INSEA

MODELES MATHEMATIQUES DE LA FINANCE

(Prof. Pierre Devolder)

Année académique 2007- 2008

Prédire est un art difficile…
surtout s'il concerne le futur…

Niels BOHR
(1885- 1962)

PLAN DU COURS

- PARTIE 1 : ***LES ACTIFS DERIVES***
- PARTIE 2 : ***MODELES STOCHASTIQUES DISCRETS***
- PARTIE 3: ***CALCUL STOCHASTIQUE***
- PARTIE 4: ***MODELES STOCHASTIQUES EN TEMPS CONTINU***

PARTIE 1: Les actifs dérivés

- 1.1 Introduction
- 1.2 Les options classiques
- 1.3 Les options exotiques
- 1.4 Un premier exemple de pricing par arbitrage

PARTIE 2 : Modèles stochastiques discrèts

- 2.1 Modèle discret général
- 2.2 Modèle binomial de COX-ROSS-RUBINSTEIN
- 2.3 Théorème général de tarification neutre risque
- 2.4 Modèle de courbe de taux HO et LEE

PARTIE 3 : Calcul stochastique

- 3.1 Motivation
- 3.2 Processus stochastiques en temps continu
- 3.3 Le mouvement brownien
- 3.4 Intégration stochastique – Lemme de ITO
- 3.5 Equations différentielles stochastiques
- 3.6 Dérivée de RADON-NIKODYM et théorème de GIRSANOV
- 3.7. Représentation de FEYNMAN- KAC
- 3.8. Calcul stochastique multi dimensionnel

PARTIE 4 : Modèles en temps continu

- 4.1 Modèle brownien additif et géométrique
- 4.2 Modèle de BLACK SCHOLES
- 4.3 Modèles de courbe de taux de VASICEK et HULL & WHITE
- 4.4 Mesure forward neutre et tarification d'options sur zéro coupons
- 4.5. Options sous taux d'intérêt stochastiques

REFERENCES

BINGHAM N.H. / KIESEL R. :
Risk neutral valuation
(Springer)

MUSIELA M./ RUTKOWSKI :
Martingale methods in financial modelling (Springer)

REFERENCES (2)

HULL J.C. :
Options, Futures and other derivatives (Prentice-Hall)

SHREVE S.:
Stochastic calculus for finance (vol. 1 and 2) (Springer)

PARTIE 1

Les actifs dérivés

1.1 Introduction

<u>**FINANCE**</u> = Allocation de ressources rares au cours du temps

2 caractéristiques :

1° le temps

2° l'incertitude

<u>**PRODUIT FINANCIER**</u> = Ensemble de cash flows futurs définis selon une règle établie à priori

Introduction

2 problèmes fondamentaux de la finance de marché :

- le pricing (tarification) : quel est la valeur initiale d'un produit financier tenant compte à la fois de la *répartition temporelle* et de l'*incertitude* ?

-le hedging (couverture) : comment l'intermédiaire financier qui émet le produit peut-il *se couvrir* face aux risques?

Produits financiers

- Les obligations

- Les actions

- Les produits dérivés:
    - contrats à terme
    - options classiques
    - options exotiques

… *incertitude et risques croissants* … *!!!*

Les obligations

OBLIGATION : titre financier représentatif d'*un droit de créance* et donnant droit à la réception de différents flux financiers fixés à des dates d'échéances futures fixées

- coupons: versements intermédiaires
- remboursement au terme

OBLIGATION ZERO COUPON :obligation à coupons nuls

OBLIGATION A TAUX FIXE : coupons déterministes

OBLIGATION A TAUX VARIABLE : coupons liés à un indice de nature aléatoire

Les obligations

Quelques propriétes des obligations :

1° titre mortel ;
2° toute obligation à taux fixe peut se décomposer en une somme de zéro coupons ;
3° risques d'une obligation à taux fixe (flux déterministes):
- risque de réinvestissement des coupons
- risque de réalisation

Les obligations

Structure des prix des zéro coupons :

-espace des temps discret : $T = \{0,1,2,\ldots N\}$

- structure des prix des zero coupons:

  $P(s,t)$ = prix à l'instant s d'un zéro coupon échéant à l'instant t ($s<t$; s et t à valeur dans T)

-gamme des taux au comptant (taux zéro coupons) :

$$P(s,t) = \frac{1}{(1+R(s,t))^{t-s}}$$

Les obligations

Gamme des taux à terme (forward rate) :

$$P(s,t) = \frac{1}{(1+r(s,1))(1+r(s,2)\ldots(1+r(s,t-s))}$$

Incertitude :

P(s,t) est observable à l'instant s

P(s,t) n'est pas observable à l'instant $r < s$

Incertitude quant à l'évolution future des taux d'intérêt

Les actions

ACTION : titre financier représentatif d'*un droit de propriété* d'une part d'une entreprise donnant droit à des revenus réguliers liés aux résultats de l'entreprise appelés dividendes.

REVENU GLOBAL ESPERE : dividendes et plus value (écart entre prix de vente et prix d'achat)

COURS DE L'ACTION : actions généralement échangées sur des marchés (titres négociables)

Les actions

Caractéristique temporelle:

ACTION = Titre sans maturité

Caractéristique de risque :

ACTION = Titre aléatoire par excellence; pas de condition aux limites comme les obligations

Domaine par excellence des modélisations stochastiques

1.2. Les options classiques

Actif dérivé :actif conditionnel construit sur un autre actif préexistant appelé sous jacent et dont les cas flows sont conditionnels à ce sous jacent.

Les actifs dérivés sont des sortes de paris sur d'autres actifs ; ils n'ont donc de sens qu'en univers aléatoire.

Sous jacent : valeur quelconque dont l'évolution future est incertaine

Les actifs dérivés

<u>Exemples de sous jacent</u>:

- biens matériels
- matières premières
- obligations
- actions
-indice de taux d’intérêt
-indice boursier
-indice de sinistralité en assurance

Les actifs dérivés

<u>2 grandes familles d'actifs dérivés</u> :

Les contrats à terme

(futures, forward,..)

Obligation d'exercice

Les options

(call , put)

Droit d'exercice

Contrat à terme

Contrat à terme : contrat entre deux parties portant sur la livraison d'une valeur à une date future fixée et pour un prix fixé à l'avance et payé au moment de la livraison
(obligation d'achat aux conditions initialement convenues)

acheteur: position longue
vendeur : position courte

Forward contract : contrat à terme entre 2 parties privées non négociable sur un marché organisé
Future contract : contrat à terme standardisé et négocié sur des marchés financiers

Contrat à terme

Valeur d'un contrat à terme :

Payoff : flux financier généré par l'actif dérivé:

T = maturité du contrat à terme
F= prix fixé à l'avance
S(T) = prix réel de marché observé à l'instant T

V(T) = S(T) – F (position longue)
Pricing:
V(0) = ?????

Les options

<u>Option</u> : idem qu'un contrat à terme mais on remplace l'*obligation* d'achat ou l'obligation de vendre par le *droit* d'acheter (call) ou le droit de vendre (put)

<u>Option européenne</u> : titre financier donnant le droit d'acheter (call) ou de vendre (put) à une date future fixée une valeur (=sous jacent) à un prix déterminé d'avance (= prix d'exercice)

<u>Option américaine</u> : titre financier donnant le droit d'acheter (call) ou de vendre (put) tout au long d'un intervalle une valeur à un prix déterminé d'avance

Les options

<u>2 parties contractantes</u> :

acheteur de l'option /détenteur de l'option :

celui qui peut exercer le droit

vendeur de l'option/ émetteur de l'option :

celui qui s'engage

Dans la suite de ce cours on se limitera à l'étude des options européennes sauf mention contraire.

Exemple de call

Utilisation d’une ***option d’achat (CALL) :***

Je suis intéressé par l’achat d’une action de la société ACTUDREAM qui vaut aujourd’hui 30 €.
Je ne désire acheter cette action que dans 6 mois mais je crains une hausse du cours à ce moment là. Je suis prêt dans 6 mois à payer jusqu’à 35 € mais pas plus.

J’achète une option européenne d’achat de sous jacent ACTUDREAM de prix d’exercice 35€ et de maturité 6 mois.

Je paie initialement une prime pour cette garantie (prix de l’option).

Exemple de call

<u>Utilisation d'une ***option d'achat (CALL) :***</u>

Au bout de 6 mois , 2 scénarios peuvent se produire :

- *exercice de l'option* : le cours de ACTUDREAM a dépassé effectivement le cours de 35 € ; par exemple 42 €.
Dans ce cas je peux acheter au cours de 35€ un produit valant 42 € ; mon option m'a donc rapporté 42€-35€=7€

- *Non exercice de l'option* : le cours de ACTUDREAM est en dessous de 35 € ; par exemple 32 €. Dans ce cas la protection à 35 € ne sert à rien . Mon option ne vaut rien.

Exemple de put

Utilisation d'une ***option de vente(PUT***) :

J'investis pour compte de mon client un montant de 3500€ dans des actions GENERADREAM de cours initial 35 €.
Je lui garantis sur 1 an un intérêt minimal de 4.75 %.
Dans un an , je veux être sûr en revendant mes actions d'en obtenir au moins un montant égal à : 3666.25 €

J'achète 100 options de vente (put) sur le sous jacent GENERADREAM de prix d'exercice 36.66 € et de maturité 1 an.

Exemple de put

Utilisation d'une ***option de vente(PUT***) :

Au bout d'un an , 2 scénarios peuvent se produire :

- *exercice de l'option* : le cours de GENERADREAM est en dessous du cours de 36.66 € ; par exemple 32 €.
Dans ce cas je peux vendre au cours de 36.66€ un produit valant 32 € ; chaque option m'a donc rapporté 36.66€-32€ =4.66€

- *Non exercice de l'option* : le cours de GENERADREAM dépasse 36.66 € ; par exemple 37 €. Dans ce cas je vend au cours marché de 37 € et la protection à 36.66 € ne sert à rien .
Mon option ne vaut rien.

Les options

L’acquisition de produits dérivés tels que les options peut être dictée par deux types de préoccupation diamétralement opposées :

- MOTIF de **COUVERTURE** (Hedging) :
  Couverture d’un portefeuille d’actifs financiers contre certains risques par l’achat de dérivés
  (« position d’assuré »)
- MOTIF de **SPECULATION** :
  Prise de risque importante contre un espoir de rentabilité moyenne supérieure
  (« position d’assureur »)

Les options

	Acheteur	**Vendeur**
CALL	Droit d'acheter l'actif	Obligation de vendre l'actif
PUT	Droit de vendre l'actif	Obligation d'acheter l'actif

Valorisation d'une option

Valeur d'un option d'achat européenne (call européen) :
Payoff : flux financier généré par l'actif dérivé:

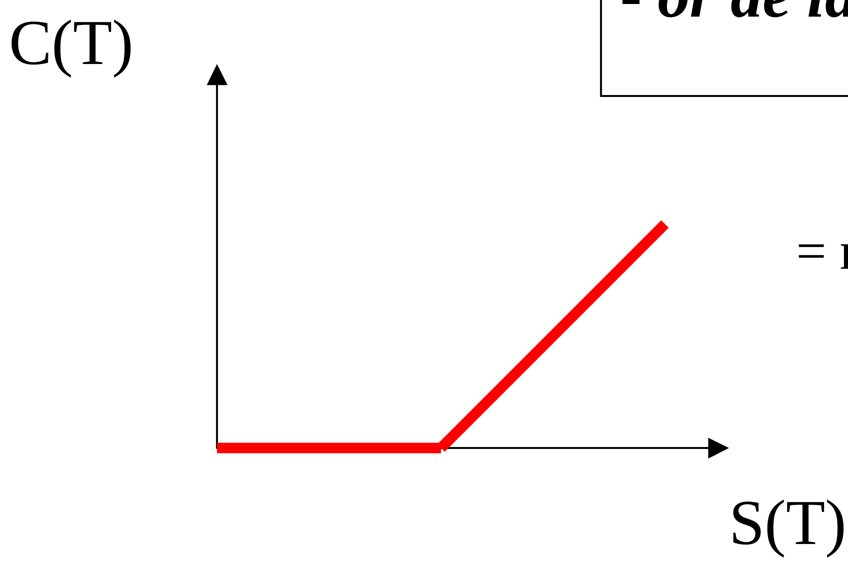
T = maturité du contrat à terme
K = prix d'exercice
S(T) = prix réel de marché observé à l'instant T

V(T) =max (S(T) – K ; 0)

Pricing:
V(0) = ?????

Call : forme du payoff :

- ***dans la monnaie*** : K < S(T)
- ***à la monnaie*** : K = S(T)
- ***or de la monnaie*** : K > S(T)



$= \max \{0, S(T) - K\}$

Valorisation d'une option

Hypothèses sur les marchés financiers :

1° ***marchés supposés parfaits*** **:**

- aucun investisseur n'est dominant

(financial agents are price takers and not price makers)

- les investisseurs sont rationnels

(financial agents prefer more to less)

- les titres sont infiniment divisibles
- pas de coût de transactions
- pas de taxes

(frictionless market)

- pas de restrictions sur crédit

Valorisation d'une option

<u>Hypothèses sur les marchés financiers</u> :

2° ***existence d'un titre sans risque de rendement certain*** r

3° ***absence d'opportunités d'arbitrage***

Opportunité d'arbitrage : machine à fabriquer du profit sans risque et sans investissement initial

<u>Modélisation sur une période :</u>

valeur initiale investie : X(0) = 0 (pas d'investissement)

valeur finale obtenue :

$$X(1,\omega) \geq 0 \ \ pour\ tous\ les\ scenarios\ \omega\ (\ sans\ risque\ )$$

$$X(1,\omega_0) > 0 \ \ pour\ au\ moins\ un\ scenario\ \omega_0\ (\ avec\ profit\ )$$

Valorisation d'une option

Exemple d'opportunités d'arbitrage

Supposons qu'il existe sur le marché 2 portefeuilles donnant exactement en t=1 les mêmes cash flows dans tous les cas mais de prix initiaux différents. Il y a alors opportunité d'arbitrage.

$X(1,\omega) = Y(1,\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ et $X(0) > Y(0)$

Soit $M = X(0) - Y(0)$

Valorisation d'une option

Le portefeuille W suivant réalise une opportunité d'arbitrage :
- achat de M unités du titre sans risque
- achat du portefeuille Y
- vente à découvert du portefeuille X

Prix initial :

$$W(0) = M + Y(0)-X(0) = 0$$

Situation finale:

$$W(1) = M\,(1+r) +Y(1) - X(1) = M(1+r) > 0$$

Valorisation d’une option

<u>Propriétés des options</u> :

1° Principe de parité des options européennes:

lien entre call et put de mêmes caractéristiques

2° Bornes sur les prix des options européennes

3° Principe de non optimalité du call américain

4° Valeur en univers déterministe des options européennes

Valorisation d'une option

Notations et hypothèses :

- S = valeur de l'actif sous jacent sans dividende
  $\{S(t, \omega) \,;\, t \in [0, T], \omega \in \Omega \}$
  (processus stochastique supposé non négatif)
- K = prix d'exercice = strike
- T = durée totale du contrat d'option
- t = temps courant
- u = 1+r = taux de capitalisation au taux sans risque
- C(S,t,K) = valeur à l'instant t de l'option call sur le sous jacent S de prix d'exercice K
- P(S,t,K) = valeur à l'instant t de l'option put sur le sous jacent S de prix d'exercice K

Valorisation d'une option

Propriété 1 : Principe de parité put/call européen :

$$C(S,t,K)+K(1+r)^{-(T-t)}=P(S,t,K)+S$$

Démonstration :

- les deux membres de l'égalité représentent le prix à l'instant t de deux portefeuilles donnant à la date finale T les mêmes cash flows quel que soit l'état du monde;
- par absence d'arbitrage les prix de ces deux portefeuilles doivent coincider à l'instant courant t

Valorisation d'une option

a) *Membre de gauche* :

- achat de titres sans risque donnant à l'échéance K
- achat d'une option d'achat permettant d'acquérir en T l'action au prix K

valeur en T = max (S(T); K)

b) *Membre de droite* :

- achat de l'action
- achat d'une option de vente permettant de vendre en T l'action au prix K

valeur en T = max (S(T); K)

Valorisation d'une option

Propriété 2 : bornes sur les prix :

$$\boxed{\max(0, S - K(1+r)^{-(T-t)}) \leq C(S,t,K) \leq S}$$

Démonstration : en 3 parties

1° $C \geq 0$: evident : c'est un droit sans obligation!

2° $C \leq S$: évident : l'action vaut plus que le droit de l'acheter !

3° $C \geq D = S - K(1+r)^{-(T-t)}$ quand $D > 0$: par arbitrage

Valorisation d'une option

Montrer que sinon le portefeuille suivant réalise une opportunité d'arbitrage :

- achat du call
- achat de $K(1+r)^{-(T-t)}$ titres sans risque
- vente à découvert du sous jacent S

Propriété 2 bis : équivalent pour les put :

$$\boxed{\max\left(K(1+r)^{-(T-t)} - S, 0\right) \leq P(S,t,K) \leq K}$$

Valorisation d'une option

Corollaire : quelle que soit l'évolution de l'actif sous jacent, la valeur du put est bornée supérieurement par une constante ; ce n'est pas le cas du call .

$$P(S,t,K) \leq K$$ Borne déterministe

$$C(S,t,K) \leq S$$ Borne aléatoire

Option américaine

Propriété 3 : Il n'est jamais optimal d'exercer un call américain avant terme et donc:

call américain= call européen

Démonstration : par l'absurde

Supposons que l'option américaine soit exercée en t < T.

Cash flow obtenu :

$$S(t)-K$$

Par la propriété 2 il vient :

$$S(t)-K < S(t)-K\,(1+r)^{-(T-t)} \leq C(S,t,K)$$

Il aurait donc mieux valu garder le call européen et ne pas exercer le call américain

Option américaine

Propriété 3 bis : pour un put américain par contre il peut être optimal d’exercer l’option avant l’échéance et donc :

put américain > put européen

Exemple :

- taux sans risque r = 10%
- prix d’exercice = 20 €
- valeur du sous jacent en t=0 = 1€
- T=1

2 stratégies : exercer l’option en t=0 ou en t=1

Option américaine

- exercice immédiat de l’option put en t=0 :

Valeur en t=0 : 19 €
Valeur capitalisée en t=1 : 19€ . 1,1= **20,9 €**

- exercice différé de l’option put en t=1 :

Valeur en t=1 : toujours bornée par le strike **20 €**

Le put américain vaudra donc plus que le put européen dans ce cas.

Valorisation d'une option

Propriété 4 : valeur en univers déterministe du call européen

Le payoff de l'option call devient alors certain puisqu'on connaît dans ce cas la valeur finale S(T)

payoff du call en T = max (0; S(T)-K)
valeur à l'instant t = valeur actuelle au taux sans risque

$$C(S,t,K) = (1+r)^{-(T-t)} \max(0; S(T) - K)$$

1.3. Options exotiques

Options européennes et américaines = options « standard »
Ou « *vanilla options* » .

- options négociables

Autres options : options exotiques
ou « *exotic options* »

- options « à la carte » , moins liquides

Options lookback

Options sur minimum/ maximum

Call lookback :

Titre financier donnant le droit d'acheter à une date future fixée une quantité fixée d'un actif financier à son prix minimum atteint tout au long de la période

Put lookback :

Titre financier donnant le droit de vendre à une date future fixée une quantité fixée d'un actif financier à son prix maximum atteint tout au long de la période

Options lookback

Call lookback :

Droit d'acheter au prix minimum

Strike :

$$K = S_m([0,T]) = \min_{\tau \in [0,T]} S(\tau)$$

Payoff :

$$V(T) = (S(T) - S_m([0,T]))^+ = (S(T) - S_m([0,T])$$

Options lookback

<u>**Put lookback :**</u>

Droit de vendre au prix maximum

Strike :

$$K = S_M([0,T]) = \max_{\tau \in [0,T]} S(\tau)$$

Payoff :

$$V(T) = (S_M([0,T]) - S(T))^+ = (S_M([0,T] - S(T))$$

Options lookback

Contrairement aux options européennes, les options lookback sont fortement dépendantes de la trajectoire (et pas seulement de la valeur finale du sous jacent)
(*strongly path-dependent options*)

Ceci en rend l'étude plus complexe .

Options asiatiques

Options sur moyennes

2 types d'options asiatiques :

1°) Options asiatiques à prix d'exercice fixe
(*sur prix moyen)*
2°) Options asiatiques à prix d'exercice flottant
(*sur strike moyen*)

D'autre part la moyenne peut être calculée de différentes manières : - discret / continu
- arithmétique / géométrique

Options asiatiques

Call asiatique à prix d'exercice fixé avec moyenne arithmétique discrète des cours :

- instants de capture des cours :

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \ldots \leq t_n \leq T$$

- moyenne arithmétique des cours :

$$MS(T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S(t_i)$$

(géométrique : $MS(T) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} S(t_i)}$)

Options asiatiques

Call asiatique à *prix d'exercice fixé* avec moyenne arithmétique discrète des cours :

Payoff de l'option :

$$V(T) = (MS(T) - K))^{+}$$

La même option mais à *prix d'exercice flottant* s'écrirait :

$$V(T) = (S(T) - MS(T)))^{+}$$

Options barrière

Options avec une barrière activante ou désactivante

Même type de payoff que les options européennes mais le paiement du payoff est soumis à une condition : durant la vie de l'option , il y a une barrière fixe par rapport à laquelle on compare le sous jacent.

Barrière activante (in) : l'option se met en activité si le cours du sous jacent traverse la barrière

Barrière désactivante (out) : l'option cesse définitivement ses effets si le cours du sous jacent traverse la barrière

Options barrière

Enfin, l'effet de la barrière peut jouer si on la traverse par le haut (down) ou par le bas (up) .

Par exemple , ***put up & out*** : put à barrière désactivante si le cours du sous jacent dépasse une certaine valeur B
(l'investisseur n'a plus besoin de la protection si le cours dépasse un certain niveau ; par rapport à une option européenne cela va réduire le prix de l'option)

Payoff : en supposant : $K < S(0) < B$

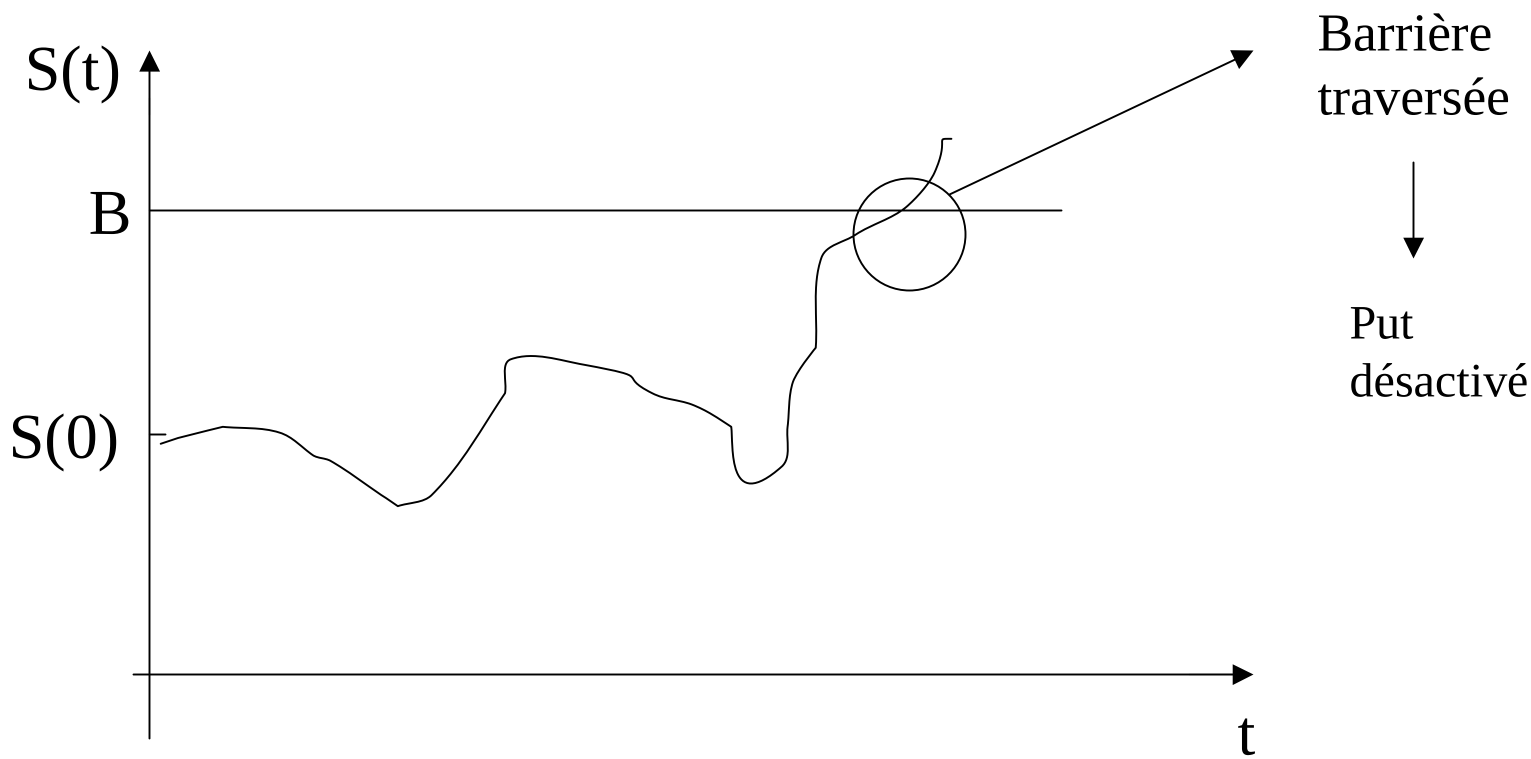
$$V(T) = (K - S(T))^{+} \; \Big| \; (S(t) < B \;\; \forall t)$$

Options barrière

L’investisseur n’a plus besoin de la protection si le cours dépasse un certain niveau ; par rapport à une option européenne cela va réduire le prix de l’option.

