

# *Initiation au calcul des structures dans le domaine plastique*

## *Élasto – plasticité en petite transformation*

Cours de l'option SIM  
département MMGC

L'objectif de ce document est de présenter le modèle de comportement **élasto-plastique classique** dans le cadre des petites transformations.

Le premier chapitre est une introduction plus que rapide des phénomènes physiques. Nous présentons les mécanismes de déformations, les techniques d'essais et quelques modèles rhéologiques.

La deuxième partie traite de l'évolution élasto-plastique des structures treillis constituées de barres. Nous introduisons des notions importantes : critère de plasticité, condition de charge, méthodes itératives de résolution, projection sur le critère, à partir d'un exemple simple traité par différentes méthodes.

La troisième partie traite de l'évolution élasto-plastique des poutres. Après avoir présenté un modèle élasto-plastique pour des essais de flexion, nous introduisons la notion de rotule plastique. Ce modèle simplifié est utilisé pour le calcul des charges limites des portiques.

Dans la dernière partie nous formalisons les notions abordées au cours du deuxième chapitre pour les appliquer aux problèmes 3D. Ces notions seront reprises et approfondies en troisième année.

*H. Oudin*

### ***Bibliographie :***

- [ref 1] : B. HALPHEN – J. SALENÇON , *élasto-plasticité*, Presses des Ponts et Chaussées, 1987. Ref ECN 539.38 HAL
- [ref 2] : D. FRANÇOIS – A. PINEAU – A. ZAOUÏ : *Comportement mécanique des matériaux*, Hermes, 1991. Ref ECN 539.37
- [ref 3] : J. LEMAITRE – J.L. CHABOCHE : *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1985. Ref ECN 62-03 LEM
- [ref 4] : D.R.J. OWEN – E. HINTON : *Finite elements in plasticity*, Pineridge Press, 1980. Ref ECN 539.38 OWE

**Plan du document :**

<b>1</b>	<b>GÉNÉRALITÉS.....</b>	<b>3</b>
1.1	MÉCANISMES PHYSIQUES DE DÉFORMATION .....	3
	• <i>Phénomènes observés</i> .....	3
	• <i>Techniques d'essais</i> .....	4
1.2	MODÈLES ANALOGIQUES.....	5
	• <i>Modèles linéaires</i> .....	5
	• <i>Modèles non linéaires</i> .....	6
<b>2</b>	<b>PLASTICITÉ DES BARRES.....</b>	<b>1</b>
2.1	ESSAI DE TRACTION.....	1
2.2	MODÉLISATION DU COMPORTEMENT EN TRACTION – COMPRESSION .....	3
	• <i>Modèles avec écrouissage</i> .....	3
	• <i>Modèles parfaits</i> .....	4
	• <i>Critère de plasticité</i> .....	4
	• <i>Lois d'écoulement plastique</i> .....	5
2.3	RÉSOLUTION EXPLICITE D'UN PROBLÈME D'ÉLASTO-PLASTICITÉ .....	6
	• <i>Solution Analytique</i> .....	6
	• <i>Solution éléments finis</i> .....	14
2.4	RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UN PROBLÈME ÉLASTO-PLASTIQUE .....	17
	• <i>Algorithmes de calcul</i> .....	17
	• <i>Projection sur le critère de plasticité</i> .....	19
	• <i>Application à la structure treillis</i> .....	20
<b>3</b>	<b>PLASTICITÉ DES POUTRES .....</b>	<b>23</b>
3.1	RAPPELS ET NOTATIONS .....	23
3.2	MODÈLE ÉLASTO-PLASTIQUE .....	24
	• <i>Essai de flexion pure</i> .....	24
	• <i>Essai de flexion simple</i> .....	27
3.3	MODÈLE SIMPLIFIÉ – ROTULE PLASTIQUE.....	29
	• <i>Application</i> .....	30
<b>4</b>	<b>PLASTICITÉ 3D .....</b>	<b>33</b>
4.1	CRITÈRES DE PLASTICITÉ.....	33
	• <i>Exemples de critères</i> .....	34
4.2	LOI D'ÉCOULEMENT PLASTIQUE .....	38
4.3	PRINCIPE DE LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE.....	41
	• <i>Intégration de la loi de comportement</i> .....	41
	• <i>Application aux éléments finis</i> .....	42

# 1 Généralités

Ce premier chapitre nous permet de distinguer les phénomènes mécaniques où le temps et les vitesses de déformation ne jouent qu'un rôle secondaire (plasticité classique) de ceux où le temps et/ou les vitesses de déformation jouent un rôle important (fluage, fatigue, plasticité dynamique). Après une brève description des phénomènes observés, nous rappelons le vocabulaire relatif à différents essais mécaniques. Pour finir nous présentons quelques modèles rhéologiques parmi les plus simples permettant de représenter le comportement mécanique du matériau.

## *1.1 Mécanismes physiques de déformation*

Le comportement macroscopique observé est en fait le résultat de déformations locales à une échelle microscopique. Cet aspect microscopique est fondamental pour la compréhension physique des phénomènes et fait l'objet du cours sur les matériaux. Nous rappelons ci-dessous le vocabulaire relatif aux phénomènes observés et aux principales techniques d'essai. **Pour compléter ces informations n'hésitez pas à consulter les ouvrages cités en [ref 2 et 3].**

- *Phénomènes observés*

- *Déformations élastiques*

Elles correspondent à des variations des espaces inter - atomique et à des mouvements réversibles de dislocations<sup>1</sup>. Ces déformations **sont essentiellement instantanément réversibles** → la configuration initiale est retrouvée après décharge.

- *Déformations visqueuses*

Elles correspondent à la poursuite de la déformation alors que la charge est constante, il n'y a plus d'équilibre. Le temps et les vitesses de déformation jouent un rôle important dans les lois de comportement d'un matériau visqueux. Lors de ce phénomène favorisé par l'activation thermique, on parle d'écoulement de fluage.

- *Déformations permanentes*

Elles correspondent à des **mouvements irréversibles des dislocations**. Ces déplacements se font par glissement dans les plans cristallographiques (plan de plus grande densité d'atomes). En pratique ces déplacements ne modifient pas la structure cristalline → le volume reste inchangé, on parle d'**incompressibilité plastique**.

- *Écrouissage*

Ce phénomène aussi appelé consolidation correspond à une augmentation du nombre de points de blocage du mouvement des dislocations. Il vient contrecarrer l'augmentation du nombre de dislocations, et modifie le seuil au-delà duquel les déformations ne sont plus réversibles.

- *Restauration*

Ce phénomène aussi appelé recouvrance correspond à une recristallisation par regroupement de dislocations de signe opposé. Il se produit dans le temps et est favorisé par l'activation thermique.

---

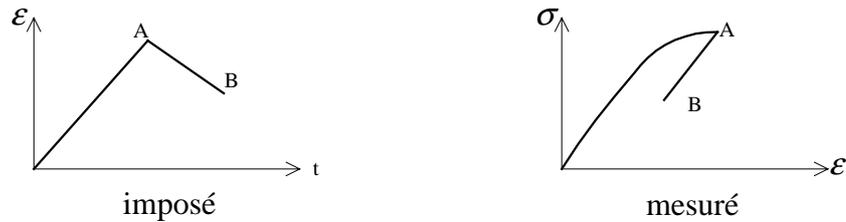
<sup>1</sup> Dislocation : défaut dans la structure du réseau cristallin. Le nombre de dislocations augmente lorsque l'on charge le matériau.

- **Techniques d'essais**

En ce qui concerne le calcul des structures, l'objectif des essais est de fournir à l'ingénieur, les caractéristiques mécaniques du matériau nécessaires aux calculs qu'il compte mener. Dans ces essais on observe les déformations que subit une éprouvette sous l'action d'un système donné de contraintes. Nous présentons ci dessous trois types d'essais à température constante.

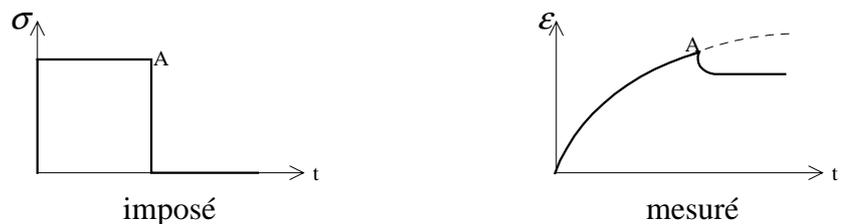
➤ **Essai d'écroutissage**

$\varepsilon$  imposée à vitesse constante



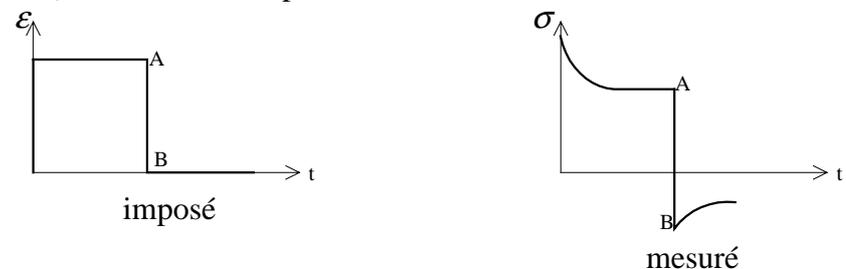
➤ **Essai de fluage + recouvrance**

$\sigma$  imposée ( $f^{ct}$  échelon) puis attente à contrainte nulle. La courbe de réponse caractérise la « déformation retardée ».



➤ **Essai de relaxation**

$\varepsilon$  imposée ( $f^{ct}$  échelon). La courbe de réponse caractérise la viscosité.



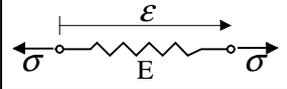
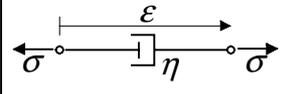
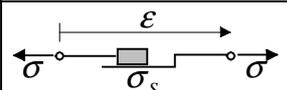
Pour être reproductibles ces essais sont normalisés<sup>2</sup>. Ils peuvent être réalisés sur des éprouvettes de géométrie différente. Citons les essais les plus classiques :

- Chargement simple            ➔ Traction «essai unidimensionnel »
- Chargement complexe       ➔ Traction – torsion d'un tube mince
- ➔ Traction – pression d'un tube mince
- ➔ Traction biaxiale.
- ➔ Compression Triaxiale

<sup>2</sup> Vous trouverez les références de différents essais normalisés sur le site AFNOR « //www.afnor.fr »

## 1.2 Modèles analogiques

Ces modèles permettent d'avoir une image concrète simplifiée des équations traduisant les lois de comportement générales qui elles sont tensorielles. Les trois éléments mécaniques le plus utilisés sont :

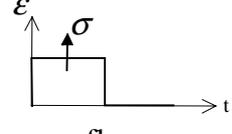
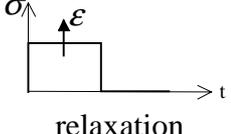
Ressort :		Élasticité linéaire parfaite	$\sigma = E\varepsilon$
Amortisseur :		Viscosité linéaire newtonienne	$\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$
Patin :		Modèle rigide plastique parfait	$ \sigma  \leq \sigma_s$

Intéressons-nous tout d'abord aux modèles dit linéaire.

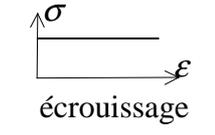
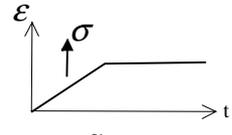
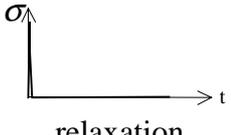
- Modèles linéaires

Ces modèles sont constitués d'assemblage de ressorts et d'amortisseurs linéaires.

Solide élastique parfait :  $\sigma = f(\varepsilon)$  la réversibilité est instantanée, le tableau suivant donne l'allure caractéristique des courbes de réponses aux 3 types d'essais évoqués précédemment.

 $\sigma = E\varepsilon$	 écrouissage	 fluage	 relaxation
--	--	--	---

Viscosité parfaite :  $\sigma = f(\dot{\varepsilon})$

 $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$	 écrouissage	 fluage	 relaxation
---	--	--	---

Pour l'essai de fluage  $\sigma = \sigma_0 \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t$

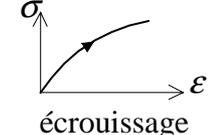
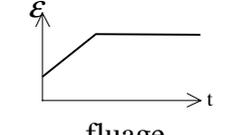
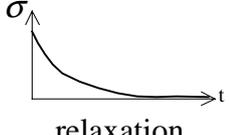
$\sigma = 0 \rightarrow \varepsilon = Cte = \varepsilon_1$  fluage illimité à  $t_\infty$

L'essai de relaxation est théoriquement impossible, on ne peut pas imposer instantanément une déformation au système, car à une vitesse  $\infty$  correspond une contrainte  $\infty$ . Ce que nous modéliserons par une «fonction de dirac».

Solide visco - élastique :  $\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$

Différents modèles peuvent être proposés. Les deux plus simples sont constitués d'un montage en série ou en parallèle. Les allures des courbes de réponses sont données ci-dessous.

Modèle de Maxwell :

 $\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\sigma$	 écrouissage	 fluage	 relaxation
---	--	--	---

Pour l'essai de fluage

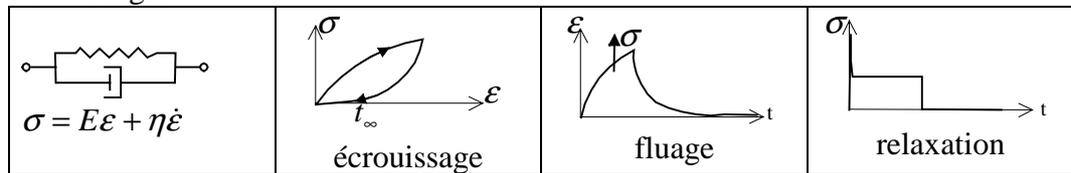
$$\sigma = \sigma_o \rightarrow \epsilon = \frac{\sigma_o}{\eta} t + \frac{\sigma_o}{E}$$

$\frac{\sigma_o}{E}$  représente une déformation instantanée.

$$\sigma = 0 \rightarrow \epsilon = Cte = \epsilon_1 \quad \text{fluage illimité à } t_\infty$$

L'essai de relaxation  $\epsilon = \epsilon_o \rightarrow \sigma = E\epsilon_o e^{-\frac{E}{\eta}t}$  relaxation complète à  $t_\infty$ .

Modèle de Kelvin-Voigt :



Pour l'essai de fluage  $\sigma = \sigma_o \rightarrow \epsilon = \frac{\sigma_o}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta}t})$

$$\sigma = 0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_1 e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad \text{fluage limité dans le temps.}$$

L'essai de relaxation est théoriquement impossible, on ne peut pas imposer instantanément une déformation au système (vitesse  $\infty \rightarrow$  contrainte  $\infty$ )

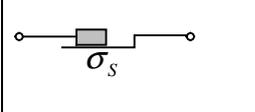
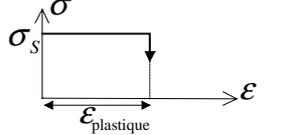
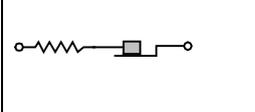
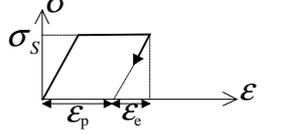
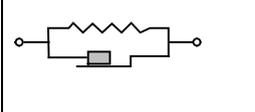
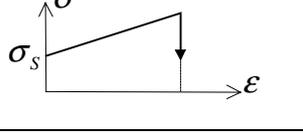
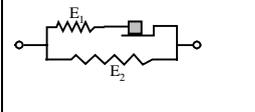
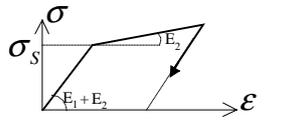
D'autres modèles plus complexes peuvent être construit sur le même principe, mais ce n'est pas l'objectif de ce cours.

• Modèles non linéaires

La non linéarité peut venir :

- du comportement du ressort ou de l'amortisseur ;
- de l'introduction d'un patin.

Toute combinaison comportant un élément non linéaire aura un comportement non linéaire. Nous nous intéressons ici à la non linéarité caractérisant la plasticité (patin). Dans le tableau suivant nous donnons l'allure de la courbe de réponse à l'essai d'écrouissage pour les modèles que nous rencontrerons par la suite.

Analogie mécanique	Modèles de comportement	Essai d'écrouissage
	Rigide Plastique Parfait RPP	
	Élasto-Plastique Parfait EPP	
	Rigide Plastique avec Écrouissage RPE	
	Élasto-Plastique avec Écrouissage EPE	

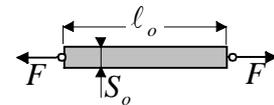
## 2 Plasticité des barres

Dans ce chapitre nous introduisons les principales notions d'élasto-plasticité à partir de l'analyse de la réponse d'une éprouvette soumise à un essai de traction – compression. La modélisation de cet essai nous permet de présenter différentes schématisations couramment utilisées pour traiter des problèmes d'évolution élasto-plastiques. Nous appliquons ensuite ces modèles au calcul analytique puis numérique des structures treillis composées d'un assemblage de barres.

### 2.1 Essai de traction

Intéressons-nous à l'aspect phénoménologique de l'essai dans le cadre de l'élasto-plasticité classique (quasi-statique, petites déformations, température constante).

Considérons une éprouvette de traction (cylindre homogène droit de section  $S_o$ , de longueur  $l_o$ ). Cette éprouvette est soumise à un effort de traction  $F$ .

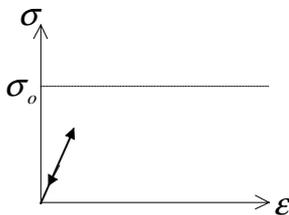


Pour des petites déformations de l'éprouvette, l'état de contrainte peut être supposé uniforme et uniaxial (la diminution de section est négligée).

