

## MATHEMATIQUES FINANCIERES

### CHAPITRE I : Les intérêts

Se reporter au poly. du cours.

**Exemple A** : Valeur acquise :

On place, le 9/10/00, un capital de 12500 F au taux annuel de 5% durant 3 mois.  
Valeur acquise ?

$$V_0 \text{ (capital)} = 12500$$

$$V_n \text{ (valeur acquise)} = V_0 + I \text{ (intérêts)}$$

Soit  $V_n = 12500 + ((12500 \times 5\%) \times 3/12)$  on applique un prorata temporis, puisqu'il s'agit d'un taux annuel.

$$V_n = 12500 + 156.25 = 12656.25$$

**Exercices** : se reporter au poly. pour l'énoncé.

**N° 1**  $V_0 = 2000$        $I = 4.5\%$  l'an  
Calculer la valeur acquise  $V_n$  et les intérêts :

a/  $I = V_n \times \text{taux (1 an)}$

$$2000 \times 4.5\% = 90 \text{ d'intérêt}$$

$$2000 + 90 = 2090 \text{ valeur acquise}$$

b/  $I = V_n \times \text{taux} \times n \text{ (temps) 3 mois}$

$$(2000 \times 4.5\%) \times 3/12 = 22.5 \text{ d'intérêt}$$

$$2000 + 22.5 = 2022.5 \text{ valeur acquise}$$

c/ Placement du 1/06 au 20/08

$$I = (2000 \times 4.5\%) \times ((30-1)+31+20) / 360 = 20$$

$$V_n = 2000 + 20 = 2020$$

Pour l'année on prend 360 jrs, mais on prend les mois avec le nombre réel de jours.

**N° 2**  $V_0 = 7645$  taux annuel 8% du 17/03 au 05/09

$$I = (7645 \times 8\%) \times ((31-17)+30+31+30+31+31+5)/360$$

$$I = 611.6 \times (172/360) = 292.21$$

**N° 3** intérêt calculé par quinzaine

$V_0 = 9800$  depot le 18/08  $V_n$  au 27/12 ?

Les intérêt cours à partir du 1 septembre jusqu'au 15 décembre

Soit 7 quinzaines

$$V_n = 9800 + (9800 \times 3.5\% \times (7/24))$$

$$V_n = 9800 + 100.04 = 9900.04$$

**N° 4** Diverses opérations réalisées sur un Codevi.

(taux calculé à la quinzaine, cf n° 3)

Calculer les intérêt acquis au 1 septembre.

Méthodes possibles :

Par les soldes :

01/01/01 – 15/03/01	$I = 10000 \times 3.5\% \times (5/24) =$	72.92	dépot	10000
16/03/01 – 15/05/01	$I = 11000 \times 3.5\% \times (4/24) =$	64.17	depot	1000
16/05/01 – 30/06/01	$I = 12000 \times 3.5\% \times (3/24) =$	52.50	dépot	1000
01/07/01 – 15/08/01	$I = 11500 \times 3.5\% \times (3/24) =$	50.31	retrait	500
16/08/01 – 31/08/01	$I = 10700 \times 3.5\% \times (1/24) =$	15.60	retrait	800
	total	<u>255.50</u>		

Par les flux :

+ I1	$= 10000 \times 3.5\% \times 16/24 =$	233.33	
+ I2	$= 1000 \times 3.5\% \times 11/24 =$	16.04	
+ I3	$= 1000 \times 3.5\% \times 7/24 =$	10.20	
- I4	$= 500 \times 3.5\% \times 4/24 =$	- 2.91	
- I5	$= 800 \times 3.5\% \times 1/24 =$	- 1.16	Soit au total 255.5

**N° 5** Jour de valeur

a/ Valeur acquise au 27/11 d'un placement de 4832 F à 4.75% depuis le 3/06

$((30-(3+2))+31+31+30+31+(27-1))$  soit 174 jours

$$V_n = 4832 + (4832 \times 4.75\%) \times 174/360 = 4832 + 110.93 = 4942.93$$

b/ Valeur nette sur le compte rémunéré

$$I1 = 4000 \times 5\% \times ((31-(5+2))+28+31+30+31+30+31+31+(10-1))/360 = 136.11$$

$$-I2 = 1000 \times 5\% \times ((30-(20-1))+31+31+9)/360 = - 11.38$$

$$+I3 = 400 \times 5\% \times (30-(8+2))+31+(27-1))/360 = 4.27$$

Total intérêt  $136.11-11.38+4.27 = 129$  soit une valeur nette sur le compte de 3529

**N° 6** Compte épargne rémunéré à la quinzaine Taux 4.5%

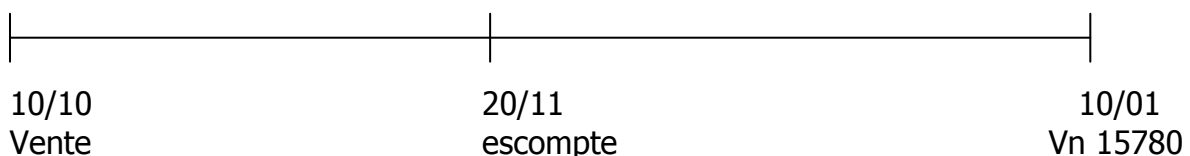
1/ intérêts par soldes

Dte Opé	Dte Int	Montant	Période	Calcul	INTERET
01/06	01/06	10000	01/06-15/06	$10000 \times 4.5\% \times 1/24$	18.75
13/06	16/06	12000	16/06-30/06	$12000 \times 4.5\% \times 1/24$	22.50
16/06	16/16				
29/06	16/06				
05/07	01/07	10500	01/07-15/07	$10500 \times 4.5\% \times 1/24$	19.69
15/07	16/07	14500	A partir du 16/07		
				Total	60.94

Solde à retirer le 17/07  $14500 + 60.97 = 14560.94$ 

2/ avec jours de banque (+3/-3)

Dte Valeur	Dte Int	Solde	Calcul	INTERET
04/06	16/06-30/06	9000	$9000 \times 4.5\% \times 1/24$	16.87
16/06	16/06	10500	$10500 \times 4.5\% \times 1/24$	19.69
19/06	01/07-15/07			
26/06	16/06			
02/07	01/07			
18/07	01/08			
			Total	36.56