Il veut se protéger contre une baisse du cours mais il est prêt à abandonner cette protection si le cours augmente au dessus de la barrière.

Options barrière



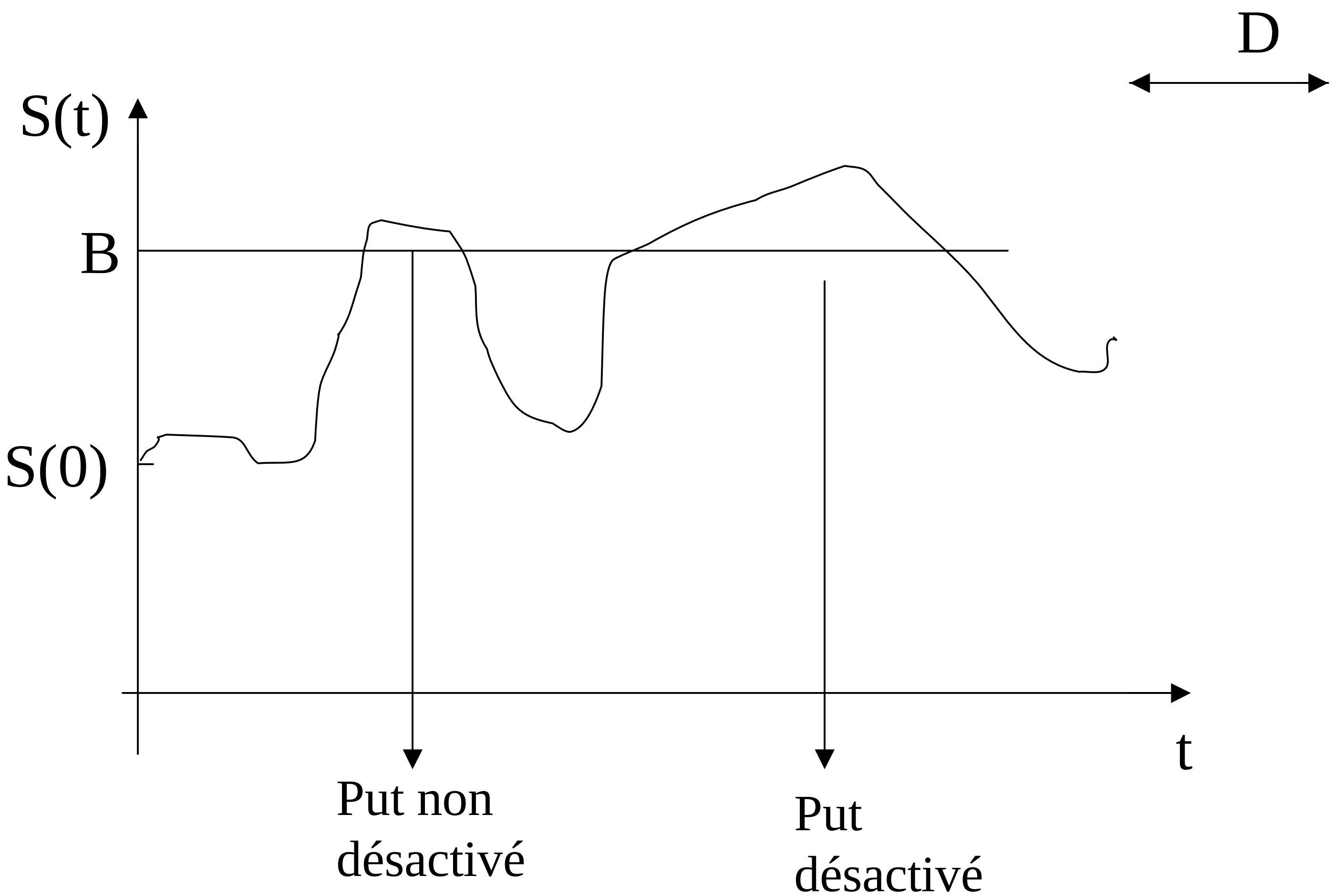
Options parisiennes

Variante des options barrière visant à éviter l'aspect de perte brutale de droit que peut générer une barrière dès qu'elle est traversée.

Par exemple dans un put up & out , il suffit que le cours accidentellement touche la barrière même pour une durée très courte pour que l'option meure.

Dans une option parisienne , pour que l'option soit désactivée on ajoute la condition dite de ***fenêtre*** : la condition de franchissement doit rester valable pendant une durée minimale de temps D.

Options parisiennes



Options d'échange

Titre financier donnant le droit à une date future fixée d'échanger un actif risqué contre un autre actif risqué.

L'option donne le droit d'échanger à une date future T fixée une unité d'un actif risque S1 contre une unité d'un autre actif risqué S2.

<u>Payoff :</u>

$$V(T) = \max(S_1(T) - S_2(T), 0)$$

$\longrightarrow$ *Acheter S1 au prix S2 / vendre S2 au prix S1*

1.4. Un premier exemple de pricing par arbitrage

<u>Option sur devise</u> : droit d'acheter à une date future une certaine quantité de monnaie étrangère à un cours garanti initialement

(sous jacent : taux de change)

Exemple : option en francs suisses contre $

$S(t,\omega)$ = taux de change effectif des francs suisses en $ à l'époque future t

K= taux de change garanti

Exemple

Exemple numérique :

$S(0) = 1.35$

$K= 1.45$

$S(1) = 1.75$ (proba 0.5) ($\omega1$)

$\quad\quad\;\; 0.80$ (proba 0.5) ($\omega2$)

achat de 1000 $

Valeur à l'échéance de l'option d'achat :

$C(1)= 1000 \max (S(1)-K;0)$

$= 300$ ($\omega1$)

$= 0$ ($\omega2$)

Valeur classique de l'option

Valeur à l'origine de l'option : ????

(hypothèse simple : taux d'intérêt nul)

1° réponse ? : *principe de l'espérance mathématique*:

C(0) = E C(1) = 150 ????

NON !

2° réponse ? : *principe d'utilité* :

prix différents suivant aversion au risque du vendeur ???

NON !

Théorie des options

<u>Réponse de la théorie des options</u> :

1° le prix de l’option est unique;

2° le prix de l’option ne dépend pas de la distribution réelle de probabilité du sous jacent
(*probabilité historique)*

3° le prix peut s’obtenir par application du principe de l’espérance mais après avoir changé la mesure de probabilité du sous jacent

4° le sous jacent (actualisé) est une martingale sous cette mesure modifiée *(mesure neutre risque*)

Exemple

Application numérique :

1° recherche de la mesure martingale (neutre risque):

$$1.35 = 1.75\, q + 0.8\, (1-q)$$

$$q = 55/95$$

2° principe de l'espérance sous Q :

$$C(0) = 300\, q + 0\, (1-q)$$

C(0)= 174

Principe de duplication

Justification à posteriori :

raisonnement par arbitrage : ***principe de duplication***

Portefeuille initial en t=0:

- vente de l'option au prix inconnu : x
- emprunt de z francs suisses : z
- achat de y dollars :-1.35y

Valeur initiale : $V(0) = x + z - 1.35y$

Principe de duplication

Portefeuille final en t=1 :

	ω1	**ω2**
-exercice option **-remboursement FS** **-vente $**	-300 -z 1.75y	0 -z 0.8y
Position finale V(1,ω)	1.75y-z-300	0.8y-z

Principe de duplication

Choix d'un portefeuille particulier :

y et z tel que V(1,ω1)= V(1,ω2)= 0

1.75y-z = 300
0;8y-z = 0

→ **y= 316 z= 253**

Raisonnement par arbitrage :

V(0)=0 sinon arbitrage

x=1.35y – z = **174**

Pricing et hedging

<u>Pricing et hedging</u> :

La méthode permet non seulement de tarifer le produit ; elle indique également comment se couvrir :

L'option peut être totalement dupliquée par la stratégie suivante constituée d'actifs connus (FS et $) :

- emprunt de 253 FS
- achat de 316 $

PRINCIPE DE DUPLICATION

PARTIE 2 :

Modélisations stochastiques discrètes

2.1 Modèle discret général

Hypothèses d'un modèle discret de marché :

- temps discret : t=0,1,2,…, T
- espace fini de probabilités :

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$$

- probabilité historique :

$$P(\{\omega_i\}) > 0 \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

- un titre non risqué : $1 \longrightarrow 1+r$
- K titres risqués

Modèle binomial

(COX, ROSS et RUBINSTEIN (1979))

Modèle de marché à 2 actifs sur une période:

- titre sans risque : 1 $\longrightarrow$ 1+r
- titre risqué : 1 $\longrightarrow$ u (proba q)
  $\searrow$ d (proba 1-q)

Absence d'opportunités d'arbitrage :

On doit nécessairement avoir:

$$d < (1+r) < u$$

Modèle binomial

Modèle binomial sur plusieurs périodes :

Les trajectoires du titre risqué suivent un arbre binomial.

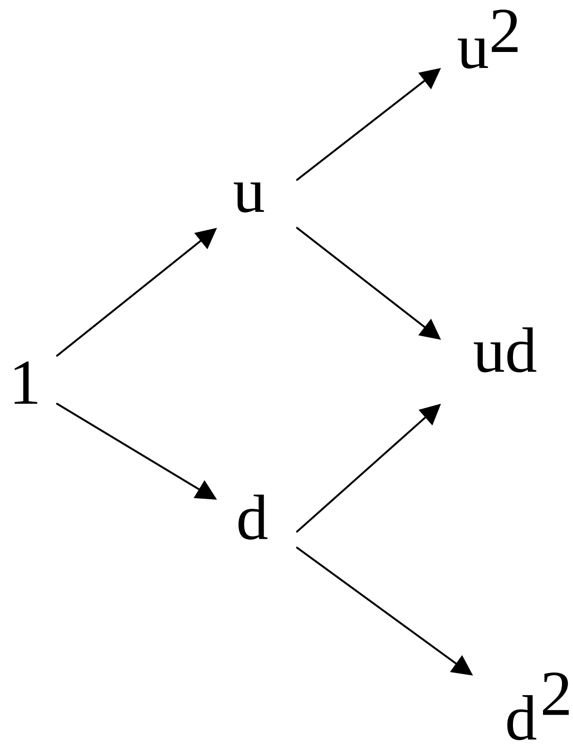
$$S(j) = S(0)\,u^{N(j)}\,d^{j-N(j)}$$

$$\text{où } N(j) = \text{nombre de mouvements up}$$

Propriété :les variables N(j) sont des variables binomiales de paramètre q et d'exposant j :

$$P(N(j)=k) = C_j^k\, q^k\,(1-q)^{j-k} \quad (k = 0,1,\ldots,j)$$

Modèle binomial



2.2. Modèle binomial de COX-ROSS-RUBINSTEIN

Hypothèses de marché :

1° marché parfait

2° modèle binomial

Problème:

tarification de l'option européenne d'achat sur l'actif risqué

-K= prix d'exercice

- C(0) =prix initial recherché du call

Modèle sur une période

Modèle de tarification sur une période :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & uS \\ S=S(0) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & dS \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & C(u)=\max(uS-K;0) \\ ?=C(0) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & C(d)=\max(dS-K;0) \end{tikzcd}$$

(Sous jacent) (option)

Modèle sur une période

Construction d'un portefeuille de duplication:

- x titres sous jacents
- y titres sans risque

Dupliquant en $t = 1$ les effets de l'option :

$$x\,uS + y\,(1+r) = C(u)$$
$$x\,dS + y\,(1+r) = C(d)$$

Le prix initial de l'option sera alors:

$$C(0) = x\,S + y$$

Modèle sur une période

Solution du portefeuille de duplication :

$$x = \frac{C(u) - C(d)}{(u - d)S}$$

$$y = \frac{uC(u) - dC(d)}{(1+r)(u - d)}$$

Prix de l'option

$$C(0) = \frac{C(u) - C(d)}{(u - d)S} S + \frac{uC(d) - dC(u)}{(1+r)(u - d)}$$

Modèle sur une période

<u>Forme risque neutre du prix :</u>

$$C(0)=\frac{1}{1+r}\left(C(u)\frac{1+r-d}{u-d}+C(d)\frac{u-(1+r)}{u-d}\right)$$

ou

$$C(0)=\frac{1}{1+r}(p\,C(u)+(1-p)C(d))$$

avec

$$p=\frac{1+r-d}{u-d}$$

Modèle sur une période

Le nombre p est appelé probabilité risque neutre

a) Probabilité : $0 < p < 1$??

résulte de la relation de non arbitrage:

$d < (1+r) < u$

b) Risque neutre :sous cette mesure le rendement moyen du titre risqué correspond au taux sans risque

$$p\,u + (1-p)\,d = 1+r \longrightarrow p=(1+r-d) / (u-d)$$

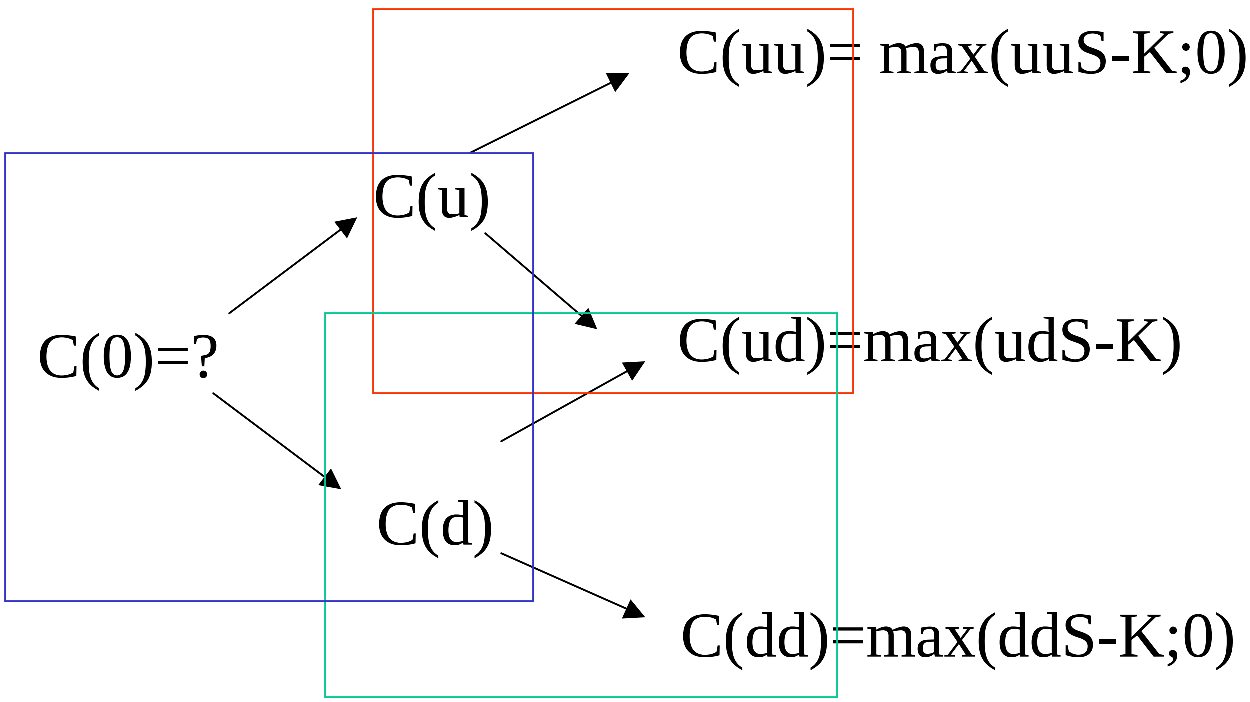
Modèle sur deux périodes

Modèle de tarification sur 2 périodes :

$$
\begin{tikzcd}
 & & C(uu)= \max(uuS-K;0) \\
 & C(u) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
C(0)=? \arrow[ur] \arrow[dr] & & C(ud)=\max(udS-K) \\
 & C(d) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & C(dd)=\max(ddS-K;0)
\end{tikzcd}
$$

Modèles sur deux périodes

<u>Décomposition en 3 problèmes sur une période</u>



Modèle sur deux périodes

$$C(u) = \frac{1}{1+r}(p\,C(uu) + (1-p)C(ud))$$

$$C(d) = \frac{1}{1+r}(pC(ud) + (1-p)\,C(dd))$$

$$C(0) = \frac{1}{1+r}(p\,C(u) + (1-p)\,C(d))$$

Le prix sur 2 périodes est donc :

$$\boxed{C(0) = \frac{1}{(1+r)^2}(p^2C(uu) + 2p(1-p)C(ud) + (1-p)^2\,C(dd))}$$

Modèle sur n périodes

Modèle de tarification sur n périodes :

$$\boxed{C(0) = \frac{1}{(1+r)^n}\left(\sum_{j=0}^{n} C_n^j p^j (1-p)^{n-j} \max(u^j d^{n-j} S - K; 0)\right)}$$

Forme alternative du prix :

Fonction de répartition d'une variable binomiale:

$$\Phi(x;n,p) = P(Bin(n;p) \geq x) = \sum_{j=x}^{n} C_n^j p^j (1-p)^{n-j}$$

Modèle sur n périodes

Soit: $a = \min\{k \in N : u^k d^{n-k} S > K\}$

=nombre minimum de sauts à la hausse pour que l'option puisse être exercée.

$$C(0) = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=a}^{n} C_n^j \, p^j (1-p)^{n-j} (u^j d^{n-j} S - K)$$

$$= I - II$$

Modèle sur n périodes

$$I = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=a}^{n} C_n^j p^j (1-p)^{n-j} u^j d^{n-j} S$$

$$I = S \sum_{j=a}^{n} C_n^j \frac{(pu)^j}{(1+r)^j} \frac{((1-p)d)^{n-j}}{(1+r)^{n-j}}$$

$$I = S \sum_{j=a}^{n} C_n^j p_1{}^j q_1{}^{n-j}$$

$$\text{avec} : p_1 = \frac{pu}{(1+r)} \quad \text{et} \quad q_1 = \frac{(1-p)d}{(1+r)}$$

Modèle sur n périodes

Montrons que : $\boxed{\begin{array}{l} a)\ p_1 + q_1 = 1 \\ b)\ 0 < p_1 < 1 \end{array}}$

$$a)\ p_1 + q_1 = \frac{pu}{(1+r)} + \frac{(1-p)d}{(1+r)} = \frac{p(u-d)+d}{(1+r)}$$

$$= \frac{\frac{1+r-d}{u-d}(u-d)+d}{(1+r)} = 1$$

b) résulte de : $d < 1+r < u$

Modèle sur n périodes

$$I = S\,\Phi(a;n,p_1)$$

De même :

$$II = K\frac{1}{(1+r)^n}\Phi(a;n,p)$$

Finalement le prix de l'option peut s'écrire :

$$\boxed{C(0) = S\,\Phi(a;n,p_1) - K\frac{1}{(1+r)^n}\Phi(a;n,p)}$$

Risque neutre

<u>Remarque sur principe de pricing risque neutre:</u>
preuve simple de la nécessité de changer de mesure:

Par l'absurde: application du principe de l'espérance au titre risqué avec mesure historique dans le modèle binomial sur une période:

$$\left(X(0) = \frac{1}{1+r} E(X(1)) \right)$$

$$?? \; S(0) = \frac{1}{1+r} E(S(1)) = \frac{qu + (1-q)d}{(1+r)} S(0) \neq S(0)$$

Exemple binomial

On considère un marché financier constitué de deux titres :
- *un titre sans risque* de rendement 4%
-*un titre risqué* pouvant rapporter de manière équiprobable du 11 % et du 1%.

La valeur initiale du titre est de 30€.

Calculer le prix du call sur une période pour un strike de 31€.
Calculer le prix d'un put sur deux périodes si on veut au moins réaliser sur le sous jacent un return égal au taux sans risque.

Exemple binomial

Prix du call sur une période :

$$C(0) = \frac{1}{1+r}(pC(u) + (1-p)C(d))$$

$$= \frac{1}{1{,}04}\{\frac{1{,}04-1{,}01}{1{,}11-1{,}01} \times (30€ \times 1{,}11 - 31€)^{+}$$

$$+ (1 - \frac{1{,}04-1{,}01}{1{,}11-1{,}01}) \times (30€ \times 1{,}01 - 31€)^{+}\}$$

$$= \frac{1}{1{,}04} \times 0{,}3 \times 2{,}3€ = 0{,}66\,€$$

Exemple binomial

Prix du put sur deux périodes :

$$P(0) = \frac{1}{(1+r)^2}(p^2 P(uu) + 2p(1-p)P(ud) + (1-p)^2 P(dd))$$

$$\text{strike} = 30€ \times (1{,}04)^2 = 32{,}45\,€$$

$$P(0) = \frac{1}{(1{,}04)^2}\{(0{,}3)^2 \times (32{,}45 - 30 \times 1{,}11^2)^+$$

$$+ 2 \times 0{,}3 \times 0{,}7 \times (32{,}45 - 30 \times 1{,}11 \times 1{,}01)^+$$

$$+ (0{,}7)^2 \times (32{,}45 - 30 \times 1{,}01^2)^+\} = 0{,}84\,€$$

2.3. Théorème général de tarification risque neutre

<u>Modèle général d'arbitrage sur une période :</u>

- espace des temps : {0,1}

-espace de probabilités :

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$$

-mesure de probabilité historique :

$$P(\{\omega_i\}) > 0 \ (\forall i = 1, \ldots, N)$$

-K+1 titres :

$$S^j(1,i) = \text{valeur en 1 de l'actif } j \text{ à l'état } i$$

Théorème général de tarification risque neutre

-<u>*1 titre non risqué*</u> : titre 0

$$S^0(0) = 1$$

$$S^0(1,i) = 1 + r$$

$$\beta(1) = \frac{1}{S^0(1)} = \frac{1}{1+r} = \text{actualisation}$$

-<u>*K titres risqués*</u> :titres 1,…,K

$$S^j(0) = \text{prix initial actif j}$$

Théorème général de tarification risque neutre

-<u>stratégie</u> : vecteur :

$$\Phi = (\Phi^0, \Phi^1, \Phi^2, ..., \Phi^K)$$

$$\Phi^j = \text{investissement dans actif } j$$

-<u>valeur initiale de la stratégie (prix en t=0)</u> :

$$V_0(\Phi) = \sum_{j=0}^{K} \Phi_j S^j(0)$$

-<u>valeur finale de la stratégie (payoff en t=1):</u>

$$V_1(\Phi, i) = \sum_{j=0}^{K} \Phi_j S^j(1, i) = \text{variable aléatoire}$$

Théorème général de tarification risque neutre

-Opportunités d'arbitrage :

(*Offering something for nothing)*

(Free lunch)

Stratégie Φ^* telle que:

$$(i)\ V_0(\Phi^*) \leq 0$$

$$(ii)\ V_1(\Phi^*, i) \geq 0 \ \ (\forall i = 1, \ldots, N)$$

$$(iii)\ \exists i^* : V_1(\Phi^*, i^*) > 0$$

-hypothèse centrale : absence d'opportunité d'arbitrage

Théorème général de tarification risque neutre

-State price : variable aléatoire $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_N)$ telle que :

$$\boxed{S^j(0) = \sum_{i=1}^{N} \Psi_i \, S^j(1,i)} \quad (\forall j = 0,1,\ldots,K)$$

existence ? unicité?

avec $\forall i : \Psi_i > 0$

Les state prices sont les mêmes pour tous les actifs ; ils ne dépendent que des scénarios.