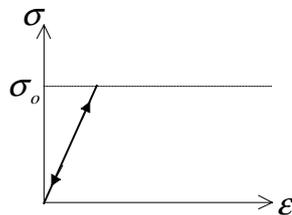
$$\text{Nous posons : } \varepsilon = \varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l_o} \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma_{xx} = \frac{F}{S_o}$$

Considérons les graphes  $(\sigma, \varepsilon)$  obtenus pour 3 essais de traction avec décharge. Selon le niveau de sollicitation appliqué lors du chargement nous obtenons les allures suivantes :

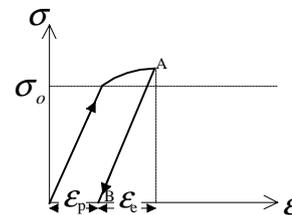
Essai 1 :  $\sigma < \sigma_o$



Essai 2 :  $\sigma = \sigma_o$



Essai 3 :  $\sigma > \sigma_o$



Essai 1 :  $\sigma < \sigma_o$

On est dans le domaine élastique, le comportement du matériau est réversible. Nous considérerons par la suite que la loi de comportement dans le domaine élastique est linéaire  $\rightarrow \sigma = E\varepsilon_e$  avec  $E$  module d'Young du matériau.

Essai 2 :  $\sigma = \sigma_o$

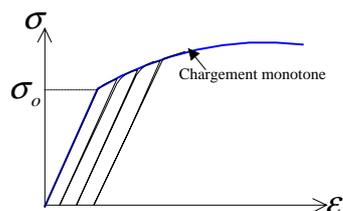
Cet essai est impossible à réaliser physiquement. La limite d'élasticité « $\sigma_o$ », seuil à partir duquel il existe des déformations irréversibles, est définie de façon conventionnelle, elle correspond à un % de déformation permanente.

Essai 3 :  $\sigma > \sigma_o$

La décharge à partir du point A (chargement maximum) s'effectue parallèlement à la charge élastique, on parle de décharge élastique. En B (charge nulle) il ne reste que la déformation plastique ou déformation permanente  $\varepsilon_p$ .

En tout point de la courbe, la déformation est donnée par :  $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$

Effectuons maintenant une série de charges-décharges consécutives. L'allure de la courbe de réponse est représentée sur la figure ci-contre. Nous observons une évolution de la limite d'élasticité en traction due à l'érouissage.



En première approximation nous pouvons considérer que :

- lors des chargements consécutifs la limite d'élasticité suit la courbe du chargement monotone ;
- l'écoulement plastique ne modifie pas le module d'élasticité.

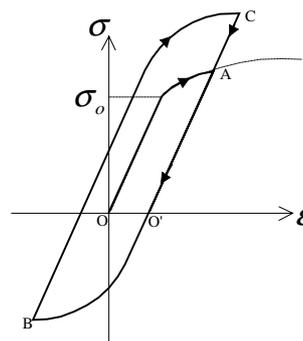
Ces deux remarques nous amènent à penser, que connaissant la déformation plastique, le seuil de plasticité actuel peut être défini à partir de la courbe d'écrouissage obtenue pour un chargement monotone.

**En fait le problème de l'évolution du domaine d'élasticité est une des difficultés majeures de la plasticité.**

Prenons l'exemple d'un chargement cyclique pour montrer que la connaissance de l'état actuel ( $\sigma, \epsilon_p$ ) ne suffit pas a priori pour définir le domaine d'élasticité actuel.

La figure ci-contre représente l'historique d'un cycle de chargement qui suit le trajet : OA-AB-BC.

Après décharge nous obtenons le point O', la déformation plastique est définie par OO'. Or dans cet «état» la limite d'élasticité est différente au premier et au deuxième passage. Cet exemple montre que les lois décrivant l'évolution du domaine d'élasticité ont un caractère essentiellement incrémental.



De plus il est clair qu'il faut distinguer deux cas :

- « Charge plastique » : il y a variation des paramètres d'écrouissage et de la déformation plastique.
- « Décharge élastique » ou « charge élastique » : il n'y a pas de variation des paramètres d'écrouissage ni de la déformation plastique.

### En résumé

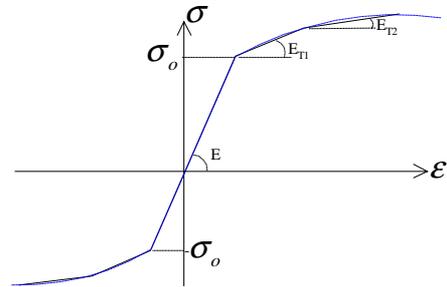
***L'évolution plastique ne peut se traduire que par des lois incrémentales reliant à un instant donné les incréments des paramètres d'écrouissage et de déformation plastique à partir de l'état actuel.***

***Pour l'étude des problèmes quasi-statique d'élasto-plasticité (sans vieillissement ni viscosité), nous utilisons donc un temps cinématique « t » pour repérer les états successifs du matériau en fonction de l'historique des sollicitations.***

## 2.2 Modélisation du comportement en traction – compression

Pour modéliser la courbe d'écroissage de l'essai de traction (compression) obtenue pour un chargement monotone le plus simple est d'utiliser un modèle construit à partir de segments de droite. La figure ci-contre représente un modèle multi-linéaire.

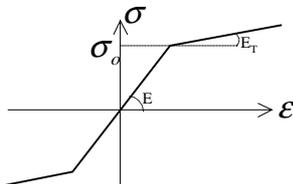
Dans la suite nous limiterons la présentation à des modèles bi-linéaire ayant la même limite d'élasticité initiale en traction et en compression



- **Modèles avec écroissage**

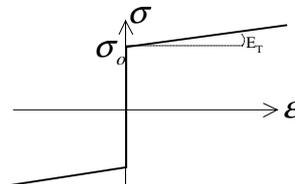
La courbe d'écroissage monotone peut être modélisée par :

**Modèle EPE**



Modèle **E**lasto-**P**lastique avec **É**croissage

**Modèle RPE**



Modèle **R**igide-**P**lastique avec **É**croissage

Le modèle rigide plastique peut être utilisé lorsque les déformations plastiques sont très importantes par rapport aux déformations élastiques, C'est le cas pour les problèmes de mise en forme.

Lorsqu'il y a écroissage il faut se donner un modèle pour représenter l'évolution du domaine d'élasticité. Les deux modèles les plus simples sont :

- L'écroissage isotrope
- L'écroissage cinématique

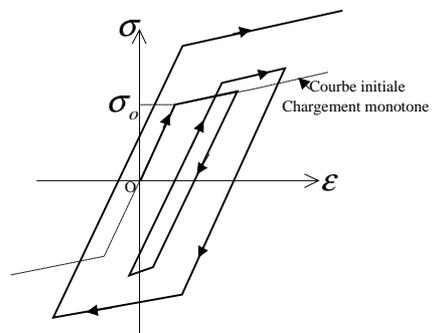
Ils sont basés sur l'utilisation de la courbe d'écroissage du chargement monotone.

➤ **Écroissage isotrope**

Ce modèle suppose une dilatation homothétique du domaine d'élasticité par rapport au domaine initial supposé connu. Le coefficient de dilatation dans le cas de l'écroissage linéaire est défini par le module tangent  $E_T$ .

Pour un essai cyclique, l'hypothèse d'écroissage isotrope donne une courbe du type de celle représentée sur la figure ci-contre. La limite d'élasticité en compression augmente comme celle de traction.

On note que dans ce modèle l'énergie de déformation élastique pouvant être absorbée est de plus en plus importante et toujours identique en traction et compression.

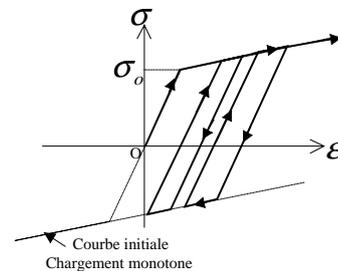


➤ **Écroissage cinématique**

Ce modèle suppose une translation sans déformation du domaine d'élasticité initial supposé connu. La translation est définie à partir de la courbe d'érouissage monotone.

Le modèle cinématique respecte l'effet Bauschinger couramment observé pour les matériaux métalliques, à savoir un durcissement dans un sens (sens de l'écoulement plastique) et un adoucissement d'égale amplitude dans le sens contraire (décharge élastique).

La courbe correspondant à un essai cyclique avec érouissage cinématique est de la forme ci-contre. L'amplitude du domaine d'élasticité reste constante. Mais l'énergie élastique absorbée et pouvant être restituée dans un sens est toujours différente de celle dans l'autre sens.

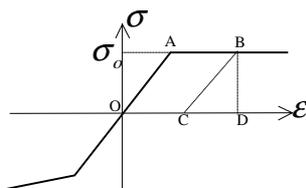


En pratique lors d'un essai cyclique on n'observe ni l'une ni l'autre de ces allures. Il est possible de combiner ces deux modèles d'érouissage pour essayer de se rapprocher au mieux de la réponse au chargement cyclique donné.

- Modèles parfaits

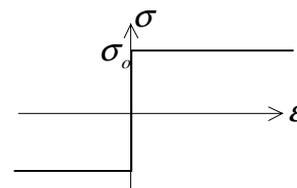
Pour ces modèles on néglige l'érouissage du matériau.

**Modèle EPP**



Modèle **Elasto-Plastique Parfait**

**Modèle RPP**



Modèle **Rigide-Plastique Parfait**

Le modèle élasto-plastique parfait est surtout utilisé du point de vue académique pour simplifier la résolution analytique des problèmes posés. Pour ce modèle donnons une interprétation énergétique de la courbe d'érouissage :

- OABD : énergie totale (travail des efforts intérieurs pour arriver en B) ;
- OABC : énergie de dissipation plastique ;
- BCD : énergie de déformation élastique, elle est restituée à la décharge.

Notez que lorsque l'érouissage n'est pas négligé l'énergie élastique restituée après plastification est toujours plus importante dans le sens de la déformation plastique.

Le modèle rigide plastique parfait est utilisé pour les problèmes de calcul des charges limites.

**Pour ces deux modèles, au-delà d'une valeur limite du chargement il y aura écoulement libre du matériau (perte d'équilibre).**

- Critère de plasticité

Ce qui précède nous permet de définir pour l'essai de traction – compression :

- Les conditions de plastification (seuil de plasticité  $\sigma_s$ ) ;
- L'évolution du seuil en fonction des paramètres d'érouissage  $\sigma_s(h)$ ,  $h$  contient l'historique du chargement suivi pour obtenir l'état actuel.

**Définition :**

Le Critère de plasticité est la fonction  $f(\sigma, h)$  telle que  
 - Si  $f(\sigma, h) < 0$  l'état actuel  $(\sigma, h)$  est intérieur au domaine d'élasticité.

- Si  $f(\sigma, h) = 0$  l'état actuel se situe sur la frontière du domaine.

**Un état extérieur au domaine d'élasticité est physiquement impossible à obtenir, le domaine d'élasticité représente donc l'ensemble des états de contraintes admissibles.**

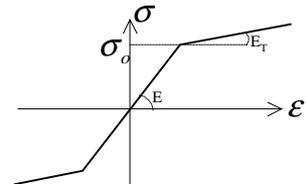
Pour l'essai de traction – compression le domaine d'élasticité est défini par :

$$\{ \sigma \in \mathfrak{R} \ ; \ f(\sigma, h) := |\sigma| - \sigma_s(h) \leq 0 \}$$

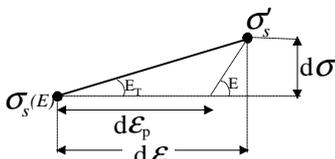
Il nous reste à définir l'évolution du seuil de plasticité  $\sigma_s(h)$ .

Représentons la courbe d'érouissage monotone en traction par un modèle bi-linéaire. Ce modèle est caractérisé par :

- $\sigma_o$  Limite d'élasticité initiale
- $E$  Module d'élasticité
- $E_T$  Module tangent.



Soit un incrément de charge  $d\sigma$  prit à partir d'un état actuel situé sur la frontière du domaine d'élasticité.



Nous avons :  $d\sigma = E_T d\epsilon$

or  $d\epsilon = d\epsilon_p + \frac{1}{E} d\sigma$

$\rightarrow d\sigma (1 - \frac{E_T}{E}) = E_T d\epsilon_p$

D'où  $d\sigma = H d\epsilon_p$  avec  $H = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}}$

$H$  est appelé module d'érouissage  $\sigma'_s = \sigma_s(h) + H d\epsilon_p$

**Résumé :**

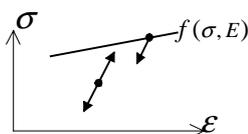
Utilisons le temps cinématique pour définir les incréments, pour le modèle bi-linéaire nous avons :

- $\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon}_e$   $E$  Module d'élasticité ;
- $\dot{\sigma} = E_T \dot{\epsilon}$   $E_T$  Module tangent ;  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p$
- $\dot{\sigma} = H \dot{\epsilon}_p$   $H$  Module d'érouissage avec  $H = E_T / (1 - \frac{E_T}{E})$

**Lois d'écoulement plastique**

Précisons maintenant comment s'effectuent les déformations pour un incrément de charge  $d\sigma$  prit à partir d'un état actuel quelconque  $(\sigma, h)$ .

Si  $f(\sigma + d\sigma, E) \leq 0$  incrément purement élastique.



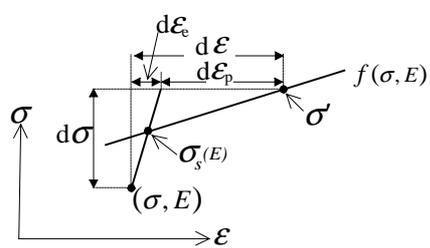
Cette condition recouvre les 2 possibilités représentées ci-contre (en traction)

- L'état actuel est à l'intérieur du domaine d'élasticité et la charge ou la décharge est élastique
- L'état actuel est sur la frontière du domaine d'élasticité et il y a décharge élastique

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon = d\varepsilon_e = \frac{1}{E} d\sigma \\ \sigma_s(h) \text{ inchangé} \end{array} \right.$$

Si  $f(\sigma + d\sigma, E) > 0$

incrément élasto-plastique.



$$\begin{aligned} d\varepsilon &= d\varepsilon_p + d\varepsilon_e \\ d\varepsilon_e &= \frac{1}{E} d\sigma \\ d\varepsilon_p &= \frac{1}{H} (\sigma + d\sigma - \sigma_s(E)) \end{aligned}$$

Le nouvel état de contrainte  $\sigma' = \sigma + d\sigma$  est situé sur la frontière du domaine d'élasticité. C'est la valeur du critère pour l'incrément de charge suivant.

Si  $H = 0$  cas des matériaux supposé parfaitement plastique alors la déformation plastique est infinie, il y a écoulement libre du matériau.

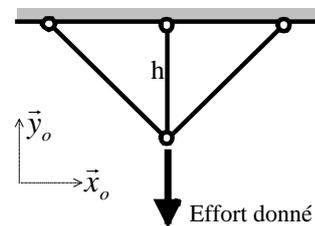
### 2.3 Résolution explicite d'un problème d'élasto-plasticité

Appliquons ce qui précède au calcul des structures composées de barres ne travaillant qu'en traction –compression. Pour illustrer les méthodes de résolution explicites, traitons le problème d'évolution élasto-plastique d'une structure treillis simple par les deux méthodes suivantes :

- Méthode analytique ;
- Méthode des éléments finis.

La structure étudiée est représentée sur la figure ci-contre. L'état initial est supposé naturel (pas d'effort dans les barres). Les 3 barres sont réalisées dans un même matériau, et ont une section  $S$  identique.

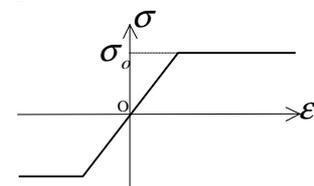
La charge est supposée appliquée infiniment lentement (problème quasi-statique). Nous effectuerons un cycle complet charge –décharge.



#### • Solution Analytique

La solution analytique est basée sur les méthodes de résolution présentées en résistance des matériaux, l'intérêt pour nous est de pouvoir suivre les calculs pas à pas.

Pour simplifier, supposons dans un premier temps que le matériau soit parfaitement plastique (pas d'écrouissage) La courbe d'écrouissage du matériau est représentée ci-contre (module d'élasticité  $E$ , limite en traction  $\sigma_o$ ).



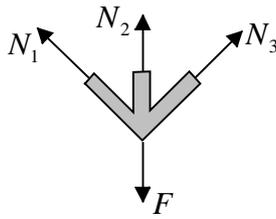
#### ➤ Phase élastique

##### Analyse du problème :

Nous avons 3 inconnues  $N_1, N_2, N_3$  (efforts dans les barres)

Pour 2 équations d'équilibre dans le plan

➔ Le système est hyperstatique de degré 1



Équations d'équilibre :

$$\begin{cases} -N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 - F = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} N_3 = N_1 \\ N_2 = F - \sqrt{2} N_1 \end{cases}$$

Résolution :

Prenons \$N\_1\$ comme inconnue hyperstatique.

