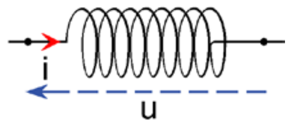
Electricité n° 2 : BOBINE ET CIRCUIT RL

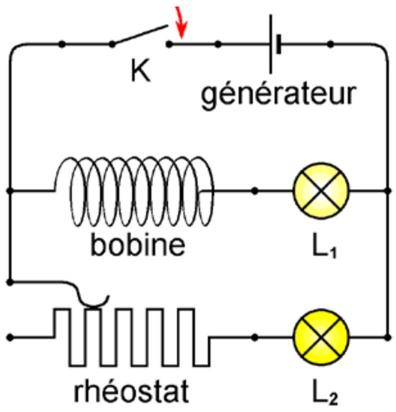
I) Influence d'une bobine dans un circuit :

1) Généralités :

Une bobine est un dipôle constitué par un enroulement cylindrique d'un fil conducteur. Chaque boucle de conducteur est appelée spire.

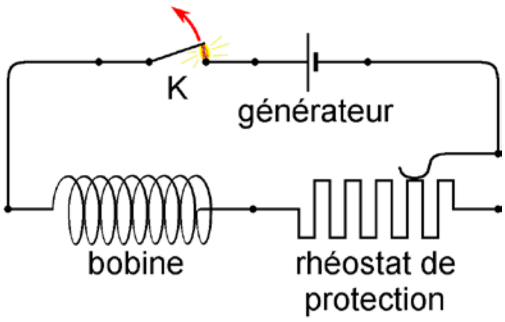


2) Retard à l'établissement du courant :



Deux branches en parallèle comportent, l'une, une lampe témoin (L_1) en série avec une bobine, l'autre une lampe témoin (L_2) identique à la première, en série avec un rhéostat. L'ensemble est alimenté par un générateur de tension continu, un interrupteur K, placé dans la branche commune, permet de fermer ou d'ouvrir le circuit.
Le circuit étant fermé, on règle la valeur de la résistance du rhéostat pour que les deux lampes brillent de la même façon.
L'interrupteur étant ouvert, on ferme cet interrupteur :
On constate que la lampe (L_1) s'allume avec un léger retard par rapport à la lampe (L_2).
La présence d'une bobine retarde l'établissement du courant dans la branche où elle est montée.

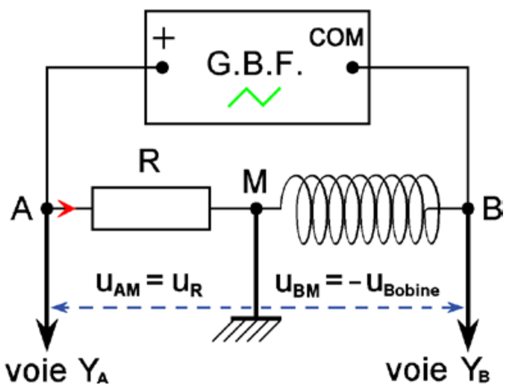
3) Surtension à l'ouverture du circuit :



Un circuit est constitué en série, d'un générateur de tension continue, d'une bobine de 1000 spires, d'un rhéostat de protection et d'un interrupteur K.
Le circuit étant fermé, lorsqu'on ouvre brusquement le contacteur, on voit une petite étincelle apparaître entre les contacts. Si on enlève la bobine du circuit, l'étincelle n'apparaît plus.
La présence d'une bobine à tendance à retarder la coupure du courant dans la branche où elle est montée, il apparaît une surtension aux bornes de la bobine ce qui se traduit par la formation d'une étincelle de rupture au niveau des contacts de l'interrupteur.

II) Caractéristiques d'une bobine :