-Déflateurs : variable aléatoire D définie par :

$$\boxed{D_j = \frac{\Psi_j}{P(\{\omega_j\})}}$$

Théorème général de tarification risque neutre

-<u>Propriétés des state prices</u> :

1° *application pour actif non risqué*:

$$\sum_{i=1}^{N} \Psi_i = \frac{1}{1+r}$$

2° *application pour une stratégie* :

$$V_0(\Phi) = \sum_{j=0}^{K} \Phi_j \, S^j(0) = \sum_{j=0}^{K} \Phi_j \sum_{i=1}^{N} \Psi_i \, S^j(1,i)$$

$$\boxed{V_0(\Phi) = \sum_{i=1}^{N} \Psi_i \, V_1(\Phi,i)}$$

Théorème général de tarification risque neutre

-<u>Interprétation financière des state price :</u>

Ψ_i = prix en t=0 d'un actif donnant en t=1:

- 1 si état i
- 0 sinon

-<u>Probabilités risque neutre :</u>

$$\text{soit } \Psi_s = \sum_{i=1}^{N} \Psi_i = \frac{1}{1+r} \neq 1$$

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_N) = \left(\frac{\Psi_1}{\Psi_s}, \frac{\Psi_2}{\Psi_s}, \ldots, \frac{\Psi_N}{\Psi_s}\right)$$

Théorème général de tarification risque neutre

On a :

$$\text{(i)}\ \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

$$\text{(ii)}\ 0 < p_i < 1$$

$$\text{(iii)}\ \text{vecteur } p = \text{mesure risque neutre}$$

$$= \text{mesure martingale}$$

$$V_0(\Phi) = \sum_{i=1}^{N} \Psi_i\, V_1(\Phi, i) = \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^{N} p_i\, V_1(\Phi, i)$$

$$\boxed{V_0(\Phi) = \frac{1}{1+r} E^*(V_1(\Phi))}$$

Théorème général de tarification risque neutre

Théorème fondamental :

Il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage
ssi
Il existe un state price
ssi
Il existe une mesure risque neutre

Théorème général de tarification risque neutre

Propriété générale de tarification :

Soit X une variable aléatoire non négative payable en t=1

(droit conditionnel)

(i) S'il existe une stratégie Φ dupliquant exactement X:

$$V_1(\Phi, i) = X(\omega_i) \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

(ii) Si le marché est sans opportunité d'arbitrage alors:

Le prix à l'origine de X est unique et est donné par:

$$\boxed{V_0(X) = \frac{1}{1+r} E^*(X)}$$

Théorème général de tarification risque neutre

Dans ce cas :- l'actif admet un prix unique
- il existe une stratégie de hedging permettant de se couvrir parfaitement.

On dit alors que le droit conditionnel est réalisable

DEFINITION : un marché complet est un marché où tout droit conditionnel est réalisable

COROLLAIRE: dans un marché complet et sans opportunité d'arbitrage tout droit conditionnel admet un prix unique et peut être couvert parfaitement par duplication

Théorème général de tarification risque neutre

<u>CONDITION DE COMPLETUDE DU MARCHE :</u>

lié dans le modèle à une période au nombre d'actifs par rapport au nombre d'aléas.

N aléas
K+1 titres

<u>Marché non redondant :</u> éviter les actifs dépendants: aucun actif ne peut s'écrire comme combinaison linéiare des autres .

$$\Rightarrow K+1 \leq N$$

« pas trop d'actifs »

Théorème général de tarification risque neutre

<u>Condition de complétude</u> : étant donné tout droit X
le système d'équations suivant doit admettre une solution:

$$X(\omega_1) = \phi_0 S^0(1) + \phi_1 S^1(1,1) + \ldots + \phi_K S^K(1,1)$$

$$X(\omega_2) = \phi_0 S^0(1) + \phi_1 S^1(1,2) + \ldots + \phi_K S^K(1,2)$$

....

$$X(\omega_N) = \phi_0 S^0(1) + \phi_1 S^1(1,N) + \ldots + \phi_K S^K(1,N)$$

Système de N équations à K+1 inconnues

Complétude ssi N=K+1

«Assez d'actifs »

Théorème général de tarification risque neutre

<u>Caractérisation des marchés complets :</u>

Un marché non redondant et sans opportunités d'arbitrage est complet ssi il existe une unique mesure risque neutre

Equation du state price :

$$S^j(0) = \sum_{i=1}^{N} \Psi_i S^j(1,i) \quad (j = 0,1,\ldots,K)$$

Système de K+1 équations à N inconnues (unicité si K=N+1).

Théorème général de tarification risque neutre

Ces différentes propriétés se généralisent dans un marché à plusieurs périodes :

Théorème de non arbitrage: équivalence entre l'absence d'opportunités d'arbitrage et l'existence de mesure risque neutre

Théorème de complétude : équivalence entre la complétude et l'unicité de la mesure neutre risque

Théorème de tarification risque neutre:dans un marché complet et sans opportunité d'arbitrage le prix de tout droit conditionnel est la valeur actuelle de sa valeur espérée sous la mesure risque neutre

Théorème général de tarification risque neutre

Tarification dans un marché incomplet (sans opportunités):

- pas d'unicité de la mesure risque neutre
- unicité du prix des droits conditionnels réalisables
- il existe des droits conditionnels non réalisables; dans ce cas il n'y a plus unicité du pricing risque neutre

Exemple de marché complet :

modèle binomial:

$N=2$

$K+1=2$

Théorème général de tarification risque neutre

Exemple de marché incomplet : ***Modèle trinomial***

Modèle de marché à 2 actifs sur une période:

- titre sans risque : $1 \longrightarrow 1+r$

- titre risqué : $1 \longrightarrow$

$1+a$ $(p=1/3)$ (ω_1)

$1-a$ $(p=1/3)$ (ω_2)

1 $(p=1/3)$ (ω_3)

Théorème général de tarification risque neutre

1° *<u>Absence d'opportunité d'arbitrage?</u>* : existence de mesure neutre risque ?

Mesure : $p^* = (\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta)$ telle que :

$$(\alpha(1+a)+\beta(1-a)+(1-\alpha-\beta)) = 1+r$$

$$(\text{avec } 0<\alpha<1\,;\ 0<\beta<1;\ 0<1-\alpha-\beta<1)$$

Solution :

$$\alpha = \frac{r}{a}+\beta$$

Existence si r < a ; dans ce cas pas d'opportunités

Théorème général de tarification risque neutre

2° *marché incomplet* : infinité de mesures risque neutre !!

$$\Re = \{(\frac{r}{a} + \beta; \beta; 1 - \frac{r}{a} - 2\beta);\ 0 < \beta < \frac{1}{2} - \frac{r}{2a}\}$$

3° *droit conditionnel non réalisable* : exemple d'une option d'achat sur le titre risqué de prix d'exercice c avec:

$$1-a<1<c<1+a$$

$$X(\omega_1) = 1 + a - c$$

$$X(\omega_2) = X(\omega_3) = 0$$

Théorème général de tarification risque neutre

Recherche d'une stratégie duplicante :

$(\phi_0;\phi_1)$ tel que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \phi_0(1+r)+\phi_1(1+a)=1+a-c \\ \phi_0(1+r)+\phi_1=0 \\ \phi_0(1+r)+\phi_1(1-a)=0 \end{array}}$$

….pas de solution…

Théorème général de tarification risque neutre

4° *inadéquation de la formule de tarification neutre risque*:

$$? \; V_0(X) = \frac{1}{1+r} E_q(X) \text{ avec } q \in \Re$$

- en prenant deux mesures différentes on obtient deux prix différents *(exercice)*

2.4 Modèle de courbe de taux

-Modélisation de l'incertitude sur les taux d'intérêt futurs

- Point de départ : modèle de courbe de taux zéro coupons déterministe

- Modèle de HO et LEE : modèle discret de déformation progressive de la courbe des taux ; logique probabiliste binomiale.

Modèle déterministe

- Structure temporelle de la courbe des taux dans un monde déterministe :

-structure initiale de la courbe :

$$\{P(0,s),\ s = 1,2,\ldots,T\}$$

$$P(0,s) = \frac{1}{(1+R(0,s))^{s}} = \frac{1}{(1+r(0,1))(1+r(0,2)\ldots(1+r(0,s))}$$

Comment ces courbes évoluent-elles dans le temps?

$P(n,s) =$ Prix en n d'un zéro coupon de durée s

Modèle déterministe

-<u>invariance de l'actualisation en déterministe</u>:

$$r(n,s) = r(n-1,s+1)$$

-<u>taux au comptant</u> :

$$\begin{aligned}(1+R(n,s))^s &= (1+r(n,1))(1+r(n,2)\ldots(1+r(n,s)) \\ &= (1+r(n-1,2)(1+r(n-1,3)\ldots(1+r(n-1,s+1)) \\ &= (1+R(n-1,s+1))^{s+1}/(1+R(n-1,1)\end{aligned}$$

<u>Zéro coupons</u>

$$\boxed{P(n,s) = P(n-1,s+1)/P(n-1,1)}$$

Modèle stochastique

-Modèle stochastique :

$P^{(i)}(s,n) =$ Prix d'un zéro coupon à l'instant s de durée n si état i

-*initialisation*: en s=0 un seul état (structure observée):

$$P^{(0)}(0,s)$$

-*première déformation* en s=1 : 2 états possibles de la courbe:

$$P^{(0)}(1,s) \text{ et } P^{(1)}(1,s)$$

(soit une hausse des taux soit une baisse des taux)

Modèle stochastique

En **déterministe** :

$$P(1,s)=\frac{P(0,s+1)}{P(0,1)}$$

En **aléatoire**:

-état 0 : *hausse des taux* (baisse des prix):

$$\boxed{P^{(0)}(1,s)=\frac{P^{(0)}(0,s+1)}{P^{(0)}(0,1)}\,h^*(s)}\quad (h^*(s)<1\quad h^*(0)=1)$$

-état 1 : *baisse des taux* (hausse des prix)

$$\boxed{P^{(1)}(1,s)=\frac{P^{(0)}(0,s+1)}{P^{(0)}(0,1)}\,h(s)}\quad (h(s)>1\quad h(0)=1)$$

Modèle stochastique

D'une manière générale à l'instant n+1 et venant de l'état i à l'instant n, 2 possibilités :

$$P^{(i)}(n+1,s) = \frac{P^{(i)}(n,s+1)}{P^{(i)}(n,1)}\, h^*(s) \quad (h^*(s) < 1 \;\; h^*(0) = 1)$$

$$P^{(i+1)}(n+1,s) = \frac{P^{(i)}(n,s+1)}{P^{(i)}(n,1)}\, h(s) \quad (h(s) > 1 \;\; h(0) = 1)$$

Modèle stochastique

<u>Forme explicite des fonctions de déformations h et h*:</u>

2 conditions complémentaires:

- *condition d'arbitrage*
- *condition de neutralité* :
  baisse+hausse = hausse + baisse

Lien entre
h et h*

Forme de h

Modèle stochastique

1° Condition d'arbitrage :

Il existe une constante p (0 <p< 1) appelée probabilité binomiale implicite telle que :

$$\boxed{p\,h(s) + (1-p)\,h^*(s) = 1} \qquad (\forall s)$$

Démonstration:

Constitution à l'instant n à l'état i d'un portefeuille :

- un zéro coupon de maturité s
- H zéro coupons de maturité s'.

$$W^{(i)}(n) = P^{(i)}(n,s) + H\,P^{(i)}(n,s')$$

Modèle stochastique

-On choisit H tel que :

$$W^{(i)}(n+1) = W^{(i+1)}(n+1)$$

-ce portefeuille est donc sans risque et son rendement doit correspondre à celui d'un zéro coupon entre les instants n et n+1

-on en déduit :

$$\frac{1-h*(s-1)}{(h(s-1)-h*(s-1))} = \frac{1-h*(s'-1)}{(h(s'-1)-h*(s'-1))} = p$$

Modèle stochastique

Corollaire de la condition d'arbitrage :en sustituant dans la relation d'arbitrage h et h*par leur définition on obtient :

$$\boxed{P^{(i)}(n,s+1) = P^{(i)}(n,1).(p\,P^{(i+1)}(n+1,s) + (1-p)P^{(i)}(n+1,s))}$$

(espérance actualisée des prix futurs sous la distribution implicite- **principe de tarification risque neutre**)

Modèle stochastique

2°) <u>Condition de neutralité</u> : indépendance par rapport au chemin suivi dans l'arbre

$$\begin{tikzcd}
& P^{(i+1)}(n+1,s+1) \arrow[dr, "(1)"] & \\
P^{(i)}(n,s+2) \arrow[ur, "(1)"] \arrow[dr, "(2)"'] & & P^{(i+1)}(n+2,s) \\
& P^{(i)}(n+1,s+1) \arrow[ur, "(2)"'] &
\end{tikzcd}$$

Modèle stochastique

En exprimant cette condition et en utilisant la condition d'arbitrage, il vient :

$$\frac{1}{h(s+1)} = \frac{1}{h(s)}\delta + (1-\delta)$$

Avec :

$$\delta = \frac{1-p\,h(1)}{h(1)-p\,h(1)} \qquad (0<\delta<1)$$

Solution:

$$h(s) = \frac{1}{p+(1-p)\,\delta^{s}} \qquad h^*(s) = \delta^{s}\,h(s)$$

Modèle stochastique

CONCLUSION: *modèle simple à 2 paramètres*:

-Paramètre δ: indicateur de dispersion proche de 1 si la variance des taux est faible :

$$\delta = \frac{h^*(1)}{h(1)}$$

-Paramètre p=indicateur de moyenne des chocs à la hausse et à la baisse proche de 0.5 si les amplitudes à la hausse et à la baisse sont de même ordre:

$$p = \frac{1 - h^*(1)}{h(1) - h^*(1)}$$

Modèle stochastique

<u>Limites du modèle</u> :

- aspect binomial
- déformations h et h* stationnaires
- parfaite corrélation entre les taux des différentes échéances

<u>Avantages du modèle:</u>

-simplicité de l'approche
- paramétrisation aisée
-respect de la courbe initiale des taux

Exemple

<u>Paramétrisation du modèle:</u>

- structure initiale observée en t=0: $P^{(0)}(0,s)$

-2 constantes: p et δ

h(1)	h*(1)	p	δ
1.01	0.99	0.5	0.98
1.05	0.95	0.5	0.91
1.09	0.99	0.1	0.91

PARTIE 3

Le calcul stochastique

Table des matières

3.1. Motivation

Modèle d’évolution d’un actif financier:

	Discret	Continu
Déterministe	$S(n) = (1+i)^n$	$S(t) = e^{\delta t}$
Stochastique	$S(n) = \prod_{k=1}^{n} (1+i_k)$	????

Actif risqué en discret

modèle binomial discret multi périodique

- en déterministe:

$$S(n) = S(0)\prod_{k=1}^{n}(1+i_k) = S(0)\prod_{k=1}^{n}e^{\delta_k}$$

- en aléatoire:

$$S(n) = S(0)\prod_{k=1}^{n}e^{\chi_k}$$

Avec: $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$:suite de variables aléatoires iid

Actif risqué en discret

$$\chi = \delta + \sigma \qquad (\text{proba} = \frac{1}{2})$$

$$= \delta - \sigma \qquad (\text{proba} = \frac{1}{2})$$

A chaque période deux possibilités équiprobables de rendement

c'est à dire:

$$\boxed{\chi = \delta + \sigma\psi}$$

où

$$\psi = 1 \quad (P = 1/2)$$

$$= -1 \quad (P = 1/2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= e^{\delta+\sigma} \\ d &= e^{\delta-\sigma} \end{aligned}}$$

Actif risqué en discret

On a alors au niveau du log-rendement cumulé:

$$\ln(S(n)/S(0)) = \delta.n + \sigma \sum_{i=1}^{n} \psi_i$$

Trend

Bruit

Le processus stochastique $W(n) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i$

est appelé **promenade aléatoire** (discrète)

Le paramètre σ est appelé **volatilité**

Actif risqué en discret

Moments d'une promenade aléatoire:

$$W(n) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i$$

$$\text{(i) } E(W(n)) = \sum_{i=1}^{n} E(\psi_i) = 0$$ (*bruit*)

$$\text{(ii) } var(W(n)) = \sum_{i=1}^{n} var(\psi_i) = n$$

(*variance proportionnelle au temps*)

Actif risqué en discret

On obtient donc pour les moments du rendement cumulé:

$$(i)\ E(\ln(S(n)/S(0)) = \delta.n$$

$$(ii)\ var(\ln(S(n)/S(0)) = \sigma^2.n$$

<u>Conclusion</u> : on peut généraliser sans peine en temps discret le modèle déterministe en introduisant une promenade aléatoire qui vient « bruiter » le rendement.
Le rendement moyen correspond au rendement déterministe.
La variance croît linéairement avec le temps
(modélisation de l’incertitude croissante avec le temps).

Actif risqué en continu

Premier essai de bruitage en temps continu:

$$dS(t) = \delta(t)\,S(t)\,dt$$

Perturbation aléatoire naïve :

$$dS(t) = \delta(t)\,S(t)\,dt + v(t,\omega)S(t)dt$$

Thèse : sous des conditions raisonnables le processus de perturbation v est identiquement nul

Actif risqué en continu

-Hypothèses sur le processus v :

(i) Bruit: $E\, v(t) = 0$

(ii) Indépendance des perturbations:
la variable aléatoire v(t) est indépendante de la variable aléatoire v(s) pour 2 instants t et s $(s \neq t)$

(iii) Borne:

$$E\, v^2(t) \leq K \quad \forall t$$

(non explosion de la perturbation)

Actif risqué en continu

Thèse : *sous ces hypothèses la variance de la solution de l'équation est nulle*.

Démonstration:

Solution de l'équation pour chaque trajectoire ω:

$$S(t,\omega) = S(0)\exp\int_0^t \delta(s)\,ds\,.\exp\int_0^t v(s,\omega)\,ds$$

$$S(t,\omega) = S(0)\exp\int_0^t \delta(s)\,ds.\exp(u(t,\omega))$$

Actif risqué en continu

Propriétés du processus u :

$$a) E\,u(t) = \int_0^t E(v(s))\,ds = 0$$

$$b) Var\,u(t) = E(u^2(t)) = E(\int_0^t v(s)\,ds)^2$$

En utilisant la définition de l'intégrale de Rieman et les propriétés du processus v , il vient :

Actif risqué en continu

$$\operatorname{var} u(t) = \lim \ E(\sum_{i=0}^{n-1} v(t_i^*)(t_{i+1} - t_i))^2$$

$$= \lim \sum_i \sum_j E(v(t_i^*)v(t_j^*))(t_{i+1} - t_i)(t_{j+1} - t_j)$$

$$= \lim \sum_i E(v^2(t_i^*)(t_{i+1} - t_i)^2$$

$$\leq K \lim \sum_i (t_{i+1} - t_i)^2 \longrightarrow 0 \ ???$$

Actif risqué en continu

Or:

$$\lim \sum (t_{i+1} - t_i)^2 \leq \lim |\pi_n| \sum (t_{i+1} - t_i) = t \lim |\pi_n|$$

0

Où:

$$|\pi_n| = \sup_i (t_{i+1} - t_i) = \text{norme de la subdivision}$$

Le modèle ne permet donc pas de simuler une véritable incertitude en continu.

Actif risqué en continu

<u>Deuxième essai de bruitage en temps continu:</u>

Limite du modèle de promenade aléatoire
qui fonctionnait bien en temps discret…

<u>Passage à la limite vers un modèle continu en 2 étapes</u>:

1°<u>Modification d'échelle de la promenade aléatoire</u>:
Les sauts de +1 ou –1 sur chaque période unitaire sont remplacés par des sauts de $+\Delta x$ ou $-\Delta x$ sur chaque période de temps Δt.

Actif risqué en continu

Le processus W devient :

$$W(n) = \sum_{i=1}^{m} \Delta x \, . \, \psi_i$$

$$\text{avec } \; m = n / \Delta t$$

Au niveau des moments:

$$\text{(i)} \; E(W(n)) = 0$$

$$\text{(ii)} \; var(W(n)) = m.(\Delta x)^2 = \frac{n}{\Delta t} (\Delta x)^2 = n \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta x$$

Actif risqué en continu

2° <u>passage à la limite sur Δx et Δt:</u>

$$\Delta t_j \longrightarrow 0 \quad \Delta x_j \longrightarrow 0$$

$$\frac{(\Delta x_j)^2}{\Delta t_j} = 1 \ \text{(et non pas } \frac{\Delta x_j}{\Delta t_j} = 1 \text{ !!!)}$$

$$\text{donc} : \Delta x_j = \sqrt{\Delta t_j}$$

On montre que la suite des processus W ainsi générés converge dans un sens à préciser vers un processus à trajectoires continues appelé **mouvement brownien**.

Actif risqué en continu

- suite de processus discrets :

$$W^j(t) = \Delta x_j \sum_{i=1}^{t/\Delta t_j} \psi_i$$

Pour chacun de ces processus discrets on peut définir un processus à temps continu défini en reliant les points par des fonctions affines.

On définit :

$$t_i^j = i\,\Delta t_j \quad (i = 0,1,2,\ldots)$$

(i ème point de la partition j)

Actif risqué en continu

Pour $t_{i-1}^j < t < t_i^j$: on pose :

$$w^j(t) = W^j(t_{i-1}^j) + \frac{(t - t_{i-1}^j)}{\Delta t_j}(W^j(t_i^j) - W^j(t_{i-1}^j))$$

On peut montrer que cette suite de processus converge en loi vers un processus en temps continu noté w(t)

= mouvement brownien standard

= processus de Wiener

= « promenade aléatoire infinitésimale »

3.2. Processus stochastiques

3.2.1. Notions de base du calcul des probabilités :

- *espace mesurable* : $(\Omega, \Im)$

Avec : Ω = un ensemble

$\Im$ = une sigma algèbre sur Ω

Famille de sous ensembles de Ω telle que :

(i) $\Phi \in \Im$

(ii) si $A \in \Im$ alors $A^c \in \Im$

(iii) si $A_i \in \Im$ alors $\bigcup_i A_i \in \Im$

3.2. Processus stochastiques

- *mesure de probabilité :*

Fonction P : $\Im \rightarrow [0,1]$

telle que:

$$\text{(i)}\ P(\phi) = 0 \ \text{ et } \ P(\Omega) = 1$$

$$\text{(ii) si } A_i\,(i = 1,\ldots)\ \text{sont disjoints :}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

-*espace de probabilité :* triplet $(\Omega, \Im, P)$

3.2. Processus stochastiques

- *variable aléatoire (à valeurs réelles) :*

Une variable aléatoire X à valeurs réelles est une fonction $\Im$ mesurable:

$$X : \Omega \rightarrow R$$

$$X^{-1}(B) \in \Im$$

(B= borrélien de R)

- *distribution d'une variable aléatoire :*

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

3.2. Processus stochastiques

- *fonction de répartition d'une variable aléatoire :*

Borrélien : $B = (-\infty, x]$

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B)) = F_X(x) = P(X \leq x)$$

- *densité de probabilité d'une variable aléatoire :*

La densité f(x) d'une variable aléatoire est la dérivée de la fonction de répartition (si elle existe) :

$$f_X = \frac{dF_X}{dx}$$

3.2. Processus stochastiques

- *exemple 1 :variable aléatoire normale (ou gaussienne) :*

Une variable aléatoire X est distribuée normalement

$N(m,\sigma^2)$ si sa fonction de densité existe est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

3.2. Processus stochastiques

- *exemple 2 :variable aléatoire log normale :*

Une variable aléatoire Y est distribuée log normalement $\log N(m,\sigma^2)$ si il existe une variable aléatoire X distribuée normalement $N(m,\sigma^2)$ telle que :

$$Y = e^X$$

3.2. Processus stochastiques

- *densité d'une log normale :*

$$f_Y(y)\,dy = dF_Y(y) = d\,P(Y \leq y) = dP(e^X \leq y)$$

$$= dP(X \leq \ln y) = dF_X(\ln y) = \frac{1}{y} f_x(\ln y)\,dy$$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}}} \quad (\; y > 0)$$

3.2. Processus stochastiques

- *espérance d'une variable aléatoire:*

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)dP(\omega) = \int_{R} x \, d\mu_X(x)$$

- *variance d'une variable aléatoire ;*

$$\sigma^2(X) = \int_{\Omega} (X(\omega) - EX)^2 dP(\omega)$$

$$= E(X^2) - (EX)^2$$

3.2. Processus stochastiques

- *exemples d'espérance :*

1° distribution normale :

$$\text{si } X = N(m, \sigma^2) \quad \text{alors : } E(X) = m$$

2° distribution log normale :

$$\text{si } Y = \log N(a, b^2) \quad \text{alors : } E(Y) = e^{a+b^2/2}$$

3.2. Processus stochastiques

Espérance d'une log-normale :

$$EY = \int_0^\infty y\, f_Y(y)\, dy = \int_0^\infty y \frac{1}{by\sqrt{2\pi}} \exp-(\frac{(\ln y - a)^2}{2b^2})\, dy$$

Par changement de variable : ln y = x

$$EY = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp - \frac{(x-a)^2}{2b^2} e^x\, dx$$

$$= \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2b^2}((x-(a+b^2))^2 - 2ab^2 - b^4))\, dx$$

$$= \exp(\frac{2ab^2 + b^4}{2b^2}) = e^{a+\frac{b^2}{2}}$$

3.2. Processus stochastiques

- <u>Variance d'une variable log normale :</u>

$$\mathrm{Var}Y = E\,Y^2 - (EY)^2$$

$$= E(e^{2X}) - (Ee^X)^2$$

Aussi
log normal !

