CHAPITRE 3
CIRCUITS EQUIVALENTS

Herman von Helmholtz (1821 - 1894) fut l'un des derniers universalistes de la science. Au cours de sa carrière, il a apporté des contributions fondamentales à l'optique , à l'acoustique, à l'hydrodynamique et à l'électromagnétisme. En 1853, alors qu'il était professeur de physiologie à l'université de Königsburg, il publia un article *sur quelques lois concernant la distribution de l'électricité , avec des applications aux expériences sur l'électricité animale*, dans lequel il établissait ce qui deviendrait plus tard le Théorème de Thevenin.

Léon Thévenin, ingénieur français (1857 - 1926). Diplômé de l'Ecole Polytechnique de Paris en 1876 (l'année de l'invention du téléphone par Bell), il entra en 1878 à la compagnie française des Postes et Télégraphes, où il fit toute sa carrière. En 1883, alors qu'il enseignait un cours pour les inspecteurs de la compagnie, il proposa ce que nous connaissons aujourd'hui sous le nom de théorème de Thévenin. Personne ne remarqua qu'il était établi depuis 1853. Bien qu'il fut publié dans plusieurs traités d'électricité, ce théorème resta d'ailleurs peu connu jusque dans les années 20.

Edward Lowry Norton, ingénieur américain (1898 - 1983). Après des études au MIT et à Columbia University, il entra aux Bell Labs et y fit toute sa carrière, jusqu'en 1963. Il y publia peu d'articles scientifiques, dont aucun ne mentionnant le théorème qui porte son nom. L'origine de l'appellation du théorème de Norton reste encore obscure aujourd'hui. L'idée originale date de 1926 et est due à Hans Ferdinand Mayer, physicien allemand (1885-1980), qui fut directeur des laboratoires de recherches de Siemens entre 1936 et 1962.

L'utilisation de lemmes de Kirchhoff pour la mise en équations d'un circuit, même simple, conduit vite à un important système d 'équations. Nous verrons dans un chapitre ultérieur qu'il existe des méthodes plus systématiques, et plus légères, pour la mise en équations : la *méthode des mailles* et la *méthode des nœuds*, qui constituent une remise en forme des lemmes de Kirchhoff. Mais avant de les étudier, il est utile de chercher à simplifier (au moins partiellement) les circuits étudiés, en passant par des circuits équivalents.

3.1 Circuit opérationnel

Les exercices du chapitre 1 ont montré que l'utilisation des Lemmes de Kirchhoff sur des circuits comportant des éléments réactifs conduit à des équations intégro-différentielles. On peut alors les résoudre facilement en calculant la transformée de Laplace des équations, en résolvant le système d'équations opérationnelles résultant, et en cherchant l'inverse de la solution opérationnelle (Fig. 3.1 haut).

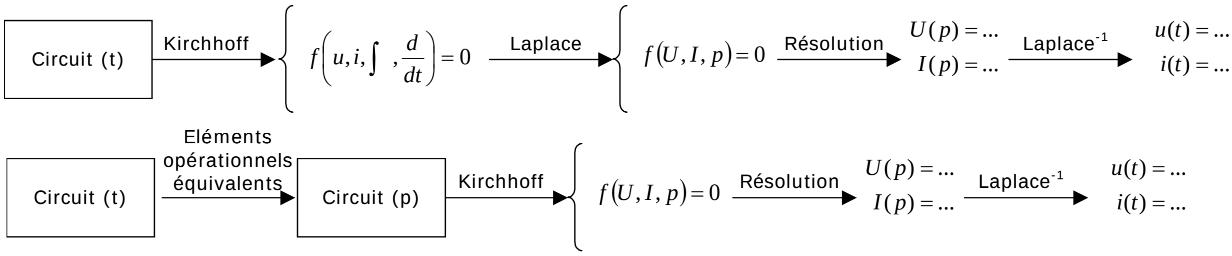


Fig. 3.1 Analyse d'un circuit par transformée de Laplace:
Haut: A partir des équations intégro-différentielles;
Bas: à partir du circuit opérationnel équivalent.

Il est plus simple en pratique, et plus systématique, d'écrire directement les équations du circuit en opérationnel (Fig. 3.1 bas). La transformée de Laplace des caractéristiques courant-tension (temporelles) des dipôles et quadripôles élémentaires exposés au chapitre 1 conduit en effet à des *caractéristiques opérationnelles* algébriques en *U(p)* et *I(p)*[1] :

$$U(p) = Z(p)I(p) \quad \text{pour un dipôle} \tag{3.1}$$

$$\begin{bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(p) & Z_{12}(p) \\ Z_{21}(p) & Z_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \end{bmatrix} \quad \text{pour un quadripôle} \tag{3.2}$$

La grandeur *Z(p)* dans (3.1) est appelée *impédance opérationnelle.* Son inverse, *Y(p)*, est appelée *admittance opérationnelle*.

Ceci nous permet de déduire du circuit initial un *circuit opérationnel,* obtenu en associant aux éléments leurs caractéristiques opérationnelles (Fig. 3.2)[2].

---

[1] Le passage des caractéristiques temporelles à leur équivalent opérationnel est simple *tant que les éléments sont linéaires et autonomes*. Il peut être compliqué, voire impossible, dans le cas contraire. Le cas des circuits non linéaires et/ou non autonomes est abordé en fin de chapitre.

[2] Il est clair qu'il ne faut pas mélanger impédances et admittances dans le même circuit, à moins de spécifier explicitement (ex : « *Z(p)=1/pC* » ou « *Y(p)=pC* »)

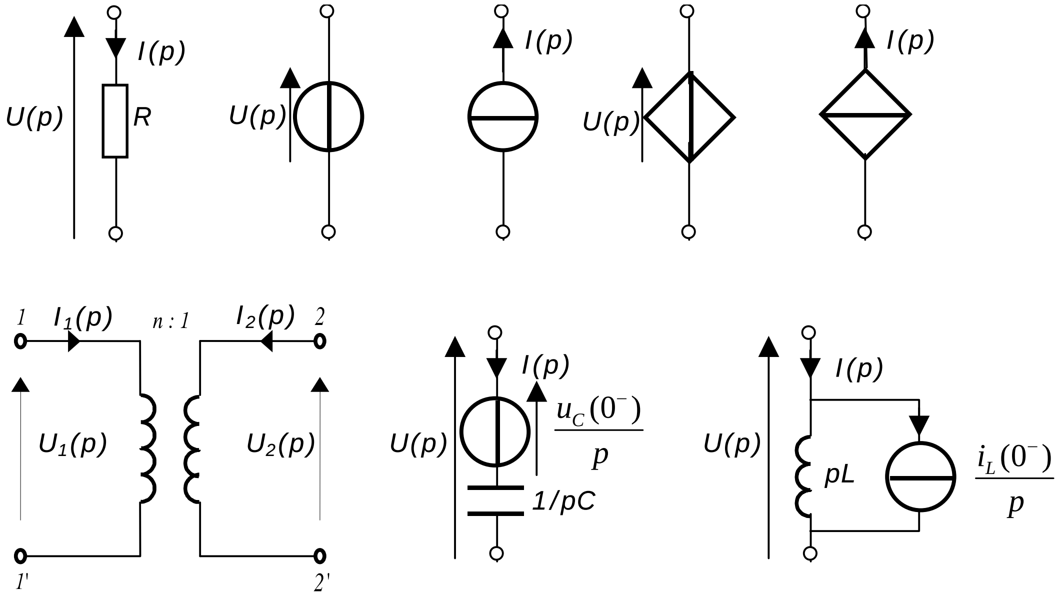


Fig. 3.2 Représentation symbolique des éléments dans le circuit opérationnel
(NB : les éléments sont représentés ici par défaut par leur impédance opérationnelle)

Le cas de la capacité et de l'inductance est particulier. Il vient en effet, à partir de (1.11), que la capacité initialement chargée (Fig. 3.3) est équivalente à une capacité non initialement chargée, en série avec une source de tension constante de même sens que celui choisi comme positif pour la tension dans la capacité. De même, (1.18) implique que l'inductance initialement parcourue par un courant (Fig. 3.4) est équivalente à une inductance non initialement parcourue par un courant, en parallèle avec une source de courant de même sens que celui choisi comme positif dans l'inductance. Ces dipôles équivalents conduisent aux dipôles opérationnels correspondants de la Fig. 3.2.

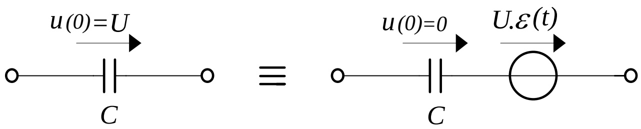


Fig. 3.3 Dipôle équivalent à la capacité initialement chargée

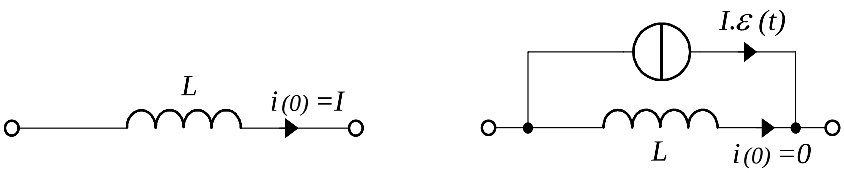


Fig. 3.4 Dipôle équivalent à l'inductance initialement parcourue par un courant

Exemple 3.1

A partir du circuit de la Fig. 3.5 (haut), il est facile de construire le circuit opérationnel équivalent de la Fig. 3.5 (bas).

