terme :

$$G'_1(x'_1, x'_2, x'_3, -, y'_2, y'_3) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \{(0, k_2, k_3)\} \\ \mathbf{k} \neq (0, 0, 0)}} \frac{F_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}'')}{k_2 n_2^1 + k_3 n_3^1} \sin(k_2 y'_2 + k_3 y'_3) \quad (5.126)$$

On retrouve ici que les termes à longue période d'ordre 2 donnent, après intégration, des termes d'ordre 1. On pourrait déterminer de manière analogue les parties d'ordres supérieurs jusqu'à un ordre suffisant. Il en résulte un hamiltonien  $H''(\mathbf{x}'', -)$  conduisant à  $\mathbf{x}''$  constant et à  $\mathbf{y}''$  fonction linéaire de  $t$ , comme en (5.100). Les expressions (5.119) permettent ensuite de revenir aux variables  $\mathbf{x}'$  et  $\mathbf{y}'$ . Avec l'expression de  $G'_1$  trouvée en (5.126), on obtient les relations implicites :

$$\begin{aligned} x'_1 &= x''_1 \\ x'_i &= x''_i + \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \{(0, k_2, k_3)\} \\ \mathbf{k} \neq (0, 0, 0)}} \varepsilon \frac{k_i F_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}'')}{k_2 n_2^1 + k_3 n_3^1} \cos(k_2 y'_2 + k_3 y'_3) \quad \text{pour } i = 2 \text{ et } 3 \\ y'_i &= y''_i - \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \{(0, k_2, k_3)\} \\ \mathbf{k} \neq (0, 0, 0)}} \varepsilon \frac{\partial}{\partial x''_i} \left( \frac{F_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}'')}{k_2 n_2^1(\mathbf{x}'') + k_3 n_3^1(\mathbf{x}'')} \right) \sin(k_2 y'_2 + k_3 y'_3) \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } 3 \end{aligned} \quad (5.127)$$

Il faudrait encore inverser cette dernière équation pour exprimer les  $y'_i$  uniquement en fonction des constantes composant  $\mathbf{x}''$  et en fonction des composantes de  $\mathbf{y}''$ , fonctions linéaires en  $t$ ; on pourrait alors exprimer les  $x'_i$  en fonction de ces  $\mathbf{x}''$  et  $\mathbf{y}''$ , puis, par les relations (5.113), on remonterait aux variables initiales  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ .



**Remarque 1.** S'il existe des entiers  $k_1$  et  $k_2$  tels que le diviseur  $k_2 n_2^1 + k_3 n_3^1$  soit de l'ordre de  $\varepsilon$  ou même plus petit, le terme correspondant ne peut pas être intégré comme on l'a fait en (5.127) pour être ensuite inclus dans  $G'_1$ . On se trouve alors devant un terme critique ou résonnant, comme dans la **remarque 2 du paragraphe précédent**, mais la résonance se faisant cette fois entre des variables lentes (on parle alors de résonance séculaire). Ces termes critiques, s'ils existent, nécessitent un traitement spécial : ils sont exclus de  $G'_1$  et inclus, non intégrés, dans  $H^{(1)}$ . Ainsi, dans le cas du satellite artificiel perturbé par les harmoniques zonaux de sa planète, comme  $k_3$  est nul dans chaque terme, les termes critiques correspondent à  $n_2^1$  plus petit que  $\varepsilon$ . Or, avec  $\varepsilon S^{(1)}$  qui s'identifie à l'expression de  $\bar{U}_{J_2}$  donnée en (5.63), et avec  $x_2 \equiv G$  et  $x_3 \equiv \Theta = G \cos i$ , l'équation (5.117) donne :

$$\varepsilon n_2^1 = -\frac{\partial \bar{U}_{J_2}}{\partial G} = \frac{3}{4} \mu^4 J_2 \frac{a_e^2}{L^3 G^4} \left( 5 \frac{\Theta^2}{G^2} - 1 \right)$$

Cette vitesse angulaire s'annule pour  $\cos^2 i = 1/5$ , soit pour  $i = 63^\circ 26'$  ou  $i = 116^\circ 34'$  (cf. (5.83)). On retrouve l'inclinaison critique au voisinage de laquelle la méthode de Brouwer présentée ici n'est plus valable : les termes en  $\cos 2\omega$  (ou ici en  $\cos 2y_2$ ) ne peuvent pas être éliminés de l'hamiltonien et l'intégration des équations d'Hamilton au voisinage de l'inclinaison critique nécessiterait de recourir aux fonctions elliptiques. . .

**Remarque 2.** Lorsque l'on compare les deux méthodes de perturbation présentées dans ce paragraphe, on voit que la méthode itérative nécessite de faire le développement de Taylor du second membre de chaque équation, soit 6 développements pour le problème du satellite artificiel ; en revanche, en variables canoniques, on n'a besoin de ne développer qu'une seule fonction — l'hamiltonien — mais en contrepartie, la forme analytique de celui-ci est souvent plus complexe que celle des seconds membres exprimés en variables oscultrices classiques ; par ailleurs, il y a un autre inconvénient : pour revenir aux variables initiales, on ne dispose que d'expressions implicites qu'il faut inverser. Néanmoins, l'intérêt des méthodes de perturbation en variables canoniques est important, d'autant plus que des méthodes plus performantes que celle de Von Zeipel existent mais dépassent le cadre de ce cours ; disons seulement leur principal avantage : en utilisant des développements en séries de Lie à la place des séries de Taylor, on peut, au lieu de (5.113), construire des changements de variables canoniques qui

soient **explicités** ; il est alors beaucoup plus facile de revenir aux variables initiales.

## Sixième partie

# Le problème des $N$ corps

### 23 Mise en équations du problème des $N$ corps

- 23.1 Intégrales premières
- 23.2 Réduction à un problème de  $N - 1$  corps
- 23.3 Equations exprimées en fonction du gradient d'un potentiel

### 24 Introduction au problème des 3 corps

- 24.1 Positions d'équilibre – Points de Lagrange
- 24.2 Quelques propriétés du problème restreint circulaire
- 24.3 Traitement du problème des 3 corps par des problèmes de Kepler perturbés
- 24.4 Sphère d'influence d'une planète

### 25 Problème des $N$ corps de type planétaire

- 25.1 Développement de la fonction perturbatrice

### 26 Perturbations du mouvement des planètes

- 26.1 Théorie à variations séculaires : Méthode de Le Verrier
- 26.2 Théorie générale du mouvement des planètes

Cette partie concerne l'étude du mouvement de  $N$  masses ponctuelles  $m_i$  repérées par des points  $P_i$  et animées sous l'effet de leur attraction mutuelle. On peut aussi considérer que cela concerne les interactions gravitationnelles de  $N$  solides ayant leur masse répartie avec une symétrie sphérique : On sait en effet que le champ de gravitation de chaque sphère est alors équivalent à celui d'une masse ponctuelle, égale à la masse totale de cette sphère et placée en son centre. Dans toute la suite, pour des raisons de commodité de notation que l'on com-

prendra plus loin, en faisant  $N = n + 1$ , on numérotera ces  $N$  corps de 0 à  $n$  : Ainsi  $P_0, P_1, \dots, P_n$  auront pour masses respectives  $m_0, m_1, \dots, m_n$ .

## 23. Mise en équations du problème des $N$ corps

Les  $N$  corps sont isolés dans l'espace, de sorte que dans un repère galiléen  $R_O$  d'origine  $O$ , les équations du mouvement s'écrivent :

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{OP}_k}{dt^2} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{K m_i m_k}{|\mathbf{P}_k \mathbf{P}_i|^3} \mathbf{P}_k \mathbf{P}_i + \sum_{i=k+1}^n \frac{K m_i m_k}{|\mathbf{P}_k \mathbf{P}_i|^3} \mathbf{P}_k \mathbf{P}_i \quad k = 0, \dots, n \quad (6.1)$$

Dans la partie 3, on a vu en détails que pour  $N = 2$  (cf. (3.1)), ces équations s'intègrent, aboutissant au mouvement képlérien des 2 corps. En fait, pour  $N$  supérieur ou égal à 3, ces équations n'ont pas de solution générale. On sait seulement construire certaines solutions particulières, ou des solutions approchées, valables sur un intervalle de temps limité. On ne va donc pas aborder dans ce cours l'étude générale du problème des  $N$  corps, mais seulement certaines de ses applications au système solaire : On va voir notamment dans quelles circonstances le problème des 3 corps peut se réduire à celui de perturbations de mouvements képlériens. Par extension, on en déduira que le problème de  $n$  planètes tournant autour du Soleil peut être d'abord représenté par  $n$  problèmes de 2 corps (Soleil-planète), chacun de ces problèmes étant ensuite perturbé par la présence des autres planètes. On pourra alors appliquer à ces problèmes les **méthodes de perturbations** introduites dans la partie 5. Avant cela, il convient cependant d'examiner quelques unes des propriétés générales du problème des  $N$  corps.

### 23.1. Intégrales premières

Le problème des  $N$  corps est représenté par  $N$  équations différentielles du second ordre ; c'est donc un système d'équations scalaires d'ordre  $6N$ . Montrons qu'il existe 10 intégrales premières scalaires, qui permettraient donc de le réduire à un système d'ordre  $6N - 10$ .

On a d'abord 6 intégrales premières qui proviennent du mouvement rectiligne et uniforme de  $G$ , centre de masse des  $N$  corps. En effet, le système étant supposé isolé, la somme de toutes les interactions mutuelles est nulle (cf. (4.3)) ; on a donc :

$$\sum_{k=0}^n m_k \frac{d^2 \mathbf{OP}_k}{dt^2} = 0 = M \frac{d^2 \mathbf{OG}}{dt^2} \tag{6.2}$$

où  $M$  représente la masse totale des  $N$  corps. On a alors  $\mathbf{OG} = \mathbf{OG}_0 + \mathbf{V}_G t$  où  $\mathbf{OG}_0$  et  $\mathbf{V}_G$  sont deux vecteurs constants représentant 6 constantes d'intégration scalaires. On pourrait réduire le problème à celui de  $N - 1$  corps, déterminant le mouvement de  $P_1, P_2, \dots, P_n$  autour de  $G$  et déduisant celui de  $P_0$  de la relation :

$$m_0 \mathbf{GP}_0 = - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{GP}_i \tag{6.3}$$

On a ensuite 3 intégrales premières données par le théorème du moment dynamique appliqué à un système isolé :

$$\sum_{k=0}^n \mathbf{OP}_k \wedge m_k \frac{d^2 \mathbf{OP}_k}{dt^2} = 0 = \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^n \mathbf{OP}_k \wedge m_k \frac{d \mathbf{OP}_k}{dt} \right)$$

**Exercice** Le moment cinétique en  $O$  du système des  $N$  corps est donc un vecteur constant. Le repère d'origine  $G$  en



translation par rapport à  $R_O$  étant aussi galiléen, le moment cinétique en  $G$  est aussi constant :

$$\sum_{k=0}^n \mathbf{GP}_k \wedge m_k \frac{d\mathbf{GP}_k}{dt} = \mathbf{C} \tag{6.4}$$

Le plan orthogonal en  $G$  au vecteur  $\mathbf{C}$  est appelé *plan invariable* du système des  $N$  corps. C'est dans ce plan fixe que s'effectueraient le mouvement de tous les  $P_k$  si à l'instant initial, tous les vecteurs position et vitesse  $\mathbf{GP}_k$  et  $\frac{d\mathbf{GP}_k}{dt}$  étaient coplanaires,  $\mathbf{C}$  étant alors orthogonal à ce plan commun.

On a enfin l'intégrale première de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n m_k \frac{d^2\mathbf{OP}_k}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{OP}_k}{dt} &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n \substack{(i \neq k) \\ } \frac{K m_i m_k}{|\mathbf{P}_k \mathbf{P}_i|^3} \mathbf{P}_k \mathbf{P}_i \cdot \frac{d\mathbf{OP}_k}{dt} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n \frac{K m_i m_k}{|\mathbf{P}_k \mathbf{P}_i|^3} \mathbf{P}_k \mathbf{P}_i \cdot \left( \frac{d\mathbf{OP}_k}{dt} - \frac{d\mathbf{OP}_i}{dt} \right) \end{aligned}$$

Avec  $\frac{d}{dt}(\mathbf{OP}_k - \mathbf{OP}_i) = -\frac{d}{dt} \mathbf{P}_k \mathbf{P}_i$ , on en déduit :

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} m_k \left( \frac{d\mathbf{OP}_k}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n \frac{K m_i m_k}{|\mathbf{P}_k \mathbf{P}_i|} \right) \tag{6.5}$$

soit, en notant  $T$  l'énergie cinétique des  $N$  corps et  $U$  leur énergie potentielle :

$$T + U = h \quad \text{avec} \quad U = - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n \frac{K m_i m_k}{|\mathbf{P}_k \mathbf{P}_i|} \tag{6.6}$$

La constante  $h$  représente l'énergie totale du système, qui est conservée au cours du temps.

En tenant compte des constantes  $C$  et  $h$ , on pourrait réduire encore l'ordre du système différentiel de 4 unités (en exprimant 4 des variables de position ou de vitesse en fonction de ces 4 constantes scalaires). En fait on explicite rarement cette réduction d'ordre car cela détruit les symétries présentes initialement dans les équations.

**Remarque .** Si l'on ne peut résoudre analytiquement le problème des  $N$  corps, on peut toujours au moins, par l'intégration numérique, trouver une solution particulière discrète correspondant à des conditions initiales données, et valable sur un intervalle de temps fini ; les intégrales premières peuvent alors servir pour contrôler l'évolution des erreurs numériques (de troncature et d'arrondi) qui se propagent lors des "pas" successifs de l'intégration : Les expressions (6.4) et (6.6) notamment doivent conserver une valeur constante tout le long de l'intégration numérique.

## 23.2. Réduction à un problème de $N - 1$ corps

On a déjà évoqué la possibilité de cette réduction dans le [paragraphe précédent](#), après avoir obtenu le mouvement rectiligne et uniforme du point  $G$ , centre de masse des  $N$  corps. En posant  $\mathbf{u}_k = G\mathbf{P}_k$ , la relation (6.3) devient :

$$\mathbf{u}_0 = - \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{m_0} \mathbf{u}_k \quad (6.7)$$

Comme le système est isolé, un repère en translation d'origine  $G$  est galiléen, et l'on peut écrire les équations (6.1) pour  $k = 1$  à  $n$  sous la forme :

$$\frac{d^2 \mathbf{u}_k}{dt^2} = K m_0 \frac{\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_k}{|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_k|^3} + \sum_{i=1}^n (i \neq k) K m_i \frac{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_k}{|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_k|^3} \quad (6.8)$$

On pourrait alors, dans le premier terme, remplacer  $\mathbf{u}_0$  par son expression (6.7). Cependant, les  $n$  équations qu'on obtiendrait ainsi sont toutes moins simples que les équations initiales, de sorte qu'elles sont très rarement utilisées. On préfère le plus souvent étudier le mouvement relatif des points  $P_k$  par rapport à l'un d'entre eux, d'autant plus que les seconds membres des équations initiales (6.1) ou (6.8) ne dépendent que des positions relatives des  $P_k$ . Choisissons  $P_0$  comme corps de référence et posons :

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_0 \tag{6.9}$$

Avec  $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_k = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$ , on déduit alors des équations (6.8) :

$$\frac{d^2\mathbf{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{u}_k}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{u}_0}{dt^2} = \sum_{i=0}^n \underset{(i \neq k)}{K m_i} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3} - \sum_{i=1}^n K m_i \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|^3} \tag{6.10}$$

Mais on a en particulier  $\mathbf{r}_0 = 0$ , de sorte que cette équation devient, pour  $k = 1$  à  $n$  :

$$\boxed{\frac{d^2\mathbf{r}_k}{dt^2} = -K(m_0 + m_k) \frac{\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|^3} + \sum_{i=1}^n \underset{(i \neq k)}{K m_i} \left( \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3} - \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} \right)} \tag{6.11}$$

Ces équations décrivent le mouvement des  $P_k$  dans un repère de directions fixes et d'origine  $P_0$  (ce repère est en translation non rectiligne et non uniforme, ce qui justifie les termes en  $K m_i \mathbf{r}_i / |\mathbf{r}_i|^3$  représentant l'accélération d'entraînement de  $P_0$  due à la présence de  $P_i$ ). Le choix de  $P_0$  comme référence pour le mouvement des  $P_k$  est arbitraire, mais on prend généralement le corps ayant la masse la plus élevée.

En supposant qu'on puisse résoudre ces  $n$  équations différentielles, on pourrait obtenir ensuite le mouvement absolu des  $P_k$  autour de  $G$ , puisqu'on a  $\mathbf{u}_k = \mathbf{r}_k + \mathbf{u}_0$  et  $m_0\mathbf{u}_0 = -\sum_{k=1}^n m_k\mathbf{u}_k$ , dont on déduit :

$$\mathbf{u}_0 = -\sum_{k=1}^n \frac{m_k}{M} \mathbf{r}_k \quad \text{avec} \quad M = \sum_{k=0}^n m_k \quad \text{puis :} \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{r}_k - \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M} \mathbf{r}_i$$



**Remarque.** Le premier terme du second membre de l'équation (6.11) représente une accélération képlérienne : Alors, si l'on peut trouver des situations où, dans l'équation relative à chaque  $P_k$ , les autres termes restent petits devant ce premier terme, on pourra traiter le problème des  $N$  corps comme  $N - 1$  problèmes képlériens perturbés. Concernant le mouvement autour de  $G$ , dans le second membre de l'équation (6.8), on pourrait aussi mettre en évidence un terme képlérien en  $-\mu \mathbf{u}_k / |\mathbf{u}_k|^3$ , mais au prix de développements assez lourds (développements en puissances des rapports de masses  $\frac{m_i}{m_0}$  à condition que ces rapports soient petits par rapport à 1).

### 23.3. Equations exprimées en fonction du gradient d'un potentiel

On peut exprimer les équations du mouvement absolu des  $N$  corps en fonction de leur énergie potentielle  $U$ , explicitée en (6.6). Les équations (6.1) peuvent en effet s'écrire aussi sous la forme :

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{u}_k}{dt^2} = -\mathbf{grad}_k U \quad \text{pour } k = 0, \dots, n \quad (6.12)$$

où la notation  $\mathbf{grad}_k U$  signifie que l'on prend le gradient de  $U$  au point  $P_k$  ; autrement dit, si  $(x_k, y_k, z_k)$  désignent les coordonnées cartésiennes de  $P_k$  (ou composantes de  $\mathbf{u}_k$ ), on a :

$$\mathbf{grad}_k U = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_k} = \left( \frac{\partial U}{\partial x_k}, \frac{\partial U}{\partial y_k}, \frac{\partial U}{\partial z_k} \right)$$

Etant donnée l'expression de  $U$  en fonction de ces coordonnées :

$$U = - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n \frac{K m_i m_j}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{1/2}} \quad (6.13)$$

sur les  $n(n + 1)/2$  termes de cette somme, seuls les  $n$  termes qui dépendent de  $P_k$  interviennent dans le calcul du gradient en  $P_k$  ; on obtient par exemple :

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = - \sum_{i=0}^n \underset{(i \neq k)}{K m_i m_k} \frac{(x_i - x_k)}{[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2]^{3/2}}$$

et des expressions analogues pour  $\frac{\partial U}{\partial y_k}$  et  $\frac{\partial U}{\partial z_k}$  ; ce sont bien les composantes du vecteur  $m_k \frac{d^2 \mathbf{GP}_k}{dt^2}$  obtenues dans l'équation (6.1).

De la même façon, les équations (6.11) du mouvement relatif des  $n$  corps  $P_1, \dots, P_n$  par rapport à  $P_0$  peuvent s'exprimer en fonction du gradient d'un certain potentiel. En effet,  $(X_k, Y_k, Z_k)$  désignant les composantes de  $\mathbf{r}_k$ , et  $(\partial/\partial X_k, \partial/\partial Y_k, \partial/\partial Z_k)$  celles du gradient en  $P_k$ , noté de nouveau  $\mathbf{grad}_k = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k}$ , on vérifie aisément que ces équations se mettent sous la forme :

$$\boxed{\frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} = - \frac{K(m_0 + m_k) \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|^3} + \mathbf{grad}_k V_k} \quad \text{pour } k = 1, \dots, n \quad (6.14)$$

avec :

$$\boxed{V_k = \sum_{i=1}^n \underset{(i \neq k)}{K m_i} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i|^3} \right)} \quad (6.15)$$

**Remarque 1.** Au contraire des équations (6.14), les équations (6.12) induisent une formulation canonique. En effet, pour avoir des équations sous forme canonique, il faut expliciter un jeu de variables conjuguées, tirées d'un hamiltonien, fonction scalaire représentant la dynamique de l'ensemble des  $N$  corps. Or, on constate en (6.12)

que les équations du mouvement absolu des  $N$  corps sont construites à partir du gradient d'une seule fonction  $U$ , tandis que celles du mouvement relatif (explicitées en (6.14)) utilisent le gradient de  $n$  fonctions  $V_k$  distinctes. Les fonctions  $V_k$  ne permettent pas de construire un hamiltonien, mais, dans le mouvement absolu, il y a un hamiltonien évident :  $H = T + U$  [cf. (6.6)]. Avec  $T = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n m_k \dot{\mathbf{u}}_k^2$ , les équations d'Hamilton sont relatives aux variables canoniques  $\mathbf{u}_k = (x_k, y_k, z_k)_{k=0, \dots, n}$  et à leurs conjuguées  $\tilde{\mathbf{u}}_k = (\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k)_{k=0, \dots, n}$  définies par :  $\tilde{\mathbf{u}}_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}_k} = m_k \dot{\mathbf{u}}_k$ , soit encore :  $\tilde{x}_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} = m_k \dot{x}_k$  et des expressions analogues avec  $y_k$  et  $z_k$ . Après avoir exprimé  $H = T + U$  en fonction de ces variables, on obtient les équations canoniques suivantes, équivalentes à (6.12) :

$$\frac{d\mathbf{u}_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{\mathbf{u}}_k} \quad \text{et} \quad \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}_k}$$

### Exercice



**Remarque 2.** Une autre façon de mettre le problème des  $N$  corps sous forme canonique, consiste à adopter les *coordonnées de Jacobi* : Considérant les  $N$  corps dans un certain ordre, par exemple  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , on prend comme variables les vecteurs  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{G}_1\mathbf{P}_2$  où  $G_1$  est le centre de masse de  $P_0$  et  $P_1$ , puis  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{G}_2\mathbf{P}_3$  où  $G_2$  est le centre de masse des 3 premiers corps, et ainsi de suite jusqu'à  $\mathbf{v}_n = \mathbf{G}_{n-1}\mathbf{P}_n$  où  $G_{n-1}$  est le centre de masse des  $n - 1$  premiers corps. En posant :

Pb<sub>14</sub>

$$\mu_k = \sum_{j=0}^k m_j$$

on obtient facilement les relations suivantes entre les  $\mathbf{v}_i$  et les  $\mathbf{r}_i$  :


$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_1 \quad \text{et pour } i > 1 : \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i - \frac{1}{\mu_{i-1}} \sum_{j=1}^{i-1} m_j \mathbf{r}_j \quad ; \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_j}{\mu_j} \mathbf{v}_j$$

puis, tenant compte de (6.7) et (6.9), on obtient ces relations entre les  $\mathbf{v}_i$  et les  $\mathbf{u}_i$  :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i - \frac{1}{\mu_{i-1}} \sum_{j=0}^{i-1} m_j \mathbf{u}_j \quad \text{et pour } i \geq 0 : \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \sum_{j=i}^n \frac{m_j}{\mu_j} \mathbf{v}_j$$

L'énergie cinétique  $T$  des  $N$  corps dans leur mouvement absolu dépendait des  $n+1$  vitesses  $\dot{\mathbf{u}}_i$  ; elle se transforme alors en une expression ne dépendant plus que des  $n$  variables  $\dot{\mathbf{v}}_j$  :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{j-1}}{\mu_j} m_j \dot{\mathbf{v}}_j^2$$

 **Exercice** Par ailleurs, dans l'énergie potentielle  $U$  donnée en (6.6), les distances  $|\mathbf{P}_k \mathbf{P}_i| = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$  s'expriment en fonction de l'ensemble des  $\mathbf{v}_j$  (et aussi des masses). L'hamiltonien  $H = T + U$  s'exprime donc en fonction de  $2n$  variables canoniques vectorielles : les  $\mathbf{v}_j$  et leurs conjuguées  $\tilde{\mathbf{v}}_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{v}}_j}$  (ou en fonction des  $6n$  variables canoniques que sont les composantes cartésiennes de ces  $2n$  vecteurs). Ainsi, le paramétrage de Jacobi permet à la fois de réduire l'ordre du système différentiel et de donner des équations sous forme canonique. Cependant, comme les distances mutuelles des  $P_i$  sont ici des fonctions des masses d'autant plus compliquées que  $n$  est grand ; aussi, c'est surtout dans le problème des 3 corps que l'on trouve l'utilisation pratique des variables de Jacobi.

## 24. Introduction au problème des 3 corps

Avant d'aborder l'étude du mouvement de  $N$  corps dans le système solaire (le Soleil, les planètes et leurs satellites), il convient de voir quelques propriétés du fameux problème des 3 corps. Des générations de mécaniciens célestes se sont attaquées à ce problème sans en venir à bout tant il est riche en difficultés de toutes sortes

et l'on découvre encore aujourd'hui des propriétés nouvelles (orbites périodiques, résonances, régularisation des collisions, chaos lié à la non-intégrabilité des équations, ...).

Nous n'utiliserons pas ici le paramétrage de Jacobi, mais considérerons simplement les mouvements relatifs de  $P_1$  et de  $P_2$  par rapport à  $P_0$ ; en posant  $\mathbf{r}_k = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$ , ces mouvements sont décrits par les équations (6.11), particularisées ici au cas  $n = 2$  :

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -K(m_0 + m_1) \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} + Km_2 \left( \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \right) \quad (6.16)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -K(m_0 + m_2) \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} + Km_1 \left( \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \right) \quad (6.17)$$

Ces équations se simplifient un peu si, par exemple, la masse  $m_2$  est négligeable par rapport à  $m_0$  et à  $m_1$  : En annulant  $m_2$ , le mouvement de  $P_1$  devient képlérien et il ne reste à étudier que l'équation (6.17); c'est alors le *problème restreint des 3 corps* (ou problème restreint circulaire si le mouvement de  $P_1$  est circulaire). Pour le moment, nous considérerons cependant que les 3 masses sont quelconques.

Rappelons encore que le choix de  $P_0$  comme référence pour les mouvements de  $P_1$  et  $P_2$  est arbitraire : On peut tout aussi bien choisir  $P_1$  pour repérer le mouvement de  $P_2$ ; pour cela, en soustrayant membre à membre les équations (6.17) et (6.16), on obtient alors :

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -K(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + Km_0 \left( \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \right) \quad (6.18)$$

Bien sûr, l'équation qui donne le mouvement de  $P_0$  par rapport à  $P_1$  n'est autre que (6.16) changée de signe. Notons que dans tous les cas, chacune des équations (6.16) à (6.18) présente une partie képlérienne et une partie non képlérienne, et que pour des masses  $m_0, m_1$  et  $m_2$  données, il suffit de considérer 2 de ces 3 équations.

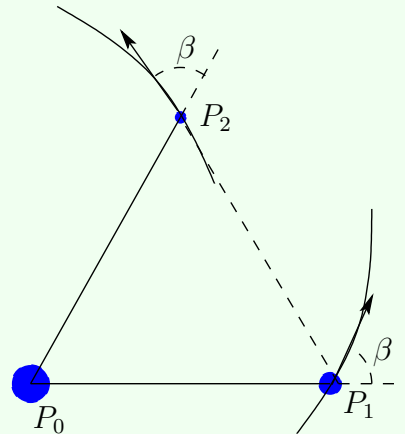
Avant de voir dans quelles circonstances le problème des 3 corps peut être considéré comme une superposition de problèmes képlériens perturbés, examinons certaines situations où ce problème est intégrable : elles correspondent en fait à des positions d'équilibre relatif.

## 24.1. Positions d'équilibre – Points de Lagrange

Les équations du mouvement des 3 corps admettent 5 solutions d'équilibre relatif, c'est-à-dire des situations où les rapports des distances mutuelles sont constants : Dans 2 de ces solutions, les 3 corps, restent équidistants les uns des autres (ils sont donc à tout instant aux sommets d'un triangle équilatéral), tandis que dans les 3 autres, les 3 corps restent constamment alignés avec des rapports de distance constants. Nous allons montrer que dans ces 5 situations,  $P_1$  et  $P_2$  décrivent autour de  $P_0$ , des mouvements képlériens coplanaires et de même foyer  $P_0$ .

Les solutions "équilatérales" s'obtiennent en écrivant que dans les équations (6.16) et (6.17), on a à tout instant :  $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  ; on obtient alors :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} &= -K(m_0 + m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \\ \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} &= -K(m_0 + m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3}\end{aligned}\tag{6.19}$$



Or, ces deux équations peuvent être satisfaites en même temps si  $P_1$  et  $P_2$  décrivent chacun autour de  $P_0$  des coniques coplanaires de même foyer  $P_0$ , de même demi-grand axe et de même excentricité, bref des coniques égales mais déduites l'une de l'autre par une rotation de  $\pm 60^\circ$  autour de  $P_0$  ; alors, comme la constante d'attraction  $\mu = K(m_0 + m_1 + m_2)$  est la même pour les 2 équations képlériennes (6.19), les mouvements sur ces deux coniques se feront de façon synchrone (en particulier avec la même période si les 2 mouvements sont elliptiques) : Il suffit pour cela qu'au départ  $P_1$  et  $P_2$  forment avec  $P_0$  un triangle équilatéral et que leurs vitesses  $\dot{\mathbf{r}}_1$  et  $\dot{\mathbf{r}}_2$  vérifient :  $|\dot{\mathbf{r}}_1| = |\dot{\mathbf{r}}_2|$  et  $\mathbf{r}_1 \wedge \dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}_2 \wedge \dot{\mathbf{r}}_2$  ; autrement dit, à cet instant, les vitesses sont égales et forment entre elles le même angle de  $60^\circ$  que les rayon-vecteurs ; ces conditions initiales suffisent pour donner des mouvements képlériens identiques, coplanaires, simplement décalés de  $60^\circ$  l'un de l'autre.