$\log N(2a, 4b^2)$

$$\boxed{\mathrm{Var}\ \ Y = e^{2a+b^2}(e^{b^2} - 1)}$$

3.2. Processus stochastiques

- *fonction caractéristique :*

Si X est une variablé aléatoire de fonction de répartition F , alors sa fonction caractéristique est la fonction sur R:

$$\Phi_X(u) = E(e^{iuX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\, dF(x)$$

<u>Exemple</u> : pour une distribution $X \prec N(0,\sigma^2)$

$$\Phi_X(u) = e^{-u^2\sigma^2/2}$$

3.2. Processus stochastiques

-*norme* L^p

Si X est une variable aléatoire et si $p \in [1, \infty)$

la norme L^p de X notée $\|X\|_p$ est définie par :

$$\|X\|_p = \left(\int_\Omega |X(\omega)|^p \, dP(\omega) \right)^{1/p}$$

3.2. Processus stochastiques

-*norme* L^{∞}

$$\|X\|_{\infty} = \sup \{|X(\omega); \omega \in \Omega\}|$$

- *espaces* L^{p}

Espace des variables aléatoires de norme finie :

$$L^{p}(\Omega) = \{ X : \Omega \to R : \|X\|_{p} < \infty \}$$

3.2. Processus stochastiques

-*indépendance d'événements et de variables aléatoires :*

2 événements A et B sont indépendants ssi :

$$A, B \in \Im : \; P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

2 variables aléatoires X et Y à valeurs réelles sont indépendantes ssi :

$$P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\} = P(X \leq x)\, P(Y \leq y)$$

$$(\forall x, y \in R)$$

3.2. Processus stochastiques

- *espérance conditionnelle :*

$(\Omega,\Im,P)$ $+\Im^*$ une sous sigma algèbre de $\Im$ ($\Im^* \subset \Im$)

X une variable aléatoire d'espérance finie

$$\boxed{Y = E(X \mid \Im^*)}$$

Y= espérance conditionnelle de X connaissant $\Im^*$

= variable aléatoire mesurable par rapport à $\Im^*$ telle que:

$$\int_A X(\omega)\,dP(\omega) = \int_A Y(\omega)\,dP(\omega) \qquad (\forall A \in \Im^*)$$

3.2. Processus stochastiques

Propriétés de l'espérance conditionnelle :

(i) Espérance d'une espérance conditionnelle :

$$E(\,E(X|\Im\,*) = E\,X$$

(ii)si Z est une variable aléatoire mesurable par rapport à $\Im\,*$

$$E\,(Z|\Im*) = Z$$

et:

$$E(\,Z\,X|\Im*) = Z\,E(X|\,\Im*)$$

(iii) si: $\Im_1 \subset \Im_2 \subset \Im$

$$E(\,E(X|\Im_2)\,|\Im_1) = E(X|\Im_1)$$

3.2. Processus stochastiques

-*convergence de variables aléatoires :*

- suite de variables aléatoires : $\{X_n ; n = 0,1,\ldots\}$

$$?? \ \lim_{n\to\infty} X_n = ??$$

4 grands types de convergence :

- ***convergence presque sûre***
- ***convergence quadratique***
- ***convergence en probabilité***
- ***convergence en loi***

3.2. Processus stochastiques

- *convergence presque sûre :*

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \text{ ssi } P(\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)) = 1$$

Exemple : <u>loi des grands nombres</u> :

Si X_n est une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées (i.i.d.) d'espérance finie alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p.s.} E(X)$$

3.2. Processus stochastiques

- *convergence quadratique :*

$$X_n \to X \quad \text{en moyenne quadratique (dans } L^2 \text{)}$$

ssi

$$\|X_n - X\|_2 \to 0$$

$$=$$

$$\int_\Omega (X_n(\omega) - X(\omega))^2 \, dP(\omega)$$

Exemple : <u>loi des grands nombres</u>

3.2. Processus stochastiques

- *convergence en probabilité :*

$$X_n \xrightarrow{P} X \text{ ssi :}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : P(\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon) \to 0$$

<u>Propriétés</u>:

- convergence p.s. $\to$ convergence en proba
- convergence quadratique $\to$ convergence proba

3.2. Processus stochastiques

- *convergence en loi :*

$$X_n \xrightarrow{\ell} X \text{ ssi } \forall \text{ fonction } \Phi \text{ continue et bornée :}$$

$$E(\Phi(X_n)) \to E(\Phi(X))$$

Propriété :

- convergence en proba → convergence en loi

<u>Théorème central limite</u> : si X = suite de variables aléatoires i.i.d. de variance finie :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\,EX}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\ell} N(0,1)$$

3.2 .Processus stochastiques

3.2.2. Processus stochastique :

$(\Omega, \Im, P)$ Espace de probabilité + le temps

Un ***processus stochastique*** X à valeurs réelles est une application:

$$X : T \times \Omega \longrightarrow \Re : (t,\omega) \longrightarrow X(t,\omega)$$

T= espace des temps

Pour ω fixé, on a une trajectoire

Pour t fixé, on a une variable aléatoire

$$\boxed{\begin{array}{l} T = \{0,1,2,3,\ldots\} \;\rightarrow\; \text{processus discrets} \\ T \subset \Re^{+} \;\rightarrow\; \text{processus en temps continu} \end{array}}$$

3.2 .Processus stochastiques

Filtration: famille croissante de sous σ algèbres de l'espace de probabilité

$$\Im_0 = \{\Omega, \phi\} \subset \Im_s \subset \Im_t \subset \Im \text{ pour } s < t$$

Filtration : modélise l'arrivée progressive de l'information . En t , on peut dire pour chaque élément de $\Im_t$ (= événement) s'il s'est ou non produit .

En t=0 : on n'a aucune information :

$$\Im_\circ = \{\Omega, \phi\}$$

3.2. Processus stochastiques

Filtration et processus: notions liées par les 2 définitions:

Définition 1 : Tout processus stochastique génère une filtration appelée *filtration naturelle du processus* et définie par:

$$\Im_t = \Im(X(s); s \leq t) \quad \forall t$$

(histoire du processus)

Définition 2: Un processus X est dit *adapté* à une filtration si:

$$\forall t : X(t) = \text{mesurable par rapport à } \Im_t$$

3.2. Processus stochastiques

Filtration et espérance conditionnelle :

Chaque élément d'une filtration étant une sous sigma algèbre , on peut lui associer une espérance conditionnelle.

Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique finie. On peut alors définir le processus adapté :

$$M(t) = E(X \mid \Im_t)$$

Représente *l'estimation moyenne de X* compte tenu de l'information déjà récoltée en t

3.2. Processus stochastiques

<u>Exemple de filtration et de processus (en temps discret)</u>

Jeu successif de pile ou face (3 fois)

Processus de gain cumulé : +1 si pile -1 si face

$$X(0) = 0 \rightarrow X(1) \rightarrow X(2) \rightarrow X(3)$$

$$\Omega = \{(PPP), (PPF), (PFP), (PFF), (FFF), (FFP), (FPF), (FPP)\}$$

$$X(1) = \{ 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad -1, \quad -1, \quad -1, \quad -1\}$$

$$X(2) = \{ 2, \quad 2, \quad 0, \quad 0, \quad -2, \quad -2, \quad 0, \quad 0\}$$

$$X(3) = \{ 3, \quad 1, \quad 1, \quad -1, \quad -3, \quad -1, \quad -1, \quad 1 \}$$

3.2 .Processus stochastiques

En t=1 : la 1° position est connue

$$\Im_1 = \{\Omega, \phi, \Omega_P, \Omega_F\}$$

$$\Omega_P = \{(PPP),(PPF),(PFP),(PFF)\}$$

$$\Omega_F = \{(FFF),(FFP),(FPF),(FPP)\}$$

En t=2 : les 2 premières positions sont connues :

$$\Im_2 = \{\Omega, \phi, \Omega_P, \Omega_F, \Omega_{PP}, \Omega_{PF}, \Omega_{FF}, \Omega_{FP}\}$$

3.2 .Processus stochastiques

$$\Omega_{PP} = \{(PPP),(PPF)\}$$
$$\Omega_{PF} = \{(PFP),(PFF)\}$$
$$\Omega_{FF} = \{(FFF),(FFP)\}$$
$$\Omega_{FP} = \{(FPF),(FPP)\}$$

En t=3 : toutes les positions sont connues :

$$\mathfrak{I}_3 = \mathfrak{I}$$

3.2 .Processus stochastiques

\- <u>espérance conditionnelle du gain final:</u>

$$\Omega = \{(PPP),(PPF),(PFP),(PFF),(FFF),(FFP),(FPF),(FPP)\}$$
$$X(3) = \{\ 3,\quad 1,\quad 1,\quad -1,\quad -3,\quad -1,\quad -1,\quad 1\ \}$$

(i) *Espérance conditionnelle en t=0*

$$E(X(3)|\Im_\circ) = E(X(3)) = 0$$

(ii) Espérance conditionnelle en t=3 :

$$E(X(3)|\Im_3) = X(3)$$

3.2 .Processus stochastiques

(iii) Espérance conditionnelle aux différents instants

$$\Omega = \{(PPP),(PPF),(PFP),(PFF),(FFF),(FFP),(FPF),(FPP)\}$$

$$X(3) = \{\ 3,\quad 1,\quad 1,\quad -1,\quad -3,\quad -1,\quad -1,\quad 1\ \}$$

$$EX\big|\Im_0 = \{\ 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0\ \}$$

$$EX\big|\Im_1 = \{\ 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad -1,\quad -1,\quad -1,\quad -1\}$$

$$EX\big|\Im_2 = \{2,\quad 2,\quad 0,\quad 0,\quad -2,\quad -2,\quad 0,\quad 0\}$$

$$EX\big|\Im_3 = \{3,\quad 1,\quad 1,\quad -1,\quad -3,\quad -1,\quad -1,\quad 1\}$$

3.2. Processus stochastiques

Temps d'arrêt : généralisation de la notion de temps déterministe:

= variable aléatoire T à valeurs dans $R^+ \cup \{+\infty\}$ telle que:

$$\forall t: \{T \le t\} \in \Im_t$$

(pas d'information nécessaire sur le futur pour savoir à chaque instant si T s'est déjà produit).

Exemple : premier instant où le cours d'une action dépasse le double du cours actuel.

Contrexemple:dernier instant avant une certaine date future où un taux de change atteint un niveau fixé

3.2. Processus stochastiques

Exemple de lien entre temps d'arrêt et processus:

notion de processus arrêté:

- X = processus stochastique
- $\{\Im_t\}$ = filtration naturelle associée à X

On définit le temps d'arrêt: (M=barrière)

$$T = \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq M\}$$

-On peut par exemple définir le nouveau processus arrêté à M :

$$Y(t) = X(t) \text{ si } t \leq T$$

$$Y(t) = M \quad \text{ si } t > T$$

3.2. Processus stochastiques

<u>Exemple : jeu discret / pile ou face :</u>

On arrête le jeu dès que le gain est strictement positif.

$$T(\omega) = \inf\{t : X(t,\omega) > 0\}$$

$$\begin{array}{llllllllll}
\Omega = \{ & (PPP), & (PPF), & (PFP), & (PFF), & (FFF), & (FFP), & (FPF), & (FPP) & \} \\
X(1) = \{ & 1, & 1, & 1, & 1, & -1, & -1, & -1, & -1 & \} \\
X(2) = \{ & 2, & 2, & 0, & 0, & -2, & -2, & 0, & 0 & \} \\
X(3) = \{ & 3, & 1, & 1, & -1, & -3, & -1, & -1, & 1 & \}
\end{array}$$

3.2. Processus stochastiques

Valeurs du temps d'arrêt :

$$\Omega = \{(PPP),(PPF),(PFP),(PFF),(FFF),(FFP),(FPF),(FPP)\}$$

$$T = \{\ 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad \infty,\quad \infty,\quad \infty,\quad 3\ \}$$

T=1 mesurable
par rapport à $\Im_1$

Vrai sur Ω_P Faux sur Ω_F

3.2. Processus stochastiques

Contrexemple de temps d'arrêt :

*On arrête le jeu au **dernier instant** où le gain est strictement positif .*

$$\Omega = \{(PPP),(PPF),(PFP),(PFF),(FFF),(FFP),(FPF),(FPP)\}$$

$$T = \{\ 3, \quad 3, \quad 3, \quad 1, \quad \infty, \quad \infty, \quad \infty, \quad 3\ \}$$

T=1 pas mesurable
par rapport à $\Im_1$

3.2. Processus stochastiques

<u>3.2.3. Classes de processus:</u>

1° <u>MARTINGALES :</u>

Un processus stochastique est une martingale par rapport à une filtration donnée ssi :

$$\text{(i) } X \text{ est adapté par rapport à } \{\mathfrak{I}_t\};$$

$$\text{(ii) } E(X(t) \mid \mathfrak{I}_s\} = X(s) \text{ si } s \leq t$$

- notion de *fair game* : l'espérance de gain futur est le gain présent à tout instant du jeu.
- En particulier pour s=0 : $E(X(t)) = X(0)$

3.2. Processus stochastiques

2° PROCESSUS GAUSSIENS :

X est un processus gaussien ssi toute combinaison linéaire des valeurs de X à différents instants est distribué normalement:

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, X(t_k) \equiv N$$

Un tel processus X est caractérisé par sa fonction moyenne $\mu(t)$ et sa fonction de covariance $\sigma(s,t)=\text{cov}\,(X(s),X(t))$

3.2. Processus stochastiques

3° <u>PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS ET STATIONNAIRES</u> :

-Un processus X est dit à *accroissements indépendants* ssi:

$$\forall n,\ \forall t_1, t_2, \ldots, t_n : X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

sont indépendantes

(indépendance entre les accroissements successifs)

-Un processus est dit à *accroissements stationnaires* ssi:

$$\forall h, \forall t : X(t+h) - X(t) \text{ et } X(h) \text{ sont équidistribués}$$

3.2. Processus stochastiques

4° <u>PROCESSUS A VARIATION FINIE</u> :

-Un processus adapté X est dit *croissant* si ses trajectoires sont des fonctions croissantes, finies et continues à droite.

-Un processus adapté X est dit à *variation finie* si ses trajectoires sont des fonctions à variations bornées sur tout compact, finies et continues à droite.

Tout processus à variation finie peut s'écrire comme différence de deux processus croissants.

3.3. Le mouvement brownien

Historique :

-1829: **Brown** : mouvement de particules de pollen en suspension dans l'eau
-1900 : **Bachelier**: mouvements de cours de bourse
-1905: **Einstein** : modèles de particules en suspension
-1923 : **Wiener**: construction rigoureuse du mouvement brownien
-1944: **Ito**: intégrale par rapport à un mouvement brownien

$\longrightarrow$ *devenu un processus central en finance pour simuler l'incertitude sur les marchés.*

3.3. Le mouvement brownien

-Définition: un processus stochastique w est un **mouvement brownien standard** sur l'espace $(\Omega, \Im, P)$ ssi

$$(i)\; w(0) = 0$$

$$(ii)\; w = \text{processus à accroissements indépendants et stationnaires}$$

$$(iii)\; w = \text{processus gaussien}$$

$$(iv)\; \forall t > 0 : E\, w(t) = 0 \;\; ; \;\; \text{var}\, w(t) = t$$

Il est possible de construire un tel processus tel que ses trajectoires soient des fonctions continues.

3.3. Le mouvement brownien

- **Mouvement brownien issu du point a** :

$$Z(t) = a + w(t)$$

-**Mouvement brownien issu du point a et de drift μ** :

$$Z(t) = a + \mu t + \sigma w(t)$$

$$EZ(t) = a + \mu t$$

$$\sigma^2 Z(t) = \sigma^2 t$$

Ces 2 processus sont gaussiens.

3.3. Le mouvement brownien

<u>Fonction caractéristique d'un mouvement brownien standard :</u>

$$\Psi(\lambda, t) = E(e^{i\lambda w(t)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \frac{e^{-x^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\lambda^2 t/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-i\lambda t)^2}{2t}} dx$$

$$= e^{-\lambda^2 t/2}$$

3.3. Le mouvement brownien

<u>Moments d'un mouvement brownien :</u>

$$E(w^k(t)) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{d\lambda^k} \Psi(\lambda, t) \Big|_{\lambda=0}$$

<u>Calcul des dérivées successives de la fonction caractéristique:</u>

$$\frac{d}{d\lambda} e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} = -\lambda t\, e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} = -t\, e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} + (\lambda t)^2 e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}$$

3.3. Le mouvement brownien

$$\frac{d^3}{d\lambda^3} e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} = 3\lambda t^2 e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} - (\lambda t)^3 e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}$$

$$\frac{d^4}{d\lambda^4} e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} = 3t^2 e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} - 3\lambda t^2 \lambda t\, e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}$$

$$-3(\lambda t)^2 t\, e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} + (\lambda t)^3 . \lambda t . e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}$$

3.3. Le mouvement brownien

Application au calcul des moments :

$$E(w(t)) = 0$$

$$E(w^2(t)) = t$$

$$E(w^3(t)) = 0$$

$$E(w^4(t)) = 3t^2$$

3.3. Le mouvement brownien

Mouvement brownien et martingale :

Soient w un mouvement brownien standard et $\{\Im_t\}$ sa filtration naturelle; les 2 processus suivants sont alors des martingales:

$$\boxed{\begin{array}{l}(i)\,w(t)\\(ii)\,w^2(t)-t\end{array}}$$

3.3. Le mouvement brownien

<u>Démonstration:</u>

$$(i) E(w(t) \mid \Im_s) = E(w(s) + (w(t) - w(s)) \mid \Im_s) = w(s)$$

$$(ii) E((w^2(t) - t) \mid \Im_s) = E(w^2(s) + (w^2(t) - w^2(s) \mid \Im_s) - t$$

Or:

$$E((w(t) - w(s))^2 \mid \Im_s) = E((w^2(t) - w^2(s)) + 2w(s)(w(t) - w(s)) \mid \Im_s)$$

$$0$$

$$t - s$$

Donc: $$E(w^2(t) - t \mid \Im_s) = w^2(s) - s$$

3.3. Le mouvement brownien

Remarque : la réciproque de ce théorème de martingale est également vraie: si X est un processus continu tels que

$X(t)$ et $X^2(t) - t$ sont des martingales et X(0)=0:

alors X est un mouvement brownien standard.

Le mouvement brownien est l'exemple fondamental de martingale continue.

3.3. Le mouvement brownien

Martingale exponentielle :

Le processus $X(t) = e^{\sigma w(t) - \sigma^2 t/2}$ (σ = réel)
est une martingale appelée martingale exponentielle

Démonstration :

Calculons l'espérance conditionnelle suivante:

$$E(e^{\sigma w(t)} \mid \Im_s) \quad (\text{ avec}: \ 0 < s < t)$$

3.3. Le mouvement brownien

$$E(e^{\sigma w(t)} \mid \Im_s) = E(e^{\sigma(w(t)-w(s))}\, e^{\sigma w(s)} \mid \Im_s)$$

$$= e^{\sigma w(s)} E(e^{\sigma(w(t)-w(s))} \mid \Im_s) = e^{\sigma w(s)} E(e^{\sigma w(t-s)})$$

$$= e^{\sigma w(s)} e^{\sigma^2 (t-s)/2}$$

Il en résulte l'égalité de martingale :

$$E(e^{\sigma w(t)-\sigma^2 t/2} \mid \Im_s) = e^{\sigma w(s)-\sigma^2 s/2}$$

En particulier :

$$E(e^{\sigma w(t)-\sigma^2 t/2}) = 1$$

3.3. Le mouvement brownien

<u>Corollaire : bruitage additif et bruitage multiplicatif</u>

1° *le mouvement brownien est un bruitage additif naturel :*

$$f(t) = \text{phénomène déterministe}$$

$$X(t) = f(t) + \sigma.w(t) = \text{phénomène bruité}$$

$$E(X(t)) = f(t)$$

2° *la martingale exponentielle est un bruitage multiplicatif*:

$$f(t) = \text{phénomène déterministe}$$

$$Y(t) = f(t).e^{\sigma w(t) - \sigma^2 t/2} = \text{phénomène bruité}$$

$$E(Y(t)) = f(t)$$

3.3. Le mouvement brownien

Contrexemple de martingale :

Le processus $X(t) = w^3(t)$
bien que d'espérance constante n'est pas une martingale.

Il suffit de montrer que :

$$E(w^3(t) \mid \Im_s) \neq w^3(s) \quad (\ 0 < s < t)$$

On part de la relation :

$$E((w(t) - w(s))^3 \mid \Im_s) = E(w^3(t-s)) = 0$$

3.3. Le mouvement brownien

En développant il vient :

$$E((w(t)-w(s))^3 \mid \Im_s) = E(w^3(t) - 3w^2(t)\,w(s) + 3w(t)w^2(s) - w^3(s) \mid \Im_s)$$

$$= E(w^3(t) \mid \Im_s) - 3w(s)\,E(w^2(t) \mid \Im_s) + 3w^2(s)\,E(w(t) \mid \Im_s) - w^3(s)$$

$$= E(w^3(t) \mid \Im_s) - 3w(s)(w^2(s) + t - s) + 3w^3(s) - w^3(s)$$

$$= E(w^3(t) \mid \Im_s) - w^3(s) - 3w(s)(t-s) = 0$$

Il en résulte :

$$E(w^3(t) \mid \Im_s) = w^3(s) + 3\,w(s)\,(t-s)$$

w^3 n'est donc pas une martingale

3.3. Le mouvement brownien

Mouvement brownien et variation bornée :

– soit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$

-On a :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}(\Delta w(t_i))^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\Delta t_i = t$$

D'autre part si f est une fonction déterministe à variation bornée alors on a par définition de l'intégrale de Stieltjes:

3.3. Le mouvement brownien

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} (\Delta f(t_i)) = \int_0^t df = f(t) - f(0)$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} (\Delta f(t_i))^2 = 0$$

Le mouvement brownien ne peut donc être à variation finie: ses trajectoires sont sur tout intervalle fini non à variation bornée.

En particulier les trajectoires d'un brownien ne sont pas des fonctions dérivables et la différentielle dw(t) au sens classique du calcul différentiel trajectoire par trajectoire n'existe pas.

3.3. Le mouvement brownien

<u>Variation quadratique d'un mouvement brownien :</u>

<u>PROPRIETE</u> :

Soit $t_j = \dfrac{j}{2^n} t \; (j = 0,...,2^n)$ une subdivision de$(0,t)$, alors :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{2^n} (w(t_j) - w(t_{j-1}))^2 \longrightarrow t}$$

en convergence quadratique.

3.3. Le mouvement brownien

Preuve :

Soit: $$Z_n(t) = \sum_{j=1}^{2^n} (w(t_j) - w(t_{j-1}))^2$$

(i) $E(Z_n(t)) = t$

(ii) Var $(Z_n(t)) \to 0$

$$\text{(i)}\, E\, Z_n(t) = \sum_{j=1}^{2^n} (t_j - t_{j-1}) = t$$

$$\text{(ii)}\, \mathrm{Var}\, Z_n(t) = \sum_{j=1}^{2^n} \mathrm{var}((w(t_j) - w(t_{j-1}))^2)$$

3.3. Le mouvement brownien

Lemme :

si $X = N(0, \sigma^2)$ alors:

$$\boxed{\operatorname{var} X^2 = 2\sigma^4}$$

Preuve :

$$\operatorname{Var} X^2 = E X^4 - (EX^2)^2 = EX^4 - \sigma^4$$

Par fonction génératrice :

$$M_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} dF(x) = \Phi_X(iu) = e^{u^2\sigma^2/2}$$

$$EX^n = \frac{\partial^n}{\partial u^n} M_x(u)\Big|_{u=0} \longrightarrow EX^4 = 3\sigma^4$$

3.3. Le mouvement brownien

Donc finalement :

$$\mathrm{Var}\ Z_n(t) = \sum_{j=1}^{2^n} 2\left(\frac{t}{2^n}\right)^2 = 2^{n+1}\frac{t^2}{2^{2n}}$$

$$0$$

3.3. Le mouvement brownien

<u>Auto-similarité du mouvement brownien :</u>

(*scaling effect* ou *self similarity*)

Le mouvement brownien fait partie de la famille des ***fractales*** qui ont des propriétés d 'échelle : même forme des trajectoires quelle que soit l'échelle à laquelle on les regarde.

