

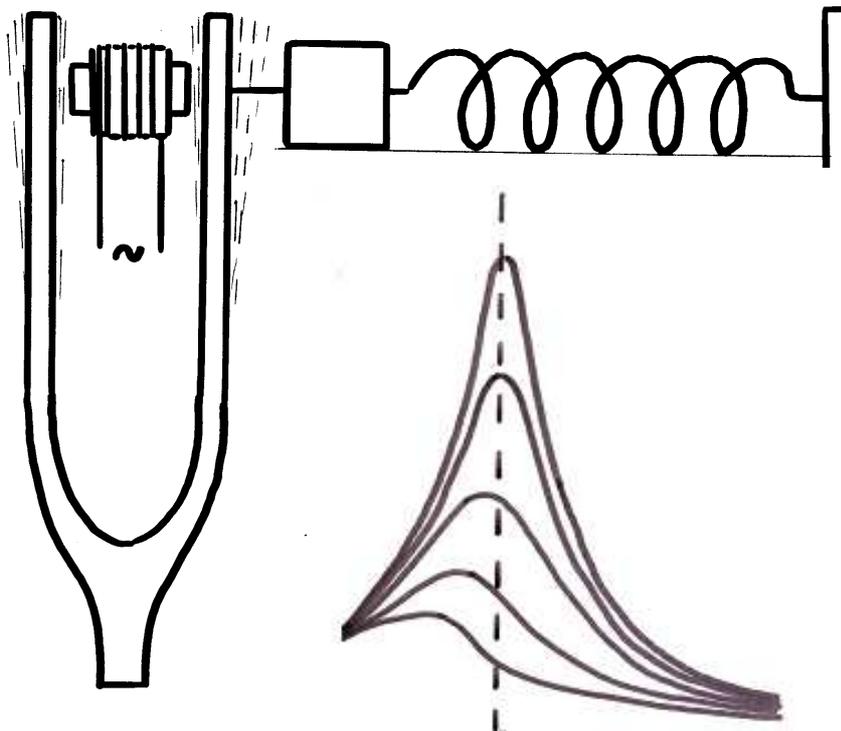
## PHR 101

### "Principes et outils pour l'analyse et la mesure"

---

## Chapitre 4

### *Oscillations forcées et résonance*



## 4. Oscillations forcées et résonance

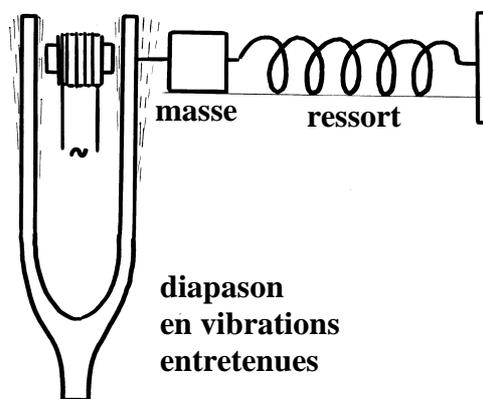
### 4.1. Oscillations mécaniques forcées sur un système non amorti

Dans le chapitre précédent, nous avons simplement comprimé l'ensemble ressort-masse puis laissé le système osciller librement. Il s'agissait d'une excitation "statique" si on peut dire qui déterminait les conditions initiales du mouvement.

Nous allons maintenant considérer une **excitation permanente** et l'oscillateur fournira une réponse de régime permanent précédée d'une réponse transitoire que nous n'étudierons pas ici.

Nous allons considérer que l'oscillateur constitué de l'ensemble masse-ressort subie une **excitation sinusoïdale** liée à un dispositif extérieur comme, par exemple, celui représenté sur la figure n°36 : on est dans le cas d'un oscillateur mécanique en **vibrations forcées**.

Ce phénomène d'oscillations forcées est d'une grande importance dans la pratique et intervient sur tous les types d'oscillateurs : mécaniques, acoustiques, électriques, optiques, etc. Les ondes électromagnétiques captées par une antenne mettent en oscillation forcée le circuit électronique de notre téléphone portable ou de notre récepteur de télévision.



*Figure 36 : Le diapason est mis en vibrations entretenues grâce à un bobinage électrique dans lequel circule un courant alternatif. Ceci permet d'appliquer une force sinusoïdale horizontale à la masse reliée au ressort.*

Le phénomène d'oscillations mécaniques forcées que nous détaillons ici reprend le montage du chapitre précédent à savoir un ensemble masse-ressort horizontal non amorti mais, comme l'indique le schéma de la figure n° 36, la masse est reliée à un diapason entretenu électriquement. Grâce à ce montage, on peut appliquer à la masse une force  $\vec{F}$  horizontale d'amplitude  $\vec{F}_0$  et de pulsation  $\omega(\text{rd} \cdot \text{s}^{-1})$ .