Si ces mouvements sont circulaires,  $P_1$  et  $P_2$  parcourent le même cercle, de centre  $P_0$ , avec 2 dispositions possibles des 3 corps, l'une correspondant au cas où  $P_2$  est en avance de  $60^\circ$  sur  $P_1$ , et l'autre, au cas où il est en retard de ce même angle. Dans un repère  $P_0\mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k}_0$  tournant avec  $P_1$  autour de  $P_0\mathbf{k}_0$  (le vecteur  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$  y est donc

fixe, par exemple sur l'axe  $P_0\mathbf{i}$ ), le point  $P_2$  est alors également fixe, dans le plan  $P_0\mathbf{ij}$ , au troisième sommet de l'un des 2 triangles équilatéraux que l'on peut construire sur le côté  $P_0P_1$  dans ce plan. Les 2 positions d'équilibre correspondantes sont les *points de Lagrange* appelés  $L_4$  et  $L_5$ . Si la masse  $m_2$  est négligeable devant  $m_0$  et  $m_1$  (problème restreint circulaire), on peut montrer que les positions de  $P_2$  en  $L_4$  ou en  $L_5$  sont stables (au sens de l'existence de petits mouvements dans leur voisinage) si les masses  $m_0$  et  $m_1$  vérifient :  $\frac{m_0}{m_1} > (25 + \sqrt{621})/2$ .

## Exercice



Dans le système solaire, on rencontre plusieurs de ces situations d'équilibre au voisinage de points de Lagrange : On trouve d'abord de nombreuses petites planètes qui se maintiennent sensiblement à égales distances du Soleil et de Jupiter, précédant ou suivant cette planète d'environ  $60^\circ$  dans son mouvement héliocentrique ; on peut montrer en effet que chacune de ces petites planètes forme avec le Soleil et Jupiter un problème de 3 corps, les autres planètes ne les perturbant pas suffisamment pour détruire la stabilité de cet équilibre (la condition de stabilité :  $m_\odot/m_{jup} = 1047$  est bien vérifiée) ; ces petites planètes qui accompagnent Jupiter sont appelées *planètes "troyennes"* car on leur a donné des noms des héros de la guerre de Troie : Achille, Ulysse, Ajax, Nestor *etc.* Par ailleurs, on sait depuis 1980 que Téthys et Dioné, 2 parmi les 8 gros satellites de Saturne, "possèdent" aussi 3 petits *satellites coorbitaux* dans le voisinage de leurs points de Lagrange : Telesto et Calypso accompagnent Téthys aux environs des points respectifs  $L_4$  et  $L_5$  du système Saturne-Téthys, tandis que Hélène suit Dioné au environs du point  $L_4$  du système Saturne-Dioné.


Quant aux solutions d'équilibre "alignées", on les obtient en écrivant que dans les équations (6.16) et (6.17) on a à tout instant :  $\mathbf{r}_2 = \alpha\mathbf{r}_1$  où  $\alpha$  est une constante ; alors, avec  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (1 - \alpha)\mathbf{r}_1$ , on obtient :

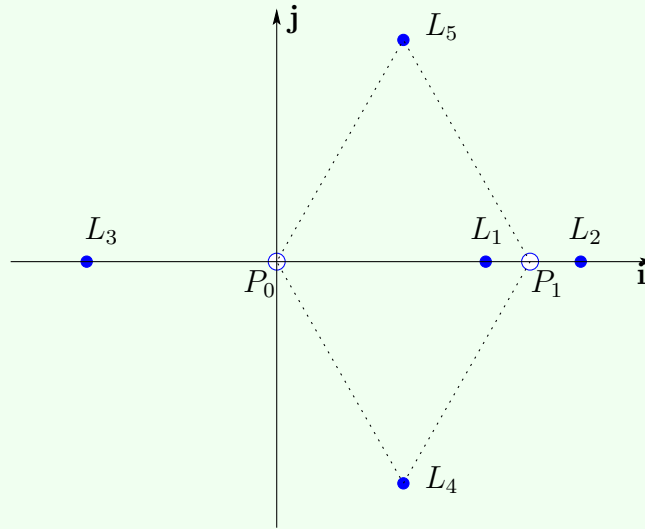
$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} &= -K \left( m_0 + m_1 + m_2 \left( \frac{\alpha}{|\alpha|^3} + \frac{1-\alpha}{|1-\alpha|^3} \right) \right) \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \\ \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} &= -K \left( m_0 + m_2 + m_1 \frac{|\alpha|^3}{\alpha} \left( 1 - \frac{1-\alpha}{|1-\alpha|^3} \right) \right) \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \end{aligned} \quad (6.20)$$



Pour avoir  $\mathbf{r}_2 = \alpha \mathbf{r}_1$ , et donc  $\ddot{\mathbf{r}}_2 = \alpha \ddot{\mathbf{r}}_1$ , il faut encore que les coefficients en facteur de  $K$  dans ces 2 expressions vérifient l'équation :

$$m_0 + m_1 + m_2 \left( \frac{\alpha}{|\alpha|^3} + \frac{1 - \alpha}{|1 - \alpha|^3} \right) = \frac{1}{|\alpha|^3} \left( m_0 + m_2 + m_1 \frac{|\alpha|^3}{\alpha} \left( 1 - \frac{1 - \alpha}{|1 - \alpha|^3} \right) \right) \quad (6.21)$$

 **Exercice** On peut montrer qu'il existe 3 racines réelles  $\alpha_i$  qui vérifient les inégalités :  $\alpha_3 < 0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2$ . Pour chacune de ces valeurs, à condition qu'au départ on ait aussi  $\mathbf{r}_2 \wedge \dot{\mathbf{r}}_2 = \alpha_i^2 \mathbf{r}_1 \wedge \dot{\mathbf{r}}_1$ , les orbites de  $P_1$  et  $P_2$  autour de  $P_0$  sont 2 coniques de foyer  $P_0$ , coplanaires, homothétiques dans le rapport  $\alpha_i$  et ayant leurs grands axes confondus et la même excentricité (et la même période si elles sont elliptiques) ; les trois points restent alors alignés quelque soit  $t$ . Les racines  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  correspondent à 3 configurations où les points sont alignés respectivement dans l'ordre :  $P_0 P_2 P_1$ ,  $P_0 P_1 P_2$  et  $P_2 P_0 P_1$ .



Si les orbites de  $P_1$  et  $P_2$  autour de  $P_0$  sont circulaires, ces racines correspondent à 3 positions d'équilibre relatif : Dans un repère tournant avec  $P_1$  autour de  $P_0$ , on a 3 positions fixes possibles pour  $P_2$ , sur l'axe  $P_0P_1$ , en des points de Lagrange notés  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  et correspondant à  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ . Cependant, on peut montrer que ces 3 positions d'équilibre sont toujours instables.

## 24.2. Quelques propriétés du problème restreint circulaire

La masse  $m_2$  est prise égale à zéro, tandis que  $P_1$  décrit autour de  $P_0$  un mouvement circulaire de rayon  $a_1$  avec la vitesse angulaire constante  $n_1$  telle que  $n_1^2 a_1^3 = K(m_0 + m_1)$  cf. (6.16). Soient  $P_0 \mathbf{i}_0 \mathbf{j}_0$  le plan fixe de ce

mouvement et  $R_0 = P_0 \mathbf{i}_0 \mathbf{j}_0 \mathbf{k}_0$  le repère de directions fixes qui lui correspond. Dans ce repère, le mouvement de  $P_2$  est donné par l'équation (6.17), réécrite ici de façon à souligner que le repère de référence est  $R_0$  :

$$\frac{d_{R_0}^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -K m_0 \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} + K m_1 \left( \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \right) \quad (6.22)$$

Soit  $R = P_0 \mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}_0$  le repère tournant avec  $P_1$  autour de  $P_0 \mathbf{k}_0$  et tel que  $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 = \mathbf{r}_1 = a_1 \mathbf{i}$  ; son vecteur rotation est alors  $\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0} = n_1 \mathbf{k}_0$ . Par composition des accélérations (cf. (1.18)), le mouvement de  $P_2$  est alors donné dans ce repère par l'équation :

$$\frac{d_R^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{d_{R_0}^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} - 2\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0} \wedge \frac{d_R \mathbf{r}_2}{dt} - \boldsymbol{\Omega}_{R/R_0} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0} \wedge \mathbf{r}_2) \quad (6.23)$$

soit :

$$\frac{d_R^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} + 2n_1 \mathbf{k}_0 \wedge \frac{d_R \mathbf{r}_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \left( \frac{K m_0}{|\mathbf{r}_2|} + \frac{K m_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{K m_1 \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{a_1^3} \right) - n_1^2 (\mathbf{r}_2 - (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2) \mathbf{k}_0) \quad (6.24)$$

En notant  $(x, y, z)$  les coordonnées de  $P_2$  (ou composantes de  $\mathbf{r}_2$ ) dans  $R$ , on abouti enfin aux équations :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n_1 \dot{y} = \frac{\partial W}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n_1 \dot{x} = \frac{\partial W}{\partial y} \\ \ddot{z} = \frac{\partial W}{\partial z} \end{cases} \quad (6.25)$$

avec

$$W = \frac{n_1^2}{2} \left( (x - \nu a_1)^2 + y^2 \right) + \frac{K m_0}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{K m_1}{((a_1 - x)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \quad (6.26)$$

où l'on a posé :

$$\nu = \frac{m_1}{m_0 + m_1}$$

On remarque le premier terme, représentatif de l'accélération d'entraînement et qui correspond à une rotation autour de  $G$ , centre de masses de  $P_0$  et de  $P_1$  : En effet, le mouvement de  $R$  par rapport à un repère galiléen se décompose en une rotation autour de  $G$  suivie d'une translation de vecteur  $\mathbf{GP}_0 = -\nu a_1 \mathbf{i}$ . Les deux autres termes représentent les potentiels de gravitation de  $P_0$  et de  $P_1$  en  $P_2$ . En multipliant les équations (6.25) respectivement par  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$ , puis en les additionnant membre à membre, on obtient une expression intégrable aboutissant à l'*intégrale de Jacobi* du problème restreint des trois corps :

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = W - C \quad (6.27)$$

où  $C$  est une constante que l'on peut évaluer à partir des conditions initiales. Comme le membre de gauche est toujours positif ou nul, le mouvement de  $P_2$  est confiné dans le domaine où l'on a :  $W \geq C$ . La surface qui limite ce domaine, définie par  $W = C$ , est appelée surface de vitesse nulle. Pour obtenir une expression plus symétrique de  $W$  on pose d'abord :

$$\rho_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad \rho_1^2 = (x - a_1)^2 + y^2 + z^2$$

puis on vérifie que l'on a :

$$(x - \nu a_1)^2 + y^2 = (1 - \nu)\rho_0^2 + \nu\rho_1^2 - z^2 - \nu(1 - \nu)a_1^2$$

Ensuite, comme on a

$$n_1^2 a_1^3 = K(m_0 + m_1) \implies Km_0 = (1 - \nu)n_1^2 a_1^3 \quad \text{et} \quad Km_1 = \nu n_1^2 a_1^3$$

on trouve :

$$W = n_1^2 a_1^3 \left\{ (1 - \nu) \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{\rho_0^2}{2a_1^3} \right) + \nu \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{\rho_1^2}{2a_1^3} \right) \right\} - \frac{1}{2} n_1^2 (z^2 + \nu(1 - \nu)a_1^2) \quad (6.28)$$

Supposons que, pour simplifier, le mouvement de  $P_2$  s'effectue dans le plan  $z = 0$  (problème restreint circulaire [plan](#) : il suffit pour cela que  $P_2$  soit lancé initialement dans ce plan avec une vitesse contenue aussi dans ce plan) ; la valeur de  $C$  découle de ces conditions initiales et, suivant cette valeur, le mouvement ultérieur se trouve éventuellement confiné dans une région du plan limitée par la courbe de vitesse nulle définie par l'équation :

$$W_1(x, y) = (1 - \nu) \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{\rho_0^2}{2a_1^3} \right) + \nu \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{\rho_1^2}{2a_1^3} \right) = \frac{C}{n_1^2 a_1^3} + \frac{\nu(1 - \nu)}{2a_1} = C_1 \quad (6.29)$$

Ces courbes existent pour  $C_1 \geq 1,5$ . On peut voir leur forme en fonction de  $C_1$  sur les figures suivantes où, dans l'espace  $(x, y, C_1)$ , on a cartographié la surface  $C_1 = W_1(x, y)$  par ses courbes de niveau entre 1,5 et 2 (la [Figure A](#) présente 11 de ces courbes correspondant aux valeurs  $C_1 = 1,5 + 0,05k$ , pour  $k$  variant de 0 à 10) ; cette surface est aussi vue en perspective ([Figure B](#)), laissant apparaître une “cuvette” formée de deux “vallées” symétriques par rapport au plan  $y = 0$  et séparées par 3 “cols”. La surface remonte au centre en deux “pics” verticaux centrés sur  $P_0$  et sur  $P_1$ . Dans cet exemple, on a pris  $\nu = 0,1$  et  $a_1 = 1$  mais on obtiendrait

qualitativement la même forme pour d'autres valeurs de  $\nu$ .

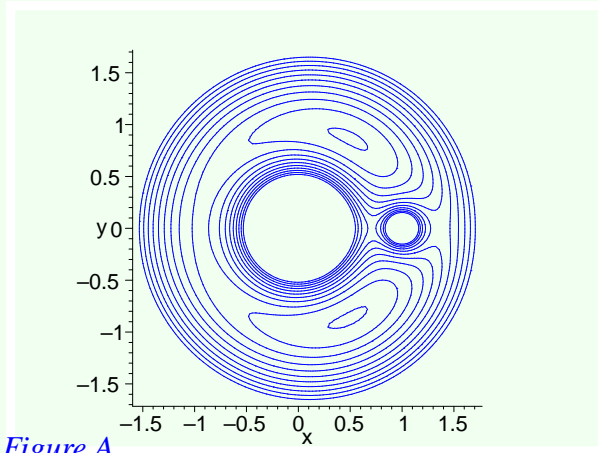


Figure A

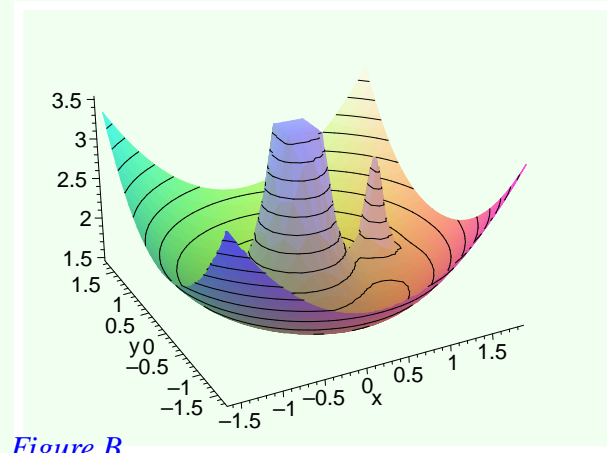


Figure B

Le fond de chaque vallée correspond à  $C_1 = 1, 5$  (quelque soit  $\nu$ ), là où la courbe de vitesse nulle est réduite à un point ; ce point correspond précisément à l'un des points d'équilibre équilatéral de Lagrange  $L_4$  ou  $L_5$  : Si l'on place  $P_2$  en l'un de ces points avec une vitesse nulle, il y reste car en ces points on a  $\text{grad } W_1 = 0$ . Au contraire, si l'on place  $P_2$  en l'un de ces points avec une vitesse  $V$  non nulle, la constante  $C_1$  est alors inférieure à  $1, 5$  (elle vaut  $1, 5 - V^2/(2n_1^2 a_1^3)$ ) et donc le plan  $z = C_1$  ne coupe pas la surface  $z = W_1(x, y)$ . Dans ces conditions,  $P_2$  peut a priori atteindre n'importe quel point  $(x, y)$  du plan et sa vitesse ne s'annule jamais. L'étude des éventuels petits mouvements au voisinage des positions  $L_4$  et  $L_5$  est un autre problème : On pourrait le résoudre en linéarisant les équations (6.25) et (6.26), c'est-à-dire en faisant le changement de variables :  $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$  défini par  $x = a_1(1/2 + \xi)$  et  $y = a_1(\pm\sqrt{3}/2 + \eta)$  et en supposant que  $\xi$  et  $\eta$  sont des infiniment petits d'ordre 1 ; c'est de cette façon que l'on obtient la condition de stabilité annoncée dans le **paragraphe précédent** car on montre que les petits mouvements existent si l'on a :  $27\nu(1 - \nu) < 1$  d'où l'on tire :  $\frac{m_0}{m_1} > (25 + \sqrt{621})/2$ .

Les cas intéressants à discuter concernent des positions initiales de  $P_2$  correspondant à des valeurs de  $C_1$  supérieures à 1, 5. On distingue 3 situations critiques correspondant aux cas où le plan “horizontal”  $z = C_1$  est tangent à la surface  $z = W_1(x, y)$  au niveau de l’un des 3 cols :

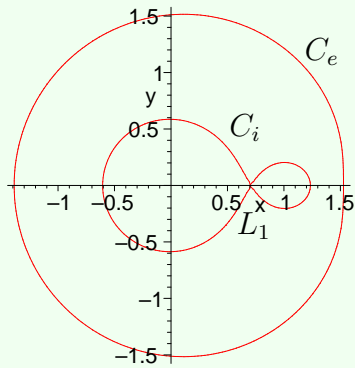


Figure C :  $C_1 = C_1^{(1)}$

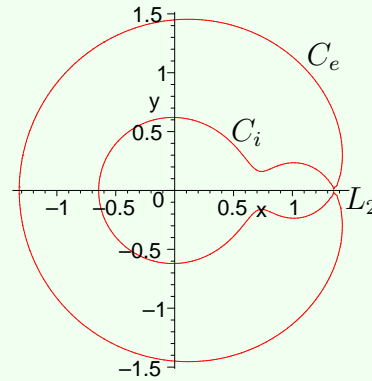


Figure D :  $C_1 = C_1^{(2)}$

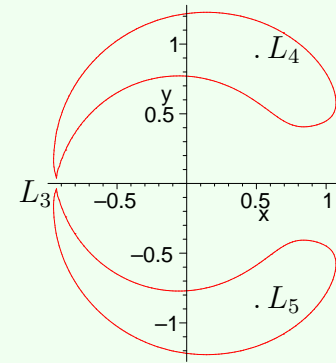


Figure E :  $C_1 = C_1^{(3)}$

Ainsi, pour  $C_1 = C_1^{(1)}$  ( $= 1,8434766$  pour  $\nu = 0, 1$ ),  $P_2$  ne peut jamais se trouver dans la zone de la **Figure C** comprise entre les courbes  $C_i$  et  $C_e$  car  $W_1(x, y)$  y est inférieur à  $C_1^{(1)}$  ;  $P_2$  est donc soit contraint à rester dans la zone extérieure à la courbe  $C_e$ , soit confiné près de  $P_0$  ou près de  $P_1$  à l’intérieur de la courbe  $C_i$  en forme de 8 renversé (donc en situation de satellite de l’un de ces points). Le point singulier de la courbe en 8 est le point de Lagrange  $L_1$ . Pour des valeurs de  $C_1$  supérieures à  $C_1^{(1)}$ ,  $P_2$  se trouve nécessairement confiné davantage à l’intérieur de  $C_i$  (plus près de  $P_0$  ou de  $P_1$ ), ou bien davantage à l’extérieur de  $C_e$ , pouvant alors éventuellement s’échapper à l’infini.

Pour  $C_1 = C_1^{(2)}$  ( $= 1,7783422$  pour  $\nu = 0, 1$ ),  $P_2$  ne peut jamais se trouver dans la zone de la **Figure D**

comprise entre les courbes  $C_i$  et  $C_e$  ; le point singulier de la frontière de cette zone est le point de Lagrange  $L_2$ . Pour  $C_1^{(2)} < C_1 < C_1^{(1)}$  on aurait des courbes intermédiaires entre celles des **Figures C** et **D** (on peut en voir quelques unes sur la **Figure A**) : Si  $P_2$  est l'intérieur de la courbe interne, il reste indéfiniment dans le voisinage de  $P_0$  et de  $P_1$ , pouvant passer librement du voisinage de  $P_0$  à celui de  $P_1$  mais sans pouvoir s'éloigner à l'infini ; au contraire, si  $P_2$  est à l'extérieur de la courbe externe, il ne peut jamais s'approcher très près de  $P_0$  et de  $P_1$  mais peut s'échapper à l'infini.

Pour  $C_1 = C_1^{(3)}$  ( $= 1,5947891$  pour  $\nu = 0,1$ ),  $P_2$  ne peut jamais se trouver dans la zone de la **Figure E** contenant les points  $L_4$  et  $L_5$  ; le point singulier de la frontière de cette zone est le point de Lagrange  $L_3$ . Pour  $C_1^{(3)} < C_1 < C_1^{(2)}$  on aurait des courbes intermédiaires entre celles des **Figures D** et **E** (cf. **Figure A**) ; la zone interne proche de  $P_0$  et  $P_1$  est maintenant ouverte sur la zone externe et donc  $P_2$  a la possibilité d'être très proche de  $P_0$  ou de  $P_1$  à un certain instant, puis de s'en éloigner jusqu'à l'infini. Pour terminer, si l'on a  $1,5 < C_1 < C_1^{(3)}$ ,  $P_2$  peut parcourir tout le plan sauf des voisinages de  $L_4$  et de  $L_5$  qui tendent vers ces points lorsque  $C_1$  tend vers  $1,5$  et enfin, pour  $C_1 \leq 1,5$  l'ensemble du plan est accessible à  $P_2$ .

### 24.3. Traitement du problème des 3 corps par des problèmes de Kepler perturbés

Les équations (6.16) à (6.18) montrent que les accélérations relatives de  $P_1$  et  $P_2$  par rapport à  $P_0$ , ou de  $P_2$  par rapport à  $P_1$ , sont toujours la somme d'une accélération képlérienne et de deux autres termes non képlériens. Il suffit donc que ces autres termes soient petits par rapport au premier pour que ces mouvements relatifs soient représentables par des mouvements képlériens perturbés. Il existe au moins deux situations où ces termes non képlériens peuvent être considérés comme des perturbations ; réalisons ces situations avec des corps du système solaire :

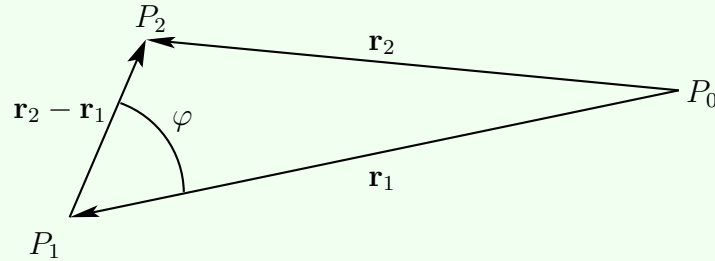


### 24.3.1. cas {Soleil + 2 planètes} : $m_0 \gg m_1$ et $m_0 \gg m_2$

Si  $m_0$  est la masse du Soleil  $P_0$ , prépondérante sur celles  $m_1$  et  $m_2$  des planètes  $P_1$  et  $P_2$  (ces 2 masses étant éventuellement du même ordre de grandeur), les équations (6.16) et (6.17) représentent le mouvement héliocentrique des 2 planètes. Les termes qui possèdent  $Km_2$  et  $Km_1$  en facteur dans ces équations sont alors petits devant le terme képlérien, à condition toutefois que la quantité  $1/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2$  reste du même ordre de grandeur que  $1/|\mathbf{r}_1|^2$  et  $1/|\mathbf{r}_2|^2$  : C'est le cas si  $P_1$  ne s'approche jamais très près de  $P_2$ , et il suffit pour cela que les orbites de  $P_1$  et  $P_2$  soient bien séparées, c'est-à-dire avec des excentricités faibles et avec demi-grands axes osculateurs  $a_1$  et  $a_2$  bien distincts (tels que  $|a_1 - a_2|$  soit du même ordre de grandeur que  $a_1$  ou  $a_2$ ). Si les 2 planètes ont des masses comparables, leurs perturbations mutuelles seront également comparables ; si l'une des planètes a une masse très petite devant celle de l'autre, la grosse planète perturbera la petite mais ne sera pratiquement pas perturbée par elle.

On peut se demander jusqu'à quelle distance minimale de  $P_1$  peut passer  $P_2$  pour que le mouvement de  $P_2$  par rapport à  $P_0$  reste représentable par un mouvement képlérien héliocentrique perturbé. Pour cela, il suffit que dans l'équation (6.17), le rapport  $R$  entre les modules de la partie perturbatrice et de la partie képlérienne soit inférieur à un certain  $\varepsilon$  petit donné :

$$R = \frac{m_1 \left| \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \right|}{(m_0 + m_2) \frac{1}{|\mathbf{r}_2|^2}} < \varepsilon \quad (6.30)$$



Soit  $\varphi$  l'angle entre  $P_1P_0$  et  $P_1P_2$ , c'est-à-dire entre  $-\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , et posons :

$$\alpha = \frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_1|} \tag{6.31}$$

Exercice On trouve :



$$R = \frac{m_1}{m_0 + m_2} \frac{1}{\alpha^2} (1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)(1 + 2\alpha^2 \cos \varphi + \alpha^4)^{1/2} \tag{6.32}$$

$\alpha$  devient petit devant l'unité si  $P_2$  se rapproche de  $P_1$ , et  $R$  tend alors vers sa partie principale  $\frac{m_1}{m_0} \frac{1}{\alpha^2}$  ; pour avoir  $R < \varepsilon$ , il suffit donc d'avoir :

$$\alpha^2 > \frac{1}{\varepsilon} \frac{m_1}{m_0} \quad \text{soit} \quad |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| > \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{m_1}{m_0}\right)^{1/2} |\mathbf{r}_1| \tag{6.33}$$

Par exemple, si  $\frac{m_1}{m_0} = 10^{-3}$  ( $P_1$  représentant alors Jupiter), pour que la perturbation (par Jupiter) du mouvement héliocentrique de la planète  $P_2$  soit inférieure à  $\varepsilon = 10^{-2}$ , il suffit d'avoir  $\alpha > 1/3.16$ , et donc que  $P_2$  soit distant de Jupiter d'au moins le tiers de la distance de Jupiter au Soleil ; ceci est réalisé pour toutes les grosses

planètes et pour la plupart des petites planètes du système solaire. Avec  $\frac{m_1}{m_0} = 10^{-5}$  et  $\varepsilon = 10^{-3}$ , on obtiendrait  $\alpha > 1/10$  :  $P_2$  peut s'approcher d'autant plus de  $P_1$  que  $m_1/m_0$  est plus petit. Bien sûr, dans le même temps, le mouvement héliocentrique de  $P_1$  pourra aussi être considéré comme perturbé par  $P_2$  si  $\alpha$  vérifie une relation analogue à (6.33) avec  $m_2$  à la place de  $m_1$  : C'est la plus grande des 2 masses qu'il faut donc utiliser dans cette relation.

**Remarque.** On peut généraliser cette situation à un ensemble de  $n$  planètes de masses  $m_i$  petites devant celle  $m_0$  du Soleil. Les équations (6.11) représentent alors  $n$  problèmes képlériens perturbés si aucune des quantités  $1/|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2$  ne peut devenir grande devant  $1/|\mathbf{r}_k|^2$  quelque soit  $k$  : Il suffit pour cela que les orbites des  $n$  planètes soient bien *hiérarchisées*, ne permettant pas de rapprochements serrés entre planètes ; c'est le cas de systèmes planétaires dont les orbites sont quasi-circulaires et quasi-coplanaires, et dont les demi-grands axes, ordonnés par valeurs croissantes, sont tels que  $a_{i+1} - a_i$  soit du même ordre de grandeur que  $a_i$ . C'est alors ce qu'on appelle un problème de  $n + 1$  corps de *type planétaire* .

### 24.3.2. cas {Soleil + planète + satellite} : $m_0 \gg m_1 \gg m_2$

$m_0$  représente toujours la masse du Soleil,  $m_1$  celle d'une planète et  $m_2$  celle d'un satellite de cette planète. L'équation (6.18) représente alors le mouvement planétocentrique du satellite perturbé par le Soleil. Bien que  $m_0$  soit très grand devant  $m_1$  et  $m_2$ , le terme ayant  $Km_0$  en facteur dans cette équation pourra être une perturbation du terme képlérien si ce facteur,  $\frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3}$ , est lui-même assez petit ; cela arrivera si  $|\mathbf{r}_1|$  est suffisamment voisin de  $|\mathbf{r}_2|$ , c'est-à-dire si le satellite est toujours suffisamment proche de sa planète ; l'influence de celle-ci restera alors prépondérante sur celle du Soleil. Le terme képlérien, en  $1/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2$ , est d'ailleurs lui-même amplifié par la petitesse de  $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ .