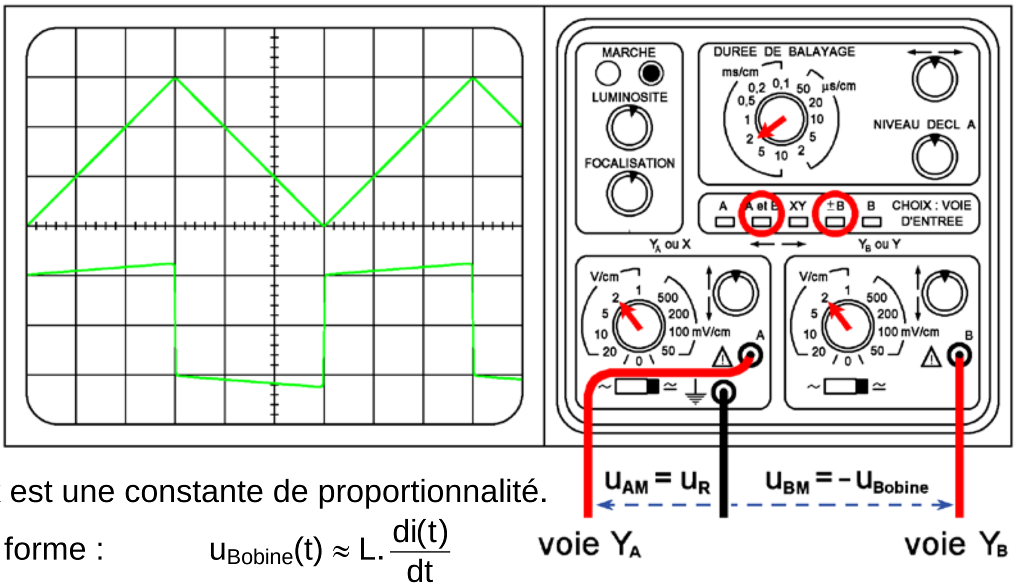
1) Inductance d'une bobine :



On constitue un circuit série, formé d'un générateur de tension en "dents de scie" 'G.B.F.), d'une bobine de 1000 spires, d'un conducteur ohmique de résistance R.
Un oscilloscope bicourbe permet de visualiser la tension aux bornes du résistor et de la bobine.
La voie Y_A visualise $u_{AM}(t)$:
L'évolution de la tension $u_{AM}(t) = R.i(t)$ visualise i(t) :
i(t) est une fonction affine du temps, et sur une période :
- pour $0 < t < T/2$: $i(t) = a.t + b$
- pour $T/2 < t < T$: $i(t) = a.t + b'$

Le bouton d'inversion sur la voie Y_B (+/- B) permet visualiser $– u_{BM}(t) = u_{MB}(t) = u_{Bobine}(t)$.

On constate que la tension $u_{Bobine}(t)$ a, approximativement, la forme de créneaux :
- pour $0 < t < T/2$:
  $u_{Bobine}(t) = u_0$
- pour $T/2 < t < T$:
  $u_{Bobine}(t) = -u_0$



On sait que la dérivée d'une fonction affine est une constante :
$u_0 \approx k.a = k.di(t)/dt$ où k est une constante de proportionnalité.

$u_{Bobine}(t)$ est donc de la forme : $u_{Bobine}(t) \approx L.\dfrac{di(t)}{dt}$

Le coefficient L est une caractéristique de la bobine qu'on appelle inductance.
L'unité légale fondamentale de mesure d'inductance est le henry (H).

L'inductance L d'une bobine dépend des caractéristiques géométriques de la bobine.
Dans les problèmes nous considérerons toujours une bobine "vide".

L'inductance est donnée par : $\boxed{L = \mu_0.N^2.\dfrac{S}{\ell}}$

Où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide (ou de l'air), N est le nombre total de spires de la bobine, S est la surface d'une spire (en m^2) et ℓ est la longueur de la bobine (en m).

2) Tension aux bornes d'une bobine :

On a vu que les créneaux obtenus ne sont pas parfaitement horizontaux : $u_{Bobine}(t)$ est aussi une fonction faiblement affine de i(t), donc $u_{Bobine}(t) \approx r.i(t)$ où r est la résistance du fil conducteur de la bobine. Nous admettrons que la tension aux bornes d'une bobine s'écrit :

$$\boxed{u_{Bobine}(t) = L.\frac{di(t)}{dt} + r.i(t)}$$

Où r est la résistance de la bobine (en Ω) et L est l'inductance de la bobine (en H).

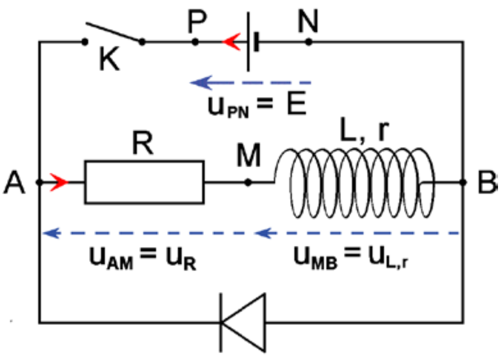
Remarque : L'influence de l'inductance de la bobine ne se manifeste qu'en régime variable : En régime permanent (courant continu), la bobine se comporte comme un conducteur ohmique de résistance r.