D'une manière générale un processus stochastique X est H- auto similaire si :

$$\forall \lambda > 0, \forall t > 0 :$$

$$\boxed{X(\lambda t) \overset{d}{=} \lambda^H \; X(t)}$$

3.3. Le mouvement brownien

H est appelé l’indice de Hurst du processus.

Pour un mouvement brownien standard on a par définition:

$$w(\lambda t) \overset{d}{=} N(0,\lambda t) \overset{d}{=} \lambda^{1/2}\, X(t)$$

Le mouvement brownien standard est un processus auto similaire d’indice ½.

Rem.: *il s’agit d’une propriété de distributions et non pas de trajectoires*

3.3. Le mouvement brownien

<u>Mouvement brownien et temps d'atteinte :</u>

Pour a > 0 fixé on définit le *temps d'atteinte* :

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : w(t) = a\}$$
$$T_a = +\infty \text{ si a jamais atteint}$$

<u>Propriété</u> :

T_a *est un temps d'arrêt.*

3.3. Le mouvement brownien

Principe de réflexion :

$$\boxed{P(T_a < t) = 2P(w(t) > a)}$$

Preuve :

1) si $w(t) > a$ alors $T_a < t$

2) $w(s + T_a) - w(T_a)$ est aussi un brownien

3.3. Le mouvement brownien

Par symétrie on a donc :

$$P(w(t) - w(T_a) > 0 \mid T_a < t) = 1/2$$

Il vient alors successivement :

$$\begin{aligned} P(w(t) > a) &= P(T_a < t,\ w(t) - w(T_a) > 0) \\ &= P(T_a < t)\ P(w(t) - w(T_a) > 0 \mid T_a < t) \\ &= \frac{1}{2}\ P(T_a < t) \end{aligned}$$

3.3. Le mouvement brownien

<u>Maximum d'un mouvement brownien :</u>

On définit le processus maximum d'un brownien par :

$$\boxed{M(t) = \max_{s \in [0,t]} w(s)}$$

On peut obtenir la loi conjointe d'un mouvement brownien et de son maximum.

3.3. Le mouvement brownien

PROPRIETE :

Pour $a > 0, a > x$:

$$\boxed{P(M(t) \geq a,\ w(t) \leq x) = 1 - \Phi(\frac{2a - x}{\sqrt{t}})}$$

3.3. Le mouvement brownien

Applications en finance :

-temps d'atteinte : première fois où la valeur d'une action atteint une valeur donnée (par exemple première fois où la valeur du titre augmente de 50%).

- maximum : valeur maximale atteinte par une action sur une certaine période.

3.3. Le mouvement brownien

Simulation d'un mouvement brownien :

-En théorie mouvement brownien … non représentable compte tenu de ses propriétés de non dérivabilité.

- Discrétisation possible permettant de se faire une idée de la forme des trajectoires

- Principe de base : on choisit un pas Δt

- Pour simuler la valeur de w(t) on décompose :

$$w(t) = w(\Delta t) + (w(2\Delta t) - w(\Delta t)) + \ldots + (w(t) - w(t - \Delta t))$$

3.3. Le mouvement brownien

Par définition du mouvement brownien, tous les éléments de cette somme :

- sont des variables iid
- distribuées normalement d'espérance nulle et de variance Δt

<u>Algorithme : simulation du brownien sur (0,T) :</u>

$$choose\ \ \Delta t$$

$$t_0 = 0$$

$$n = \left| \frac{T}{\Delta t} \right|$$

3.3. Le mouvement brownien

$$
\begin{aligned}
&For\ \ j = 1\ to\ n \\
&\quad t_j = t_{j-1} + \Delta t \\
&\quad choose\ Z_j \propto N(0,1) \\
&\quad w(t_j) = w(t_{j-1}) + Z_j \,.\, \sqrt{\Delta t} \\
&next\ \ j
\end{aligned}
$$

On a ainsi généré les valeurs du mouvement brownien
aux points intermédiaires t_j

Pour définir des trajectoires continues il suffit de relier ces points
par des fonctions linéaires:

3.3. Le mouvement brownien

Pour $t_{j-1} < t < t_j$:

$$w(t) = w(t_{j-1}) + \frac{(t - t_{j-1})}{\Delta t}(w(t_j) - w(t_{j-1}))$$

Exercice : simuler quatre trajectoires discrétisées du mouvement brownien sur une durée de 2 ans en utilisant un pas de discrétisation d'abord journalier puis 3 fois par jour.

3.4. Intégration stochastique

MOTIVATION :

Les trajectoires d'un mouvement brownien n'étant pas à variations bornées, on ne peut utiliser les outils du calcul différentiel et intégral.

L'objectif du calcul stochastique est de définir une autre forme d'intégrale (*l'intégrale stochastique*) qui permet de développer des équations d'évolution stochastiques en temps continu.

La méthodologie consiste à passer d'une convergence trajectoire par trajectoire à une convergence quadratique.

3.4. Intégration stochastique

1°)*Promenade aléatoire discrète* :

$$\ln(S(n)/S(0)) = \delta.n + \sigma\sum_{i=1}^{n}\psi_i = \delta.n + \sigma.W(n)$$

2°)*Subdivision de la promenade* :

$$\ln(S^j(n)/S(0)) = \delta.n + \sigma.\Delta x_j\sum_{i=1}^{t/\Delta t_j}\psi_i = \delta.n + \sigma.W^j(n)$$

3°)*Différences finies du processus*: notation:

$$\Delta^j X(n) = X(n) - X(n - \Delta t_j)$$

3.4. Intégration stochastique

$$\Delta^j \ln(S^j(n)/S(0)) = \delta\Delta t_j + \sigma.\Delta x_j \psi = \delta.\Delta t_j + \sigma.\Delta W^j(n)$$

4°) *Passage à la limite :* ???

$$d(\ln(S(t)/S(0)) = \delta.dt + \sigma.dw(t)$$

Mais le processus w a des trajectoires non à variations bornées; cette différentielle n’existe pas au sens classique.

CALCUL STOCHASTIQUE : donner quand même un sens à cette différentielle.

3.4. Intégration stochastique

Construction de l'intégrale classique :

Soit f une fonction de (0,T) à valeurs réelles

Intégrale de Riemann :

$$\int_0^T f(s)\, ds$$

Construction par limite de sommes de Riemann :

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(s_j)\,(t_{j+1} - t_j)$$

Avec : $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T \quad \text{et} \quad s_j \in \lfloor t_j, t_{j+1} \rfloor$

3.4. Intégration stochastique

Intégrale de Riemann – Stieltjes :

Soit g une fonction à variations bornées de (0,T) à valeurs réelles

$$\int_0^T f(s)\, dg(s)$$

Construction par limite de sommes de Riemann :

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(s_j)\,(g(t_{j+1}) - g(t_j))$$

Avec :

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T \quad \text{et} \quad s_j \in \lfloor t_j, t_{j+1} \rfloor$$

3.4. Intégration stochastique

<u>Essai de généralisation en stochastique :</u>

On essaie de définir un objet du type :

$$\int_0^T X(s)\, dw(s)$$

Avec :

- X : processus stochastique
- w : mouvement brownien standard

Le résultat devrait être une variable aléatoire !

3.4. Intégration stochastique

On peut toujours définir des sommes de Riemann qui deviennent des variables aléatoires :

$$Z_n = \sum_{j=0}^{n-1} X(s_j)\,(w(t_{j+1}) - w(t_j))$$

$$(0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T \quad \text{et} \quad s_j \in \lfloor t_j, t_{j+1} \rfloor)$$

Comment passer à la limite des ces sommes qui sont à présent des variables aléatoires?

$\longrightarrow$ *… choix d’un mode de convergence de v.a.*

3.4. Intégration stochastique

Première possibilité : *vision trajectoire par trajectoire*:
on définit l'intégrale stochastique comme une intégrale de Riemann Stieltjes classique , trajectoire par trajectoire:

$$\forall \omega \in \Omega : \; Y(\omega) = \int_0^T X(s,\omega)\, dw(s,\omega)$$

> *Première anomalie* : les trajectoires du mouvement brownien sont partout non à variation bornée .

Ces intégrales n'existent donc généralement pas .

3.4. Intégration stochastique

L'utilisation d'une intégrale trajectoire par trajectoire revient à travailler, en terme de mode de convergence de variables aléatoires, en convergence presque sûre.

En vue de définir une intégrale on va passer à un mode de convergence plus faible , la convergence quadratique (L^2).

Cette exigence moins forte de convergence va permettre de passer à la limite dans les sommes de Riemann mais :

Deuxième anomalie : la limite va dépendre des points s_j

3.4. Intégration stochastique

Illustration : essai de définition de l'intégrale :

$$\int_0^T w(s)\ dw(s)$$

Equivalent en calcul intégral classique :

$$\int_0^T f(s)\, df(s)$$

$$\text{avec : } f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f \text{ à VB}$$

$$\longrightarrow \quad \int_0^T f(s)\, df(s) = \frac{f^2(T)}{2}$$

3.4. Intégration stochastique

<u>Calcul en stochastique :</u> premier choix : *<u>début de l'intervalle</u>*
(choix canonique en calcul stochastique)

$$\boxed{s_j \in \lfloor t_j , t_{j+1} \rfloor : \ s_j = t_j}$$

Soit la suite de partitions de l'intervalle (0,T) générées par les points :

$$t_i^{(n)} = \frac{iT}{n} \ (i = 0,1,\ldots, n)$$

Avec passage à la limite : $n \to \infty$

3.4. Intégration stochastique

Thèse : on a dans L^2 :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} w(t_j^n)(w(t_{j+1}^n) - w(t_j^n)) = \frac{1}{2} w^2(T) - \frac{1}{2} T}$$

Lemme :

$$a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(a-b)^2$$

$$b(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a-b)^2$$

3.4. Intégration stochastique

Démonstration :

$$\sum_{j=0}^{n-1} w(t_j^n)(w(t_{j+1}^n) - w(t_j^n)) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(w^2(t_{j+1}^n) - w^2(t_j^n))$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(w(t_{j+1}^n) - w(t_j^n))^2$$

$$= \frac{1}{2}w^2(T) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(w(t_{j+1}^n) - w(t_j^n))^2$$

$$\xrightarrow{L^2} \quad t_{j+1}^n - t_j^n$$

3.4. Intégration stochastique

Donc dans L^2 on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sum \; = \frac{1}{2} w^2(T) - \frac{1}{2} T$$

Conclusion : on va écrire en adoptant cette définition de limite en convergence quadratique de l'intégrale stochastique :

$$\int_0^T w(s)\, dw(s) = \frac{w^2(T)}{2} - \frac{T}{2}$$

3.4. Intégration stochastique

deuxième choix : *fin de l'intervalle*

$$\boxed{s_j \in \lfloor t_j, t_{j+1} \rfloor : \; s_j = t_{j+1}}$$

On peut montrer alors de manière identique (deuxième partie du lemme) que cette fois on a :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} w(t_{j+1}^{n})(w(t_{j+1}^{n}) - w(t_j^{n})) = \frac{1}{2} w^2(T) + \frac{1}{2} T}$$

3.4. Intégration stochastique

troisième choix : *milieu de l'intervalle*
(intégrale de STRATONOVICH)

$$\boxed{s_j \in \lfloor t_j, t_{j+1} \rfloor : \; s_j = (t_j + t_{j+1})/2}$$

On peut montrer qu'on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} w(t_{j+1}^{n})(w(t_{j+1}^{n}) - w(t_{j}^{n})) = \frac{1}{2} w^2(T)$$

3.4. Intégration stochastique

Types d'intégrales stochastiques :

-premier choix : début d'intervalle :
choix canonique en calcul stochastique : **Intégrale de ITO:** on peut définir l'intégrale indéfinie qui devient un processus stochastique :

$$\boxed{I(t) = \int_0^t w(s)\, dw(s) = \frac{w^2(t)}{2} - \frac{t}{2}}$$

Corollaire : cette intégrale de ITO est une martingale de moyenne nulle (bruit).

3.4. Intégration stochastique

troisième choix : milieu d'intervalle :

choix alternatif en calcul stochastique :

Intégrale de STRATONOVICH

$$\boxed{\hat{I}(t) = \oint_0^t w(s)\, ds = \frac{w^2(t)}{2}}$$

Cette intégrale respecte la règle traditionnelle du calcul intégral mais ne génère plus une martingale:

$$E(\hat{I}(t)) = t/2$$

3.4. Intégration stochastique

<u>Justification du choix canonique de début d'intervalle :</u>
(supprématie de l'intégrale de ITO) :

<u>Avantages :</u>

1° *mesurabilité* : en terme de filtration , la valeur en début d'intervalle est la seule mesurable tout au long de l'intervalle d'intégration.

2° *martingale* : l'intégrale de ITO est une martingale d'espérance nulle .

→ *Dans la suite, Intégrale de ITO*

3.4. Intégration stochastique

<u>CONSTRUCTION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE :</u>

<u>*But*</u> : donner un sens à l'objet aléatoire suivant:

$$\int_0^t X(s,\omega)\,dw(s,\omega) \neq \int_0^t X(s,\omega)\left(\frac{dw(s,\omega)}{ds}\right)ds$$

Où:

$$-\, w = \text{mouvement brownien standard}$$
$$-\, X = \text{processus stochastique}$$

= ***Intégrale stochastique définie***

3.4. Intégration stochastique

Propriétés de base de l'intégration classique :

Si f est une fonction à variations bornées , alors on a :

1°) $\int_0^T 1_{]a,b]}(s)\, dg(s) = g(b) - g(a) \qquad (0 < a < b < T)$

2°) $\int_0^T (a_1 f_1(s) + a_2 f_2(s))\, dg(s) = a_1 \int_0^T f_1(s)\, dg(s) + a_2 \int_0^T f_2(s)\, dg(s)$

(opérateur linéaire)

… propriétés minimales à conserver pour toute opération d'intégration digne de ce nom….

3.4. Intégration stochastique

- *Démarche* : limite de somme de Riemann mais autre passage à la limite tout en conservant ces propriétés de base.

-<u>1° Etape</u> : <u>*Intégration de fonctions indicatrices :*</u>

$$X(s,\omega) = 1_{[a,b[}(s)$$

Alors:

$$\boxed{\begin{aligned} \int_0^t X(s)\,dw(s,\omega) &= 0 && \text{si } t \leq a \\ &= w(t) - w(a) && \text{si } a < t \leq b \\ &= w(b) - w(a) && \text{si } t > b \end{aligned}}$$

3.4. Intégration stochastique

-<u>2° Etape</u> : *<u>Intégration de fonctions en escaliers</u> :*

$\longrightarrow$ *additivité de l'intégrale*:

$$X(s) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j 1_{[t_j, t_{j+1}[}(s) + c_n 1_{\{t_n\}}(s)$$

$$\text{où } 0 = t_0 < t_1 .... < t_n = t : \text{subdivision déterministe}$$

$$c_i = \text{constantes}$$

$$\boxed{\int_0^t X(s)\, dw(s) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \int_0^t 1_{[t_j, t_{j+1}[}(s)\, dw(s) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (w(t_{j+1}) - w(t_j))}$$

3.4. Intégration stochastique

-<u>3° Etape</u> : <u>*Intégration de processus stochastiques simples*</u> :

X est dit un processus stochastique simple sur (0,T) si :

$$- \exists\, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$$

$$- \forall k : \ \xi_k = \text{v.a. } \Im_{t_k} - \text{mesurable}$$

$$- \forall k : E(\xi_k{}^2) < \infty$$

tel que:

$$\boxed{X(t,\omega) = \xi_{n-1}(\omega) 1_{\{t_n\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(\omega) 1_{[t_i, t_{i+1}[}(t)}$$

3.4. Intégration stochastique

Alors : $\text{si } t_k \leq t < t_{k+1}$

On définit l'intégrale définie par:

$$I_t(X) = \int_0^t X\,dw = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i (w(t_{i+1}) - w(t_i)) + \xi_k (w(t) - w(t_k))$$

$$(I_0(0) = 0)$$

Cet opérateur est additif :

$$I_t(aX + bY) = a\,I_t(X) + b\,I_t(Y)$$

3.4. Intégration stochastique

Propriété de martingale :

Le processus « *intégrale indéfinie* » est une martingale

$$E(I_t(X)\,|\,\mathfrak{I}_s) = I_s(X) \quad (0 < s < t)$$

En particulier:

$$E(I_t(X)) = 0$$

Démonstration:

2 cas selon que s et t appartiennent ou non au même sous intervalle de la subdivision:

3.4. Intégration stochastique

Par exemple si s et t appartiennent au même sous intervalle :

$$\text{soit } s,t \in [t_k, t_{k+1}[:$$

$$I_t(X) = I_s(X) + \xi_k (w(t) - w(s))$$

$$\xi_k \text{ indépendante de } (w(t) - w(s))$$

Donc :

$$\boxed{E(I_t(X) \mid \mathfrak{I}_s) = I_s(X) + \xi_k E(w(t) - w(s) \mid \mathfrak{I}_s) = I_s(X)}$$

3.4. Intégration stochastique

Propriété du moment d'ordre 2 (propriété d'isométrie):

$$\boxed{E((I_t(X))^2) = E(\int_0^t X^2(s)\,ds)}$$

Démonstration:

$$E((\sum_{i=0}^{k-1} \xi_i (w(t_{i+1}) - w(t_i)) + \xi_k (w(t) - w(t_k)))^2)$$

$$= E(\sum_{i=0}^{k-1} \xi_i^{\,2} (w(t_{i+1}) - w(t_i))^2 + \xi_k^{\,2} (w(t) - w(t_k))^2)$$

3.4. Intégration stochastique

$$= \sum_{i=0}^{k-1} E(\xi_i^{\,2)}(t_{i+1} - t_i) + E(\xi_k^{\,2})(t - t_k)$$

$$= \int_0^t (E(X(s))^2 ds = E(\int_0^t X^2(s) ds)$$

<u>Remarque </u>: la définition de ces processus simples montre bien que l'on prend une valeur mesurable en début d'intervalle (intégrale de ITO).

3.4. Intégration stochastique

-<u>4° Etape</u> : <u>*Intégration de processus de carré intégrable :*</u>

X est dit un processus de carré intégrable sur (0,T) si:

- X est un processus adapté à la filtration

$$- \quad E\left(\int_0^T X^2(s)\,ds\right) < \infty$$

Espace M^2_T =ensemble des processus de carré intégrable sur (0,T).

Espace

$$M^2 = M^2_\infty = \text{processus de carré intégrable sur } (0,\infty)$$

3.4. Intégration stochastique

<u>Propriété</u> : *si X est un processus de carré intégrable alors:*

$$-\exists\{X^{(n)}\}\in L^2(\Omega):\text{processus simples}$$

avec :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} E\left(\int_0^T (X^{(n)}(s)-X(s))^2\,ds\right)=0$$

Pour chaque processus simple de la suite on peut définir:

$$I_t(X^{(n)})=\int_0^t X^{(n)}(s)\,dw(s)$$

3.4. Intégration stochastique

Cette suite de processus converge dans la norme L^2 vers un processus appelé ***intégrale stochastique***

$$I_t(X^{(n)}) \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} I_t(X) = \int_0^t X(s)\,dw(s) \quad \text{par notation}$$

C'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty} E(\left|I_t(X) - I_t(X_n)\right|^2) = 0$$

3.4. Intégration stochastique

<u>Propriétés de l'intégrale stochastique :</u>

$$\text{(i) } E(I_t(X)) = 0$$

$$\text{(ii) } E(I_t^{\,2}(X)) = E\left(\int_0^t X^2(s)\,ds\right) \qquad \text{(Isométrie de ITO)}$$

$$\text{(iii) } I_t(X) \text{ est une martingale}$$

$$\text{(iV) } I_t(X) \text{ est un processus à trajectoires continues}$$

3.4. Intégration stochastique

Caractérisation des espaces M_T^2

-analogie de la propriété classique d'existence de l'intégrale pour des fonctions continues : l'intégrale classique de RIEMAN existe pour toute fonction continue.

PROPOSITION :

Si f est un processus stochastique à trajectoires continues p.s. adapté à la filtration du brownien.
alors l'intégrale de ITO de f sur (0,T) existe si :

3.4. Intégration stochastique

$$E\left(\int_0^T f^2(s)\,ds\right) < \infty$$

Preuve : il suffit de montrer qu'il existe une suite de processus simple convergeant en moyenne quadratique vers f.

Une suite candidate est la suivante :

$$f_n(t) = n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)\,ds \quad \text{pour } \frac{k}{n} \le t < \frac{k+1}{n} \; (k = 1, 2, \ldots, n^2 - 1)$$

$$= 0 \qquad\qquad \text{sinon}$$

3.4. Intégration stochastique

<u>Différentielle stochastique</u>:

$-\,b(s,\omega)$: processus adapté et intégrable

$-\,\sigma(s,\omega)$: processus adapté et de carré intégrable

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(s)\,ds + \int_0^t \sigma(s)\,dw(s)$$

Alors :

$$dX(t) = b(t)\,dt + \sigma(t)\,dw(t)$$

= différentielle stochastique

3.4. Intégration stochastique

Propriétés de la différentielle stochastique :

autres règles que le calcul différentiel classique

-EXEMPLE /

Calcul différentiel classique:

$$(f(t))^2 = 2\int_0^t f(s)\,df(s)$$

Calcul stochastique :

$$(w(t))^2 = ???\ 2\int_0^t w(s)\ dw(s)$$

3.4. Intégration stochastique

Or: $(i)\, E(w^2(t)) = t$

$$(ii)\, E\left(\int_0^t w(s)\, dw(s)\right) = 0 \text{ (martingale)}$$

<u>Différentielle d'un produit (intégration par parties) :</u>

Si: $d\xi_1(t) = b_1(t)\, dt + \sigma_1(t)\, dw(t)$

$d\xi_2(t) = b_2(t)\, dt + \sigma_2(t)\, dw(t)$

Alors: $d(\xi_1(t)\xi_2(t)) = \xi_1(t)\, d\xi_2(t) + \xi_2(t)\, d\xi_1(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t)\, dt$

3.4. Intégration stochastique

Différentielle d'une fonction de fonction:

Calcul différentiel classique:

$$df(t, g(t,x)) = ?\ (f, g \text{ différentiables})$$

$$df(t, g(t,x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial t}\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}dx$$

Calcul stochastique : Formule de ITO

3.4. Intégration stochastique

Lemme de ITO : version de base

$f(t,x) = \text{fonction de 2 variables} \; (f \in C^{1,2})$

$\text{Alors } f(t, w(t)) \text{ est différentiable et on a :}$

$$\boxed{df(t,w(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}dw(t)}$$

3.4. Intégration stochastique

Lemme de ITO : version générale

$$\text{(i)}\; d\xi(t) = b(t)\,dt + \sigma(t)\,dw(t) \quad \text{(processus de ITO)}$$

$$\text{(ii)}\; f(t,x) = \text{fonction de 2 variables} \; (f \in C^{1,2})$$

Alors $f(t,\xi(t))$ est différentiable :

$$\boxed{df(t,\xi(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} b(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2(t)\right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}\sigma(t)\,dw(t)}$$

3.4. Intégration stochastique

Règles de calcul formel:

$$dt.dt = 0$$

$$dw.dw = dt$$

$$dw.dt = 0$$

$$df(t,w) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dw + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(dw.dt) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dw)^2$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dw + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dt$$

3.4. Intégration stochastique

Application : intégration par parties :

$$\int_0^t s\,dw(s) = ??$$

On prend: $f(t,x) = t\,x$

$$\xi(t) = w(t)$$

Par ITO on a :

$$\boxed{\int_0^t s\,dw(s) = t\,w(t) - \int_0^t w(s)\,ds}$$

3.4. Intégration stochastique

<u>Généralisation : formule générale de l'intégration par parties</u>

Si $f(s,\omega)$ continu et à variation bornée $\forall s$ p.s. :

$$\int_0^t f(s)\, dw(s) = f(t)\, w(t) - \int_0^t w(s)\, df(s)$$

Cette propriété n'est plus vérifiée généralement quand le processus f n'est pas à variation bornée
(*par exemple : prendre f = w*)

3.4. Intégration stochastique

EXEMPLE/ ITO 1 :

$$\boxed{(w(t))^2 = ???\ 2\int_0^t w(s)\, dw(s)}$$

On prend:

$$f(t,x) = x^2$$

$$\xi(t) = w(t)$$

$$dw^2(t) = 2\,w(t)\,dw(t) + dt$$

ou

$$w^2(t) = t + 2\int_0^t w(s)\,dw(s)$$

3.4. Intégration stochastique

EXEMPLE/ ITO 2 :

$$\boxed{E\, w^6(t) = ?}$$

On prend:

$$f(t,x) = x^6$$

$$\xi(t) = w(t)$$

$$dZ(t) = 6\, w(t)^5\, dw(t) + 15\, w(t)^4\, dt$$

$$\text{en intégrant :}$$

$$Z(t) = \int_0^t 6 w(s)^5\, dw(s) + \int_0^t 15\, w(s)^4\, ds$$

3.4. Intégration stochastique

Or:

$$1)\; E\left(\int_0^t 6\, w(s)^5\, dw(s)\right) = 0 \quad (\text{intégrale stochastique})$$

$$2)\; E\left(\int_0^t 15\, w(s)^4\, ds\right) = 15\int_0^t E\, w(s)^4\, ds = 15\int_0^t 3s^2\, ds$$

(cf. slide 72)

Finalement:

$$\boxed{E(w(t)^6) = 15\, t^3}$$

3.4. Intégration stochastique

<u>Exercices</u>

1°Pour quelle valeur du paramètre r le processus suivant est il une martingale et quelle est dans ce cas sa volatilité ?

$$\boxed{X(t) = e^{rt}.\sin(\pi.w(t))}$$

2° Calculer la différentielle de la puissance n ième d'un mouvement brownien.