On peut se demander jusqu'à quelle distance  $P_2$  peut s'éloigner de  $P_1$  pour que son mouvement autour de

$P_1$  reste assimilable à un mouvement képlérien planétocentrique perturbé par  $P_0$ . Il faut pour cela que, dans l'équation (6.18), le rapport  $R'$  entre les modules de la partie perturbatrice et de la partie képlérienne soit inférieur à un certain  $\varepsilon$  petit donné :

$$R' = \frac{m_0 \left| \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \right|}{(m_1 + m_2) \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}} < \varepsilon \tag{6.34}$$

**Exercice**  $\varphi$  désignant toujours l'angle entre  $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0$  et  $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ , et conservant la notation (6.31) pour  $\alpha$ , on trouve :



$$R' = \frac{m_0}{m_1 + m_2} \alpha^3 \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi} (1 + O(\alpha)) \geq \frac{m_0}{m_1 + m_2} \alpha^3 \tag{6.35}$$

Donc,  $R' < \varepsilon$ , correspond à :

$$\alpha < \left( \varepsilon \frac{m_1 + m_2}{m_0} \right)^{1/3} \simeq \left( \varepsilon \frac{m_1}{m_0} \right)^{1/3} \tag{6.36}$$

Dans le même temps, l'équation (6.16), qui définit le mouvement héliocentrique de la planète, donne aussi, en changeant tous les signes, le mouvement planétocentrique du Soleil ; celui-ci pourra être assimilé à un mouvement képlérien perturbé par le satellite si le terme en  $Km_2$  est suffisamment petit. Or, ce terme contient la quantité  $1/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2$ , qui est d'autant plus importante que la distance du satellite à la planète est plus petite. Pour pouvoir traiter aussi cette équation comme un problème képlérien perturbé, avec le même  $\varepsilon$ , il faut que l'on ait :

$$R'' = \frac{m_2 \left| \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \right|}{(m_0 + m_1) \frac{1}{|\mathbf{r}_1|^2}} \simeq \frac{m_2}{m_0} \frac{\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}}{\frac{1}{|\mathbf{r}_1|^2}} = \frac{m_2}{m_0} \frac{|\mathbf{r}_1|^2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} < \varepsilon$$

c'est-à-dire :

$$\frac{m_2}{m_0} < \varepsilon \alpha^2 \quad \text{soit, d'après (6.36) :} \quad \frac{m_2}{m_0} < \varepsilon^{5/3} \left( \frac{m_1}{m_0} \right)^{2/3}$$

Ainsi, la masse du satellite rapportée à celle du Soleil doit être beaucoup plus petite que celle de la planète.

## 24.4. Sphère d'influence d'une planète

Pb<sub>13</sub>

On vient de montrer que dans un certain voisinage de la planète  $P_1$ , on a intérêt à représenter le mouvement de  $P_2$  dans un repère planétocentrique, alors que plus loin, il vaut mieux représenter ce mouvement dans un repère héliocentrique. On peut schématiser cela sur un graphique : représentons les fonctions de  $\alpha$  notées  $\bar{R} = \frac{m_1}{m_0} \alpha^{-2}$  et  $\bar{R}' = \frac{m_0}{m_1} \alpha^3$ , qui sont des approximations des fonctions  $R$  et de  $R'$  données en (6.32) et en (6.35), valables pour  $\alpha$  petit et majorées pour toutes les valeurs possibles de  $\varphi$ . Ces deux courbes se coupent en  $(\alpha_0, R_0)$  :

$$\alpha_0 = \left( \frac{m_1}{m_0} \right)^{2/5} \quad \longleftrightarrow \quad \bar{R} = \bar{R}' = R_0 = \left( \frac{m_1}{m_0} \right)^{1/5} \quad (6.37)$$

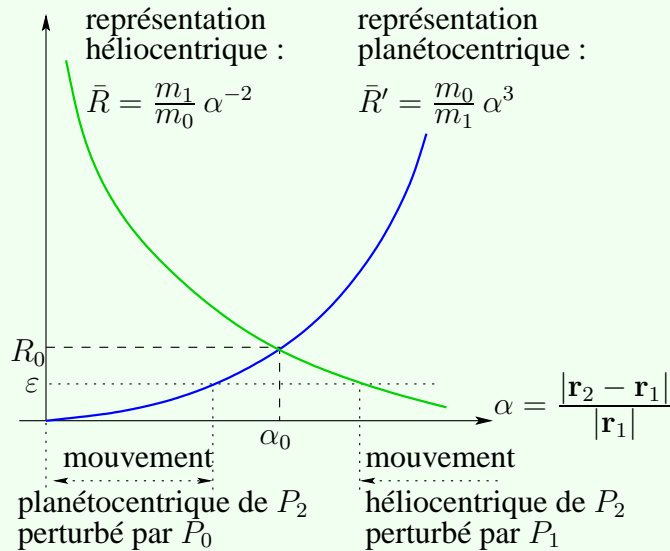
Sur la figure suivante, on observe les 2 intervalles en  $\alpha$  où l'on a  $\bar{R} < \varepsilon$  et à  $\bar{R}' < \varepsilon$  ; ces intervalles sont disjoints si  $\varepsilon$  est inférieur à  $R_0$  et la valeur  $\alpha_0$  sépare l'espace en 2 domaines : pour  $\alpha < \alpha_0$ , on a  $\bar{R}' \leq \bar{R}$  et il vaut donc toujours mieux utiliser pour  $P_2$  des équations en repère planétocentrique ; dans le cas contraire, on a  $\bar{R} \leq \bar{R}'$ , et donc des équations en repère héliocentrique sont préférables.

La région de l'espace où l'on a à  $R' \leq R$  est appelé "*sphère d'influence*" de la planète  $P_1$  dans l'environnement du Soleil  $P_0$ . On a de façon approchée (en majorant sur  $\varphi$ ) :  $\bar{R}' \leq \bar{R}$  pour  $\alpha \leq \alpha_0 = \left( \frac{m_1}{m_0} \right)^{2/5}$ , mais on peut aussi tenir compte de  $\varphi$  dans le premier terme négligé du développement de  $R$  et  $R'$  en puissances de  $\alpha$  : La

surface  $R = R'$  est alors sensiblement donnée en fonction de  $\varphi$  par l'équation :


$$\frac{m_1}{m_0} \alpha^{-2} = \frac{m_0}{m_1} \alpha^3 (1 + 3 \cos^2 \varphi)^{1/2} \quad \text{soit :} \quad \alpha = (1 + 3 \cos^2 \varphi)^{-1/10} \left( \frac{m_1}{m_0} \right)^{2/5} \quad (6.38)$$

La fonction  $(1 + 3 \cos^2 \varphi)^{-1/10}$  prend toutes ses valeurs entre 0.87 et 1. Autrement dit, comme  $\alpha$  représente le rapport des distances de  $P_1$  à  $P_2$  et à  $P_0$ , pour  $|\mathbf{r}_1|$  fixé, l'ensemble des positions de  $P_2$  telles que  $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = (1 + 3 \cos^2 \varphi)^{-1/10} \left( \frac{m_1}{m_0} \right)^{2/5} |\mathbf{r}_1|$  est une surface légèrement allongée vers  $P_0$  et qui s'écarte finalement assez peu d'une sphère.



On trouvera dans le **Tableau 6** le “rayon”  $\alpha_0 |\mathbf{r}_1|$  de la sphère d’influence des principales planètes du sys-

tème solaire, ainsi que la valeur de  $\bar{R}_0$  qui lui correspond. On peut vérifier que tous les satellites naturels des planètes sont largement à l'intérieur de la sphère d'influence de leur planète. Cependant les valeurs de  $\bar{R}_0$  sont plutôt élevées, dépassant toujours la valeur de  $\varepsilon = 10^{-2}$  que l'on peut considérer comme un maximum pour pouvoir parler de perturbation. En réalité, tous les satellites naturels connus sont aussi dans la sphère plus petite correspondant à  $\bar{R}' < 10^{-2}$  (dernière colonne du **Tableau 6**). Ils sont donc tous susceptibles d'être étudiés par des méthodes de perturbation. Par exemple, le mouvement géocentrique de la Lune perturbé par le Soleil correspond à  $\alpha = 0,00266$  ; le rapport  $\bar{R}'$  atteint alors  $6 \cdot 10^{-3}$ , valeur suffisamment élevée pour que l'on considère généralement le problème de la Lune comme l'un des plus difficiles de la mécanique céleste.

**Exercice**  On constate par ailleurs que la sphère d'influence des plus gros astéroïdes est loin d'être négligeable : L'existence de satellites autour de ces petites planètes est tout à fait possible ; en fait, la sonde Galileo en route vers Jupiter a frôlé deux astéroïdes, Gaspra et Ida, et a découvert en 1993 un tout petit satellite tournant autour de ce dernier (Ida est pourtant plus de 10 fois plus petit que Cérés en dimension, et son satellite Dactyl est en orbite à une distance d'une centaine de kilomètres). De même en 2001, la sonde spatiale NEAR s'est satellisée autour de l'astéroïde Eros, confirmant par là la possibilité pour les astéroïdes d'avoir des satellites.

On trouve aussi autour de Jupiter, de Saturne et d'Uranus, des systèmes de satellites dont les masses sont suffisantes (*cf.* **Tableau 2**) pour qu'ils se perturbent entre eux, formant autour de leur planète des petits systèmes de type planétaire. Il faut bien sûr ajouter à ces perturbations mutuelles, les perturbations dues au Soleil qui sont propres à tout problème de satellite. On trouvera sur le site du Bureau des Longitudes toutes les données utiles concernant les orbites des planètes et de leurs satellites ([http ://www.bdl.fr](http://www.bdl.fr)).

**Tableau 6.** “Rayon” ( $\alpha_0|\mathbf{r}_1|$ ) de la sphère d’influence des principales planètes du système solaire. On donne aussi, pour chaque planète, à quelle distance  $\alpha_1|\mathbf{r}_1|$  un satellite de cette planète est perturbé par le Soleil avec un  $\varepsilon$  égal à :  $10^{-2}$  [on a alors  $\alpha_1 = (10^{-2}m_1/m_0)^{1/3}$ ].

| $P_1$   | $\frac{m_1}{m_0}$    | $\alpha_0$ | $\bar{R}_0$ | $ \mathbf{r}_1 $<br>UA | $\alpha_0 \mathbf{r}_1 $<br>$10^6$ km | $\alpha_1 \mathbf{r}_1 $<br>$10^6$ km |
|---------|----------------------|------------|-------------|------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| Mercure | $1,66 \cdot 10^{-7}$ | 0,0019     | 0,044       | 0,387                  | 0,112                                 | 0,068                                 |
| Vénus   | $2,45 \cdot 10^{-6}$ | 0,0056     | 0,075       | 0,723                  | 0,616                                 | 0,313                                 |
| Terre   | $3,04 \cdot 10^{-6}$ | 0,0062     | 0,079       | 1                      | 0,929                                 | 0,467                                 |
| Mars    | $3,23 \cdot 10^{-7}$ | 0,0025     | 0,050       | 1,52                   | 0,576                                 | 0,336                                 |
| Céres   | $5,9 \cdot 10^{-10}$ | 0,0002     | 0,014       | 2,8                    | 0,085                                 | 0,075                                 |
| Jupiter | $9,55 \cdot 10^{-4}$ | 0,0619     | 0,248       | 5,20                   | 48,2                                  | 16,5                                  |
| Saturne | $2,86 \cdot 10^{-4}$ | 0,0382     | 0,196       | 9,55                   | 54,6                                  | 20,3                                  |
| Uranus  | $4,37 \cdot 10^{-5}$ | 0,0180     | 0,134       | 19,2                   | 51,8                                  | 21,8                                  |
| Neptune | $5,18 \cdot 10^{-5}$ | 0,0193     | 0,138       | 30,1                   | 86,9                                  | 36,0                                  |
| Pluton  | $7,69 \cdot 10^{-9}$ | 0,0006     | 0,024       | 39,7                   | 3,3                                   | 2,4                                   |



## 25. Problème des $N$ corps de type planétaire

Un tel problème est caractérisé par la prépondérance de la masse  $m_0$  sur les  $n$  autres masses  $m_i$ , et par l'hypothèse que les  $n$  points correspondants  $P_i$  décrivent autour de  $P_0$  des orbites bien hiérarchisées qui restent voisines de cercles coplanaires centrés sur  $P_0$  ; on a vu que cela permet de traiter ces  $n$  corps comme  $n$  problèmes képlériens perturbés mutuellement. On supposera donc désormais que les  $P_i$  sont ordonnés selon cette hiérarchie par distances croissantes ( $|\mathbf{r}_{i+1}| > |\mathbf{r}_i|$ ). Dans la suite, on appellera généralement Soleil le point  $P_0$  et planètes les autres points, mais les résultats pourront s'appliquer également au système de  $n - 1$  satellites  $P_i$  d'une planète  $P_0$ , qui se perturbent mutuellement et qui sont perturbés par le Soleil  $P_n$  (ils sont éventuellement perturbés aussi par la non-sphéricité de la planète, et, à un degré bien plus faible, par les autres planètes).

On se propose donc ici d'étudier les perturbations du mouvement képlérien héliocentrique des planètes ; nous partons pour cela des équations du mouvement écrites en (6.14) et (6.15) pour les vecteurs de position  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k = \mathbf{r}_k$  et réécrites sous la forme :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} = -\frac{\mu_k \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|^3} + \sum_{i=1}^n \underset{(i \neq k)}{\text{grad}_k} U_{ki} \quad \text{pour} \quad k = 1, \dots, n \quad (6.40)$$

avec :

$$\mu_k = K(m_0 + m_k) \quad \text{et} \quad U_{ki} = \mu_k \frac{m_i}{m_0 + m_k} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i|^3} \right) \quad (6.41)$$

Le mouvement képlérien osculateur héliocentrique de  $P_k$  est défini par le premier terme de (6.40), avec la constante d'attraction  $\mu_k$  ; ce mouvement osculateur est bien sûr supposé elliptique, avec un demi-grand axe  $a_k$  et un moyen mouvement  $n_k$  vérifiant à tout instant la troisième loi de Kepler :

$$n_k^2 a_k^3 = \mu_k \quad (6.42)$$

$U_{ki}$  est la fonction perturbatrice de la planète  $P_k$  perturbée par la planète  $P_i$ . Les petites quantités  $\epsilon_i = \frac{m_i}{m_0}$  sont appelées *masses perturbatrices* et on a aussi :  $\frac{m_i}{m_0 + m_k} = \frac{\epsilon_i}{1 + \epsilon_k}$ . Dans  $U_{ki}$ , on distingue deux termes : la *perturbation directe*  $K m_i / |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$  issue de la loi de Newton, et la *perturbation indirecte*  $K m_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k) / |\mathbf{r}_i|^3$  qui représente la partie de l'accélération d'entraînement de  $P_0$  due à  $P_i$ . Les fonctions  $U_{ki}$ , ayant une masse perturbatrice en facteur, sont qualifiées de perturbations d'*ordre 1 des masses*.

De nombreuses méthodes de perturbation ont été élaborées pour donner de ces équations des solutions formelles plus ou moins approchées ; aucune de ces méthodes n'est universelle et chacune répond à un type particulier de problème planétaire. Par exemple, pour les grosses planètes du système solaire, où les mouvements sont quasi-circulaires et quasi-coplanaires, on utilise généralement la méthode de LeVerrier qui fournit les variations des éléments osculateurs avec une durée de validité de plusieurs millénaires, ou des méthodes plus générales donnant une solution valable sur plusieurs millions d'années. Il existe aussi des méthodes (due notamment à Hansen, à Brouwer ou à Brumberg) qui donnent directement les perturbations des coordonnées (cartésiennes ou sphériques) ; ces méthodes conviennent surtout au cas des petites planètes du système solaire, qui ont généralement des excentricités et des inclinaisons plus fortes, et pour lesquelles on peut se contenter souvent d'une solution limitée au premier ordre des masses (les perturbations d'ordre supérieur sont en effet beaucoup plus difficiles à obtenir par ces méthodes). D'autres méthodes enfin utilisent la formulation hamiltonienne pour déterminer avant tout les propriétés du mouvement plus que ce mouvement lui-même.

Dans ce qui suit, on va examiner essentiellement la méthode de LeVerrier qui donne pour le mouvement des planètes une solution particulière, partiellement numérique, valable sur une durée limitée au voisinage d'une date donnée, puis une méthode appelée "théorie générale" qui permet de développer une solution analytique formelle, valide bien plus longtemps. On verra d'ailleurs que la méthode générale est particulièrement intéressante pour traiter le cas des perturbations mutuelles d'un système de satellites tournant autour d'une planète. Ces méthodes fournissent toutes deux les mouvements planétaires sous forme de variations des éléments osculateurs.

On se propose d'utiliser les éléments osculateurs  $(a_k, e_k, i_k, \Omega_k, \varpi_k, L_k)$ , ou ceux, plus réguliers  $(a_k, z_k,$

$\zeta_k, L_k$ ) (cf. (3.46) et (3.49)). Les variations de ces éléments sont données par les équations de Lagrange vues en (5.51) ou en (5.52) où, pour la planète  $P_k$ , on remplace  $U$  par  $\sum U_{ki}$  et les éléments  $(a, n, e, i, \Omega, \omega, z, \zeta, L)$  par les éléments correspondant à cette planète. Il convient donc d'exprimer tout d'abord chaque  $U_{ki}$  en fonction de ces éléments osculateurs. Les excentricités  $e_k$  et les inclinaisons  $i_k$  des orbites osculatrices seront supposées suffisamment petites pour que les planètes n'aient jamais de rapprochements serrés, et aussi pour que l'on puisse d'abord développer  $U_{ki}$  en puissances de  $e_k$  et  $i_k$  (ou de  $z_k$  et  $\zeta_k$ ), puis tronquer ces développements à un degré relativement peu élevé (quelques unités).

**Remarque.** Si le problème concernait les satellites d'une planète  $P_0$  supposée non sphérique, il faudrait ajouter à l'équation (6.40) le gradient en  $P_k$  d'une fonction  $U_{0k}$  représentant le potentiel de gravitation non sphérique de cette planète ; en limitant par exemple ce potentiel au terme en  $J_2$ , on aurait (cf. (4.30)) :

$$U_{0k} = -K m_0 J_2 \frac{a_0^2}{r_k^3} P_2(\sin \varphi_k) \quad (6.43)$$

où  $a_0$  représente le rayon équatorial de la planète et  $\varphi_k$  la latitude de  $P_k$  au dessus de son plan équatorial. Le développement de cette fonction perturbatrice a déjà été vu en §5-21.5. Si les satellites ont des masses suffisantes pour se perturber mutuellement (comme les planètes entre elles), la fonction perturbatrice précédente aurait en facteur  $K(m_0 + m_k)$  au lieu de  $K m_0$  et il faudrait tenir compte aussi des perturbations indirectes causées par l'aplatissement de la planète (voir pour cela l'application Maple réalisée sur ce sujet)

## 25.1. Développement de la fonction perturbatrice

Pb<sub>15</sub>

Dans cette partie, pour simplifier les notations et limiter l'usage des indices, on considère seulement deux planètes  $P$  et  $P'$ , de masses  $m$  et  $m'$  ; elles sont rapportées au Soleil  $P_0$  par les vecteurs  $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$  et  $\mathbf{r}' = r'\mathbf{u}'$ , de modules  $r$  et  $r'$  ; on note encore  $\Delta$  leur distance mutuelle ( $\Delta = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ) et  $S$  l'angle entre  $\mathbf{r}$  et

$\mathbf{r}'$ ; leur mouvement osculateur héliocentrique est décrit par les éléments respectifs  $(a, n, e, i, \Omega, \varpi, z, \zeta, L)$  et  $(a', n', e', i', \Omega', \varpi', z', \zeta', L')$ ; on suppose enfin que  $P$  est la *planète intérieure* et  $P'$  la *planète extérieure*, c'est-à-dire que l'on a :  $r < r'$  et  $a < a'$  et on note encore :

$$\alpha = \frac{a}{a'} (< 1) \quad \text{et} \quad \rho = \frac{r}{r'} = \alpha \frac{r}{a} \frac{a'}{r'} \tag{6.44}$$

Réécrivons alors les équations du mouvement héliocentrique de  $P$  et  $P'$  dans ces notations :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} & \text{avec} & & U &= \mu \frac{\epsilon'}{1 + \epsilon} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos S}{r'^2} \right) \\ \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} &= -\frac{\mu' \mathbf{r}'}{r'^3} + \frac{\partial U'}{\partial \mathbf{r}'} & \text{avec} & & U' &= \mu' \frac{\epsilon}{1 + \epsilon'} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{r' \cos S}{r^2} \right) \end{aligned} \tag{6.45}$$

$U$  et  $U'$  sont les fonctions perturbatrices de  $P$  et  $P'$ , qui sont donc différentes suivant que l'on s'intéresse à une planète intérieure perturbée par une planète extérieure ou inversement. Dans les problèmes de  $N$  corps, la fonction  $1/\Delta$  s'appelle généralement *inverse de la distance*; dans les notations adoptées, elle vaut :

$$\frac{1}{\Delta} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos S)^{-1/2} = \frac{1}{r'} (1 - 2\rho \cos S + \rho^2)^{-1/2} \tag{6.46}$$

On se propose de développer  $1/\Delta$ , ainsi que les parties indirectes de  $U$  et  $U'$  (dépendant de  $\cos S$ ), en fonction des éléments osculateurs des deux planètes :  $(a, z, \zeta, L)$  et  $(a', z', \zeta', L')$ . On utilisera aussi les variables complexes intermédiaires  $X$  et  $Y$  et leurs conjuguées  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  déjà introduites en (3.148). Rappelons cependant encore leur définition en fonction des éléments plus classiques  $e, \varpi, i$  et  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} z &= e \exp \sqrt{-1} \varpi & X &= e \exp \sqrt{-1} M = e \exp \sqrt{-1} (L - \varpi) = \bar{z} \exp \sqrt{-1} L \\ \zeta &= \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1} \Omega & Y &= \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1} (L - \Omega) = \bar{\zeta} \exp \sqrt{-1} L \end{aligned} \tag{6.47}$$

### 25.1.1. Développement de $1/\Delta$ en polynômes de Legendre

Dans l'expression (6.46), on trouve en facteur de  $1/r'$ , la fonction génératrice des polynômes de Legendre (cf. (4.19)). Son développement converge absolument pour  $|\rho| < 1$ , ce qui est bien le cas ici :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n(\cos S) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos S)$$

Si  $\rho$  est suffisamment petit (ce serait par exemple le cas d'un satellite perturbé par le Soleil), ce développement converge très rapidement et, en tenant compte de (6.44), ses premiers termes s'écrivent :

$$\boxed{\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{a'} \left( \frac{a'}{r'} + \alpha \frac{r}{a} \left( \frac{a'}{r'} \right)^2 \cos S + \alpha^2 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \left( \frac{3}{2} \cos^2 S - \frac{1}{2} \right) + O(\alpha^3) \right)} \quad (6.48)$$

Si  $\rho$  n'est pas très petit, il vaut mieux développer  $1/\Delta$  d'une autre façon (voir [plus loin](#) le développement en coefficients de Laplace), mais il est plus facile de mettre en évidence certaines propriétés communes de ces développements à partir de l'expression (6.48).

Le développement de l'inverse de la distance revient donc pour le moment à exprimer les quantités de la forme  $(r^n/r'^{n+1}) \cos^m S$  en fonction des éléments osculateurs : Il suffit de faire ce calcul pour les premières valeurs de  $n$  (positives ou nulles) et pour  $m$  inférieur ou égal à  $n$ . Il resterait ensuite à combiner ces développements suivant l'expression (6.48) ; on pourrait d'ailleurs étendre cette expression à des degrés plus élevés en  $\alpha$  en utilisant l'expression des polynômes de Legendre correspondants, que l'on pourra trouver dans le [Tableau 4](#) du paragraphe 4-15.4.3, ou construire par récurrence par la formule (4.21).

Pb<sub>11</sub>  
Pb<sub>17</sub>  
Pb<sub>18</sub>

Dev<sub>3.4.1</sub>

### 25.1.2. Développement de $r^n / r'^{n+1}$

On a vu dans la partie 3 comment obtenir les développements du mouvement képlérien elliptique sous forme de séries entières des variables  $X$  et  $\bar{X}$ . Les développements utiles ici sont ceux de  $(r/a)^n \exp \sqrt{-1}m(w - M)$ , exprimés en coefficients de Hansen et en anomalie moyenne (cf. (3.146)). Comme les excentricités sont supposées petites, on peut tronquer ces séries à un degré  $d$  donné relativement faible (pour la plupart des planètes  $d$  peut être pris entre 2 et 7). On peut ainsi présenter le développement (3.146) sous la forme d'un polynôme de degré  $d$  par rapport aux variables  $X$  et  $\bar{X}$  :

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp \sqrt{-1}m(w - M) = \sum_{0 \leq k + \bar{k} \leq d} C_{k, \bar{k}}^{n, m} X^k \bar{X}^{\bar{k}} + O(e^{d+1}) \quad (6.49)$$

Bien sûr, ici, et dans des situations analogues ultérieures,  $\bar{k}$  ne représente pas le conjugué de  $k$ , mais une simple notation pour les exposants entiers de  $\bar{X}$ . Pour obtenir ces développements, on peut suivre la méthode expliquée dans la remarque 2 du §3-13.8, en calculant d'abord les développements de  $(a/r)$ , de  $(r/a)$  et de  $\theta = \exp \sqrt{-1}(w - M)$  ; on les donne ici, limités par exemple au degré 2 en excentricité :

Dev2.2.2

$$\begin{aligned} \frac{a}{r} &= 1 + \frac{1}{2}(X + \bar{X}) + \frac{1}{2}(X^2 + \bar{X}^2) + O(e^3) \\ \frac{r}{a} &= 1 - \frac{1}{2}(X + \bar{X}) - \frac{1}{4}(X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2) + O(e^3) \\ \theta &= 1 + (X - \bar{X}) + \frac{1}{8}(9X^2 - 8X\bar{X} - \bar{X}^2) + O(e^3) \end{aligned} \quad (6.50)$$

Ces polynômes permettent ensuite de construire successivement tous les développements de  $(r/a)^n \theta^m$  à partir de  $n = 0$  ou de  $m = 0$ , en faisant simplement des produits de polynômes (pour  $m < 0$ , on part du conjugué de  $\theta$ ). Bien sûr, les développements de  $(a'/r')$  etc... s'obtiennent en changeant  $X$  et  $\bar{X}$  en  $X'$  et  $\bar{X}'$ .

On en déduit aisément, pour tout  $n$ , un développement polynomial de  $r^n/r'^{n+1}$ , en fonction des 4 variables  $X, \bar{X}, X'$  et  $\bar{X}'$ , sous la forme :

$$\frac{r^n}{r'^{n+1}} = \alpha^n \frac{1}{a'} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1} = \alpha^n \frac{1}{a'} \sum_{K \in N^4(d)} C_{k,\bar{k}}^{n,0} C_{k',\bar{k}'}^{-n-1,0} X^k \bar{X}^{\bar{k}} X'^{k'} \bar{X}'^{\bar{k}'} \quad (6.51)$$

$N^4(d)$  représente ici l'ensemble des 4-uplets d'entiers positifs ou nuls :  $(k, \bar{k}, k', \bar{k}')$ , vérifiant les inégalités :

$$0 \leq k + \bar{k} + k' + \bar{k}' \leq d$$

On a tronqué ici le développement au degré global  $d$ , mais on pourrait bien sûr adopter des niveaux de troncature différents pour chaque excentricité.