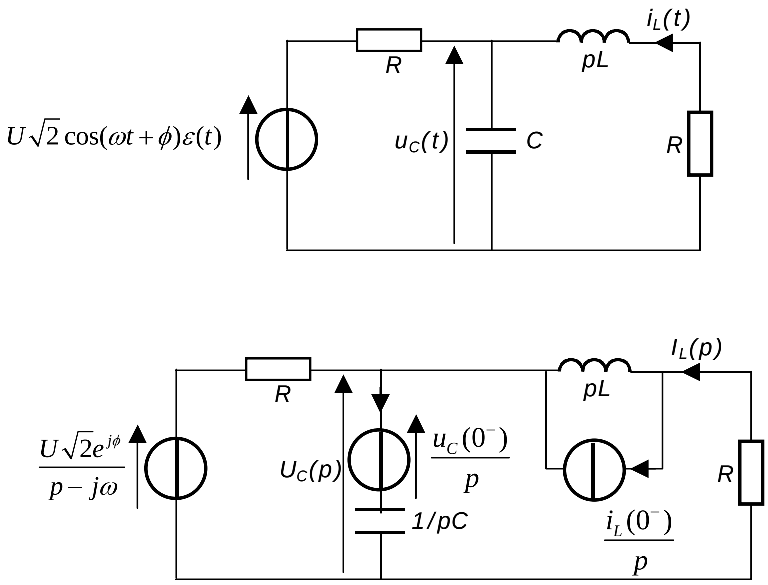


Fig. 3.5 (haut) Circuit électrique et (bas) son équivalent opérationnel

Exemple 3.2

Un signal *e(t)* est appliqué à un circuit (R, C) en échelle (Fig. 3.6); les charges initiales sur les capacités sont supposées nulles; on recherche l'expression de $U_2(p)$.

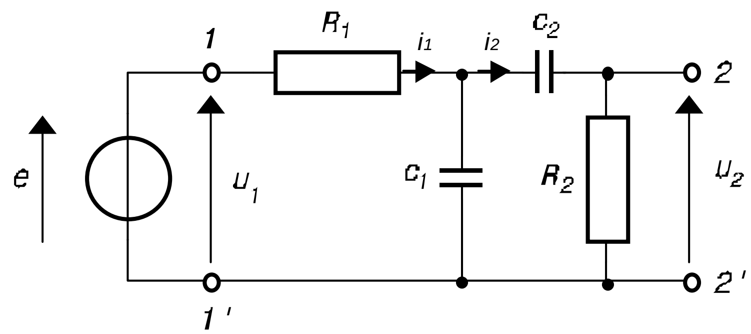


Fig. 3.6 Circuit RC du second ordre

On écrit directement les équations de Kirchhoff du circuit en opérationnel :

$$
\begin{aligned}
&E(p)=\left[R_1+\frac{1}{pC_1}\right]I_1-\frac{1}{pC_1}I_2\\
&0=\frac{1}{pC_1}I_1-\left[R_2+\frac{1}{pC_1}+\frac{1}{pC_2}\right]I_2\\
&U_2=R_2I_2
\end{aligned}
\qquad (3.3)
$$

Le système des deux premières équations est résolu par rapport à I_2 et le résultat est substitué dans la troisième :

$$\begin{bmatrix} R_1+\dfrac{1}{pC_1} & -\dfrac{1}{pC_1} \\ \dfrac{1}{pC_1} & -R_2-\dfrac{1}{pC_1}-\dfrac{1}{pC_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E(p) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_2=\frac{\begin{vmatrix} R_1+\dfrac{1}{pC_1} & E(p) \\ \dfrac{1}{pC_1} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+\dfrac{1}{pC_1} & -\dfrac{1}{pC_1} \\ \dfrac{1}{pC_1} & -R_2-\dfrac{1}{pC_1}-\dfrac{1}{pC_2} \end{vmatrix}}=\frac{-\dfrac{1}{pC_1}E(p)}{-R_1R_2-\dfrac{R_1}{pC_1}-\dfrac{R_1}{pC_2}-\dfrac{R_2}{pC_1}-\dfrac{1}{p^2C_1C_2}} \quad (3.4)$$

$$U_2=\frac{\dfrac{p}{R_1C_1}E(p)}{p^2+p(\dfrac{1}{R_2C_1}+\dfrac{1}{R_2C_2}+\dfrac{1}{R_1C_1})+\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

3.2 Impédance de dipôles en série et en parallèle

Il arrive fréquemment qu'un circuit comporte plusieurs impédances $Z_i(p)$ en série ou en parallèle. Il est alors souvent intéressant de les remplacer par une impédance équivalente $Z_e(p)$, dont l'expression est donnée à la Fig. 3.7 et à la Fig. 3.8 (on les démontrera à titre d'exercice).

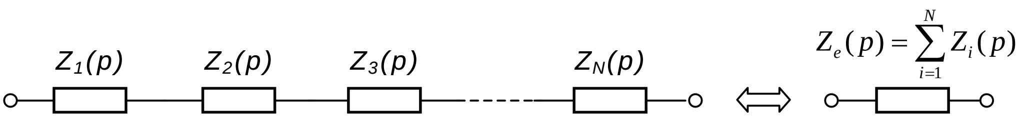


Fig. 3.7 Mise en série d'impédances

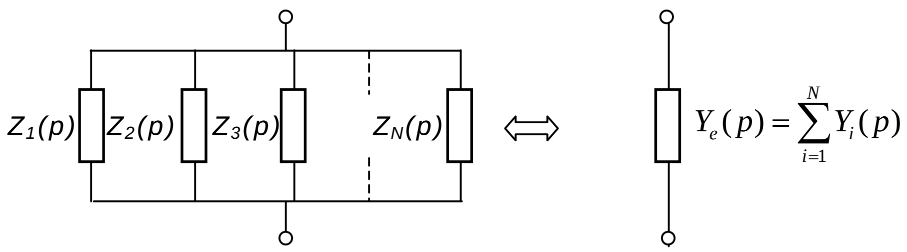


Fig. 3.8 Mise en parallèle d'impédances

Exemple 3.3

L'impédance du dipôle de la Fig. 3.9 est donnée par :

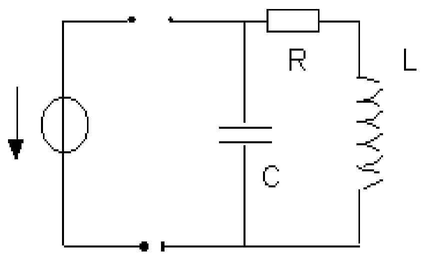


Fig. 3.9 Dipôle série-parallèle

$$Z(p) = \frac{1}{pC + \dfrac{1}{(R + pL)}} = \frac{R + pL}{p^2LC + pRC + 1}$$

On constate, dans l'exemple précédent, que la forme générale d'une impédance (resp. d'une admittance) opérationnelle est celle d'une *fraction rationnelle*, c'est-à-dire celle d'un rapport de deux polynômes en *p* :

$$Z(p) = \frac{Z_N(p)}{Z_D(p)} \quad \text{et} \quad Y(p) = \frac{Y_N(p)}{Y_D(p)} = \frac{Z_D(p)}{Z_N(p)} \tag{3.5}$$

La mise en série de sources de courant pose évidemment un problème si les courants sont différents. Dans la pratique, cette situation n'arrive jamais : une source de courant réelle est toujours associée à une impédance de source en parallèle. La mise en série de sources réelles et différentes fait apparaître des courants importants dans ces impédances. De même, la mise en parallèle de sources de tension idéales et différentes est impossible. Dans la pratique, les impédances séries associées aux sources réelles porteront des courants importants, qui assureront l'égalité des tensions aux bornes mises en parallèle.

3.3 Fonction de transfert de circuits en échelle simples

3.3.1 Fonction de transfert

On définit la *fonction de transfert* (ou *transmittance opérationnelle*) *à vide* d'un quadripôle (Fig. 3.10) notée *H(p)*, comme le rapport de la transformée de Laplace de sa tension de sortie sur celle de sa tension d'entrée, lorsque le courant à son accès 2 est nul :

$$H(p) = \left.\frac{U_2(p)}{U_1(p)}\right|_{I_2=0} \tag{3.6}$$

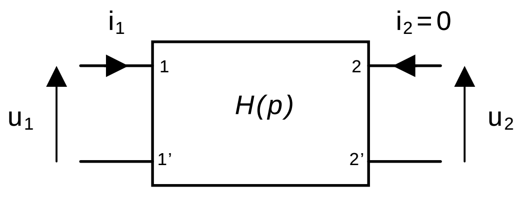


Fig. 3.10 Fonction de transfert à vide d'un quadripôle

Cette grandeur a une grande importance en théorie des circuits. Nous verrons en effet au chapitre 4 qu'elle permet de définir complètement la sortie du quadripôle pour une entrée quelconque.

3.3.2 Diviseur de tension

Il est possible de déterminer rapidement l'expression de la fonction de transfert de quadripôles simples. Ainsi, dans le cas (couramment rencontré) du diviseur de tension de la Fig. 3.11, on trouve :

$$H(p) = \frac{Z_b}{(Z_a + Z_b)} = \frac{Y_a}{(Y_a + Y_b)} \tag{3.7}$$

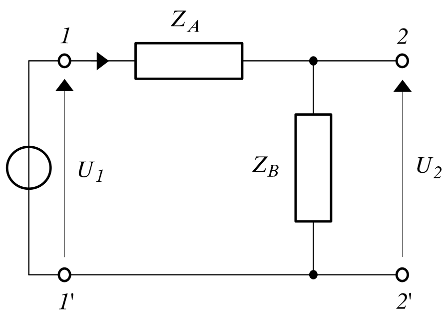


Fig. 3.11 Diviseur de tension

3.3.3 Circuit en échelle à deux échelons

On démontrera à titre d'exercice (en se basant sur le résultat précédent) que la fonction de transfert du quadripôle en échelle de la Fig. 3.12 est donné par:

$$H(p) = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)} \tag{3.8}$$

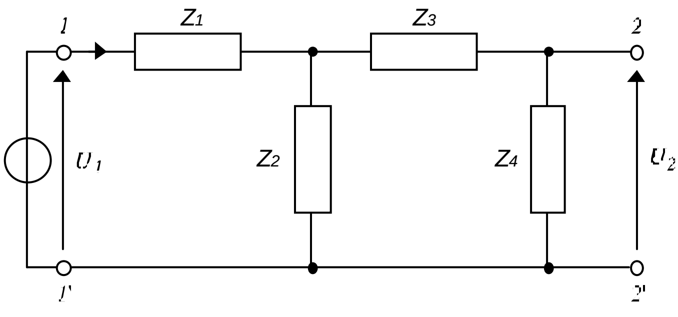


Fig. 3.12 Quadripôle en échelle à deux échelons

3.4 Transformation étoile-triangle

Il est toujours possible de passer de l'un des deux circuits de la Fig. 3.13 à l'autre ; on parle alors *transformation étoile-triangle.* Ce procédé de calcul est utilisé surtout en régime sinusoïdal.