Remarque : Si la variation de l'intensité est très rapide, le terme di(t)/dt peut être très grand, c'est le cas lors de l'ouverture d'un circuit comportant une bobine : c'est le phénomène de surtension. Le phénomène de surtension est utilisé : tube fluorescent, rupteur d'allumage …

III) Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension :

1) Expérience théorique :

Un dipôle RL est l'association en série d'un résistor de résistance R et d'une bobine d'inductance L.
On dispose d'un générateur de tension continue $U_{PN} = E$, d'un résistor de résistance R, d'une inductance L et d'un interrupteur K. La diode permet d'avoir un courant d'intensité $i > 0$ après l'ouverture de K !



2) Etablissement du courant :

a) Equation différentielle :

Quand on ferme K, la tension u_{AB} passe instantanément de 0 à E (pour $t \geq 0 \Rightarrow u_{AB} = E$).

A chaque instant on a : $u_{AB}(t) = u_R(t) + u_{L,r}(t) = R.i(t) + r.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt}(t) = E$

On obtient l'équation différentielle non homogène du premier ordre :

$$\boxed{\frac{di(t)}{dt} + \frac{R+r}{L}.i(t) = \frac{E}{L}}$$

b) Solution de l'équation différentielle :

On cherche l'allure de la courbe représentative de l'évolution de i(t) en fonction du temps. Pour cela, on considère que l'équation différentielle est vraie à chaque instant.

A t = 0, le courant est encore nul i(0) = 0, on en déduit que : $\left.\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E}{L}$

On a donc un point de la courbe représentative de i(t) : (0; 0) ainsi que la valeur de la pente de la tangente à cette courbe à l'origine des dates.
Au bout d'un temps assez long ($t = \infty$) on peut considérer que le courant est établi et qu'alors il ne varie plus : $\left.\frac{di}{dt}\right)_{t=\infty} = 0$ de l'équation différentielle, on tire : $i(\infty) = \frac{E}{R+r} = I_0$.

La courbe représentative de i(t) tend vers I_0 qui est une asymptote avec une pente nulle.
La courbe tend exponentiellement vers cette valeur.

On peut montrer que i(t) est de la forme : $i(t) = I_0.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec $I_0 = \frac{E}{R+r}$ et $\tau = \frac{L}{R+r}$

τ (exprimé en s) est la constante de temps du circuit RL.

3) Rupture du courant :

a) Equation différentielle :

Quand on ouvre K, la tension u_{AB} passe instantanément de E à 0 (pour $t \geq 0 \Rightarrow u_{AB} = 0$).
La diode devient passante et à chaque instant on a :

$$u_{AB}(t) = u_R(t) + u_{L,r}(t) = R.i(t) + r.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} = 0$$

On obtient l'équation différentielle homogène du premier ordre :

$$\boxed{\frac{di(t)}{dt} + \frac{R+r}{L}.i(t) = 0}$$

b) Solution de l'équation différentielle :

On cherche l'allure de la courbe représentative de l'évolution de i(t) en fonction du temps.

A t = 0, le courant est $i(0) = I_0 = \frac{E}{R+r}$ on en déduit que : $\left.\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{E}{L}$

Au bout d'un temps assez long ($t = \infty$) on peut considérer que le courant est devenu nul et qu'il ne varie plus : $\left.\frac{di}{dt}\right)_{t=\infty} = 0$ et $i(\infty) = 0$

La courbe tend exponentiellement vers 0.

On peut montrer que i(t) est de la forme : $i(t) = I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$

Avec $I_0 = \frac{E}{R+r}$ et $\tau = \frac{L}{R+r}$

On voit que le courant continue de passer après l'ouverture de l'interrupteur : ceci n'est possible que si ce courant peut passer dans un conducteur comme une diode (voir aussi l'étude expérimentale) ou dans l'air sous la forme d'une étincelle.

4) Constante de temps du dipôle RL :

a) Analyse dimensionnelle :

Le rapport : $\tau = \frac{L}{R}$ est homogène à un temps, mesuré en seconde, et appelé constante de temps du dipôle RL.