En exprimant, grâce à (6.47),  $X$  et  $X'$  en fonction de  $z, z'$  et des longitudes moyennes, ou en fonction des excentricités et des longitudes des périhélies, on obtient encore :

$$\begin{aligned} \frac{r^n}{r'^{n+1}} &= \alpha^n \frac{1}{a'} \sum_{K \in N^4(d)} C_{k,\bar{k}}^{n,0} C_{k',\bar{k}'}^{-n-1,0} \bar{z}^k z^{\bar{k}} \bar{z}'^{k'} z'^{\bar{k}'} \exp \sqrt{-1} ((k - \bar{k})L + (k' - \bar{k}')L') \\ &= \alpha^n \frac{1}{a'} \sum_{K \in N^4(d)} C_{k,\bar{k}}^{n,0} C_{k',\bar{k}'}^{-n-1,0} e^{(k+\bar{k})} e'^{(k'+\bar{k}')} \times \\ &\quad \times \exp \sqrt{-1} ((k - \bar{k})(L - \varpi) + (k' - \bar{k}')(L' - \varpi')) \end{aligned} \quad (6.52)$$

Par exemple, en utilisant (6.50), on trouve pour le terme correspondant à  $n = 2$  dans (6.48) (au degré 2 en  $e$  et  $e'$ ) :

## Exercice



$$\begin{aligned}
\frac{r^2}{r'^3} &= \frac{a^2}{a'^3} \left( 1 - (X + \bar{X}) + \frac{3}{2}(X' + \bar{X}') - \frac{3}{2}(X + \bar{X})(X' + \bar{X}') + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4}(X^2 - 6X\bar{X} + \bar{X}^2) + \frac{3}{4}(3X'^2 + 2X'\bar{X}' + 3\bar{X}'^2) + O(e^3, e^2e', ee'^2, e'^3) \right) \\
&= \frac{a^2}{a'^3} \left( 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - 2e \cos(L - \varpi) + 3e' \cos(L' - \varpi') - \frac{1}{2}e^2 \cos(2L - 2\varpi) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2}e'^2 \cos(2L' - 2\varpi') + 3ee'[\cos(L + L' - \varpi - \varpi') + \cos(L + L' - \varpi - \varpi')] \right. \\
&\quad \left. + O(e^3, e^2e', ee'^2, e'^3) \right) \tag{6.53}
\end{aligned}$$

25.1.3. Développement de  $\cos S$  et de  $\frac{r^n \cos^m S}{r'^{m+1}}$ 

Dev2.3.1

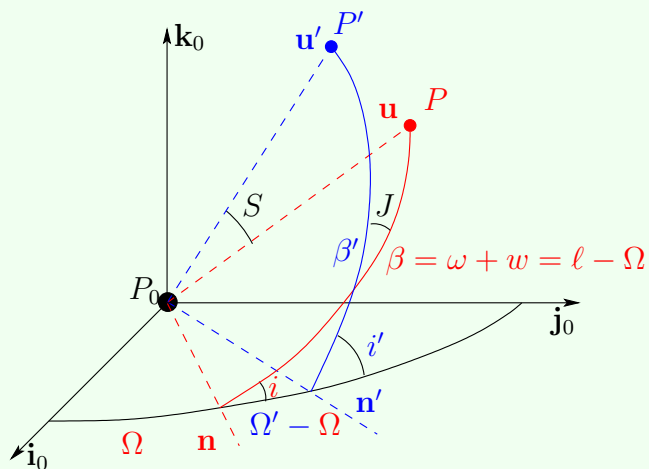
Soit  $R_0 = P_0 \mathbf{i}_0 \mathbf{j}_0 \mathbf{k}_0$  le repère héliocentrique qui sert de référence dans la définition des éléments osculateurs de  $P$  et de  $P'$ . Sur la figure suivante, on trouve les plans  $P_0 \mathbf{n} \mathbf{u}$  et  $P_0 \mathbf{n}' \mathbf{u}'$  des orbites osculatrices des deux planètes. Ces plans coupent le plan fondamental  $P_0 \mathbf{i}_0 \mathbf{j}_0$  suivant les axes  $P_0 \mathbf{n}$  et  $P_0 \mathbf{n}'$ , avec des inclinaisons  $i$  et  $i'$  supposées non nulles. Plus précisément,  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{n}'$  sont les vecteurs unitaires dirigés vers les nœuds ascendants respectifs des deux orbites. L'angle entre  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{n}'$  est alors la différence des longitudes des nœuds ascendants :  $(\Omega' - \Omega)$ . Les deux bases orthogonales directes  $B = (\mathbf{n}, \mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{n}, \mathbf{k}_0)$  et  $B' = (\mathbf{n}', \mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{n}', \mathbf{k}_0)$  diffèrent donc l'une de l'autre par la rotation d'angle  $(\Omega' - \Omega)$  autour de  $\mathbf{k}_0$ . L'angle  $\beta$  entre  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{u}$  représente la somme  $\omega + w$ , où  $\omega$  est l'argument du périhélie de  $P$  et  $w$  son anomalie vraie ; de même, l'angle  $\beta'$  entre  $\mathbf{n}'$  et  $\mathbf{u}'$  vaut  $\omega' + w'$ . Alors, on peut exprimer  $\mathbf{u}$  dans  $B$  et  $\mathbf{u}'$  dans  $B'$  ; on obtient :



$$\mathbf{u} = \begin{matrix} \cos \beta \\ \sin \beta \cos i \\ \sin \beta \sin i \end{matrix}_B \quad \mathbf{u}' = \begin{matrix} \cos \beta' \\ \sin \beta' \cos i' \\ \sin \beta' \sin i' \end{matrix}_{B'} \quad (6.54)$$

Tenant compte de la rotation  $\Omega' - \Omega$  entre les deux bases, on en déduit cette première expression de  $\cos S$  :

$$\begin{aligned} \cos S &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' \\ &= \cos(\Omega - \Omega') [\cos \beta \cos \beta' + \sin \beta \sin \beta' \cos i \cos i'] \\ &\quad + \sin(\Omega - \Omega') [\cos \beta \sin \beta' \cos i' - \sin \beta \cos \beta' \cos i] \\ &\quad + \sin \beta \sin \beta' \sin i \sin i' \end{aligned} \quad (6.55)$$



En utilisant les relations :  $\beta = \omega + w = \ell - \Omega$  et  $\beta' = \omega' + w' = \ell' - \Omega'$ , où  $\ell$  et  $\ell'$  sont les longitudes vraies dans l'orbite, et en exprimant sous forme complexe toutes les fonctions trigonométriques qui ne dépendent pas des inclinaisons, on fait apparaître dans  $\cos S$  les 6 termes suivants :

$$\begin{aligned} \cos S = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{4}(1 + \cos i + \cos i' + \cos i \cos i') \exp \sqrt{-1}(\ell - \ell') \right. \\ + \frac{1}{4}(1 - \cos i - \cos i' + \cos i \cos i') \exp \sqrt{-1}(\ell - \ell' - 2\Omega + 2\Omega') \\ + \frac{1}{4}(1 - \cos i + \cos i' - \cos i \cos i') \exp \sqrt{-1}(\ell + \ell' - 2\Omega) \\ + \frac{1}{4}(1 + \cos i - \cos i' - \cos i \cos i') \exp \sqrt{-1}(\ell + \ell' - 2\Omega') \\ \left. + \frac{1}{2} \sin i \sin i' (\exp \sqrt{-1}(\ell - \ell' - \Omega + \Omega') - \exp \sqrt{-1}(\ell + \ell' - \Omega - \Omega')) \right\} \end{aligned} \quad (6.56)$$

Or, on a :

$$1 + \epsilon \cos i + \epsilon' \cos i' + \epsilon \epsilon' \cos i \cos i' = (1 + \epsilon \cos i)(1 + \epsilon' \cos i')$$

et, avec  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  égaux à  $\pm 1$ , on a aussi :

$$1 + \cos i = 2 \cos^2 \frac{i}{2} \quad \text{et} \quad 1 - \cos i = 2 \sin^2 \frac{i}{2}$$

**Exercice** En introduisant les éléments complexes  $\zeta$ ,  $\zeta'$  et leurs conjugués  $\bar{\zeta}$  et  $\bar{\zeta}'$  on obtient alors  $\cos S$  sous cette forme particulièrement condensée :

$$\cos S = \operatorname{Re} \left\{ (\chi \chi' + \bar{\zeta} \bar{\zeta}')^2 \exp \sqrt{-1}(\ell - \ell') + (\chi \bar{\zeta}' - \chi' \bar{\zeta})^2 \exp \sqrt{-1}(\ell + \ell') \right\} \quad (6.57)$$

où l'on a posé :

$$\chi = \cos \frac{i}{2} = \sqrt{1 - \zeta \bar{\zeta}} \quad \text{et} \quad \chi' = \cos \frac{i'}{2} = \sqrt{1 - \zeta' \bar{\zeta}'} \quad (6.58)$$

Notons que  $\cos S$  est de degré pair par rapport à l'ensemble des variables d'inclinaison  $\zeta, \bar{\zeta}, \zeta'$  et  $\bar{\zeta}'$ .

Cependant, à la place des longitudes vraies, il convient d'introduire les longitudes moyennes  $L$  et  $L'$ ; on a :  $\ell = \varpi + w = \varpi + M + (w - M) = L + (w - M)$ . On introduit ainsi l'équation du centre  $w - M$ , qui dépend de l'excentricité et de l'anomalie moyenne, et dont on connaît des représentations diverses (cf. (3.133) ou (3.140); on a de même  $\ell' = L' + (w' - M')$ . Reprenant encore les notations :

$$\theta = \exp \sqrt{-1}(w - M) \quad \text{et} \quad \theta' = \exp \sqrt{-1}(w' - M') \quad (6.59)$$

on obtient :

$$\cos S = \text{Re} \{ \theta \bar{\theta}' (\chi \chi' + \bar{\zeta} \bar{\zeta}')^2 \exp \sqrt{-1}(L - L') + \theta \theta' (\chi \bar{\zeta}' - \chi' \bar{\zeta})^2 \exp \sqrt{-1}(L + L') \} \quad (6.60)$$

Enfin, avec les variables  $Y$  et  $Y'$  et leurs conjuguées, on obtient  $\cos S$  sous forme d'un polynôme où n'intervient plus que la combinaison  $(L - L')$  :

$$\begin{aligned} \cos S = \text{Re} \{ & \theta \bar{\theta}' [\chi^2 \chi'^2 \exp \sqrt{-1}(L - L') + 2\chi \chi' Y \bar{Y}' + Y^2 \bar{Y}'^2 \exp -\sqrt{-1}(L - L')] \\ & + \theta \theta' [\chi^2 Y'^2 \exp \sqrt{-1}(L - L') - 2\chi \chi' Y Y' + Y^2 \chi'^2 \exp -\sqrt{-1}(L - L')] \} \end{aligned} \quad (6.61)$$

Comme les inclinaisons sont supposées petites, on peut encore développer  $\chi$  et  $\chi'$  en fonction de  $Y, \bar{Y}, Y'$  et  $\bar{Y}'$  puisqu'on a aussi, pour  $\chi$  par exemple :

$$\chi = \sqrt{1 - Y \bar{Y}} = 1 - \frac{1}{2} Y \bar{Y} - \frac{1}{8} Y^2 \bar{Y}^2 + \dots \quad (6.62)$$

Quant à  $\theta$  et  $\theta'$ , ils s'expriment en fonction des variables  $X, X'$  et de leurs conjuguées (cf. (6.50)). Dans ces conditions,  $\cos S$  s'exprime sous forme d'un développement en série entière des 8 quantités  $X, \bar{X}, X', \bar{X}', Y, \bar{Y}, Y', \bar{Y}'$ .

$\bar{Y}$ ,  $Y'$ ,  $\bar{Y}'$  et en série de Fourier complexe de  $(L - L')$ ; tronqué au degré  $d$ , on obtient le polynôme :

$$\cos S = \sum_{j=-1}^1 \sum_{M \in N^8(d)} C_{M,j} X^k \bar{X}^{\bar{k}} X'^{k'} \bar{X}'^{\bar{k}'} Y^l \bar{Y}^{\bar{l}} Y'^{l'} \bar{Y}'^{\bar{l}'} \exp \sqrt{-1} j(L - L') \quad (6.63)$$

$M$  représente le 8-uplet  $\{k, \bar{k}, k', \bar{k}', l, \bar{l}, l', \bar{l}'\}$  rassemblant les exposants du monôme en  $X \bar{X} \cdots \bar{Y}'$ . Ces exposants parcourent l'ensemble  $N^8(d)$  des 8-uplets d'entiers positifs ou nuls tels que :

$$\begin{aligned} 0 \leq k + \bar{k} + k' + \bar{k}' + l + \bar{l} + l' + \bar{l}' \leq d \\ \text{où } l + \bar{l} + l' + \bar{l}' \text{ est un entier pair} \end{aligned} \quad (6.64)$$

**Exercice** Par exemple, en utilisant l'expression (6.50) de  $\theta$  dans (6.61), on obtient, au degré 2 en excentricités et inclinaisons :



$$\cos S = \frac{1}{2} \{A \exp \sqrt{-1}(L - L') + B + \bar{A} \exp \sqrt{-1}(-L + L')\} \quad (6.65)$$

où  $\bar{A}$  est le conjugué de  $A$ , avec :

$$\begin{aligned} A = 1 + X - \bar{X} - X' + \bar{X}' + X \bar{X}' - \bar{X} \bar{X}' - X X' + \bar{X} X' + \\ + \frac{9}{8} X^2 - X \bar{X} - \frac{1}{8} \bar{X}^2 + \frac{9}{8} \bar{X}'^2 - X' \bar{X}' - \frac{1}{8} X'^2 + \\ - Y \bar{Y} - Y' \bar{Y}' + \bar{Y}^2 + Y'^2 \\ B = 2Y \bar{Y}' + 2\bar{Y} Y' - 2\bar{Y} \bar{Y}' - 2Y Y' \end{aligned}$$

A l'aide des relations (6.47), on peut transformer (6.63) en une expression fonction des variables  $z, z', \zeta, \zeta'$

et de leurs conjuguées :

$$\cos S = \sum_{j=-1}^1 \sum_{M \in N^8(d)} C_{M,j} \bar{z}^k z^{\bar{k}} \bar{z}'^{k'} z'^{\bar{k}'} \bar{\zeta}^l \zeta^{\bar{l}} \bar{\zeta}'^{l'} \zeta'^{\bar{l}'} \exp \sqrt{-1} (pL + p'L') \quad (6.66)$$

où les exposants vérifient les relations (6.64) et où les entiers relatifs  $p$  et  $p'$  sont reliés à  $j$  par les expressions :

$$\begin{aligned} p &= k - \bar{k} + l - \bar{l} + j \\ p' &= k' - \bar{k}' + l' - \bar{l}' - j \end{aligned} \quad (6.67)$$

On peut enfin tirer de (6.66) l'expression plus classique de  $\cos S$ , écrite en fonction des éléments orbitaux  $e, e', \gamma = \sin(i/2), \gamma' = \sin(i'/2)$  et des longitudes  $\varpi, \varpi', \Omega, \Omega', L$  et  $L'$  :

$$\begin{aligned} \cos S &= \sum_{j=-1}^1 \sum_{M \in N^8(d)} C_{M,j} e^{(k+\bar{k})} e'^{(k'+\bar{k}')} \gamma^{(l+\bar{l})} \gamma'^{(l'+\bar{l}')} \times \\ &\times \exp \sqrt{-1} [pL + p'L' - (k - \bar{k})\varpi - (k' - \bar{k}')\varpi' - (l - \bar{l})\Omega - (l' - \bar{l}')\Omega'] \end{aligned} \quad (6.68)$$

où les exposants vérifient (6.64) et (6.67). Bien sûr,  $\cos S$  est une quantité réelle exprimée ici sous forme complexe : Alors, les termes complexes peuvent toujours se regrouper avec leur conjugué ; ainsi, pour chaque terme du développement (6.68),  $\exp \sqrt{-1} (\dots)$  peut être remplacé par  $2 \cos(\dots)$  si l'argument  $(\dots)$  est non nul, et par 1 s'il est nul.

A partir de l'expression (6.61) de  $\cos S$ , on peut aussi, par simples manipulations de polynômes, calculer  $\cos^m S$  sous forme de développements formellement identiques à (6.63) ou (6.66) ou (6.68), sauf pour la sommation sur  $j$  qui se ferait alors de  $j = -m$  à  $j = +m$ . Avec les résultats obtenus en (6.51), on peut également en

Dev2.3.2

déduire, sous les mêmes formes, le développement de  $\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1} \cos^m S$  pour les valeurs de  $n$  et  $m$  qui interviennent dans les premiers termes du développement (6.48) de  $1/\Delta$  en polynômes de Legendre. Par exemple, pour  $n = 1$ , en utilisant les développements (6.50) et (6.65), on obtient jusqu'au degré 2 en excentricités et inclinaisons :

$$\begin{aligned}
 \frac{r}{a} \frac{a'^2}{r'^2} \cos S = & \left(1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e'^2 - \sin^2 \frac{i}{2} - \sin^2 \frac{i'}{2}\right) \cos(L - L') \\
 & + \frac{1}{2}e [\cos(2L - L' - \varpi) - 3 \cos(L' - \varpi)] + 2e' \cos(L - 2L' + \varpi') \\
 & + \frac{1}{8}e^2 [\cos(L + L' - 2\varpi) + 3 \cos(3L - L' - 2\varpi)] \\
 & + \frac{1}{8}e'^2 [\cos(L + L' - 2\varpi') + 27 \cos(L - 3L' + 2\varpi')] \\
 & + ee' [\cos(2L - 2L' - \varpi + \varpi') - 3 \cos(2L' - \varpi - \varpi')] \\
 & + \sin^2 \frac{i}{2} \cos(L + L' - 2\Omega) + \sin^2 \frac{i'}{2} \cos(L + L' - 2\Omega') \\
 & + 2 \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} [\cos(L - L' - \Omega + \Omega') - \cos(L + L' - \Omega - \Omega')]
 \end{aligned} \tag{6.69}$$

**Remarque 1.** Les résultats précédents s'appliquent directement au calcul du développement de la partie indirecte des fonctions perturbatrices  $U$  et de  $U'$  vues en (6.45) puisque l'on a :

$$U_{\text{ind}} \propto \frac{r \cos S}{r'^2} = \frac{a}{a'^2} \left(\frac{r}{a}\right) \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \cos S \quad \text{et} \quad U'_{\text{ind}} \propto \frac{r' \cos S}{r^2} = \frac{a'}{a^2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(\frac{r'}{a'}\right) \cos S$$

A un facteur près, le développement (6.69) représente celui de  $U_{\text{ind}}$ . Evidemment on en déduirait  $U'_{\text{ind}}$ , simplement en y permutant les rôles de  $e$  et  $e'$ , de  $i$  et  $i'$ , de  $\varpi$  et  $\varpi'$ , de  $\Omega$  et  $\Omega'$  et de  $L$  et  $L'$ .

**Remarque 2.** Chaque terme de la somme (6.66) est le produit d'un coefficient réel  $C_{M,j}$ , d'un monôme des 8 variables  $z, \bar{z}, z', \bar{z}', \zeta, \bar{\zeta}, \zeta', \bar{\zeta}'$ , et d'une fonction trigonométrique d'argument  $(pL + p'L')$ . Traditionnellement, dans tout développement de cette forme, une combinaison entière des longitudes moyennes, telle  $pL + p'L'$ , est appelée *inégalité* ; par extension on appelle aussi *inégalité*  $(p, p')$  l'ensemble des monômes et de leurs coefficients venant en facteur de  $\exp \sqrt{-1}(pL + p'L')$  ; on appelle encore *caractéristique de l'inégalité* et *caractéristique du monôme* les quantités  $C_I$  et  $C_M$  ainsi définies pour chaque terme :

$$C_I = p + p' \quad \text{et} \quad C_M = (k + k' + l + l') - (\bar{k} + \bar{k}' + \bar{l} + \bar{l}') \quad (6.70)$$

Les relations (6.67) montrent alors que chaque terme de la série représentant  $\cos S$  vérifie :

$$C_I = p + p' = k - \bar{k} + l - \bar{l} + k' - \bar{k}' + l' - \bar{l}' = C_M \quad (6.71)$$

Cette égalité de  $C_I$  et de  $C_M$  caractérise la *propriété de d'Alembert* pour les séries trigonométriques dépendant de plusieurs arguments ; elle étend à ces séries la propriété de d'Alembert de rang 0 vue en §3-13.5 pour les développements trigonométriques à un seul argument : On a indiqué par exemple en (3.146) que le développement de  $(r/a)^n \theta^m$  en coefficients de Hansen vérifie la propriété de d'Alembert de rang 0 ; en exprimant ce développement en fonction de  $z, \bar{z}$  et de  $L$ , on obtient :

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \theta^m = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} Y_{m+p}^{n,m}(z\bar{z}) \bar{z}^p \exp \sqrt{-1} pL \quad (6.72)$$

où, pour  $p < 0$ , il faut adopter la convention :  $\bar{z}^p \equiv z^{|p|}$ . Pour l'inégalité  $pL$ , on a bien  $C_I = p = C_M$ .

La propriété de d'Alembert s'énonce encore en disant qu'*un terme de caractéristique  $C_I$  est toujours de degré global au moins égal à  $|C_I|$* , et on peut même préciser que la différence entre le degré global du monôme d'un terme et la caractéristique de l'inégalité correspondant à ce terme est toujours un entier pair ; on peut écrire en

effet :

$$\left. \begin{aligned} \text{degré global} &= k + \bar{k} + l + \bar{l} + k' + \bar{k}' + l' + \bar{l}' \\ &= C_I + 2(\bar{k} + \bar{l} + \bar{k}' + \bar{l}') \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{degré global} \geq |C_I| \quad (6.73)$$

Si deux séries vérifient chacune la propriété de d'Alembert ( $C_M = C_I$  pour chaque terme), leur produit la vérifie aussi. Comme le développement de  $1/\Delta$  en polynômes de Legendre est une somme de produits en  $a^n/a'^{n'}(r/a)^n(a'/r')^{n'} \cos^m S$ , ce développement vérifie aussi la propriété de d'Alembert.

**Exercice** **Remarque 3.** On aurait pu chercher à exprimer  $\cos S$  d'abord en fonction de l'inclinaison mutuelle  $J$  des deux plans d'orbite, comme cela se fait souvent car l'expression obtenue est plus simple : On pourrait montrer en effet que dans l'expression (6.57) de  $\cos S$ , les quantités complexes  $(\chi\bar{\zeta}' - \chi'\bar{\zeta})$  et  $(\chi\chi' + \bar{\zeta}\bar{\zeta}')$  ont pour module  $\sin(J/2)$  et  $\cos(J/2)$  respectivement. En fait, il est plus intéressant de faire intervenir directement comme ici  $i$  et  $i'$ , les deux inclinaisons sur un plan extérieur ; en effet les équations de Lagrange ou d'Hamilton sont exprimées de façon naturelle dans des repères de directions fixes et donc, ne font pas intervenir les inclinaisons mutuelles. Ce sont néanmoins les inclinaisons mutuelles qui gouvernent les perturbations des plans d'orbite. Si l'on désire une expression en inclinaison mutuelle, il suffit ici de considérer que l'orbite de  $P'$  est confondue avec le plan fondamental et de faire  $i' = \Omega' = 0$  et  $i = J$ .

Le fait que ce soit l'inclinaison mutuelle qui gouverne les perturbations des plans d'orbite a quand même une conséquence sur la structure du développement exprimé en fonction des deux inclinaisons : En effet, si les deux plans d'orbite sont confondus à un instant donné et si il n'y a pas d'autre perturbation entre les deux corps, ces plans doivent rester confondus ; alors, d'après les équations de Lagrange (5.51) ou (5.52), la fonction perturbatrice ne doit donc plus dépendre ni de  $i$ , ni de  $i'$ , ni de  $\Omega$ , ni de  $\Omega'$ , ou également ni de  $\zeta$  et ni de  $\zeta'$ . Les termes dépendant des inclinaisons doivent donc disparaître complètement du développement de la fonction perturbatrice lorsque l'on fait  $\zeta' = \zeta$  et  $\bar{\zeta}' = \bar{\zeta}$ . Tenant compte de ces deux égalités, on peut réorganiser le développement (6.66) de façon à mettre chaque monôme en excentricités en facteur des monômes en inclinaisons,



eux-mêmes regroupés par degrés  $d$  :

$$\sum_j \sum_{k, \bar{k}, k', \bar{k}'} \bar{z}^k z^{\bar{k}} \bar{z}'^{k'} z'^{\bar{k}'} \sum_{d=0,2,4,\dots} \left( \sum_{l+\bar{l}+l'+\bar{l}'=d} C_{M,j} \bar{\zeta}^{l+l'} \zeta^{\bar{l}+\bar{l}'} \right) \exp \sqrt{-1} (pL + p'L')$$

Alors, pour chaque valeur de  $p$  et de  $p'$ , pour chaque 4-uplet  $(k, \bar{k}, k', \bar{k}')$ , et pour chaque degré  $d$  **non nul**, les coefficients  $C_{M,j}$  présents dans la sommation mise entre parenthèses ont une somme identiquement nulle. Quand on effectue la troncature des développements, il convient de respecter cette structure et de conserver tous les termes d'un même degré en inclinaisons, surtout si ces inclinaisons sont fortes. Si les deux plans d'orbite sont voisins tout en étant fortement inclinés sur le plan de référence, les inclinaisons  $i$  et  $i'$  sont fortes mais voisines tandis que  $J$  est faible : Il convient alors de faire la troncature des développements sans dissocier les termes de même degré issus des quantités  $(\chi\bar{\zeta}' - \chi'\bar{\zeta})$  et  $(\chi\chi' + \bar{\zeta}\bar{\zeta}')$ . Finalement, ce qui importe pour pouvoir tronquer les développements, ce n'est pas que les 2 inclinaisons soient faibles, mais bien plutôt que ce soit l'inclinaison mutuelle qui soit faible.

### 25.1.4. Développement de $1/\Delta$ en coefficients de Laplace

Dev3.4.4

Si  $\alpha$  est trop grand, le développement (6.48) en polynômes de Legendre et en puissances de  $\alpha$  converge trop lentement pour être utilisable. C'est le cas des problèmes de type planétaire où  $\alpha$  peut atteindre des valeurs voisines de 0,8. En effet, examinons ce développement, tronqué à un certain degré  $d$ , dans le cas plus simple de deux orbites circulaires et coplanaires : On a alors  $1/\Delta = (1/a') \sum_{n=0}^d \alpha^n P_n(\cos S)$  ; après avoir développé chaque polynôme de Legendre, on peut exprimer les puissances de  $\cos S$  en fonction des  $\cos pS$ , puis factoriser chaque  $\cos pS$  ; on obtient ainsi un développement analogue à une série de Fourier, de la forme  $(1/a') \sum_{p=0}^d \phi_p^{(d)}(\alpha) \cos pS$ , où les fonctions  $\phi_p^{(d)}(\alpha)$  sont des polynômes de degré  $d$  en  $\alpha$ . Avec  $\alpha = 0,8$  et

$d = 60$ , la précision de cette représentation n'est encore que de quelques  $10^{-5}$  ; il n'est pas pensable de développer en polynômes de Legendre jusqu'à des degrés aussi élevés.

En fait, il est plus intéressant de calculer directement le développement en série de Fourier de  $1/\Delta$ , soit  $(1/a') \sum_p \phi_p(\alpha) \cos pS$ , d'autant plus que chaque  $\phi_p(\alpha)$  est alors calculable exactement ( $\phi_p^{(d)}(\alpha)$  n'est qu'une représentation tronquée de  $\phi_p(\alpha)$ ). Pour cela, nous verrons d'abord le cas où les orbites sont coplanaires, puis le cas où l'inclinaison mutuelle des 2 orbites est petite.

### 25.1.5. Réduction au problème plan

L'angle  $S$  est alors égal à  $\psi = \ell - \ell'$ , différence des longitudes vraies. Posons :  $D^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho \cos \psi$ , de sorte que l'on a :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} (1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\ell - \ell'))^{-1/2} = \frac{1}{r' D} \tag{6.74}$$

Pour  $\rho$  fixé, la fonction  $1/D$  est périodique, de période  $2\pi$  vis-à-vis de la variable  $\psi$ , et paire par rapport à cette variable. Elle admet donc un développement en série de Fourier de la forme :

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)}(\rho) + \sum_{j=1}^{\infty} b_{1/2}^{(j)}(\rho) \cos j\psi \tag{6.75}$$

On a pareillement, de façon plus générale, pour tout entier positif  $n$  :

$$D^{-n} = (1 + \rho^2 - 2\rho \cos \psi)^{-n/2} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} b_{n/2}^{(|j|)}(\rho) \exp \sqrt{-1} j\psi \tag{6.76}$$

Les fonctions  $b_{n/2}^{(j)}(\rho)$  sont les *coefficients de Laplace* (pour tout  $j$  on a :  $b_{n/2}^{(j)}(\rho) = b_{n/2}^{(|j|)}(\rho)$ ). Pour les calculer, en posant  $s = n/2$ , on écrit d'abord :

$$\begin{aligned} (1 + \rho^2 - 2\rho \cos \psi)^{-s} &= (1 - \rho \exp \sqrt{-1} \psi - \rho \exp -\sqrt{-1} \psi + \rho^2)^{-s} \\ &= (1 - \rho \exp \sqrt{-1} \psi)^{-s} (1 - \rho \exp -\sqrt{-1} \psi)^{-s} \end{aligned} \tag{6.77}$$

puis, en notant  $u = \exp \sqrt{-1} \psi$ , on développe chaque facteur par la formule du binôme :

$$\begin{aligned} (1 - \rho u)^{-s} &= 1 + \frac{s}{1} \rho u + \frac{(-s)(-s-1)}{1 \cdot 2} \rho^2 u^2 - \frac{(-s)(-s-1)(-s-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \rho^3 u^3 + \dots \\ (1 - \frac{\rho}{u})^{-s} &= 1 + \frac{s}{1} \frac{\rho}{u} + \frac{(-s)(-s-1)}{1 \cdot 2} \frac{\rho^2}{u^2} - \frac{(-s)(-s-1)(-s-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\rho^3}{u^3} + \dots \end{aligned}$$

**Exercice** En faisant le produit de ces 2 séries, le regroupement des termes en facteur de  $u^j$  (identifié à  $\exp \sqrt{-1} j \psi$ ) donne   $\frac{1}{2} b_s^{(j)}$  et on trouve, pour  $j \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} b_s^{(j)}(\rho) &= \frac{s(s+1) \cdots (s+j-1)}{1 \cdot 2 \cdots j} \rho^j + \frac{s(s+1) \cdots (s+j-1)(s+j)}{1 \cdot 2 \cdots j(j+1)} \rho^{j+1} \times \frac{s}{1} \rho + \\ &\quad + \frac{s(s+1) \cdots (s+j+1)}{1 \cdot 2 \cdots j+2} \rho^{j+2} \times \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} \rho^2 + \dots \\ &= \frac{s(s+1) \cdots (s+j-1)}{1 \cdot 2 \cdots j} \rho^j \times \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{s(s+j)}{1(j+1)} \rho^2 + \frac{s(s+1)(s+j)(s+j+1)}{1 \cdot 2(j+1)(j+2)} \rho^4 + \dots \right] \\ &= \frac{\binom{s}{j}}{(1)_j} \rho^j F(s, s+j, j+1; \rho^2) \quad (j \geq 0) \end{aligned} \tag{6.78}$$

où  $F$  est la **fonction hypergéométrique de Gauss**, déjà exprimée en (3.152) en fonction des **coefficients de Pochhammer**  $(a)_k$  définis en (3.153). Pour  $j < 0$ , on calcule  $b_s^{(-j)}$

Ainsi exprimés, les coefficients de Laplace se calculent avec toute la précision souhaitée lorsque  $\rho$  est fixé numériquement. En fait, pour des orbites elliptiques,  $\rho$  varie mais, si les excentricités sont faibles,  $\rho$  reste dans un petit voisinage autour d'une valeur fixe. Plus précisément, on verra plus loin que  $a$  et  $a'$  varient en restant toujours très voisins de valeurs constantes  $a_0$  et  $a'_0$ ; en les mettant sous la forme  $a = a_0(1 + \eta)$  et  $a' = a'_0(1 + \eta')$ , le rapport  $\alpha = a/a'$  reste voisin de  $\alpha_0 = a_0/a'_0$  et l'on peut introduire la quantité  $\delta$ , petite comme les perturbations  $\eta$  et  $\eta'$  :

$$\alpha = \alpha_0(1 + \delta) \quad \text{où} \quad \delta = \frac{\eta - \eta'}{1 + \eta'} \tag{6.79}$$

On peut écrire ensuite :  $\rho = \alpha \frac{r}{a} \frac{a'}{r'} = \alpha_0 (1 + \delta) \frac{r}{a} \frac{a'}{r'}$ , d'où :

$$\rho^2 = \alpha_0^2(1 + \sigma) \quad \text{avec} \quad \sigma = (1 + \delta)^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 - 1 \tag{6.80}$$

Comme  $\frac{r}{a}$  et  $\frac{a'}{r'}$  sont de l'ordre de  $1 + O(e)$  ou  $1 + O(e')$ , la quantité  $\sigma$  est petite, au moins d'ordre 1 en  $e$ ,  $e'$  ou  $\delta$ . On peut alors développer les fonctions hypergéométriques en séries de Taylor au voisinage de  $\rho^2 = \alpha_0^2$ ; en appliquant la règle de dérivation

$$\frac{d}{dx} F(a, b, c; x) = \frac{ab}{c} F(a + 1, b + 1, c + 1; x) \tag{6.81}$$

on obtient :  $F(a, b, c; \alpha_0^2(1 + \sigma)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{\alpha_0^{2m} \sigma^m}{m!} F(a + m, b + m, c + m; \alpha_0^2)$  et finalement, de (6.76),

(6.78) et (6.80), on déduit le développement de  $D^{-n}$  :

$$D^{-n} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \varphi_{n,m}^{(j)}(\alpha_0) (1 + \delta)^{|j|} \left(\frac{r}{a}\right)^{|j|} \left(\frac{a'}{r'}\right)^{|j|} \times \left( (1 + \delta)^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 - 1 \right)^m \exp \sqrt{-1} j(\ell - \ell') \quad (6.82)$$

où les fonctions de  $\alpha_0$  sont calculables par l'une ou l'autre des formules (avec  $j \geq 0$ ) :

$$\begin{aligned} \varphi_{n,m}^{(j)}(\alpha_0) &= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)_j \left(\frac{n}{2}\right)_m \left(\frac{n}{2} + j\right)_m}{(1)_j (1)_m (1 + j)_m} \alpha_0^{j+2m} F\left(\frac{n}{2} + m, \frac{n}{2} + j + m, 1 + j + m; \alpha_0^2\right) \\ &= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)_j \left(\frac{n}{2}\right)_m \left(\frac{n}{2} + j\right)_m}{(1)_j (1)_m (1 + j)_m} \alpha_0^{j+2m} (1 - \alpha_0^2)^{1-n-m} F\left(1 + j - \frac{n}{2}, 1 - \frac{n}{2}, 1 + j + m; \alpha_0^2\right) \end{aligned} \quad (6.83)$$

La deuxième expression met à profit la formule d'Euler donnée en (3.154), qui donne une meilleure convergence du calcul des fonctions hypergéométriques lorsque  $\alpha_0$  est voisin de 1. N'oublions pas en effet que le développement proposé ici se fait avec  $\alpha_0$  fixé numériquement pour chaque couple de planètes, les variations des demi-grands axes étant pris en compte analytiquement par l'intermédiaire de la variable  $\delta$  ; il importe donc que les fonctions de  $\alpha_0$  soient calculables de la façon la plus efficace possible.