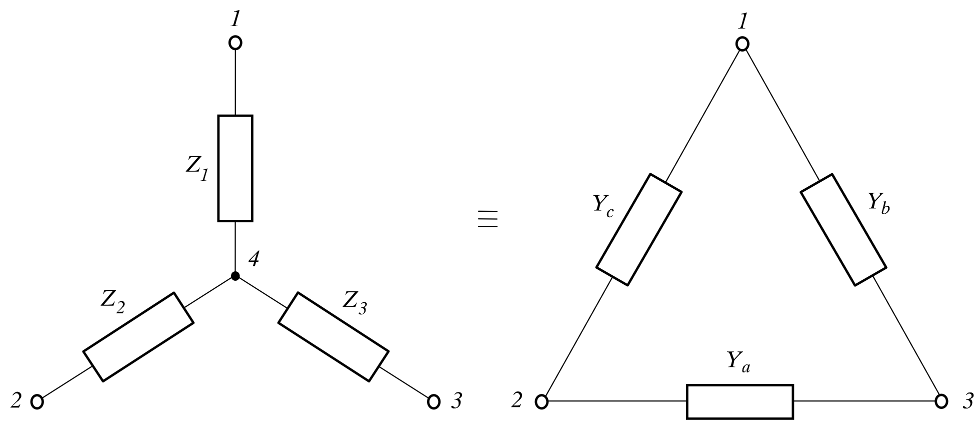


Fig. 3.13 Transformation étoile-triangle

$$Z_{1(2,3)} = Y_{a(b,c)} / Y_T^2$$

$$Y_{a(b,c)} = Z_{1(2,3)} / Z_E^2 \qquad (3.9)$$

avec $Z_E^2 = Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1$

$$Y_T^2 = Y_aY_b + Y_bY_c + Y_cY_a$$

La démonstration de ces formules est laissée à titre d'exercice.

Exemple 3.4

On désire transformer l'étoile de la Fig. 3.14.

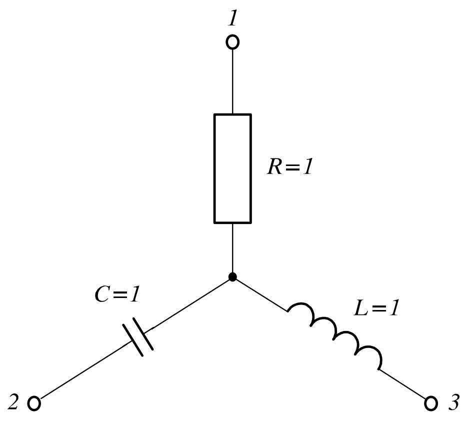


Fig. 3.14 Montage en étoile

Il vient : $Z_E^2 = \dfrac{L}{C} + \dfrac{R}{pC} + pRL = \dfrac{p^2RLC + pL + R}{pC}$

d'où :

$$Y_a = R / Z_E^2 = \frac{pRC}{p^2RLC + pL + R}$$

$$Y_b = 1 / pCZ_E^2 = \frac{1}{p^2RLC + pL + R}$$

$$Y_c = pL / Z_E^2 = \frac{p^2LC}{p^2RLC + pL + R}$$

3.5 Principe de superposition

La réponse d'un réseau linéaire peut se calculer en considérant séparément l'effet de chaque source indépendante et de chaque condition initiale.

Ce théorème fondamental est une caractéristique essentielle des circuits linéaires. Il permet de simplifier le calcul d'un circuit et intervient dans bon nombre d'autres théorèmes sur les circuits linéaires (comme par exemple les théorèmes de Thévenin et Norton ; cf. sections 3.7 et 3.8)

Exemple 3.5

Le réseau représenté à la Fig. 3.15 est supposé être en régime établi depuis $t = -\infty$; l'évolution de la tension aux bornes de la capacité suite à la fermeture de l'interrupteur à l'instant $t=0$ résulte de l'action de U_0, de i_S et de l'état initial (Fig. 3.16) :

$$u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{C2}(t) + u_{C3}(t)$$

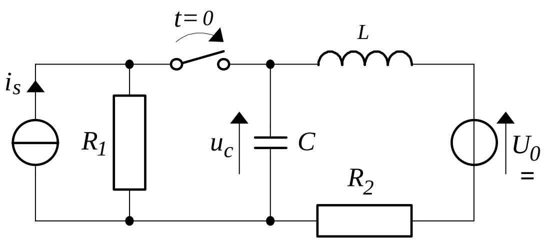


Fig. 3.15 Circuit électrique linéaire à plusieurs sources

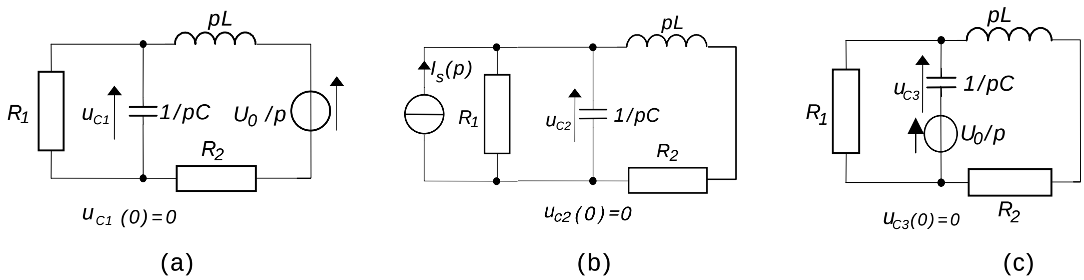


Fig. 3.16 Circuits équivalents par superposition

Exemple 3.6

Si un réseau est excité par une source périodique, on peut calculer la réponse correspondant à chaque terme sinusoïdal du développement en série de Fourier et les additionner ensuite.

3.6 Dualité

Il a été rappelé en début de chapitre 2 que les grandeurs *i* et *u* intervenant des les équations des circuits sont des grandeurs abstraites, que l'on associe en électricité au courant et à la tension aux bornes d'un dipôle. On aurait tout aussi bien pu a priori associer *i* à la tension électrique et *u* au courant. Il en aurait simplement résulté, entre autres, que l'élément abstrait « inductance » aurait modélisé le condensateur électrique, et que l'élément « capacité » aurait modélisé la bobine. Cette constatation nous amène maintenant à considérer des circuits qui sont équivalents *au sens de ce changement de convention* $i \leftrightarrow u$. De tels circuits sont appelés *circuits duaux.* La notion de dualité est intéressante, dans la mesure où elle permet d'étendre les résultats de l'analyse d'un circuit à son dual, moyennant interversion des notions de courant et tension.

3.6.1 Construction du circuit dual

Soit un circuit C_1 de graphe G_1, obtenu en faisant correspondre une branche à chaque dipôle et à chaque accès d'un transformateur ou d'un gyrateur (ex : Fig. 3.17)[3].

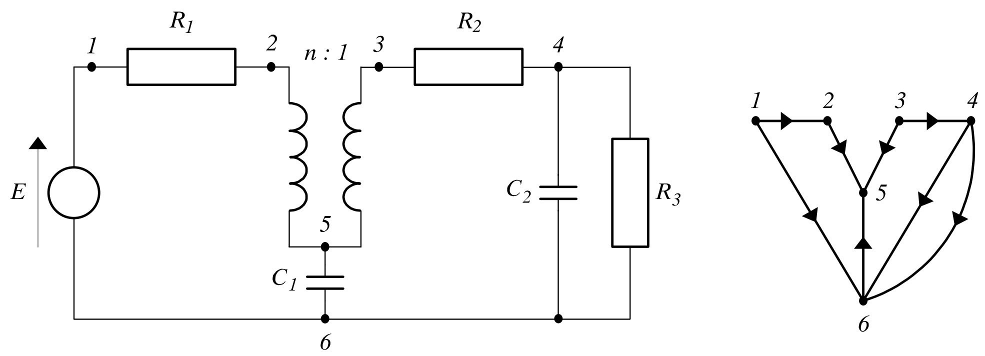


Fig. 3.17 Graphe associé à un circuit pour la construction du circuit dual

Dans la suite, nous supposerons le graphe planaire (ce qui revient à dire qu'il est constitué de fenêtres). Faisons correspondre à toute fenêtre de G_1 (ainsi qu'à la région du plan qui lui est extérieure, considérée comme une fenêtre particulière) un nœud d'un graphe G_2 (Fig. 3.18), et relions les nœuds de G_2 correspondant à des fenêtres contiguës de G_1. Le graphe G_2 ainsi obtenu est appelé *dual* de G_1[4].

On constate, par construction, que chaque branche de G_1 (définie par les deux fenêtres contiguës auxquelles elle appartient correspond à une branche homologue dans G_2 : celle reliant les deux nœuds images des fenêtres de départ.

[3] Ces graphes sont donc particuliers, en ceci que chaque branche ne comprend qu'un élément ou qu'un accès à un quadripôle. La mise en série d'éléments fait donc apparaître des nœuds intermédiaires. Par comparaison, ce n'était pas nécessairement le cas pour les graphes définis au chapitre 1 pour la numérotation des nœuds et branches d'un circuit en vue de sa mise en équations.