Solde à retirer le 17/07  $10500 + 36.56 = 10536.56$ **Exemple B** : L'escompteEscompte  $15780 \times 9\% \times ((30-20)+31+10)/360 = 201.20$ Commission d'endos  $15780 \times 1.5\% \times 51/360 = 33.53$ Commission service  $8 \times 1.196 = 9.57$ 

Total AGIOS 244.30

Net Perçu = Vn – Agios  $15780 - 244.30 = 15535.70$ Valeur actuelle = Vn – escompte =  $15780 - 201.20 = 15578.80$

Taux Réel d'Escompte (t)

$$\text{Agios} = V_n \times t \times n \quad 244.30 = 15780 \times t \times 51/360 = 10.93\%$$

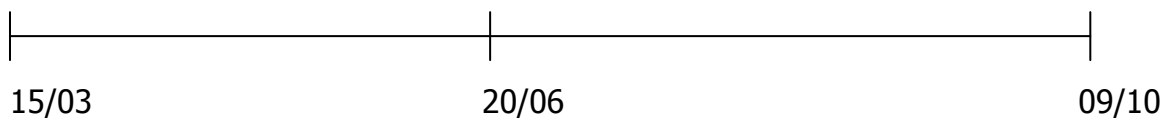
Taux de Revient

$$\text{Agios} = \text{Net Perçu} \times t \times n$$

$$244.30 = 15535.70 \times t \times 51/360 = 11.10\%$$

### N° 7 Effet escompté

a/ Calculer la valeur actuelle



$$\text{Escompte} = 2399 \times 10\% \times ((30-20)+31+31+30+9)/360 = 73.97$$

$$\text{Valeur actuelle} = V_n - \text{escompte}$$

$$\text{Valeur actuelle} = 2399 + 73.97 = 2325.03$$

b/ Calculer le montant reçu, le tx d'escompte réel et le tx de revient

Escompte	=	$2399 \times 10\% \times ((30-20)+31+31+30+9)/360$	=	73.97
Commission service		10 F		
TVA		1.96		
Total Agios		85.93		

$$\text{Net perçu} \quad 2399 - 85.93 = 2313.07$$

$$\text{Taux réel} \quad 85.93 = 2399 \times t \times 111/360 = 11.61\%$$

$$\text{Taux de revient} \quad 85.93 = 2313.07 \times t \times 111/360 = 12.05\%$$

### N° 8 Escompte

1/ calcul des agios de la banque A

Escompte	$48450 \times 7.5\% \times 48/360$	=	484.50
Endos	$48450 \times 0.5\% \times 48/360$	=	32.30
Service	$8 \times 1.196$	=	9.57
	Total AGIOS	=	526.37

$$\text{Net Perçu} \quad 48450 - 526.37 = 47923.63$$

$$\text{Taux de revient} \quad 526.37 = 48450 \times t \times 48/360 = 8.15 \%$$

$$\text{Taux réel} \quad 526.37 = 47923.63 \times t \times 48/360 = 8.23 \%$$

2/ Le taux réel de la banque A est de 8.15 %

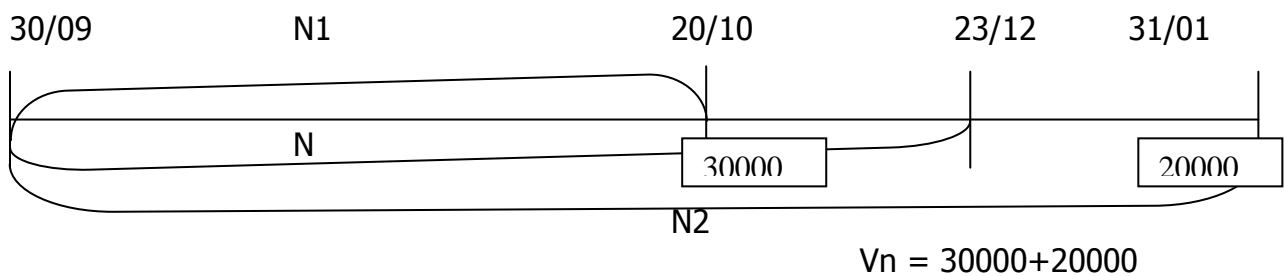
c'est cette banque qui présente le taux le plus bas

3/ Le taux de revient est de 8.23 %

L'entreprise a tout intérêt à réaliser un emprunt, en effet le taux proposé est de 8.10%.

$$\text{Ce qui nous donne des agios de : } 47923.63 \times 8.10\% \times 48/360 = 517.57$$

**Exemple C** : Equivalence d'effet ou capital :



$$V_n ? \text{ Valeur actuelle du nouvel effet} = \text{Valeur Actuelle } 1^{\text{er}} + \text{Valeur actuelle du } 2^{\text{e}}$$

$$\text{Valeurs actuelle des anciens effets} = (V_{n1} - \text{escpte } 1) + (V_{n2} - \text{escpte } 2)$$

$$\begin{aligned} &= (30000 - (30000 \times 8\% \times ((31+30+20)/360))) + \\ &\quad (20000 - (20000 \times 8\% \times ((31+30+31+31)/360))) \\ &= 48913.33 \end{aligned}$$

$$\text{Valeur actuelle du nouvel effet escompté} = V_n - V_n \times 8\% \times n/360 = 48913.33$$

$$48913.33 = V_n - V_n \times 8\% \times (31+30+23)/360$$

$$V_n (1 - 8\% \times (31+30+23)/360) = 48913.33$$

$$V_n = (48913.33 / (1 - (8\% \times (84/360)))) = 49843.75$$

$$2^{\text{e}} \text{ Solution } V_n = 30000 + 20000 = 50000$$

$$50000 - 50000 * 8\% * N/360 = 48913.33$$

$$N = (50000 - 48913.33) * 360 / (50000 * 8\%) = 97.8 \text{ +/- } 98 \text{ jours}$$

$$\text{Date d'échéance} = 30/09/00 + 98 \text{ jrs} = 06/01/01$$

### N° 9 Decompte valeurs remise à l'escompte

Taux à retenir Taux de base bancaire (TBB) 9.5% + tx escompte 1.4 = 10.90%

Nbres de jours mini 10 : Escompte mini 10

Effets	Nb Jrs réels	Nb jrs retenus	Escompte	Escompte retenu
8412	6	10	$8412 * 10.90\% * 10/360 = 25.47$	25.47
2560	9	10	$2560 * 10.90\% * 10/360 = 7.75$	10
1140	17	17	$1140 * 10.90\% * 17/360 = 5.86$	10
7934	38	38	$7934 * 10.90\% * 38/360 = 91.28$	91.28