Cette force  $\vec{F}$  d'excitation sinusoïdale a pour expression

$$\vec{F} = \vec{F}_0 \sin \omega t \quad (95)$$

Ainsi dans le bilan des forces appliquée à la masse  $m$  on a maintenant deux forces :

– force de rappel du ressort

$$- K \vec{x}$$

– force sinusoïdale

$$\vec{F}_0 \sin \omega t$$

L'application de la seconde loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique) : "la somme des forces appliquées est égale au produit de la masse par l'accélération" permet d'écrire la relation : (on travaille en projection sur l'axe horizontal  $\vec{ox}$  car on a un mouvement rectiligne).

$$- Kx + F_0 \sin \omega t = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (96)$$

Ceci est l'équation typique d'un mouvement oscillatoire "forcé". On peut la réécrire sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (97)$$

avec

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (98)$$

en se rappelant que  $\omega_0 = 2\pi f_0$  est la fréquence propre de l'oscillateur libre non amorti.

L'équation différentielle (97) a le même premier membre que celle décrivant le mouvement de l'oscillateur libre non amorti (voir relation (73)).

Nous pouvons la résoudre par des techniques classiques mais intuitivement, il est assez naturel d'imaginer que la masse va être obligée d'osciller à la pulsation  $\omega$  de la force appliquée, c'est pourquoi nous allons essayer, comme solution de (96) l'expression :

$$x = A \sin (\omega t + \varphi) \quad (99)$$

Le choix de cette solution revient à dire qu'il y a **synchronisation** entre **l'excitateur** et **l'oscillateur**.

Dans les annexe 3 et 4, nous proposons deux "techniques" pour trouver l'amplitude  $A$  et la phase  $\varphi$  telles qu'elles apparaissent dans (99). L'une consiste à conserver la notation

trigonométrique et à remplacer dans l'équation différentielle (97) puis à égaliser les coefficients de  $\sin \omega t$  et  $\cos \omega t$ , respectivement, des deux cotés de l'équation.

L'autre méthode décrite dans l'annexe 4 utilise la notation imaginaire.

Grâce à l'une ou l'autre de ces méthodes, on aboutit à une phase  $\varphi = 0$  et à une amplitude  $A$

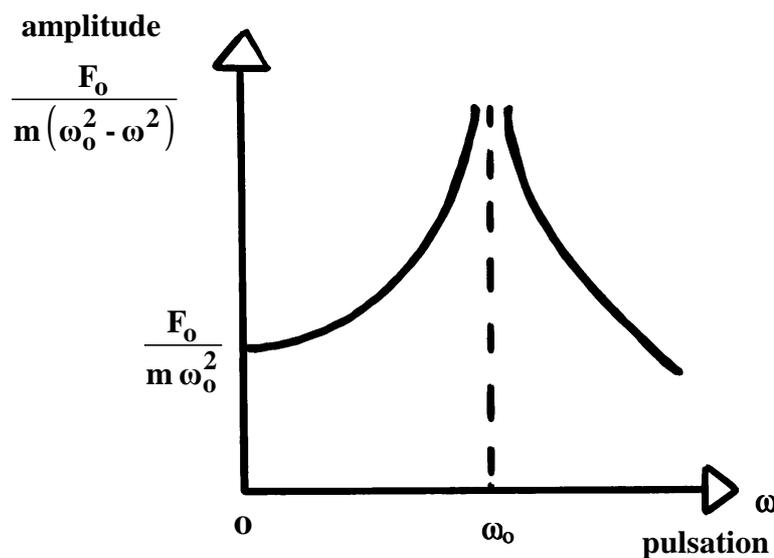
égale à  $\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$  d'où la position  $x$  de la masse en oscillation forcée en fonction du

temps

$$x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t \quad (100)$$

On remarque que la phase initiale ne dépend pas de la pulsation  $\omega$  de la force d'excitation par contre, ce n'est pas le cas de l'amplitude du mouvement.

La figure 37 représente l'allure de la variation de l'amplitude en fonction de  $\omega$ . On note que cette amplitude présente un comportement asymptotique vers une valeur très grande autour de la fréquence  $\omega_0$ .



*Figure 37 : Allure de la variation de l'amplitude d'un oscillateur amorti en oscillation forcée en fonction de la pulsation de la force sinusoïdale appliquée.*

Lorsque la fréquence  $\omega$  de la force appliquée par **l'excitateur** (ici le diapason électriquement entretenu) est égale à la fréquence propre  $\omega_0$  de **l'oscillateur**, on dit qu'il y a une **résonance d'amplitude**. Dans ce cas, sans amortissement cette résonance d'amplitude est infinie, ce qui indique que ce cas ne doit pas être très réaliste. En effet, dans tout système oscillant réel il existe toujours des forces de frottement qui dissipent de l'énergie.

## 4.2. Oscillations forcées d'un système avec amortissement

### 4.2.1. Etude de la dynamique du mouvement

Dans beaucoup d'applications, les forces d'amortissement sont proportionnelles à la vitesse du mobile comme c'est le cas pour les phénomènes de viscosité. Nous considérons que cette force de frottement proportionnelle à la vitesse est produite par un amortisseur constitué d'un cylindre contenant un piston baignant dans l'huile et relié à la masse comme l'indique la figure 38.