[4] Et réciproquement : on constate par construction que si G_2 est le dual de G_1, l'inverse est vrai aussi.

De plus, les branches homologues de branches initialement en série se retrouvent en parallèle dans le graphe dual.

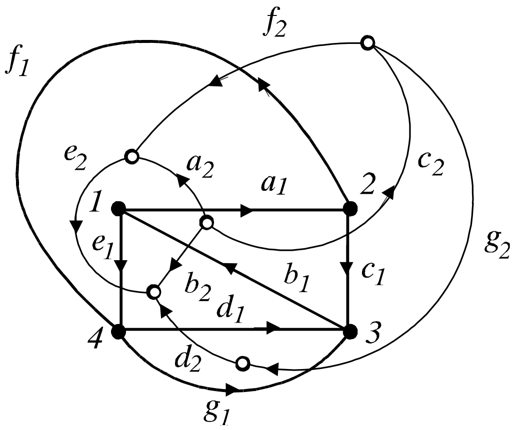


Fig. 3.18 Graphes duaux

Bien que l'orientation des branches d'un graphe soit purement conventionnelle, dès lors que l'on établit une correspondance entre deux graphes et les équations des circuits correspondants, il est indispensable d'avoir des conventions de signes cohérentes. Pour ce faire, on décide de choisir les orientations de deux branches homologues de sorte qu'en les faisant coïncider par rotation autour de leur intersection l'angle de rotation soit positif et inférieur à π (Fig. 3.19).

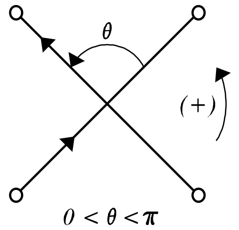


Fig. 3.19 Correspondance entre orientations des branches homologues

On construit alors le *circuit C_2 dual du circuit C_1* en plaçant, sur chaque branche du graphe G_2, un *élément dual* à l'élément présent sur la branche homologue dans G_1. Cet élément dual est obtenu en inversant les notions de tension et courant dans l'élément initial. Ainsi, une résistance R se transforme en une résistance de valeur 1/R, une inductance opérationnelle pL se transforme en une capacité opérationnelle $1/pL$, etc.

Une telle façon de procéder conduit à un réseau C_2 dont les équations sont identiques à celles de C_1, à une inversion de u et i près. Ceci implique qu'un courant calculé par analyse dans une branche de C_1 correspond exactement à une tension de même valeur dans la branche homologue de C_2.

Dans la pratique, on considère encore comme duaux deux circuits tels que les tensions dans l'un sont proportionnelles (et non plus strictement égales) aux courants dans l'autre. On accepte donc comme élément dual d'un élément donné celui obtenu en remplaçant[5], dans l'équation caractéristique de l'élément de départ, u par ki, et i par u/k. Ainsi, une résistance R se transforme en une résistance de valeur k^2/R, une inductance pL se transforme en une capacité k^2/pL, etc. (Tableau 3.1). D'une manière générale, pour le dipôle de la branche k :

$$U_{k1} = Z_{k1} I_{k1} \tag{3.10}$$

il vient, après remplacement de u_1 par ki_2, et i_1 par u_2/k :

$$\begin{aligned} kI_{k2} &= Z_{k1} \frac{1}{k} U_{k2} \\ U_{k2} &= \frac{k^2}{Z_{k1}} I_{k2} \end{aligned} \tag{3.11}$$

On constate que k a la dimension d'une résistance. On en déduit la relation générale entre dipôles duaux :

$$\boxed{Z_{k1} Z_{k2} = R_0^2} \tag{3.12}$$

	Réseau C_1	Réseau C_2
Dipôles Passifs	R_1 L_1 C_1 Interrupteur ouvert Interrupteur fermé	$R_2 = R_0^2 / R_1$ $C_2 = L_1 / R_0^2$ $L_2 = C_1 \cdot R_0^2$ Interrupteur fermé Interrupteur ouvert
Sources Indépendantes	U_{S1} I_{S1}	$I_{S2} = U_{S1} / R_0$ $U_{S2} = I_{S1} . R_0$
Sources Dépendantes	$E_{dk} = r_1(k,l) I_l$ $I_{dk} = g_1(k,l) U_l$	$I_{dk} = g_2(k,l) U_l ; g_2(k,l) = r_1(k,l) / R_0^2$ $E_{dk} = r_2(k,l) I_l ; r_2(k,l) = g_1(k,l) \cdot R_0^2$
Quadripôles	Transfo. idéal : n Gyrateur : g	Transfo. idéal : $-1/n$ Gyrateur : $-1/g \cdot R_0^2$

Tableau 3.1 Eléments duaux

On démontrera à titre d'exercice les relations de dualité données au Tableau 3.1 pour le transformateur idéal et le gyrateur.

Exemple 3.7

[5] Si les tensions dans le premier circuit sont les homologues de courants k fois plus grands dans le second, les courants dans le premier circuit doivent être les homologues de tensions k fois plus petites dans le second, afin que la puissance dissipée soit conservée.

La Fig. 3.20 représente un quadripôle comportant trois inductances et une capacité; on s'intéresse à sa fonction de réponse en tension $U_1(p)/E_1(p)$. On souhaite transformer cette cellule pour diminuer si possible le nombre d'inductances en laissant invariante la fonction de réponse. On obtient facilement son réseau dual (Fig. 3.21).

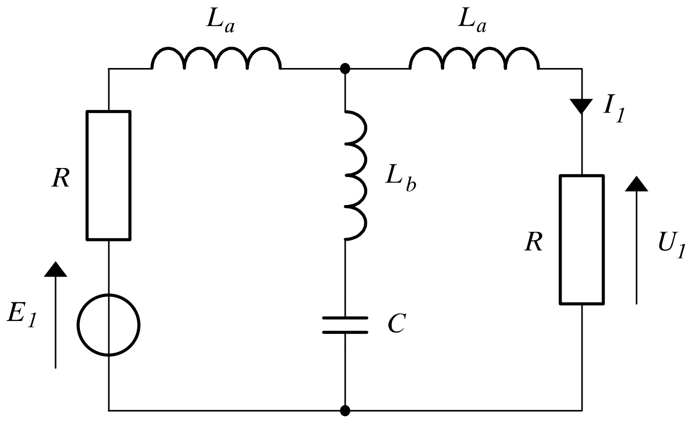


Fig. 3.20 Circuit de départ

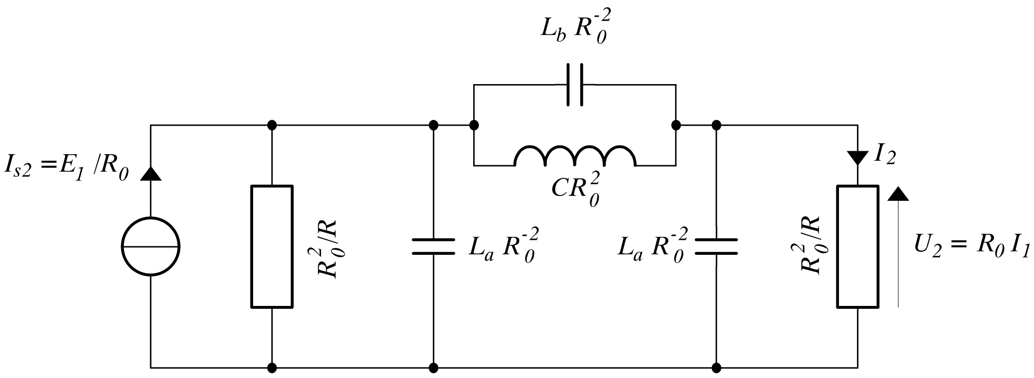


Fig. 3.21 Circuit dual

La dualité entraîne alors la relation : $I_2(p)/I_{s2}(p) = U_1(p)/E_1(p)$

Si ensuite on transforme la source de courant I_{s2} en source de tension, et si on choisit $R_0 = R$, on obtient la Fig. 3.22.

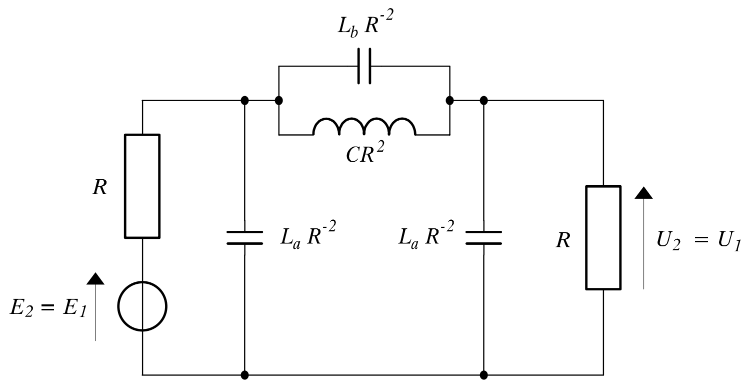


Fig. 3.22 Circuit final équivalent

3.6.2 Cas particuliers

Conditions initiales

L'exposé qui précède peut être généralisé au cas d'un réseau avec conditions initiales; en effet, celles-ci peuvent être assimilées à des excitations fictives.

Bobines couplées par induction mutuelle

La transformation d'un réseau contenant des bobines couplées par inductance mutuelle peut présenter certaines difficultés. En effet, une inductance mutuelle n'admet pas d'élément dual, puisqu'il n'existe pas de "couplage capacitif" entre branches.