3.5. Equations différentielles stochastiques

INTRODUCTION : équation du *brownien géométrique*:

$$f(t,x) = e^{(\mu t + \sigma x)}$$

$$\xi(t) = w(t)$$

On a par ITO :

$$\text{(i)} \frac{\partial f}{\partial t} = \mu f$$

$$\text{(ii)} \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma f$$

$$\text{(iii)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sigma^2 f$$

3.5. Equations différentielles stochastiques

Par ITO :

$$df = \mu f\, dt + \sigma f\, dw + \frac{1}{2}\sigma^2 f\, dt$$

CONCLUSION : en notant $\delta = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$

Le processus stochastique (brownien géométrique)

$$S(t) = S(0)\exp((\delta - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma w(t))$$

est solution de l'équation différentielle stochastique:

$$dS(t) = \delta S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dw(t)$$

3.5. Equations différentielles stochastiques

PROPRIETES du mouvement brownien géométrique :

$$(i)\, E(S(t)) = S(0)\, e^{\delta t}$$

$$(ii)\, \mathrm{var}(S(t)) = S^2(0)\, e^{2\delta t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

Preuve :

$$S(t)/S(0) = \log\mathrm{norm}((\delta - \frac{\sigma^2}{2})t; \sigma\sqrt{t})$$

Et : $$E(\log\mathrm{norm}(a, b^2)) = \exp(a + b^2/2)$$

3.5. Equations différentielles stochastiques

Equations différentielles classiques:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$$

ou

$$dx(t) = f(t, x(t))\,dt$$

Solutions si f admet une condition de LIPSCHITZ:

$$\left|f(t,x) - f(t,y)\right| \leq K\left|x - y\right|$$

3.5. Equations différentielles stochastiques

Solutions numériques : itération de Picard:

$$x^{(0)}(t) = x_0$$

$$x^{(n)}(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x^{(n-1)}(s))\,ds$$

Equations différentielles stochastiques :

$$dX(t) = b(t, X(t))\,dt + \sigma(t, X(t))\,dw(t)$$

Avec: $X(0) = x_0$

3.5. Equations différentielles stochastiques

<u>Conditions de LIPSCHITZ et de croissance</u> :

(i) $\left|b(t,x) - b(t,y\right| + \left|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\right| \leq K \left|x - y\right|$

(ii) $\left|b^2(t,x) \quad \right| + \left|\sigma^2(t,x)\right| \leq K^2 (1 + x^2)$

L'équation différentielle stochastique admet alors une solution unique qui peut être approché par les itérations:

$$X^{(n)}(t) = x_0 + \int_0^t b(s, X^{(n-1)}(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, X^{(n-1)}(s))\,dw(s)$$

3.5. Equations différentielles stochastiques

<u>Equations différentielles stochastiques linéaires:</u>

On essaie d'obtenir une solution générale à l'équation linéaire:

$$\boxed{\begin{aligned} & dX(t) = (c_1(t)X(t) + c_2(t))\,dt + (\sigma_1(t)X(t) + \sigma_2(t)).\,dw(t) \\ & X(0) = X_0 \end{aligned}}$$

Où :

$$c_i \text{ et } \sigma_i = \text{fonctions déterministes continues}$$

3.5. Equations différentielles stochastiques

<u>Première étape</u> : *équation homogène sans bruit* :

$$\boxed{\begin{aligned} &dY(t) = (c_1(t)Y(t))\,dt \\ &Y(0) = Y_0 \end{aligned}}$$

Solution:

$$Y(t) = Y_0 .\, \exp\left(\int_0^t c_1(s)\,ds\right)$$

$$\text{pour } Y_0 = 1 : \quad y(t) = \exp\left(\int_0^t c_1(s)\,ds\right)$$

3.5. Equations différentielles stochastiques

Deuxième étape : *équation sans bruit* :

$$\boxed{\begin{aligned} dX(t) &= (c_1(t)X(t) + c_2(t))\,dt \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}}$$

Solution:

$$X(t) = y(t)\{X_0 + \int_0^t c_2(s)/y(s)\,ds\}$$

$$= X_0 \exp(\int_0^t c_1(u)du) + \int_0^t c_2(s).(\exp\int_s^t c_1(u)\,du)\,ds$$

3.5. Equations différentielles stochastiques

Troisième étape : *équation avec bruit additif* :

$$\boxed{\begin{aligned} &dX(t) = (c_1(t)X(t) + c_2(t))\,dt + \sigma_2(t)\,dw(t) \\ &X(0) = X_0 \end{aligned}}$$

Solution:

$$X(t) = y(t)\{X_0 + \int_0^t c_2(s)/y(s)\,ds + \int_0^t \sigma_2(s)/y(s)\,dw(s)\}$$

3.5. Equations différentielles stochastiques

<u>Quatrième étape</u> : *équation homogène avec bruit multiplicatif*:

$$\boxed{\begin{aligned} &dZ(t) = c_1(t)Z(t)dt + \sigma_1(t)Z(t)\,dw(t) \\ &Z(0) = Z_0 \end{aligned}}$$

Solution:

$$Z(t) = Z_0.\ \exp\left(\int_0^t (c_1(s) - \sigma_1^2(s)/2)\,ds + \int_0^t \sigma_1(s)\,dw(s)\right)$$

$$\text{pour } Z_0 = 1: \quad z(t) = \exp\left(\int_0^t (c_1(s) - \sigma_1^2(s))\,ds + \int_0^t \sigma_1(s)\,dw(s)\right))$$

3.5. Equations différentielles stochastiques

Cinquième étape : *équation générale* :

$$dX(t) = (c_1(t)X(t) + c_2(t))\,dt + (\sigma_1(t)X(t) + \sigma_2(t)).\,dw(t)$$
$$X(0) = X_0$$

Solution:

$$X(t) = z(t)\{X_0 + \int_0^t (c_2(s) - \sigma_1(s)\sigma_2(s))/z(s)\,ds + \int_0^t \sigma_2(s)/z(s)\,dw(s)\}$$

3.5. Equations différentielles stochastiques

EXEMPLES de processus fondamentaux :

-1° *Brownien géométrique*

-2° *Processus d'Ornstein Uhlenbeck*:

$$\boxed{dX(t) = a(b - X(t))\,dt + \sigma\, dw(t)}$$

Equation déterministe correspondante:

$$dY(t) = a(b - Y(t))dt \qquad (Y(0) = Y_0)$$

Solution:

$$Y(t) = Y_0 . e^{-at} + b.(1 - e^{-at})$$

3.5. Equations différentielles stochastiques

Soit: $$X(t) = Y(t) + Z(t)\,e^{-at}$$

On a : $$\text{(i)}\, dX(t) = dY(t) + e^{-at}dZ(t) - ae^{-at}\,Z(t)\,dt$$

$$\text{(ii)} dX(t) = a(b - X(t))dt + \sigma dw(t)$$

$$\text{(iii)} dY(t) = a(b - Y(t))dt$$

donc :

$$dZ(t) = e^{at}\,\sigma\,dw(t)$$

$$Z(t) = \int_0^t e^{at}dw(t)$$

3.5. Equations différentielles stochastiques

Finalement le processus d'Ornstein-Uhlenbeck devient:

$$\boxed{X(t) = x_0\, e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma\, e^{-at} \int_0^t e^{as}\, dw(s)}$$

Trend déterministe

Bruit aléatoire

3.5. Equations différentielles stochastiques

PROPRIETE du processus ORNSTEIN :

$$\boxed{E\,X(t) = x_0\, e^{-at} + b(1 - e^{-at})}$$

Moyenne pondérée de la position initiale et de la position asymptotique b.
Les poids sont des exponentielles négatives gouvernées par le facteur de rappel a.

3.6. Théorème de GIRSANOV

Introduction aux changements de mesure de probabilité en univers discret

Espace de scénarios :

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$$

2 mesures de probabilité équivalentes:

$$P(\{\omega_i\}) = p_i > 0$$

$$P^*(\{\omega_i\}) = q_i > 0$$

(accord sur les scénarios possibles mais pas sur leur proba).

3.6. Théorème de GIRSANOV

<u>Densité de RADON NIKODYM :</u>

c'est une variable aléatoire appelée *densité de la mesure* P* par rapport à la mesure P et donnée par :

$$Z(\omega) = \frac{P^*(\{\omega_i\})}{P(\{\omega_i\})} = \frac{q_i}{p_i}$$

Par définition cette variable aléatoire est d'espérance unitaire sous la mesure initiale P :

$$EZ = \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{q_i}{p_i} = \sum_{i=1}^{N} q_i = 1$$

3.6. Théorème de GIRSANOV

Calcul d'espérance :

Si Y est une autre variable aléatoire définie sur cet espace, alors on a :

$$E^*(Y) = E(YZ)$$

Preuve :

$$E^*(Y) = \sum_{i=1}^{N} Y(\omega_i)\, q_i = \sum_{i=1}^{N} \left(Y(\omega_i)\frac{q_i}{p_i}\right) p_i$$

3.6. Théorème de GIRSANOV

Exemple : modèle binomial sur une période :

Marché boursier à la hausse ou à la baisse :

$$\Omega = \{u, d\}$$

- mesure de probabilité initiale = mesure réelle

Par exemple :

$$p_u = p_d = \frac{1}{2}$$

Taux sans risque : 3%

3.6. Théorème de GIRSANOV

Variable aléatoire : cours d'une action dans une période

S(0)=1
S(1)=Y

Avec : $$Y(u) = 1{,}09$$ $$Y(d) = 1{,}01$$

Autre mesure de probabilité : mesure risque neutre :

$$q_u = \frac{1 + r - d}{u - d} \quad \text{et} \quad q_d = 1 - q_u$$

3.6. Théorème de GIRSANOV

Donc :

$$q_u = \frac{1{,}03 - 1{,}01}{1{,}09 - 1{,}01} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad q_d = \frac{3}{4}$$

La densité est donnée par :

$$Z(u) = \frac{q_u}{p_u} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$Z(d) = \frac{q_d}{p_d} = \frac{3/4}{1/2} = \frac{3}{2}$$

3.6. Théorème de GIRSANOV

Calcul des espérances :

Monde réel :

$$EY = (1{,}09 + 1{,}01)/2 = 1{,}05$$

Monde risque neutre :

→ Calcul direct : $E^*Y = 1{,}09 * 1/4 + 1{,}01 * 3/4 = 1{,}03$

→ Calcul par densité :

$$E^*Y = (1{,}09 * 1/2) * 1/2 + (1{,}01 * 3/2) * 1/2 = 1{,}03$$

3.6. Théorème de GIRSANOV

Motivation : brownien géométrique : nouvel univers tel que tous les actifs financiers aient aussi un return moyen égal au taux sans risque r ; ceci implique un changement de drift du processus.

Soit: $$dS(t) = \delta S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dw(t)$$

$$dS(t) = r\, S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dw(t) + (\delta - r)\, S(t)\, dt$$

$$dS(t) = r\, S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dw^*(t)$$

avec $$w^*(t) = w(t) + \frac{(\delta - r)}{\sigma} t$$

3.6. Théorème de GIRSANOV

Le processus w* n'est plus un mouvement brownien sous la mesure réelle de probabilité.

GIRSANOV: comment changer de mesure pour obtenir quand même un brownien ?

On introduit pour ce la notion de changement de mesure et de densité de RADON-NIKODYM .

3.6. Théorème de GIRSANOV

soit $(\Omega, \Im)$ un espace de probabilité muni de deux mesures P_1 et P_2

<u>DEFINITION:</u> la mesure P2 est dite absolument continue par rapport à la mesure P1 si:

$$P_2(B) = 0 \quad \forall B \in \Im \text{ tel que } P_1(B) = 0$$

<u>THEOREME de RADON-NIKODYM :</u>

la mesure P2 est absolument continue par rapport à la mesure P1 ssi il existe une variable aléatoire ρ non négative et mesurable telle que:

3.6. Théorème de GIRSANOV

$$P_2(B) = \int_B \rho(\omega)\, dP_1(\omega) = E_{P_1}(1_B\, \rho)$$

La variable ρ est appelée *densité de Radon –Nikodym.*

Cette densité est une variable aléatoire d'espérance unitaire:
Il suffit de prendre: B=Ω :

$$P_2(\Omega) = 1 = \int_\Omega \rho(\omega)\, dP_1(\omega) = E_{P_1}(\rho)$$

3.6. Théorème de GIRSANOV

Martingale exponentielle :

-espace de probabilité $(\Omega, \Im, P)$

-mouvement brownien standard sous P : w

- filtration associée : $\Im_t$

Définition: le processus Y défini ci dessous est appelé *martingale exponentielle*

$$\boxed{Y(t) = \exp(k\,w(t) - \frac{1}{2}k^2 t)}$$

3.6. Théorème de GIRSANOV

Propriétés :

- les variables aléatoires Y(t) sont distribuées log normalement de paramètres :

$$m = -\frac{1}{2}k^2 t$$

$$\sigma^2 = k^2 t$$

- E Y(t) = 1
- Y est un processus non négatif

$\longrightarrow$ *Candidat naturel « densité de Radon Nikodym »*

3.6. Théorème de GIRSANOV

<u>Changement de mesure et mouvement brownien:</u>

Soit $\{w(t, \omega); t \in (0,T); \omega \in \Omega\}$ un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \Im, P)$

On introduit le processus Z défini par :

$$Z(t) = w(t) - k\,t \quad (k \in R)$$

Alors le processus w est un mouvement brownien par rapport à la mesure Q dont la densité est définie par:*

$$\boxed{\rho_T = Y(T) = \exp(k\,w(T) - \frac{k^2}{2} T)}$$

3.6. Théorème de GIRSANOV

<u>Preuve:</u> par fonctions caractéristiques:

$$? \quad E_Q(e^{iu(Z(t)-Z(s))} \,|\, \Im_s) = e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)} \quad ??$$

Ou encore :

$$? \quad V(t) = e^{iu\,Z(t)+\frac{u^2}{2}t} \quad \text{est une martingale sous Q ?}$$

$$E_Q(V(t)) = \int_\Omega V(t,\omega)\,dQ(\omega) = \int_\Omega V(t,\omega)\,Y(T,\omega)\,dP(\omega)$$

3.6. Théorème de GIRSANOV

$$= \int_{\Omega} V(t,\omega)\, Y(t,\omega) \left(\frac{Y(T,\omega)}{Y(t,\omega)}\right) dP(\omega)$$

$$= \int_{\Omega} V(t,\omega)\, Y(t,\omega)\, dP(\omega) \int_{\Omega} \frac{Y(T,\omega)}{Y(t,\omega)}\, dP(\omega)$$

(car mouvement brownien à accroissements indépendants)

$$= \int_{\Omega} V(t,\omega)\, Y(t,\omega)\; dP(\omega)$$

(car Y = martingale exponentielle)

3. 6. Théorème de GIRSANOV

Il faut donc montrer que le processus R est une martingale sous P :

$$R(t) = V(t)\ Y(t)$$

$$R(t) = \exp(iuZ(t) + \frac{u^2}{2}t)\ \exp(k\,w(t) - \frac{1}{2}k^2 t)$$

$$= \exp(iu(w(t) - kt) + \frac{u^2}{2}t)\ \exp(k\,w(t) - \frac{1}{2}k^2 t)$$

$$= \exp(k + iu)\,w(t)\ \exp(-\frac{1}{2}t(k^2 - u^2 + iuk))$$

$$= \exp(k + iu)\,w(t)\ \exp(-\frac{1}{2}(k + iu)^2)$$ Martingale exponentielle

3.6. Théorème de GIRSANOV

*-**<u>Généralisation :</u>***

Généraliser la dérive du brownien :

$$Z(t) = w(t) - k\,t \quad (k \in R)$$

$$\downarrow$$

$$Z(t) = w(t) - \int_0^t b(s, \omega)\, ds$$

Où b est à présent un processus stochastique .

3.6. Théorème de GIRSANOV

<u>*Hypothèses sur le processus*</u> *b :*

(i) Le processus b est adaptée à la filtration ;
(ii) condition de NOVIKOV :

$$E\left(\frac{1}{2}\int_0^T b^2(s,\omega)\,ds\right) < \infty$$

(iii) On définit la variable aléatoire :

$$\rho_T(\omega) = \exp\left\{\int_0^T b(s,\omega)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^T b^2(s,\omega)\,ds\right\}$$

3.6. Théorème de GIRSANOV

Alors le processus :

$$Z(t) = w(t) - \int_0^t b(s, \omega)\, ds$$

est un mouvement brownien par rapport à la mesure Q dont la densité de Radon Nykodim par rapport à P est donnée par:

$$\frac{dQ}{dP} = \rho_T$$

3.7. Représentation de Feynman- Kac

Lien entre:

équations différentielles stochastiques (EDS)
et
équations aux dérivées partielles (PDE)

Objectif : *calcul de l'espérance mathématique de fonctions de la solution d'une équation différentielle stochastique.*

3.7. Feynman- Kac

Soit X solution de l'EDS:

$$dX(t) = \mu(t, X(t))\,dt + \sigma(t, X(t))\,dw(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

(où w est un brownien standard)

On définit la fonction de 2 variables réelles :

$$\boxed{F(t,x) = E\left(\Phi(X(T)) \,\middle|\, X(t) = x\right)}$$

(où Φ est une fonction d'une variable réelle).

3.7. Feynman- Kac

Hyp.(H1) :

$$\int_0^T E\left[(\sigma(t,X(t)\frac{\partial F}{\partial x}(t,X(t)))^2\right]dt<\infty$$

Alors la fonction F est solution de l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)+\mu(t,x)\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)=0}$$

Condition au bord : $F(T,x)=\Phi(x)$

3.7. Feynman- Kac

<u>Preuve</u>: Application de la formule de ITO au processus Y :

$$Y(t) = F(t, X(t))$$

$$\begin{aligned}
F(T, X(T)) &= F(t, X(t)) \\
&+ \int_t^T \left[\frac{\partial F}{\partial s}(s, X(s)) + \mu(s, X(s)) \frac{\partial F}{\partial x}(s, X(s)) ds \right] \\
&+ \int_t^T \frac{1}{2} \sigma^2(s, X(s)) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X(s)) ds \\
&+ \int_t^T \sigma(s, X(s)) \frac{\partial F}{\partial x}(s, X(s)) dw(s)
\end{aligned}$$

3.7. Feynman- Kac

On prend l'espérance conditionnelle des 2 membres par rapport a :

$$E(\qquad \left[X(t) = x \right)$$

$$\text{(i) } E(F(T, X(T))\left[X(t) = x \right) = \underline{E(\Phi(X(T) \mid X(t) = x)}$$

$$\text{(ii)(a) } E(\int_t^T \sigma(s, X(s)) \frac{\partial F}{\partial x}(s, X(s)) \, dw(s) \mid X(t) = x)) = 0$$

(car intégrale stochastique et condition H1)

3.7. Feynman- Kac

$$(ii)\,(b)\ \text{si F est solution de l'EDP alors:}$$

$$+\int_t^T\left[\frac{\partial F}{\partial s}(s,X(s))+\mu(s,X(s))\frac{\partial F}{\partial x}(s,X(s))ds\right]$$

$$+\int_t^T\frac{1}{2}\sigma^2(s,X(s))\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X(s))\,ds=0$$

$$(iii)\,E(F(t,X(t)\,|\,X(t)=x)=\underline{F(t,X(t))}$$

3.7. Feynman- Kac

Exemple :

Résoudre l'équation:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0} \quad \text{avec} \; : \; F(T, x) = \Phi(x)$$

EDS correspondante :

$$dX(t) = dw(t)$$

3.7. Feynman- Kac

Représentation Feynman-Kac :

$$F(t,x) = E\left(\Phi(w(T)) \middle| w(t) = x\right)$$

Distribution normale N(x,T-t)

$$\boxed{F(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(T-t,x,y)\,\Phi(y)\,dy}$$

où:

$$p(T-t,x,y) = \frac{1}{(T-t)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}\right)$$

3.7. Feynman- Kac

<u>Variante de la formule de Feynman Kac :</u>

Introduction d'une actualisation dans la fonctionnelle

$$F(t,x) = E(e^{-r(T-t)}\,\Phi(X(T)) \mid X(t) = x)$$

est solution de :

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)\\ &- r\,F(t,x) = 0\end{aligned}}$$

3.7. Feynman- Kac

<u>Généralisation- actualisation à taux variable :</u>

La fonctionnelle du type :

$$F(t,x) = E\left(\exp\left(-\int_t^T k(s,X(s))\,ds\right)\ \Phi(X(T)) \,\middle|\, X(t) = x\right)$$

est solution de :

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)\\ &- k(t,x)F(t,x) = 0\end{aligned}}$$

3.8. Calcul multi-dimensionnel

Introduction de plusieurs sources de bruit
(corrélées ou non)

↓

Mouvement brownien multi dimensionnel

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t))$$

Chacune des composantes est un mouvement brownien.
Ces mouvements browniens peuvent être corrélés.

3.8. Calcul multi-dimensionnel

Exemple : *mouvement brownien bi-dimensionnel* :

$$\boxed{w(t) = (w_1(t), w_2(t))}$$

est un mouvement brownien bi-dimensionnel si :

1° $w_1(t)$ et $w_2(t)) =$ mouvement brownien standard

2° $\mathrm{Cov}(w_1(t), w_2(t)) = E(w_1(t).w_2(t)) = \rho\, t$

(où $-1 \leq \rho \leq 1$)

En particulier : $\rho = \mathrm{cov}(w_1(1), w_2(1))$

3.8. Calcul multi-dimensionnel

Si $\rho=0$, les deux sources de bruit sont indépendantes (mouvement brownien bi-dimensionnel non corrélé).

Décomposition de CHOLESKI :

On peut toujours exprimer un mouvement brownien bi dimensionnel en fonction d’un mouvement brownien bi-dimensionnel non corrélé.

3.8. Calcul multi-dimensionnel

Considérons un mouvement brownien non corrélé .

$$w^*(t) = (w^*_1(t), w^*_2(t))$$

On peut alors construire un mouvement brownien corrélé par la transformation :

$$\boxed{\begin{aligned} w_1(t) &= w^*_1(t) \\ w_2(t) &= \rho . w^*_1(t) + \sqrt{1-\rho^2} . w^*_2(t) \end{aligned}}$$

3.8. Calcul multi-dimensionnel

En termes de matrice variance – covariance :

$\Sigma =$ Matrice du vecteur w(1)

$\Sigma^* =$ Matrice du vecteur w*(1)

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Sigma^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.8. Calcul multi-dimensionnel

Généralisation à n dimensions :

Vecteur gaussien n- dim corrélé :

$$\overline{w} = w(1) = (w_1(1), w_2(1), \ldots, w_n(1))$$

Matrice variance – covariance de ce vecteur :

$$\boxed{\Sigma_{\overline{w}} = \mathrm{cov}(\overline{w}, \overline{w}^T)}$$

Matrice de diagonale unitaire, symétrique et définie positive mais non nécessairement diagonale.
(corrélations entre les variables gaussiennes).

3.8. Calcul multi-dimensionnel

On cherche une transformation linéaire des variables w en des variables z telle que la matrice variance- covariance des z est la matrice identité I .