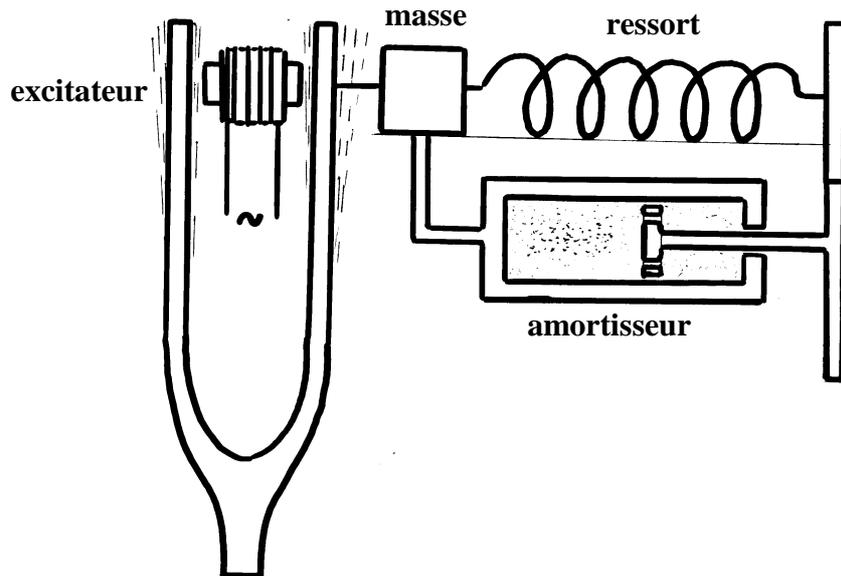


Figure 38 : mise en vibrations forcées d'un ensemble mécanique masse-ressort-amortisseur

Le bilan des forces est :

– force de rappel du ressort

$$-K\vec{x}$$

– force sinusoïdale de mise en oscillation forcée (excitateur)

$$\vec{F}_0 \sin \omega t$$

– force d'amortissement proportionnelle à la vitesse (le terme  $a$  est souvent appelé "coefficient d'amortissement")

$$-a \vec{v} \quad (a > 0)$$

On remarque que tous ces vecteurs forces sont horizontaux, c'est pourquoi nous allons, à partir de maintenant, considérer uniquement leur projection algébrique sur un axe horizontal et finalement la seconde loi de Newton appliquée à la masse  $m$  en projection donne :

$$-Kx + F_0 \sin \omega t - a \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (101)$$

ce que l'on peut écrire encore en divisant par  $m$  et en tenant compte de  $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$  :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (102)$$

Comme dans le cas de l'oscillation forcée sans amortissement nous résolvons de façon "intuitive" cette équation différentielle du second ordre à coefficient constant en supposant une solution sinusoïdale pour le déplacement de la masse :

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (103)$$

Ce qui revient à dire, là encore, qu'il y a **synchronisation** entre l'**excitateur** et l'**oscillateur** (masse-ressort-amortisseur). La masse sera obligée d'osciller avec la pulsation  $\omega$  de la force appliquée. On remarque aussi que  $\varphi$  représente la phase de l'élongation de la masse par rapport à la valeur de la force d'excitation  $F_0 \sin \omega t$  au même instant.

La solution de la relation (102) peut être trouvée par la méthode trigonométrique, mais, à titre d'exemple, nous allons montrer comment les calculs sont simplifiés par l'emploi de quantités complexes.

La solution  $x = A \sin(\omega t + \varphi)$  est la partie imaginaire de l'élongation complexe :

$$\chi = A e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (104)$$

La force est la partie imaginaire de :

$$\llcorner = F_0 e^{j\omega t} \quad (105)$$

L'équation différentielle de l'élongation complexe s'écrit :

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + \frac{a}{m} \frac{d\chi}{dt} + \omega_0^2 \chi = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} \quad (106)$$

soit :

$$A \left[ -\omega^2 + j \frac{a\omega}{m} + \omega_0^2 \right] e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} \quad (107)$$

en divisant par  $e^{j\omega t}$  on obtient :

$$A \left[ \omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{a\omega}{m} \right] e^{j\varphi} = \frac{F_0}{m} \quad (108)$$

conformément à ce que nous avons vu lors des rappels de mathématique sur les nombres complexes on peut écrire la relation précédente sous la forme :

$$A e^{j\varphi} = A (\cos\varphi + j \sin\varphi) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{a\omega}{m}} \quad (109)$$

#### 4.2.2. Etude de l'amplitude de la masse

Nous allons multiplier le numérateur et le dénominateur du deuxième membre de l'égalité (109) par le nombre complexe conjugué du dénominateur  $\omega_0^2 - \omega^2 - j \frac{a\omega}{m}$  ; ce qui donne :

$$A (\cos\varphi + j \sin\varphi) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - j \frac{a\omega}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{a\omega}{m}\right)^2} \quad (110)$$

dans le membre de droite, on voit apparaître un nombre complexe dont le module donne l'amplitude A du mouvement :

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{a\omega}{m}\right)^2}} \quad (111)$$

L'amplitude passe par un maximum lorsque la fréquence excitatrice est telle que le dénominateur de l'expression (111) est minimum.

$$\frac{d}{d\omega} \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{a}{m}\right)^2 \omega^2 \right] = 4\omega (\omega^2 - \omega_0^2) + 2 \left(\frac{a}{m}\right)^2 \omega = 0 \quad (112)$$

ce qui donne un maximum à une fréquence excitatrice  $\omega_n$  égale à

$$\omega_m^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{m}\right)^2 \quad (113)$$

quand la fréquence excitatrice est égale à  $\omega_m$  on dit que l'oscillateur entre en **résonance grâce à la force excitatrice**.