L'énergie de déformation<sup>3</sup> :  $2W = \frac{1}{ES} (h\sqrt{2} N_1^2 + h N_2^2 + h\sqrt{2} N_3^2)$

en fonction de \$N\_1\$ :  $\rightarrow 2W = \frac{h}{ES} [2\sqrt{2} N_1^2 + (F - \sqrt{2} N_1)^2]$

Appliquons le TH de Ménabréa :  $\frac{\partial W}{\partial N_1} = 0 \rightarrow (2\sqrt{2} + 2) N_1 = F\sqrt{2}$

$\rightarrow N_1 = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} F$

D'où \$N\_2, N\_3 \rightarrow \begin{cases} N\_3 = N\_1 \\ N\_2 = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} F \end{cases}\$

Domaine de validité :

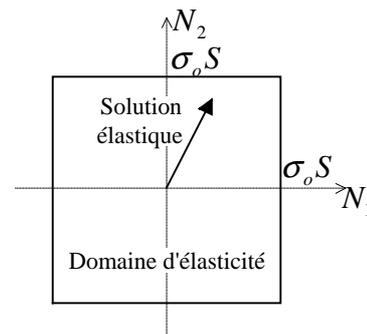
La solution obtenue est valable si les 3 barres restent dans le domaine élastique défini par :

$$\{N_i \in \mathbb{R}^3 ; f(N_i) := |N_i| - \sigma_o S \leq 0 \}$$

Pour simplifier la représentation du domaine d'élasticité nous tenons compte de la condition de symétrie : \$N\_3 = N\_1\$.

Le domaine d'élasticité peut alors se représenter dans le plan \$(N\_1, N\_2)\$ par un carré de coté \$2\sigma\_o S\$.

Pour représenter dans ce plan la solution élastique, exprimons \$N\_2\$ en fonction de \$N\_1\$ à partir de la solution obtenue (élimination de \$F\$).



La solution élastique est représentée par la droite : \$N\_2 = 2 N\_1\$

La barre 2 plastifie donc en premier, la charge correspondant est donnée par : \$N\_2 = \sigma\_o S\$

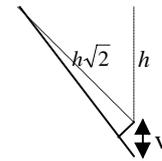
$$\rightarrow F_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sigma_o S$$

<sup>3</sup> Rappel  $2W = \int_D \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} dV$  soit pour une barre  $2W = \int_D \frac{N}{S} \frac{N}{ES} dV = \frac{1}{ES} \int_0^\ell N^2 dx = N^2 \frac{\ell}{ES}$

Le champ de déplacement en fin de phase élastique peut être calculé à partir de la loi de comportement élastique et des relations déplacements - déformations :

- Lois de comportement élastique :  $\rightarrow \varepsilon_i = \frac{N_i}{ES}$

- Relations dépl – déf :  $\rightarrow \varepsilon_1 = \frac{v/\sqrt{2}}{h\sqrt{2}} = \frac{v}{2h}$   
 $\varepsilon_2 = \frac{v}{h}$



En fin de phase élastique  $v = h\varepsilon_2 = \frac{h}{ES} \sigma_o S = \frac{\sigma_o h}{E}$

Remarques :

- La méthode de résolution utilisée n'est pas unique. Reportez-vous aux méthodes présentées en RDM.
- La relation de compatibilité des déformations qui s'écrit ici  $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$  aurait permis de trouver tout de suite la relation  $N_2 = 2 N_1$  en phase élastique.

➤ **Phase élasto-plastique**

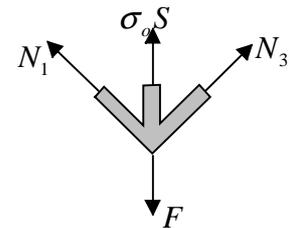
Continuons le chargement pour des valeurs de  $F > F_1$

Analyse et résolution du problème :

Pour un accroissement de charge  $dF > 0$  nous supposons que la barre 2 reste en plasticité (elle ne subit pas de décharge). Le matériau étant supposé élasto-plastique parfait l'effort dans cette barre reste constant  $= \sigma_o S$ .

Nous avons donc 2 inconnues  $N_1, N_3$

Pour 2 équations d'équilibre :  $\begin{cases} N_3 = N_1 \\ \sigma_o S = F - \sqrt{2} N_1 \end{cases} \rightarrow N_3 = N_1 = \frac{F - \sigma_o S}{\sqrt{2}}$



Validité de la solution :

Cette solution est correcte si  $\begin{cases} |N_i| - \sigma_o S \leq 0 & \text{"critère"} \\ d\varepsilon_{p2} > 0 & \text{"condition de charge"} \end{cases}$  sont satisfaites.

Le critère  $\rightarrow F < F_2$  avec  $F_2 = (1 + \sqrt{2}) \sigma_o S$

La condition de charge nécessite le calcul de  $d\varepsilon_{p2}$ . Or on ne peut pas calculer directement l'accroissement de déformation de la barre 2 à partir de la loi de comportement car le matériau est élasto-plastique parfait. Il faut utiliser la relation de compatibilité des déformations  $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$  et la loi de comportement des barres 1 et 3 qui restent élastiques durant cette phase.

$\rightarrow \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 = 2 \frac{N_1}{ES} = \frac{\sqrt{2}}{ES} (F - \sigma_o S)$

or  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{e2} + \varepsilon_{p2}$

$\frac{N_2}{ES} = \frac{\sigma_o}{E}$

$$\rightarrow \varepsilon_{p2} = \frac{1}{E} \left( \frac{\sqrt{2}}{S} F - (1 + \sqrt{2}) \sigma_o \right)$$

Pour  $dF > 0$  la condition de charge  $d\varepsilon_{p2} > 0$  est vérifiée.

La solution obtenue est donc valable tant que  $F < F_2$ .

Pour  $F = F_2$  la structure est complètement plastifiée. Le matériau étant supposé élasto-plastique parfait, il y a ruine de la structure. Tout accroissement de charge  $dF > 0$  conduit à un écoulement plastique  $\infty$ .

Avant d'aborder le problème de la décharge, traçons les diagrammes d'évolution de la flèche et des efforts en fonction de la charge.

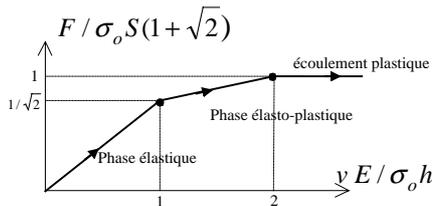
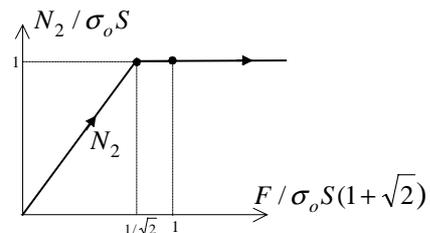
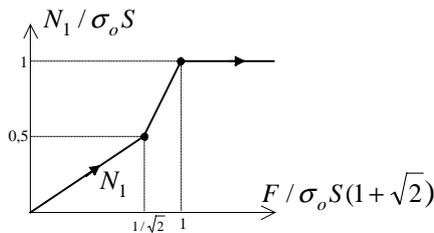


Diagramme de la flèche

Le calcul de la flèche pour  $F = F_2$  ne peut se faire qu'à partir de la loi de comportement des barres 1 et 3 qui sont restées élastiques.

$$\rightarrow v = 2h\varepsilon_1 = 2h \frac{N_1}{ES} = 2 \frac{\sigma_o h}{E}$$

Pour les diagrammes d'efforts nous obtenons :



### ➤ Décharge élastique

Partons de l'état obtenu pour  $F = F_2$  (juste avant la ruine) et appliquons un incrément de charge  $dF < 0$

#### Analyse et résolution du problème :

Nous supposons que :

- les barres 1 et 3 restent élastiques
- la barre 2 qui était plastifiée subit une décharge élastique.

Le problème est donc régi par les mêmes équations que celles établies en phase élastique (première phase de l'étude).

Réutilisons les résultats obtenus sous forme incrémentale :

$$dN_1 = dN_3 = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} dF$$

$$dN_2 = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} dF$$

$$\text{et } dv = \frac{h}{ES} \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} dF$$

#### Validité de la solution :

Cette solution est valable tant que les barres restent dans le domaine élastique, il faut donc vérifier :

$$\forall i \quad |N_i| - \sigma_o S \leq 0$$

$$\text{Avec } N_i = [N_i]_{F=F_2} + dN_i$$

C'est donc la barre 2 qui plastifiera la première en compression pour un accroissement de l'effort normal  $N_2$  de  $-2\sigma_o S$

$$\text{Soit } dN_2 = -2\sigma_o S \rightarrow dF = -\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} 2\sigma_o S = -(2+\sqrt{2})\sigma_o S$$

D'où  $F_3 = F_2 + dF = -\sigma_o S$  charge de plastification en compression.

Nous pouvons à partir de cette solution calculer l'état de la structure lorsqu'elle est déchargée ( $F = 0$ ) soit un incrément  $dF = -F_2$ . Les contraintes dans les barres ne sont pas nulles.

$$\text{Pour } F = 0 \quad N_1 = N_3 = \sigma_o S - \frac{1}{2+\sqrt{2}} (1+\sqrt{2})\sigma_o S = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \sigma_o S$$

$$N_2 = \sigma_o S - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} (1+\sqrt{2})\sigma_o S = (1-\sqrt{2})\sigma_o S$$

En conclusions

Lorsque la structure est déchargée les barres 1 et 3 sont en traction, et la barre 2 est en compression.

Et on peut vérifier que le système mécanique satisfait les équations d'équilibre en effet :

$$N_2 = \sqrt{2} N_1$$

Les contraintes résiduelles proviennent des déformations plastiques qui ne vérifient pas les conditions de compatibilité en effet :

$$\begin{cases} \varepsilon_{p2} \neq 0 \\ \varepsilon_{p1} = \varepsilon_{p3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_{p2} \neq 2\varepsilon_{p1}$$

**Définition :**

*Les autocontraintes sont les contraintes résiduelles obtenues après décharge complète d'une structure ayant plastifié. Elles ont pour origine les déformations plastiques qui ne satisfont pas les équations de compatibilité. Ces contraintes forment un système mécanique équilibré.*

Avant d'aborder le problème d'un chargement cyclique traçons les diagrammes d'évolution de la flèche et des efforts obtenus après décharge de la structure.

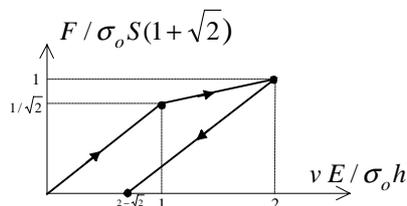


Diagramme de la flèche

Calcul de la flèche résiduelle

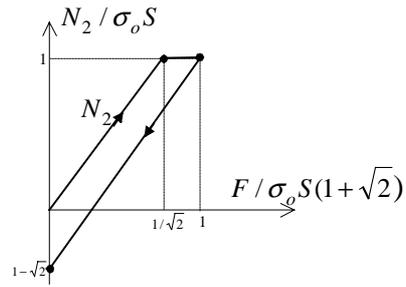
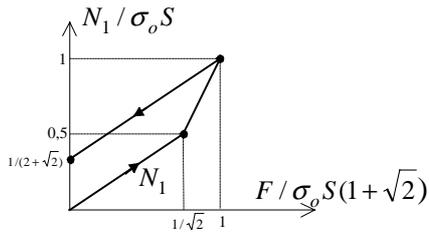
$$v_{res} = [v]_{F=F_2} + dv$$

$$\rightarrow v_{res} = 2 \frac{\sigma_o h}{E} - \frac{h}{ES} \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} (1+\sqrt{2})\sigma_o S$$

$$\rightarrow v_{res} = \frac{\sigma_o h}{E} (2 - \sqrt{2})$$

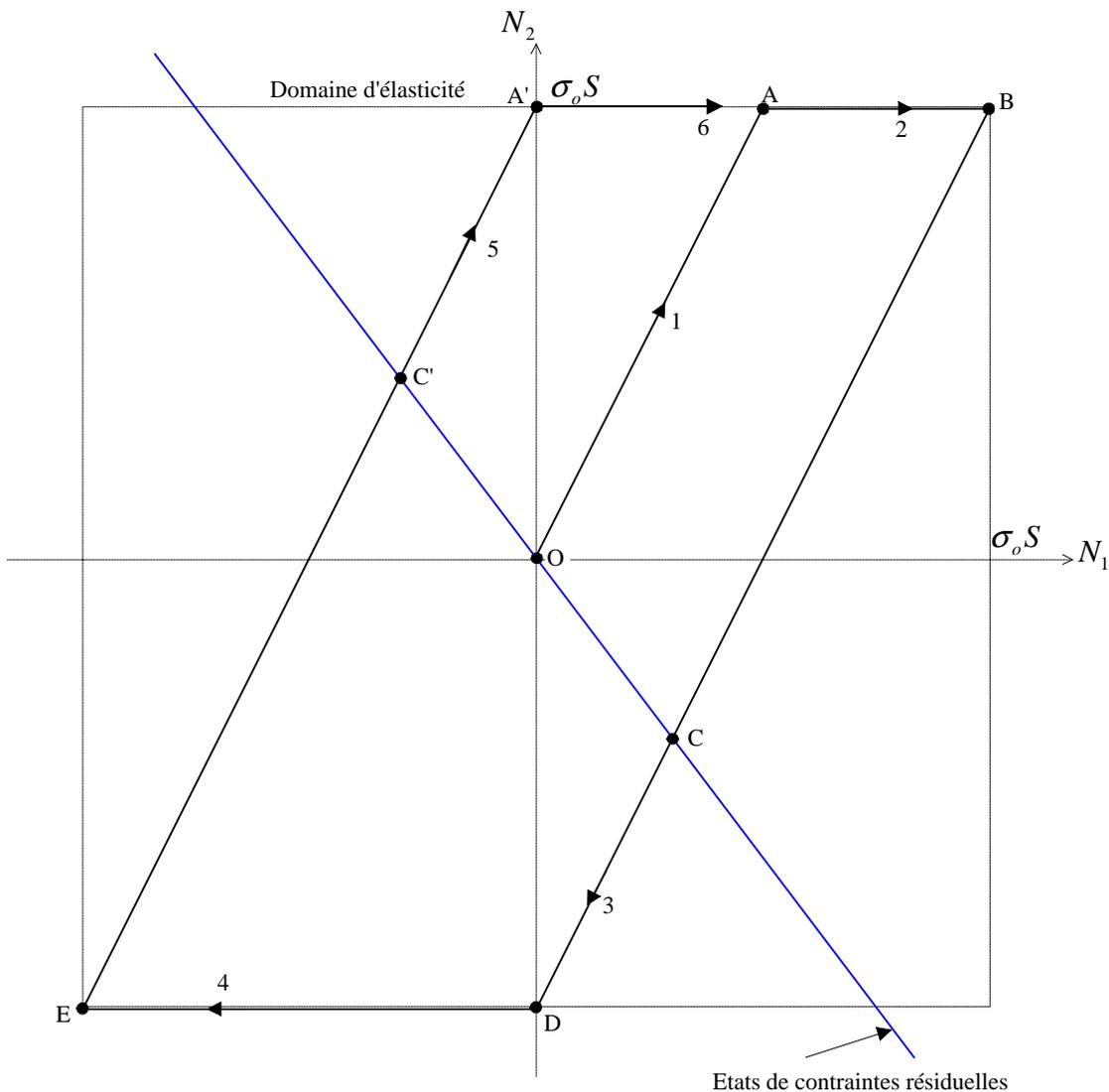
On peut obtenir ce résultat graphiquement.

Pour les diagrammes d'efforts nous obtenons :



➤ **Chargement cyclique**

Le plus simple pour étudier le chargement cyclique est de faire l'étude dans le plan des contraintes ( $N_1, N_2$ ).



Le domaine d'élasticité est représenté par un carré de coté  $2\sigma_o S$ . Ce domaine reste le même car il n'y a pas d'érouissage.

Les trajets de charge – décharge élastiques sont représentés par des segments de droites (intérieurs au domaine d'élasticité) de pente 2 ( $N_2 = 2N_1$ ).

Les trajets élasto-plastiques se situent sur la frontière du domaine (il n'y a pas d'érouissage).

L'état de contraintes résiduelles est représenté par une droite d'équation  $N_2 = -\sqrt{2}N_1$  (cette droite passe par l'origine car l'état initial à été supposé non contraint).

Ces informations nous ont permis de construire la solution graphique représentée ci-dessus :

Les chiffres représentent les phases successives du chargement cyclique :

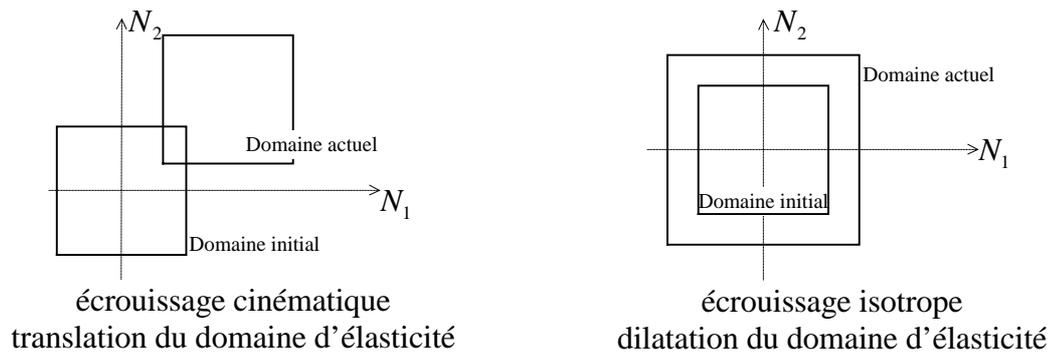
- 1 – 3 – 5 Charge et décharge élastique ;
- 3 – 4 – 6 Évolution élasto-plastique (barre 2 plastifiée).

Les lettres représentent différents états de la structure :

- O : état initial
- A,A' : fin de phase élastique en traction
- B : limite de ruine en traction
- C,C' : décharge de la structure ( $F = 0$ )
- D : fin de phase élastique en compression
- E : limite de ruine en compression.