$$\text{Total des effets } (8412+2560+1140+7934) = 20046$$

$$\text{Total des escomptes } (25.47+10+10+91.28) = 136.76$$

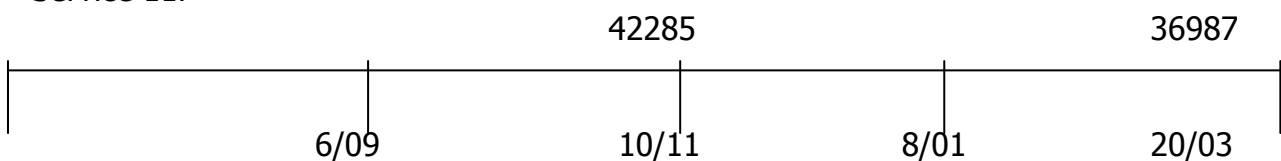
$$\text{Net perçu } 20000 - 136.76 - (4 * 11 * 1.196) = 19856.62$$

### N°10 Règlement d'escomptes

Taux 0.75% mois ou 9%

Taux endos 0.75% an

Service 11F



$$(42285 - (42285 * 9\% * (65/360))) + (36987 - (36987 * 9\% * (195/360)))$$

Somme des Vo des anciens effets

$$V_n = (42285 - 687.13) + (36987 - 1803.12) = 76781.75$$

1/ calculer la valeur nominale du nouvel effet

Vo nouvelle au 8/01  $V_n - \text{escompte}$

$$76781.75 = V_n - V_n * 9\% * 124/360$$

$$V_n = 79238.13$$

2/ calculer l'échéance moyenne

$$V_n = \text{Somme des anciens effets} = 79272$$

$$V_o \text{ nouvel effet} = 79272 - 79272 * 9\% * n/360 = 76781.13$$

$$\Leftrightarrow (79272 - 76781.13) / (79272 * (9\%/360)) = +/- 126 \text{ jrs} = 10/01$$

### N° 11

$$\text{Somme } V_o \text{ anciens effets} = (30000 - 30000 * 9\% * ((1+30)/360)) + (20000 - 20000 * 9\% * ((1+30+31)/360)) = 49457.50$$

1/  $V_n$  ?

$$V_o \text{ nouvelle} = V_n - V_n * 9\% * ((1+30+30)/360) = \text{somme } V_o \text{ anciens} = 49457.50$$

$$V_n = 50223.41$$

$$2/ V_n = 50000 (30000+20000)$$

$$50000 - 50000 * 9\% * n/360 = 49457.50$$

$$\Rightarrow +/- 44 \text{ jours} \quad 13 \text{ octobre}$$

### N° 12

Achat au comptant  $4000 * 95\% = 3800$   
Remise de 5% pour paiement comptant

Achat à crédit

$$1600 + ((2400/24) * 1.2) (1 - i * 1/12) + 120(1 - i * 2/12) \dots + 120 (1 - i * 24/12)$$

$$1600 + 120 * 24 - 120 (i/12) (1+2+\dots+24)$$

$$3800 = 1600 + 120*24 - 120*(i/12) * (24*25)/2 = 22.67\% = i$$

## INTERETS COMPOSES

## Exemple A

Soit 15720 f placé pendant 3 à 5%, puis pendant 3ans et 5 mois.

$$V_n = V_0 * (1 + i)^n$$

$$1/ V_n = 15720 * (1 + 0.05)^3 = 18197.86$$

$$2/ V_n = 15720 * (1 + 0.05)^{(41/12)} = 18571.60$$

On prend ici le nombre de mois soit  $3 * 12 + 5$  que l'on divise par 12 pour ramener à l'année.

## Exemple B

$$V_0 = V_n * (1 + i)^{-n}$$

$$18629.40 = V_n * (1 + 0.03)^{-2} = 18629.40 / 1.0609 = 17560$$

## Exemple C Conversion de taux

$$\text{Taux mensuel } 12\% / 12 = 1\% \quad \text{Tx propor mens } (1 + 0.12)^{1/12} - 1 = 0.949\%$$

$$\text{Tx Trimest } 12\% / 4 = 3\% \quad \text{Tx propor trim } (1 + 0.12)^{1/4} - 1 = 2.87\%$$

## Exemple D

$$\begin{aligned} \text{Somme } V_0 \text{ anciens effets} &= 30000 * (1.05)^{-(1+3/12)} + 20000 * (1.05)^{-3} \\ &= 45501.79 \end{aligned}$$

⇒  $V_n$  ?

$$\begin{aligned} V_0 &= V_n (1.05)^{-2} = V_0 \text{ anciens effets} = 45501.79 \\ \Rightarrow V_n &= 50165.72 (45501.79 * (1.05)^{-2}) \end{aligned}$$

$$V_n = 30000 + 20000 = 50000 \text{ Date échéance ?}$$

$$V_0 \text{ nouvelle} = 50000 (1.05)^{-n} = V_0 \text{ anciens effets} = 45501.79$$

- ⇒  $(1.05)^{-n} = 45501.79/50000 \Rightarrow -n \ln(1.05) \Rightarrow$
- ⇒  $\ln(45501.79/50000) = 1.93 \text{ ans}$
- ⇒ soit 1 an et 11 mois vers le 28/02

$$\ln(45501.79/50000) / \ln(1.05) = 1.93$$



**Exercice N°1**

Capital 240000 Tx = 7.6% pendant 7 ans et 9 mois

$$24000 * (1.076)^{93/12} = 42340.53$$

**Exercice N° 2**

Capital 7600 à taux variable

$$\begin{array}{lcl} 7600 * (1.045)^{14/12} & = & 8000.48 \\ 8000.48 * (1.06)^{17/12} & = & 8688.92 \\ 8688.92 * (1.055)^{6/12} & = & 8924.67 \\ 8924.67 * (1.065)^{11/12} & = & 9455.02 \end{array}$$

**Exercice N° 3**

Valeur actuelle d'un effet de 25000f payable dans 3 ans....