Il reste à écrire :  $\exp \sqrt{-1} j(\ell - \ell') = \theta^j \bar{\theta}^j \exp \sqrt{-1} j(L - L')$ , puis à utiliser les techniques de développement de  $(r/a)^n \theta^m$  vues dans la **remarque 2 du §3-13.8** pour aboutir, par des manipulations de polynômes, à un développement de la forme :

$$D^{-n} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{M \in N^4(d)} \phi_{M,h,j}(\alpha_0) \delta^h X^k \bar{X}^{\bar{k}} X^{\prime k'} \bar{X}^{\prime \bar{k}'} \exp \sqrt{-1} j(L - L') \quad (6.84)$$

où  $M$  désigne les 4-uplets d'entiers positifs ou nuls  $\{k, \bar{k}, k', \bar{k}'\}$ . Bien entendu, le développement de  $1/\Delta = \frac{1}{a'} \left(\frac{a'}{r'}\right) D^{-1}$  s'obtient de façon analogue sous la même forme.

### 25.1.6. Extension aux orbites inclinées

Nous supposons que les inclinaisons des 2 orbites sur le plan fondamental sont suffisamment voisines pour pouvoir utiliser des développements en série entière des variables  $\zeta, \zeta'$  et de leurs conjuguées. Dans ce cas, le développement de  $1/\Delta$  va pouvoir se déduire des calculs déjà faits jusqu'ici car, avec  $1/D$  introduit en (6.74), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r'} (1 + \rho^2 - 2\rho \cos \psi - 2\rho(\cos S - \cos \psi))^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r'} D^{-1} (1 - \rho W D^{-2})^{-1/2} \quad \text{avec} \quad W = 2(\cos S - \cos \psi) \end{aligned} \tag{6.85}$$

La quantité  $W$  est de degré 2 au moins par rapport aux inclinaisons, puisque, avec  $\psi = \ell - \ell'$  et les expressions de  $\cos S$  trouvées en (6.57) et (6.61), on a immédiatement :

$$\begin{aligned} W &= 2\text{Re} \{ ((\chi\chi' + \bar{\zeta}\bar{\zeta}')^2 - 1) \exp \sqrt{-1}(\ell - \ell') + (\chi\bar{\zeta}' - \chi'\bar{\zeta})^2 \exp \sqrt{-1}(\ell + \ell') \} \\ &= 2\text{Re} \{ \theta\bar{\theta}' [(\chi^2\chi'^2 - 1) \exp \sqrt{-1}(L - L') + 2\chi\chi'Y\bar{Y}' + Y^2\bar{Y}'^2 \exp -\sqrt{-1}(L - L')] \\ &\quad + \theta\theta' [\chi^2Y'^2 \exp \sqrt{-1}(L - L') - 2\chi\chi'YY' + Y^2\chi'^2 \exp -\sqrt{-1}(L - L')] \} \end{aligned} \tag{6.86}$$

et où manifestement,  $(\chi^2\chi'^2 - 1)$  est de degré 2 au moins en inclinaisons. Cette expression de  $W$ , ou celle de  $\rho W$ , se développent bien sûr comme en (6.63) en fonction des variables  $X, X', Y, Y'$  et de leurs conjuguées, ou comme en (6.66) en fonction des variables  $z, z', \zeta, \zeta'$  et de leurs conjuguées.

Dev2.3.2

Il ne reste alors qu'à calculer les puissances successives de  $\rho W$  de façon à développer par la formule du binôme l'expression de  $1/\Delta$  vue en (6.85) :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{(1)_k} (\rho W)^k D^{-2k-1} \tag{6.87}$$

Puisque  $W$  est de degré 2 au moins, pour tronquer cette série au degré global  $d$  en excentricités et inclinaisons, il suffit de faire varier  $k$  de 0 à  $E(d/2)$  (partie entière de  $d/2$ ) et de tronquer le développement de  $D^{-2k-1}$  au degré  $(d - 2k)$  en excentricités ; compte tenu de l'expression de  $D^{-n}$  obtenue en (6.82), le calcul pratique de l'inverse de la distance au degré  $d$  peut s'effectuer à partir de la formule :

$$\begin{aligned} \left[\frac{a'}{\Delta}\right]_d &= \sum_{j=-J_{\max}}^{+J_{\max}} \sum_{m=0}^d \sum_{k=0}^{E(d/2)} (-1)^k \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_k}{(1)_k} \alpha_0^k \varphi_{2k+1,m}^{(|j|)}(\alpha_0) \times \\ &\quad \times (1 + \delta)^{|j|+k} \left(\frac{r}{a}\right)^{|j|+k} \theta^j \left(\frac{a'}{r'}\right)^{|j|+k+1} \bar{\theta}'^j \times \\ &\quad \times \left( (1 + \delta)^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 - 1 \right)^m W^k \exp \sqrt{-1} j(L - L') \end{aligned} \tag{6.88}$$

Vu les résultats précédents, cette expression se ramène à un développement de la forme :

$$\left[\frac{a'}{\Delta}\right]_d = \sum_{j=-J_{\max}}^{+J_{\max}} \sum_{H \in N^2} \sum_{M \in N^8(d)} \Phi_{MHj}(\alpha_0) \eta^h \eta^{h'} \bar{z}^k z^{\bar{k}} \bar{z}'^{k'} z'^{\bar{k}'} \bar{\zeta}^l \zeta^{\bar{l}} \bar{\zeta}'^{l'} \zeta'^{\bar{l}'} \exp \sqrt{-1} (pL + p'L') \tag{6.89}$$

où les exposants  $M = \{k, \bar{k}, k', \bar{k}', l, \bar{l}, l', \bar{l}'\}$  vérifient les mêmes relations (6.64) et (6.67) (c'est-à-dire propriété de d'Alembert  $C_M = C_I$  et développement pair en inclinaisons). La quantité  $\delta$  est ici développée en puissances positives de  $\eta$  et de  $\eta'$ , avec  $H = \{h, h'\}$  tel que  $h + h' < H_{\max}$  (comme  $\eta$  et  $\eta'$  sont de l'ordre des masses, il suffit souvent de prendre  $H_{\max}$  de l'ordre de 1 ou 2). Par ailleurs, la valeur utile de  $J_{\max}$  croît avec l'ordre de grandeur de  $\alpha_0$  ; pour les grosses planètes du système solaire, la valeur la plus grande de  $\alpha_0$  est voisine de 0,72 (pour le couple Vénus-Terre), et pour les calculs de grande précision concernant ce couple, on peut aller jusqu'à  $J_{\max} = 50$  ; cependant, pour  $\alpha_0$  de l'ordre de 0,1, il peut suffire de prendre  $J_{\max} = 5$ .

Le degré  $d$  étant fixé, une façon de construire par ordinateur le développement (6.89) à partir de l'expression (6.88), peut consister à calculer une fois pour toutes, d'une part tous les polynômes de degré  $d$  en  $X$  et  $\bar{X}$  (ou en  $X'$  et  $\bar{X}'$ ) représentant les fonctions du type  $(r/a)^n \theta^m$  présentes dans (6.88), d'autre part les polynômes de degré  $d$  en  $X, \bar{X}, X', \bar{X}', Y, \bar{Y}, Y'$  et  $\bar{Y}'$  représentant les quelques puissances utiles de  $W$ . On organise ces polynômes en tableaux ordonnés suivant une liste adressable des exposants de chaque monôme. On calcule par ailleurs toutes les fonctions de  $\alpha_0$  utiles pour le système de planètes considéré. Par adressage de ces tableaux, il est alors possible de reconstituer le coefficient de chaque terme de (6.89) à partir de la donnée des exposants  $\{h, k, \bar{k}, k', \bar{k}', l, \bar{l}, l', \bar{l}'\}$  et des entiers  $p$  et  $p'$ .

Si  $d$  est faible, on peut cependant encore tenter un développement "à la main" : Par exemple, pour obtenir un développement au degré 2 en excentricités et inclinaisons, et au degré 0 en  $\delta$ , il suffit de développer les 2 premiers termes de la somme (6.87) :

$$\left[ \frac{a'}{\Delta} \right]_{d=0..2} = \left[ \frac{a'}{r'} D^{-1} \right]_{d=0..2} + \frac{1}{2} W \left[ \frac{r}{a} \frac{a'^2}{r'^2} D^{-3} \right]_{d=0}$$

Le premier crochet doit être développé au degré 2 en excentricités, tandis que l'autre, en facteur de  $W$  qui est déjà de degré 2, ne doit être développé qu'au degré 0 ; d'après (6.88), et puisque  $\left( \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{a'}{r'} \right)^2 - 1 \right)$  est de degré 1 au moins, on peut donc écrire :



$$\begin{aligned} \left[ \frac{a'}{r'} D^{-1} \right]_{d=0..2} &= \sum_{j=-J_{\max}}^{+J_{\max}} \left\{ \varphi_{1,0}^{(j)} \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^{|j|} \theta^j \left( \frac{a'}{r'} \right)^{|j|+1} \bar{\theta}'^j \right]_{d=0..2} + \varphi_{1,1}^{(j)} \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{a'}{r'} \right)^2 - 1 \right]_{d=1..2} + \right. \\ &\quad + \varphi_{1,1}^{(j)} \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^{|j|} \theta^j \left( \frac{a'}{r'} \right)^{|j|+1} \bar{\theta}'^j \right]_{d=1} \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{a'}{r'} \right)^2 - 1 \right]_{d=1} + \\ &\quad \left. + \varphi_{1,2}^{(j)} \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{a'}{r'} \right)^2 - 1 \right]_{d=1}^2 \right\} \exp \sqrt{-1} j (L - L') \\ \left[ \frac{r}{a} \frac{a'^2}{r'^2} D^{-3} \right]_{d=0} &= \sum_{j=-J_{\max}}^{+J_{\max}} \alpha_0 \varphi_{3,0}^{(j)} \exp \sqrt{-1} j (L - L') \end{aligned}$$

En utilisant les formules (6.50) et (6.86), et en exprimant les variables complexes en fonction des éléments osculateurs classiques, on obtient alors l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{a'}{\Delta} \right]_{d=0..1} &= \sum_{j=0}^{J_{\max}} (2 - \delta_0^j) \left\{ \varphi_{1,0}^{(j)} \cos j(L - L') \right. \\ &\quad - e \left[ \left( \varphi_{1,1}^{(j)} - \frac{1}{2} j \varphi_{1,0}^{(j)} \right) \cos ((j + 1)L - jL' - \varpi) \right. \\ &\quad \left. + \left( \varphi_{1,1}^{(j)} + \frac{3}{2} j \varphi_{1,0}^{(j)} \right) \cos ((j - 1)L - jL' + \varpi) \right] \\ &\quad + e' \left[ \left( \varphi_{1,1}^{(j)} + \frac{1}{2} (1 - j) \varphi_{1,0}^{(j)} \right) \cos (jL - (j - 1)L' - \varpi') \right. \\ &\quad \left. + \left( \varphi_{1,1}^{(j)} + \frac{1}{2} (1 + 3j) \varphi_{1,0}^{(j)} \right) \cos (jL - (j + 1)L' + \varpi') \right] \end{aligned} \tag{6.90a}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{a'}{\Delta} \right]_{d=2..2} &= \sum_{j=0}^{J_{\max}} (2 - \delta_0^j) \left\{ (e^2 + e'^2) (2 \varphi_{1,2}^{(j)} + \frac{1}{2} (3 + 2j) \varphi_{1,1}^{(j)} + \frac{1}{4} j (1 - 3j) \varphi_{1,0}^{(j)}) \cos j(L - L') \right. \\
 &+ e^2 \left[ \left( \varphi_{1,2}^{(j)} - \frac{1}{4} (1 + 2j) \varphi_{1,1}^{(j)} + \frac{1}{8} j (2 + j) \varphi_{1,0}^{(j)} \right) \cos ((j + 2)L - jL' - 2\varpi) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \varphi_{1,2}^{(j)} - \frac{1}{4} (1 - 6j) \varphi_{1,1}^{(j)} + \frac{1}{8} j (-8 + 9j) \varphi_{1,0}^{(j)} \right) \cos ((j - 2)L - jL' + 2\varpi) \right] \\
 &+ e'^2 \left[ \left( \varphi_{1,2}^{(j)} + \frac{1}{4} (7 - 2j) \varphi_{1,1}^{(j)} + \frac{1}{8} (4 - 4j + j^2) \varphi_{1,0}^{(j)} \right) \cos (jL - (j - 2)L' - 2\varpi') \right. \\
 &\quad \left. + \left( \varphi_{1,2}^{(j)} + \frac{1}{4} (7 + 6j) \varphi_{1,1}^{(j)} + \frac{1}{8} (4 + 14j + 9j^2) \varphi_{1,0}^{(j)} \right) \cos (jL - (j + 2)L' + 2\varpi') \right] \\
 &- ee' \left[ \left( 2 \varphi_{1,2}^{(j)} + \frac{1}{2} (3 - 2j) \varphi_{1,1}^{(j)} - \frac{1}{4} j (1 - j) \varphi_{1,0}^{(j)} \right) \cos ((j + 1)L - (j - 1)L' - \varpi - \varpi') \right. \\
 &\quad + \left( 2 \varphi_{1,2}^{(j)} + \frac{1}{2} (3 + 6j) \varphi_{1,1}^{(j)} + \frac{3}{4} j (1 + 3j) \varphi_{1,0}^{(j)} \right) \cos ((j - 1)L - (j + 1)L' + \varpi + \varpi') \\
 &\quad + \left( 2 \varphi_{1,2}^{(j)} + \frac{1}{2} (3 + 2j) \varphi_{1,1}^{(j)} - \frac{1}{4} j (1 + 3j) \varphi_{1,0}^{(j)} \right) \cos ((j + 1)(L - L') - \varpi + \varpi') \\
 &\quad \left. + \left( 2 \varphi_{1,2}^{(j)} + \frac{1}{2} (3 + 2j) \varphi_{1,1}^{(j)} + \frac{3}{4} j (1 - j) \varphi_{1,0}^{(j)} \right) \cos ((j - 1)(L - L') + \varpi - \varpi') \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \alpha_0 \varphi_{3,0}^{(j)} \left( \left( -\sin^2 \frac{i}{2} - \sin^2 \frac{i'}{2} \right) [\cos(j - 1)(L - L') + \cos(j + 1)(L - L')] \right. \\
 &\quad + \sin^2 \frac{i}{2} [\cos((j - 1)L - (j + 1)L' + 2\Omega) + \cos((j + 1)L - (j - 1)L' - 2\Omega)] \\
 &\quad + \sin^2 \frac{i'}{2} [\cos((j - 1)L - (j + 1)L' + 2\Omega') + \cos((j + 1)L - (j - 1)L' - 2\Omega')] \\
 &\quad + 2 \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} [\cos((j - 1)(L - L') + \Omega - \Omega') - \cos((j - 1)L - (j + 1)L' + \Omega + \Omega') \\
 &\quad \left. \left. + \cos((j + 1)(L - L') - \Omega + \Omega') - \cos((j + 1)L - (j - 1)L' - \Omega - \Omega')] \right) \right\}
 \end{aligned}$$

(6.90b)

où  $\delta_0^j$  est le symbole de Kronecker (égal à 1 si  $j = 0$  et à 0 sinon), et où les coefficients  $\varphi_{n,m}^{(j)}$  sont les fonctions de  $\alpha_0$  définies en (6.83). On pourra vérifier que cette expression vérifie la propriété de d'Alembert.

**Exercice Remarque .** L'expression (6.90a)-(6.90b) permet de repérer facilement les quelques termes qui sont indépendants de  $L$  et de  $L'$  dans le développement de  $(a'/\Delta)$ , et qui sont aussi, à un facteur près, les **termes séculaires** de la partie directe de  $U$ , fonction perturbatrice de  $P$ , ou de  $U'$  pour  $P'$ , cf. (6.45) : On trouve ces termes séculaires pour  $j = 0$  dans les 1<sup>ières</sup> lignes de (6.90a) et de (6.90b), et pour  $j = 1$  dans les 9<sup>ième</sup>, 10<sup>ième</sup> et 13<sup>ième</sup> lignes de (6.90b) ; on en aurait d'autres de degrés 4, 6, etc... dans une expression plus complète de  $(a'/\Delta)$ . En remarquant qu'il n'y a pas de terme séculaire dans le développement (6.69) des parties indirectes de  $U$  et  $U'$ , on en conclut que la partie séculaire  $\bar{U}$  de  $U$ , ou celle  $\bar{U}'$  de  $U'$ , provient uniquement de  $(1/\Delta)$  ; elle vaut, au degré 2 :

$$\begin{aligned} \bar{U} = \mu \frac{\epsilon'}{1+\epsilon} \frac{1}{a'} \left\{ \varphi_{1,0}^{(0)} + (2\varphi_{1,2}^{(0)} + \frac{3}{2}\varphi_{1,1}^{(0)}) (e^2 + e'^2) \right. \\ \left. - (4\varphi_{1,2}^{(1)} + 5\varphi_{1,1}^{(1)}) ee' \cos(\varpi - \varpi') \right. \\ \left. - \alpha_0 \varphi_{3,0}^{(1)} \left( \sin^2 \frac{i}{2} + \sin^2 \frac{i'}{2} - 2\sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \cos(\Omega - \Omega') \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.91)$$

Exprimée en fonction des variables  $z, z', \zeta, \zeta'$  et de leurs conjuguées, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{U} = \mu \frac{\epsilon'}{1+\epsilon} \frac{1}{a'} \left\{ \varphi_{1,0}^{(0)} + (2\varphi_{1,2}^{(0)} + \frac{3}{2}\varphi_{1,1}^{(0)}) (z\bar{z} + z'\bar{z}') \right. \\ \left. - (2\varphi_{1,2}^{(1)} + \frac{5}{2}\varphi_{1,1}^{(1)}) (z\bar{z}' + \bar{z}z') \right. \\ \left. - \alpha_0 \varphi_{3,0}^{(1)} (\zeta\bar{\zeta} + \zeta'\bar{\zeta}' - \zeta\bar{\zeta}' - \bar{\zeta}\zeta') \right\} \end{aligned} \quad (6.92)$$

Bien sûr, d'après (6.45), on a :  $\bar{U}' = \frac{\mu'}{\mu} \frac{\epsilon'}{\epsilon} \frac{1+\epsilon}{1+\epsilon'} \bar{U}$ . Notons que dans (6.91) il y a des termes périodiques en

$(\varpi - \varpi')$  ou  $(\Omega - \Omega')$  que l'on qualifierait de "termes à longue période" si l'on distinguait, comme en §22, les variables angulaires des variables métriques : En fait, dans les problèmes de type planétaire, la **partie séculaire** d'un développement n'est pas l'ensemble des termes indépendants des variables angulaires, mais par définition, l'ensemble des termes indépendants des seules longitudes moyennes. Notons encore que les coefficients de Laplace définis en (6.78) vérifient un certain nombre de relations de récurrence que l'on pourrait établir en dérivant (6.76), fonction génératrice de ces coefficients, par rapport à  $\psi$  ou par rapport à  $\rho$ . On peut en déduire d'autres relations de récurrence entre les fonctions  $\varphi_{n,m}^{(j)}(\alpha_0)$  ; on montrerait en particulier que les coefficients qui apparaissent dans les expressions (6.91) et (6.92) vérifient la relation :

$$2 \varphi_{1,2}^{(0)} + \frac{3}{2} \varphi_{1,1}^{(0)} = \frac{1}{4} \alpha_0 \varphi_{3,0}^{(1)} \tag{6.93}$$

### 25.1.7. Remarques sur les propriétés de d'Alembert et de parité des séries

Nous avons rencontré ces propriétés dans tous les développements construits jusqu'ici, notamment ceux de  $1/\Delta$  ou ceux des perturbations indirectes de  $U$  ou  $U'$ . Ces développements peuvent tous être organisés en séries de termes  $T$  de la forme :

$$T = C \bar{z}^k z^{\bar{k}} \bar{z}'^{k'} z'^{\bar{k}'} \bar{\zeta}^l \zeta^{\bar{l}} \bar{\zeta}'^{l'} \zeta'^{\bar{l}'} \exp \sqrt{-1} (pL + p'L') \tag{6.94}$$

Nous avons vu en (6.71) que la propriété de d'Alembert correspond, pour chaque terme  $T$ , à l'égalité de la caractéristique du monôme et de la caractéristique de l'inégalité :

$$C_I = p + p' = k - \bar{k} + l - \bar{l} + k' - \bar{k}' + l' - \bar{l}' = C_M \tag{6.95}$$

En fait, dans le cas de  $1/\Delta$ , cette propriété est une conséquence de l'invariance des distances  $r$ ,  $r'$  et  $\Delta$  dans toute rotation du repère de référence  $R_0$  autour de l'axe  $P_0 \mathbf{k}_0$ . Pour montrer cette invariance, il suffit de voir que

dans une rotation d'angle  $\phi$  autour de  $\mathbf{k}_0$ , les éléments  $a, e, i, M$ , et  $\omega$  sont inchangés et seul  $\Omega$  est transformé en  $\Omega + \phi$ . Donc  $L$  et  $\varpi$  sont aussi transformés en  $L + \phi$  et  $\varpi + \phi$ . Les éléments de l'autre planète sont transformés de la même façon. Chaque terme  $T$  des développements est alors transformé en :

$$T \times \exp \sqrt{-1} (p + p' - (k - \bar{k} + l - \bar{l} + k' - \bar{k}' + l' - \bar{l}')) \phi \tag{6.96}$$

L'invariance par rotation autour de  $\mathbf{k}_0$  est donc équivalente à  $C_I = C_M$ .

De même, nous avons vu que tous les développements construits ici sont de degré pair par rapport aux variables d'inclinaison. En fait, ceci est également dû à l'invariance des quantités  $r, r', \Delta, \cos S, \dots$  lorsqu'on change le repère  $R_0$  en son symétrique par rapport au plan  $P_0 \mathbf{i}_0 \mathbf{j}_0$ . En effet, dans une telle symétrie, les nœuds ascendants sont transformés en leurs opposés. Donc, pour chaque orbite,  $\Omega$  est changé en  $\Omega + \pi$ , et  $\omega$  en  $\omega + \pi$ , mais l'anomalie moyenne  $M$  est inchangée, tout comme les variables  $X$  et  $z$ . Enfin  $L$  augmentant de  $2\pi$  est aussi inchangé, tandis que  $Y$  et  $\zeta$  changent de signe. Donc chaque terme  $T$  est transformé en :

$$(-1)^{(l+\bar{l}+l'+\bar{l}')} T \tag{6.97}$$

Pour que ces développements soient inchangés, il faut donc que le degré total en inclinaisons soit pair.

Néanmoins, l'intérêt de la propriété de d'Alembert vient surtout ici du fait que le simple calcul de la caractéristique d'inégalité d'un terme fournit immédiatement le degré minimum de ce terme par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Les termes dont la caractéristique d'inégalité est élevée sont alors généralement négligeables ; par exemple, une inégalité telle que  $15L - 40L'$  a une caractéristique égale à  $-25$  et son degré global est au moins égal à 25 en excentricités et inclinaisons !

## 26. Perturbations du mouvement des planètes

Les équations (6.40) et (6.41) définissent le mouvement de la planète  $P_k$  ; ce sont celles d'un mouvement képlérien osculateur perturbé, dont la fonction perturbatrice  $U_k$  représente la somme des perturbations subies par  $P_k$  de la part des autres planètes :

$$U_k = \sum_{i=1}^n \underset{(i \neq k)}{U_{ki}} = \mu_k \sum_{i \neq k} \frac{\epsilon_i}{1 + \epsilon_k} \left( \frac{1}{\Delta_{ik}} - \frac{r_k \cos S_{ik}}{r_i^2} \right) \quad (6.98)$$

$\Delta_{ik}$  représente bien sûr la distance de  $P_i$  à  $P_k$ , et  $S_{ik}$  l'angle entre  $P_0P_i$  et  $P_0P_k$ . On se propose d'exploiter, pour chaque planète, les équations de Lagrange (5.51) ou (5.52) : Pour la planète  $P_k$ , on en y remplace simplement  $U$  par  $U_k$  et les éléments osculateurs  $(a, n, e, i, \Omega, \varpi, L, z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta})$  par  $(a_k, n_k, e_k, i_k, \Omega_k, \varpi_k, L_k, z_k, \bar{z}_k, \zeta_k, \bar{\zeta}_k)$ . On aura par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_k} \frac{da_k}{dt} &= \frac{2}{n_k a_k^2} \frac{\partial U_k}{\partial L_k} \\ &= 2n_k \frac{a_k}{\mu_k} \frac{\partial U_k}{\partial L_k} \quad \text{grâce à} \quad \mu_k = n_k^2 a_k^3 \end{aligned} \quad (6.99)$$

Comme  $n_k a_k^2$  apparaît au dénominateur dans le second membre de toutes les équations relatives à  $P_k$ , on a avantage à rendre  $U_k$  proportionnel à  $\frac{\mu_k}{a_k}$  de manière à ce que finalement les variations des éléments d'orbite de

$P_k$  apparaissent toutes proportionnelles à  $n_k$ . On écrit ainsi :

$$U_k = \frac{\mu_k}{a_k} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\epsilon_i}{1 + \epsilon_k} \left( \frac{a_k}{\Delta_{ik}} - \alpha_{ki}^{-2} \left( \frac{r_k}{a_k} \right) \left( \frac{a_i}{r_i} \right)^2 \cos S_{ik} \right) + \frac{\mu_k}{a_k} \sum_{i=k+1}^n \frac{\epsilon_i}{1 + \epsilon_k} \alpha_{ki} \left( \frac{a_i}{\Delta_{ik}} - \alpha_{ki} \left( \frac{r_k}{a_k} \right) \left( \frac{a_i}{r_i} \right)^2 \cos S_{ik} \right) \tag{6.100}$$

où l'on a posé : 
$$\alpha_{ki} = \frac{\min(a_k, a_i)}{\max(a_k, a_i)} \tag{6.101}$$

On a voulu mettre en évidence, dans (6.100), les quantités analogues à celles développées dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire  $a'/\Delta$  (où  $a'$  concerne la planète extérieure) et  $(\frac{r}{a})(\frac{a'}{r})^2 \cos S$ ; on a vu que ces deux quantités admettent des développements de la même forme (cf. (6.89) et (6.66)). Par ailleurs, en exprimant les éléments  $a_k$  au voisinage de valeurs fixées  $a_{0k}$ , on introduit les nouvelles variables  $\eta_k$  :

$$a_k = a_{0k}(1 + \eta_k) \quad \text{entraînant aussi :} \quad \frac{1}{a_k} \frac{da_k}{dt} = \frac{1}{1 + \eta_k} \frac{d\eta_k}{dt} \tag{6.102}$$

Les  $\alpha_{ki}$  présents dans (6.100) peuvent alors être développés, comme en (6.79), en puissances de  $\eta_k$  et de  $\eta_i$ , au voisinage de la valeur correspondante  $\alpha_{0ki}$ . Compte tenu de tout cela, le développement de  $U_k$  peut finalement être présenté comme une somme d'inégalités ( $p_k L_k + p_i L_i$ ) :

$$U_k = \frac{\mu_k}{a_k} \sum_{i \neq k} \frac{\epsilon_i}{1 + \epsilon_k} \sum_{\{p_k, p_i\}} U_{p_k p_i}^{(ki)} \exp \sqrt{-1} (p_k L_k + p_i L_i) \tag{6.103}$$

où les coefficients  $U_{p_k p_i}^{(ki)}$  sont, comme en (6.89), des fonctions de l'ensemble des éléments osculateurs de  $P_k$  et de  $P_i$ , à l'exclusion des longitudes moyennes :

$$U_{p_k p_i}^{(ki)} = \sum_{h, K, j} C_{h, K, j}^{(ki)} \eta_k^{h_1} \eta_i^{h_2} z_k^{k_1} \bar{z}_k^{k_2} z_i^{k_3} \bar{z}_i^{k_4} \zeta_k^{k_5} \bar{\zeta}_k^{k_6} \zeta_i^{k_7} \bar{\zeta}_i^{k_8} \quad (6.104)$$

Les coefficients  $C_{h, K, j}^{(ki)}$  sont numériques et dépendent de  $\alpha_{0ki}$  ; l'indice  $h$  représente les entiers positifs ou nuls  $\{h_1, h_2\}$ , tandis que  $j$  et  $K = \{k_1, \dots, k_8\}$  décrivent respectivement l'ensemble des entiers relatifs et l'ensemble des exposants entiers positifs ou nuls qui satisfont à la propriété de d'Alembert (cf. (6.67)) :

$$\begin{aligned} p_k &= k_2 - k_1 + k_6 - k_5 + j \\ p_i &= k_4 - k_3 + k_8 - k_7 - j \end{aligned} \quad \text{avec} \quad k_5 + k_6 + k_7 + k_8 \quad \text{entier pair} \quad (6.105)$$

**Exercice** Ces relations permettent de trouver par exemple quels sont les termes qui apparaissent dans l'*inégalité séculaire* de  $U_{p_k p_i}^{(ki)}$  : Ils correspondent à  $p_k = p_i = 0$ , soit, au degré 2 par exemple :  $\{k_1 = k_2 = 1$  ou  $k_3 = k_4 = 1$  ou  $k_5 = k_6 = 1$  ou  $k_7 = k_8 = 1\}$  pour  $j = 0$ ,  $\{k_1 = k_4 = 1$  ou  $k_5 = k_8 = 1\}$  pour  $j = 1$ , et  $\{k_2 = k_3 = 1$  ou  $k_6 = k_7 = 1\}$  pour  $j = -1$  ; on pourra vérifier que les termes correspondants sont bien ceux obtenus en (6.92).