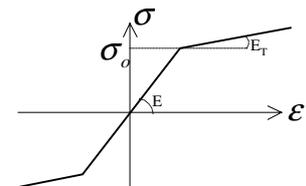
➤ **Prise en compte de l'écroissage**

Si le matériau est écroissable le critère de plasticité évolue lors des incréments de charge plastique. Les deux figures ci-dessous représentent l'évolution du domaine dans le plan des contraintes ( $N_1, N_2$ ) ,selon la modélisation retenue (écrouissage cinématique, écroissage isotrope).



Pour simplifier les calculs qui suivent nous supposons que la courbe d'écroissage de l'essai de traction monotone est bi-linéaire, caractérisée par :

$$\sigma_o \quad E \quad \text{et} \quad E_T = 0,1 E .$$



Regardons comment sont modifiés les calculs faits en élasto-plasticité parfaite.

**Phase 1 (élasticité):**

La solution est identique :  $\rightarrow F'_1 = F_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sigma_o S$

**Phase 2 (élasto-plasticité):**

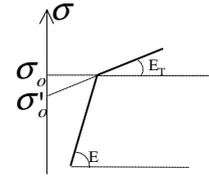
La loi de comportement dans la barre 2 est :  $\sigma_2 = \sigma_o + H \epsilon_{p2}$

En pratique nous calculons  $\epsilon_2$  à partir de la relation de compatibilité  $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$

Il est donc plus simple pour la solution analytique d'exprimer  $\sigma_2$  en fonction de  $\epsilon_2$

$$\sigma_2 = \sigma'_o + E_T \varepsilon_2$$

$$\text{avec } \sigma'_o = \sigma_o \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) = 0,9 \sigma_o$$



$$\text{D'où } N_2 = \sigma_2 S = \sigma'_o S + E_T \left(2 \frac{N_1}{E}\right)$$

$$\text{Reportons dans l'équation d'équilibre : } N_2 = F - \sqrt{2} N_1$$

$$N_1 \left(2 \frac{E_T}{E} + \sqrt{2}\right) = F - \sigma'_o S$$

$$N_1 = \frac{F - 0,9 \sigma_o S}{(0,2 + \sqrt{2})}$$

Il y a plastification des barres 1 et 3 lorsque  $N_1 = \sigma_o S$ .

$$\text{Soit } \boxed{F'_2 = (1,1 + \sqrt{2}) \sigma_o S > F_2}$$

$$\text{Pour } F = F'_2 \quad \begin{cases} N_3 = N_1 = \sigma_o S \\ N_2 = 1,1 \sigma_o S \end{cases}$$

### Phase 3 (plasticité):

L'écroutissement permet de poursuivre le chargement pour des valeurs de  $F > F'_2$ .

L'évolution est alors complètement plastique.

$$\text{Nous avons : } \begin{cases} N_3 = N_1 = \sigma'_o S + E_T S \varepsilon_1 \\ N_2 = \sigma'_o S + E_T S \varepsilon_2 \end{cases} \quad \text{et } \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$$

$$\text{L'équation d'équilibre : } \sigma'_o S + 2E_T S \varepsilon_1 = F - \sqrt{2}(\sigma'_o S + E_T S \varepsilon_1)$$

Permet de calculer  $\varepsilon_1$  puis  $\varepsilon_2, N_1, N_2$

Calculons les valeurs obtenues pour  $F = 2,9 \sigma_o S$

$$\varepsilon_1 = \frac{2 - 0,9\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \frac{\sigma_o}{E_T}, \quad N_1 = \frac{3,8}{2 + \sqrt{2}} \sigma_o S, \quad N_2 = \frac{5,8 - 0,9\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \sigma_o S$$

### Phase 4 (décharge élastique):

Les équations de décharge élastique ne sont pas modifiées, ce qui change c'est le domaine de validité défini par le domaine d'élasticité.

Supposons que la décharge est appliquée en fin de phase 2

$$\text{Nous partons donc de } F = F'_2 \quad \begin{cases} N_3 = N_1 = \sigma_o S \\ N_2 = 1,1 \sigma_o S \end{cases}$$

Les barres 1 et 3 n'ayant pas été plastifiées la limite élastique n'est pas modifiée

$$\text{pour } i = 1 \text{ et } 3 \quad |N_i| - \sigma_o S \leq 0$$

La barre 2 ayant été plastifiée la limite élastique en compression dépend du type d'écroutissement.

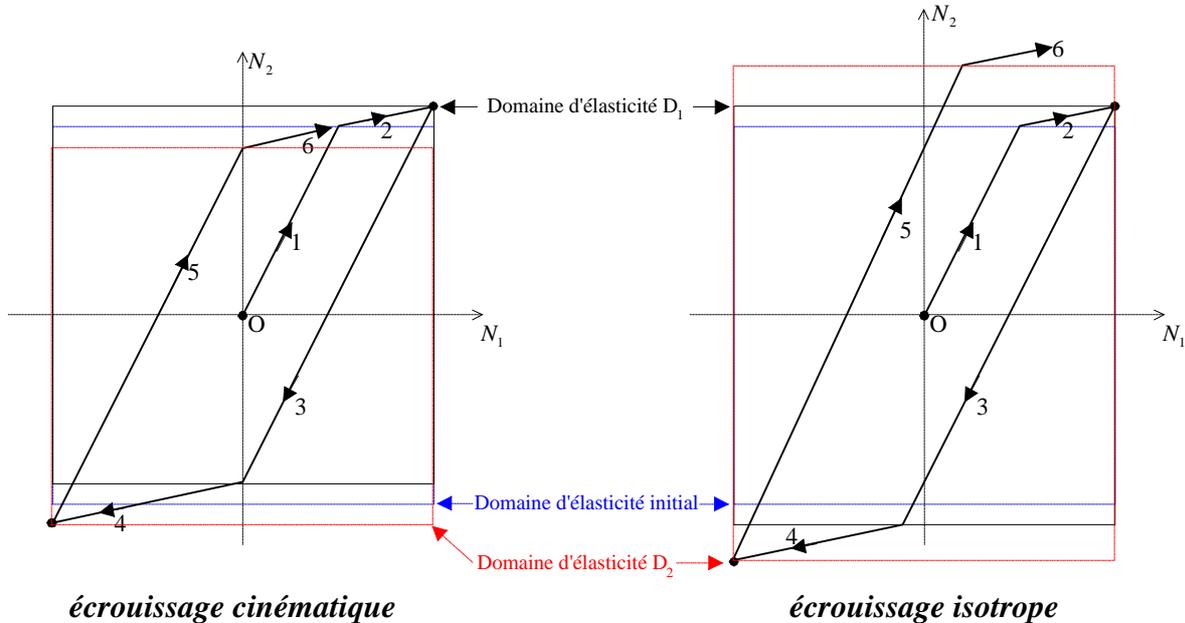
$$\text{Pour un écroutissement cinématique : } |dN_2| \leq 2\sigma_o S$$

$$\text{or } dN_2 = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} dF \quad \rightarrow \quad dF = -2 \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sigma_o S$$

Pour un écrouissage isotrope en compression :  $N_{2s} = - [N_2]_{F=F_2} = -1,1 \sigma_o S$

$$D'où \quad dN_2 = -2,2 \sigma_o S \quad \rightarrow \quad dF = -2,2 \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sigma_o S$$

Les calculs suivants sont identiques, là encore il est plus simple de faire une étude graphique dans le plan  $(N_1, N_2)$ . Les figures suivantes représentent pour les deux modèles d'écrouissage, le cycle de chargement limite tel que les barres 1 et 3 ne plastifient pas.



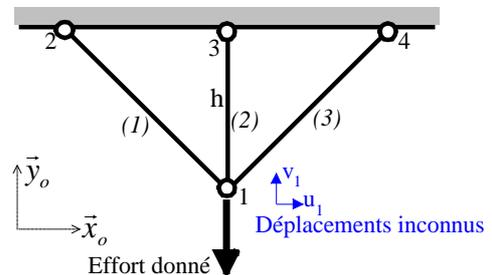
On note que pour l'écrouissage cinématique le cycle se stabilise dès la fin du premier cycle. Alors que pour l'écrouissage isotrope il y a augmentation de la limite élastique à chaque cycle, ce qui nécessite des charges de plus en plus importantes pour pouvoir réaliser chaque nouveau cycle.

• Solution éléments finis

Montrons comment résoudre de façon explicite le même problème à partir d'un modèle éléments finis. Intéressons-nous directement au modèle avec écrouissage, et ne traitons que le chargement monotone croissant. Le cas des chargements cycliques s'en déduisant aisément

Modèle éléments finis :

Le modèle proposé comporte 3 éléments finis (1),(2),(3) pour 4 nœuds soit 8 variables déplacements. Compte tenu des conditions aux limites aux nœuds 1,2,3, nous obtenons un système de 2 équations sur les déplacements inconnus.



$$[K_{red}] \{X_I\} = \{\phi_D\} \quad \text{avec} \quad \{X_I\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\phi_D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix}$$

➤ Phase élastique

Matrice raideur :

Élément 1 Matrice raideur :  $[K_1] = k_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  avec  $k_1 = \frac{ES}{h\sqrt{2}}$  sur  $(u_1, v_1)$

Élément 2 Matrice raideur :  $[K_2] = k_2$  avec  $k_2 = \frac{ES}{h}$  sur  $v_1$

Élément 3 Matrice raideur :  $[K_3] = k_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  avec  $k_3 = \frac{ES}{h\sqrt{2}}$  sur  $(u_1, v_1)$

D'où la matrice raideur assemblée réduite :  $[K_{red}] = \frac{ES}{h} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  sur  $(u_1, v_1)$

Résolution :  $[K_{red}]\{X_I\} = \{\phi_D\}$  avec  $\{\phi_D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix} \Rightarrow \{X_I\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \frac{Fh}{ES} \end{Bmatrix}$

Validité de la solution :

Cette solution est valable tant que les barres restent dans le domaine élastique, il faut donc vérifier :

$$\forall i \quad |N_i| - \sigma_o S \leq 0$$

Calculons les efforts dans les barres en utilisant la loi de comportement :

$$N_1 = \frac{ES}{h\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -v_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow N_1 = \frac{F}{2 + \sqrt{2}}$$

$$N_2 = -\frac{ES}{h} v_1 \Rightarrow N_2 = \frac{F\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

Les relations entre  $N$  et  $F$  étant explicites (résolution analytique) nous en déduisons que la barre 2 plastifie la première pour

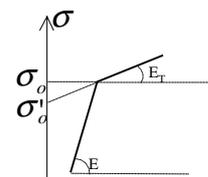
$$F'_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sigma_o S$$

➤ **Phase élasto-plastique**

Utilisons la loi de comportement dans la barre 2 sous la forme suivante :

$$\sigma_2 = \sigma'_o + E_T \varepsilon_2$$

$$\text{avec } \sigma'_o = \sigma_o \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) = 0,9 \sigma_o$$



D'où la raideur de l'élément 2 :  $k_2 = \frac{E_T S}{h}$

Et le vecteur force généralisé  $\{\phi_D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F - \sigma'_o S \end{Bmatrix}$

Pouvez expliquer cette expression ?

Résolution :

$$\text{Le problème élasto-plastique est : } \begin{bmatrix} \frac{ES}{h\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{ES}{h\sqrt{2}} + \frac{E_T S}{h} \end{bmatrix} \{X_I\} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ F - \sigma'_o S \end{Bmatrix}$$

$$\text{D'où } v_1 = -(F - \sigma'_o S) \frac{1}{\frac{ES}{h\sqrt{2}} + \frac{E_T S}{h}}$$

Validité de la solution :

Cette solution est valable pour  $F > F'_1$  et tant que  $N_1 - \sigma'_o S \leq 0$ .

Les efforts dans les barres sont donnés par les lois de comportement :

$$N_1 = -\frac{ES}{2h} v_1 \quad \text{et} \quad N_2 = \sigma'_o S - \frac{E_T S}{h} v_1$$

Les relations entre  $N$  et  $F$  étant explicites (résolution analytique) nous en déduisons que les barres 1 et 3 plastifient pour

$$F'_2 = \sigma'_o S + \sigma'_o S (\sqrt{2} + 2 \frac{E_T}{E})$$

➤ **Phase plastique**

Pour  $F > F'_2$  toutes les barres sont plastifiées. Les équations du problème sont donc de la forme :

$$\frac{E_T S}{h\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \{X_I\} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ F - \sigma'_o S - 2(\sigma'_o S \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{Bmatrix}$$

Pouvez expliquer cette expression ?

$$\text{D'où } v_1 = -(F - \sigma'_o S(1 + \sqrt{2})) \frac{h}{E_T S} \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

Les efforts dans les barres sont donnés par les lois de comportement :

$$N_1 = \sigma'_o S - \frac{E_T S}{h} \frac{v_1}{2} \quad \text{et} \quad N_2 = \sigma'_o S - \frac{E_T S}{h} v_1$$

Le modèle éléments finis explicite nous permet de résoudre de façon identique les problèmes d'évolution élasto-plastique des structures treillis, car la méthode de résolution est basée sur l'analyse des expressions formelles des efforts.

*Du point de vue numérique cette analyse analytique est impossible, il faut procéder par incrément de charge et tester numériquement que chaque élément de la structure reste dans ou sur la frontière du domaine d'élasticité. Cette méthode est présentée dans le chapitre suivant.*

## 2.4 Résolution numérique d'un problème élasto-plastique

Les méthodes de résolution numérique d'un problème élasto-plastique sont des méthodes itératives basées sur la minimisation d'un résidu d'équilibre. Pour fixer les idées nous présentons dans un premier temps un algorithme utilisant la matrice raideur élastique à chaque itération.

- Algorithmes de calcul

Soit un incrément de charge  $\{\Delta F\}$  appliqué à la structure, la solution élastique correspondante est donnée par :

$$\{\Delta U\} = [K_e]^{-1} \{\Delta F\}$$

avec  $[K_e]$  matrice raideur de la structure élastique

A cette solution correspond pour chaque élément fini un incrément de déformation

$$\{\Delta \mathcal{E}\} = [B] \{\Delta u\}$$

avec  $[B]$  matrice des relations déformations – déplacements de l'élément considéré.

C'est l'algorithme de projection sur le critère de plasticité qui nous permet de déterminer l'état de contrainte correspondant (Cet algorithme est présenté un peu plus loin).

Ayant calculé  $\{\Delta \sigma\}$  nous calculons pour chaque élément le vecteur des forces nodales élémentaires qui équilibrent cet incrément de contrainte.



$$\rightarrow \{\Delta \phi\}_e = \begin{Bmatrix} -\Delta N_i \\ \Delta N_j \end{Bmatrix}$$

L'assemblage des vecteurs élémentaires permet de définir un vecteur force nodale équivalent à l'état de contrainte calculé à partir des lois de comportement.

Le résidu est donc défini par :

$$\{R\} = \{\Delta F\} - \{\Delta \phi\}$$

Si le résidu est nul (à la précision près) c'est que la solution obtenue est bonne (cela correspond à un incrément de charge élastique de la structure), si le résidu est non nul (supérieur à la précision voulue) il faut itérer en cherchant la nouvelle solution de  $\{\Delta U\} = [K_e]^{-1} \{R\}$ .

### En résumé l'algorithme du calcul est de la forme :

Définition de l'historique de chargement (incrément de charge)

Maillage éléments finis de la structure    Calcul de  $[K_e]$  et  $[K_e]^{-1}$

Pour chaque incrément  $\{\Delta F\}$

    Initialisation du résidu :  $\{R\} \leftarrow \{\Delta F\}$

    Tant que  $\|\{R\}\| > \varepsilon$

        Calcul de  $\{\Delta U\} = [K_e]^{-1} \{R\}$  et  $\{\Delta \mathcal{E}\}$

        Projection sur le critère et calcul de  $\{\Delta \phi\}$

        Nouveau résidu  $\{R\} \leftarrow \{R\} - \{\Delta \phi\}$

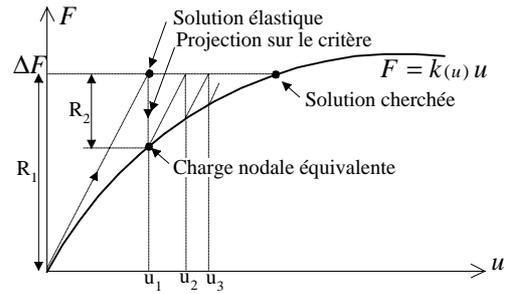
    Fin tant que

    Impression des résultats pour l'incrément de charge

Fin pour

La figure ci-contre schématise le processus mis en œuvre dans l'algorithme précédent.

La courbe  $F = k(u)u$  solution du problème non linéaire est représentée dans le cas mono-dimensionnel.

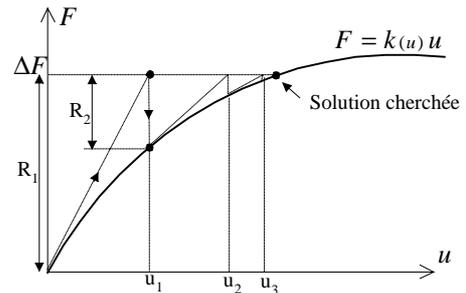


Une amélioration évidente consiste à utiliser la matrice raideur « tangente » de la structure dans l'état actuel. Cette matrice tient compte des éléments plastifiés (voir l'exemple traité précédemment). Attention d'une part, le calcul de la matrice tangente et la résolution (calcul de  $K^{-1}$ ) à chaque itération ont un coût en temps CPU, d'autre part dans le cas de la décharge élastique l'utilisation de la matrice raideur initiale donne de meilleurs résultats.