On remarque que la fréquence de résonance  $\omega_m$  dépend du coefficient d'amortissement, à fort coefficient  $a$  on observe un décalage vers les basses fréquences de la **résonance** au contraire, quand l'oscillateur est faiblement amorti on a une fréquence de résonance proche de  $\omega_0$  et une amplitude A du mouvement importante, c'est "**le pic de résonance**" tel qu'il apparaît sur la figure n°39 qui représente la variation de l'amplitude A du mouvement en fonction de la pulsation  $\omega$  pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement  $a$

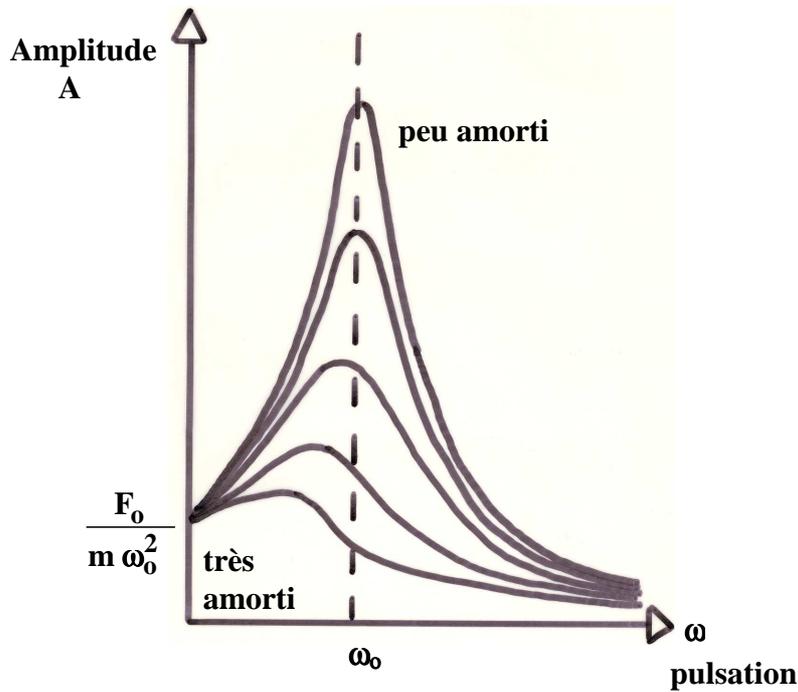


Figure 39 : variation de l'amplitude  $A$  des oscillations forcées en fonction de la pulsation  $\omega$  de la force excitatrice pour différents régimes d'amortissement. A mesure que l'amortissement s'affaiblit, l'amplitude du mouvement devient de plus en plus grande et le maximum d'amplitude a lieu pour  $\omega \cong \omega_0$ .

On montre que la forme de la courbe de résonance ne dépend en fait que du facteur

$$Q = \frac{m}{a} \omega_0 \quad (114)$$

On peut d'ailleurs réécrire l'expression (111) sous une forme où n'interviennent que  $Q$  et la variable sans dimension  $\omega/\omega_0$ .

$$A = \frac{F_0}{m \omega_0^2} \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right]^{1/2} \quad (115)$$

#### 4.2.3. Etude de la phase de l'élongation de la masse par rapport à la force d'excitation

Cette étude est assez délicate et le plus simple est de reprendre la relation (108) sous la forme

$$A \left( \omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{a\omega}{m} \right) e^{j\varphi} = \frac{F_0}{m} \quad (116)$$

On remarque que le second membre de cette égalité est réel, ce qui impose que le nombre complexe  $\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{a\omega}{m}$  qui apparaît dans le premier membre soit égal à  $e^{-j\varphi}$  ce qui

indique que **la phase de l'amplitude par rapport à la force excitatrice doit être négative.**

Ceci étant posé l'expression de  $\varphi$  peut être calculée à partir de la relation :

$$e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j \sin(-\varphi) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{a \omega}{m}} \quad (117)$$

ce qui donne :

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{\sin(-\varphi)}{\cos(-\varphi)} = \frac{\frac{a \omega}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (118)$$

d'où pour la phase :

$$\varphi = - \frac{\frac{a \omega}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (119)$$

La figure n°40 représente la variation de cette phase  $\varphi$  en fonction de la fréquence d'excitation. On note par exemple que pour la valeur de  $\omega = \omega_0$  l'amplitude  $x$  est en retard de  $\Pi/2$  par rapport à la force d'excitation.