On a vu toutefois au chapitre 2 que deux bobines couplées peuvent être remplacées par un schéma équivalent contenant deux inductances et un transformateur idéal; comme le dual d'un transformateur idéal de rapport n est un transformateur idéal de rapport $-1/n$, on obtient en définitive la correspondance illustrée à la Fig. 3.23, avec :

$$\begin{aligned} &L_k = (L_{kk}L_{ll} - L_{kl}^2)/L_{ll} \qquad n = L_{kl}/L_{ll} \qquad C_k = L_k/R_0^2 \\ &L_l = L_{ll} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad C_l = L_l/R_0^2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

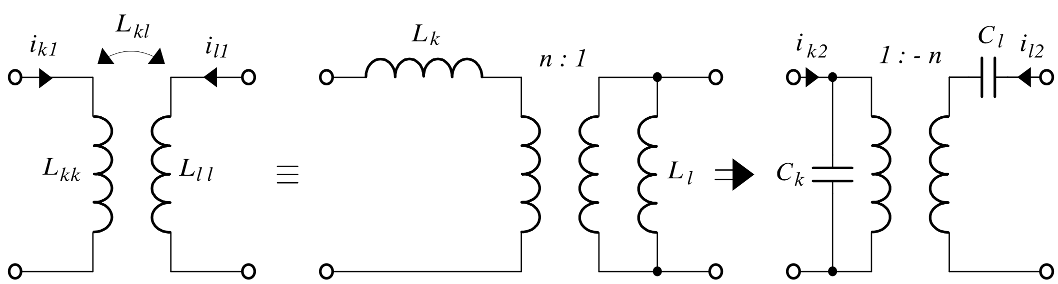


Fig. 3.23 Dual d'une paire de bobines couplées

Gyrateur sur dipôle

Il a été vu au chapitre 1 qu'un gyrateur chargé par une inductance est équivalent à un condensateur (et réciproquement). On peut généraliser cette constatation à une impédance quelconque : si un dipôle d'impédance Z_2 est connecté à l'accès

(2,2') d'un gyrateur de résistance de gyration *r*, on obtient sans difficulté à partir des équations du gyrateur l'expression de l'impédance Z_1 vue de l'accès *(1,1')* (Fig. 3.24) :

$$Z_1 = U_1 / I_1 = r^2(-I_2)/U_2 = r^2 / Z_2 \tag{3.14}$$

d'où :

$$Z_1 Z_2 = r^2 \tag{3.15}$$

Ce qui n'est autre que la relation (3.12) si $r=R_0$: on dit que *le gyrateur transforme un dipôle en son dual*.

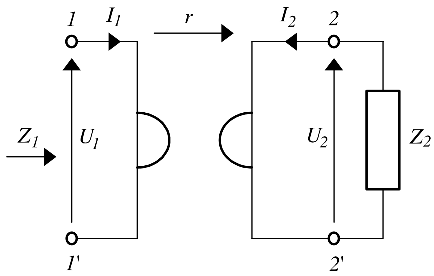


Fig. 3.24 Effet dualisateur du gyrateur : Z_1 est le dual de Z_2

3.7 Théorème de Thévenin

Le théorème de Thévenin (ainsi que son dual le théorème de Norton) est un des résultats les plus importants de la Théorie des Circuits. Il permet de remplacer *n'importe quel* dipôle linéaire (contenant autant d'éléments que l'on veut, et de quelque nature que ce soit, tant qu'ils restent linéaires) par une source unique en série avec une impédance :

Tout dipôle linéaire est équivalent à une source de tension unique $E(p)$ en série avec une impédance $Z(p)$; la tension $E(p)$ est égale à la tension à vide aux bornes du dipôle et l'impédance $Z(p)$ est égale à l'impédance vue des bornes du dipôle dont les sources indépendantes ont été annulées[6] (Fig. 3.25)**.**

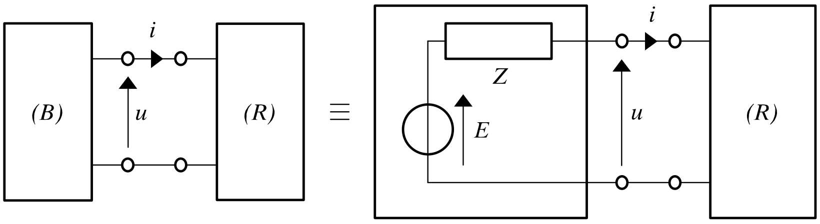


Fig. 3.25 Théorème de Thévenin

[6] Par l'expression *"annuler les ressources"* il faut comprendre que l'on court-circuite les sources de tension et que l'on ouvre les sources de courant.

Démonstration

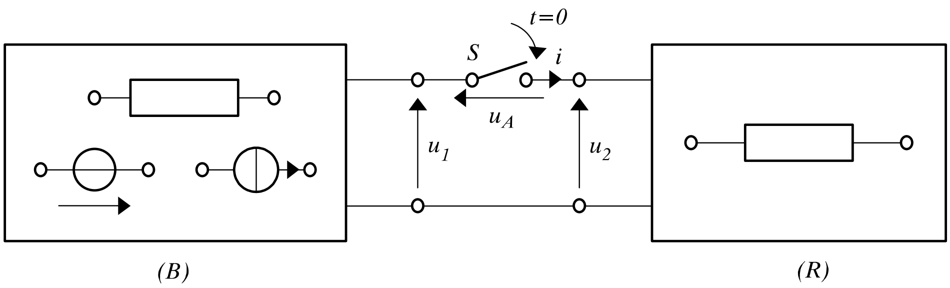
La démonstration de ce théorème est un modèle de généralité.

Imaginons (Fig. 3.26.a) que l'on connecte à l'instant *t=0* un dipôle *B* à un dipôle *R* ne comprenant pas de sources (même fictives : on suppose que les éléments de *R* ont des conditions initiales nulles). Tant que l'interrupteur *S* est ouvert, les tensions aux bornes des dipôles valent respectivement $u_1(t)=u_{10}(t)$ (tension à vide) et $u_2(t)=0$; la tension aux bornes de *S* vaut $u=u_{10}(t)$. Or la fermeture de l'interrupteur peut être simulée en lui substituant deux sources de tension connectées en série, de même amplitude mais de sens opposé. Choisissons précisément ces deux sources égales en grandeur à $u_{10}(t)$ (Fig. 3.26.b).

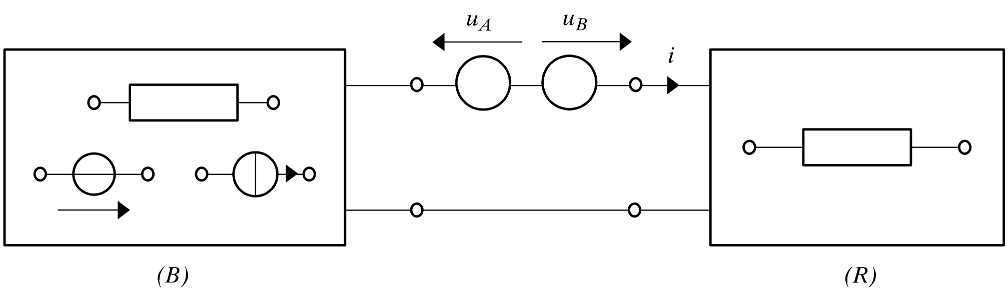
Par application de la propriété de superposition, on peut dire que le courant *i* résulte de l'action conjuguée unique u_A et des sources internes de *B* (Fig. 3.26.c) superposée à celle de la source unique u_B (Fig. 3.26.d); or il est clair que la première excitation est équivalente au fonctionnement en circuit ouvert : $u_1(t)=u_{10}(t)$ et $i=0$; le courant *i* résulte donc uniquement de l'action de la source $u_B=u_{10}$ en série avec le dipôle *B* dans lequel on a annulé les sources; les conditions initiales, équivalentes à des sources fictives doivent aussi être annulées. Les sources dépendantes, par contre, doivent être maintenues pour le calcul de l'impédance du dipôle équivalent : elles n'interviennent pas dans le théorème de superposition.

Si le réseau *R* contient lui aussi des sources (ou si les conditions initiales de ses éléments réactifs ne sont pas nulles), il existe à ses bornes une tension à vide $u_{20}(t)$ et tant que *S* est ouvert, on a $u=u_{10}-u_{20}$. Il suffit dans la démonstration de poser $u_A=u_B=u_{10}-u_{20}$, et d'associer la composante u_{10} de u_B du dipôle *B*, tandis que u_{20} est associée au dipôle *R* pour définir les dipôles équivalents.

(a)



(b)



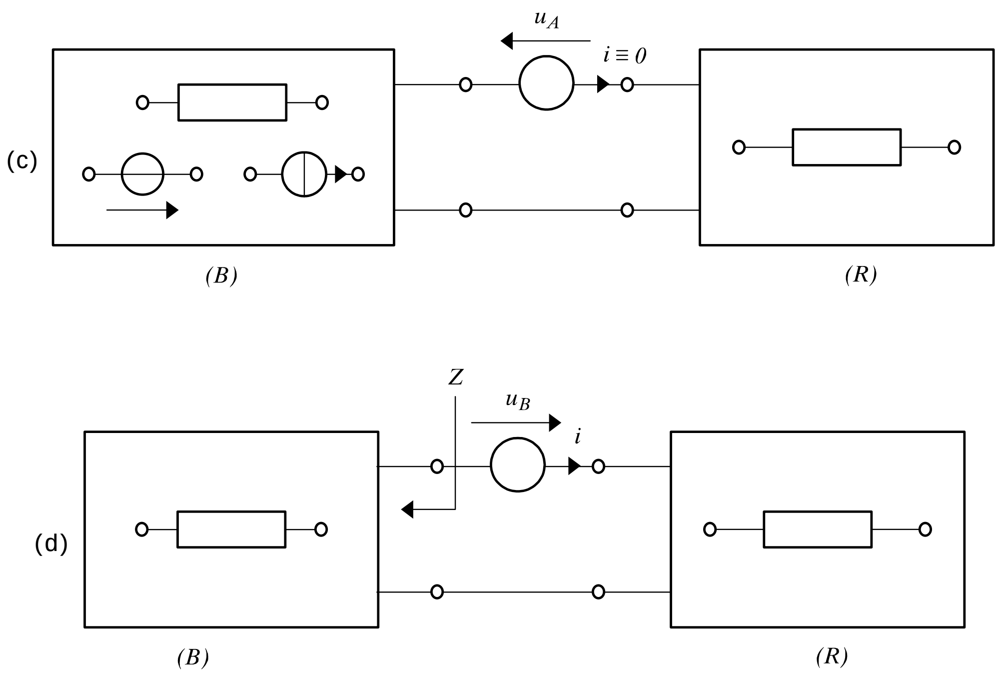


Fig. 3.26 Démonstration du théorème de Thévenin : (a)=(b)=(c)+(d)

Exemple 3.8

Un dipôle est constitué par la mise en parallèle de *N* sources de tension E_k en série avec des résistances R_k (Fig. 3.27).