Dev3.3.2

De la même manière qu'on a  $n_k^2 a_k^3 = \mu_k$ , on associe à chaque demi-grand axe de référence  $a_{0k}$  un moyen mouvement constant  $n_{0k}$  par la relation :

$$n_{0k}^2 a_{0k}^3 = \mu_k \quad (6.106)$$

Le moyen mouvement osculateur  $n_k$  varie alors dans le voisinage de  $n_{0k}$ . Appelons  $\nu_k$  la variable correspondante, définie par :

$$n_k = n_{0k} (1 + \nu_k) \quad (6.107)$$

A cause de la troisième loi de Kepler, les variables  $\eta_k$  et  $\nu_k$  ne sont pas indépendantes ; elles vérifient la relation :

$$\begin{aligned} n_k^2 a_k^3 &= \mu_k = n_{0k}^2 a_{0k}^3 \\ &= n_{0k}^2 a_{0k}^3 (1 + \nu_k)^2 (1 + \eta_k)^3 \end{aligned} \quad \text{d'où :} \quad (1 + \nu_k)^2 (1 + \eta_k)^3 = 1 \quad (6.108)$$



On en déduit notamment :

$$\frac{1}{1 + \nu_k} \frac{d\nu_k}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{1}{1 + \eta_k} \frac{d\eta_k}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{1}{a_k} \frac{da_k}{dt} \tag{6.109}$$

ou encore, en développant (6.108) à l'ordre 1 par rapport à  $\nu_k$  et  $\eta_k$  :

$$\nu_k = -\frac{3}{2} \eta_k + O(\nu_k^2, \eta_k^2, \nu_k \eta_k) \tag{6.110}$$

Ces relations permettent d'utiliser des équations de Lagrange, soit pour les  $\eta_k$ , soit pour les  $\nu_k$ , ou même de conserver les deux sortes de variables dans les développements et de ne tenir compte de leur liaison qu'en fin de calcul.

Pour simplifier l'écriture des équations, adoptons des notations matricielles en définissant les variables suivantes :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \mathcal{Z} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix} \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \tag{6.111}$$

Associons aussi aux moyens mouvements les matrices colonnes  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}_0$ , ainsi que les matrices carrées diagonales  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{N}_0$  :

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}_0 = \begin{pmatrix} n_{01} \\ \vdots \\ n_{0n} \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & n_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{N}_0 = \begin{pmatrix} n_{01} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & n_{0n} \end{pmatrix} \tag{6.112}$$

Alors, les relations (6.107) et (6.110) pourront aussi s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \mathcal{N}_0 + \mathbf{N}_0 \mathcal{V} & \text{ou} & \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}_0 (\mathbf{I} + \mathbf{V}) \\ \mathcal{V} &= -\frac{3}{2} \mathcal{A} & \text{ou} & \quad \mathbf{V} = -\frac{3}{2} \mathbf{A} \end{aligned} \tag{6.113}$$

avec  $\mathbf{I}$  matrice unité de rang  $n$ , et  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{A}$  matrices carrées diagonales d'éléments respectifs  $\nu_k$  et  $\eta_k$ .

La notion d'inégalité et de caractéristique d'inégalité vue en (6.70) peut être généralisée pour des combinaisons linéaires des  $n$  longitudes moyennes :  $p_1 L_1 + \dots + p_n L_n$  avec  $C_I = \sum_i p_i$ ; en notant  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  la matrice ligne formée des entiers relatifs  $p_i$ , une telle inégalité peut être représentée par le produit de matrices  $(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L})$ ; on la notera aussi parfois  $(p_1, \dots, p_n)$  ou simplement  $(\mathbf{p})$ , et par exemple, l'**inégalité séculaire** qui correspond à  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$  sera notée  $(0)$ . Les équations de Lagrange (5.52) écrites pour chaque planète peuvent alors se regrouper sous forme matricielle pour donner :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \sqrt{-1} \mathbf{N} \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{A})}(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}) \quad (6.114)$$

$$\frac{d\mathcal{X}}{dt} = \sqrt{-1} \mathbf{N} \left[ \epsilon \mathcal{S}_1^{(\mathcal{X})}(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}) + \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{X})}(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}) \right] \quad (6.115)$$

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dt} = \sqrt{-1} \mathbf{N} \left[ \epsilon \mathcal{S}_1^{(\mathcal{Z})}(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}) + \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{Z})}(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}) \right] \quad (6.116)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \mathcal{N} + \mathbf{N} \left[ \epsilon \mathcal{S}_1^{(\mathcal{L})}(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}) + \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{L})}(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}) \right] \quad (6.117)$$

Dans ces équations,  $\epsilon$  indique simplement que les termes en facteur sont au moins d'ordre 1 des masses, puisque proportionnels à l'une des masses perturbatrices  $\epsilon_i$ , et on a séparé l'inégalité séculaire des autres. Dans la suite, on appellera  $\mathcal{U}$  l'une quelconque des variables matricielles  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Z}$  ou  $\mathcal{L}$ ; les matrices colonnes  $\mathcal{S}_1^{(\mathcal{U})}(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z})$  et  $\mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{U})}(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{L})$  représentent respectivement la **partie séculaire** (ou indépendante des longitudes moyennes), et la **partie périodique** de l'équation relative à  $\mathcal{U}$ .

**Remarque 1.** Dans  $d\mathcal{A}/dt$ , la partie séculaire est nulle puisque, d'après (5.52),  $\frac{da_k}{dt}$  ou  $\frac{d\eta_k}{dt}$  est dérivé des termes

de  $U_k$  qui sont fonctions explicites de la longitude moyenne de la planète  $P_k$ . Les autres équations font intervenir les diverses dérivées partielles des fonctions  $U_k$  par rapport aux variables de chaque planète (cependant, le calcul de  $\frac{\partial U}{\partial a}$  est à remplacer ici par  $\frac{1}{a_0} \frac{\partial U}{\partial \eta}$ ); les parties séculaires  $S_1^{(U)}$  proviennent directement de l'application des équations (5.52) à la partie séculaire  $\bar{U}$  de  $U$  (on en a donné une expression limitée au degré 2 en (6.91) ou (6.92)). On obtient alors finalement, pour chaque équation, un développement analogue à (6.103), et ainsi, l'élément d'indice  $k$  de ces matrices colonnes est de la forme :

$$[\epsilon S_1^{(U)}(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z})]_k = \sum_{i \neq k} \frac{\epsilon_i}{1 + \epsilon_k} V_{00}^{(Uki)} \tag{6.118a}$$

$$[\epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(U)}(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L})]_k = \sum_{i \neq k} \frac{\epsilon_i}{1 + \epsilon_k} \sum_{\{p_k, p_i\} \neq (0,0)} V_{p_k p_i}^{(Uki)} \exp \sqrt{-1}(p_k L_k + p_i L_i) \tag{6.118b}$$

où  $V_{p_k p_i}^{(Uki)}$  est formellement identique à (6.104); il va donc de soi que la dépendance indiquée de  $S_1^{(U)}$  et de  $\mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(U)}$  vis-à-vis de  $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z})$ , s'étend implicitement aux variables conjuguées des  $z_k$  et  $\zeta_k$ . Les développements de  $d\mathcal{A}/dt$  et de  $d\mathcal{L}/dt$  vérifient les mêmes relations de d'Alembert qu'en (6.105), mais, pour  $d\mathcal{X}/dt$  et  $d\mathcal{Z}/dt$ , il y a des modifications dues au fait que dans  $\frac{dz_k}{dt}$  par exemple (cf. (5.52)), on dérive  $U_k$  par rapport à  $\bar{z}_k$ , ou on multiplie par  $z_k$  des dérivées partielles de  $U_k$  qui ne modifient pas les exposants des monômes ; ainsi, on pourra vérifier que les développements des équations donnant  $\frac{dz_k}{dt}$  et  $\frac{d\zeta_k}{dt}$  vérifient la **propriété de d'Alembert** modifiée :

$$\begin{aligned} p_k &= k_2 - k_1 + k_6 - k_5 + j + 1 & \text{avec} & & k_5 + k_6 + k_7 + k_8 & \text{pair dans } \frac{dz_k}{dt} \\ p_i &= k_4 - k_3 + k_8 - k_7 - j & & & k_5 + k_6 + k_7 + k_8 & \text{impair dans } \frac{d\zeta_k}{dt} \end{aligned} \tag{6.119}$$

On en déduit notamment que la **partie séculaire** est au moins de degré 1 en  $\mathcal{X}$  dans  $d\mathcal{X}/dt$ , et au moins de degré

1 en  $\mathcal{Z}$  dans  $d\mathcal{Z}/dt$  ; au contraire, elle est de degré 0 au moins dans  $d\mathcal{L}/dt$  [ces termes de degré 0 proviennent de la partie séculaire de  $\frac{2}{na} \frac{\partial U}{\partial a}$  dans  $\frac{dL}{dt}$ , cf. (5.51) ou (5.52)].

**Remarque 2.** Pour obtenir les équations (6.114) et (6.117) relatives aux variables réelles  $\eta_k$  et  $L_k$ , on a utilisé les développements (6.103) et (6.104) de  $U_k$  exprimés en variables complexes, d'où les expressions complexes de ces équations. Cependant on aurait pu partir d'une expression de  $U_k$  en variables réelles analogue à (6.90), montrant notamment un développement "en cosinus" dont les arguments sont formés de combinaisons des longitudes moyennes et des longitudes des nœuds et des péricentres. Alors, comme d'après (5.51)  $\frac{da}{dt}$  est proportionnel à  $\frac{\partial U}{\partial L}$ , les variations  $\frac{d\eta_k}{dt}$  auraient pu être exprimées sous forme de séries en "sinus" de ces mêmes arguments ; de même, celles des  $\frac{dL_k}{dt}$  seraient des séries en cosinus.

## 26.1. Théorie à variations séculaires : Méthode de Le Verrier

Comme pour les méthodes de perturbation vues en §5-22, la *méthode de Le Verrier* procède par approximations successives, ordonnées ici suivant les puissances croissantes des masses perturbatrices. La méthode suppose que l'on connaît la valeur de ces masses perturbatrices avec la meilleure précision possible ; si ces masses sont connues de façon approchée, on pourra améliorer leur détermination en développant les équations analytiquement au voisinage de ces valeurs, puis, une fois construite leur solution, on pourra améliorer ces valeurs en ajustant cette solution aux observations. Dans toute la suite cependant, pour simplifier, les masses seront supposées fixées numériquement et on ne recherchera pas une solution analytique par rapport aux masses.

### 26.1.1. Solution d'ordre 0 et développements en puissances des masses

L'approximation d'ordre 0 est une solution képlérienne pure, tous les éléments étant constants sauf les longitudes moyennes qui sont des fonctions linéaires du temps. Pour obtenir une telle solution, on réduit tout simplement à zéro les seconds membres des équations (6.114), (6.115) et (6.116) puisqu'ils sont d'ordre 1 en  $\epsilon$ , ce qui donne les solutions constantes :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \quad \mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \quad \mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \quad (6.120)$$

Pour les constantes  $\mathcal{X}_0$  et  $\mathcal{Z}_0$ , on peut adopter les valeurs prises par les éléments osculateurs correspondants à un instant donné  $t_0$  ; on peut les considérer comme les constantes d'intégration des équations (6.115) et (6.116). Pour  $\mathcal{A}_0$ , le choix est plus délicat car les éléments  $\eta_{0k}$  qui composent cette matrice dépendent aussi d'un choix encore ouvert des demi-grands axes de référence  $a_{0k}$  (ou des  $n_{0k}$  d'après (6.108)). En fait, on fixe ce choix en liaison avec celui de  $\mathcal{L}_0$ , solution d'ordre 0 de l'équation (6.117). Celle-ci est définie par :

$$\frac{d\mathcal{L}_0}{dt} = \mathcal{N}_0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}_0 = \mathcal{N}_0(t - t_0) + \mathcal{L}_{00}} \quad (6.121)$$

On pourrait prendre  $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(t_0)$ , valeur des moyens mouvements osculateurs à l'instant  $t_0$ , mais, pour que les variations des longitudes moyennes soient meilleures dès la première approximation, on adopte plutôt une valeur moyenne de ces moyens mouvements. Il faut alors supposer que l'on connaît au départ la valeur moyenne  $N_k$  du moyen mouvement de chaque planète, mais il suffit pour cela d'avoir observé leur longitude sur une durée suffisamment longue, car on a théoriquement :

$$N_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dL_k}{dt} dt \quad (6.122)$$

$N_k$  est appelé le **moyen mouvement moyen** et l'on prend pour  $n_{0k}$  une valeur approchée de  $N_k$  obtenue par l'observation sur une durée  $T$  suffisamment longue (de l'ordre du siècle). Dans ces conditions, il faut que la

partie séculaire de l'équation (6.117) soit aussi égale à  $\mathcal{N}_0$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0 + \mathbf{N}_0 \mathcal{V}_0 + \mathbf{N}_0 (\mathbf{I} + \mathbf{V}_0) \in \mathcal{S}_1^{(\mathcal{L})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) \quad (6.123)$$

Pour écrire cette équation, on a remplacé dans (6.117)  $\mathcal{N}$  et  $\mathbf{N}$  par la partie constante des expressions (6.113), c'est-à-dire avec des matrices  $\mathcal{V}_0$  et  $\mathbf{V}_0$  ayant pour éléments des constantes  $\nu_{0k}$  déterminées avec  $\mathcal{A}_0$  de façon à satisfaire l'équation (6.123); tenant compte de la relation (6.113) entre  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{A}$ , cela revient à déterminer la constante  $\mathcal{A}_0$  de telle sorte qu'on ait :

$$-\frac{3}{2} \mathbf{N}_0 \mathcal{A}_0 + \mathbf{N}_0 (\mathbf{I} - \frac{3}{2} \mathbf{A}_0) \in \mathcal{S}_1^{(\mathcal{L})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) = 0 \quad (6.124)$$

où  $\mathbf{A}_0$  est la matrice carrée diagonale ayant les mêmes éléments  $\eta_{0k}$  que  $\mathcal{A}_0$ . Cette équation montre que  $\mathcal{A}_0$  est au moins d'ordre 1 en  $\epsilon$ , valant en première approximation :

$$\mathcal{A}_0 = \frac{2}{3} \epsilon \mathcal{S}_1^{(\mathcal{L})}(0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) \quad (6.125)$$

Il suffit de reporter cette valeur à l'intérieur de  $\mathcal{S}_1^{(\mathcal{L})}$  dans (6.124) pour en tirer une meilleure approximation, et l'on peut éventuellement réitérer. La constante  $a_{0k} \eta_{0k}$  qu'on en déduit pour chaque planète est appelée *perturbation constante du demi-grand axe*. Notons cependant que les coefficients qui apparaissent dans le développement de  $\mathcal{S}_1^{(\mathcal{L})}$  sont eux-mêmes des fonctions des  $a_{0k}$ , calculés à partir des  $n_{0k}$  par la relation (6.106).

Pour développer une solution en puissances des masses au voisinage de la solution d'ordre 0 que l'on vient de définir, on décompose chaque variable en une somme de variables ordonnées selon leur ordre explicite en  $\epsilon$ . On écrit ainsi, d'abord pour  $\nu_k$  et  $\eta_k$  :

$$\nu_k = \nu_{0k} + \epsilon \nu_{1k} + \epsilon^2 \nu_{2k} + \dots \quad \text{et} \quad \eta_k = \eta_{0k} + \epsilon \eta_{1k} + \epsilon^2 \eta_{2k} + \dots \quad (6.126)$$

Cependant, on vient de voir que ces variables sont au moins d'ordre 1, puisque  $\nu_{0k}$  et  $\eta_{0k}$  sont des constantes de l'ordre de  $\epsilon$ ; on peut donc inclure ces constantes dans  $\epsilon \nu_{1k}$  et  $\epsilon \eta_{1k}$  en écrivant :  $\nu_{0k} = \epsilon \nu_{1k}^{(0)}$  et  $\eta_{0k} = \epsilon \eta_{1k}^{(0)}$ ,

parties constantes respectives de  $\epsilon\nu_{1k}$  et de  $\epsilon\eta_{1k}$ . Alors, en développant l'équation (6.108) en puissances de  $\epsilon$  et en identifiant les termes de même ordre, on peut expliciter le calcul de  $\nu_{jk}$  à l'ordre  $j$  en fonction des  $\eta_{ik}$  d'ordre  $i \leq j$ ; aux ordres 1 et 2 par exemple, on obtient :

$$\begin{aligned} \nu_{1k} &= -\frac{3}{2}\eta_{1k} \\ \nu_{2k} &= -\frac{3}{2}\eta_{2k} + \frac{15}{8}\eta_{1k}^2 \end{aligned} \tag{6.127}$$

Pour les autres variables, on écrit de même :

$$z_k = z_{0k} + \epsilon z_{1k} + \epsilon^2 z_{2k} + \dots \quad \zeta_k = \zeta_{0k} + \epsilon \zeta_{1k} + \epsilon^2 \zeta_{2k} + \dots \quad L_k = L_{0k} + \epsilon L_{1k} + \epsilon^2 L_{2k} + \dots \tag{6.128}$$

Il leur correspond, en notations matricielles :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_0 + \epsilon \mathcal{A}_1 + \epsilon^2 \mathcal{A}_2 + \dots & \mathcal{X} &= \mathcal{X}_0 + \epsilon \mathcal{X}_1 + \epsilon^2 \mathcal{X}_2 + \dots \\ \mathcal{V} &= \mathcal{V}_0 + \epsilon \mathcal{V}_1 + \epsilon^2 \mathcal{V}_2 + \dots & \mathcal{Z} &= \mathcal{Z}_0 + \epsilon \mathcal{Z}_1 + \epsilon^2 \mathcal{Z}_2 + \dots \\ & & \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \epsilon \mathcal{L}_1 + \epsilon^2 \mathcal{L}_2 + \dots \end{aligned} \tag{6.129}$$

On a quand même maintenu  $\mathcal{A}_0$  et  $\mathcal{V}_0$  séparés de  $\epsilon \mathcal{A}_1$  et de  $\epsilon \mathcal{V}_1$  pour bien marquer le fait qu'on développe une solution au voisinage de ces constantes.

Finalement, on reporte ces expressions dans les deux membres des équations (6.114) à (6.117); pour l'une quelconque de ces équations, on a alors :

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{d\mathcal{U}_0}{dt} + \epsilon \frac{d\mathcal{U}_1}{dt} + \epsilon^2 \frac{d\mathcal{U}_2}{dt} + \dots \tag{6.130a}$$

et chaque terme  $\epsilon \mathcal{N}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{U})}(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L})$  du membre de droite de  $\frac{d\mathcal{U}}{dt}$  est développé en série de Taylor

au voisinage de la solution d'ordre 0, sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \epsilon \mathbf{N}_0(\mathbf{I} + \mathbf{V}_0 + \epsilon \mathbf{V}_1 + \dots) \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{U})}(\mathcal{A}_0 + \epsilon \mathcal{A}_1 + \dots, \mathcal{X}_0 + \epsilon \mathcal{X}_1 + \dots, \mathcal{Z}_0 + \epsilon \mathcal{Z}_1 + \dots) \times \\
 & \quad \times \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot (\mathcal{L}_0 + \epsilon \mathcal{L}_1 + \dots)) = \\
 & = \epsilon \mathbf{N}'_0 \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{U})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) + \\
 & \quad + \epsilon^2 \left\{ \left( -\frac{3}{2} \mathbf{N}_0 \mathbf{A}_1 + \sqrt{-1} \mathbf{N}'_0(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_1) \right) \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{U})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) + \right. \\
 & \quad \left. + \mathbf{N}'_0 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{U})}}{\partial \mathcal{A}} \right)_0 \mathcal{A}_1 + \left( \frac{\partial \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{U})}}{\partial \mathcal{X}} \right)_0 \mathcal{X}_1 + \left( \frac{\partial \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{U})}}{\partial \mathcal{Z}} \right)_0 \mathcal{Z}_1 \right] \right\} \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) + \dots
 \end{aligned} \tag{6.130b}$$

où  $\mathbf{N}'_0$  représente  $\mathbf{N}_0(\mathbf{I} + \mathbf{V}_0)$ , égal aussi à  $\mathbf{N}_0(\mathbf{I} - \frac{3}{2} \mathbf{A}_0)$ . Notons encore que dans la dernière ligne de (6.130b), les 3 quantités dépendant de dérivées partielles représentent symboliquement la somme :

$$\sum_{k=1}^n \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{U})}}{\partial \eta_k} \right)_0 \eta_{1k} + \left( \frac{\partial \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{U})}}{\partial z_k} \right)_0 z_{1k} + \left( \frac{\partial \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{U})}}{\partial \bar{z}_k} \right)_0 \bar{z}_{1k} + \left( \frac{\partial \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{U})}}{\partial \zeta_k} \right)_0 \zeta_{1k} + \left( \frac{\partial \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{U})}}{\partial \bar{\zeta}_k} \right)_0 \bar{\zeta}_{1k} \right] \tag{6.131}$$

On aurait bien sûr des expressions analogues pour le développement des parties séculaires  $\epsilon \mathcal{N} \mathcal{S}_1^{(\mathcal{U})}$ . En remplaçant  $\mathcal{U}$  par  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Z}$  et  $\mathcal{L}$ , la méthode consiste ensuite à identifier les termes de même ordre en  $\epsilon$  dans l'expression (6.130a) et dans le développement (6.130b).



### 26.1.2. Equations et solution d'ordre 1

En identifiant les termes d'ordre 1, on obtient les équations :

$$\frac{d\mathcal{A}_1}{dt} = \sqrt{-1} \mathbf{N}'_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) \quad (6.132)$$

$$\frac{d\mathcal{X}_1}{dt} = \sqrt{-1} \mathbf{N}'_0 \left[ \mathcal{S}_1^{(\mathcal{X})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) + \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{X})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) \right] \quad (6.133)$$

$$\frac{d\mathcal{Z}_1}{dt} = \sqrt{-1} \mathbf{N}'_0 \left[ \mathcal{S}_1^{(\mathcal{Z})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) + \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{Z})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) \right] \quad (6.134)$$

$$\frac{d\mathcal{L}_1}{dt} = \mathbf{N}_0 \mathcal{V}_1 + \mathbf{N}'_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{L})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) \quad (6.135)$$

Dans la dernière équation, la partie séculaire a disparu, puisque  $\mathcal{A}_0$  a été déterminé pour satisfaire l'équation (6.124) ; il faut cependant y remplacer encore  $\mathcal{V}_1$  par  $-\frac{3}{2}\mathcal{A}_1$ , et les termes correspondants de  $d\mathcal{A}_1/dt$  y subiront alors une double intégration. La solution d'ordre 1 s'obtient alors simplement par intégration terme à terme :

$$\mathcal{A}_1 = \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \frac{N'_0}{\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0} \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) \quad (6.136)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_1^{(0)} + \sqrt{-1} N'_0 \mathcal{S}_1^{(\mathcal{X})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) t + \\ + \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \frac{N'_0}{\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0} \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{X})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) \end{aligned} \quad (6.137)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_1^{(0)} + \sqrt{-1} N'_0 \mathcal{S}_1^{(\mathcal{Z})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) t + \\ + \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \frac{N'_0}{\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0} \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{Z})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) \end{aligned} \quad (6.138)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = \frac{3}{2} \sqrt{-1} \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \frac{N_0 N'_0}{(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)^2} \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) + \\ - \sqrt{-1} \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \frac{N'_0}{\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0} \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{L})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) \end{aligned} \quad (6.139)$$

Dans  $\mathcal{A}_1$ , on prend la constante d'intégration égale à zéro pour que, dans  $\mathcal{L}_1$ , l'intégration de  $\mathcal{A}_1$  n'introduise pas de nouveau terme proportionnel à  $t$ . On n'ajoute pas non plus de constante d'intégration dans  $\mathcal{L}_1$  puisque la constante  $\mathcal{L}_{00}$  introduite dans (6.121) reste arbitraire jusqu'à la fin du calcul, son évaluation pouvant se faire après que la solution  $\mathcal{L}$  ait été développée à un ordre suffisant. Au contraire, avec le choix qu'on a fait pour  $\mathcal{X}_0$  et  $\mathcal{Z}_0$  en (6.120), les constantes d'intégration  $\mathcal{X}_1^{(0)}$  et  $\mathcal{Z}_1^{(0)}$  doivent être évaluées de façon à ce que les solutions  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{Z}_1$  soient nulles à l'instant  $t_0$ .

On constate donc qu'à l'ordre 1 les solutions  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{L}_1$  ne comportent que des termes périodiques, tandis que  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{Z}_1$  ont en plus un polynôme de degré 1 en  $t$ .

Les termes proportionnels au temps représentent les variations dites *séculaires* des variables  $z_k$  et  $\zeta_k$  ; en effet, pour les planètes, ces variations sont de l'ordre de  $\epsilon n_{0k}$ , c'est-à-dire mille fois plus lentes que les moyens mouvements en considérant  $\epsilon \approx 10^{-3}$  ; comme les périodes des planètes sont de l'ordre de plusieurs années voire plusieurs décennies ou quelques siècles, les variations linéaires de ces éléments d'orbite sont extrêmement lentes, d'où le qualificatif "séculaires" qui leur a été donné. Bien sûr, correspondant aux  $z_k$  et  $\zeta_k$ , les excentricités et inclinaisons et les longitudes des nœuds et des périhélie comportent eux aussi des variations séculaires proportionnelles au temps, et donc les excentricités et inclinaisons peuvent croître au delà de toute limite ; ce grave défaut n'est cependant pas très gênant pour les planètes, car les variations séculaires de leurs éléments ne dépassent pas quelques dizaines de secondes par an : On peut alors utiliser quand même une telle solution sur une durée de l'ordre du millénaire. Au contraire, pour des satellites, une variation mille fois plus lente que leurs mouvements orbitaux (qui ont généralement des périodes de l'ordre de quelques jours) entraîne des variations séculaires dont les effets deviennent prohibitifs au bout de quelques dizaines d'années seulement ; pour eux, c'est plutôt la théorie générale développée plus loin qu'il faut appliquer.

Quant aux termes périodiques d'ordre 1, ce sont des *fonctions quasi-périodiques* de  $t$ , c'est-à-dire des sommes de termes ayant chacun une période différente et dont la fréquence résulte de combinaisons entières de plusieurs fréquences données. Ils ont la même forme qu'en (6.118b), avec des arguments périodiques dépendant de une ou de deux longitudes ; les inégalités périodiques correspondantes,  $p_k L_{0k} + p_i L_{0i}$ , sont les fonctions linéaires du temps :  $(p_k n_{0k} + p_i n_{0i}) t + C^{te}$ . Leur intégration fait alors intervenir le *diviseur*  $p_k n_{0k} + p_i n_{0i}$  (ou son carré lorsqu'il y a double intégration), mais il faut que ce diviseur ne soit pas nul ! Ce serait le cas si l'on avait  $\frac{p_k}{p_i} = -\frac{n_{0i}}{n_{0k}}$ . Or, on sait bien que tout nombre réel de précision limitée tel que  $\frac{n_{0i}}{n_{0k}}$  peut être représenté par un nombre rationnel. Les termes correspondant à un diviseur nul sont en fait constants ; ils s'intégreraient simplement sous forme d'un terme proportionnel au temps. Cependant, ces termes correspondent généralement à des entiers  $p_k$  et  $p_i$

suffisamment grands pour que la somme  $|p_k + p_i|$ , caractéristique de l'inégalité, soit elle-même un nombre grand ; alors, d'après la propriété de d'Alembert, le degré en excentricités et inclinaisons d'un tel terme est aussi très élevé, puisque au moins égal à cette caractéristique, ce qui, en pratique, rend négligeable le terme correspondant.

Cependant, si le système de planètes comporte deux moyens mouvements moyens  $n_{0k}$  et  $n_{0i}$  tels que, pour  $p$  et  $q$  entiers et petits, la quantité  $(pn_{0k} - (p+q)n_{0i})/n_{0k}$  soit de l'ordre de  $\epsilon$ , les termes correspondants sont de faible degré (égal à  $q$ ) en excentricités et inclinaisons, et sont associés à un *petit diviseur* de l'ordre de  $\epsilon$  ; or, avant intégration, ces termes sont déjà de l'ordre de  $\epsilon$  ; leur intégration donnerait donc un terme de d'ordre 0 en  $\epsilon$ . En fait, à cause de la double intégration dans  $\mathcal{L}_1$  qui conduit à élever au carré ces petits diviseurs éventuels, il suffit même que l'on ait  $(pn_{0k} - (p+q)n_{0i})/n_{0k}$  de l'ordre de  $\sqrt{\epsilon}$  pour se retrouver dans la même situation : On dit qu'il y a alors *commensurabilité* des moyens mouvements ou *résonance orbitale*. Plus précisément, l'inégalité correspondante  $pL_k - (p+q)L_i$  étant de caractéristique  $q$ , on dit que c'est une *résonance d'ordre  $q$* . Ainsi, puisque l'identification des termes résonnants ne peut pas se faire à l'ordre 1, la méthode de Le Verrier exclut les problèmes de résonance ; il existe des méthodes spécifiques à appliquer dans ce cas, mais leur développement dépasse l'objet de ce cours (on trouvera néanmoins quelques indications sur ce problème à la *fin de ce chapitre*).