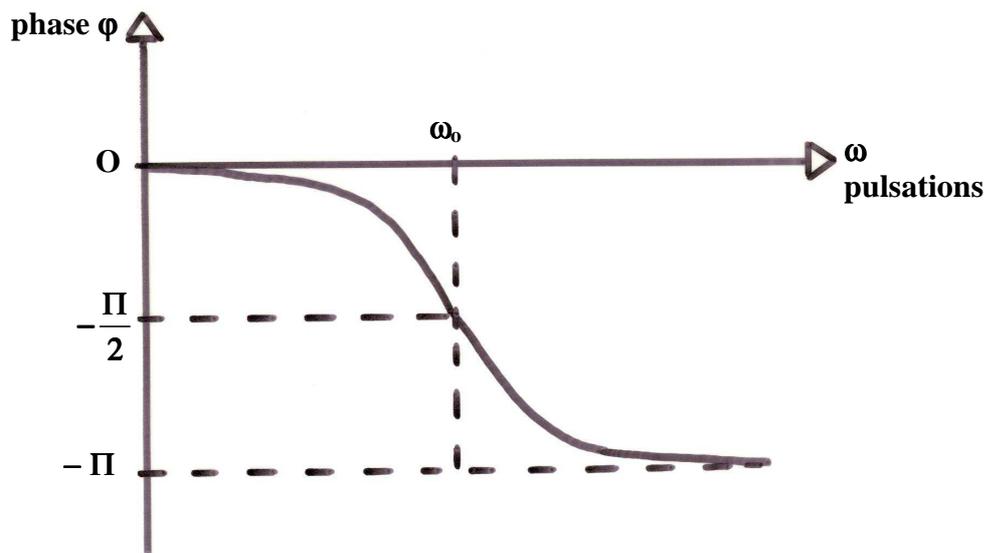


Figure 40 : variation de la phase de l'élongation de la masse en oscillations forcées en fonction de la fréquence d'excitation  $\omega = 2 \Pi f$ .  
 Bien noter que le déplacement est toujours en retard par rapport à la force excitatrice.

#### 4.2.4. Examen détaillé des différents régimes d'oscillations forcées suivant la valeur de la fréquence d'excitation

##### 4.2.4.1. Basse fréquence $\omega \ll \omega_0$

Nous voyons que la phase  $\phi$  du déplacement est presque nulle. On dit que la réponse de l'oscillateur est "en phase" avec l'excitation. L'amplitude est presque complètement contrôlée par la raideur du ressort (force de rappel élastique) comme lorsque le système, soumis à une force constante, est en équilibre statique :

$$A = \frac{F_0}{m \omega_0^2} = \frac{F_0}{K} \quad (120)$$

#### 4.2.4.2. Résonance : $\omega \simeq \omega_0$

La résonance ou maximum d'amplitude se produit lorsque la fréquence excitatrice est très proche de la **fréquence propre** de l'oscillateur. En fait, le maximum correspond à une pulsation un peu plus basse que  $\omega_0$  d'après l'équation (113) mais la différence, du second ordre, est négligeable si l'amortissement est faible.

L'amplitude maximum est Q fois plus grande que le déplacement obtenu à basse fréquence :

$$A = \frac{F_0}{m \omega_0^2} Q \quad (121)$$

Plus l'amortissement de l'oscillateur est faible, plus l'amplitude résonante est importante. Cette "surtension" peut atteindre plusieurs milliers pour un oscillateur mécanique et entraîner la rupture si le système est excité à sa fréquence propre.

Une mésaventure de cet ordre est arrivée à un pont suspendu des environs d'Angers vers 1880. Un tablier de pont suspendu peut avoir deux types d'oscillations : les oscillations de flexion aux périodes de l'ordre de 10 cycles/minute et les oscillations de torsion dont les périodes sont de 15 à 30 cycles/minute. Ce pont suspendu a été mis en résonance par le pas cadencé d'une troupe et est arrivé à une rupture catastrophique. Depuis cette date, les troupes interrompent le pas cadencé pour franchir les ponts – même non suspendus !!

Inversement, il faut exciter un oscillateur à une fréquence égale à sa fréquence propre si on veut obtenir un mouvement de grande amplitude. C'est l'accord que l'on réalise inconsciemment lorsque l'on pousse quelqu'un sur une balançoire (figure 41)

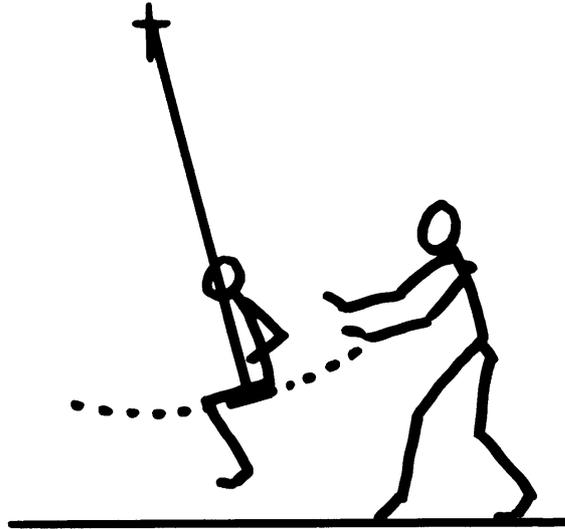


Figure 41 : dans le cas d'une balançoire, l'oscillateur est constitué de la corde, du siège et de la personne assise sur le siège, "l'excitateur" est la personne qui pousse. On est dans le cas d'oscillations forcées. L'amplitude prise par la balançoire est maximale quand la fréquence avec laquelle la personne qui pousse est égale à la fréquence propre de l'ensemble corde-siège-personne assise, dans ce cas on a le phénomène de mise en résonance de l'oscillateur.