On écrit le lemme de Kirchhoff sur les tensions pour chacune des *N* mailles comprenant chacune une source et passant par l'accès *11'* :

$$U_0 - E_k - R_k I_k = 0 \quad pour\ k = 1 ... N$$

Et le lemme de Kirchhoff sur les courants au nœud supérieur :

$$\sum_{k=1}^{N} I_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{U_0 - E_k}{R_k} = 0$$

On en déduit la tension à vide :

$$E = U_0 = \frac{\sum_{k=1}^{N} E_k / R_k}{\sum_{k=1}^{N} 1/R_k}$$

Quant à l'impédance vue des bornes 11' après annulation des sources, elle vaut simplement:

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{N} 1/R_k}$$

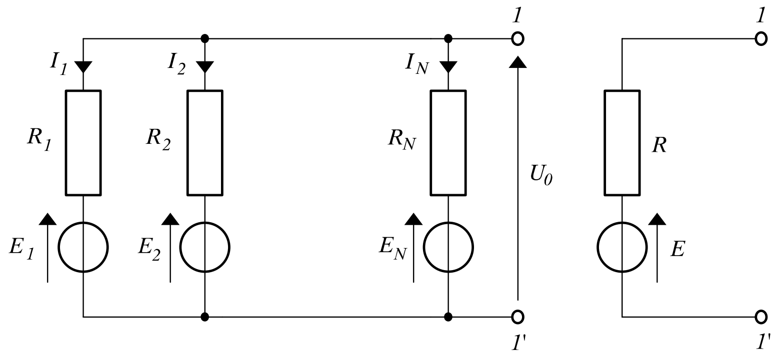


Fig. 3.27 Equivalent de Thévenin de *N* sources en parallèle

Il faut noter qu'un tel remplacement par un circuit équivalent peut faire disparaître (du circuit équivalent) des tensions et des courants qui sont recherchés. Il faudra alors, une fois le point de fonctionnement du circuit équivalent trouvé, faire le chemin inverse et calculer le point de fonctionnement du circuit de départ.

3.8 Théorème de Norton

Le théorème de Norton est dual de celui de Thévenin :

Tout dipôle linéaire est équivalent à une source de courant unique $I_s(p)$ en parallèle avec une impédance $Z(p)$; la source $I_s(p)$ est égale au courant de court-circuit du dipôle et l'impédance $Z(p)$ est égale à l'impédance vue des bornes du dipôle dont les sources indépendantes ont été annulées (Fig. 3.28)**.**

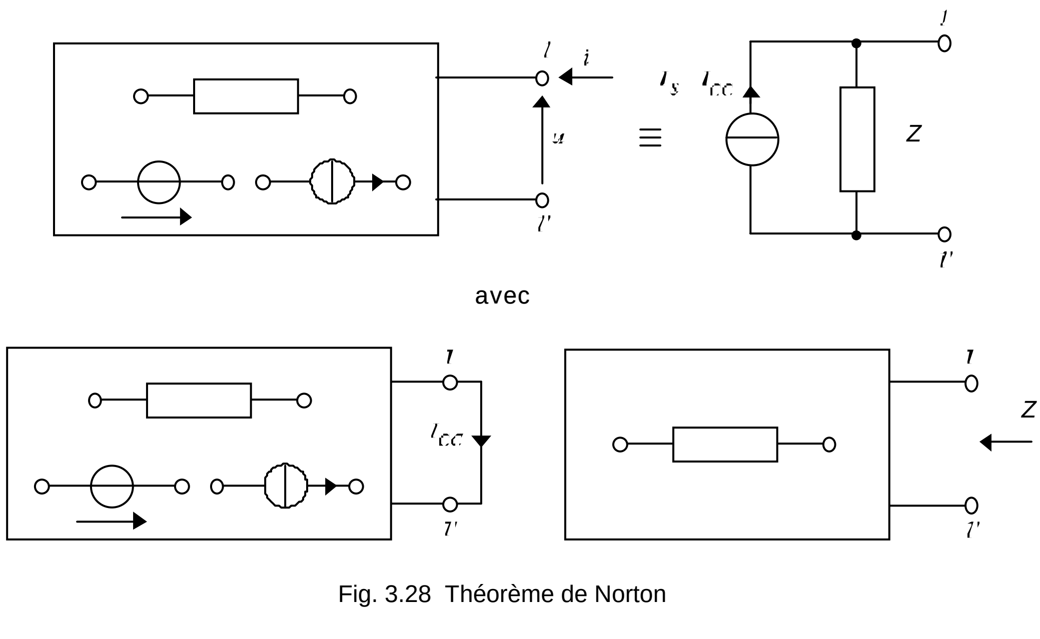


Fig. 3.28 Théorème de Norton

Démonstration

La démonstration est évidente : si on utilise en premier lieu le théorème de Thévenin, le dipôle se réduit à une source de tension *E* en série avec une impédance *Z*. Or, par ce même théorème de Thévenin, ce nouveau dipôle est équivalent à une source de courant $I=E/Z$ en parallèle avec la même impédance *Z*.

Exemple 3.9

On considère le dipôle de la Fig. 3.29, dont on cherche les équivalents de Thévenin et de Norton. On va donc calculer la tension à vide, le courant de court-circuit et l'impédance vue des bornes *11'* avec *E=0*.

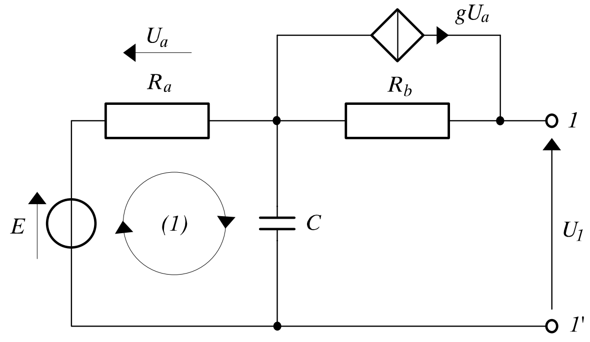


Fig. 3.29 Circuit à analyser

- Tension à vide

Le courant étant nul en sortie de la borne 1, la source E débite uniquement sur la R_a et C et fournit un courant I_1 donné par I_1=E/(R_a + 1/pC). La tension à vide aux bornes du dipôle vaut par conséquent :

$$U_{10} = \frac{1}{pC} I_1 + R_b g R_a I_1 = E.\frac{\frac{1}{pC} + gR_a R_b}{R_a + \frac{1}{pC}}$$

- Courant de court-circuit

Pour obtenir le courant de court-circuit, on cherche tout d'abord à réduire le nombre de mailles. On peut en effet remplacer la source de courant dépendante en parallèle avec R_b par son propre équivalent de Thévenin : une source de tension dépendante en série avec R_b (Fig. 3.30).

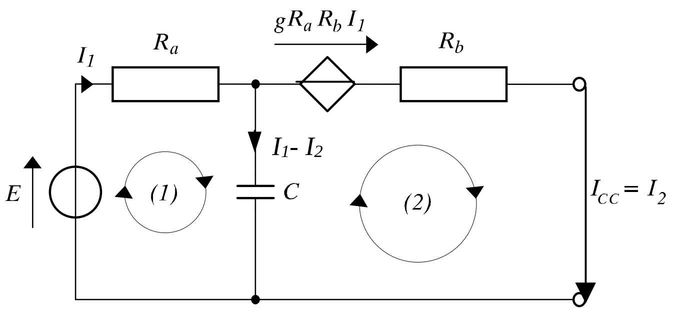


Fig. 3.30 Calcul du courant de court-circuit

On choisit enfin des sens arbitraires pour les branches du circuit résultant, et on écrit les lemmes de Kirchhoff sur les tensions pour les deux mailles[7]. Il vient facilement :

$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_a + 1/Cp & -1/Cp \\ -1/Cp - gR_aR_b & R_b + 1/Cp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$I_{cc} = I_2 = E(gR_aR_b + 1/Cp)/\Delta$$

$$\Delta = R_aR_b + (R_a + R_b)/Cp - gR_aR_b/Cp$$

- Impédance

L'impédance ***Z*** peut être calculée à partir de la Fig. 3.31, où on a annulé la source de tension indépendante, et placé une source de tension *E* sur l'accès *22'* :

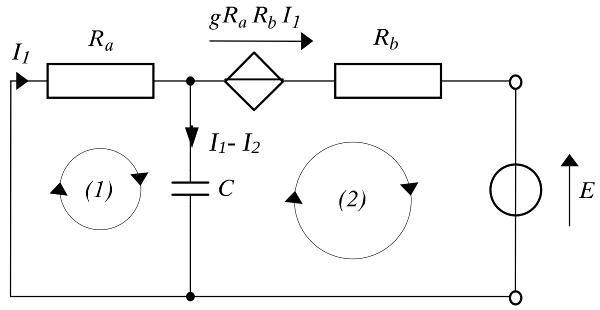


Fig. 3.31 Calcul de l'impédance de Thévenin

On écrit à nouveau les deux lemmes de Kirchhoff pour les mailles:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_a + 1/Cp & -1/Cp \\ -1/Cp - gR_aR_b & R_b + 1/Cp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

et il vient :

$$Z = E/(-I_2) = \Delta/(R_a + 1/Cp)$$

On dispose aussi de tous les éléments pour le dipôle équivalent de Thévenin et pour celui de Norton. On peut vérifier que l'on a bien $U_{10} = I_{cc}Z$.