$$V_n = 25000 \quad tx = 10\% \quad n = 3$$

$$V_o = V_n * (1 + tx)^n$$

$$V_o = 25000 * (1 + 0.10)^3 = 18782.87$$

**Exercice N° 4**

Quel est le taux semestriel, mensuel équivalent au taux annuel de 6% ?

$$\text{Rappel formule} \quad (1 + tx \text{ annuel})^1 = (1 + tx \text{ semestr})^2$$

$$\text{Soit un tx semestriel de } (1.06)^{1/2} - 1 = 2.96 \%$$

$$\text{Soit un taux mensuel de } (1.06)^{1/12} - 1 = 0.49 \%$$

**Exercice n° 7**

Voir poly pour l'énoncé  $V_o = 280000$  tx semest = 3.25%

a/ Valeur acquise au 28/02/2004

$$\text{nombres de semestres} = 8$$

$$V_n = 280000 * (1 + 0.0325)^8$$

$$V_n = 361641.71$$

b/ Montant si capitalisation annuelle ? tx annuel 6.5%

$$V_0 = 280000 \quad tx = 6.5\%$$

$$V_n = 280000 * (1 + 0.065)^4$$

$$V_n = 360210.58$$

c/ le calcul est fait avec deux types de taux différents, un proportionnel et un équivalent

### Exercice n° 8

Règlement par anticipation d'une dette

$$V_0 = 460000 \quad tx = 8\%$$

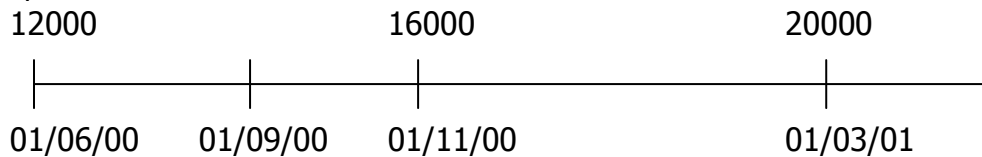
$V_0 = 460000 * (1 + 0.08)^{-4}$  (l'exposant est ici négatif puisque l'on règle avec anticipation, on remonte le temps)

$$V_0 = 338113.73$$

### Exercice n° 9

Règlement de plusieurs dettes en un seul règlement.

a/



On remarque ici que deux des effets seront réglés par anticipation (16000 et 20000)  
Il faut calculer la nouvelle valeur de chacun des effets.

$$V_{o1} = 12000 * (1 + 0.065)^{3/12} = 12190.42$$

$$V_{o2} = 16000 * (1 + 0.065)^{-2/12} = 15832.95$$

$$V_{o3} = 20000 * (1 + 0.065)^{-6/12} = 19380.06$$

$$\text{Règlement total par anticipation} = 12190.42 + 15832.95 + 19380.06 = 47403.43$$

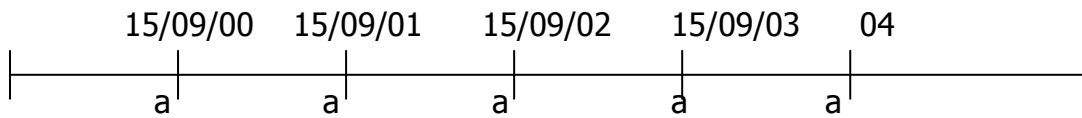
b/ Echéance moyenne ?

$$V_0 \text{ anciens effets} = 48000 * (1 + 0.065)^{-4}$$

$$47403.43 = 48000 * (1 + 0.065)^{-n}$$

$$n = -\log(47403.43/48000) / \log(1.065) = +/- 0.198$$

soit  $12 * 0.198 = 2.37$  soit  $0.37 * 30 = +/- 11$  donc 2 mois et 11 jours (11/11/00)

**ANNUITES****Exemple E**Annuités constantes  $a = 1000$ a/  $V_n$  au 15/09/2003 ?

$$V_n = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

 $n$  = nombre de placement

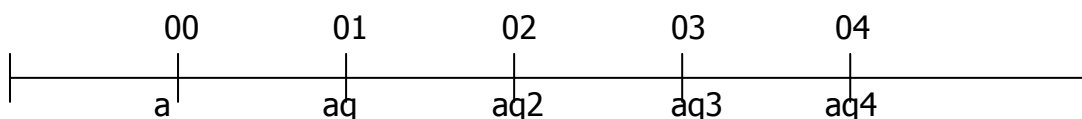
$$V_n = 1000 \cdot \frac{(1.05)^4 - 1}{0.05} = 4310.13$$

 $V_n$  au 15/09/2004

$$V_n (15/09/03) \cdot (1+i)$$

$$V_n = 4310.13 \cdot 1.05 = 4525.64$$

b/ Versements en progression géométrique de raison 1.2



$$V_n = a \cdot \frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q}$$

 $n$  = nombre de placement $q$  = la raison $V_n$  au 15/09/03

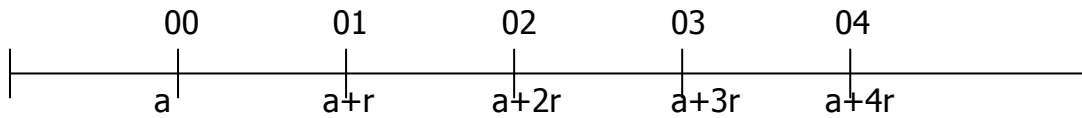
$$V_n = 1000 \cdot \frac{(1+0.05)^4 - 1.2^4}{(1+0.05) - 1.2} = 5720.63$$

 $V_n$  au 15/09/04

$$5720.63 \cdot (1.05) = 6006.66$$

## c/ Versements en progression arithmétique

$$V_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i} * \frac{(a+r)}{i} - \frac{(n * r)}{i} \quad r \text{ la raison}$$

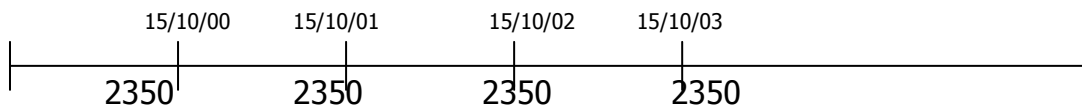


n nombre d'annuités = 4

r raison = 200

a = 1ere annuités = 1000

$$V_n = \frac{(1.05)^4 - 1}{0.05} * \frac{(1000 + 200)}{0.05} - \frac{(4 * 200)}{0.05} = 5550.63$$