En pratique un algorithme de résolution peut utiliser une combinaison des deux processus. Nous donnons ci-dessous l'algorithme est la figure correspondant à l'utilisation de la matrice tangente c'est la méthode de Newton-Raphson.

```

Maillage éléments finis de la structure
Définition des lois de comportement ( $\sigma_o, E, E_T$ )
Définition de l'historique de chargement
Pour chaque incrément  $\{\Delta F\}$ 
  Initialisation du résidu :  $\{R\} \leftarrow \{\Delta F\}$ 
  Tant que  $\|\{R\}\| > \varepsilon$ 
    Calcul de  $[K(u)]$ 
    Calcul de  $\{\Delta U\} = [K(u)]^{-1}\{R\}$  et  $\{\Delta \varepsilon\}$ 
    Projection et calcul de  $\{\Delta \phi\}$ 
    Nouveau résidu  $\{R\} \leftarrow \{R\} - \{\Delta \phi\}$ 
  Fin tant que
  Impression des résultats
Fin pour
  
```



### Remarques :

Dans ces deux algorithmes la seule nouveauté par rapport à un calcul d'élasticité linéaire est la projection sur le critère de plasticité et le calcul de la force nodale équivalente. Nous détaillons ces calculs dans le paragraphe suivant.

Pour le test de convergence sur le résidu, différentes normes peuvent être utilisées, les 2 plus courantes sont :

De type valeur maximale :  $\|\{R\}\| = \max(|R_i|)$

De type moindre carrés :  $\|\{R\}\| = \sqrt{\{R\}^2}$

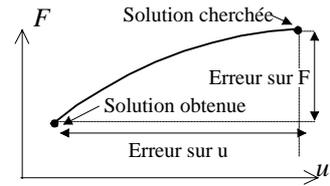
Pour travailler avec des nombres sans dimension nous testons  $\|\{R\}\|/\|\{\Delta F\}\|$

Il existe deux façons de définir le résidu :

Sur les degrés de liberté de la structure (ne tient pas compte des CL)

Sur tous les degrés de liberté (tient compte des réactions aux appuis)

Si le résidu prend en compte les efforts de liaison, il tient compte implicitement de l'erreur commise sur le champ des déplacements. Comme l'indique la figure ci-contre pour une précision donnée l'erreur sur la solution sera plus petite.

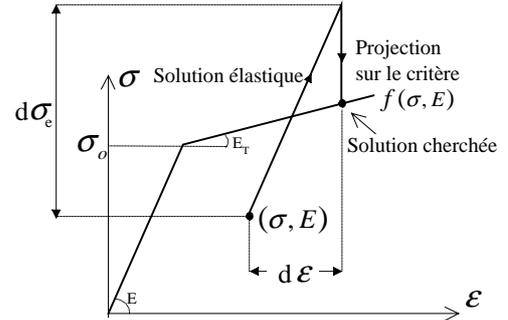


• Projection sur le critère de plasticité

Soit un état actuel  $(\sigma, h)$ , le problème posé consiste à calculer pour chaque élément le nouvel état correspondant à un accroissement de déformation  $\{\Delta\varepsilon\}$ .

La figure ci contre représente le principe de projection sur la frontière du domaine d'élasticité pour un accroissement de déformation  $d\varepsilon$  donné. Nous avons représenté le cas le plus général d'un élément en cours de plastification.

L'accroissement de contrainte élastique est défini par  $d\sigma_e = E d\varepsilon$



Posons :  $R = \frac{AB}{AC} = \frac{\sigma + d\sigma_e - \sigma_h}{d\sigma_e} = 1 + \frac{\sigma - \sigma_h}{d\sigma_e}$

$\rightarrow X = R d\varepsilon \quad \rightarrow \begin{cases} BC = (1-R) d\sigma_e \\ B\sigma' = R E_T d\varepsilon \end{cases}$

d'où

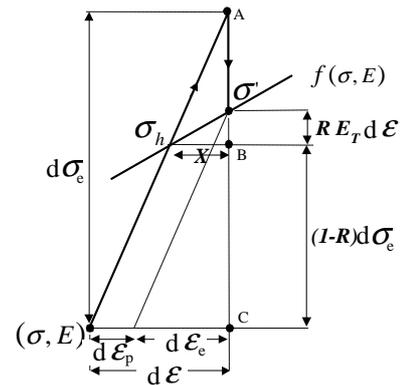
$\sigma' = \sigma + (1-R)E d\varepsilon + R E_T d\varepsilon$

soit  $d\sigma = (1-R)E d\varepsilon + R E_T d\varepsilon$

et

$d\varepsilon_e = \frac{1}{E} d\sigma \quad \rightarrow \quad d\varepsilon_e = (1-R + R \frac{E_T}{E}) d\varepsilon$

$d\varepsilon_p = d\varepsilon - d\varepsilon_e \quad \rightarrow \quad d\varepsilon_p = R(1 - \frac{E_T}{E}) d\varepsilon$



Le modèle d'écrouissage (cinématique ou isotrope) nous permet de déterminer la valeur de  $\sigma_h$ .

Dès lors les expressions ci-dessus permettent de déterminer les incréments de contrainte, de déformations plastique et élastique. Il nous reste à ajouter la condition de charge pour obtenir l'algorithme de projection sur le critère de plasticité.

### Algorithme de projection

Pour chaque élément

Calcul de l'incrément de déformation  $\Delta \varepsilon = (u_j - u_i) / \ell$

Incrément de contrainte élastique :  $d\sigma_e = E d\varepsilon$

Si  $|\sigma| \geq |\sigma_h|$  (l'élément plastique)

Si  $(\sigma > 0 \text{ et } d\sigma_e < 0)$  ou  $(\sigma < 0 \text{ et } d\sigma_e > 0)$

Décharge élastique  $R = 0$

- Si non

Poursuite de plastification  $R = 1$

Fin si

- Si non (élément élastique)

Si  $\sigma + d\sigma_e < \sigma_h$  l'élément reste élastique  $\rightarrow R = 0$

- Si non l'élément en cours de plastification  $\rightarrow R = 1 + \frac{\sigma - \sigma'_o}{d\sigma_e}$

Fin si

$$d\varepsilon_p = R \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) d\varepsilon \quad \text{et} \quad d\varepsilon_e = d\varepsilon - d\varepsilon_p$$

$$d\sigma = (1 - R)E d\varepsilon + R E_T d\varepsilon \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma + d\sigma \rightarrow \{d\phi\}_e = \begin{cases} -S d\sigma \\ S d\sigma \end{cases}$$

Calcul de  $\sigma'_o$  en fonction de l'écouissage et  $d\varepsilon_p$

Fin pour

A titre d'exercice préciser le calcul de  $\sigma_h$  en fonction du type d'écouissage, cinématique ou isotrope.

### • Application à la structure treillis

Appliquons les algorithmes précédents au calcul numérique de la structure treillis, nous présentons les calculs pour un incrément de charge  $dF = 1,9 \sigma_o S$

**1ère itération :**  $\{R\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1,9\sigma_o S \end{Bmatrix} \quad [K_e] = \frac{ES}{h} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$$\Delta v = -1,9 \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \frac{\sigma_o S h}{ES} = -1,113 \frac{\sigma_o h}{E}$$

$$\begin{cases} \Delta N_{1e} = -\frac{ES}{2h} \Delta v = 0,56 \sigma_o S \\ \Delta N_{2e} = -\frac{ES}{h} \Delta v = 1,113 \sigma_o S \end{cases}$$

**test**  $N_{1e} = \Delta N_{1e} < \sigma_o S$  (l'élément 1 est non plastifié)  $\rightarrow N_1 = 0,56 \sigma_o S$

$N_{2e} = \Delta N_{2e} > \sigma_o S$  (l'élément 2 a plastifié) il faut projeter sur le critère

projection avec  $\frac{E_T}{E} = 0,1$  :

$$R = 1 - \frac{1}{1,113} = 0,1015 \quad \rightarrow \quad \Delta \varepsilon_{2p} = 0,1015 (1 - 0,1) \frac{-\Delta v}{h}$$

$$\Delta \varepsilon_{2p} = 0,1017 \frac{\sigma_o}{E}$$

$$N_2 = \sigma_o S + R E_T S \Delta \varepsilon_2 \quad \rightarrow \quad N_2 = \sigma_o S (1 + 1,113 R \frac{E_T}{E})$$

$$N_2 = \sigma_o S (1 + 0,0113)$$

$$\text{et } \sigma'_{o(\varepsilon_2)} = 1,0113 \sigma_o$$

### calcul du nouveau résidu

Soit  $\{F_N\}$  la force nodale équivalente à  $N_1, N_2$

$$\{F_N\} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ N_2 + 2 \frac{N_1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ N_2 + \sqrt{2} N_1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,803 \sigma_o S \end{Bmatrix}$$

$$\text{d'où le nouveau résidu : } \{R\} = \{\Delta F\} - \{F_N\} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0967 \sigma_o S \end{Bmatrix}$$

### 2ème itération :

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,0967 \sigma_o S \end{Bmatrix}, \text{ on conserve } [K_e] \quad \rightarrow \quad \Delta v = -0,0566 \frac{\sigma_o h}{E}$$

$$\begin{cases} \Delta N_{1e} = 0,0283 \sigma_o S \\ \Delta N_{2e} = 0,0566 \sigma_o S \end{cases}$$

**test**  $N_{1e} = N_1 + \Delta N_{1e} < \sigma_o S$  (l'élément 1 est non plastifié)  $\rightarrow N_1 = 0,588 \sigma_o S$

$N_2 = \sigma'_{o(\varepsilon_2)} S$  et  $\Delta N_{2e} > 0$  poursuite de plastification de l'élément 2

$$R = 1 \quad \rightarrow \quad \Delta \varepsilon_{2p} = (1 - 0,1) \frac{-\Delta v}{h} = 0,05094 \frac{\sigma_o}{E}$$

$$N_2 = \sigma'_o S + E_T S \Delta \varepsilon_2 \rightarrow N_2 = \sigma_o S (1,0113 + 0,057 \frac{E_T}{E}) = 1,017 \sigma_o S$$

$$\text{et } \sigma'_{o(\varepsilon_2)} = 1,017 \sigma_o$$

$$\text{nouveau résidu : } \{R\} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,9 \sigma_o S \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ -1,849 \sigma_o S \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,051 \sigma_o S \end{Bmatrix}$$

### 3ème itération : les calculs sont identiques, on trouve :

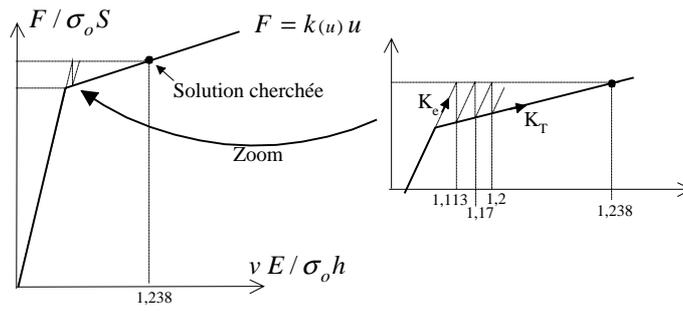
$$\Delta v = -0,03 \frac{\sigma_o h}{E}$$

$$N_1 = 0,603 \sigma_o S$$

$$N_2 = 1,02 \sigma_o S$$

$$\rightarrow \{R\} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,027 \sigma_o S \end{Bmatrix}$$

Les résultats des calculs sont représentés sur la figure ci-dessous.



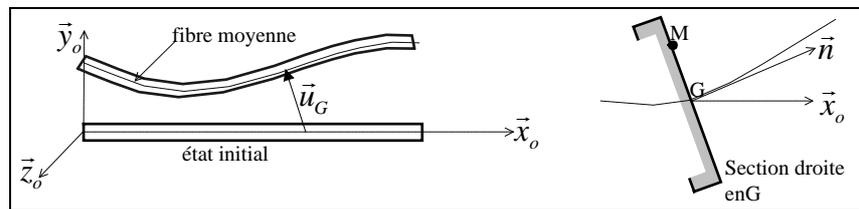
Avec  $[K_e]$  on converge sûrement mais lentement. L'utilisation de la matrice tangente nous conduirait directement à la solution cherchée.

### 3 Plasticité des poutres

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'évolution élasto-plastique des poutres. La loi de comportement généralisée élasto-plastique est obtenue à partir d'un modèle en flexion pure (moment de flexion constant). L'application de cette loi en flexion simple nous amène à introduire la notion de rotule plastique. Nous présentons alors le modèle simplifié basé sur l'utilisation des rotules plastiques. Ce modèle est appliqué à l'étude élasto-plastique des structures portiques.

#### 3.1 Rappels et notations

Considérons une poutre longue rectiligne en flexion dans le plan ( $xoy$ ), dans le cadre des hypothèses de Bernoulli.



Modèle de Bernoulli : flexion plane

Petits déplacements et hypothèses de Bernoulli

$$\vec{\theta} = v_{,x} \vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{u}(M, t) = \begin{Bmatrix} -y v_{,x} \\ v \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Petites déformations.

$$\epsilon_{xx} = -y v_{,x^2}$$

Milieu isotrope homogène élastique

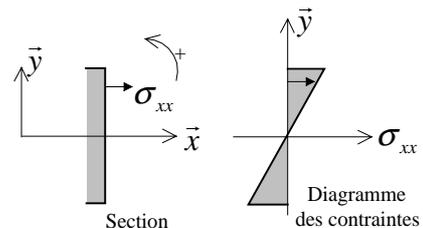
État de contrainte uni axial

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$$

Intégrons les contraintes sur la section, nous obtenons la loi de comportement généralisée élastique des poutres.

$$M_f = EI v_{,x^2}$$

Cette loi relie les deux grandeurs utilisées lors des calculs, le moment de flexion, et la flèche.



En statique l'équation d'équilibre des moments donne :

$$T = -M_{f,x} = -EI v_{,x^3}$$

#### Notations :

Contrainte généralisée :  $\tilde{\sigma} = M_f$

Déformation généralisée :  $\tilde{\epsilon} = v_{,xx}$

$$\rightarrow \quad \boxed{\tilde{\sigma} = EI \tilde{\epsilon}}$$

La loi de comportement du matériau étant définie au niveau local, exprimons les relations entre la contrainte physique et la contrainte généralisée. Ces relations nous seront utiles par la suite pour exprimer les lois de comportement élasto-plastique.

$$\tilde{\sigma} = EI \tilde{\epsilon} = EI \left( -\frac{\epsilon_{xx}}{y} \right) = -\frac{EI}{y} \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad \rightarrow \quad \boxed{\sigma_{xx} = -\frac{y}{I} \tilde{\sigma}}$$

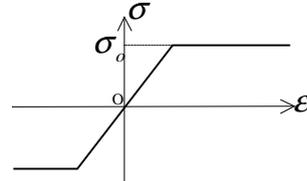
et pour les déformations :

$$\boxed{\varepsilon_{xx} = -y\tilde{\varepsilon}}$$

### 3.2 Modèle élasto-plastique

Ce sont les champs  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{\varepsilon}$  qui sont utilisés lors des calculs. Notre objectif est donc d'exprimer la loi de comportement généralisée élasto-plastique  $\tilde{\sigma} = f(\tilde{\varepsilon})$ , en fonction de la loi de comportement du matériau.

Pour simplifier la présentation nous supposons le matériau élasto-plastique parfait. La courbe d'écroutissage du matériau identifiée par un essai de traction est représentée ci-contre (module d'élasticité  $E$ , limite en traction  $\sigma_o$ ).



- Essai de flexion pure

Considérons un essai de flexion pure réalisé sur **une poutre de section symétrique**. Le moment de flexion est uniforme le long de la poutre et vaut  $M$ .

Pour cet essai représenté ci-contre, l'effort tranchant est nul. La solution obtenue avec les hypothèses de Bernoulli est donc exacte pour les matériaux incompressibles, et quasi-exacte pour les matériaux compressibles.



Compte tenu de la répartition des contraintes dans la section, les fibres les plus éloignées de la fibre moyenne plastifient en premier. Compte tenu de l'hypothèse de symétrie, ces fibres sont situées à une distance  $\pm h$  de la fibre moyenne.

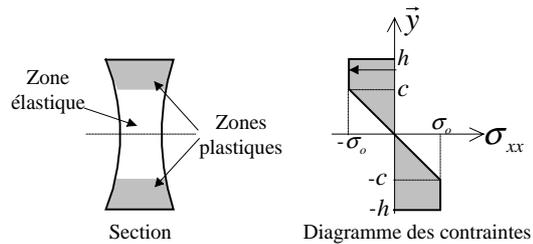
Il y a début de plastification lorsque :  $(\sigma_{xx})_{y=\pm h} = \sigma_o$

$$\rightarrow \boxed{\tilde{\sigma}_o = \frac{I}{h} \sigma_o} \quad \tilde{\sigma}_o \text{ est le moment de début de plastification.}$$

La déformation généralisée correspondante (courbure) est :  $\tilde{\varepsilon}_o = \frac{1}{Eh} \sigma_o$

#### Évolution élasto-plastique :

Pour  $M > \tilde{\sigma}_o$ , il y a évolution élasto-plastique du matériau à partir des fibres extérieures. Le moment étant uniforme sur la longueur, dans toute section de la poutre, nous obtenons l'état de contrainte représenté ci-contre.



Le matériau étant supposé élasto-plastique parfait au delà de la cote "c" la contrainte dans la zone plastique est uniforme  $\sigma_{xx} = \pm \sigma_o$ .

Conservons l'hypothèse de Bernoulli pour exprimer "c" en fonction des variables généralisées et  $\sigma_o$ .

$$\text{En } c \quad \begin{cases} \sigma_{xx} = -\sigma_o \\ \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -E c \tilde{\varepsilon} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{c = \frac{\sigma_o}{E\tilde{\varepsilon}}}$$

Remarques :

- La relation précédente reste vraie pour un matériau écroutissable.

- Conserver l'hypothèse de Bernoulli suppose des déformations plastiques suffisamment sympathiques pour conserver la planéité des sections droites.