L'inductance L est donnée dans $u_L = L.\frac{di}{dt}$

D'où $L = u_L/(\frac{di}{dt})$ qui est homogène à $\frac{[\text{Tension}]\times[\text{Temps}]}{[\text{Intensité}]}$

La résistance R = u/i est homogène à $\frac{[\text{Tension}]}{[\text{Intensité}]}$

La constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$ est homogène à $\frac{[\text{Tension}]\times[\text{Temps}]}{[\text{Intensité}]} \times \frac{[\text{Intensité}]}{[\text{Tension}]} = [\text{Temps}]$

b) Détermination de la constante de temps :

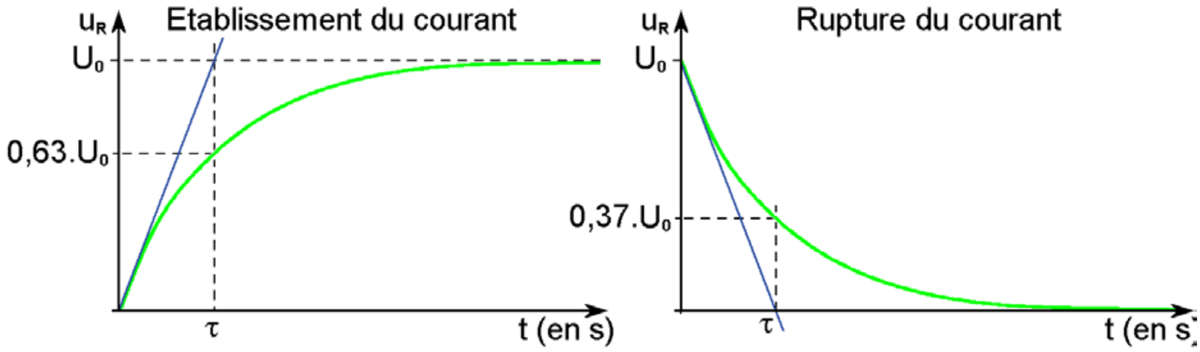
- Si on connaît R, r et L, on peut calculer $\tau = \frac{L}{R+r}$ (souvent r est négligeable devant R).

  Exemple : Le circuit formé d'un résistor de résistance R = 100 Ω et d'une bobine d'inductance L = 10 mH et de résistance 0,5 Ω (négligeable) a une constante de temps de $\tau = \frac{L}{R} = 10^{-4}$ s = 0,1 ms.

- Si on dispose de l'oscillogramme $u_R(t)$, on se place à la date $t = \tau$:

  * Lors de l'établissement du courant : $u_R(t) = R.i(t) = R.I_0.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U_0.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, on détermine $u_R(\tau) = U_0.(1 - e^{-1}) \approx 0{,}63.U_0$.

  Par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe dont l'ordonnée est égale à $0{,}63.U_0$, on obtient la valeur de τ.



  * Lors de l'ouverture : $u_R(t) = U_0.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$, on détermine $u_R(\tau) = U_0.e^{-1}) \approx 0{,}37.U_0$.

  L'abscisse du point de la courbe d'ordonnée égale à $0{,}37.U_0$, donne la valeur de τ.

- Si on dispose de l'oscillogramme $u_R(t) = U_0.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$. On trace la tangente à la courbe à l'origine : elle coupe l'asymptote $y = U_0$ au point d'abscisse $t = \tau$.

  En effet, la tangente à la courbe représentative de $u_R(t)$, à l'origine des dates, a pour équation :

$$y = \left.\frac{d[u_R(t)]}{dt}\right)_{t=0} .t = -U_0.(-\frac{1}{\tau}).t = \frac{U_0}{\tau}.t$$

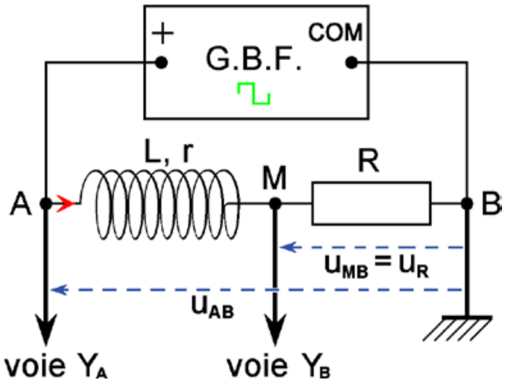
  Elle coupe l'asymptote $y = U_0$ en un point d'abscisse t : $U_0/\tau.t = U_0$ soit $t = \tau$

c) Influence de la constante de temps :

Pendant une durée Δt de quelques τ (de l'ordre 5.τ) le courant s'établit ou s'annule : c'est le régime transitoire du phénomène.
Au bout de quelques τ (de l'ordre 5.τ), le courant est établi ou annulé : c'est le régime permanent du phénomène.