3.9 Circuits non-linéaires et / ou Circuits non-autonomes

3.9.1 Circuit équivalent « en petits signaux »

Considérons maintenant un circuit comportant un ou plusieurs éléments non-linéaires, c'est-à-dire des éléments dont la valeur dépend de la tension à leurs bornes ou du courant qui les traverse.

Limitons nous dans un premier temps aux résistances non-linéaires, dont la caractéristique courant-tension est une fonction non-linéaire (voir exemple Fig. 3.32.b). Il est clair que le passage analytique de la caractéristique temporelle de ces éléments à leur caractéristique opérationnelle est impossible.

Dans le cas (très courant en pratique) où les courants et tensions aux bornes des éléments non linéaires ne varient que peu autour d'une valeur moyenne (appelée

[7] Pour aller plus vite, on a déjà tenu compte du lemme de Kirchhoff sur les courants lors de l'assignation de courants sur les branches de la Fig. 3.30.

point de repos), il est toujours possible de *linéariser* la caractéristique $u=f(i)$ des éléments non linéaires autour du point de repos $u_0=f(i_0)$. Le développement en série de Taylor de u par rapport à i autour du courant de repos i_0 conduit en effet à :

$$u = f(i) = f(i_0) + \left.\frac{\delta f}{\delta i}\right|_{i=i_0} di \tag{3.16}$$

$\left.\frac{\delta f}{\delta i}\right|_{i=i_0}$ qui n'est rien d'autre que la tangente à la courbe au point de repos, représente une résistance R_e qui correspond au fonctionnement *à petits signaux* (*di* petit). Cet équivalent dépend toujours du point de repos choisi.

On peut en effet écrire :

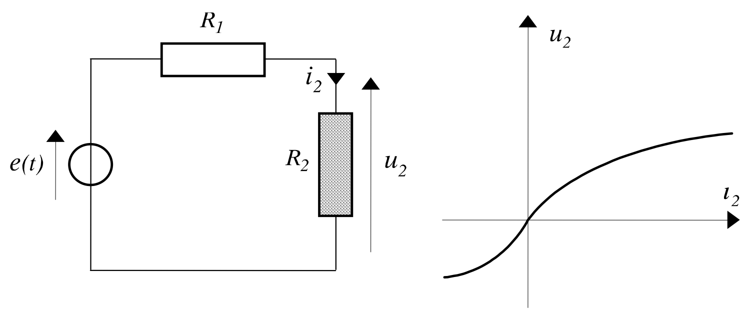
$$\begin{aligned} u_0 + du &= f(i_0) + R_e di \\ du &= R_e di \end{aligned} \tag{3.17}$$

La démarche complète est alors la suivante :

- Calcul du point de repos : ce problème est fortement non linéaire. Il ne peut le plus souvent être résolu que par approximation. Il est cependant facilité par le fait que, en continu, les capacités sont équivalentes à des circuits ouverts et les inductances à des court-circuits.
- Remplacement des éléments non-linéaires par leurs équivalents petits signaux (dépendant du point de repos)
- Analyse du circuit linéaire ainsi obtenu. Les résultats obtenus donnent les variations des courants et tensions dans le circuit autour de leurs valeurs au point de repos.

Exemple 3.10

Le circuit de la Fig. 3.32.a comporte une résistance non-linéaire R_2 dont la caractéristique courant–tension est donnée à la Fig. 3.32.b.



(a) (b)

Fig. 3.32 a : Circuit non linéaire ; b : Caractéristique *(u,i)* de la résistance R_2

Les lemmes de Kirchhoff restent évidemment d'application :

$$e(t) = R_1 i_2(t) + R_2\big(i_2(t)\big)\, i_2(t) \tag{3.18}$$

Mais le passage à la transformée de Laplace est impossible :

$$E(p) = R_1 I_2(p) + i_2(t) \int_{0_-}^{+\infty} R_2\left(i_2(t)\right) i_2(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, dt \quad ??? \tag{3.19}$$

Dans ce cas simple, on obtient le point de repos graphiquement (Fig. 3.33)[8]. Si on ne considère que la valeur moyenne e_0 de $e(t)$, la caractéristique courant-tension du circuit constitué de la source et de R_1 est une droite d'équation :

$$u_2(t) = e(t) - R_1 i_2(t) \tag{3.20}$$

Le point de repos est l'intersection de cette droite avec la caractéristique courant tension de R_2 . R_{eq} est donné par la tangeante à $u_2=R_2(i_2)$ au droit de (u_0,i_0).

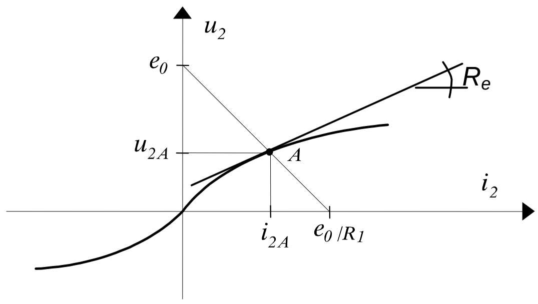


Fig. 3.33 Point de repos (A), résistance équivalente petits signaux

On a bien :

$$\begin{aligned} e_0 + de &= R_1(i_0 + di_2) + f(i_0) + R_e di_2 \\ de &= R_1 di_2 + R_e di_2 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ce qui conduit au circuit équivalent à petits signaux de la Fig. 3.34.

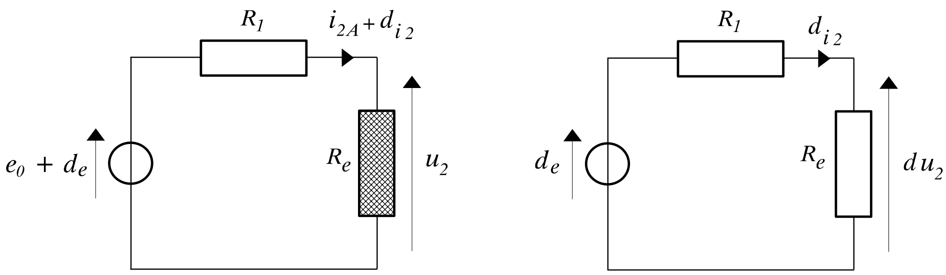


Fig. 3.34 Circuit équivalent à petits signaux

Un raisonnement semblable peut-être conduit pour une capacité non linéaire définie par sa courbe $q = f(u)$ et pour une inductance non linéaire définie par $\Phi = f(i)$.

---

8 Par ordinateur, on l'obtiendrait par itérations successives : on poserait arbitrairement un point de repos A_0 et on remplacerait l'élément non linéaire par son équivalent petits signaux en ce point A_0. On résoudrait ensuite le circuit de façon classique, et on trouverait une nouvelle valeur A_1 du point de repos. On actualiserait l'équivalent petits signaux, et ainsi de suite...

3.9.2 Circuits en fonctionnement fortement non-linéaire ou à composants non-autonomes

Lorsque l'hypothèse « petits signaux » ne peut pas être faite (c'est-à-dire lorsque le circuit fonctionne en mode fortement non-linéaire, ou lorsqu'il comporte des éléments non autonomes), il reste deux solutions :

- Résoudre le système d'équations intégro-différentielles non linéaires, lorsqu'il n'est pas trop compliqué ;
- Opter pour une résolution numérique itérative :
  - Partir d'un *point de fonctionnement* A_0 connu (qui n'est *pas* un point de repos*)* des éléments non linéaires (typiquement, l'état en $t=0_-$);
  - Remplacer l'élément non linéaire par la valeur qu'il prend en ce point A_0 (cette valeur n'est *pas* une valeur incrémentale correspondant à la tangeante de la caractéristique de l'élément non linéaire, mais bien la valeur) ;
  - Effectuer un pas d'intégration des équations (avec une des méthodes classiques de résolution numérique d'équations intégro-différentielles, par exemple Runge-Kutta) ;
  - Pour le nouveau point de fonctionnement A_1, actualiser la valeur de l'élément, et ainsi de suite jusqu'à ce que le point de fonctionnement n'évolue plus (ou, si le circuit est excité par des sources périodiques, jusqu'à ce que le point de fonctionnement se répète).

Exemple 3.11

Le circuit de la Fig. 3.35 comporte une capacité linéaire et autonome, initialement chargée au temps *0* à la valeur de *1 volt* et d'une résistance *R* non linéaire et autonome caractérisée par $i_R = u_R^2$. On demande l'évolution de la tension aux bornes de la résistance.

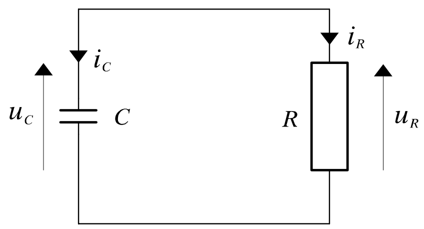


Fig. 3.35 Circuit en fonctionnement fortement non linéaire

$$
\begin{aligned}
&C du_C / dt = -i_R = -u_R^2 \\
&u_C = u_R \quad u_C(0) = 1 \\
&du_R / u_R^2 = -dt \qquad\qquad (3.22) \\
&\int_1^{u_R(t)} du_R / u_R^2 = -\int_0^t (1) dt
\end{aligned}
$$

$$-1/u_R(t)\ +\ 1\ =\ -t$$
$$u_R(t)=1/(1+t)\varepsilon(t)$$

Exemple 3.12

On demande l'évolution de la tension aux bornes de la résistance du circuit de la Fig. 3.35, si on suppose qu'elle est linéaire mais non autonome, de valeur *(1+0.5cost)*$^{-1}\Omega$

$$\begin{aligned} & i_C = -i_R \\ & Cdu_C / dt = -u_R(1+0,5\cos t) \\ & u_C = u_R \qquad u_C(0)\ =\ 1 \\ & du_R / u_R = -(1+0,5\cos t) \\ & \int_1^{u_R(t)} du_R / u_R = -\int_0^t (1+0.5\cos t)dt \\ & \ln u_R(t) - \ln 1 = \ -t - 0,5\sin t \\ & u_R(t) = \exp(-t - 0,5\ \sin t)\varepsilon(t) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Exemple 3.13

Soit le circuit de la Fig. 3.36.a constitué d'une capacité linéaire et autonome initialement chargée à u_0 et d'une résistance non linéaire et autonome *(diode tunnel)* dont la caractéristique est dessinée à la Fig. 3.36b.