Comme en élasticité pour obtenir la loi de comportement généralisée, nous allons intégrer sur une section le champ des contraintes pour obtenir une relation entre le moment de flexion et la courbure.

$$\tilde{\sigma} = M_f = \int_{-h}^h -y \sigma_{xx} dS = 2 \int_0^h -y \sigma_{xx} dS$$

la section est supposée symétrique

$$\tilde{\sigma} = 2 \int_0^c -y \left(-\frac{y}{c} \sigma_o\right) dS + 2 \int_c^h -y (-\sigma_o) dS$$

Notons :

$$I(c) = 2 \int_0^c y^2 dS \quad \text{Moment quadratique de la zone élastique}$$

$$Z(c) = 2 \int_0^c y dS \quad \text{Moment statique de la zone élastique}$$

$$Z(h) = 2 \int_0^h y dS \quad \text{Moment statique de la section}$$

Nous obtenons la loi de comportement généralisée élasto-plastique  $\tilde{\sigma} = f(\tilde{\epsilon})$ , en fonction du module d'élasticité  $E$ , et de limite en traction  $\sigma_o$ .

$$\tilde{\sigma} = \sigma_o \left( \frac{I(c)}{c} + Z(h) - Z(c) \right) \quad \text{avec} \quad c = \frac{\sigma_o}{E \tilde{\epsilon}}$$

Montrons que  $\tilde{\sigma}$  est une fonction croissante de  $\tilde{\epsilon}$ .

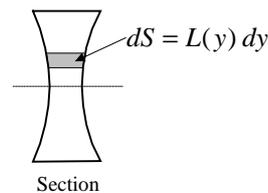
Il suffit de montrer que  $c$  est une fonction décroissante de  $c$ .

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{dc} = \sigma_o \left( -\frac{I(c)}{c^2} + \frac{1}{c} \frac{dI(c)}{dc} - \frac{dZ(c)}{dc} \right)$$

or  $I(c) = 2 \int_0^c y^2 dS = 2 \int_0^c y^2 L(y) dy$

et  $Z(c) = 2 \int_0^c y dS = 2 \int_0^c y L(y) dy$

D'où  $\frac{1}{c} \frac{dI(c)}{dc} = \frac{dZ(c)}{dc} = 2c L(c) \rightarrow \frac{d\tilde{\sigma}}{dc} = -\sigma_o \frac{I(c)}{c^2} < 0$

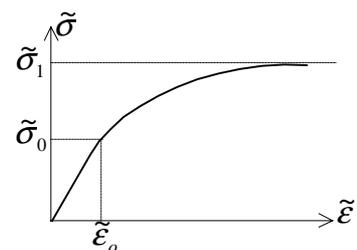


Ce résultat est conforme à l'intuition car une augmentation de charge ne peut qu'augmenter la zone plastique.

La figure ci-contre représente la loi de comportement généralisée  $\tilde{\sigma} = f(\tilde{\epsilon})$ .

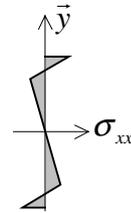
Pour  $c = h$  on retrouve  $\tilde{\sigma}_o$  (moment de début de plastification).

Pour  $c \xrightarrow{\text{tend}} 0$  il y a plastification complète de la section. Le moment correspondant est le moment limite  $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_o Z(h)$ .



*Remarques :*

- Le caractère asymptotique est dû à l'existence d'une mince zone au voisinage de la fibre moyenne qui reste toujours élastique ( $\sigma_{xx} = 0$ ). En flexion pure la section ne peut pas plastifier complètement. Ce résultat purement théorique n'a pas de réalité physique. Rappelons que la loi de comportement généralisée des poutres longues est un modèle basé sur des hypothèses simplificatrices contradictoires du point de vue physique.
- Une décharge élastique conduirait au diagramme des contraintes résiduelles représenté sur la figure ci-contre (superposition du diagramme élasto-plastique et d'un diagramme élastique correspondant à un chargement  $-M$ ). On comprend aisément qu'il n'est pas possible d'utiliser ce modèle pour traiter des problèmes cycliques, sans parler de l'introduction de l'érouissage dans le modèle.



Le rapport  $\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_o}$  est le facteur de forme plastique de la section  $\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_o} = \frac{h Z(h)}{I}$

Ce rapport caractérise la réserve vis à vis de la plastification totale d'une section donnée. Plus ce rapport est grand, plus grande est la phase élasto-plastique, soit une plus grande sécurité par rapport au chargement élastique limite. En contre partie la charge limite élastique sera plus petite, il faut donc trouver le bon compromis.

Plus ce rapport tend vers 1 meilleur est la section du point de vue élastique (toutes les fibres plastifient en même temps). La section correspondante est représentée ci-contre



Le tableau suivant donne les facteurs de forme plastiques classés par ordre décroissant pour différentes sections.

$\frac{\tilde{\sigma}_o}{\sigma_o}$	$\frac{1}{6} b h^2$	$\frac{\pi}{4} R^3$	$\frac{2}{3} b h^2$	$\pi e R^2$	$h(S' + \frac{S}{6})$
$\frac{\tilde{\sigma}_1}{\sigma_o}$	$\frac{1}{3} b h^2$	$\frac{4}{3} R^3$	$b h^2$	$4 e R^2$	$h(S' + \frac{S}{4})$
$\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_o}$	2	$\frac{16}{3\pi} = 1,7$	1,5	$\frac{4}{\pi} = 1,27$	$\frac{12 + 3(\frac{S'}{S})}{12 + 2(\frac{S'}{S})}$

Application : section rectangulaire

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \text{rect} \\ \hline 2h \\ \hline \end{array} \\
 \left\{ \begin{array}{l} I = \frac{2}{3} b h^3 \\ z(h) = b h^2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_o = \frac{2}{3} b h^2 \sigma_o \\ \tilde{\sigma}_1 = b h^2 \sigma_o \end{array} \right. \rightarrow \frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_o} = 1,5
 \end{array}$$

La loi de comportement généralisée élasto-plastique  $\tilde{\sigma} = \sigma_o \left( \frac{I(c)}{c} + Z(h) - Z(c) \right)$

s'écrit :  $\tilde{\sigma} = \sigma_o b \left( h^2 - \frac{c^2}{3} \right)$  avec  $c = \frac{\sigma_o}{E\tilde{\epsilon}}$

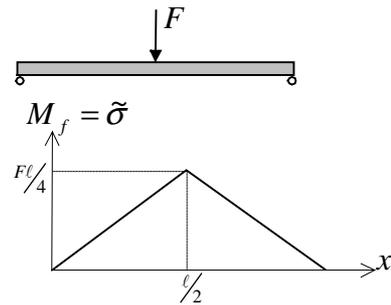
$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_1 \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\tilde{\epsilon}_o}{\tilde{\epsilon}} \right)^2 \right) \quad \text{avec} \quad \tilde{\epsilon}_o = \frac{1}{Eh} \sigma_o \quad \text{courbure de début de plastification}$$

Les calculs se présentent de la même façon pour d'autres sections. Nous sommes donc capables de modéliser, pour un chargement monotone, le comportement élasto-plastique d'une poutre soumise à un moment de flexion uniforme sur la longueur. Ce modèle basé sur les hypothèses de Bernoulli en élasticité, suppose que les déformations plastiques les respectent aussi.

• Essai de flexion simple

En pratique, il est rare d'obtenir un état de contrainte constant par morceaux. Cela signifie que les zones plastiques sont réduites à des sections dont la position évolue au cours du chargement.

Étudions le cas d'une poutre de section rectangulaire sur deux appuis chargée en son centre par une force supposée ponctuelle.



Le diagramme du moment de flexion est représenté sur la figure ci-contre. Les zones plastiques apparaissent dans la section  $x = l/2$  où le moment est maximal. Puis les zones plastiques s'étendent aux sections voisines avec l'augmentation du chargement.

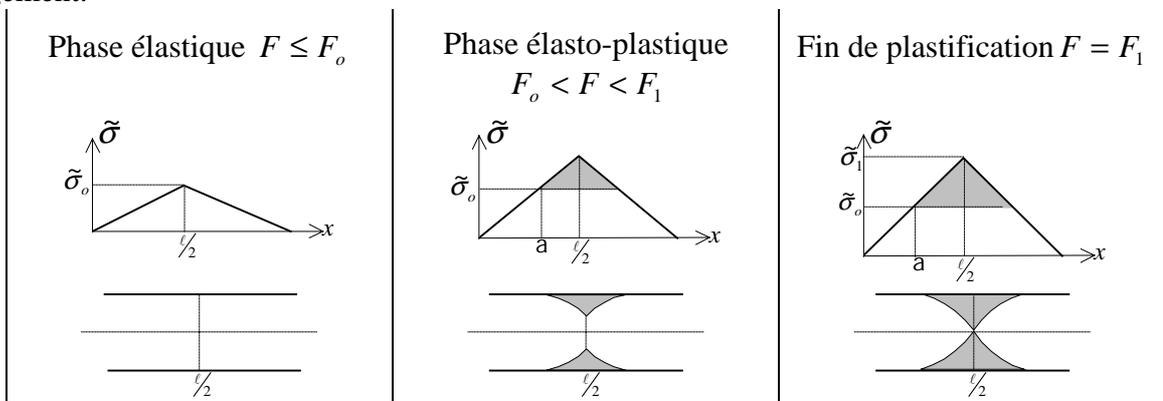
**Modélisation**

Pour étudier l'évolution élasto-plastique nous adoptons la loi de comportement élasto-plastique obtenue en flexion pure. De ce fait nous négligeons les effets de l'effort tranchant dans la zone plastique.

Le début de la phase élasto-plastique correspond à :  $M_f = \tilde{\sigma}_o$   $F_o = \frac{4\tilde{\sigma}_o}{l}$

La section  $x = l/2$  est complètement plastifiée pour :  $M_f = \tilde{\sigma}_1$   $F_1 = \frac{4\tilde{\sigma}_1}{l}$

Le tableau ci-dessous représente l'évolution de la zone plastique pour les différentes phases du chargement.



**Étude de la zone plastique**

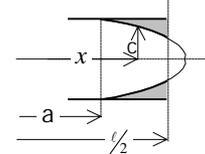
L'abscisse de la première section plastifiée est simple à exprimer :  $a = 2 \frac{\tilde{\sigma}_o}{F}$

La forme de cette zone est définie par la cote "c" avec  $c = \frac{\sigma_o}{E\tilde{\epsilon}}$

$$\text{Or pour } a \leq x \leq \frac{\ell}{2} \quad \tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{\epsilon}_o}{\sqrt{3\left(1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_1}\right)}} \quad \rightarrow \quad c = \frac{\sigma_o}{E\tilde{\epsilon}_o} \sqrt{3\left(1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_1}\right)}$$

$$\rightarrow c = h \sqrt{3\left(1 - \frac{Fx}{2\tilde{\sigma}_1}\right)} \quad \text{or } F_1 = \frac{4\tilde{\sigma}_1}{\ell} \quad \rightarrow \quad c = h \sqrt{3\left(1 - \frac{2F}{F_1} \frac{x}{\ell}\right)}$$

La figure ci-contre représente la zone plastique qui est limitée par une parabole d'équation  $c(x)$  définie pour  $F_o < F \leq F_1$ .



### Étude de la déformation

Pour  $x \leq a$  zone élastique

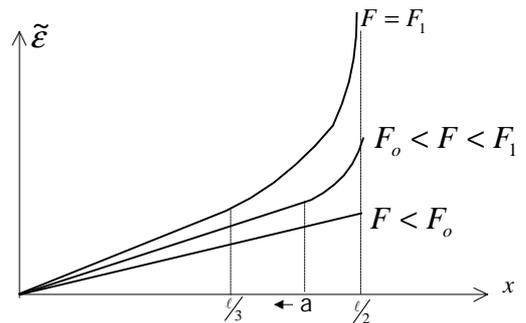
$$\tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{\sigma}}{EI} = \frac{F}{2EI} x = \frac{\tilde{\sigma}_o}{EI} \frac{x}{a} = \tilde{\epsilon}_o \frac{x}{a}$$

Pour  $a \leq x \leq \frac{\ell}{2}$  zone élasto-plastique

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{\epsilon}_o}{\sqrt{3\left(1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_1}\right)}}$$

La figure ci-contre représente l'évolution de la courbure en fonction de x pour les 3 phases de chargement présentées précédemment.

Pour  $F = F_1$  la courbure a un comportement asymptotique et tend vers l'infini. Tout se passe comme si la poutre était formée de deux tronçons articulés.



Pour obtenir l'expression de la flèche il faut intégrer les relations qui définissent la courbure en fonction de x.

En phase élastique  $F \leq F_o$  :  $\tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{\sigma}}{EI} = \frac{F}{2EI} x$  avec  $\begin{cases} v(0) = 0 & \text{C. limite en } x = 0 \\ v_{,x}(\frac{\ell}{2}) = 0 & \text{C. de symétrie} \end{cases}$

$$\rightarrow v(x) = \frac{F\ell^3}{4EI} \left( \frac{1}{3} \left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \frac{1}{4} \frac{x}{\ell} \right)$$

En phase élasto-plastique  $F_o < F < F_1$  : avec  $a = 2 \frac{\tilde{\sigma}_o}{F}$

Pour  $x \leq a$  zone élastique  $\tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{\sigma}}{EI} = \frac{F}{2EI} x = \frac{\tilde{\sigma}_o}{EI} \frac{x}{a} = \tilde{\epsilon}_o \frac{x}{a}$

Pour  $a \leq x \leq \frac{\ell}{2}$  zone élasto-plastique  $\tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{\epsilon}_o}{\sqrt{3\left(1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_1}\right)}}$

Les 4 constantes sont calculées en écrivant la condition d'appui en  $x = 0$ , la condition de symétrie en  $x = \ell/2$ , et la continuité de la flèche et de la rotation en  $x = a$ .

Tous calculs faits, nous obtenons :

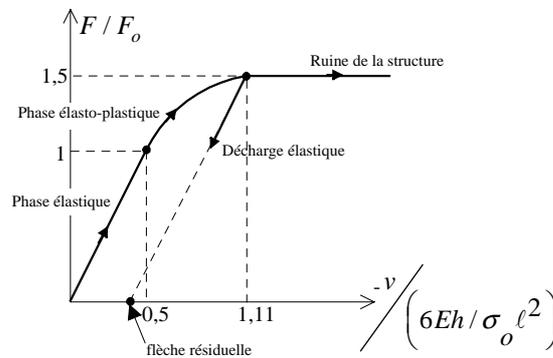
$$\text{Pour } x \leq a \quad v(x) = \frac{\tilde{\varepsilon}_o}{6a} x^3 + \tilde{\varepsilon}_o a \left( \sqrt{3 - \frac{\ell}{a}} - \frac{3}{2} \right) x$$

$$\text{Pour } a \leq x \leq \frac{\ell}{2} \quad v(x) = \tilde{\varepsilon}_o \frac{a^2}{3} \left( 3 - 2 \frac{x}{a} \right)^{3/2} + \tilde{\varepsilon}_o a \sqrt{3 - \frac{\ell}{a}} x - \frac{5}{3} \tilde{\varepsilon}_o a^2$$

Traçons l'évolution de la flèche en milieu de poutre

$$\text{Pour } F = F_o \quad v\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{F_o \ell^3}{48EI} = -\frac{4\tilde{\sigma}_o}{48EI} \ell^2 = -\frac{\sigma_o}{12Eh} \ell^2$$

$$\text{Pour } F = F_1 \quad a = 2 \frac{\tilde{\sigma}_o}{F_1} = \frac{\ell \tilde{\sigma}_o}{2 \tilde{\sigma}_1} = \frac{\ell}{3} \rightarrow v\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{5}{3} \tilde{\varepsilon}_o a^2 = -\frac{5 \sigma_o}{27Eh} \ell^2$$



La flèche résiduelle après décharge élastique est :

$$v_r\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{5 \sigma_o}{27Eh} \ell^2 - \frac{F_1 \ell^3}{48EI} = \frac{\sigma_o \ell^2}{Eh} \left( \frac{5}{27} - \frac{1}{8} \right)$$

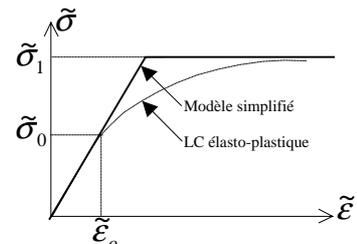
L'essai de flexion simple que nous venons d'étudier a mis en évidence le comportement asymptotique de la courbure. Les deux parties de la poutre de part et d'autre de la section  $\ell/2$  peuvent tourner, le moment restant constant (matériau parfaitement plastique). Nous modélisons cette propriété par une rotule plastique (rotule avec frottement sec).

### 3.3 Modèle simplifié – rotule plastique

Pour le calcul des portiques, le modèle de comportement élasto-plastique que nous venons de présenter est trop complexe pour être utilisé. Le calcul pratique s'appuie sur un modèle simplifié basé sur une approximation linéaire par morceaux de la loi de comportement généralisée.

La figure ci-contre représente la loi de comportement généralisée approchée pour un matériau élasto-plastique parfait.

Ce modèle revient à négliger l'évolution élasto-plastique dans les sections en cours de plastification. C'est le modèle utilisé pour les calculs de charges limites.



D'après ce diagramme, il y a rotule plastique dans une section lorsque celle-ci est complètement plastifiée. La rotule plastique introduit une discontinuité du taux de rotation de la

fibre moyenne. Du point de vue rhéologique une rotule plastique serait modélisée par une rotule avec frottement sec.