**Exercice n° 11**

$$a/ V_n = 2350 * \frac{(1 + 0.075)^4 - 1}{0.075} = 105011.37 \quad V_n \text{ au } 15/10/2003$$

b/  $V_0$  au 15/10/99

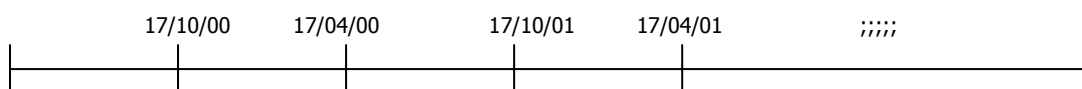
$$V_n = (1+i)^{-4} = 10511.37 (1.075)^{-4} = 7870.92$$

**Exercice supplémentaire**

On veut K au 17/09/05 de 25000 F

En faisant des placements semestriels constants tout les 17/10 et 17/04

Semestrialisation avec un taux annuel de 6.5%



Nombre de semestrialités  $n ? = 10 (5ans * 2)$

Tx semestriel équivalent ?

$$(1 + 0.065)^1 = (1 + tx \text{ semes})^2$$

$$tx \text{ semest} = (1 + 0.065)^{1/2} - 1 = 3.20 \%$$

Semestrialités (S)

$$V_n = S * \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Avec  $V_n = 25000$

$$i = tx \text{ semest} = 3.20\%$$

$$N = \text{nb de semest} = 10$$

$$S = V_n \frac{i}{(1 + i)^n - 1} = 25000 * \frac{0.032}{(1.032)^{10} - 1} = 2160.75$$

CHAPITRE II : EMPRUNTS INDIVISI EXEMPLE Cas général

Tableau de remboursement

K emprunté =  $V_0 = 20000$  FDurée emprunt =  $n = 4$  ansTaux annuel =  $i = 3.5\%$ 

Tableau de remboursement (ou amortissement) de l'emprunt.

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Annuité	K dû fin
1	$V_0$ 20000	700	2300	3000	17700
2	$V_0$ 17700	619.5	4380.50	5000	13319.5
3	$V_0$ 13319.50	466.18	4533.82	5000	8785.68
4	$V_0$ 8785.68	307.5	8785.68	9093.18	0

$$I_1 = 20000 * 3.5\% = 700$$

$$M_1 (1^{er} \text{ amortissement}) = a_1 - I_1 = 3000 - 700 = 2300$$

$$K_1 \text{ de fin} = 20000 - 2300$$

Relation :

1/ K emprunté  $V_0$ 

$$\rightarrow V_0 = \sum \text{amortissements}$$

$$20000 = 2300 + 4380.50 + 4533.82 + 8785.68$$

$$\rightarrow V_0 = \text{valeur actuelle de la suite d'annuités}$$

$$20000 = 3000 * (1.035)^{-1} + 5000 * (1.035)^{-2} + 5000 * (1.035)^{-3} + 9093.18 * (1.035)^{-4}$$

2/ Dernière annuités  $a_n$ 

$$\begin{aligned} a_n &= (\text{Intérêt de } n) + (\text{Amortissement de } n) \\ &= I_n + M_n = (M_n * i) + M_n = M_n * (1 + i) \end{aligned}$$

Le dernier amortissement = K restant du.

3/ Capital restant du après paiement de la  $x^0$  annuité :  $D_x$ K du après paiement de la 2<sup>e</sup> Annuité :  $D_2$ 

$$\Rightarrow D_2 = \sum \text{amortissement restant} = 4533.82 + 8785.68$$

$$\Rightarrow D_2 = V_0 - \sum \text{amortissement déjà payés} = 20000 - (2300 + 4380.50)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_2 &= \sum \text{Valeurs actuelles des annuités restantes} \\ &= 5000 * (1.035)^{-1} + 9093.18 * (1.035)^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow D_2 &= \text{Valeurs en fin de 2}^{\text{e}} \text{ année de } V_0 - \sum \text{valeurs en fin de 2}^{\text{e}} \text{ année des} \\ &\quad \text{annuités payées.} \\ &= 20000 * (1.035)^2 - (3000 * (1.035)^1 + 5000 * (1.035)^0) \end{aligned}$$

## II CAS PARTICULIERS : Le capital est remboursé *in fine* (en fin)

Exemple :

1/

$V_0 = 100000$

Durée  $n = 5$  ans

Taux  $i = 9\%$

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Annuité	K dû fin
1	100000	9000	0	9000	100000
2	100000	9000	0	9000	100000
3	100000	9000	0	9000	100000
4	100000	9000	0	9000	100000
5	100000	9000	100000	109000	0

Peu d'intérêt de faire un tableau

$$\begin{aligned} \text{Différentes annuités : } & \begin{array}{l} 1^{\text{er}} \text{ à } 4^{\text{e}} \\ 5^{\text{e}} \end{array} & \begin{array}{l} a = I = V_0 i = 9000 \\ a = I + M = (V_0 i) + V_0 = 9000 + 100000 \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2/ Différentes annuités : } & \begin{array}{l} 1^{\text{er}} \text{ à } 4^{\text{e}} \\ 5^{\text{e}} \end{array} & \begin{array}{l} a = 0 \\ a = I + V_0 = V_n = V_0 (1+i)^n = \\ 100000 * (1.09)^5 = 153862.39 \end{array} \end{aligned}$$

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Annuité	K dû fin
1	100000	0	0	0	109000
2	109000	0	0	0	118810
3	118810	0	0	0	129502.9
4	129510.9	0	0	0	141158.16
5	141158.16	53862.40	100000	153862.40	0

## III CAS CLASSIQUE

A/ Amortissement constant

$$V_0 = \sum \text{amortissement} = nM$$

$$a_k = I_k + M = (D_{k-1} * i) + M$$

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= I_{k+1} + M = (D_k * i) + M = (D_{k-1} - M) i + M \\ &= D_{k-1} i - M i + M = a_k - M i \end{aligned}$$

