

Cours d'Algorithmique et de Programmation en Pascal

CÉLINE ROBARDET

<http://liris.cnrs.fr/celine.robardet/>

Institut National des Sciences Appliquées de Lyon - France

2006 - 2007

Introduction

Qu'est-ce qu'un algorithme ?

Définition du petit Robert

Suite finie **séquentielle** de règles que l'on applique à un nombre fini de données, permettant de résoudre des classes de problèmes semblables.

- Calcul : enchaînement des actions nécessaires à l'accomplissement d'une tâche
- Définition non ambiguë de la séquence d'actions
- Un exemple : comment multiplier deux entiers ?
 - la multiplication par glissement
 - la multiplication en Égypte antique
 - la multiplication rapide selon la technique de Karatsuba

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ 2\ 5 \\ 6\ 1\ 3 \end{array}$$

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ 2\ 5 \\ 6\ 1\ 3 \end{array}$$

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

$$\begin{array}{r} 1\ 8\ \quad\quad\quad 3\ 1\ 2\ 5 \\ \quad\quad 6\ 1\ 3 \end{array}$$

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

1	8	3	3	1	2	5
	6	1	3			

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

On note que 9 prend la place du 3 qui servait de multiplicateur.

$$\begin{array}{r} 1\ 8\ 3\ 9\ 1\ 2\ 5 \\ 6\ 1\ 3 \end{array}$$

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

$$\begin{array}{r} 1\ 8\ 3\ 9\ 1\ 2\ 5 \\ 6\ 1\ 3 \end{array}$$

On décale d'un rang

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

$$\begin{array}{r} 1\ 8\ 3\ 9\ 1\ 2\ 5 \\ 6\ 1\ 3 \end{array}$$

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

$$\begin{array}{r} 1\ 8\ 9\ 9\ 1\ 2\ 5 \\ 6\ 1\ 3 \end{array}$$

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

$$\begin{array}{r} 1\ 9\ 0\ 0\ \mathbf{1}\ 2\ 5 \\ 6\ 1\ \mathbf{3} \end{array}$$

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

On note que 3 prend la place du 1 qui servait de multiplicateur.

$$\begin{array}{r} 1\ 9\ 0\ 0\ 3\ 2\ 5 \\ 6\ 1\ 3 \end{array}$$

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

$$\begin{array}{r} 1\ 9\ 0\ 0\ 3\ 2\ 5 \\ 6\ 1\ 3 \end{array}$$

On décale d'un rang

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

$$\begin{array}{r} 1\ 9\ 0\ 0\ 3\ 2\ 5 \\ 6\ 1\ 3 \end{array}$$

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

1	9	1	2	3	2	5
			6	1	3	

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

$$\begin{array}{r} 1\ 9\ 1\ 2\ 5\ 2\ 5 \\ 6\ 1\ 3 \end{array}$$

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

On note que 6 prend la place du 2 qui servait de multiplicateur.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 9 & 1 & 2 & 5 & 6 & 5 \\ & & & 6 & 1 & 3 & \end{array}$$

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

$$\begin{array}{r} 1\ 9\ 1\ 2\ 5\ 6\ 5 \\ 6\ 1\ 3 \end{array}$$

On décale d'un rang

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

1	9	1	2	5	6	5
				6	1	3

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

1	9	1	5	5	6	5
				6	1	3

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

1	9	1	5	6	1	5
				6	1	3

Multiplication par glissement

Algorithme indien, décrit par Al Kwarizmi en 830.

$$3\ 125 \times 613$$

On note que 15 prend la place du 5 qui servait de multiplicateur.

1 9 1 5 6 2 5

Algorithme

Multiplication par glissement de a par b

Début

Positionner a et b de telle sorte que l'unité de b corresponde à la position du chiffre le plus à gauche de a

Pour i parcourant les chiffres de a de gauche à droite **faire**

Pour j parcourant les chiffres de b de gauche à droite **faire**

Si j ne correspond pas au dernier chiffre de b **alors**

Multiplier le j^{ieme} chiffre de a avec le j^{ieme} chiffre de b
et l'additionner avec le j^{ieme} chiffre de a

Sinon

Multiplier le j^{ieme} chiffre de a avec le j^{ieme} chiffre de b
et le mettre en j^{ieme} position de a

(si ce nombre est supérieur à 9, additionner les dizaines)

Fin Si

Fin pour

Fin pour

Multiplication en Égypte antique

(env. -1650)

Ce type de multiplication n'utilise que des additions et des multiplications ou des divisions par 2. Elle ne nécessite pas de connaître de table de multiplication autre que celle par 2.