- Si  $|\tilde{\sigma}| < \tilde{\sigma}_1 \rightarrow$  la rotule est bloquée  

 La section à un comportement élastique  $\tilde{\sigma} = EI \tilde{\varepsilon}$
- Si  $|\tilde{\sigma}| = \tilde{\sigma}_1 \rightarrow$  la rotation est libre  
 Le moment reste constant  $\tilde{\sigma} = \pm \tilde{\sigma}_1$

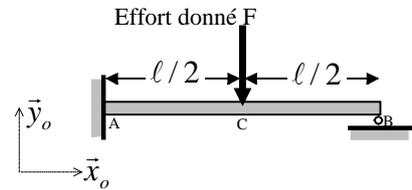
Remarques :

- En toute rigueur la notion de « rotule plastique » ne peut être introduite que si, la flèche avant plastification complète d'une section reste petite. Dans le cas général, rien ne permet de prétendre que la flèche reste finie. Si l'hypothèse des petites déformations n'est plus vérifiée, le modèle présenté n'a plus de sens.
- Le modèle « rotule plastique » ne dit rien sur la répartition des contraintes  $\sigma_{xx}$ .
- Ce modèle ne permet que le calcul des charges limites (charge de ruine d'une structure).

• Application

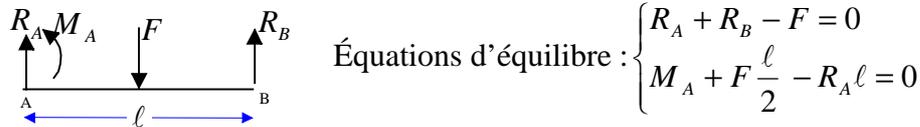
Étudions l'évolution de la poutre schématisée par la figure ci contre lorsque le chargement augmente. Les caractéristiques mécaniques de la poutre sont :

- Sa rigidité en flexion :  $EI$
- Son moment limite de plastification :  $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_o Z(h)$



Phase 1 :

Le système est hyperstatique d'ordre 1 (3 inconnues / 2 équations d'équilibre)



Résolution : Prenons  $R_B$  comme inconnue hyperstatique.

L'énergie de déformation<sup>4</sup> : 
$$2W = \frac{1}{EI} \int_0^\ell M_f^2 dx$$

Avec : 
$$\begin{cases} x \in [0, \ell/2] & M_f = (\ell - x)R_B - (\ell/2 - x)F \\ x \in [\ell/2, \ell] & M_f = (\ell - x)R_B \end{cases}$$

Appliquons le TH de Ménabréa : 
$$\frac{\partial W}{\partial R_B} = 0 \rightarrow R_B = \frac{5}{16} F \rightarrow \begin{cases} R_A = \frac{11}{16} F \\ M_A = \frac{3}{16} F \ell \end{cases}$$

Domaine de validité : La solution obtenue est valable si  $|M_f| < \tilde{\sigma}_1$

<sup>4</sup> Rappel  $2W = \int_D \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} dV$

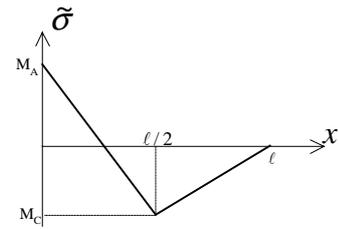
soit pour une poutre 
$$2W = \int_D (-Ey_{v,xx})(-yv_{,xx}) dV = EI \int_0^\ell (v_{,xx})^2 dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell (M_f)^2 dx$$

Le diagramme du moment de flexion est représenté sur la figure ci-contre.

$$M_C = -\frac{5}{32} F \ell$$

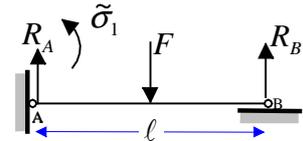
→ C'est la section A qui plastifie en premier, la première rotule plastique apparaît à l'encastrement

pour  $M_A = \tilde{\sigma}_1 \rightarrow \boxed{F_1 = \frac{16 \tilde{\sigma}_1}{3 \ell}}$



**Phase 2 :** pour  $F > F_1$

Du fait de la première rotule plastique, le système étudié est schématisé par la figure ci-contre. Ce système est isostatique.



Résolution : Les équations d'équilibre nous donnent :

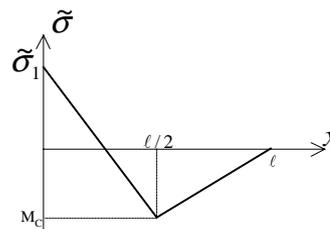
$$\begin{cases} R_A = \frac{\tilde{\sigma}_1}{\ell} + \frac{F}{2} \\ R_B = -\frac{\tilde{\sigma}_1}{\ell} + \frac{F}{2} \end{cases}$$

Domaine de validité : Le diagramme du moment de flexion est représenté sur la figure ci-dessous.

$$M_C = \frac{\tilde{\sigma}_1}{2} - \frac{F \ell}{4}$$

La section C plastifie pour  $M_C = -\tilde{\sigma}_1$

→  $F < F_2$  avec  $\boxed{F_2 = 6 \frac{\tilde{\sigma}_1}{\ell}}$



Pour  $F > F_2$  il y a ruine de la structure,  $F_2$  est la charge limite de cette structure.



## 4 Plasticité 3D

Reprenons les notions introduites dans le deuxième chapitre lorsque nous avons modélisé l'essai de traction – compression. Nous avons alors considéré un état de contrainte uni axial ce qui nous avait permis de travailler avec des fonctions scalaires. En réalité l'espace des contraintes est de dimension 6 (le tenseur des contraintes est supposé symétrique), généralisons les deux notions suivantes :

Critère de plasticité et son évolution (écrouissage)

Lois d'écoulement plastique

Pour terminer ce cours nous présentons le principe d'utilisation de ces notions dans un modèle numérique basé sur la méthode des éléments finis. Ces notions seront reprises et complétées en troisième année.

### 4.1 Critères de plasticité

Nous rappelons que l'expérience met en évidence l'existence d'un domaine d'élasticité à l'intérieur duquel les déformations sont réversibles. La définition donnée au chapitre 2 peut être généralisée.

**Définition :**

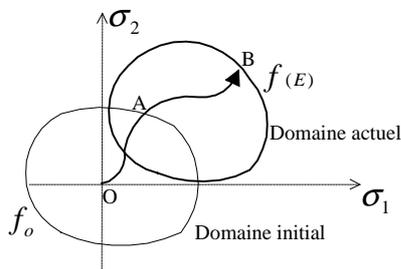
Le Critère de plasticité est la fonction scalaire  $f(\bar{\sigma}, h)$ <sup>5</sup> telle que

- Si  $f(\bar{\sigma}, h) < 0$  l'état actuel  $(\bar{\sigma}, h)$  est intérieur au domaine d'élasticité.
- Si  $f(\bar{\sigma}, h) = 0$  l'état actuel se situe sur la frontière du domaine.

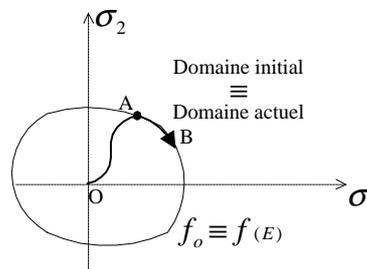
***Un état extérieur au domaine d'élasticité est physiquement impossible à obtenir, le domaine d'élasticité représente donc l'ensemble des états de contraintes admissibles.***

Les paramètres d'écrouissage «  $h$  » caractérisent l'évolution de ce domaine en fonction de l'historique du chargement suivi pour obtenir l'état actuel. Nous avons schématisé l'évolution avec et sans écrouissage du domaine d'élasticité représenté dans le plan  $\mathfrak{R}^2$  des contraintes  $\sigma_1, \sigma_2$ .

*Matériau élasto-plastique avec écrouissage*



*Matériau élasto-plastique parfait*



OA évolution élastique  
AB évolution plastique

Nous notons  $f_o(\sigma)$  le critère définissant le domaine d'élasticité initial.

<sup>5</sup> La fonction  $f(\bar{\sigma}, h)$  est aussi appelée fonction de charge

**Propriété :**  $f(\bar{\sigma}, h)$  doit respecter les symétries matérielles.

Si le matériau est isotrope (dans l'état initial et après déformations élastiques)

→  $f_o(\bar{\sigma})$  doit être invariant dans tout changement de base.

→  $f_o(\bar{\sigma})$  est une fonction symétrique des contraintes principales.

En conséquence pour un matériau isotrope

→  $f_o(\bar{\sigma})$  s'exprime en fonction des seuls invariants de  $\bar{\sigma}$ <sup>6</sup>.

→ La représentation de la fonction  $f_o(\bar{\sigma})$  dans  $\mathfrak{R}^3$  espace des contraintes principales est une surface pour laquelle, les plans (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1) sont des plans de symétrie, et l'axe (1,1,1) est un axe de symétrie ternaire.

*Remarque :* Si le modèle d'écroutissage conserve l'isotropie, nous aurons les mêmes propriétés pour le critère  $f(\bar{\sigma}, h)$ .

- Exemples de critères

Les principaux critères sont :

Matériaux homogènes isotropes : Von Mises (1910), Tresca (1870)

Matériaux orthotropes : Hill (1950)

Sols : Mohr-Coulomb, Drucker-Prager (1950)

Ces critères sont anciens, ils restent cependant largement utilisés car les méthodes d'identification des paramètres caractérisant le comportement élasto-plastique ont fait leurs preuves pour ces critères. Depuis, de nombreux travaux ont permis d'élaborer des critères modélisant mieux le comportement des matériaux. Cependant il reste toujours la difficulté de définir des processus expérimentaux simples et fiables permettant d'identifier les paramètres du modèle que l'on veut utiliser.

---

<sup>6</sup> Une fonction scalaire d'un tenseur est dite invariante si sa valeur ne change pas dans un changement de base quelconque. Le polynôme caractéristique  $P = \det(\bar{\sigma} - \lambda \bar{1})$  est un invariant de  $\bar{\sigma}$ .

Tous ses coefficients sont des invariants du tenseur :

$$I_1 = tr(\bar{\sigma}) \quad I_2 = \frac{1}{2} \left( \left( tr(\bar{\sigma}) \right)^2 - tr(\bar{\sigma}^2) \right) \quad I_3 = \det(\bar{\sigma})$$

En plasticité nous utilisons les invariants définis par les traces des premières puissances du tenseur des contraintes :

$$I_1 = tr(\bar{\sigma}) \quad I'_2 = tr(\bar{\sigma}^2) = \sigma_{ij} \sigma_{ji} \quad I'_3 = tr(\bar{\sigma}^3) = \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}$$

➤ **Critère de VON MISES**

L'expérience montre que pour les métaux, tout état de contraintes « hydrostatique »<sup>7</sup> est admissible ( $\in$  au domaine d'élasticité). C'est à dire que quelque soit la charge, il n'y a pas de déformations plastiques.

En conséquence :

Le domaine d'élasticité est représenté par un ouvert non borné d'axe (1,1,1) dans l'espace des contraintes principales  $\mathfrak{R}^3$ .

➔ L'expression du critère  $f_o(\sigma)$  doit être indépendante de la partie sphérique du tenseur des contraintes.

Pour exprimer le critère nous utilisons donc le tenseur déviateur des contraintes défini par :

$$\overline{\overline{\sigma_d}} = \overline{\overline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\overline{\overline{\sigma}}) \overline{\overline{1}}$$



Remarque : le premier invariant du déviateur  $I_1(\sigma_d) = \text{tr}(\sigma_d) = 0$

Le critère de VON MISES est la forme la plus simple utilisant le premier invariant non nul du déviateur des contraintes :  $I_2(\sigma_d) = \text{tr}(\sigma_d^2) = \overline{\overline{\sigma_d}} : \overline{\overline{\sigma_d}}$

Soit la fonction de charge  $f_o(\sigma) = \overline{\overline{\sigma_d}} : \overline{\overline{\sigma_d}} - k^2$

Plaçons-nous dans le cas d'un essai de traction

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \overline{\overline{\sigma_d}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix}$$

d'où  $f_o(\sigma) = \frac{2}{3}\sigma^2 - k^2$ ,  $k$  apparaît comme  $\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_o$ ,

avec  $\sigma_o$  limite élastique en traction

En pratique la définition du domaine d'élasticité, utilisant le critère de Von Mises, est la suivante :

$$\left\{ \overline{\overline{\sigma}} ; \sqrt{\frac{3}{2} \overline{\overline{\sigma_d}} : \overline{\overline{\sigma_d}}} - \sigma_s \leq 0 \right\}$$

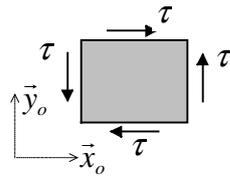
Le seuil  $\sigma_s$  à la dimension d'une contrainte que l'on peut identifier à  $\sigma_o$  dans le cas de l'essai de traction.

**La grandeur  $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} \overline{\overline{\sigma_d}} : \overline{\overline{\sigma_d}}}$  est appelée contrainte équivalente de Von Mises.**

<sup>7</sup> Un état de contraintes hydrostatique est caractérisé par  $\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} P & & \\ & P & \\ & & P \end{bmatrix}$

il correspond au problème d'une sphère soumise à une pression uniforme P.

Appliquons le critère de Von Mises à un essai de cisaillement simple



$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \bar{\sigma}_d = \bar{\sigma}$$

La fonction de charge  $f_o(\bar{\sigma}) = \sqrt{3\tau^2} - \sigma_s$

La limite d'élasticité en cisaillement simple pour le critère de Von Mises est donc définie par :  $\sigma_s / \sqrt{3}$

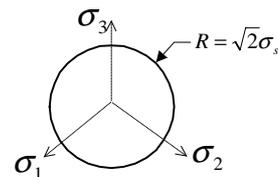
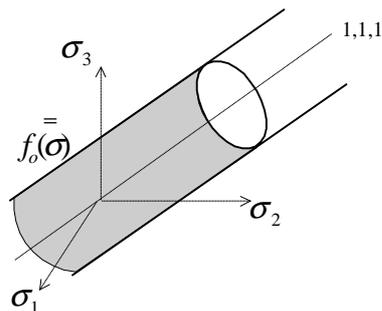
Exprimons la fonction de charge initiale  $f_o(\bar{\sigma})$  dans  $\mathfrak{R}^3$  espace des contraintes principales

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \bar{\sigma}_d = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1}{3} \end{bmatrix}$$

d'où  $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$

et  $f_o(\bar{\sigma}) = \sigma_{VM} - \sigma_s$

La représentation graphique fonction de charge initiale dans  $\mathfrak{R}^3$  espace des contraintes principales est une surface cylindrique non bornée d'axe (1,1,1) de rayon  $\sqrt{2} \sigma_s$



Vue (1,1,1) dans le plan d'équation :

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

### ➤ Critère de TRESCA

Pour ce critère le domaine d'élasticité est défini dans  $\mathfrak{R}^3$  espace des contraintes principales, par :

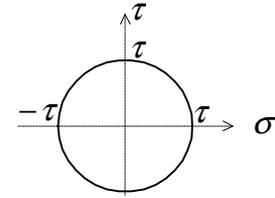
$$\left\{ \bar{\sigma} \quad ; \quad \forall i, j \in [1,3] \quad |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_s \leq 0 \right\}$$

Il est simple de voir que pour l'essai de traction le seuil  $\sigma_s$  est la limite élastique  $\sigma_o$ .

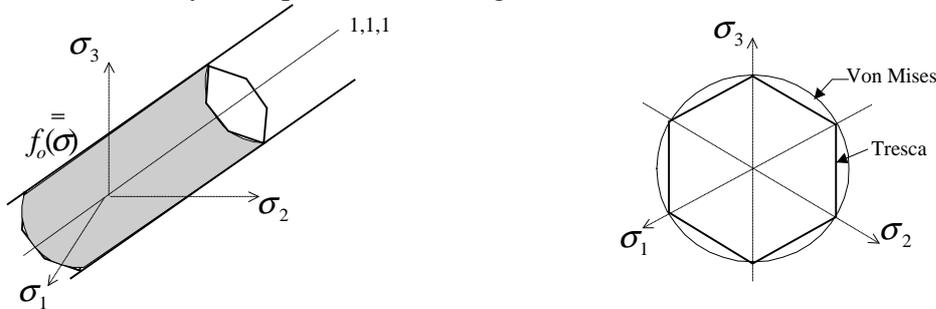
La contrainte équivalente de Tresca est définie par :  $\sigma_T = \max_{ij} |\sigma_i - \sigma_j|$

*Remarque :* l'addition d'un tenseur sphérique quelconque au tenseur des contraintes ne modifie pas la valeur de la contrainte équivalente de Tresca. Tout état de contraintes hydrostatique est donc admissible. Comme pour Von Mises ce critère est indépendant de la partie sphérique du tenseur des contraintes.

Pour l'essai de cisaillement simple, une représentation de Mohr (voir figure ci-contre) permet de voir que l'expression du critère de TRESCA est :  $|2\tau| - \sigma_s \leq 0$ . La limite d'élasticité en cisaillement simple est donc :  $\sigma_s/2$



La représentation graphique fonction de charge initiale dans  $\mathfrak{R}^3$  espace des contraintes principales est une surface cylindrique de base hexagonale non bornée d'axe (1,1,1).



Le critère de Tresca est plus sévère que celui de Von Mises, l'écart maximal entre les deux critères est  $1 - \sqrt{3}/2$  soit un écart de l'ordre de 13%.

Le critère de Tresca est dit critère de cisaillement maximal, en effet si les contraintes principales sont ordonnées  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Le critère ne fait plus apparaître que le cisaillement maximal  $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$

### ➤ *Prise en compte de l'écrouissage*

Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'état actuel du critère est lié à l'état d'écrouissage ( $h$ ) du matériau qui évolue au cours des déformations plastiques.