#### 4.2.4.3. Haute fréquence : $\omega \gg \omega_0$

L'amplitude est alors contrôlée non plus par la raideur du ressort, mais seulement par l'inertie du système et tend vers 0 lorsque la fréquence excitatrice devient très élevée :

$$A = \frac{F_0}{m \omega^2} \quad (122)$$

tandis que la phase tend vers  $-\pi$  : le déplacement et la force excitatrice sont en opposition de phase. Cela résulte directement de l'équation dynamique simplifiée :

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -m \omega^2 x \quad (123)$$

La discussion que nous venons d'esquisser s'applique naturellement à tout oscillateur harmonique, en faisant correspondre les termes analogues de l'équation dynamique. Par exemple, la réponse d'un circuit électrique oscillant est déterminée à basse fréquence par la capacité tandis que la réponse à haute fréquence est contrôlée par la self-inductance  $L$ , analogue à la masse. Nous reviendrons sur les analogies qui existent entre les oscillateurs mécaniques et électriques.

### 4.3. Application : la modélisation biomécanique du corps humain pour les vibrations.

La figure n°42 représente la **modélisation biomécanique** du corps humain vis à vis des vibrations. On distingue trois ensembles de masses reliées par l'équivalent de ressorts et d'amortisseurs tels que nous venons de les étudier.

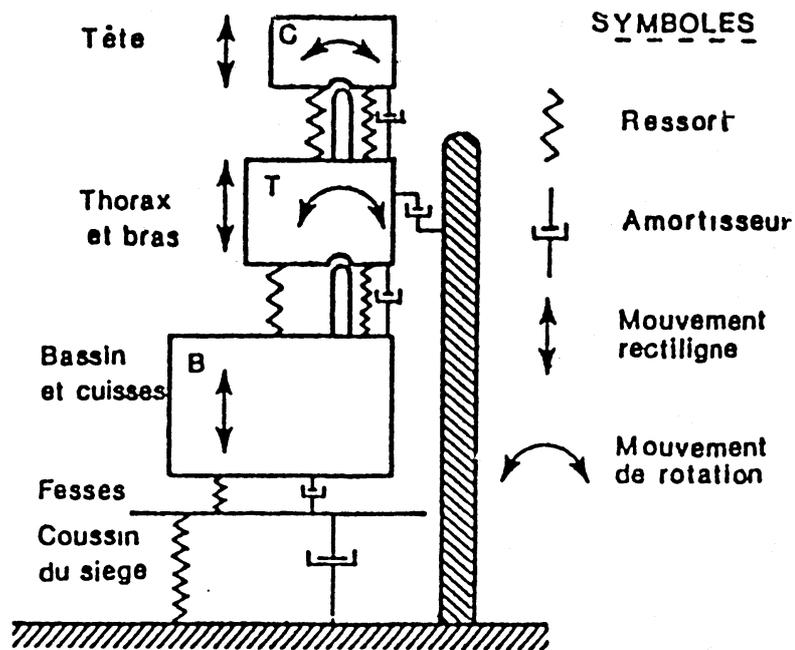


Figure 42 : modèle biomécanique du corps humain

Cet ensemble de masse-ressort-amortisseur présente notamment une fréquence de résonance autour d'une fréquence de 4Hz qui a été observée en médecine du travail comme étant une fréquence correspondant à de nombreux "troubles musculo-squelettiques". (T.M.S.) comme l'indique la figure n° 43.