5) Etude expérimentale :

On veut vérifier expérimentalement l'allure des courbes obtenues théoriquement.
On considère le montage électrique :



Soient A et B les bornes de la "branche" résistor-bobine.
On veut visualiser à l'oscilloscope la tension $u_{AB}(t)$ en créneaux, aux bornes du générateur et l'intensité i(t) du courant.
L'oscilloscope étant un voltmètre, pour visualiser i(t) on peut visualiser $u_R(t) = R.i(t)$ qui nous donne l'allure de i(t) au facteur R près.
Il faut faire attention à l'ordre dans lequel on place les différents dipôles pour visualiser algébriquement $u_{AB}(t)$ et $u_R(t)$: problème de masse de l'oscilloscope.

IV) Energie magnétique emmagasinée dans la bobine :

Par définition la puissance instantanée, reçue par le dipôle AB est :

$$p(t) = u(t).i(t) = [(R + r).i(t) + L.\frac{di(t)}{dt}].i(t) = (R + r).i^2 + L.i.\frac{di}{dt}$$

Le premier terme de la somme représente la puissance consommée par effet Joule dans les différentes résistances, le deuxième terme est la puissance magnétique emmagasinée dans la bobine.

$P_{magn} = L.i.\frac{di}{dt} = \frac{dW_{Bo}}{dt}$ on en déduit l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine : $\boxed{W_{Bo}(t) = \frac{1}{2}.L.[i(t)]^2}$

Bobine et circuit RL

A RETENIR

I) Solénoïde, bobine et bobines de Helmholtz :

1) Solénoïde et bobine :

Une bobine est un enroulement de fil conducteur. Chaque tour de fil est une spire.

Un solénoïde est une bobine formée d'une couche de spires jointives.
A l'intérieur d'un solénoïde, le champ magnétique est uniforme et de même direction que l'axe de révolution du solénoïde.

Le sens du champ est déterminé par la règle des trois doigts de la main droite (équivalente à la règle du bonhomme d'Ampère).

Dans le cas d'un solénoïde infiniment long, le champ magnétique est nul à l'extérieur, et à l'intérieur, a pour valeur : $B = \mu_0.n.I$

Où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide (ou de l'air) et : $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ S.I., n est le nombre de spires par mètre de longueur du solénoïde et I est l'intensité du courant (en A).
Soit ℓ sa longueur est N le nombre total de spires du solénoïde, on a :

$$B = \mu_0.\frac{N}{\ell}.I$$

2) Bobines de Helmholtz :

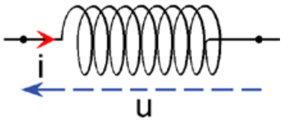
On appelle bobines de Helmholtz l'association de deux bobines plates coaxiales séparées par une distance D égale à leur rayon commun R.

Si N est le nombre de spires de chaque bobine, R leur rayon et qu'elles sont montées en série et parcouru par un courant d'intensité I, le champ considéré comme uniforme au centre du dispositif a pour valeur : $B = 0,72.\,\mu_0.\frac{N}{R}.I$

II) Influence d'une bobine dans un circuit :

1) Généralités :

Une bobine est un dipôle constitué par un enroulement cylindrique d'un fil conducteur. Chaque boucle de conducteur est appelée spire.
Il est nécessaire de représenter le relief des spires.



2) Retard à l'établissement du courant :

La présence d'une bobine retarde l'établissement du courant dans la branche où elle est montée.

3) Surtension à l'ouverture du circuit :

La présence d'une bobine à tendance à retarder la coupure du courant dans la branche où elle est montée, il apparaît une surtension aux bornes de la bobine ce qui se traduit par la formation d'une étincelle de rupture au niveau des contacts de l'interrupteur.

II) Caractéristiques d'une bobine :

1) Inductance d'une bobine :

L'unité légale fondamentale de mesure d'inductance est le henry (H).

L'inductance L d'une bobine dépend des caractéristiques géométriques de la bobine.