Multiplication en Égypte antique

$$m \times n$$

On divise par deux (division euclidienne) m et on double n .

$$m = 2p \Rightarrow (2p) \times n = p \times 2n$$

$$m = 2p + 1 \Rightarrow (2p + 1) \times n = p \times 2n + n$$

Multiplication en Égypte antique

impair	m	n
1	43	54
1	21	108
0	10	216
1	5	432
0	2	864
1	1	1728
Σ		2322

Algorithme

Multiplication Égyptienne de a par b

Début

Tant que $a > 1$ **faire**

Si a est impair **alors**

 On accumule a dans une somme qui sera le résultat

Fin Si

a devient $\lfloor a/2 \rfloor$

b devient $b \times 2$

Fin tant que

Fin

Multiplication rapide selon la technique de Karatsuba

En 1962, Karatsuba, remarquant que le calcul de

$$(a \times 10^k + b)(c \times 10^k + d)$$

qui, sous forme développée

$$ac \times 10^{2k} + (ad + bc) \times 10^k + bd$$

semble nécessiter les quatre produits ac , ad , bc et bd , peut en fait être effectué seulement avec les trois produits ac , bd et $(a - b)(c - d)$ en regroupant les calculs sous la forme suivante :

$$(a \times 10^k + b)(c \times 10^k + d) = ac \times 10^{2k} + (ac + bd - (a - b)(c - d)) \times 10^k + bd$$

Multiplication rapide selon la technique de Karatsuba

Ainsi, pour calculer 26×34 , on calcule

$$(2 \cdot 10 + 6) \times (3 \cdot 10 + 4)$$

$$ac = 2 \times 3 = 6$$

$$bd = 6 \times 4 = 24$$

$$(a - b)(c - d) = (2 - 6) \times (3 - 4) = 4$$

$$26 \times 34 = (6 \cdot 10^2 + (6 + 24 - 4)) \cdot 10 + 24 = 884$$

La multiplication par 10 correspond à un décalage de chiffre. Pour de grands nombres, la méthode peut être itérée pour les calculs de ac , bd et $(a - b)(c - d)$ en scindant à nouveau a , b , c et d en deux et ainsi de suite.

Algorithme

Multiplication de Karatsuba de m par n

Début

Soit i le plus grand nombre de chiffres de m et n

Soit b les $\lceil i/2 \rceil$ derniers chiffres de m , et soit a les autres

Soit d les $\lceil i/2 \rceil$ derniers chiffres de n , et soit c les autres

Si a ou c a plus de 1 chiffre **faire**

α devient **Multiplication de Karatsuba** de a par c

Sinon α devient $a \times c$

Si b ou d a plus de 1 chiffre **faire**

β devient **Multiplication de Karatsuba** de b par d

Sinon β devient $b \times d$

Si $a - b$ ou $c - d$ a plus de 1 chiffre **faire**

γ devient **Multiplication de Karatsuba** de $(a - b)$ par $(c - d)$

Sinon γ devient $(a - b) \times (c - d)$

Retourner $\alpha.10^{\lceil i/2 \rceil \times 2} + (\alpha + \beta - \gamma).10^{\lceil i/2 \rceil} + \beta$

Fin

Programme

Programme

Traduction d'un algorithme dans un langage de programmation particulier.

Langage de programmation

Ensemble de mots (vocabulaire) et syntaxe (grammaire) stricte (non ambiguë) permettant d'écrire un programme exécutable par une machine.

- Variables permettant de stocker des valeurs
- Opérations sur ces variables
- Structures de contrôle : séquencement, branchement, itération

Démarche de construction d'un programme

Algorithmique

- Définition précise de la tâche à réaliser
- Abstraction du problème
 - Identification du modèle de données utile pour décrire le problème
 - Résolution du problème par une approche analytique
- Validation

Programmation

- Implémentation dans un langage particulier
- Validation

Introduction

- Qu'est-ce qu'une variable ?
- Les types simples
- Programme et compilation
- Les instructions
- Types construits et structurés
- Procédure et fonctions
- Types abstraits de données

- Algorithme
- Multiplication par glissement
- Multiplication en Égypte antique
- Multiplication rapide selon la technique de Karatsuba
- Programme**

Notion de variable et de type

Codage et décodage

Quel type de tâches peut être réalisé ?

- Transformation d'un ensemble de valeurs numériques en un autre



Codage

- Transformation des données en valeurs numériques

Décodage

- Interprétation des valeurs numériques de sortie dans un format compréhensible

Notion de variable

Variable mathématique

Une variable est un symbole, parfois indexé, représentant une quantité inconnue appartenant à un ensemble donné.

- Généralisation : les variables permettent de traduire qu'une propriété est générale, i.e. vérifiée par tous les objets d'un domaine.
- Existence : les variables permettent d'affirmer l'existence d'objets sans les expliciter.
- Résolution : les variables permettent d'exprimer des problèmes sous forme d'équations, et dans lesquels on se propose de trouver une ou plusieurs inconnues.

La quantité représentée par une variable ne varie pas.

Notion de variable - suite

Variable en informatique

Une variable associe un nom à une valeur appartenant à un ensemble donné.

- Une variable correspond **toujours** à une valeur
- La valeur d'une variable peut être modifiée par l'opération d'**affectation**
- La valeur de la variable appartient à un domaine particulier défini par le **type** de la variable.

Les variables permettent de réaliser le calcul car elles permettent de stocker les données, les calculs intermédiaires et les résultats.

Notion de type

Type

Un type (de variable) détermine l'**ensemble de valeurs** possibles de la variable déclarées pour désigner la nature du contenu de la variable et les opérations pouvant être effectuées sur celle-ci.

Lorsqu'une variable est déclarée (association d'un identifiant et d'un type) la place mémoire correspondant au type est associée à l'identifiant de la variable.