#### **Écrouissage isotrope :**

Le modèle isotrope consiste à faire dépendre le seuil  $\sigma_s(h)$  de l'état d'écrouissage. Ce qui conduit à une dilatation du domaine d'élasticité définie par :

$$\text{Von Mises : } f(\bar{\sigma}, E) = \sigma_{\text{VM}} - \sigma_s(h) \quad \text{avec } \sigma_{\text{VM}} = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\sigma}_d : \bar{\sigma}_d}$$

$$\text{Tresca : } f(\bar{\sigma}, h) = \sigma_T - \sigma_s(h) \quad \text{avec } \sigma_T = \max_{ij} |\sigma_i - \sigma_j|$$

Pour ces deux critères le seuil  $\sigma_s$  apparaît comme la limite élastique  $\sigma_o$  de l'essai de traction. Pour exprimer  $\sigma_s(h)$  nous pouvons utiliser une relation de la forme de celle établie au chapitre 2 :  $\sigma_s(h) = \sigma_o + H \epsilon_p$ .

Nous rappelons que ce modèle ne respecte pas l'effet de Bauschinger. Il ne doit pas être utilisé pour les problèmes de plasticité cyclique.

#### **Écrouissage cinématique :**

Dans le modèle cinématique l'état d'érouissage sera caractérisé par un tenseur  $\overline{\alpha}(h)$ , qui conduit à une translation du domaine d'élasticité définie par  $f(\overline{\sigma}, h) = f_o(\overline{\sigma} - \overline{\alpha}(h))$ .

Ce modèle respecte l'effet Bauschinger, mais ne conserve pas l'isotropie du matériau au cours des déformations plastiques. De plus il faut pouvoir déterminer expérimentalement les paramètres d'érouissage caractérisant le tenseur  $\overline{\alpha}(h)$ .

➤ **Autres critères**

Les autres critères sont souvent construits à partir des deux précédents. Ainsi le critère de Hill utilisé pour les matériaux anisotropes est une généralisation du critère de Von Mises.

En mécanique des sols les critères les plus utilisés sont de type courbe intrinsèque. Le critère de Coulomb est construit à partir de celui de Tresca, et le critère de Drucker-Prager à partir de celui de Von Mises.

Pour plus de détails sur ces critères vous pouvez commencer par consulter Halphen et Salençon (ref 1).

## 4.2 Loi d'écoulement plastique

Les lois d'écoulement plastique peuvent être présentées à partir du Principe de Hill ou principe du travail plastique maximal.

**Définition :**

Par définition le travail plastique par unité de volume produit par un incrément de contrainte  $d\overline{\sigma}$  est :

$$D_p = d\overline{\sigma} : d\overline{\varepsilon}_p \quad \text{avec } d\overline{\varepsilon}_p \text{ déformation plastique associée à } d\overline{\sigma}$$

**Principe de Hill :**

$$\forall \overline{\sigma}^* \in \text{Domaine d'élasticité} \quad D_p > \overline{\sigma}^* : d\overline{\varepsilon}_p$$

Ce principe exprime que pour toute variation de contrainte, le travail plastique dissipé dans la déformation plastique est à tout instant supérieur au travail plastique de tout état de contrainte admissible. Ce que nous pouvons écrire :

$$D_p = \max_{\overline{\sigma}^* \in f(\overline{\sigma}, E)} \{D_p(\overline{\sigma}^*, \dot{\overline{\varepsilon}}_p)\}$$

Ce principe à deux conséquences immédiates :

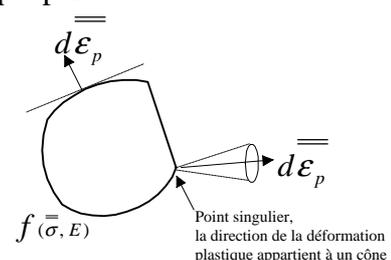
Le domaine d'élasticité est convexe

L'incrément de déformation plastique est normal à la surface de charge.

Pour une surface régulière la normale est définie de façon unique par :

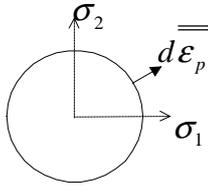
$$\frac{\partial f(\overline{\sigma}, E)}{\partial \overline{\sigma}} = \overline{\text{grad}}_{\overline{\sigma}}(f(\overline{\sigma}, E))$$

S'il existe des points singuliers la normale n'est pas définie de façon unique. Elle appartient au cône défini par les normales des surfaces régulières qui se rejoignent aux points singuliers. Nous avons représenté cette propriété sur la figure ci-contre .



Pour illustrer notre propos traitons deux exemples simples définis dans un espace à 2 dimensions.

**Cas d'un domaine circulaire** défini par :  $\{ (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2 ; \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - r^2 \leq 0 \}$

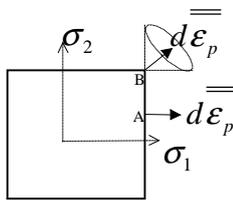


La fonction de charge :  $f(\bar{\sigma}) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - r^2$

$$\rightarrow \overline{\overline{\text{grad}}}_{\sigma}(f) = \begin{cases} \partial f / \partial \sigma_1 = 2\sigma_1 \\ \partial f / \partial \sigma_2 = 2\sigma_2 \end{cases}$$

En tout point de la frontière  $\begin{cases} \sigma_1 = r \cos \theta \\ \sigma_2 = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow d\bar{\epsilon}_p = \lambda \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases}$

**Cas d'un domaine carré** défini par :  $\{ (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2 ; |\sigma_1| - b \leq 0 \text{ et } |\sigma_2| - b \leq 0 \}$



En A la fonction de charge est  $f_1(\bar{\sigma}) = \sigma_1 - b$

En A :  $\overline{\overline{\text{grad}}}_{\sigma}(f) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \rightarrow d\bar{\epsilon}_p = \lambda_1 \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

En B le gradient n'est pas défini (point singulier)

Nous utilisons les 2 fonctions de charge  $f_1(\bar{\sigma}) = \sigma_1 - b$  et  $f_2(\bar{\sigma}) = \sigma_2 - b$  pour définir en B une direction de déformation plastique appartenant au cône défini par les normales aux fonctions de charge en B.

$$\rightarrow d\bar{\epsilon}_p = \lambda_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \lambda_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Le principe de Hill nous permet donc de formuler les règles d'écoulement plastique que sont :

- La condition de charge
- La loi de normalité

**Condition de charge :** A partir d'un état actuel  $(\bar{\sigma}, h)$ , nous cherchons dans quelles conditions il y aura déformation plastique. Cette condition exprime le fait qu'on aura déformation plastique quand l'état de contrainte est situé sur la frontière du domaine d'élasticité et a tendance à en sortir pour un incrément de contrainte donné. Il est simple de faire le parallèle avec la loi d'écoulement plastique présentée dans le cas monodimensionnel de l'essai de traction.

Si  $f(\bar{\sigma}, h) = 0$  ( $\bar{\sigma} \in$  à la frontière du domaine d'élasticité)

Si  $\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : d\bar{\sigma} > 0$  il y a charge ( $d\bar{\sigma}$  est dirigé vers l'extérieur du domaine)

$\rightarrow d\bar{\epsilon} = d\bar{\epsilon}_e + d\bar{\epsilon}_p$  avec :  $\begin{cases} d\bar{\epsilon}_p$  déformation plastique (permanente) \\  $d\bar{\epsilon}_e = k^{-1} d\bar{\sigma}$  déformation élastique

Si non il y a décharge la déformation est purement élastique

$\rightarrow d\bar{\epsilon} = d\bar{\epsilon}_e = k^{-1} d\bar{\sigma}$  avec  $k$  opérateur d'élasticité

Si  $f(\bar{\sigma}, h) < 0$  ( $\bar{\sigma} \in$  à l'intérieur du domaine d'élasticité)

La déformation est purement élastique :  $d\bar{\epsilon} = d\bar{\epsilon}_e = k^{-1} d\bar{\sigma}$

**Loi de normalité :** Cette loi précise la direction de l'écoulement plastique

Pour une frontière régulière :  $f(\bar{\sigma}, h)$

$$d\bar{\varepsilon}_p = \lambda \overline{\text{grad}}_{\sigma}(f) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = 0 & \text{si } f(\bar{\sigma}, h) < 0 \\ \lambda > 0 & \text{si } f(\bar{\sigma}, h) = 0 \end{cases}$$

Pour une frontière singulière :  $\forall i \in [1, n] \quad f_i(\bar{\sigma}, h)$

$$d\bar{\varepsilon}_p = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{\text{grad}}_{\sigma}(f_i) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda_i = 0 & \text{si } f_i(\bar{\sigma}, h) < 0 \\ \lambda_i > 0 & \text{si } f_i(\bar{\sigma}, h) = 0 \end{cases}$$

*Exemples :*

**Von Mises :**  $f(\bar{\sigma}) = \overline{\sigma}_d : \overline{\sigma}_d - k^2$

$$d(\overline{\sigma}_d : \overline{\sigma}_d) = 2 \overline{\sigma}_d : d(\overline{\sigma}_d) \quad \text{avec} \quad d(\overline{\sigma}_d) =: d(\bar{\sigma}) - \frac{1}{3} \text{tr}(d(\bar{\sigma})) \bar{1}$$

$$\text{or} \quad \overline{\sigma}_d : \bar{1} = \text{tr}(\overline{\sigma}_d) = 0$$

$$\text{d'où} \quad \overline{\text{grad}}_{\sigma}(f) = 2 \overline{\sigma}_d \rightarrow d\bar{\varepsilon}_p = \lambda \overline{\sigma}_d \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = 0 & \text{si } f(\bar{\sigma}, E) < 0 \\ \lambda > 0 & \text{si } f(\bar{\sigma}, E) = 0 \end{cases}$$

**Tresca :**  $f(\bar{\sigma}, E) = \sigma_T - \sigma_s(E) \quad \text{avec} \quad \sigma_T = \max_{ij} |\sigma_i - \sigma_j|$

Il y a 6 fonctions de charge correspondant chacune d'elle à une face de l'hexagone.

$$f_1 = \sigma_1 - \sigma_2 \quad f_2 = \sigma_2 - \sigma_1 \quad f_3 = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$f_4 = \sigma_3 - \sigma_1 \quad f_5 = \sigma_2 - \sigma_3 \quad f_6 = \sigma_3 - \sigma_2$$

$$\text{d'où} \quad d\bar{\varepsilon}_p = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \bar{\sigma}}$$

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_{p1} \\ d\varepsilon_{p2} \\ d\varepsilon_{p3} \end{Bmatrix} = \lambda_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \lambda_2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \lambda_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + \lambda_4 \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \lambda_5 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \lambda_6 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

En pratique un point sur la surface de charge ne peut se situer qu'à l'intersection de deux faces de l'hexagone ce qui entraîne qu'au plus 2 coefficients  $\lambda_i$  sont non nul.

Sur ces deux exemples de critère, il est simple de vérifier que les déformations plastiques définies à partir de la loi de normalité, sont effectivement incompressibles soit :  $\text{tr}(d\bar{\varepsilon}_p) = 0$ .

Les règles d'écoulement plastique énoncées nous permettent donc de dire quand il y a écoulement plastique et définissent la direction de cet écoulement. Si le matériau est parfaitement plastique il y a écoulement libre, l'amplitude est indéterminé. Si il y a écrouissage, l'amplitude de la déformation plastique s'exprimera en fonction de l'accroissement de contrainte subi par le matériau.

### 4.3 Principe de la résolution numérique

Un problème d'élastoplasticité est un problème d'évolution quasi-statique à partir d'un état initial donné.

Le trajet de chargement étant défini, le problème consiste à trouver  $\bar{u}, \bar{\varepsilon}, \bar{\sigma}$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Équation locale} \\ \text{Conditions aux limites} \\ \text{Relations déplacements - déformations:} \\ \text{Lois de comportement} \end{array} \right. \begin{array}{l} \forall M \in D \\ \forall M \in \Gamma_u \\ \forall M \in \Gamma_\sigma \end{array} \begin{array}{l} \text{div} \bar{\sigma} + \bar{f} = \bar{0} \\ \bar{u} = \bar{u}_d \\ \bar{\sigma} \bar{n} = \bar{T}_d \\ \bar{\varepsilon} = \text{grad}_s \bar{u} \\ \bar{\sigma} = \text{fct}(\bar{\varepsilon}) \end{array}$$

Précisons la forme de la loi de comportement :

$$\text{En élasticité : } \bar{\sigma} = k \bar{\varepsilon}_e = k \bar{\varepsilon}$$

En élasto-plasticité :

$$\bar{\sigma} \in \text{au domaine d'élasticité : } f(\bar{\sigma}, E) \leq 0$$

$$d\bar{\varepsilon} = d\bar{\varepsilon}_e + d\bar{\varepsilon}_p$$

$$\text{avec } \begin{cases} d\bar{\varepsilon}_e = k^{-1} d\bar{\sigma} \\ d\bar{\varepsilon}_p = \lambda \overline{\text{grad}}_\sigma(f) \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \lambda = 0 & \text{si } f(\bar{\sigma}, E) < 0 \\ \lambda > 0 & \text{si } f(\bar{\sigma}, E) = 0 \end{cases}$$

La difficulté essentielle en plasticité vient de la forme différente que peut prendre la loi de comportement au cours du processus d'évolution. L'idée est de se ramener à un problème élastique en transformant l'écriture de la loi de comportement en une relation globale de la forme :

$$d\bar{\sigma} = k_{ep}(\bar{\sigma}, E) d\bar{\varepsilon}$$

Cette écriture est souvent appelée intégration de la loi de comportement. Dès lors nous pouvons utiliser les méthodes classiques mises en œuvre dans un code éléments finis pour résoudre le problème pour un incrément de charge donné.

- Intégration de la loi de comportement

Traisons le cas du critère de Von Mises. Pour ce critère la loi d'écoulement plastique est de la forme :

$$d\bar{\varepsilon} = d\bar{\varepsilon}_e + d\bar{\varepsilon}_p \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d\bar{\varepsilon}_e = k^{-1} d\bar{\sigma} \\ d\bar{\varepsilon}_p = \lambda \bar{\sigma}_d \end{cases}$$

$$\text{Calculons : } \bar{\sigma}_d : d\bar{\varepsilon} = k^{-1} \bar{\sigma}_d : d\bar{\sigma} + \lambda \bar{\sigma}_d : \bar{\sigma}_d$$

$$\text{Or } \bar{\sigma}_d : d\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_d : d\bar{\sigma}_d$$

$$\text{en effet } d\bar{\sigma}_d =: d\bar{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(d\bar{\sigma}) \bar{1} \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_d : \bar{1} = 0$$

Plaçons-nous sur la frontière du domaine d'élasticité  $\rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \overline{\overline{\sigma}}_d : \overline{\overline{\sigma}}_d - \sigma_s^2 = 0 \\ \overline{\overline{\sigma}}_d : d\overline{\overline{\sigma}}_d = 0 \end{cases}$

Nous en déduisons la valeur de  $\lambda = \frac{3}{2\sigma_s^2} \overline{\overline{\sigma}}_d : d\overline{\overline{\varepsilon}}$

Pour le critère de Von Mises la loi d'écoulement plastique à la frontière du domaine d'élasticité est de la forme :

$$d\overline{\overline{\varepsilon}} = k^{-1} d\overline{\overline{\sigma}} + \left( \frac{3}{2\sigma_s^2} \overline{\overline{\sigma}}_d : d\overline{\overline{\varepsilon}} \right) \overline{\overline{\sigma}}_d$$

Cette équation différentielle permet d'exprimer la loi de comportement élasto-plastique intégrée :  $d\overline{\overline{\sigma}} = k_{ep}(\overline{\overline{\sigma}}, h) d\overline{\overline{\varepsilon}}$ .

Le calcul doit être fait dans un état actuel situé sur la frontière du domaine d'élasticité. Le principe du calcul numérique est présenté ci-dessous.

- Application aux éléments finis

Les méthodes de résolution numérique sont des méthodes itératives basées sur la minimisation d'un résidu d'équilibre. Les algorithmes de calcul ont été présentés au paragraphe 2.4. Or pour calculer le résidu d'équilibre il est nécessaire d'effectuer une projection sur la frontière du domaine d'élasticité le principe est le suivant :

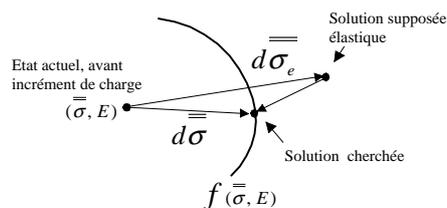
Connaissant l'incrément de déplacement  $\{dU\}$  solution de  $[K_{ep}]\{dU\} = \{dF\}$

Pour chaque élément, on peut évaluer (aux points de Gauss) :  $\{d\sigma_e\} = [D][B]\{dU\}$

La solution supposée élastique est donc  $\{\sigma_e\} = \{\sigma\} + \{d\sigma_e\}$

Si  $f(\overline{\overline{\sigma}}, E) < 0 \rightarrow$  la solution élastique convient.

Si  $f(\overline{\overline{\sigma}}, E) > 0 \rightarrow$  l'état de contrainte n'est pas admissible.



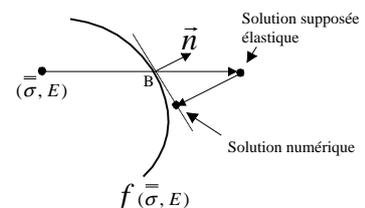
Il faut effectuer une projection de la solution sur la frontière du domaine d'élasticité.

Le schéma idéal de projection est visualisé sur la figure ci-contre.

Numériquement on sait évaluer :

- La position du point B
- La normale en B au critère

D'où le schéma numérique de projection sur le critère.



L'état de contrainte obtenu à la suite de ces calculs n'équilibre plus l'incrément de charge appliqué. D'où le calcul du résidu d'équilibre utilisé dans le schéma numérique.

Ces schémas de résolution seront présentés en détail en troisième année.