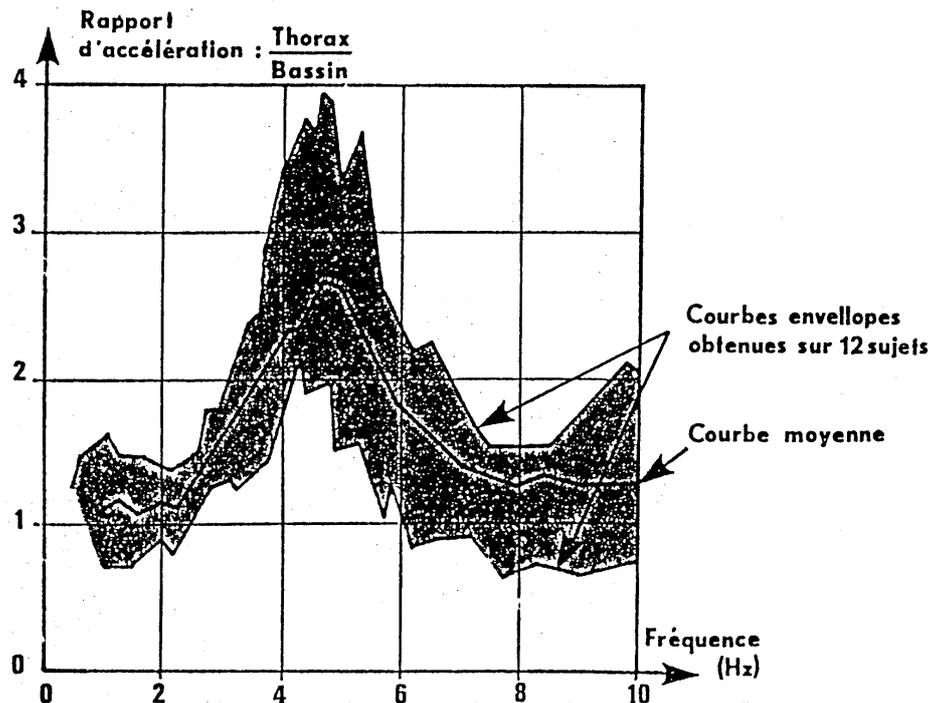


Figure 43 : très schématiquement, on peut dire que le "mal de dos" est directement lié au rapport d'accélération (donc de force) que peut subir la liaison thorax-bassin. Or, si on mesure ce rapport pour un certain nombre de sujets (ici 12) présentant des troubles musculo-squelettiques entre le thorax et le bassin, on s'aperçoit qu'ils ont lieu dans une gamme de fréquence entre 4 et 6 Hz ce qui correspond à une fréquence de résonance de la liaison entre le thorax-bassin.

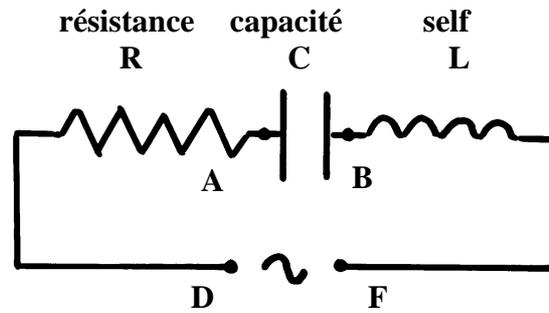
Les phénomènes de résonance d'un ensemble en oscillations forcées ne sont pas limités au domaine de la mécanique mais apparaissent aussi en optique, électricité, etc...

Nous allons d'ailleurs aborder rapidement l'exemple du circuit résistance-self-capacité en série alimentés par une tension alternative de fréquence  $\omega$ .

#### 4.4. Autre exemple de phénomène d'oscillations forcées : le circuit résistance-self-capacité en alternatif :

La figure n°44 représente un circuit constitué des trois composants passifs "de base" de l'électronique à savoir une **résistance**, une **capacité** et une **self** disposés en **série** et "alimentés" par une tension alternative  $V$  de pulsation  $\omega$

$$V = V_0 \sin \omega t \quad (124)$$



$$V_D - V_F = V_o \sin \omega t$$

Figure 44 : circuit R-C-L série raccordé à une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$

Le circuit représenté sur la figure n°44 représente "une maille" et l'on peut écrire que la somme des tensions est nulle :

$$V_D - V_A + V_A - V_B + V_B - V_F + V_F - V_D = 0 \quad (125)$$

si  $i$  désigne l'intensité instantanée du courant alternatif qui parcourt le circuit, la loi d'Ohm nous permet d'écrire que, entre les bornes de la résistance  $R$  (en Ohm), on a :

$$V_D - V_A = R i \quad (126)$$

si  $q$  désigne la charge instantanée du condensateur de capacité  $C$  (en Farad), on a :

$$V_A - V_B = \frac{q}{C} \quad (127)$$

Entre les bornes de la self  $L$  (en Henry) la loi de l'induction appelée loi de Lenz donne :

$$V_B - V_F = L \frac{di}{dt} \quad (128)$$

Finalement la loi des mailles (somme des différences de potentiel nulle) donne

$$\underbrace{V_D - V_A}_{R i} + \underbrace{V_A - V_B}_{q/C} + \underbrace{V_B - V_F}_{L di/dt} = V_D - V_F \quad (129)$$

$$R i + q/C + L di/dt = V_o \sin \omega t \quad (130)$$

A ce stade, il faut choisir entre l'intensité  $i$  ou la charge  $q$  comme variable sachant que l'on a la relation :

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (131)$$

Or, il est beaucoup plus astucieux de choisir  $q$  que  $i$  car le choix de cette dernière nécessiterait une intégration par rapport au temps.

D'où en éliminant  $i$  dans (130) à partir de (131) on a :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_o \sin \omega t \quad (132)$$

A ce stade, il est très intéressant de comparer la relation (132) qui concerne la mise en oscillations forcées d'un circuit R C L et la relation (102) qui concerne la mise en oscillation forcées d'une masse reliée à un ressort et un amortisseur.

En effet, il apparaît une **analogie entre les phénomènes mécaniques et électriques**.