L'inductance est donnée par : $L = \mu_0.N^2.\dfrac{S}{\ell}$

Où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide (ou de l'air), N est le nombre total de spires de la bobine, S est la surface d'une spire (en m^2) et ℓ est la longueur de la bobine (en m).

2) Tension aux bornes d'une bobine :

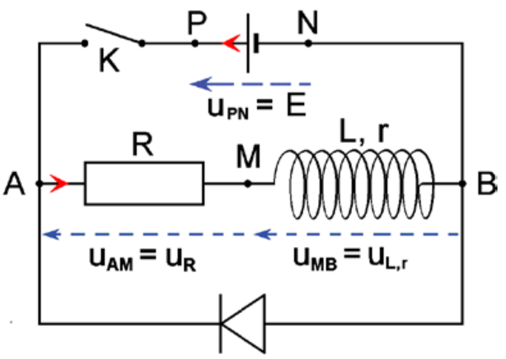
Nous admettrons que la tension aux bornes d'une bobine s'écrit :

$$u_{Bobine}(t) = L.\frac{di(t)}{dt} + r.i(t)$$

Où r est la résistance de la bobine (en Ω) et L est l'inductance de la bobine (en H).

III) Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension :

1) Expérience théorique :



Un dipôle RL est l'association en série d'un résistor de résistance R et d'une bobine d'inductance L.
On dispose d'un générateur de tension continue $U_{PN} = E$, d'un résistor de résistance R, d'une inductance L et d'un interrupteur K. La diode permet d'avoir un courant d'intensité i > 0 après l'ouverture de K !

2) Etablissement du courant :

a) Equation différentielle :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R+r}{L}.i(t) = \frac{E}{L}$$

b) Solution de l'équation différentielle :

On peut montrer que i(t) est de la forme : $i(t) = I_0.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec $I_0 = \dfrac{E}{R+r}$ et $\tau = \dfrac{L}{R+r}$

τ (exprimé en s) est la constante de temps du circuit RL.

3) Rupture du courant :

a) Equation différentielle :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R+r}{L}.i(t) = 0$$

b) Solution de l'équation différentielle :

On peut montrer que i(t) est de la forme : $i(t) = I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $I_0 = \dfrac{E}{R+r}$ et $\tau = \dfrac{L}{R+r}$

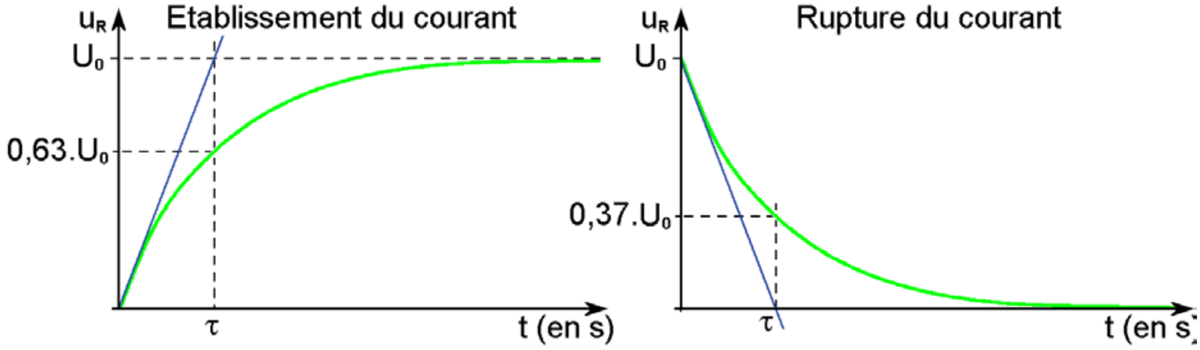
4) Constante de temps du dipôle RL :

a) Analyse dimensionnelle :

Le rapport : $\tau = \dfrac{L}{R}$ est homogène à un temps, mesuré en seconde, et appelé constante de temps du dipôle RL.

b) Détermination de la constante de temps :

* Lors de l'établissement du courant : $u_R(t) = R.i(t) = R.I_0.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U_0.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, on détermine $u_R(\tau) = U_0.(1 - e^{-1}) \approx 0{,}63.U_0$.
Par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe dont l'ordonnée est égale à $0{,}63.U_0$, on obtient la valeur de τ.