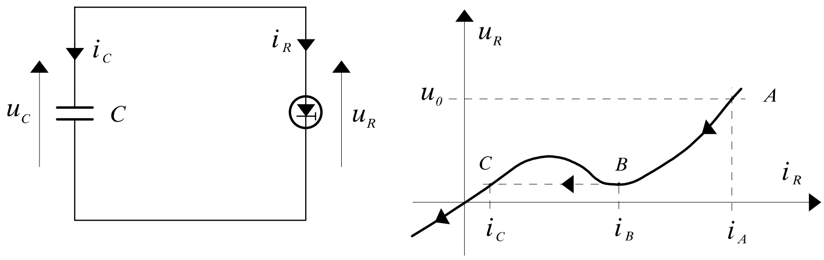


Fig. 3.36 Circuit en fonctionnement fortement non linéaire (diode à effet tunnel)

Il vient :

$$\begin{aligned} & Cdu_R / dt = -i_R \\ & u_R = f(i_R) \end{aligned} \tag{3.24}$$

On procède par itérations successives. On d'ailleurs deviner l'allure du courant et de la tension au cours du temps : supposons en *t=0* le point de fonctionnement A, correspondant à la tension initiale u_0; au fur et à mesure de l'écoulement du temps, la capacité se décharge et le point de fonctionnement évolue sur la courbe jusqu'en *B*. A ce moment, un problème se présente: si on continue à évoluer sur la courbe, la tension augmente alors que le courant diminue tout en restant positif; ce fonctionnement est en contradiction avec l'équation de fonctionnement du circuit (dérivée positive et courant positif). Par conséquent, arrivé en *B*, le point de fonctionnement doit passer directement en *C,* c'est le phénomène de saut du courant, qui s'observe sur la courbe de la Fig. 3.37.

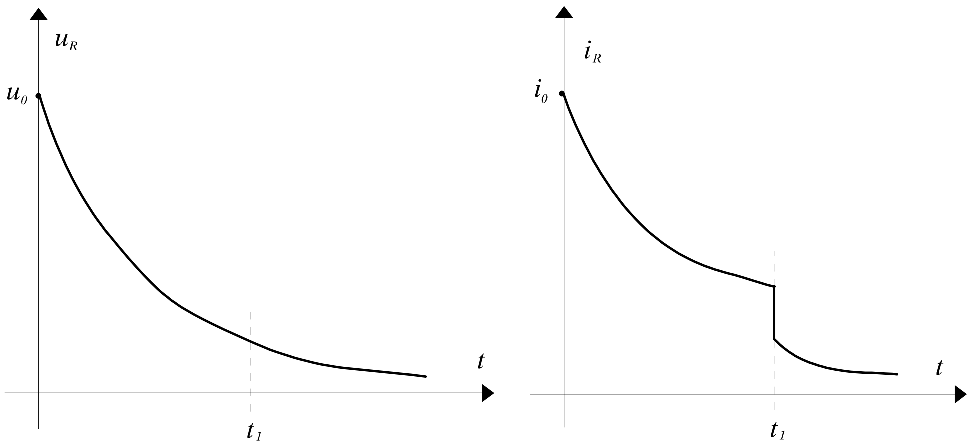


Fig. 3.37 Evolution des variables en fonction du temps

Exercices

Exercice 3.1

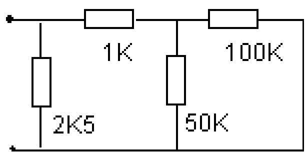
Quel est l'élément équivalent à deux résistances en série, en parallèle? Même question pour deux inductances et deux capacités. En supposant que les valeurs des résistances soient $1000\,\Omega$ et $1\,\Omega$, calculer la valeur résultante. Même opération avec des inductances et des capacités dont la valeur sont dans le rapport de 1 à 1000.

Exercice 3.2

Calculer la résistance *(l'inductance, la capacité)* équivalente à *n* résistances *(inductances, capacités)* mises en série *(en parallèle)*. Que devient le résultat lorsque les n éléments considérés ont la même valeur?

Exercice 3.3

Déterminez analytiquement et numériquement la résistance équivalente au dipôle suivant :

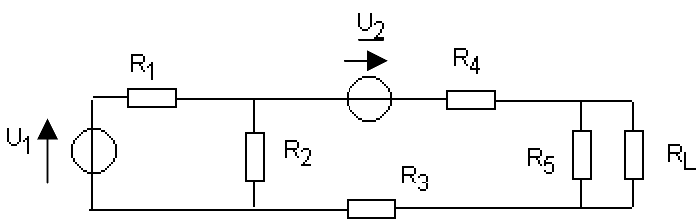


Solution

R_{eq}=2.33 kΩ

Exercice 3.4

Reprendre le circuit de l'exemple 1.7 en appliquant le principe de superposition, et représenter graphiquement le courant et la tension sur la résistance de charge :



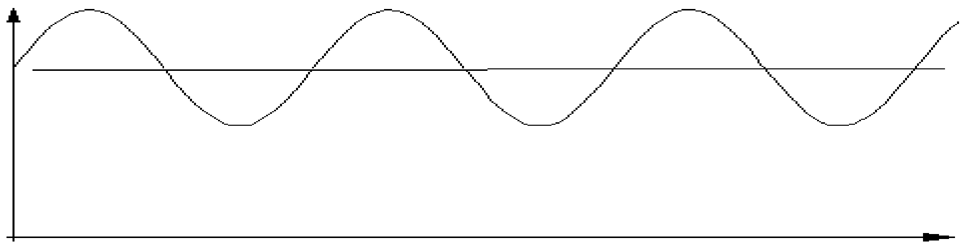
R_1 à R_5 : 10K ; R_L = 1K

U_1 : source continue 10V

U_2 : source sinusoïdale amplitude 5V , fréquence 100Hz

Solution

Pour analyser la contribution de la première source, il suffit de court-circuiter la seconde. On obtient un niveau continu $U_{DC}(U_1\ R_{1..5}\ R_l)$. Pour analyser la contribution de la seconde source il convient de court-circuiter la première. On obtient un niveau alternatif $U_{AC}(U_2\ R_{1..5}\ R_l)$. Le principe de superposition valable pour les systèmes linéaires nous permet d'obtenir la tension U_l par sommation de U_{DC} et de U_{AC} .



Exercice 3.5

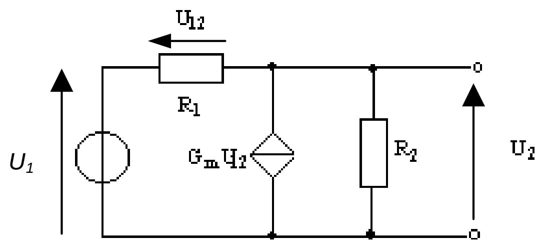
Démontrer les relations (3.8).

Exercice 3.6

Démontrer les relations (3.9).

Exercice 3.7

Déterminer l'équivalent de Thévenin du circuit ci-dessous :



U1 = 15 V ; R1 = 100Ω; R2 = 50Ω; Gm = 10-2 Ω^{-1}

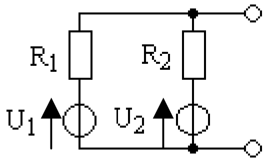
Solution

$$U_{20} = U_1 \frac{G_m + \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + G_m} \qquad R_0 = \frac{1}{G_m + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Exercice 3.8

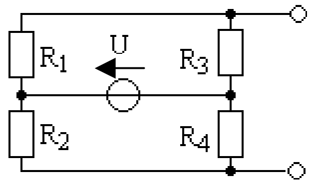
Déterminer les équivalents de Thévenin et Norton des circuits suivants :

a)



U_1 = 5 V
U_2 = 2 V
R_1 = 1 kΩ
R_2 = 5.6 kΩ

b)



U = 10 V
$R_1 = R_4$ = 100 Ω
$R_2 = R_3$ = 500 Ω

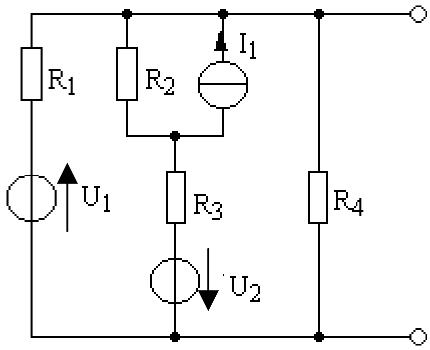
Solution

a) U_{TH} = 4.55 V, I_N = 5.36 mA, $R_{TH} = R_N$ = 848 Ω

b) U_{TH} = 6.67 V, I_N = 40 mA, $R_{TH} = R_N$ = 167 Ω

Exercice 3.9

Déterminer le circuit équivalent de Norton du circuit ci-dessous :



U_1 = 5 V U_2 = 7 V I_1 = 12 mA
R_1 = 1 kΩ $R_2 = R_3 = R_4 = 2 \cdot R_1$

Solution

$$R_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3+R_2}} = 571\ \Omega \qquad I_0 = \frac{U_1}{R_1}+\frac{I_1 R_2 - U_2}{R_2+R_3} = 9.3\text{mA}$$