Ecrivons l'une en dessous de l'autre les relations (102) et (132)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + Kx = F_0 \sin \omega t$$

inertie
amortisseur
ressort
force appliquée

(Newton)

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \sin \omega t$$

induction
résistance
capacité
tension appliquée

(self)

A travers ces deux relations on voit que :

- la **masse** en mécanique joue le même rôle que la **self** en électricité : ceci traduit le phénomène d'inertie qui en électricité se traduit par la phrase que l'on prononce toujours à l'occasion de l'étude de la loi de l'autoinduction (loi de lenz) "la f.e.m induite s'oppose à la cause qui lui a donné naissance".
- La force de **frottement** visqueux introduite par **l'amortisseur** correspond en électricité à la résistance électrique, c'est dans les deux cas des phénomènes liés à des pertes d'énergie c'est-à-dire des phénomènes dissipatifs.
- La **force mécanique de rappel** du ressort peut être comparée à la **tension entre les armatures d'un condensateur**. Le condensateur en électricité est l'équivalent de l'élasticité du ressort en mécanique. Dans le paragraphe 3.6.8. du chapitre 3 nous avons d'ailleurs vu que l'on pouvait faire osciller la charge d'un condensateur en le mettant dans un circuit comportant un self, ce circuit a pour équivalent en mécanique une masse liée à un ressort (figure 45)

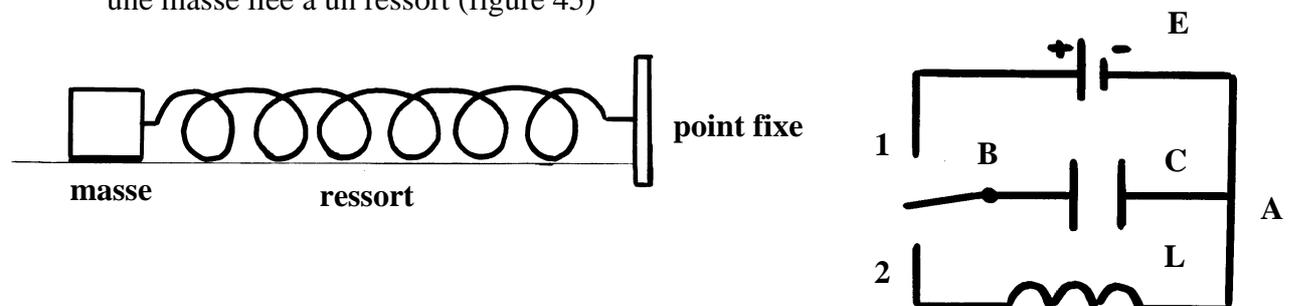


Figure 45 : la masse reliée à un ressort sans frottement a pour équivalent électrique la bobine de self L (rôle de la masse) reliée à un condensateur de capacité C (rôle du ressort).

Après cette remarque très importante concernant les **analogies entre les phénomènes mécaniques et électriques**, nous proposons de traiter sous forme d'un exercice l'évolution de la charge  $q$  dans un circuit  $R L C$  série en oscillation forcée. Nous allons partir de la relation (132) et, pas à pas, nous allons reprendre dans le cas électrique la méthode que nous avons déjà utilisée dans le cas de l'oscillateur mécanique en oscillations forcées.

#### **4.5. Etude de la charge électrique dans un circuit $R L C$ en régime alternatif.**

On considère l'équation différentielle du second ordre avec second membre telle qu'elle apparaît dans le cours (relation (132))

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_o \sin \omega t \quad (133)$$

1°) on rappelle que la pulsation caractéristique  $\omega_o$  d'un oscillateur électrique constitué d'une capacité  $C$  en parallèle avec une self  $L$  est donnée par :

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} \quad (134)$$

utiliser cette relation pour éliminer la capacité  $C$  dans l'équation différentielle (124)

2°) En partant d'une solution du type :

$$q = q_o \sin(\omega t + \varphi) \quad (135)$$

et en utilisant la méthode des imaginaires, déterminer l'amplitude  $q_o$  de la charge et le déphasage  $\varphi$  de cette charge par rapport à la tension appliquée.

3°) tracer l'allure de la variation de  $q_o$  et  $\varphi$  en fonction de  $\omega$ .

### ANNEXE 3

En remplaçant

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

et 
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

dans l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

on obtient

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

en utilisant l'identité trigonométrique (voir formulaire)

$$\sin(\omega t + \varphi) = (\sin \omega t) \cdot \cos \varphi + (\cos \omega t) \cdot \sin \varphi$$

on obtient finalement

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) (\cos \varphi) \sin \omega t + A(\omega_0^2 - \omega^2) (\sin \varphi) \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

cette égalité sera vérifiée à tout instant  $t$  si on identifie de chaque côté de l'égalité les coefficients de  $\sin \omega t$  et  $\cos \omega t$  :

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi = \frac{F_0}{m}$$

et 
$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi = 0$$

pour  $\omega \neq \omega_0$  on a :

$$\sin \varphi = 0 \quad \text{d'où} \quad \varphi = 0$$

et pour l'amplitude

et 
$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

## ANNEXE 4

En remplaçant

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad F_0 \sin \omega t$$

par leur représentation imaginaire

$$X = A e^{j\varphi} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad F_0 e^{j\omega t}$$

et en tenant compte de cette nouvelle forme de solution dans la relation

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_0^2 X = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

on aboutit à

$$A \omega^2 \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} + A \omega_0^2 e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

le terme  $e^{j\omega t}$  disparaît et il reste

$$A (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot e^{j\varphi} = \frac{F_0}{m}$$

égalité qui est vérifiée pour une phase nulle  $\varphi = 0$

et une amplitude égale à

$$A = \frac{F_0}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}$$