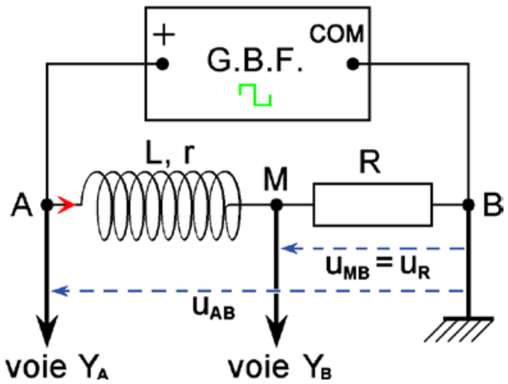
* Lors de la l'ouverture : $u_R(t) = U_0.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$, on détermine $u_R(\tau) = U_0.e^{-1}) \approx 0{,}37.U_0$.
L'abscisse du point de la courbe d'ordonnée égale à $0{,}37.U_0$, donne la valeur de τ.
Elle coupe l'asymptote $y = U_0$ en un point d'abscisse t : $U_0/\tau.t = U_0$ soit $t = \tau$

c) Influence de la constante de temps :

Pendant une durée Δt de quelques τ (de l'ordre $5.\tau$) le courant s'établit ou s'annule : c'est le régime transitoire du phénomène.
Au bout de quelques τ (de l'ordre $5.\tau$), le courant est établi ou annulé : c'est le régime permanent du phénomène.

5) Etude expérimentale :

On considère le montage électrique :
Soient A et B les bornes de la "branche" résistor-bobine.
On veut visualiser à l'oscilloscope la tension $u_{AB}(t)$ en créneaux, aux bornes du générateur et l'intensité i(t) du courant.
L'oscilloscope étant un voltmètre, pour visualiser i(t) on peut visualiser $u_R(t) = R.i(t)$ qui nous donne l'allure de i(t) au facteur R près.
Il faut faire attention à l'ordre dans lequel on place les différents dipôles pour visualiser algébriquement $u_{AB}(t)$ et $u_R(t)$: problème de masse de l'oscilloscope.



IV) Energie magnétique emmagasinée dans la bobine :

L'expression de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine :

$$W_{Bo}(t) = \tfrac{1}{2}.L.[i(t)]^2$$

POUR S'ENTRAÎNER

I) Bobine supra conductrice.

Dans un appareil de résonance magnétique nucléaire à usage médical, un champ magnétique uniforme intense est indispensable. Avec un électroaimant contenant du fer, il est impossible d'obtenir un champ magnétique supérieur à 2,2 T.
On utilise donc une bobine de N = 2000 spires, d'un diamètre D = 40 cm et de longueur ℓ = 50 cm. Pour le calcul du champ magnétique créé par cette bobine, on admettra qu'elle se comporte comme un solénoïde infiniment long.

a) Quelle doit être l'intensité du courant dans la bobine pour que le champ magnétique créé ait une valeur de 12 T ?

b) Quelle est la résistance R de cette bobine si le câble de cuivre de 1 cm^2 de section a une résistance linéique (par unité de longueur) de $1{,}7.10^{-4}\ \Omega.m^{-1}$?

c) Quelle serait la puissance électrique correspondant à l'effet Joule dans une telle bobine ? Que pensez-vous du résultat ?

d) Pourquoi le fil de la bobine est-il en matériau supraconducteur (alliage de Niobium et de Tantale de résistance nulle) ?

e) Quelle est l'auto-inductance L de la bobine ?
Quelle est l'énergie emmagasinée sous forme magnétique dans la bobine ?

f) Pour des raisons encore inconnues, un point du fil supraconducteur peut devenir résistant. La résistance de ce point devient $r = 10^{-4}\ \Omega$.
La théorie montre que le temps au bout duquel l'énergie de la bobine s'est dissipée est égal à $\dfrac{2.L}{r}$. Quelle est la puissance moyenne de ce choc thermique ? Qu'en pensez-vous ?

Donnée : $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ S.I.

II) Bobine d'induction.

Une bobine d'inductance L = 1 H, de résistance R = 2,5 Ω est branchée aux bornes d'une source de tension continue U = 40 V.

a) Calculer l'intensité I_0 du courant permanent circulant dans la bobine.

b) Lors de l'ouverture du circuit, quel est le phénomène qui explique que le courant ne passe pas brutalement de I_0 à 0, mais décroît suivant la loi : $i(t) = I_0.e^{-K.t}$ avec K = R/L.
i. Quelle est l'influence de l'inductance de la bobine sur la décroissance de i(t).
ii. Quelle est l'intensité à l'instant de date t = 0,25 s ?

c) La bobine est assimilée à un solénoïde de longueur D = 1 m comportant N = 50000 spires de rayon r = 10 cm. Donner les caractéristiques (direction, sens, valeur) du vecteur champ magnétique au centre de la bobine quand I_0 = 16 A.