## B/ Anuités constantes

$$a_k = a = D_{k-1} * i + M_k$$

$$a_{k+1} = a = D_k * i + M_{k+1} = (D_{k-1} - M_k) i + M_{k+1}$$

$$D_{k-1} i + M_k = D_{k-1} * i - M_k i + M_{k+1}$$

$$M_k (1 + i) = M_{k+1}$$

EXERCICE : Cas Classique :

$V_0 = 300000$  € Date emprunt 01/05/99 date 1er semestre = 01/11/1999 (à corriger sur le poly)

$i = 9.5\%$  annuel

$n = 6$  semestres

## A/ Remboursement Amortissement constant

K restant du après la 4<sup>e</sup> semestrialité

⇒ calcul du Taux semestriel équivalent

$$(1 + i)^1 = (1 + 0.095)^2 = (1 + 0.095)^{1/2} - 1 = 4.64\%$$

$$300000 / 6 = 50000 \text{ € soit } M$$

1/ K restant du après la 4<sup>e</sup> semestrialité

$$D_4 = \sum \text{amortissement restant} = 2 \times M = 100000 \text{ €}$$

2/

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Annuité	K dû fin
1	300000	13920	50000	63920	250000
2	250000	11600	50000	61600	200000
3	200000	9280	50000	59280	150000
4	150000	6960	50000	56960	100000
5	100000	4640	50000	54640	50000
6	50000	2320	50000	52320	0

## B/ Remboursement par Semestrialité constantes

⇒ calcul du Taux semestriel équivalent

$$(1 + i)^1 = (1 + 0.095)^2 = (1 + 0.095)^{1/2} - 1 = 4.64\%$$

1/ Quel est le capital restant du après la 4<sup>e</sup> semestrialité

$$a = V_0 \frac{t}{1 - (1+t)^{-n}}$$

$$a = 300000 * \frac{4.64\%}{1 - (1.0464)^{-6}} = 58426.52 \text{ semestrialité constante}$$



D4 = valeur actuelle (après 4<sup>ème</sup> semestrialité) des semestrialités restantes

$$D4 = a * (1+t)^{-1} + a * (1+t)^{-2}$$

$$Da = 58426.52 * (1.0464)^{-1} + 58426.52 * (1.0464)^{-2} = 109195.59$$

2/

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Annuité	K dû fin
1/5/00	300000	13920	46571.62	58426.52	255493.48
1/11/00	255493.48	11854.90	46571.62	58426.52	208921.86
1/5/01	208921.86	9693.97	48732.55	58426.52	160189.31
1/11/01	160189.31	7432.78	50993.74	58426.52	109195.57
1/5/02	109195.57	5066.67	53359.85	58426.52	55835.72
1/11/02	55835.72	2590.78	55837.72	58426.52	0

### EXERCICE A

$$Vo = 78600 \quad n = 4 \quad \text{taux} = 5\%$$

1) remboursement par annuités constantes

$$a = 78600 * (0.05 / (1 - (1.05)^{-4})) = 22166.13$$

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Annuité	K dû fin
1	78600	3930	18236.13	22166.13	60363.87
2	60363.87	3018.19	19147.94	22166.13	41215.93
3	41215.93	2060.80	20102.33	22166.13	21113.60
4	21113.6	1055.68	21113.60	22166.13	0

2) remboursement par amortissements constants

$$\text{amort} = 78600 / 4 = 19650$$

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Annuité	K dû fin
1	78600	3930	19650	23580	58950
2	58950	2947.50	19650	22597.50	39300
3	39300	1965	19650	21615	19650
4	19650	982.50	19650	20632.50	0

### EXERCICE B

$$Vo = 1\,000\,000 \quad n = 20 \text{ semestrialités} \quad \text{taux annuel} = 9.998144\%$$

Calcul du taux équivalent semestriel

$$(1 + 0.09998144)^{1/2} - 1 = \mathbf{4.88\%}$$

Calcul de la semestrialité constante

$$1000000 * (0.0488 / (1-(1.0488)^{-20})) = \mathbf{79428.16}$$

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Annuité	K dû fin
1	1000000	48800	30628.16	79428.16	969371.84
2	969371.84	47305.35	32122.81	79428.16	937249.03
3	937249.03	45737.75	33690.41	79428.16	903558.62
4	903558.62	44093.66	35335.50	79428.16	868223.12
5	868223.12	42369.29	37058.87	79428.16	831164.25
15	404704.65	19749.59	59678.57	79428.16	345026.07
16	345026.07	16837.27	62590.89	79428.16	282435.18
20	75732.42	3695.74	75732.42	79428.16	0

$$D14 = 79428.16 * (1-(1.0488)^{-6}) / 0.0488$$

## EXERCICE C

1)  $V_0 = 45000$  date emprunt 1/1/00 annuité constante 7721.34  
 $n = 10$

Date de la 1<sup>ère</sup> annuité 31/12/00

$i ? (11\% < i < 11.5\%)$

$$a = V_0 * (i / (1 - (1+i)^{-10}))$$

$$1 - (1+i)^{-10} / i = f(i) = 45000 / 7721.34 = 5.828003948$$

$f(11\%) =$	5.88973201	$f(11\%) =$	5.88973201
$f(11.5\%) =$	5.76777074	$f(i) =$	5.828003948
+ 0.5% =	0.12146127	+ $\delta\%$ =	0.06122806

$$0.5\% / 0.12146127 = \delta\% / 0.06122806$$

$$i = 11\% + \delta\%$$

$$i = 11\% + 0.5\% * (0.12146127/0.06122806) = +/- 11.25\%$$

2) a en 2001, 2003, 2005, 2007, 2009

$i = 7.5\%$

$$a ? \quad V_0 = a = 1-(1+i)$$

Calcul du taux bi-annuel

$N =$  nbre de versements

$$(1+i)^{1/2} = (1 + 7.5\%) \Rightarrow i = (1.075)^2 - 1 = \mathbf{15.56\%}$$

$$a = Vo * (i / (1 - (1+i)^{-n})) = 45000 * (0.1556 / (1 - (1.1556)^{-5})) = \mathbf{13602.62}$$

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Annuité	K dû fin
2007	21956.97	3416.5	10186.12	13602.62	11770.84
2009	11770.85	1931.54	11700.85	13602.39	0

$$Dx = a (1 - (1+i)^{-(n-x)}) / i = 13602.62 * (1 - (1.1556)^{-2}) / 0.1556 = +/- 21957.13(\text{arro})$$