Dans le système des grosses planètes du système solaire, de Mercure à Neptune, il n'y a pas vraiment de situation de résonance mais il y en a une entre Neptune et Pluton (résonance d'ordre 1 avec  $p = 2$  et  $p + q = 3$ ) ; il en existe aussi de nombreuses entre des astéroïdes et Jupiter, ou entre plusieurs satellites de Jupiter ou entre ceux de Saturne. Cependant, pour les grosses planètes, il existe des cas de résonance approchée, ou de *quasi-commensurabilité*, associée à une *grande inégalité* ou *inégalité à longue période*. Ainsi, entre Jupiter et Saturne, l'inégalité  $(2L_J - 5L_S)$  est considérée généralement comme étant "la grande inégalité" du système solaire : Les moyens mouvements moyens  $N_J$  et  $N_S$  de Jupiter et de Saturne donnés dans la partie 3 dans le **Tableau 3**, donnent en effet  $2N_J - 5N_S = -4'',019$  par jour, correspondant à une période de 883 ans. Bien que cette inégalité soit de caractéristique 3 (donc de degré 3 au moins en excentricités et inclinaisons), son amplitude est considérable, surtout dans la longitude moyenne de Jupiter et de Saturne où ce petit diviseur est élevé au carré par

la double intégration, amplifiant ses effets pour donner un terme de  $1060''$  d'amplitude dans la solution  $L_{1J}$  de Jupiter, et de  $2610''$  dans celle  $L_{1S}$  de Saturne (autrement dit, à cause de cette inégalité, les longitudes moyennes de ces planètes s'écartent d'un mouvement uniforme respectivement de  $\pm 1060''$  ou de  $\pm 2610''$  avec une période de 883 ans); cette "inégalité" dans le mouvement en longitude de Jupiter et de Saturne est suffisamment grande pour avoir été détectée depuis fort longtemps, et c'est Euler au 18<sup>ième</sup> siècle qui expliqua le premier son existence par la quasi-commensurabilité 2 : 5 de leurs moyens mouvements.

De même, entre Uranus et Neptune, on trouve que l'inégalité ( $L_U - 2L_N$ ) a une période de 4240 ans; sa caractéristique étant seulement égale à 1, il lui correspond des termes de grande amplitude dans les longitudes moyennes de ces planètes (respectivement  $2950''$  et  $2000''$ ). Enfin entre Vénus et la Terre, l'inégalité ( $8L_V - 13L_T$ ) a une période de 239 ans, mais, étant de caractéristique 5, son amplitude dans les longitudes de ces planètes est faible, ne dépassant pas quelques secondes.

Dans les solutions d'ordre 1 des planètes, les autres inégalités périodiques, à courte période, ont pour la plupart des amplitudes petites et celles-ci vont en décroissant lorsque la caractéristique des inégalités augmente; parmi ces inégalités, les plus importantes sont évidemment celles de caractéristique 0, du type  $p(L_{0k} - L_{0i})$ , car elles sont de degré 0 en excentricité et inclinaison : Ce sont les *inégalités synodiques* et leurs multiples; leurs amplitudes vont en décroissant lorsque  $p$  augmente car elles sont essentiellement proportionnelles à  $(\alpha_{ki})^{|p|}$  où  $\alpha_{ki}$  est le rapport du plus petit au plus grand des demi-grands axes (cf. (6.101)). En pratique, les séries de termes qui représentent les perturbations des éléments d'orbite des planètes, sont tronquées de façon à ne retenir que les termes dont l'amplitude dépasse une certaine valeur, par exemple  $0'',01$ . Pour donner une idée de la façon dont se présente une solution d'ordre 1, voici par exemple la partie périodique  $\epsilon L_{1S}$  de la longitude moyenne de Saturne perturbé par Jupiter; on ne donne ici que les 5 plus gros termes, exprimés en variables réelles sous forme

de sinus et cosinus des 5 inégalités périodiques correspondantes :

$$\begin{aligned}
 \epsilon L_{1S} = & 408'',32 \cos(2L_J - 5L_S) + 2578'',82 \sin(2L_J - 5L_S) \\
 & - 2'',02 \cos(L_J - L_S) + 536'',58 \sin(L_J - L_S) \\
 & + 48'',74 \cos(L_J - 2L_S) - 304'',88 \sin(L_J - 2L_S) \\
 & - 0'',87 \cos(2L_J - 2L_S) + 146'',56 \sin(2L_J - 2L_S) \\
 & + 53'',46 \cos(2L_J - 3L_S) - 37'',38 \sin(2L_J - 3L_S)
 \end{aligned} \tag{6.140}$$

En plus de ces 5 termes, on dénombre encore dans  $\epsilon L_{1S}$  une trentaine de termes périodiques d'amplitude supérieure à 1'', et plus d'une centaine ayant une amplitude supérieure à 0'',01 ; tous proviennent des seules perturbations par Jupiter ; les autres planètes perturbent aussi Saturne, donnant d'autres séries de termes, mais plus courtes. Notons que les longitudes  $L_J$  et  $L_S$  représentent ici respectivement les quantités  $N_J(t - t_0) + L_{0J}$  et  $N_S(t - t_0) + L_{0S}$ , où  $N_J$  et  $N_S$  sont les moyens mouvements moyens de Jupiter et de Saturne et où  $L_{0J}$  et  $L_{0S}$  sont leurs longitudes moyennes pour l'époque  $t_0 = J2000$  ; leurs valeurs sont données dans le **Tableau 3**.

### 26.1.3. Solution d'ordre 2 et d'ordres supérieurs

Pour obtenir la solution d'*ordre 2 des masses*, la solution d'ordre 1 obtenue en (6.136) à (6.139) est maintenant reportée dans les termes d'ordre 2 du développement de Taylor des équations. On a vu que les solutions  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{L}_1$  n'apportent que des termes périodiques, tandis que  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{Z}_1$  contiennent, en plus, des fonctions linéaires de  $t$ . Alors, si par exemple on écrit  $\mathcal{X}_1$  sous la forme  $\mathcal{X}_1^{(0)} + \mathcal{X}_1^{(1)} t + \sum_{\mathbf{p}'} \mathcal{X}_{1,\mathbf{p}'} \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p}' \cdot \mathcal{L}_0)$ , le terme ayant  $\mathcal{X}_1$  en facteur dans le développement de Taylor explicité en (6.130b), est transformé en :

$$\sum_{\mathbf{p}'} \left( \frac{\partial \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(u)}}{\partial \mathcal{X}} \right)_0 (\mathcal{X}_1^{(0)} + \mathcal{X}_1^{(1)} t) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) + \sum_{\mathbf{p}'} \left( \frac{\partial \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(u)}}{\partial \mathcal{X}} \right)_0 \mathcal{X}_{1,\mathbf{p}'} \exp \sqrt{-1}((\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathcal{L}_0) \tag{6.141}$$

Si  $(\mathbf{p} + \mathbf{p}') = (0)$ , le terme correspondant est un nouveau terme séculaire, d'ordre 2, sinon c'est un nouveau terme périodique, d'ordre 2 également. Dans la première somme de (6.141), il apparaît aussi une nouvelle sorte de termes, en  $t \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0)$ , qui sont appelés *termes mixtes*. Notons qu'à l'ordre 1 les inégalités  $(\mathbf{p})$  dépendent des longitudes moyennes de 2 planètes au plus, tandis que les inégalités  $(\mathbf{p} + \mathbf{p}')$  qu'on construit à l'ordre 2 peuvent combiner jusqu'à 3 longitudes moyennes ; en effet, d'après (6.131), chaque terme d'ordre 2 provient de la dérivation d'une fonction d'ordre 1 par rapport à une variable, le résultat étant ensuite multiplié par la solution d'ordre 1 relative à cette variable ; or, la fonction dérivée ne dépend que des variables relatives à 2 planètes seulement, et la solution relative à l'une de ces variables dépend au moins des variables relatives à l'une de ces deux planètes, et éventuellement des variables relatives à une troisième.

Ainsi, après avoir effectué tous ces produits dans le développement de Taylor des seconds membres des équations, on trouve que les équations d'ordre 2 ont la forme suivante, mettant en évidence des parties séculaires,

périodiques et mixtes :

$$\frac{d\mathcal{A}_2}{dt} = \sqrt{-1} \mathbf{N}'_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \left( \mathcal{P}_{2,\mathbf{p}}^{(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) + \sqrt{-1} \mathcal{P}'_{2,\mathbf{p}}^{(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) t \right) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) \quad (6.142)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{X}_2}{dt} &= \sqrt{-1} \mathbf{N}'_0 \left( \mathcal{S}_2^{(\mathcal{X})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) + \sqrt{-1} \mathcal{S}'_2^{(\mathcal{X})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) t \right) + \\ &+ \sqrt{-1} \mathbf{N}'_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \left( \mathcal{P}_{2,\mathbf{p}}^{(\mathcal{X})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) + \sqrt{-1} \mathcal{P}'_{2,\mathbf{p}}^{(\mathcal{X})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) t \right) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) \end{aligned} \quad (6.143)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{Z}_2}{dt} &= \sqrt{-1} \mathbf{N}'_0 \left( \mathcal{S}_2^{(\mathcal{Z})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) + \sqrt{-1} \mathcal{S}'_2^{(\mathcal{Z})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) t \right) + \\ &+ \sqrt{-1} \mathbf{N}'_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \left( \mathcal{P}_{2,\mathbf{p}}^{(\mathcal{Z})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) + \sqrt{-1} \mathcal{P}'_{2,\mathbf{p}}^{(\mathcal{Z})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) t \right) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) \end{aligned} \quad (6.144)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_2}{dt} &= -\frac{3}{2} \mathbf{N}_0 \mathcal{A}_2 + \mathbf{N}'_0 \left( \mathcal{S}_2^{(\mathcal{L})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) + \sqrt{-1} \mathcal{S}'_2^{(\mathcal{L})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) t \right) + \\ &+ \mathbf{N}'_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \left( \mathcal{P}_{2,\mathbf{p}}^{(\mathcal{L})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) + \sqrt{-1} \mathcal{P}'_{2,\mathbf{p}}^{(\mathcal{L})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) t \right) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) \end{aligned} \quad (6.145)$$

Notons que l'équation (6.142), qui donne les variations d'ordre 2 des demi-grand axes, ne contient pas de terme séculaire ; le même résultat était évident à l'ordre 1 ; à l'ordre 2, c'est un résultat qui pourrait se démontrer et qui est appelé *théorème de Poisson*. Ce théorème est important pour justifier une certaine stabilité du système solaire, puisqu'il établit que jusqu'à l'ordre 2 des masses, les demi-grands axes osculateurs ne font qu'osciller autour d'une valeur moyenne. Cependant cette invariance moyenne des demi-grands axes n'est plus vraie aux ordres supérieurs, mais comme leurs variations séculaires sont d'ordre 3 au moins, elles sont aussi excessivement lentes, ne devenant sensibles qu'au bout de nombreux millénaires.



Pour obtenir la solution d'ordre 2, il suffit d'intégrer terme à terme les équations précédentes. Les parties linéaires en  $t$  donnent des polynômes de degré 2 en  $t$ , les termes périodiques restent périodiques et les termes mixtes s'intègrent par parties pour donner un terme périodique et un autre mixte :

$$\int t \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) dt = \left( -\frac{\sqrt{-1} t}{(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)} + \frac{1}{(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)^2} \right) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) \quad (6.146)$$

Ainsi, la solution  $\mathcal{A}_2$  ne comporte que des termes périodiques et mixtes, qui peuvent être éventuellement à longue période :

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2^{(0)} + \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \left[ \frac{\mathbf{N}'_0}{(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)} \mathcal{P}_{2,\mathbf{p}}^{(\mathcal{A})} + \left( \frac{-\sqrt{-1} \mathbf{N}'_0}{(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)} t + \frac{\mathbf{N}'_0}{(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)^2} \right) \mathcal{P}'_{2,\mathbf{p}}^{(\mathcal{A})} \right] \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}_0) \quad (6.147)$$

Cette solution doit ensuite être intégrée une deuxième fois dans l'équation (6.145). La constante d'intégration  $\mathcal{A}_2^{(0)}$  est alors déterminée pour que  $d\mathcal{L}_2/dt$  ne contienne pas de terme constant d'ordre 2 :

$$-\frac{3}{2} \mathbf{N}_0 \mathcal{A}_2^{(0)} + \mathbf{N}'_0 \mathcal{S}'_2(\mathcal{L}) (\mathcal{A}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Z}_0) = 0$$

Cela évite à  $\mathcal{L}_2$  de dépendre d'un terme proportionnel à  $t$ , puisqu'on a déjà fixé les moyens mouvements moyens. Il reste cependant dans  $d\mathcal{L}_2/dt$  un terme linéaire en  $t$  qui, par intégration, donnera inévitablement un terme en  $t^2$  dans la longitude moyenne. Notons que cette deuxième intégration de l'expression (6.147) fait intervenir, pour les termes périodiques, des diviseurs  $(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)$  élevés à la puissance 3. Quant aux solutions  $\mathcal{X}_2$  et  $\mathcal{Z}_2$ , elles comportent aussi des polynômes de degré 2 en  $t$ , auxquels s'ajoutent des termes périodiques et mixtes d'expressions analogues à celle donnée en (6.147).

On pourrait montrer qu'à partir des solutions d'ordre 1 et 2 ainsi obtenues, on peut construire les équations d'ordre 3 puis les intégrer de la même manière et construire ainsi de proche en proche une solution d'ordre de

plus en plus élevé. D'une façon générale, on trouverait que les parties séculaires de la solution d'ordre  $k$  sont des polynômes du temps de degré  $k$ , et que les parties mixtes résultent du produit de termes périodiques par des polynômes du temps de degré  $k - 1$ . Les inégalités périodiques d'ordre  $k$  sont alors des combinaisons linéaires entre  $k + 1$  longitudes moyennes. Ces combinaisons peuvent engendrer de nouveaux petits diviseurs auxquels correspondent de nouveaux termes à longue période qui peuvent parfois être aussi importants que ceux trouvés à l'ordre 1. Par exemple, on trouve à l'ordre 2 que l'inégalité  $(4L_T - 8L_M + 3L_J)$  entre les longitudes de la Terre, de Mars et de Jupiter a une période de 1760 ans ; elle engendre un terme de  $52'',8$  d'amplitude dans la longitude de Mars et de  $6'',3$  dans celle de la Terre (soit quatre fois l'amplitude de l'inégalité  $(8L_V - 13L_T)$  déjà trouvée à l'ordre 1). D'ailleurs les termes mixtes qui sont significatifs dans la solution finale (c'est-à-dire donnant une contribution non négligeables au bout de 1000 ans par exemple), sont pour la plupart relatifs aux inégalités à longue période, tels la grande inégalité entre Jupiter et Saturne. Par exemple, voici l'expression qu'on obtient à l'ordre 2 pour la grande inégalité dans la longitude moyenne de Saturne :

$$\begin{aligned} \epsilon^2 L_{2S} = & (-51'',50 + 0'',8221 t) \cos(2L_J - 5L_S) \\ & + (240'',72 - 0'',1781 t) \sin(2L_J - 5L_S) \end{aligned} \quad (6.148)$$

Dans la solution finale, la partie périodique de ces termes vient s'ajouter à ceux d'ordre 1 donnés en (6.140) ; d'ailleurs, les solutions d'ordre supérieur à 2 apportent encore d'autres termes analogues à ceux donnés en (6.148), et on constate que généralement l'expression des termes mixtes associés aux termes à longue période converge assez lentement au fur et à mesure que l'ordre de la solution augmente ; par exemple, dans la longitude de Saturne, la grande inégalité est donnée jusqu'à l'ordre 5 par l'expression :

$$\begin{aligned} & (346'',16 + 1127'',85 T - 89'',81 T^2 - 28'',38 T^3 + 2'',24 T^4) \cos(2L_J - 5L_S) \\ & + (2896'',37 - 286'',62 T - 222'',58 T^2 + 17'',00 T^3 + 2'',58 T^4) \sin(2L_J - 5L_S) \end{aligned} \quad (6.149)$$

On pourra juger la convergence en comparant cette expression avec celle donnée aux ordres 1 et 2 [dans (6.149),  $T$  est exprimé en milliers d'années juliennes à partir de J2000].

Dans la solution, la valeur moyenne des termes périodiques est nulle, mais celle des termes mixtes ne l'est pas vraiment ; les termes restant, qui sont les parties polynomiales de la solution, représentent cependant ce qu'on appelle les *éléments moyens* des orbites. Voici, à titre d'exemple, les éléments moyens qu'on trouve pour les variables  $z$  et  $\zeta$  relatives à Jupiter et à Saturne et mises sous la forme  $z_J = k_J + \sqrt{-1} h_J$ ,  $\zeta_J = q_J + \sqrt{-1} p_J$ ,  $z_S = k_S + \sqrt{-1} h_S$  et  $\zeta_S = q_S + \sqrt{-1} p_S$  :

$$\begin{aligned}
 k_J &= +0,046\,985\,721\,24 + 0,001\,120\,103\,77\,T - 0,000\,109\,301\,26\,T^2 - 0,000\,004\,287\,48\,T^3 \\
 h_J &= +0,012\,003\,857\,48 + 0,002\,171\,493\,60\,T + 0,000\,098\,595\,39\,T^2 - 0,000\,005\,131\,09\,T^3 \\
 q_J &= -0,002\,065\,610\,98 - 0,000\,313\,401\,56\,T - 0,000\,016\,673\,92\,T^2 + 0,000\,000\,769\,26\,T^3 \\
 p_J &= +0,011\,183\,771\,57 - 0,000\,234\,275\,62\,T + 0,000\,020\,867\,60\,T^2 + 0,000\,000\,507\,21\,T^3 \\
 k_S &= -0,002\,960\,035\,95 - 0,005\,296\,026\,26\,T + 0,000\,309\,284\,05\,T^2 + 0,000\,012\,962\,15\,T^3 \\
 h_S &= +0,055\,429\,642\,54 - 0,003\,755\,938\,87\,T - 0,000\,319\,902\,36\,T^2 + 0,000\,015\,986\,33\,T^3 \\
 q_S &= -0,008\,717\,474\,36 + 0,000\,801\,714\,99\,T + 0,000\,041\,422\,82\,T^2 - 0,000\,001\,960\,49\,T^3 \\
 p_S &= +0,019\,891\,473\,01 + 0,000\,594\,397\,66\,T - 0,000\,052\,351\,17\,T^2 - 0,000\,001\,272\,19\,T^3
 \end{aligned}
 \tag{6.150}$$

Ces éléments moyens sont rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe pour la date J2000, et  $T$  y est compté en milliers d'années juliennes à partir de cette date. Ces expressions sont tirées des Variations Séculaires des Orbites Planétaires (VSOP82) obtenues au Bureau des Longitudes par P. Bretagnon en 1982 ; la petitesse des coefficients de ces polynômes montre bien la lenteur de ces variations.

Bien que les termes séculaires et mixtes limitent la durée de validité d'une théorie à variations séculaires, la petitesse des coefficients dans ces termes permet d'utiliser cette forme de solution sur des durées de plusieurs millénaires : La précision de la représentation des mouvements se dégrade lorsqu'on s'éloigne de l'époque  $t_0$ , mais reste acceptable si l'on pousse la théorie assez loin en ordre de masse. Par exemple, Le Verrier à la fin du siècle dernier, a calculé l'ensemble des termes d'ordre 1 supérieurs à  $0'',01$ , et les plus gros termes de l'ordre 2

(essentiellement à longues périodes). Le nombre de termes ainsi manipulés (“à la main”) atteint plusieurs dizaines de milliers ; on considère que la solution qu’il a construite est bien représentative du mouvement réel des planètes sur plusieurs siècles, mais se dégrade rapidement au delà. Plus récemment, son œuvre a été reprise au Bureau des Longitudes à Paris par P. Bretagnon et J.L. Simon, et grâce à des ordinateurs programmés pour manipuler des développements en séries de Fourier à plusieurs arguments, ils ont pu construire une théorie analogue à celle de Le Verrier mais poussée à l’ordre 6 des masses pour les 4 principales planètes, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Cette solution comporte tous les termes supérieurs à  $0'',0001$  et des termes séculaires jusqu’en  $t^6$ . La précision est meilleure que  $0'',1$  sur 1000 ans et décrit les mouvements actuels à  $0'',05$  près. Depuis 1984, c’est cette théorie qui sert au calcul des éphémérides des planètes publiées par le Bureau des Longitudes dans la Connaissance des Temps.

## 26.2. Théorie générale du mouvement des planètes

Ce n’est pas une théorie à variations séculaires comme celle de Le Verrier qui peut décrire l’évolution à très long terme du système solaire, puisque les polynômes en  $t$  présents dans les termes séculaires et mixtes font diverger les séries. En fait, c’est la méthode d’intégration utilisée qui produit ces termes séculaires et mixtes, simplement parce qu’on a cherché une solution développée dans le voisinage d’un instant  $t_0$ . On peut étendre considérablement la durée de validité de la solution en adoptant, à partir des mêmes équations (6.114) à (6.117), une méthode qui aboutit à une solution générale ne comportant plus ni termes séculaires ni termes mixtes, mais uniquement des termes périodiques. Cette solution va comporter, à la place des termes séculaires, des termes bornés, quasi-périodiques de  $t$  et ayant des périodes très longues, supérieures à 50 000 ans. En fait, on va voir que les polynômes en  $t$  qui apparaissent dans les termes séculaires des théories à variations séculaires, sont les développements limités, au voisinage de  $t = t_0$ , de ces termes quasi-périodiques à très longues périodes.

Tout d’abord, on suppose que les mouvements du système planétaire restent voisins de mouvements circu-

Pb<sub>16</sub>Pb<sub>17</sub>

Pla

lares uniformes et coplanaires donnés. Plus précisément, les longitudes moyennes  $L_k$  sont mises sous la forme :

$$L_k = n_{0k} t + q_k \tag{6.151}$$

où les  $n_{0k}$  sont les mêmes moyens mouvements moyens, supposés connus, qu'on a déjà introduits en (6.122) dans la méthode de Le Verrier ; les rayons  $a_{0k}$  des orbites circulaires de référence sont donc encore définis à partir des  $n_{0k}$  par la troisième loi de Kepler (6.106), de sorte que les relations (6.107) à (6.110) entre les variables  $\nu_k$  et  $\eta_k$  sont toujours valables, ainsi que les équations (6.114) à (6.117).

La relation (6.151) introduit des quantités  $q_k$ , qui sont des nouvelles variables remplaçant les  $L_k$  ; on va montrer qu'il est possible de les déterminer sans introduire de nouveau terme proportionnel à  $t$  dans  $L_k$ , et de façon à ce que  $q_k$  reste borné dans le voisinage d'une constante d'intégration  $q_k^{(0)}$ . On regroupe les variables  $q_k$  dans une matrice colonne  $\mathcal{Q}$ , ce qui permet d'écrire :

$$\mathcal{L} = \mathcal{N}_0 t + \mathcal{Q} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \mathcal{N}_0 + \frac{d\mathcal{Q}}{dt} \tag{6.152}$$

On remplace donc  $\mathcal{L}$  par cette expression dans les équations (6.114) à (6.116), tandis que l'équation (6.117) est remplacée par la suivante, relative à  $\mathcal{Q}$  :

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = \mathbf{N}_0 \mathcal{V} + \mathbf{N} \left[ \epsilon \mathcal{S}_1^{(\mathcal{L})}(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}) + \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{L})}(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0 t + \mathbf{p} \cdot \mathcal{Q}) \right] \tag{6.153}$$

On a tenu compte ici, comme en (6.113), de  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 + \mathbf{N}_0 \mathcal{V}$ .

### 26.2.1. Méthode d'intégration : séparation des termes périodiques

On cherche une solution à ces équations, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \widehat{\mathcal{A}} + \widetilde{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}(t) + \epsilon \widetilde{\mathcal{A}}_1(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{Q}}, t) + \epsilon^2 \widetilde{\mathcal{A}}_2(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{Q}}, t) + \dots \\
 \mathcal{V} &= \widehat{\mathcal{V}} + \widetilde{\mathcal{V}} = \widehat{\mathcal{V}}(t) + \epsilon \widetilde{\mathcal{V}}_1(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{Q}}, t) + \epsilon^2 \widetilde{\mathcal{V}}_2(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{Q}}, t) + \dots \\
 \mathcal{X} &= \widehat{\mathcal{X}} + \widetilde{\mathcal{X}} = \widehat{\mathcal{X}}(t) + \epsilon \widetilde{\mathcal{X}}_1(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{Q}}, t) + \epsilon^2 \widetilde{\mathcal{X}}_2(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{Q}}, t) + \dots \\
 \mathcal{Z} &= \widehat{\mathcal{Z}} + \widetilde{\mathcal{Z}} = \widehat{\mathcal{Z}}(t) + \epsilon \widetilde{\mathcal{Z}}_1(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{Q}}, t) + \epsilon^2 \widetilde{\mathcal{Z}}_2(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{Q}}, t) + \dots \\
 \mathcal{Q} &= \widehat{\mathcal{Q}} + \widetilde{\mathcal{Q}} = \widehat{\mathcal{Q}}(t) + \epsilon \widetilde{\mathcal{Q}}_1(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{Q}}, t) + \epsilon^2 \widetilde{\mathcal{Q}}_2(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{Q}}, t) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{6.154}$$

où  $\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}$  et  $\widehat{\mathcal{Q}}$  sont des fonctions inconnues de  $t$ , d'ordre 0 en  $\epsilon$  car dépendant des constantes d'intégration arbitraires du problème ; on va montrer que l'on peut déterminer ces fonctions de façon à ce que  $\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{Z}}$  et  $\widetilde{\mathcal{Q}}$  soient des séries de termes quasi-périodiques de  $t$ , à courtes périodes, et dont les amplitudes soient des fonctions explicites de  $(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{Q}})$  ; ces termes seront d'ordre 1 au moins en  $\epsilon$ . Si  $\mathcal{U} = \widehat{\mathcal{U}} + \widetilde{\mathcal{U}}$  désigne globalement l'ensemble des variables  $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{Q})$ , les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\widehat{\mathcal{A}}}{dt} + \epsilon \left( \frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_1}{\partial \widehat{\mathcal{U}}} \cdot \frac{d\widehat{\mathcal{U}}}{dt} + \frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_1}{\partial t} \right) + \dots = \\
 \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(A)}(\widehat{\mathcal{U}} + \epsilon \widetilde{\mathcal{U}}_1 + \dots) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0) t
 \end{aligned}
 \tag{6.155}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{\mathcal{X}}}{dt} + \epsilon \left( \frac{\partial \widetilde{\mathcal{X}}_1}{\partial \widehat{\mathcal{U}}} \cdot \frac{d\widehat{\mathcal{U}}}{dt} + \frac{\partial \widetilde{\mathcal{X}}_1}{\partial t} \right) + \dots = \\ \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \epsilon \mathcal{S}_1^{(\mathcal{X})} (\widehat{\mathcal{U}} + \epsilon \widetilde{\mathcal{U}}_1 + \dots) + \\ + \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{X})} (\widehat{\mathcal{U}} + \epsilon \widetilde{\mathcal{U}}_1 + \dots) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0) t \end{aligned} \quad (6.156)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{\mathcal{Z}}}{dt} + \epsilon \left( \frac{\partial \widetilde{\mathcal{Z}}_1}{\partial \widehat{\mathcal{U}}} \cdot \frac{d\widehat{\mathcal{U}}}{dt} + \frac{\partial \widetilde{\mathcal{Z}}_1}{\partial t} \right) + \dots = \\ \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \epsilon \mathcal{S}_1^{(\mathcal{Z})} (\widehat{\mathcal{U}} + \epsilon \widetilde{\mathcal{U}}_1 + \dots) + \\ + \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{Z})} (\widehat{\mathcal{U}} + \epsilon \widetilde{\mathcal{U}}_1 + \dots) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0) t \end{aligned} \quad (6.157)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{\mathcal{Q}}}{dt} + \epsilon \left( \frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial \widehat{\mathcal{U}}} \cdot \frac{d\widehat{\mathcal{U}}}{dt} + \frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial t} \right) + \dots = \\ \mathbf{N}_0 \widehat{\mathcal{V}} + \mathbf{N}_0 \epsilon \mathcal{S}_1^{(\mathcal{L})} (\widehat{\mathcal{U}} + \epsilon \widetilde{\mathcal{U}}_1 + \dots) + \\ + \mathbf{N}_0 \left[ \epsilon \widetilde{\mathcal{V}}_1 + \dots + \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{L})} (\widehat{\mathcal{U}} + \epsilon \widetilde{\mathcal{U}}_1 + \dots) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0) t \right] \end{aligned} \quad (6.158)$$

où les quantités telles que  $\frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_1}{\partial \widehat{\mathcal{U}}} \cdot \frac{d\widehat{\mathcal{U}}}{dt}$  représentent  $\frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_1}{\partial \widehat{\mathcal{A}}} \cdot \frac{d\widehat{\mathcal{A}}}{dt} + \frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_1}{\partial \widehat{\mathcal{X}}} \cdot \frac{d\widehat{\mathcal{X}}}{dt} + \frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_1}{\partial \widehat{\mathcal{Z}}} \cdot \frac{d\widehat{\mathcal{Z}}}{dt} + \frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_1}{\partial \widehat{\mathcal{Q}}} \cdot \frac{d\widehat{\mathcal{Q}}}{dt}$ , c'est-à-dire  $\sum_k \left( \frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_1}{\partial \widehat{\eta}_k} \frac{d\widehat{\eta}_k}{dt} + \frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_1}{\partial \widehat{z}_k} \frac{d\widehat{z}_k}{dt} + \frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_1}{\partial \widehat{\zeta}_k} \frac{d\widehat{\zeta}_k}{dt} + \frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_1}{\partial \widehat{q}_k} \frac{d\widehat{q}_k}{dt} \right)$