Donnée : $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ S.I.

III) Etude d'un solénoïde.

Un solénoïde de $\ell = 50$ cm de longueur et de D = 8,0 cm de diamètre est considéré comme infiniment long ; il comporte n = 2200 spires/m et sa résistance est r = 8,0 Ω.

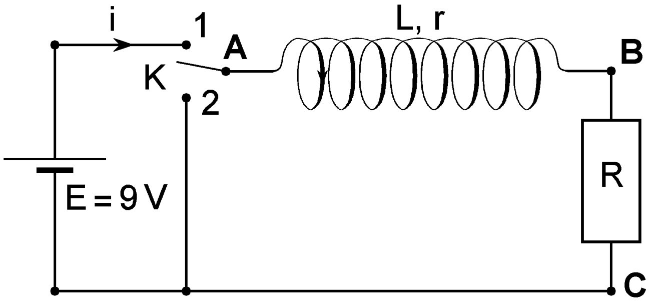
a) Donner les caractéristiques du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur du solénoïde quand il est parcouru par un courant d'intensité i.

b) Calculer la valeur de l'inductance L de ce solénoïde dont l'expression est donnée par :

$$L = \mu_0.N^2.\frac{S}{\ell}$$

Où $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ S.I. est la perméabilité magnétique du vide (ou de l'air) et N est le nombre total de spires du solénoïde.

c) On réalise, avec ce solénoïde, le montage ci-contre. La résistance du résistor est R = 10,0 Ω, la résistance interne du générateur est négligeable.



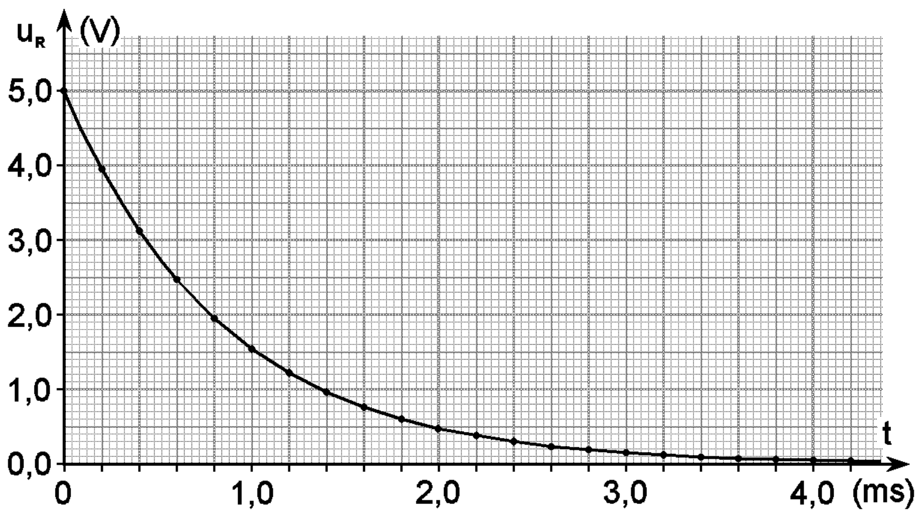
i. L'interrupteur K est en position 1. Quelle est, en régime permanent, l'intensité I_0 du courant dans le circuit ?

ii. Calculer l'énergie W_m emmagasinée par la bobine.

iii. En un temps infiniment bref et à la date t = 0, l'interrupteur K passe de la position 1 à la position 2. Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit l'intensité i(t) du courant dans le circuit. Vérifier que la solution de cette équation est de la forme :

$$i(t) = I_0.e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R+r}$$

d) Soit u_R la tension aux bornes du dipôle BC et t_1 le temps au bout duquel u_R atteint 90 % de sa valeur maximale. Soit t_2 le temps au bout duquel u_R atteint 10 % de sa valeur maximale.
Exprimer $t_d = t_2 - t_1$ en fonction de τ.
A partir de la courbe $u_R = f(t)$ représentée ci-dessous, déterminer t_d et en déduire la valeur de τ. Comparer avec la valeur théorique.



Donnée : $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ S.I.