On recherche une matrice triangulaire inférieure L telle que :

$$\overline{w} = L.\overline{z}$$

Avec:

$$\Sigma_{\overline{z}} = \operatorname{cov}(\overline{z}, \overline{z}^T) = I$$

3.8. Calcul multi-dimensionnel

On a alors :

$$\Sigma_{\overline{w}} = \operatorname{cov}(\overline{w}, \overline{w}^T) = E(L\overline{z}\,\overline{z}^T L^T) = LL^T$$

Il suffit donc de résoudre :

$$\boxed{\Sigma_{\overline{w}} = LL^T}$$

EXEMPLE à 2 dimensions :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

3.8. Calcul multi-dimensionnel

<u>Propriétés du calcul stochastique à 2 dimensions :</u>

Equations différentielles stochastiques :

$$dX_1(t) = \alpha_1(t, X_1, X_2)\, dt + \sigma_{11}(t, X_1, X_2) dw_1(t) + \sigma_{12}(t, X_1, X_2) dw_2(t)$$

$$dX_2(t) = \alpha_2(t, X_1, X_2)\, dt + \sigma_{21}(t, X_1, X_2) dw_1(t) + \sigma_{22}(t, X_1, X_2) dw_2(t)$$

Avec $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$

mouvement brownien bi dimensionnel non corrélé

Condition d'existence et d'unicité : condition de Lipschitz et de croissance linéaire sur les coefficients (comme en dim1).

3.8. Calcul multi-dimensionnel

Formule de ITO :

X_1 et X_2 : solutions EDS

$g(t,x,y)$: fonction différentiable en t et 2 fois diff en x et y

Alors le processus $g(t,X_1(t),X_2(t))$
est différentiable

et on a :

3.8. Calcul multi-dimensionnel

$$dg(t, X_1, X_2) = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x_1} dX_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dX_2$$

$$+ \frac{1}{2}\{(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2)\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + (\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2)\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}$$

$$+ 2(\sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22})\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}\}\, dt$$

3.8. Calcul multi-dimensionnel

Application : différentielle stochastique d'un produit

En prenant: $g(t, x_1, x_2) = x_1 x_2$

$$\boxed{d X_1 X_2 = X_2 \, dX_1 + X_1 \, dX_2 + \underbrace{(\sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22})dt}_{\text{Terme complémentaire}}}$$

PARTIE 4

Modèles stochastiques en temps continu

4.1 Modèle brownien additif et géométrique

Modèle brownien additif : (Bachelier, 1900)

Le cours d'une action est censé suivre une promenade aléatoire continue (autnat de chances durant une période déterminée que le cours augmente ou diminue); modélisation par un mouvement brownien .

$$S(t,\omega) = S(0) + \sigma . w(t,\omega)$$

$S(0) =$ valeur initiale du titre

$w =$ mouvement brownien standard

$\sigma =$ volatilité

4.1 Modèle brownien additif et géométrique

<u>Propriétés du modèle additif:</u>

(i) Le cours du titre à l'instant t est distribué normalement de moyenne constante S(0) et de variance donnée par:

$$\operatorname{var} S(t) = \sigma^2 t$$

(ii) Le processus du cours est une martingale:

$$E(S(t) \mid \Im_s) = S(s) \quad s < t$$

(iii) Propriété d'indépendance des accroissements absolus:

$$S(t) - S(s) \text{ indépendant de } S(s) \quad (s < t)$$

4.1 Modèle brownien additif et géométrique

Inconvénients du modèle additif :

(i) Rendement moyen nul
(ii) Valeurs négatives possibles

Solution :

Indépendance des accroissements relatifs :

$$(S(t) - S(s)) / S(s) \text{ indépendant de } S(s)$$

4.1 Modèle brownien additif et géométrique

Expressions sous forme d'équations différentielles stochastiques

(i) Modèle additif :

$$\Delta S(t) = \sigma \, \Delta w(t)$$

$$dS(t) = \sigma \, dw(t)$$

(ii) Modèle déterministe:

$$\Delta S(t) = S(t)\delta\Delta t$$

$$dS(t) = \delta S(t)\, dt$$

4.1 Modèle brownien additif et géométrique

Nouveau modèle :

$$\Delta S(t) = \delta S(t)\Delta t + \sigma S(t)\,\Delta w(t)$$

$$dS(t) = \delta S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dw(t)$$

Modèle brownien géométrique

Solution de l'équation:

$$S(t) = S(0)\exp((\delta - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma w(t))$$

4.1 Modèle brownien additif et géométrique

<u>Propriété de distribution :</u>

$$S(t)/S(0) = \exp(\text{normale})$$

$$\text{moyenne}\, N = (\delta - \sigma^2/2)t$$

$$\text{écart}-\text{type}\, N = \sigma\sqrt{t}$$

<u>Distribution log-normale:</u>

Si X est une variable aléatoire distribuée normalement de moyenne a et d’écart type b alors la variable Y=exp(X) est appelée une variable log-normale de paramètres a et b

4.1 Modèle brownien additif et géométrique

Densité de probabilité d'une log normale:

$$f_Y(y) = \frac{1}{by\sqrt{2\pi}} \exp(-(\frac{(\ln y - a)^2}{2b^2})) \quad (y > 0)$$

Moments d'une log-normale :

$$(i) E(Y) = e^{a+b^2/2}$$

$$(ii) var(Y) = e^{2a+b^2}(e^{b^2} - 1)$$

4.1 Modèle brownien additif et géométrique

<u>Moments du modèle brownien géométrique:</u>

$$(i)\,E(S(t)) = S(0)\,e^{\delta t}$$

$$(ii)\,var(S(t)) = S^2(0)\,e^{2\delta t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

<u>Propriété d'indépendance</u>

$$(S(t) - S(s))/S(s) = e^{(\delta - \sigma^2/2)(t-s)}\,e^{\sigma(w(t)-w(s))} - 1$$

Indépendant de S(s)

4.2 Modèle de Black et Scholes

Hypothèses du modèle:

(i) Actif risqué suivant un modèle brownien géométrique;
(ii) Actif sans risque de rendement constant continu r
(iii) Marché parfait
(iv) Pas de distribution de dividende de l'actif risqué durant la période considérée

Objectif:
Tarification d'une option européenne (call ou put) sur l'actif risqué

4.2 Modèle de Black et Scholes

<u>Trois visions du modèle:</u>

(i) Résolution directe par arbitrage;
(ii) Mesure martingale;
(iii) Limite du modèle binomial discret

<u>Notations</u>

$$dS(t) = \delta S(t)dt + \sigma S(t)\,dw(t)$$

$$C(S,t,K) = \text{prix en t d'un call sur S de prix d'exercice K}$$

(T= maturité de l'option)

4.2 Modèle de Black et Scholes

<u>Première approche</u> : résolution directe par arbitrage :

Application de la formule de ITO au processus C :

$$dC(S,t) = (\frac{\partial C}{\partial t} + \delta S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2})dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dw(t)$$

ou $$dC(S,t) = C(S,t)(\alpha_C dt + \sigma_c dw(t))$$

avec $$\alpha_C = (\frac{\partial C}{\partial t} + \delta S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}) / C$$

$$\sigma_C = (\sigma S \frac{\partial C}{\partial S}) / C$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

Raisonnement d'arbitrage:

Constitution d'un portefeuille contenant des titres sous jacents et des options d'achat sur ce titre

$$Q(t) = x_S(t)S(t) + x_C(t)C(S,t)$$

Portefeuille supposé auto financé:

$$dx_s\, S + dx_C\, C = 0$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

Equation différentielle stochastique du portefeuille:

$$dQ(t) = x_S \, dS(t) + x_C dC(t)$$

ou $$dQ(t) = Q(t)(\alpha_Q dt + \sigma_Q dw(t))$$

avec $$\alpha_Q = (x_S S\delta + x_C C\alpha_C)/Q$$

$$\sigma_Q = (x_S S\sigma + x_C C\sigma_C)/Q$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

<u>Construction d'un portefeuille sans risque :</u>

$$x_S \text{ et } x_C : \qquad \sigma_Q = 0 \ \ \forall t$$

$$\downarrow$$

$$\text{par arbitrage} : \quad \alpha_Q = r$$

$$(i) x_S S\sigma + x_C C\sigma_C = 0$$

$$(ii) x_S S\delta + x_C C\alpha_C = r\,Q = r(x_S S + x_C C)$$

$$\text{ou } \ x_S S(\delta - r) + x_C C(\alpha_C - r) = 0$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

Condition sur le système:

$$\frac{\delta - r}{\sigma} = \frac{\alpha_C - r}{\sigma_C}$$

(égalité des primes de risque par unité de risque)

Equation de structure des prix :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} - rC = 0$$

Conditions aux bords: $C(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad C(S,T) = (S-K)^+$

4.2 Modèle de Black et Scholes

L’équation de structure dépend de la volatilité et du taux sans risque mais ne dépend pas du rendement moyen du sous jacent

<u>Résolution de l’équation de structure :</u>

3 étapes:

(i) transformation en l’équation de la chaleur

(ii) résolution de l’équation de la chaleur

(iii) retour aux variables initiales

ETAPE 1: *de l’équation de structure à l’équation de la chaleur:*

Changement de variable.

4.2 Modèle de Black et Scholes

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)} u(x,\tau)$$

$$\tau = \frac{2M}{\sigma^2}(T-t) \quad \text{avec} \quad M = r - \sigma^2/2$$

$$\tau = \text{temps résiduel normé}$$

$$x = \frac{2M}{\sigma^2}(\log(S/K) + M(T-t))$$

? Equation en les variables u,x et τ

4.2 Modèle de Black et Scholes

Equation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

Condition aux bords :

$$C(S,T) = (S-K)^+$$ devient:

$$u(x,0) = \varphi(x) = K\exp(x\frac{\sigma^2}{2M}) - K \quad (x \geq 0)$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

ETAPE 2: *résolution de l'équation de la chaleur*

Intégrale de Poisson:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds$$

Solution:

$$u(x,\tau) = K\Phi\left(\frac{x^*}{\sqrt{2\tau}}\right) e^{-\frac{x^{*2}-x^2}{4\tau}} - K\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\right)$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

Avec:

$$(i)\, x^* = x + \frac{\tau\sigma^2}{M}$$

$$(ii)\, \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-v^2/2}\, dv$$

ETAPE 3: *retour aux variables initiales*

$$u(x,\tau) \rightarrow C(S,t)$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

Formule de Black et Scholes (1973):

$$C(S,t) = S(t)\Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S(t)/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S(t)/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

Formule du put: parité put-call

$$P(S,t) + S(t) = C(S,t) + e^{-r(T-t)}K$$

$$P(S,t) = K\,e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S(t)\Phi(-d_1)$$

Le prix du call ou du put dépend de la volatilité et du taux sans risque mais ne dépend pas du rendement moyen du sous jacent.

4.2 Modèle de Black et Scholes

Sensibilité du prix de l'option à ses paramètres:

les « grecques »

$$\Delta = \text{delta} = \frac{\partial C}{\partial S}$$

$$\Gamma = \text{gamma} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

$$\vartheta = \text{vega} = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

$$\Theta = \text{teta} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

$$\rho = \text{rho} = \frac{\partial C}{\partial r}$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

Formules des grecques:

1° DELTA :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1)$$

$$0 < \Delta < 1$$

2° GAMMA:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}} > 0$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

3°) VEGA:

$$\vartheta = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} S \sqrt{T-t} > 0$$

4°) TETA:

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} \frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi(d_2) < 0$$

5°) RHO:

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r} = K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \quad > 0$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

<u>Deuxième approche</u> : mesure martingale

Application de la formule générale de pricing en marché complet sans opportunités d'arbitrage:

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)} E_Q \left((S(T) - K)^+ \mid \mathfrak{I}_t \right) \quad ??$$

Sous la mesure neutre risque (théorème de GIRSANOV) le sous jacent peut s'écrire:

4.2 Modèle de Black et Scholes

$$dS(t) = r\,S(t)\,dt + \sigma\,S(t)\,d\overline{w}(t)$$

$$\text{où } \overline{w} = \text{mouvement brownien sous Q}$$

En particulier on peut écrire en t :

$$S(T) = S(t).\exp((r - \sigma^2/2)(T - t)).\exp(\sigma(\overline{w}(T) - \overline{w}(t)))$$

Et donc:

$$S(T)/S(t) = \text{lognormale}((r - \sigma^2/2)(T - t), \sigma\sqrt{T - t}))$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

L'espérance devient:

$$\overline{C}(S,t) = e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (x-K)\, dF^*(x)$$

où :

$$F^*(x) = Q(S(T) \leq x \mid S(t) = S)$$

$$= \Phi\left(\frac{\ln(x/S) - (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

$$\overline{C}(S,t) = e^{-r(T-t)}\int_K^\infty x\,dF^*(x) - e^{-r(T-t)}K\int_K^\infty dF^*(x)$$

$$= e^{-r(T-t)}\int_K^\infty x\,dF^*(x) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

$$= S\,\Phi(d_1) - K\,e^{-r(T-t)}\,\Phi(d_2)$$

Formule de Black et Scholes

4.2 Modèle de Black et Scholes

<u>**Troisième approche**</u> **:limite du modèle binomial discret**

- convergence de la promenade aléatoire discrète vers le mouvement brownien ;
- forme du prix de l'option en binomial:

$$C(0) = S\,\Phi(a;n,p_1) - K\,\frac{1}{(1+r)^n}\,\Phi(a;n,p)$$

-forme du prix de l'option Blak et Scholes:

$$C(S,0) = S\,\Phi(d_1) - K\,e^{-rT}\,\Phi(d_2)$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

Convergence du modèle binomial vers le modèle BS:

Paramétrisation du binomial:

- intervalles de longueur Δ_n

-taux sans risque: $1 + r_n = e^{r\,\Delta_n}$

-actif risqué:

$$u_n = e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}}$$

$$d_n = u_n^{-1} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

Application Black et Scholes : assurance de portefeuille:

- Achat d'une valeur risquée S en t=0
- Investissement sur un horizon T
- Achat d'une protection en vue de garantir un minimum à l'échéance en T

OPTION SYNTHETIQUE :
position à la fois sur le sous jacent et sur une option sur ce sous jacent

4.2 Modèle de Black et Scholes

1° possibilité : achat direct d'un PUT sur le sous jacent (***stratégie statique***)

Par exemple protection minimale :

$$K = S_0 \ (1.0475)^T$$

Valeur initiale de la stratégie :

$$S_0 + P(S,0)$$

Une unité d'actif

Une unité de put

4.2 Modèle de Black et Scholes

Le coût initial de cette protection (« *prime d'assurance de portefeuille* ») est donc simplement le prix du put :

$$P(S,0) = S_0 (1.0475)^T e^{-rT} \Phi(-d_2) - S\,\Phi(-d_1)$$

Avec : $$d_{1,2} = \frac{\ln(S_0 /(S_0.(1,0475)^T) + (r \pm \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= \frac{-T\ \ln(1.0475) + (r \pm \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= (r - \ln(1.0475) \pm \sigma^2 / 2)\sqrt{T} / \sigma$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

2° possibilité : position sur le sous jacent et l'actif sans risque (***stratégie dynamique***)

Plutôt que d'acheter un put , l'institution financière va dupliquer les effets de l'option en prenant des positions dynamiques sur le sous jacent et sur l'actif sans risque.

Valeur du Put à l'instant t :

$$P(S,t) = S_0(1.0475)^T e^{-r(T-t)}\,\Phi(-d_2(t)) - S(t)\,\Phi(-d_1(t))$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

Avec:

$$d_{1,2}(t) = \frac{\ln(S(t)/(S.(1{,}0475)^{T}) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T}}$$

A l'instant t la valeur de l'option synthétique est donc donnée par :

$$\pi(t) = S(t) + P(S,t) = \underbrace{S(t)(1-\Phi(-d_1(t))}_{\text{Sous jacent}}) + e^{-r(T-t)}\underbrace{S(1.0475)^{T}\,\Phi(-d_2(t))}_{\text{Titre sans risque}})$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

Le portefeuille global peut donc s'écrire :

$$\pi(t) = n_1(t)\ S(t) + n_2(t)\ e^{-r(T-t)}$$

Avec :

$$n_1(t) = \text{nombre d'actions en } t$$
$$= 1 - \Phi(-d_1(t)) = \Phi(d_1(t))$$

$$n_2(t) = \text{nombre de titres sans risque en } t$$
$$= S_0 (1.0475)^T\ \Phi(-d_2(t))$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

Ce portefeuille doit être ajusté en permanence pour tenir compte de 2 effets :

- évolution des performances de l'actif sous-jacent

- écoulement du temps

Coûts de transaction importants…!!!.

Exemple Black et Scholes

On considère un marché constitué d’un titre sans risque de rendement instantané égal à 4% et d’un titre risqué de rendement instantané moyen égal à 8% et de coefficient de volatilité égal à 17%.
La valeur initiale du titre est de 40 € .

Calculer le prix d’une option d’achat sur le titre risqué de strike égal à 43 € de maturité 9 mois.

Exemple Black et Scholes

Formule à utiliser :

$$C(S,0) = S(0)\Phi(d_1) - K e^{-rT}\Phi(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S(0)/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S(0)/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Exemple Black et Scholes

$$d_1 = \frac{\ln(40/43) + (0{,}04 + 0{,}17^2/2) \times 0{,}75}{0{,}17\sqrt{0{,}75}} = -0{,}21384$$

$$d_2 = \frac{\ln(40/43) + (0{,}04 - 0{,}17^2/2) \times 0{,}75}{0{,}17\sqrt{0{,}75}} = -0{,}36107$$

$$\Phi(d_1) = \text{NORMSDIST}(-0{,}21384) = 0{,}41533$$

$$\Phi(d_2) = \text{NORMSDIST}(-0{,}36107) = 0{,}35902$$

$$C(0) = 40€ \times 0{,}41533 - 43€ \times e^{-0{,}04 \times 0{,}75} \times 0{,}35902 = 1{,}63\ €$$

4.3 Modèles de courbe de taux

4.3 Modèles de courbe de taux

4.3.1 Modèle général d'arbitrage:

Modélisation en aléatoire des prix des zéro-coupons

$\{P(t,s,\omega): t \le s; \omega \in \Omega\}$ =prix en t d'un zéro coupon de maturité s (s fixé)

$$P(t,s,\omega) = e^{-(s-t)R(t,s,\omega)} = \exp(-\int_t^s f(t,u,\omega)\,du)$$ (f=taux forward)

$$r(t,\omega) = \lim_{\theta \to 0} R(t, t+\theta, \omega)$$

=taux SPOT

=taux à très court terme =variable explicative

4.3 Modèles de courbe de taux

<u>Modèles à une variable d'état:</u>

Hypothèses:

1° le processus stochastique du taux spot est solution d'une équation différentielle stochastique:

$$dr(t) = f(t, r(t))dt + \rho(t, r(t))\,dw(t)$$

$$\text{où} : w = \text{mouvement brownien standard}$$

2° la gamme des zéro-coupons est engendrée par le processus spot:

$$P(t, s, \omega) = P(t, s, r(t, \omega)) = P(t, s, r)$$

4.3 Modèles de courbe de taux

Le processus P est solution d'une équation différentielle stochastique:

$$dP(t,s,r) = P(t,s,r)\mu(t,s,r)\,dt - P(t,s,r)\sigma(t,s,r)\,dw(t)$$

avec :

$$\mu(t,s,r) = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial}{\partial t} + f(t,r)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2(t,r)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)P$$

$$\sigma(t,s,r) = -\frac{1}{P}\rho(t,r)\frac{\partial P}{\partial r}$$

4.3 Modèles de courbe de taux

Raisonnement d'arbitrage:

- achat de x obligations d'échéance s
- émission de x* obligations d'échéance s*

$$W(t) = -x^* P(t,s^*) + xP(t,s)$$

Recherche d'un portefeuille auto financé et sans risque:

$$\begin{aligned} dW(t) &= -x^* dP(t,s^*,r) + xdP(t,s,r) \\ &= (xP(t,s,r)\mu(t,s,r) - x^* P(t,s^*,r)\mu(t,s^*,r))dt \\ &\quad - (xP(t,s,r)\sigma(t,s,r) - x^* P(t,s^*,r)\sigma(t,s^*,r))\, dw(t) \end{aligned}$$

4.3 Modèles de courbe de taux

Sans risque:

$$xP(t,s,r)\sigma(t,s,r) - x^*P(t,s^*,r)\sigma(t,s^*,r) = 0$$

$$\downarrow$$

Rendement =taux spot

$$xP(t,s,r)\mu(t,s,r) - x^*P(t,s^*,r)\mu(t,s^*,r) = r\,W(t)$$

Système homogène:

$$xP(t,s,r)\sigma(t,s,r) - x^*P(t,s^*,r)\sigma(t,s^*,r) = 0$$

$$xP(t,s,r)(\mu(t,s,r) - r) - x^*P(t,s^*,r)(\mu(t,s^*,r) - r) = 0$$

4.3 Modèles de courbe de taux

Déterminant nul:

$$\frac{\mu(t,s,r)-r}{\sigma(t,s,r)} = \frac{\mu(t,s^*,r)-r}{\sigma(t,s^*,r)} = \lambda(t,r)$$

$$\lambda(t,r) = \text{prix du risque marché}$$

En remplaçant μ et σ : EQUATION DE STRUCTURE:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} + (f+\rho\lambda)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0}$$

Condition: P(s,s,r)=1

4.3 Modèles de courbe de taux

Choix d'un modèle de taux = choix des 3 fonctions de 2 variables

$$f(t,r) = \text{trend du taux sans risque}$$

$$\rho(t,r) = \text{volatilité du taux sans risque}$$

$$\lambda(t,r) = \text{prix du risque de marché}$$

Normalement:

$$\lambda > 0 : \text{préférence pour la liquidité}$$

4.3 Modèles de courbe de taux

Solution de l'équation de structure:

$$P(t,s,r) = E(\exp(-\int_t^s r(u)du - \frac{1}{2}\int_t^s \lambda^2(u,r)du + \int_t^s \lambda(u,r)\,dw(u)) \mid \Im_t)$$

Cas particulier :

1° pas de préférence pour la liquidité : λ=0

$$P(t,s,r) = E(\exp-(\int_t^s r(u)\,du) \mid \Im_t)$$

4.3 Modèles de courbe de taux

2° si en sus modèle déterministe: $\sigma=0$

$$P(t,s,r) = \exp - \int_t^s r(u)du$$

$$\downarrow$$

Formule classique d'actualisation à taux variable

Modèle de VASICEK

4.3.2 Modèle de VASICEK (1977):

(i) Le prix du risque marché est une constante strictement positive: $\lambda(t,r)=\lambda>0$

(ii) Le taux court obéit à un processus d'Ornstein-Uhlenbeck:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dw(t)$$

Solution:

$$r(t) = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as}\,dw(s)$$

Modèle de VASICEK

Propriétés:

$$(i)\ E\,r(t) = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at})$$

$$\lim E r(t) = b \quad \text{(mean reversion)}$$

$$(ii)\ \mathrm{Var}\, r(t) = \mathrm{var}(\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dw(s))$$

$$= \sigma^2 e^{-2at} \int_0^t e^{2as} ds = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

$$\lim \mathrm{var}(t) = \frac{\sigma^2}{2a}$$

$\longrightarrow$ *La variance croit avec le temps mais reste bornée .*

Modèle de VASICEK

(iii) Le taux court terme admet une distribution normale :

$$r(t) \prec N(Er(t), \operatorname{var} r(t))$$

En particulier , il y a une probabilité non nulle d'avoir des taux négatifs !!!

$$P(r(t) < 0) = P\left(\frac{r(t) - E\,r(t)}{\sqrt{\operatorname{var} r(t)}} < \frac{-Er(t)}{\sqrt{\operatorname{var}\ r(t)}}\right)$$

$$= \Phi\left(-\frac{E\,r(t)}{\sqrt{\operatorname{var}\ r(t)}}\right)$$

$$= \Phi\left(-\frac{(r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}))}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})}}\right)$$

Modèle de VASICEK

Structure des zéro coupons dans VASICEK:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (a(b-r) + \sigma\lambda)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - r\,P = 0$$

où a,b,σ,λ sont des constantes positives

Solution:

$$\boxed{P(t,s,r) = \exp(\frac{1}{a}(1-e^{-a(s-t)})(K-r) - (s-t)K - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-a(s-t)})^2)}$$

avec: $$K = b + \frac{\sigma\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

Modèle de VASICEK

<u>Rendement instantané moyen du zéro coupon:</u>

$$\mu(t,s,r) = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)P = \frac{1}{P}\left(rP - \lambda\sigma\frac{\partial P}{\partial r}\right)$$

$$\text{Or : } \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{1}{a}(1 - e^{-a(s-t)})P$$

$$\text{Donc : } \mu(t,s,r) = r(t) + \frac{\lambda\sigma}{a}(1 - e^{-a(s-t)})$$

(prime de risque indépendante du taux spot)

Modèle de VASICEK

Volatilité du zéro coupon:

$$\sigma(t,s,r) = -\frac{1}{P}\sigma\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(s-t)}) = \sigma(t,s)$$

Critiques du modèle:

(i) Le taux spot peut devenir négatif dans certains scénarios.
(ii) calibrage par rapport aux conditions initiales observées (P(0,s))

Modèle CIR

4.3.3 Modèle de COX- INGERSOLL -ROSS (1985):

(i) Le taux spot est solution de l'équation:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \rho\sqrt{r(t)}\,dw(t)$$

(ii) Le prix du risque de marché est donné par:

$$\lambda(t,r) = \frac{\pi}{\rho}\sqrt{r}$$

Modèle CIR

L'équation de structure devient :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (a(b - r) + \pi r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0$$

où a, b, π, ρ sont des constantes positives.