Dans les seconds membres de ces équations, on développe en série de Taylor les fonctions de  $\mathcal{U}$  au voisinage

de  $\widehat{U}$  ; on écrit par exemple :

$$\begin{aligned}
 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}(\widehat{U} + \epsilon \widetilde{U}_1 + \dots) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)t &= \\
 &= \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \left[ \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}(\widehat{U}) + \left( \epsilon \frac{\partial \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}}{\partial \widehat{U}} \cdot \epsilon \widetilde{U}_1 \right) + \dots \right] \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)t \\
 &= \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}(\widehat{U}) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)t + \\
 &\quad + \epsilon^2 \mathcal{S}_2(\widehat{U}) + \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon^2 \mathcal{P}_{2,\mathbf{p}}(\widehat{U}) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)t + \dots
 \end{aligned}
 \tag{6.159}$$

où  $\epsilon^2 \mathcal{S}_2(\widehat{U})$  représente notamment l'ensemble des termes d'ordre 2 qui ne dépendent pas explicitement de  $t$ . On peut alors séparer le système d'équations en 2 sous-systèmes : Le premier est relatif aux variables  $\widehat{U}$  et rassemble par définition tous les *termes séculaires* des équations, c'est-à-dire ceux qui ne dépendent pas explicitement de  $t$  ; l'autre concerne les variables  $\widetilde{U}$  et s'identifie à l'ensemble des autres termes, qui sont eux fonctions explicites



de  $t$  et même quasi-périodiques de  $t$ . On obtient ainsi, jusqu'à l'ordre 2 en  $\epsilon$  :

$$\frac{d\widehat{\mathcal{U}}}{dt} = \begin{cases} \frac{d\widehat{\mathcal{A}}}{dt} = 0 & (6.160) \\ \frac{d\widehat{\mathcal{X}}}{dt} = \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \epsilon \mathcal{S}_1^{(\mathcal{X})}(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}) + \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \epsilon^2 \mathcal{S}_2^{(\mathcal{X})}(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}) & (6.161) \\ \frac{d\widehat{\mathcal{Z}}}{dt} = \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \epsilon \mathcal{S}_1^{(\mathcal{Z})}(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}) + \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \epsilon^2 \mathcal{S}_2^{(\mathcal{Z})}(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}) & (6.162) \\ \frac{d\widehat{\mathcal{Q}}}{dt} = \mathbf{N}_0 \widehat{\mathcal{V}} + \mathbf{N}_0 \epsilon \mathcal{S}_1^{(\mathcal{L})}(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}) + \mathbf{N}_0 \epsilon^2 \mathcal{S}_2^{(\mathcal{Q})}(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Z}}) & (6.163) \end{cases}$$

Dans la dernière équation,  $\widehat{\mathcal{V}}$  doit encore être remplacé par  $-\frac{3}{2}\widehat{\mathcal{A}}$ , et cette constante (d'après (6.160)) est déterminée de façon à annuler le terme constant de l'équation (6.163). Dans ces conditions, on constate que le système  $\frac{d\widehat{\mathcal{U}}}{dt}$  est au moins d'ordre 1 en  $\epsilon$ , de sorte que les quantités telles que  $\epsilon \frac{\partial \widehat{\mathcal{A}}_1}{\partial \widehat{\mathcal{U}}} \cdot \frac{d\widehat{\mathcal{U}}}{dt}$  dans (6.155), sont au moins d'ordre 2. Les parties de  $\widetilde{\mathcal{U}}$  relatives aux ordre 1 et 2 sont alors déterminées par les systèmes d'équations

suivants :

$$\begin{aligned}
 \epsilon \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_1}{\partial t} &= \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{A})}(\hat{\mathcal{U}}) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)t \\
 \epsilon \frac{\partial \tilde{\mathcal{X}}_1}{\partial t} &= \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{X})}(\hat{\mathcal{U}}) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)t \\
 \epsilon \frac{\partial \tilde{\mathcal{Z}}_1}{\partial t} &= \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{Z})}(\hat{\mathcal{U}}) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)t \\
 \epsilon \frac{\partial \tilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial t} &= -\frac{3}{2} \mathbf{N}_0 \epsilon \tilde{\mathcal{A}}_1 + \mathbf{N}_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(\mathcal{L})}(\hat{\mathcal{U}}) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)t
 \end{aligned} \tag{6.164}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon^2 \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_2}{\partial t} &= \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon^2 \mathcal{P}_{2,\mathbf{p}}^{(\mathcal{A})}(\hat{\mathcal{U}}) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)t - \epsilon \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_1}{\partial \hat{\mathcal{U}}} \cdot \frac{d\hat{\mathcal{U}}}{dt} \\
 \epsilon^2 \frac{\partial \tilde{\mathcal{X}}_2}{\partial t} &= \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon^2 \mathcal{P}_{2,\mathbf{p}}^{(\mathcal{X})}(\hat{\mathcal{U}}) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)t - \epsilon \frac{\partial \tilde{\mathcal{X}}_1}{\partial \hat{\mathcal{U}}} \cdot \frac{d\hat{\mathcal{U}}}{dt} \\
 \epsilon^2 \frac{\partial \tilde{\mathcal{Z}}_2}{\partial t} &= \sqrt{-1} \mathbf{N}_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon^2 \mathcal{P}_{2,\mathbf{p}}^{(\mathcal{Z})}(\hat{\mathcal{U}}) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)t - \epsilon \frac{\partial \tilde{\mathcal{Z}}_1}{\partial \hat{\mathcal{U}}} \cdot \frac{d\hat{\mathcal{U}}}{dt} \\
 \epsilon^2 \frac{\partial \tilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial t} &= -\frac{3}{2} \mathbf{N}_0 \epsilon^2 \tilde{\mathcal{A}}_2 + \mathbf{N}_0 \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon^2 \mathcal{P}_{2,\mathbf{p}}^{(\mathcal{Q})}(\hat{\mathcal{U}}) \exp \sqrt{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)t - \epsilon \frac{\partial \tilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial \hat{\mathcal{U}}} \cdot \frac{d\hat{\mathcal{U}}}{dt}
 \end{aligned} \tag{6.165}$$

### 26.2.2. Solution à courtes périodes

Comme les constantes arbitraires de la solution générale seront introduites dans  $\hat{U}$ , il suffit de trouver pour  $\tilde{U}$  une solution particulière. Ainsi, on intègre les systèmes (6.164) et (6.165) terme à terme, sans constante d'intégration et sans avoir besoin de connaître la solution  $\hat{U}$  puisque ces équations définissent les dérivées partielles de la solution par rapport à  $t$ . On obtient à l'ordre 1 :

$$\epsilon \tilde{U}_1 = \begin{cases} \epsilon \tilde{A}_1 = \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \frac{N_0}{\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0} \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(A)}(\hat{U}) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0) t \\ \epsilon \tilde{X}_1 = \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \frac{N_0}{\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0} \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(X)}(\hat{U}) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0) t \\ \epsilon \tilde{Z}_1 = \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \frac{N_0}{\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0} \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(Z)}(\hat{U}) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0) t \\ \epsilon \tilde{Q}_1 = \frac{3}{2} \sqrt{-1} \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \frac{N_0^2}{(\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0)^2} \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(A)}(\hat{U}) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0) t + \\ \quad - \sqrt{-1} \sum_{(\mathbf{p}) \neq (0)} \epsilon \frac{N_0}{\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0} \mathcal{P}_{1,\mathbf{p}}^{(L)}(\hat{U}) \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0) t \end{cases} \quad (6.166)$$

Et on calculerait de la même façon la solution d'ordre 2, et éventuellement les solutions d'ordres supérieurs. Comme dans la théorie à variations séculaires, il faut cependant supposer qu'il n'y a pas de résonance orbitale ou de commensurabilité entre les moyens mouvements moyens, mais il peut y avoir des grandes inégalités ou inégalités à longue période.

### 26.2.3. Solution du système séculaire

Conformément au développement de Taylor explicité en (6.159), lorsqu'on a ainsi déterminé la solution  $\epsilon \tilde{\mathcal{U}}_1$ , on peut calculer les parties séculaires  $\epsilon^2 \mathcal{S}_2$  du système d'équations (6.160) à (6.163) ; d'ailleurs, on peut voir que d'une façon générale, la connaissance de la solution  $\epsilon^k \tilde{\mathcal{U}}_k$  d'ordre  $k$  permet de construire les parties séculaires d'ordre  $k+1$ . Notons que par construction, les seconds membres des équations (6.160) à (6.163) ne dépendent pas du temps explicitement : C'est par définition un *système autonome* d'équations différentielles ; ici, on l'appelle aussi *système séculaire*.

Pla2

Ayant donc construit le système séculaire à un ordre suffisant en  $\epsilon$ , il reste à le résoudre. Jusqu'à l'ordre 2, en raison du théorème de Poisson,  $\frac{d\hat{A}}{dt}$  est nul, et donc  $\hat{A}$  est constant ; on a vu que sa valeur est déterminée pour que l'équation  $\frac{d\hat{Q}}{dt}$  ne possède plus de terme constant, afin que la valeur moyenne de  $\frac{d\mathcal{L}}{dt}$  soit égale à  $\mathcal{N}_0$ . Par ailleurs, la variable  $\hat{Q}$  n'apparaît pas dans les seconds membres du système séculaire car ces variables sont nécessairement associées aux inégalités périodiques :

$$\exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{L}) = \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \hat{Q} + \mathbf{p} \cdot \tilde{Q}) \times \exp \sqrt{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{N}_0) t$$

Les variables qui composent  $\hat{Q}$  sont donc présentes uniquement dans les termes qui dépendent explicitement du temps (si toutefois il n'y a aucune résonance entre les moyens mouvements moyens). Dans ces conditions, l'équation (6.163) pourra être résolue par simple quadrature dès que seront connues les solutions relatives à  $\hat{\mathcal{X}}$  et  $\hat{\mathcal{Z}}$ .

Pour trouver  $\hat{\mathcal{X}}$  et  $\hat{\mathcal{Z}}$  (Eqs (6.161) et (6.162)), il faut se souvenir que d'après la propriété de d'Alembert (cf. remarque 1 dans §26), les termes séculaires d'ordre 1 en  $\epsilon$  dans les équations  $\frac{dz_k}{dt}$  sont de degré 1 au moins par rapport à l'ensemble des  $n$  variables d'excentricité  $z_j$ , tandis que ceux des équations  $\frac{d\zeta_k}{dt}$  sont de degré 1 au moins

par rapport aux  $n$  variables d'inclinaisons  $\zeta_j$  ; dans tous les cas, le degré global de ces termes est impair, croissant de 2 en 2 à partir du degré 1. Cette propriété est conservée pour les termes séculaires d'ordres supérieurs. En séparant les termes degré par degré, on peut écrire ces équations sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathcal{X}}}{dt} &= \sqrt{-1}(\mathbf{S}_1 \hat{\mathcal{X}} + S_3(\hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{Z}}) + \dots) \\ \frac{d\hat{\mathcal{Z}}}{dt} &= \sqrt{-1}(\mathbf{S}'_1 \hat{\mathcal{Z}} + S'_3(\hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{Z}}) + \dots)\end{aligned}\quad (6.167)$$

où  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}'_1$  sont deux matrices carrées constantes et d'ordre 1 au moins en  $\epsilon$ . Si on linéarise ce système autonome, il se sépare en deux sous-systèmes :

$$\frac{d\hat{\mathcal{X}}}{dt} = \sqrt{-1}\mathbf{S}_1 \hat{\mathcal{X}} \quad \text{et} \quad \frac{d\hat{\mathcal{Z}}}{dt} = \sqrt{-1}\mathbf{S}'_1 \hat{\mathcal{Z}} \quad (6.168)$$

On pourrait montrer que  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}'_1$  sont diagonalisables : En introduisant les matrices de passage  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}'$  formées de leurs vecteurs propres respectifs, et en notant  $\mathbf{\Lambda}$  et  $\mathbf{\Lambda}'$  les matrices diagonales formées de leurs valeurs propres, on a :

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}_1\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}'^{-1}\mathbf{S}'_1\mathbf{P}' = \mathbf{\Lambda}' \quad (6.169)$$

Alors, en effectuant les changements de variables  $\hat{\mathcal{X}} \mapsto X$  et  $\hat{\mathcal{Z}} \mapsto Z$  définis par :

$$\hat{\mathcal{X}} = \mathbf{P}X \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{Z}} = \mathbf{P}'Z \quad (6.170)$$

on obtient les nouvelles équations linéaires :

$$\frac{dX}{dt} = \sqrt{-1}\mathbf{\Lambda}X \quad \text{et} \quad \frac{dZ}{dt} = \sqrt{-1}\mathbf{\Lambda}'Z \quad (6.171)$$

Pla2.3

Ces équations représentent  $2n$  équations scalaires de la forme :  $\frac{dx_k}{dt} = \sqrt{-1} \lambda_k x_k$ , où les  $\lambda_k$  sont les valeurs propres des matrices. Leur solution est immédiate, et s'exprime en fonction de constantes d'intégration arbitraires  $X_0$  et  $Z_0$  :

$$X = (\exp \sqrt{-1} \Lambda t) X_0 \quad \text{et} \quad Z = (\exp \sqrt{-1} \Lambda' t) Z_0 \quad (6.172)$$

où  $(\exp \sqrt{-1} \Lambda t)$  représente la matrice carrée diagonale dont les éléments sont  $\exp \sqrt{-1} \lambda_k t$ ; même chose pour la matrice  $\exp \sqrt{-1} \Lambda' t$ . On évalue les constantes  $X_0$  et  $Z_0$  en fonction des valeurs  $\hat{\mathcal{X}}_0$  et  $\hat{\mathcal{Z}}_0$  que prennent les variables  $\hat{\mathcal{X}}$  et  $\hat{\mathcal{Z}}$  à un instant initial défini par  $t = 0$  :

$$X_0 = \mathbf{P}^{-1} \hat{\mathcal{X}}_0 \quad \text{et} \quad Z_0 = \mathbf{P}'^{-1} \hat{\mathcal{Z}}_0$$

Finalement, la solution du système autonome linéarisé s'écrit matriciellement :

$$\hat{\mathcal{X}} = \mathbf{P} (\exp \sqrt{-1} \Lambda t) \mathbf{P}^{-1} \hat{\mathcal{X}}_0 \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{Z}} = \mathbf{P}' (\exp \sqrt{-1} \Lambda' t) \mathbf{P}'^{-1} \hat{\mathcal{Z}}_0$$

Les solutions  $\hat{z}_k$  et  $\hat{\zeta}_k$  qui composent ces matrices sont donc des sommes de mouvements circulaires dans le plan complexe, ou sommes vectorielles de vecteurs tournants :

$$\begin{aligned} \hat{z}_k &= \sum_{i=1}^n a_{ik} \exp \sqrt{-1} (\lambda_i t + \varphi_i) \\ \hat{\zeta}_k &= \sum_{i=1}^n b_{ik} \exp \sqrt{-1} (\lambda'_i t + \psi_i) \end{aligned} \quad (6.173)$$

Comme les matrices  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}'_1$  résultent du produit de  $\mathbf{N}_0$  par des quantités d'ordre 1 au moins en  $\epsilon$ , leurs valeurs propres représentent des vitesses angulaires très petites, de l'ordre de  $\epsilon \mathcal{N}_0$ . Pour le système des grosses planètes

du système solaire, ces vitesses angulaires,  $\lambda_k$  et  $\lambda'_k$ , correspondent à des périodes comprises entre 50 000 ans et 2 millions d'années, cf. (6.177) ; ce sont les *fréquences fondamentales* du système séculaire. Les amplitudes  $a_{ik}$  et  $b_{ik}$  de ces *mouvements périodiques à très longues périodes* peuvent être importantes. Par exemple, le module de la variable  $\hat{z}_T$  relative à la Terre (représentant en quelque sorte l'excentricité moyenne de l'orbite de la Terre), oscille entre 0 et 0,07 avec 4 périodes prépondérantes comprises entre 70 000 et 350 000 ans ; il est surtout important de remarquer que ces variations sont *bornées*, ce qui n'était pas le cas de la solution à variations séculaires.

Pour tenir compte des parties non linéaires des équations (6.167), on applique à ce système le changement de variables (6.170) bâti sur les vecteurs propres de la partie linéaire. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \sqrt{-1}(\mathbf{\Lambda} X + \mathbf{P}^{-1}S_3(\mathbf{P}X, \mathbf{P}'Z) + \dots) \\ \frac{dZ}{dt} &= \sqrt{-1}(\mathbf{\Lambda}' Z + \mathbf{P}'^{-1}S'_3(\mathbf{P}X, \mathbf{P}'Z) + \dots) \end{aligned} \tag{6.174}$$

Il faut noter que l'application de ce changement de variables fait augmenter considérablement le nombre de termes ; par exemple, pour les 8 grosses planètes du système solaire, le système (6.174) développé à l'ordre 2 des masses et au degré 5 en excentricités et inclinaisons, comporte plus de 150 000 termes ! (il faut bien développer jusqu'à cet ordre et à ce degré pour que le système représente convenablement les mouvements séculaires) Pour résoudre ce système de façon analytique, on utilise le fait qu'il comporte un noyau intégrable (sa partie linéaire), et les termes non linéaires sont alors considérés comme des perturbations de ce noyau.

Pour déterminer la nature de la solution, une façon simple de procéder peut consister à substituer la solution (6.172) dans les termes non linéaires du système, et amorcer ainsi un processus itératif de substitution ; on obtient alors des termes quasi-périodiques à très longues périodes dont les fréquences sont des combinaisons entières des valeurs propres  $\lambda_k$  et  $\lambda'_k$ . Par exemple, les termes séculaires de degré 3 en excentricités que l'on trouve dans les équations  $\frac{dX}{dt}$ , sont de la forme  $\sum_{i,j,k} C_{ijk} x_i x_j \bar{x}_k$  ; si on décompose la solution (6.172) composante par

composante en  $x_i = x_{0i} \exp \sqrt{-1} \lambda_i t$ , ces termes sont transformés en :

$$\sum_{i,j,k} C_{ijk} x_{0i} x_{0j} \bar{x}_{0k} \exp \sqrt{-1} (\lambda_i + \lambda_j - \lambda_k) t \tag{6.175}$$

Parmi tous ces termes, ceux qui correspondent à des indices  $j$  et  $k$  égaux ont une fréquence égale à  $\lambda_i$  ; alors, dans l'équation relative à l'indice  $i$  :  $\frac{dx_i}{dt} = \sqrt{-1} \lambda_i x_i + \dots$ , ces termes peuvent aussi s'écrire :  $\sum_j C_{ijj} x_{0j} \bar{x}_{0j} x_i$ , et de fait, on les ajoute à la partie linéaire de cette équation, qui devient :  $\frac{dx_i}{dt} = \sqrt{-1} (\lambda_i + \sum_j C_{ijj} x_{0j} \bar{x}_{0j}) x_i + \dots$ , donnant pour  $x_i$  la nouvelle fréquence fondamentale  $\lambda_i + \sum_j C_{ijj} x_{0j} \bar{x}_{0j}$ . Les autres termes de degrés 3, 5 etc. donneraient de la même façon des petites modifications supplémentaires des valeurs propres du système linéaire. Quant aux autres termes, qui ne viennent pas modifier les fréquences du système linéaire, ils peuvent être intégrés terme à terme, chacun d'eux étant solution particulière d'une équation de la forme

$$\frac{dx}{dt} - \sqrt{-1} \omega x = \sqrt{-1} C \exp \sqrt{-1} (\sum_i p_i \lambda_i) t$$

dont une solution, nulle à  $t = 0$ , peut s'écrire :

$$x = \frac{C}{\sum_i p_i \lambda_i - \omega} (\exp \sqrt{-1} (\sum_i p_i \lambda_i) t - \exp \sqrt{-1} \omega t) \tag{6.176}$$

Il est intéressant d'avoir ici une solution particulière nulle à  $t = 0$ , car au moins elle ne vient pas modifier la valeur des constantes d'intégration introduites au départ dans la solution du système linéarisé.

Cependant, l'intégration de ces termes fait apparaître des diviseurs d'une nouvelle sorte, combinaisons entières des fréquences fondamentales du système séculaire. L'intégration sera possible si aucune de ces combinaisons ne s'annule ou ne soit trop petite. En réalité, il n'est pas possible d'éviter ces diviseurs trop petits ou nuls et qui correspondent à des *résonances séculaires* : C'est ici que se manifeste le fait établi par H. Poincaré



au début de ce siècle, que le problème des  $N$  corps n'est pas intégrable : Il n'y a pas moyen de trouver une solution générale qui soit valable sur une durée infinie. Néanmoins, pour le système des 4 grosses planètes du système solaire (de Jupiter à Neptune), on a pu montrer que les termes résonnants sont extrêmement petits, et qu'une solution générale construite suivant cette méthode peut rester valide pour plusieurs centaines de millions d'années. Au contraire, J. Laskar (Bureau des Longitudes) a montré en 1990 que la solution analogue pour les 4 planètes intérieures (de Mercure à Mars), n'est pas stable au delà de 5 millions d'années, à cause de la présence de résonances séculaires entre plusieurs des fréquences fondamentales (ces mêmes résonances interviennent aussi dans les solutions relatives aux grosses planètes, mais associées à des termes pratiquement négligeables). Ces derniers résultats ont été acquis, non par la construction d'une solution analytique puisqu'une telle solution n'existe pas, mais par l'intégration numérique du système (6.174), avec ses 150 000 termes ! Comme le système séculaire représente seulement les variations très lentes des éléments d'orbite, l'intégration numérique peut être faite avec un pas très grand (500 ans par exemple pour les planètes) ; partant des conditions initiales actuelles, on peut alors remonter le temps sur plusieurs dizaines de millions d'années et, par analyse de Fourier de la solution numérique ainsi trouvée, on peut déterminer les fréquences fondamentales présentes dans la solution ; on a alors trouvé l'impossibilité de représenter cette solution avec un ensemble unique de fréquences fondamentales sur toute la durée de l'intégration : pour les planètes intérieures, on trouve des variations importantes des fréquences en moins de 5 millions d'années, signe du caractère chaotique de la solution, puisque cela révèle l'impossibilité de construire une solution quasi-périodique de  $t$  unique sur une très longue durée.

Voici, à titre d'exemple, les plus gros termes de la solution à très longues périodes, relative aux variables  $\hat{z}$  et  $\hat{c}$  de Jupiter et de Saturne, rapportée à l'écliptique et à l'équinoxe pour la date J2000, et pour  $t$  mesuré à partir de

cette date :

$$\begin{aligned}
 \hat{z}_J &= 0,04413 \exp \sqrt{-1} (\lambda_5 t + \varphi_5) & \hat{z}_S &= -0,04816 \exp \sqrt{-1} (\lambda_6 t + \varphi_6) \\
 &+ 0,01574 \exp \sqrt{-1} (\lambda_6 t + \varphi_6) & &+ 0,03345 \exp \sqrt{-1} (\lambda_5 t + \varphi_5) \\
 &+ 0,00179 \exp \sqrt{-1} (\lambda_7 t + \varphi_7) & &- 0,00175 \exp \sqrt{-1} ((2\lambda_6 - \lambda_5)t + 2\varphi_6 - \varphi_5) \\
 & & &+ 0,00151 \exp \sqrt{-1} (\lambda_7 t + \varphi_7) \\
 \\
 \hat{\zeta}_J &= 0,01377 \exp \sqrt{-1} (0 t + \psi_5) & \hat{\zeta}_S &= 0,01377 \exp \sqrt{-1} (0 t + \psi_5) \\
 &+ 0,00314 \exp \sqrt{-1} (\lambda'_6 t + \psi_6) & &- 0,00784 \exp \sqrt{-1} (\lambda'_6 t + \psi_6) \\
 &+ 0,00058 \exp \sqrt{-1} (\lambda'_8 t + \psi_8) & &+ 0,00056 \exp \sqrt{-1} (\lambda'_8 t + \psi_8) \\
 &+ 0,00048 \exp \sqrt{-1} (\lambda'_7 t + \psi_7) & &+ 0,00039 \exp \sqrt{-1} (\lambda'_7 t + \psi_7) \quad (6.177)
 \end{aligned}$$

avec<sup>4</sup>

$$\begin{array}{llll}
 \lambda_5 = 4'',248 \text{ an}^{-1} & \varphi_5 = 30^\circ,643 & \lambda'_5 = 0'',000 \text{ an}^{-1} & \psi_5 = 107^\circ,576 \\
 \lambda_6 = 28'',234 & \varphi_6 = 306^\circ,496 & \lambda'_6 = -26'',330 & \psi_6 = 306^\circ,496 \\
 \lambda_7 = 3'',069 & \varphi_7 = 121^\circ,235 & \lambda'_7 = -2'',985 & \psi_7 = 141^\circ,649 \\
 \lambda_8 = 0'',667 & \varphi_8 = 72^\circ,631 & \lambda'_8 = -0'',691 & \psi_8 = 23^\circ,430
 \end{array}$$

Si on développait ces expressions en puissances de  $t$  au voisinage de  $t = 0$ , on retrouverait très sensiblement les variations séculaires de  $(k_J + \sqrt{-1} h_J)$  etc. données en (6.150). De même, les termes périodiques de la solution à courte période explicitée en (6.166) ont des amplitudes qui sont fonctions de la solution à très longues périodes exprimée en (6.173) et (6.176) ; le développement de ces amplitudes en puissances de  $t$  au voisinage de  $t = 0$  conduirait à l'expression des termes mixtes des théories à variations séculaires. Comme dans les théories à variations séculaires, ce sont les inégalités périodiques à longue période (comme la grande inégalité de Jupiter-Saturne) qui apportent les plus grosses perturbations.

<sup>4</sup>les indices 5 à 8 correspondent aux 4 grosses planètes, les indices 1 à 4 étant alors réservés aux planètes intérieures.

**Remarque 1.** Comme on le voit dans la solution (6.177), le système relatif aux variables d'inclinaisons possède une valeur propre nulle. Celle-ci s'explique par l'existence de l'intégrale première du moment cinétique dans le problème des  $N$  corps : Si les mouvements planétaires s'effectuaient rigoureusement dans un plan fixe, on devrait retrouver ce plan fixe dans les solutions  $\hat{\zeta}_k$  sous forme d'un terme constant arbitraire ; des mouvements non coplanaires sont alors décrits par des variations dans le voisinage d'un plan fixe. Le terme constant que l'on trouve, identique, dans toutes les solutions  $\hat{\zeta}_k$ , caractérise ce plan fixe qu'on appelle **plan invariable** du système des planètes.

**Remarque 2.** On pourrait penser qu'une théorie générale du mouvement des planètes, avec sa durée de validité de plusieurs millions d'années, rend caduques les théories à variations séculaires. En fait, ces dernières demeurent plus performantes (car plus faciles à construire) pour calculer les éphémérides très précises dont on a besoin pour prévoir les mouvements actuels des planètes. En effet, la mise en œuvre d'une théorie générale nécessite de calculer et de manipuler un nombre considérable de termes : On a vu qu'il y en a par exemple plus de 150 000 dans le seul système séculaire des 8 planètes, et le nombre de termes qui interviennent dans le développement analytique des inégalités périodiques dépasserait plusieurs millions si l'on voulait atteindre pour eux le même degré de précision que dans les théories à variations séculaires. Les moyens informatiques actuels ne permettent pas encore cela ; mais, avec l'intégration du système séculaire défini par la théorie générale, on possède dès maintenant beaucoup d'informations sur l'évolution moyenne et à très long terme du système solaire, et notamment sur sa stabilité ou sur le caractère chaotique de certaines de ses variations.

**Remarque 3.** La méthode générale développée ici pour les planètes s'applique aussi aux systèmes de satellites non résonnants. C'est même la seule méthode satisfaisante pour ces corps à mouvement orbital très rapide, et pour lesquels certaines des fréquences fondamentales du système séculaire sont de l'ordre de quelques années seulement (une solution à variations séculaires divergerait alors trop vite pour être utilisable). Par ailleurs, il se trouve que les termes à courte période des systèmes de satellites sont beaucoup plus faibles (et donc moins nombreux à calculer) que pour les planètes, car les perturbations mutuelles des satellites sont aussi beaucoup

plus faibles. La construction d'une théorie générale pour un système de satellites est donc réalisable, même en vue de fournir des éphémérides. C'est ainsi que les satellites d'Uranus, qui ont la particularité de ne pas être en résonance, sont représentés depuis quelques années par une théorie générale analogue à celle présentée ici. Cependant, les systèmes de satellites de Jupiter ou de Saturne possèdent plusieurs résonances. On peut étendre la méthode de la théorie générale au cas d'une résonance orbitale d'ordre  $q$  (avec toutefois  $q \neq 0$ ) : cela correspond à une combinaison  $pn_{0i} - (p + q)n_{0j}$  très proche de zéro. Les termes de l'inégalité résonante  $pL_i - (p + q)L_j$  et ceux de ses multiples entiers  $k(pL_i - (p + q)L_j)$  sont appelés **termes critiques**. On sépare alors les termes critiques des termes périodiques ordinaires : Les termes critiques sont regroupés, avec les termes séculaires (indépendants explicitement de  $t$ ), dans un système appelé système critique. Les termes non résonnants restent dans des systèmes d'équations analogues à (6.164) et (6.165), qui s'intègrent de la même façon. On peut montrer que le système critique, qui dépend du temps et des variables  $\hat{q}_k$  par l'intermédiaire des termes résonnants, peut quand même être transformé en un système autonome, grâce à un changement de variables de la forme :  $\hat{w}_i = \hat{z}_i \exp -\sqrt{-1} \left( \frac{pL_i - (p + q)L_j}{q} \right)$  et  $\hat{w}_j = \hat{z}_j \exp -\sqrt{-1} \left( \frac{pL_i - (p + q)L_j}{q} \right)$ , et d'autres variables  $\hat{w}'$ , analogues à  $\hat{w}$ , définies en remplaçant  $\hat{z}$  par  $\hat{\zeta}$ . Ce système diffère du système séculaire (6.160) à (6.163) car  $\frac{d\hat{A}}{dt}$  n'est plus nul, mais leurs seconds membres deviennent de nouveau indépendants de  $\hat{Q}$ . Le problème est alors ramené à trouver un noyau intégrable dans ce système autonome, permettant ensuite de construire une solution perturbée pour le système critique complet.