## EXERCICE D

1er Janvier N      vo = 61250      n = 48 mensualités  
 1er paiement 31/01/N+1      taux annuel = 6%

1) Différé entre le 31/1/N et le 31/1N+1 => 1 an

- => Montant à rembourser :  $Vo * (1+t)^1 = 64925$
- Calcul du taux équivalent  
 $i = (1+0.06)^{1/12} - 1 = (+/-) 0.49\%$

# remboursement par amortissement constant  $64925 / 48 = 1352.60$

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Annuité	K dû fin
31/1/N+1	64925	318.13	1352.60	1670.73	63572.40
28/2/N+1	63572.40	311.50	1352.60	1664.10	62219.80
31/1/N+3	<b>32462.40</b>	159.07	1352.60	1511.67	31109.80

$\Sigma$  amortissements restants

$$= (48 - 2 * 12) * M = 24 * 1352.60 = 32462.40$$

# remboursement par Annuités constantes

$$a = Vo * i / (1 - (1+i)^{-n})$$

$$a = 1521.20$$

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Annuité	K dû fin
31/1/N+1	64925	318.13	1203.17	1521.20	63721.93
28/2/N+1	63721.93	312.24	1209.06	1521.20	62512.87
31/1/N+3	<b>34364.54</b>	168.39	1352.81	1521.20	33011.73

$\Sigma$  actualisée des mensualités restantes

$$\text{mens} * (1 - (1+i)^{-(n-x)}) / i = 1521.20 (1 - (1.0049)^{-24}) / 0.0049$$

### IV Taux Réel de l'Emprunt

Exemple :

Vo = 20000      tx annuel = 4.9%      Assurance = 7 F / mois  
 Frais de dossier = 300 F      n = 12 mensualités constantes  
 M = 1718.23

1) taux proportionnel mensuel  $4.9\% / 12 = 0.4083333... \%$

$$a = 20000 * (0.00408333... / (1 - (1.00408333...)^{-12})) = 1711.23$$

Assurance = 7

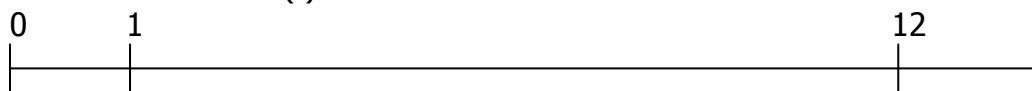
Mensualité  $1711.23 + 7 = \mathbf{1718.23}$

2) Tableau d'amortissement

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Assurance	Annuité	K dû fin
1	20000	81.66	1629.57	7	1718.23	18370.43
2	18370.43	75.01	1636.22	7	1718.23	16734.21
3	16734.21	68.33	1642.90	7	1718.23	15091.31

3) Retrouvez le TEG et le coût total du crédit

Calcul du taux réel (t)



Vo-frais

Dec      m      m

$$\text{Vo-frais dossier} = m * (1 - (1+t)^{-n}) / t$$

$$20000 - 300 = 19700 = 1718.23 (1 - (1+t)^{-12}) / t$$

$$\rightarrow f(t) = (1 - (1+t)^{-12}) / t = 19700 / 1718.23 = 11.46528695$$

Retrouvons dans les tables  $0.5\% < t < 1\%$

$$f(1\%) = 11.25507747 \qquad f(0.5\%) = 11.61893207$$

$$f(0.5\%) = 11.61893207 \qquad f(t) = 11.46528695$$

$$\# 0.5\% = 0.36385460 \qquad + \delta\% = 0.15364518$$

$$t = 0.5\% + \delta\%$$

$$t = 0.5\% + 0.5\% * (0.15364518 / 0.36385460) = (+/-) 0.71\%$$

Taux réel mensuel 0.71%

$$\text{TEG} = \text{Tx annuel prop au taux réel} = 12 * 0.71 = 8.5\%$$

## 4) Coût total du crédit

$$\begin{aligned}
 \text{Coût de crédit} &= \text{Frais de dossier} + \text{assurance} + \text{intérêts} \\
 &= \text{Frais de dossier} + (\sum \text{mensualités} - V_0) \\
 &= 300 + (12 * 1718.23) - 20000 \\
 &= 918.76
 \end{aligned}$$

**EXERCICE E :**

Fonds au 31/12/N                      6 annuités constantes       $i = 5\%$   
 1<sup>er</sup> versement 31/12/N+1           $V_0 = 1000000$   
 Frais de dossier 10000F payé le 31/12/N

1) remboursement par annuité constante :

a. annuité constante :

$$a = 1000000 * (5\% / (1 - (1.005)^{-6})) = \mathbf{197017.47}$$

b. Tableau amortissement

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Annuité	K dû fin
31/12/N+1	1000000	50000	147017.45	197017.47	852982.53
31/12/N+2	852982.53	42649.13	154368.34	197017.47	698614.19
31/12/N+3	698614.19	34930.71	162086.76	197017.47	536527.43

c. taux actuariel et TEG.

Au 31/12/N : Encaissement =  $V_0 - \text{Frais de dossier} = 1000000 - 10000 = 990000$

Puis 31/12/N+1 -> N+6 Décaissement annuités

Donc  $990000 = \text{Valeur Actuelle (au 31/12/N) des annuités}$

$$t = \text{taux réel} \quad 990000 = a * 1 - (1+t)^{-1} / t$$

$$1 - (1+t)^{-6} / t = f(t) = 990000 / 197017.47 = 5.024935098$$

Comme on rembourse à l'année les trois taux sont identiques

Taux réel = Taux actuariel = TEG

$$f(5.25\%) = 5.03536284$$

$$f(5.5\%) = 4.99553031$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5.25 + 5.5)}{2} = \mathbf{5.375}$$

2) remboursement par amortissement constant :

a. Amortissement constant

$$1000000/6 = \mathbf{166666.67}$$

## b. Tableau d'amortissement

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Annuité	K dû fin
31/12/N+1	1000000	50000	166666.67	216666.67	833333.33
31/12/N+2	833333.33	41666.67	166666.67	208333.34	666666.67
31/12/N+3	666666.67	33333.33	166666.67	200000	500000