La solution de cette équation peut se mettre sous la forme :

Modèle CIR

$$P(t,s) = A(t,s)\,e^{-r\,B(t,s)}$$

Où A et B sont indépendantes de r.

Le rendement instantané moyen du zéro coupon devient:

$$\mu(t,s,r) = r(t) + \pi\, r(t)\, B(t,s)$$

(prime de risque = fonction linéaire du taux spot)

Vision risque neutre

4.3.4 Retour à la mesure risque neutre :

Relation risque – return:

$$\frac{\mu(t,s,r) - r(t)}{\sigma(t,s,r)} = \lambda(t,r)$$

ou

$$\mu(t,s,r) = r(t) + \lambda(t,r)\sigma(t,s,r)$$

En substituant dans l'équation du zéro coupon:

Vision risque neutre

$$dP(t,s,r) = r(t)P(t,s,r)\,dt - \sigma(t,s,r)(dw(t) - \lambda(t,r)dt)$$

ou

$$dP(t,s,r) = r(t)P(t,s,r)dt - \sigma(t,s,r)dw^*(t)$$

avec

$$w^*(t) = w(t) - \int_0^t \lambda(u,r)du$$

Introduction de la mesure neutre risque par Girsanov

Vision risque neutre

Mesure Q dont la densité par rapport à la mesure historique est définie par :

$$Q(B) = \int_B \rho(\omega)\, dP(\omega)$$

avec :

$$\rho = \exp\left(\int_0^T \lambda(u,r)\,dw(u) - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(u)\,du\right)$$

Vision risque neutre

Changement de numéraire :

compte d'épargne (saving account):

$$B(t,\omega) = \exp \int_0^t r(u,\omega)du$$

Processus actualisé : *assimilable à un changement de monnaie*

$$P^*(t,s) = P(t,s)/B(t)$$

Sous la mesure Q le processus P* est une martingale .

Vision risque neutre

$$E_Q(P^*(u,s) \mid \Im_t) = P^*(t,s) \qquad (t \leq u \leq s)$$

En particulier pour u=s:

$$P^*(t,s) = E_Q(P^*(s,s) \mid \Im_t)$$

ou

$$\boxed{P(t,s) = E_Q(\exp - \int_t^s r(u)\,du \mid \Im_t)}$$

Vision risque neutre

<u>Modèle de VACISEK en risque neutre :</u>

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dw(t)$$

$$r(t) = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as}\,dw(s)$$

$$\lambda(t,r) = \lambda > 0$$

Changement de mesure :

$$dw^*(t) = dw(t) - \lambda\,dt$$

Vision risque neutre

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dw(t)$$

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma(dw^*(t) + \lambda dt)$$

$$dr(t) = a(b + \frac{\sigma\lambda}{a} - r(t))dt + \sigma dw^*(t)$$

Dans l'univers risque neutre le processus du taux spot reste un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de taux limite:

$$\theta = b + \frac{\sigma\lambda}{a}$$

Vision risque neutre

La solution peut s'écrire donc:

$$r(t) = r_0 e^{-at} + \theta(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dw^*(s)$$

Le prix des zéro coupons est alors directement donné par:

$$P(t,s) = E_Q(\exp - \int_t^s r(u)\, du \mid \mathfrak{I}_t)$$

Modèle de HULL et WHITE

4.3.5. <u>Modèle de HULL et WHITE</u>

-Critique du modèle de VASICEK :

- calibrage par rapport aux conditions initiales

<u>Valeur prédite par le modèle :</u>

$$P(0,s) = \exp\left(\frac{1}{a}(1-e^{-as})(K-r) - s\,K - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-as})^2\right)$$

Quid vis à vis des valeurs observées ???

Modèle de HULL et WHITE

Ecriture en risque neutre :

VASICEK:

$$dr(t) = a(\theta - r(t))\,dt + \sigma\,dw^*(t)$$

HW:

$$dr(t) = a(\underbrace{\theta(t)}_{\text{Cible mouvante}} - r(t))\,dt + \sigma\,dw^*(t)$$

Modèle de HULL et WHITE

Solution VASICEK :

$$r(t) = r_0 e^{-at} + \theta(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dw^*(s)$$

Solution HULL / WHITE :

$$r(t) = r_0 e^{-at} + e^{-at} \int_0^t \theta(s)\, e^{as}\, ds + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dw^*(s)$$

Somme de normales

Distribution normale

Modèle de HULL et WHITE

Avantage : permet d'incorporer comme contrainte initiale toute la courbe de départ des zéro coupons

$$P(0,s) = \exp - \int_0^t f(0,u)\,du$$

$$f(0,t) = \text{taux forward initiaux}$$

(taux à terme observés en t=0)

Donnés par : $$f(0,t) = -\frac{\partial \ln P(0,t)}{\partial t}$$

Modèle de HULL et WHITE

Paramétrisation et solution du modèle :

Pour respecter la structure initiale des taux il faut prendre comme cible du modèle HW:

$$\theta(t) = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t} f(0,t) + f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-2at})$$

On peut aussi obtenir une formule explicite de l'évolution des prix des zéro coupons.

Modèle de HULL et WHITE

$$\boxed{P(t,s) = \exp(A(t,s) - B(t,s)\,r(t))}$$

avec :

$$B(t,s) = \frac{1 - e^{-a(s-t)}}{a}$$

$$A(t,s) = \log\frac{P(0,s)}{P(0,t)} + B(t,s)f(0,t) - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-a(s-t)})^2(1 - e^{-2at})$$

Modèle de HULL et WHITE

<u>Volatilité du zéro coupon:</u>

$$\sigma(t,s,r) = -\frac{1}{P}\sigma\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(s-t)}) = \sigma(t,s)$$

(*même valeur que dans le modèle de VASICEK*).

Le taux court terme suit aussi dans cette modélisation une distribution normale.

Modèle de HULL et WHITE

Exemple: *structure plate initiale des taux :*

$$P(0,s) = e^{-\delta s}$$

$$f(0,s) = \delta$$

Vasicek : ???

$$P(0,s) = \exp\left(\frac{1}{a}(1-e^{-as})(K-r) - sK - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-as})^2\right)$$

Non

Modèle de HULL et WHITE

Hull / White :

$$\theta(t) = \delta + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-2at})$$

$$\begin{cases} A(t,s) = (t - s + B(t,s))\delta - \dfrac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-a(s-t)})^2(1 - e^{-2at}) \\ B(t,s) = \dfrac{1 - e^{-a(s-t)}}{a} \end{cases}$$

Exemple - VASICEK

On considère un modèle de VASICEK dont les paramètres sont les suivants :

$$
\begin{aligned}
&r(0) = \text{taux initial} = 2\% \\
&b = \text{taux limite} = 3{,}50\% \\
&\sigma = \text{volatilité} = 0{,}75\% \\
&a = \text{force rappel} = 0{,}15 \\
&\lambda = \text{prime risque} = 0{,}25
\end{aligned}
$$

Exemple - VASICEK

a) Déterminer les taux spot initiaux des zéro coupons à 5 et 20 ans

b) Déterminer les taux spot à 5 et 20 ans dans 8 ans sous les deux scénarios suivants d'évolution du taux court terme dans 8 ans: 2,5% et 4%

c) Déterminer la probabilité que le modèle génère un taux court terme négatif dans 8 ans.

Exemple VASICEK

a) <u>Taux spot initiaux</u> :

$$P(0,s,r) = \exp(\frac{1}{a}(1-e^{-as})(K-r(0)) - sK - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-as})^2)$$

$$\text{taux : } R(0,s) = -\ln P(0,s)/s$$

$$K = 0{,}04625$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R(0,5) = 2{,}80\% \\ R(0,20) = 3{,}81\% \end{array}}$$

Exemple VASICEK

b) Taux spot dans 8 ans :

$$P(8,s+8,r)=\exp\left(\frac{1}{a}(1-e^{-as})(K-r(8))-sK-\frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-as})^2\right)$$

$$\text{taux : } R(8,s+8)=-\ln P(8,s+8)$$

si $r(8)=2{,}50\%$:

$$R(8{,}13)=3{,}15\%$$

$$R(8{,}28)=3{,}97\%$$

si $r(8)=4\%$

$$R(8{,}13)=4{,}21\%$$

$$R(8{,}28)=4{,}45\%$$

Exemple VASICEK

c) Distribution du taux court terme dans 8 ans :

$$E\ r(8) = r(0)\ e^{-8a} + b(1 - e^{-8a}) = 0{,}0305$$

$$\mathrm{Var}\ r(8) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-16a}) = 0{,}00017$$

$$\boxed{P(r(8) < 0) = \Phi(-2{,}3345) = 0{,}00978}$$

4.4 Options sur zéro coupon

Soit P(0,T) un zéro coupon de maturité T (P(T,T)=1))
On s'intéresse à une option européenne sur ce zéro coupon d' échéance f (f < T); le modèle de BLACK et SCHOLES ne peut plus fonctionner car le sous jacent est d'une autre nature.

A l'instant f le pay off du call sera donné par :

$$C(f) = (P(f,T) - K)^{+}$$

$$\boxed{C(t) = \text{prix du call en } t \text{ ? } \ (0 \leq t \leq f < T)}$$

4.4 Options sur zéro coupon

<u>Application de la méthodologie risque neutre:</u>

Prix= espérance sous la mesure risque neutre du pay off actualisé

$$\boxed{C(t) = E_Q\left(C(f)\exp - \int_t^f r(u)du \mid \Im_t\right)}$$

$$C(t) = E_Q\left((P(f,T) - K)^+ \exp - \int_t^f r(u)du \mid \Im_t\right)$$

Formule exacte mais difficilement manipulable :
corrélation entre le zéro coupon P et les taux r !!

4.4 Options sur zéro coupon

Cas particuliers d'application de la formule générale de tarification :

Cas 1 : structure déterministe de taux ; pay off déterministe :

$$C(t) = C(f)\ \exp - \int_t^f r(s)\,ds$$

Formule classique de la valeur actuelle de la finance déterminsite

4.4 Options sur zéro coupon

Cas 2 : structure déterministe de taux ; pay off stochastique :

$$C(t) = \exp - \int_t^f r(s)\,ds.\ E_Q\left(C(f) \middle| \Im_t\right)$$

Formule à la Black et Scholes (pricing d'options sur actions sous des taux d'intérêt déterministes)

Cas 3 : structure stochastique de taux ; pay off déterministe :

$$C(t) = C(f)\,E_Q\left(\exp - \int_t^f r(u)du \mid \Im_t\right) = C(f)\,P(t,f)$$

4.4 Options sur zéro coupon

Cas 4 : structure stochastique de taux ; pay off stochastique indépendant des taux :

$$C(t) = E_Q(C(f)\ \exp - \int_t^f r(u)du\ \ l\ \Im_t)$$

$$= E_Q(\exp - \int_t^f r(u)\,du \,|\, \Im_t).\,E_Q(C(f)\,|\,\Im_t))$$

$$= P(t,f)\,E_Q(C(f)\,|\,\Im_t)$$

4.4 Options sur zéro coupon

Cas 5 : structure stochastique de taux ; pay off stochastique et corrélé avec les taux :

$$C(t) = E_Q(C(f)\exp - \int_t^f r(u)du \;\mathrm{l}\; \Im_t)$$

$$= E_Q(\exp - \int_t^f r(u)\,du \big| \Im_t).\,E_Q(C(f) \big| \Im_t))$$

$$+ \mathrm{cov}_Q(\exp - \int_t^f r(u)du, C(f))$$

Exemple corrélé : option sur ZC: $$C(f) = (P(f,T) - K)^+$$

4.4 Options sur zéro coupon

Nouveau changement de mesure et nouveau numéraire :

Sous la mesure risque neutre :

$$C(t) = E_Q((pay\,off).actual)$$

Processus d'actualisation: taux spot

Sous la mesure forward neutre :

$$C(t) = actual.E_{Q_f}((pay\,off))$$

Processus d'actualisation naturel : P(t,f) !!

4.4 Options sur zéro coupon

<u>Mesure risque neutre</u> :

$$P^*(t,T) = P(t,T)\exp - \int_0^t r(u)du$$

$$P^*(t,T) = \frac{P(t,T)}{B(t)}$$

Sous la mesure risque neutre ce processus est une martingale

$$P^*(t,T) = E_Q(P^*(u,T) \mid \mathfrak{I}_t)$$

4.4 Options sur zéro coupon

Approche forward neutre : autre changement de numéraire:

$$\overline{P}(t,T;f) = \frac{P(t,T)}{P(t,f)} \quad (t \leq f < T)$$

=prix en t d'un zéro coupon d'échéance T, exprimé en nombre de parts d'un zéro coupon d'échéance intermédiaire f entre t et T .

(mesure forward propre à l'instant f)

4.4 Options sur zéro coupon

Changement de mesure : on cherche une nouvelle mesure telle que sous cette mesure le processus forward est une martingale

$$\overline{P}(t,T;f) = E_{Q_f}(\overline{P}(u,T;f) \mid \Im_t) \quad (0 \leq t \leq u \leq f < T)$$

Equations différentielles stochastiques:

Réel: $$dP/P = \mu(t,T)\,dt - \sigma(t,T)\,dw(t)$$

Risque neutre: $$dP/P = r(t)\,dt - \sigma(t,T)\,dw^*(t)$$

4.4 Options sur zéro coupon

$$P(t,T) = P(0,T).\exp(\int_0^t r(u)du - \int_0^t \sigma(u,T)dw^*(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,T)du)$$

ou

$$\boxed{P^*(t,T) = P^*(0,T)\exp(-\int_0^t \sigma(u,T)dw^*(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,T)du)}$$

On cherche une relation similaire :

$$\boxed{\overline{P}(t,T;f) = \overline{P}(0,T;f).\exp(-\int_0^t \sigma(u,T)\,d\overline{w_f}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,T)du)\,?}$$

4.4 Options sur zéro coupon

On écrit le processus forward dans le monde risque neutre:

$$\bar{P}(t,T;f) = \frac{P(t,T)}{P(t,f)}$$

$$= \frac{P(0,T)}{P(0,f)} \frac{\exp(\int_0^t r(u)du - \int_0^t \sigma(u,T)dw^*(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,T)du)}{\exp(\int_0^t r(u)du - \int_0^t \sigma(u,f)dw^*(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,f)du)}$$

4.4 Options sur zéro coupon

$$\overline{P}(t,T;f)=\overline{P}(0,T;f).X$$

$$X=\exp(-\int_0^t(\sigma(u,T-\sigma(u,f))dw*(u)-\frac{1}{2}\int_0^t(\sigma^2(u,T)-\sigma^2(u,f))du)$$

$$=\exp(-\int_0^t(\sigma(u,T)-\sigma(u,f))dw*(u)-\frac{1}{2}\int_0^t(\sigma(u,T)-\sigma(u,f))^2du-Y)$$

$$Y=\int_0^t\sigma(u,f)(\sigma(u,T)-\sigma(u,f))du$$

4.4 Options sur zéro coupon

Ceci conduit à définir le nouveau processus :

$$d\overline{w}_f(u) = dw^*(u) + \sigma(u,f)du$$

ou

$$\begin{aligned} d\overline{w}_f(u) &= dw(u) - \lambda(u)du + \sigma(u,f)du \\ &= dw(u) - (\lambda(u) - \sigma(u,f))du \qquad (u \leq f) \end{aligned}$$

Mesure forward neutre:

mesure telle que le processus $\overline{w}_f$ est un mouvement brownien standard

4.4 Options sur zéro coupon

Cette mesure est définie par sa densité de Radon-Nikodym:

$$Q_f(B) = \int_B \rho_f(\omega)\, dP(\omega)$$

avec :

$$\rho_f = \exp\left(\int_0^T (\lambda(u) - \sigma(u,f))dw(u) - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda\ (u) - \sigma(u,f))^2\, du\right)$$

4.4 Options sur zéro coupon

Sous cette mesure on a alors :

$$\boxed{\begin{aligned}&\overline{P}(t,T;f)=\overline{P}(0,T;f)\\&\exp\Big(-\int_0^t(\sigma(u,T)-\sigma(u,f))d\overline{w}_f(u)-\frac{1}{2}\int_0^t(\sigma(u,T)-\sigma(u,f))^2du\Big)\end{aligned}}$$

$$\downarrow$$

$$\overline{P}(t,T;f)=\text{martingale sous } Q_f$$

4.4 Options sur zéro coupon

Donc:

$$\overline{P}(t,T;f) = E_{Q_f}(\overline{P}(u,T;f) \mid \Im_t) \quad (0 \le t \le u \le f < T)$$

En particulier pour u=f :

$$\overline{P}(t,T;f) = E_{Q_f}(\overline{P}(f,T;f) \mid \Im_t)$$

ou

$$\frac{P(t,T)}{P(t,f)} = E_{Q_f}\left(\frac{P(f,T)}{P(f,f)}\right) = E_{Qf}(P(f,T))$$

$$\boxed{P(t,T) = P(t,f)E_{Q_f}(P(f,T))}$$

4.4 Options sur zéro coupon

D'une manière générale si S est un actif sur ce marché le prix peut alternativement s'écrire:

-en risque neutre :

$$\boxed{S(t) = E_Q((\exp - \int_t^f r(u)\,du).S(f))}$$

-en forward neutre:

$$\boxed{S(t) = P(t,f)\,E_{Q_f}(S(f))}$$

4.4 Options sur zéro coupon

Application à la tarification des options sur zéro coupons:

$$C(t) = E_Q((\exp - \int_t^f r(u)du)(P(t,f) - K)^+ \mid \Im_t)$$

ou

$$C(t) = P(t,f) E_{Q_f}((P(f,T) - K)^+ \mid \Im_t)$$

Cas particulier :

$$\sigma(t,s,r) = \sigma(t,s) \ (\text{volatilité déterministe})$$

4.4 Options sur zéro coupon

Formule explicite du prix du call sur zéro coupon:

$$\boxed{C(t) = P(t,T).\Phi(h_+) - K\,P(t,f)\,\Phi(h_-)}$$

où :

$$h_{\pm} = \frac{\ln(P(t,T)/(P(t,f)K)) \pm \frac{1}{2}v^2(t,f)}{v(t,f)}$$

$$(v(t,f))^2 = \mathrm{var}(\ln P(t,f)) = \int_t^f (\sigma(u,T) - \sigma(u,f))^2\,du$$

4.4 Options sur zéro coupon

Méthodologie: on se ramène à Black et Scholes !!

$$C(t) = P(t,f)E_{Q_f}((P(f,T)-K)^+ \mid \Im_t)$$

$$= E_{Q_f}((\overline{P}(f,T;f)-K)^+ \mid \Im_t).P(t,f)$$

$$= E_{Q_f}((\frac{\overline{P}(f,T;f)}{\overline{P}(t,T;f)} - \frac{K}{\overline{P}(t,T;f)})^+ \overline{P}(t,T;f)) \mid \Im_t).P(t,f)$$

$$= P(t,f)\overline{P}(t,T;f)E_{Q_f}((\Psi(t,f)-K^*)^+ \mid \Im_t)$$

$$= P(t,T)E_{Q_f}((\Psi(t,f)-K^*)^+ \mid \Im_t)$$

4.4 Options sur zéro coupon

$$\Psi(t,f) = \exp(-\int_t^f (\sigma(u,T)-\sigma(u,f))d\overline{w}_f(u) - \frac{1}{2}\int_t^f (\sigma(u,T)-\sigma(u,f))^2 du)$$

Distribution log normale sous
la mesure forward neutre

$$C(t) = P(t,T)\int_{K_1}^{+\infty}(x-K_1)\,dF^*(x)$$

$$F^* = \text{lognormale}(a,b)$$

4.4 Options sur zéro coupon

Avec:

$$a = -\frac{1}{2}\int_t^f (\sigma(u,T) - \sigma(u,f))^2 du$$

$$b = \operatorname{var}\left(\int_t^f (\sigma(u,T) - \sigma(u,f)) d\overline{w}_f(u)\right) = \int_t^f (\sigma(u,T) - \sigma(u,f))^2 du$$

$$= (v(t,f))^2$$

Même forme de prix que Black et Scholes dans sa forme neutre risque

4.4 Options sur zéro coupon

<u>Application</u>: Modèle de HULL- WHITE:

$$\sigma(u,T) = \frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(T-u)})$$

$$(v(t,f))^2 = \int_t^f \left(\frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(T-u)}) - \frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(f-u)})\right)^2 du$$

$$= \frac{\sigma^2}{a^2}\int_t^f (e^{-a(f-u)} - e^{-a(T-u)})^2 du$$

$$= \frac{\sigma^2}{a^2}\left(\frac{(1 - e^{-2a(f-t)})}{2a}(1 - e^{-a(T-f)})^2\right)$$

4.5. Options sous taux d'intérêt stochastiques

Ecriture alternative de la formule de Black / Scholes sous taux d'intérêt constant :

$$C(S,t) = S(t)\,\Phi(d_1) - K\,e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S(t)/K) + (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S(t)/K) + (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Option sous taux stochastiques

Posons : $P(t,T) = e^{-r(T-t)}$ (ZC déterministe!)

On a : $\boxed{C(S,t) = S(t)\Phi(d_1) - K.P(t,T).\Phi(d_2)}$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K.P(t,T)}\right) + \sigma^2/2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K.P(t,T)}\right) - \sigma^2/2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Option sous taux stochastiques

Modèle d'action sous taux stochastique :

1° On suppose que l'action suit un mouvement brownien géométrique donné en risque neutre par :

$$\boxed{dS(t) = r\,S(t)\,dt + \eta S(t)\,d\overline{w}(t)}$$

2° On suppose que les taux d'intérêt suivent un modèle de Hull et White :

$$\boxed{dr(t) = a(\theta(t) - r(t))\,dt + \sigma\,dw^*(t)}$$

Option sous taux stochastiques

Les deux processus w sont des mouvements browniens standards corrélés sous la mesure risque neutre (mouvement brownien bi-dimensionnel):

$$d\overline{w}(t).dw^*(t) = \rho\, dt$$

On peut montrer que la relation de Black/Scholes peut se généraliser en introduisant une volatilité globale donnée par:

$$\boxed{\upsilon^2(t,T) = \underbrace{\eta^2(T-t)}_{\text{Volatilité action}} + \underbrace{\int_t^T \sigma^2(u,T)\,du}_{\text{Volatilité Taux}} + \underbrace{2\rho\int_t^T \eta\sigma(u,T)du}_{\text{Corrélation Action- Taux}}}$$

Option sous taux stochastiques

Or dans le modèle de Hull /White , on a :

$$\sigma(t,s) = \frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(s-t)})$$

Il vient alors explicitement en intégrant :

$$\boxed{\begin{aligned}\upsilon^2(t,T) = \eta^2(T-t) + \frac{\sigma^2}{a^2}\left(T - t + \frac{2}{a}e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\right) \\ + 2\frac{\rho\sigma\eta}{a}\left(T - t - \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})\right)\end{aligned}}$$

Option sous taux stochastiques

Le prix du call sur l'action sous taux stochastique devient alors :

$$\boxed{C(S,t) = S(t)\,\Phi(d_1) - K.\,P(t,T).\Phi(d_2)}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\dfrac{S(t)}{K.P(t,T)}\right) + \upsilon^2(t,T)/2}{\upsilon(t,T)}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\dfrac{S(t)}{K.P(t,T)}\right) - \upsilon^2(t,T)/2}{\upsilon(t,T)}$$

Option sous taux stochastiques

CONCLUSION :

Cette relation a la même structure que la formule de Black/Scholes ou que la formule d'option sur zéro coupon obtenue à la section 4.4:

Prix du call = (sous jacent) x Proba 1 - (valeur actuelle du strike) x Proba 2

Avec :

$$\Pr oba_{1,2} = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{\text{sous} - \text{jacent}}{\text{valeur actuelle strike}}\right) \pm 1/2 \text{ volatilité}^2}{\text{volatilité}}\right)$$

FIN

devolder@actu.ucl.ac.be

http://www.actu.ucl.ac.be/staff/devolder/pdevolder.html