## c. Taux actuariel

Annuité en progression arithmétique de raison :

$$r = - Mi = - \mathbf{8333.33}$$

Valeur actuelle (31/12/N) des annuités

$$= 1-(1+t)^{-n} / t * (a + r/t) - nr / t (1+t)^{-n} = 990000$$

$$f(f) = 1-(1+t)^{-6} / t * (216666.67 - (8333.33/t)) + ((6*8333.33)/t * (1+t)^{-6} = 990000$$

f(5%)	=	1000000	f(t)	=	990000
f(5.5%)	=	909091	f(5%)	=	1000000
+0.5%	=	90909	δ%	=	10000

$$t = 5\% + \delta\% \quad t = 5\% + 0.5 * (10000/90909) = 5.055\%$$

**EXERCICE F :**

Emprunt 1/3/00

Frais d'assurance = 0.66% de Vo

Vo = 100000 €

Frais de dossier = 1% de Vo à payer le 1/6/00

Tx annuel = 11%

Remboursement par trimestrialité constantes : (1/6/00 -> 1/03/03)

Calcul du taux équivalent :  $(1+11\%)^1 = 1+i)^4 = \mathbf{2.64\%}$

Nombre de trimestrialités  $(3+(4*2)+1) = \mathbf{12}$

## a. Calcul trimestrialité

$$\text{Trimestrialité} = 100000 * (2.64\% / (1-(1.0264)^{-12})) = \mathbf{9831.54}$$

$$\text{Frais d'assurance} = 100000 * 0.66\% = \mathbf{660}$$

$$a = \mathbf{10491.54}$$

## b. Tableau d'amortissement

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Assurance	Annuité	K dû fin
1/6/00	100000	2640	7191.54	660	10491.54	92808.46
1/9/00	92808.46	2450.14	7381.40	660	10491.54	85427.06
1/12/00	85427.06	2255.27	7576.27	660	10491.54	77850.79

## c. Taux réel, Taux Actuariel, TEG ? (3 taux différents)

Au 1/3/00 Encaissement = 100000 €

Du 1/6/00 -> 1/3/03 décaissement = Valeur actuelle des décaissement trimestriels

$$= a (1-(1+t)^{-n}) / t + \text{frais de dossier} (1+t)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow 100000 = \underbrace{10491.54 (1-(1+t)^{-12}) / t + 1000 (1+t)^{-1}}_{f(t)}$$

f(t)

f(3.5%)	=	102349.44	f(t)	=	100000
f(4%)	=	99425.42	f(3.5%)	=	102349.44
- 0.5%	=	- 2924.02	- δ%	=	- 2349.44

$$t=3.5\% - \delta\% = 3.5\% - 0.5\% * (2349.44/2924.02) = \mathbf{3.9\%}$$

Taux actuariel = taux annuel équivalent au taux réel

$$= (1+3.9\%)^4 - 1 = \mathbf{16.54\%}$$

TEG = taux annuel proportionnel

$$= 3.9\% \times 4 = \mathbf{15.6\%}$$

d. Coût du crédit = ( $\Sigma$  Intérêt + assurance) + Frais de dossier

$$= (12 \times \text{trimestrialité} - V_0) + \text{Frais dossier}$$

$$= (12 \times 10491.54 - 100000) + 1000 = \mathbf{26898.48 \text{ Euros}}$$

**EXERCICE G**

$V_0 = 200000F$       Taux annuel = 8%      Trimestrialités constantes  
 Frais de cautionnement : 2525F      Frais d'assurance = 0.1 % de  $V_0$   
 Durée 8 ans       $V_0$  versée le  $1/12/N$   
 1ere Trimestrialité le  $1/3/N+1$

1) déterminer la trimestrialité

Calcul du tx équivalent       $(1+8\%)^1 = (1+t)^4$   
 $(1+8\%)^{1/4} - 1 = \mathbf{1.94\%}$

Trimestrialité constante

$$200000 \times (1.94\% / (1-(1.0194)^{-32})) = 8448$$

$$\text{Assurance } 200000 \times 0.1\% = \underline{200}$$

**8648**

2) Ecrire les 2 premières et les 4 dernières lignes du Tableau

Année	K dû début	Intérêt	Amortissement	Assurance	Annuité	K dû fin
1/3/N+1	200000	3880	4568	200	8648	195432
1/6/ N+1	195432	3791.38	4656.62	200	8648	190775.38
1/3/N+8	<b>32214.58</b>	624.96	7823.04	200	8648	24391.54
1/6/N+8	24391.54	473.2	7974.80	200	8648	16416.74
1/9/N+8	16416.74	318.48	8129.52	200	8648	8287.22
1/12/N+8	8287.22	160.77	8287.22	200	8648	0

Rappel :  $Dx = a (1-(1+i)^{-n-x}) / i$

$$D28 = 8448 * (1-(1+I)^{-4} / I) = \mathbf{32214.58}$$

3) Déterminer le taux réel d'intérêt, le taux actuariel, le TEG

Au 1/12/N Encaissement :  $200000 - 2525 = 197475$

Du 1/3/N+1 -> 1/12/N+8 Décaissement = Valeur actuelle des trimestrialités

Soit  $t$  le taux réel de l'emprunt

$$V_0 - \text{frais cautionnement} - T (1-(1+t)^{-n} / t) = 0$$

$$(1-(1+t)^{-n}) / t =$$

$$(V_0 - \text{Frais cautionnement}) / T = (200000-2525)/8648=22.83475948$$

$$f(2\%) = 23.46833482$$

$$f(2.25\%) = \underline{22.63767419}$$

$$+0.25\% = -0.83066063$$

$$f(2\%) = 23.46833482$$

$$f(t) = \underline{22.83475928}$$

$$+\delta\% = -0.63357534$$



$$t\% = 2\% + \delta\% = 2\% + 0.25\% \times (-0.63357534 / -0.83066063) = 2.19\%$$

Taux actuariel

$$= (1 + 2.197\%)^4 - 1 = \mathbf{9.08\%}$$

TEG Proportionnel

$$= 2.197\% \times 4 = \mathbf{8.79\%}$$

4) 6 ans après le début de l'emprunt, Z a économisé environ 65000F

$$\text{Calcul du restant dû : } D_{24} = 8448 \times (1 - (1+i)^{-8}) / i = 62046$$

a) taux placement sans risque 8%

8% < taux actuariel et TEG on choisira de rembourser par anticipation

b) Taux placement 12%

12% > taux actuariel et TEG on choisira le placement